А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД



Москва
Международная академическая
издательская компания "Наука"
1998

УДК 523.4852
ББК 22.19
К 60

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 97-02-30049



Научный редактор: академик РАН **Всеволод Сергеевич Авдуевский**

Колесниченко А.В., Маров М.Я.
Турбулентность многокомпонентных сред. – М.: МАИК "Наука", 1998. – 336 с.: ил.
ISBN 5-7846-0023-0

В монографии дается систематическое изложение современного подхода к инвариантному моделированию развитых турбулентных течений многокомпонентных химически активных газов, применительно к специфике математического моделирования верхних атмосфер планет. Основное внимание уделено проблеме взаимовлияния химической кинетики и турбулентного перемешивания, а также разработке полуэмпирического метода расчета коэффициентов турбулентного обмена в стратифицированных сдвиговых течениях, основанного на использовании эволюционных уравнений переноса для вторых моментов пульсирующих термогидродинамических параметров. Возможности разработанных моделей многокомпонентной турбулентности природных сред продемонстрированы в ряде вычислительных примеров, описывающих процессы кинетики и тепло-массопереноса в верхних атмосферах планет.

ов, работающих в области астрофизики, геофизики, сследований планет Солнечной системы, а также спирантов соответствующих специальностей.

Колесниченко Александр Владимирович
Маров Михаил Яковлевич
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Корректор *В.М. Федорина*
Технический редактор *Н.А. Посканная*

ЛР № 090151 от 06.06.96

Подписано к печати 08.12.98. Формат 70 × 100/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл. печ.л. 27,3. Усл.кр.-отт. 27,3. Уч.-изд.л. 28,0. Тираж 1000 экз. Тип. зак. 226

Международная издательская компания "Наука"
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано в типографии "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-7846-0023-0

© Колесниченко А.В., Маров М.Я., 1998
© МАИК "Наука", 1998

Оглавление

	стр
Предисловие	5
ЧАСТЬ I. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД	9
ГЛАВА 1. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИРОДНЫХ СРЕД	10
§ 1.1. Турбулентное движение жидкости. Общие положения	10
§ 1.2. Турбулентность в атмосферах планет	22
§ 1.3. Турбулентность в верхних атмосферах планет	40
§ 1.4. Астрофизические и космогонические модели	53
ГЛАВА 2. РЕГУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ С ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ	68
§ 2.1. Исходные балансовые уравнения и законы сохранения для регулярных движений газовых смесей	69
§ 2.2. Второй закон термодинамики. Скорость возникновения энтропии в газовых смесях	85
§ 2.3. Определяющие соотношения для потоков диффузии и тепла в непрерывных многокомпонентных смесях	92
ГЛАВА 3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕПЛОФИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ	114
§ 3.1. Модельное описание среднего движения турбулентной многокомпонентной смеси с переменной плотностью	115
§ 3.2. Гидродинамические уравнения для турбулентных течений реагирующих газовых смесей	136
§ 3.3. Вывод определяющих соотношений для турбулентных потоков в многокомпонентной среде	148
ГЛАВА 4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ВТОРЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОМЕНТОВ	168
§ 4.1. Общая форма уравнения переноса для парных корреляций в сжимаемом потоке	169
§ 4.2. Уравнения баланса турбулентной энергии в сжимаемой многокомпонентной среде	174
§ 4.3. Прогностические уравнения для корреляций, включающих пульсации энтальпии и состава реагирующей смеси	187

ГЛАВА 5. СООТНОШЕНИЯ СТЕФАНА–МАКСВЕЛЛА И ПОТОК ТЕПЛА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД 209
§ 5.1. Уравнения баланса для осредненной энтропии в турбулентном потоке газовой смеси 210
§ 5.2. Термодинамический вывод определяющих соотношений в многокомпонентных турбулизованных средах 220
§ 5.3. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла для турбулентных смесей 227

ЧАСТЬ II. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ 235

ГЛАВА 6. ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕРМОСФЕРЕ 235
§ 6.1. Диффузионный перенос в многокомпонентной смеси атмосферных газов 237
§ 6.2. Моделирование нижней термосферы Земли 246

ГЛАВА 7. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ 260
§ 7.1. Исходные уравнения и их преобразования 260
§ 7.2. Метеорологическая аппроксимация 264
§ 7.3. Численный расчет коэффициентов турбулентного обмена 268

ГЛАВА 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ФЛУКТУАЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СРЕДЫ 274
§ 8.1. Алгебраические уравнения для моделирования коэффициентов турбулентного переноса 275
§ 8.2. Определение внешнего масштаба турбулентности через структурную характеристику показателя преломления 283
§ 8.3. Определение структурной характеристики показателя преломления методами оптического зондирования атмосферы 294
§ 8.4. Определении структурной характеристики показателя преломления по индексу мерцаний звезд 302

Заключение 312
Список литературы 316

Выдающемуся научному учреждению Российской Академии наук – Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша, с которым неразрывно связана научная судьба авторов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительное расширение представлений об окружающих областях пространства вблизи Земли и далеко за его пределами, обусловленное, в первую очередь, развитием космических исследований, привело к более глубокому проникновению в физическую сущность явлений, происходящих в различных природных средах при разных состояниях составляющей их материи. Это вызвало к жизни создание все более усложняющихся моделей этих сред, чему способствовал громадный прогресс в создании мощных вычислительных комплексов – их архитектуры, производительности и программного обеспечения. На этом пути открываются поистине безграничные возможности, с которыми связаны перспективы постановки и решения сложных многомерных нестационарных задач математической физики и анализа эволюционных процессов на основе проведения широкомасштабных численных экспериментов.

Турбулентность принадлежит к числу очень распространенных и, вместе с тем, наиболее сложных явлений природы, связанных с возникновением и развитием организованных структур (вихрей различного масштаба) при определенных режимах движения жидкости в существенно нелинейной гидродинамической системе. Прямое численное моделирование турбулентных течений сопряжено с большими математическими трудностями, а построение общей теории турбулентности, из-за сложности механизмов взаимодействующих когерентных структур, вряд ли возможно. При потере устойчивости ламинарного течения, определяемой критическим значением числа Рейнольдса, в такой системе возникает трехмерное нестационарное движение, в котором, вследствие растяжения вихрей, создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых границами течения. На условия возникновения завихренности и структуру развитой турбулентности оказывают влияние как физические свойства среды, такие как молекулярная вязкость, с которой связана диссипация энергии в турбулентном потоке, так и условия на границе, где наблюдаются тонкие пограничные вихревые слои, неустойчивость которых проявляется в порождении ими вихревых трубок. Турбулизация приводит к быстрому перемешиванию частиц среды и повышению эффективности переноса импульса, тепла и массы, а в многокомпонентных средах – также способствует ускорению протекания химических реакций. По мере накопления знаний о разнообразных природных объектах, в которых турбулентность играет значительную, а во многих случаях определяющую роль, моделирование этого явления и связанных с ним эффектов приобретает все более важное значение.

В основу данной книги положены исследования авторов по проблемам крупномасштабной развитой турбулентности в многокомпонентных смесях реа-

гирующих газов. К ним привело изучение процессов переноса в верхних атмосферах планет – разреженных газовых оболочках небесных тел, лежащих в пограничных областях между плотными слоями атмосферы и околопланетным космическим пространством. Этот новый раздел знаний, появившийся с началом космических исследований и получивший название аэрономия, лежит на стыке таких фундаментальных научных направлений, как кинетическая теория газов и гидромеханика, химическая кинетика и физика плазмы, планетная астрономия и физика атмосферы, космофизика и электродинамика. Изучение и численное моделирование процессов динамики и тепло- и массопереноса в таких средах, подверженных прямому воздействию солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации, вызывающей многочисленные фотолитические и сопровождающие их химические реакции, составляет предмет теоретической аэрономии (аэрономики).

Составной частью аэрономики является изучение турбулентных движений газовой среды с усложненными характеристиками, при моделировании которой следует учитывать многокомпонентность и сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств, наличие химических реакций и воздействие негравитационных сил. Эти дополнительные эффекты не позволяют, в общем случае, использовать результаты, полученные в рамках традиционного описания течений однородной сжимаемой жидкости (в приближении Буссинеска), применимые в метеорологии. С другой стороны, разработанная полуэмпирическая теория коэффициентов турбулентного обмена для течений в многокомпонентном пограничном слое не может быть в полной мере использована для целей аэрономики, в частности, из-за отсутствия гравитационных эффектов в структуре используемых уравнений. Поэтому, чтобы моделировать подобные среды, необходима разработка новых математических моделей многокомпонентной турбулентности, адекватно описывающих процессы динамики, тепло- и массопереноса и кинетики в химически активном газовом континууме. В силу сложности физико-химической картины турбулентного движения теоретические подходы к решению данной проблемы должны быть по своему характеру “полуэмпирическими”.

Этой проблематике и подчинена предлагаемая читателю монография. Ее основная цель состоит в разработке и обосновании полуэмпирических моделей турбулентности многокомпонентных реагирующих газовых смесей как математической основы описания структуры, динамики и теплового режима тех областей планетной атмосферы, которые формируются под воздействием комплекса аэрономических процессов и турбулентного перемешивания. Сюда относятся: развитие макроскопической теории диффузионных процессов молекулярного переноса в газовых смесях в качестве основы описания тепло- и массопереноса в многокомпонентной среде верхней и средней атмосферы; построение для многокомпонентного реагирующего газового континуума полуэмпирических моделей крупномасштабной турбулентности, позволяющих, в частности, удовлетворительно описывать турбулентный перенос и влияние турбулизации потока на скорости протекания химических реакций; разработка усложненных моделей многокомпонентной турбулентности, включающих, в качестве замыкающих, эволюционные уравнения переноса для одноточечных вторых корреляционных моментов турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров, предназначенных для постановки и решения разнообразных аэрономических задач, в

которых существенны конвективный и диффузионный перенос турбулентности, а также предыстория потока; развитие феноменологического подхода (на основе методов термодинамики необратимых процессов) к проблеме замыкания гидродинамических уравнений среднего движения на уровне моментов первого порядка, дающего возможность получить определяющие (реологические) соотношения - выражения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений в многокомпонентных средах, причем более общие, чем те, которые традиционно выводятся с использованием понятия пути смешения; разработка, в рамках развитых моделей многокомпонентной турбулентности, полуэмпирических методик расчета коэффициентов турбулентного обмена в стратифицированной в поле силы тяжести среде; разработка методики моделирования внешнего масштаба турбулентности в свободной атмосфере по данным оптических измерений флуктуаций показателя преломления среды.

Отличительная особенность проведенных авторами исследований заключается в предложенном феноменологическом подходе к построению теории турбулентности реагирующих газов для определенного класса задач и развитых методах модельного описания турбулизованных смесей с единых позиций механики многокомпонентных сред. Основная направленность этих исследований непосредственно связана с решением ряда сложных аэрономических проблем, включающих в себя вопросы формирования и эволюции планетных атмосфер. Вместе с тем, полученные результаты не ограничиваются аэрономическими приложениями. Они имеют непосредственное отношение к моделированию механизмов, формирующих свойства астрофизических объектов на разных стадиях их эволюции, исследованию проблем звездной и планетной космогонии, включая образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, а также к привлекающим все большее внимание проблемам экологии, связанных с диффузией загрязнений и охраной окружающей среды.

Содержание книги можно условно разделить на две части, в первой из которых (главы 1–5) подробно излагаются методы математического описания турбулентных течений многокомпонентных реагирующих газовых смесей, а во второй (главы 6–8) представлены конкретные примеры численного моделирования аэрономических задач. Первая глава, имеющая вводный характер, содержит некоторые общие положения теории турбулентности и обсуждение вопросов специфики природных сред, в которых многокомпонентная турбулентность играет важную роль. Во второй главе рассмотрена феноменологическая теория тепло- и массопереноса в ламинарной многокомпонентной среде и методами термодинамики необратимых процессов, с учетом принципа взаимности Онзагера, выведены определяющие соотношения для термодинамических потоков диффузии и тепла в многокомпонентной смеси газов. Третья глава посвящена построению модели турбулентности многокомпонентного химически активного газового континуума. С использованием средневзвешенного осреднения Фавра получены дифференциальные уравнения баланса вещества, количества движения и энергии (опорный басис модели) для описания среднего движения турбулентной многокомпонентной смеси реагирующих газов, а также дан вывод реологических соотношений для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений. В четвертой главе развита усложненная модель турбулентности многокомпонентного континуума с переменной плотностью, опирающаяся (в ка-

честве замыкающих) на дифференциальные уравнения переноса для вторых корреляционных моментов турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров. В пятой главе рассмотрен термодинамический подход к моделированию турбулизованных многокомпонентных сред. В последних трех главах, на основе развитых теоретических положений, приведены конкретные примеры аэрономических задач, включающие моделирование диффузионных процессов в термосфере и коэффициентов турбулентного обмена в земной турбопаузе, а также моделирование внешнего масштаба турбулентности в свободной атмосфере по оптическим измерениям флуктуаций показателя преломления воздуха с целью восстановления структурных параметров и динамических характеристик средней атмосферы Земли. Сами эти примеры носят по необходимости ограниченный характер, что обусловлено большой сложностью изучаемых явлений. Вместе с тем, они позволяют составить вполне определенные представления о специфике постановки и методах решения соответствующих модельных задач, отражающих достигнутый уровень в механике многокомпонентных турбулентных сред, и использовать развитые подходы в других актуальных приложениях.

В книгу вошли работы, выполненные нами в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша за последние примерно двадцать лет. Основные концепции и подходы нашли отражение в целом ряде оригинальных публикаций и в монографии авторов “Введение в планетную аэрономию” (Наука, 1987), в которой проблеме многокомпонентной турбулентности посвящена отдельная глава. Стимулирующее влияние на издание книги оказали многочисленные обсуждения на семинарах по проблемам гидромеханики, планетной физики и космогонии, а также беседы с нашими коллегами в институте и других организациях. Считаем своим приятным долгом выразить всем им искреннюю признательность. Мы благодарны научному редактору книги академику В.С. Авдуевскому, прочитавшему рукопись и высказавшему ряд полезных рекомендаций. Выражаем также признательность К.К. Мануйлову за помощь при подготовке электронной версии монографии. Публикация книги стала возможной благодаря финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-30049).

А.В. Колесниченко,
М.Я. Маров

Декабрь 1997 г.

ЧАСТЬ I

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Изучение важнейших физико-химических механизмов в условиях турбулентного течения многокомпонентной реагирующей газовой смеси, ответственных за пространственно-временные распределения и вариации определяющих макропараметров (плотности, скорости, температуры, давления, состава и т.п.), особенно эффективно в сочетании с разработкой моделей турбулентности, отражающих наиболее существенные черты происходящих при этом физических явлений. Турбулентное движение в многокомпонентной природной среде отличается от движения несжимаемой однородной жидкости целым рядом особенностей. Это, прежде всего, переменность свойств течения, при которой среднемассовая плотность, различные теплофизические параметры, все коэффициенты переноса и т.п. зависят от температуры, состава и давления среды. Пространственная неоднородность полей температуры, состава и скорости турбулизованного континуума приводит к возникновению переноса их свойств турбулентными вихрями (турбулентный тепло- и массоперенос), который для многокомпонентной смеси существенно усложняется. При наличии специфических процессов химического и фотохимического превращения, протекающих в условиях турбулентного перемешивания, происходит дополнительное усложнение модели течения. В геофизических приложениях часто необходимо также учитывать некоторые другие факторы, такие, как влияние планетарного магнитного поля на слабо ионизованную смесь атмосферных газов, влияние излучения на пульсации температуры и турбулентный перенос энергии излучения и т.п. Соответственно, при моделировании, например, состава, динамического и термического состояния разреженных газовых оболочек небесных тел теоретические результаты, полученные в рамках традиционной модели турбулентности однородной сжимаемой жидкости, оказываются неприемлемыми. В связи с этим при математическом описании средних и верхних атмосфер планет возникает проблема разработки адекватной модели турбулентности многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей, учитывающей сжимаемость течения, переменность теплофизических свойств среды, тепло- и массообмен и воздействие гравитационного поля и т.п. Эти проблемы рассматриваются в данной части монографии.

ГЛАВА 1

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИРОДНЫХ СРЕД

§ 1.1. Турбулентное движение жидкости. Общие положения

Турбулентными называют беспорядочные неустановившиеся движения жидкости (газа), налагающиеся на основное движение среды, которое можно представить себе как некоторое статистически среднее движение. При турбулентном режиме течения гидродинамические и термодинамические характеристики жидкости (скорость, температура, давление, массовая плотность, концентрации химических компонентов, показатель преломления среды и т.д.) испытывают хаотические пульсации и потому изменяются от точки к точке и во времени нерегулярно. Благодаря образованию многочисленных вихрей различных размеров, турбулентные течения обладают повышенной способностью к переносу количества движения, энергии и массы элементарных жидких объемов, что приводит, как к увеличенному силовому воздействию на обтекаемые твердые тела, так и к интенсивным теплообмену и перемешиванию между слоями, к ускоренному протеканию химических реакций и т.п. Такие режимы движения жидкости возникают при потере устойчивости упорядоченного ламинарного движения, когда безразмерное число Рейнольдса $\boldsymbol{Re} = VL / \nu$ (где V , L – характерные скорость и линейный масштаб течения, ν – кинематическая вязкость) превосходит некоторое критическое значение $\boldsymbol{Re}_{cr}$. В более общем смысле турбулентность служит одной из форм проявления многообразия движений гидродинамических систем, обладающих очень большим числом степеней свободы и высокой степенью нелинейности. В такой системе с ростом числа $\boldsymbol{Re}$ образуются новые макроскопические связи и внутренняя (мелкомасштабная, вихревая) структура течения становится полностью хаотической. Вместе с тем, на ее фоне часто возникают крупномасштабные когерентные (почти упорядоченные) вихревые структуры, так что, если возникновение турбулентности характеризует переход от порядка к хаосу, то в развитом турбулентном потоке (при $\boldsymbol{Re} >> \boldsymbol{Re}_{cr}$) имеет место также рождение порядка из хаоса (*Таунсенд, 1959; Кантуэлл, 1984; Белоцерковский, 1997*).

Турбулентность является характерной особенностью многих природных явлений, в которых происходят динамические процессы, сопровождаемые переносом импульса, энергии и массы и ее эффекты наблюдаются на пространственно временных масштабах от сантиметров до мегапарсеков. Таковы, например, разнообразные динамические процессы в земной атмосфере и гидросфере, в атмосферах и недрах звезд и планет, в межзвездных газопылевых облаках (планетарных туманностях и протопланетных дисках), в галактической и межгалактической среде, в космической плазме (магнитогидродинамическая, или плазменная турбулентность). Преимущественно турбулентными являются метеорологические процессы, включающие в себя взаимодействие океана с атмосферой, испарение с водных поверхностей, вертикальный и горизонтальный перенос тепла, интенсивное перемешивание примесей (в том числе загрязнений), вязкую диссипацию кинетической энергии мелкомасштабных вихрей. Турбулентность возникает во многих технических устройствах при движении жидкости, газа или

плазмы, в частности, в пограничных слоях и спутных следах при обтекании твердых тел, в струйных течениях и в слоях смешения, в течениях в каналах и трубах, при вихревом возбуждении колебаний механических и акустических колебательных систем (так называемые эоловые тона), в плазменных пучках и т.д.

1.1.1. Геофизическая турбулентность. Турбулентные движения всегда диссипативны, поэтому они не могут поддерживаться сами по себе, а должны черпать энергию из окружающей среды. Турбулентность возникает либо в результате роста малых возмущений в ламинарном потоке, либо вследствие конвективной неустойчивости движения. В первом случае энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии сдвиговых течений, во втором – из потенциальной энергии неравномерно нагретой жидкости в гравитационном поле. На характер геофизической турбулентности специфическое влияние оказывает стратификация атмосферы (распределение массовой плотности ρ и других термогидродинамических параметров по направлению силы тяжести) и вращение Земли (с угловой скоростью $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{c}^{-1}$). Кроме этого, многокомпонентность реальной атмосферы приводит часто к *бароклинности* смеси, вызванной зависимостью ρ не только от давления p (как в баротропных средах), но также от температуры T и/или концентраций Z_α отдельных ее компонентов.

Бароклинность имеет динамическое значение, так как она приводит к появлению источникового члена в известном уравнении Фридмана для завихренности (см. (1.2.1)). При неустойчивой стратификации атмосферы в ней развивается турбулентная конвекция, источником которой служит ускоряющее действие архимедовой силы. Следствием вращения Земли является образование турбулентных пограничных (*экмановских*) слоев у поверхности суши в атмосфере, а также у поверхности дна в океане. За счет глобального изменения параметра Кориолиса $f = 2\Omega\cos\theta$ (где θ – дополнение широты ϕ до $\pi/2$; $f = 10^{-4} c^{-1}$ всюду за исключением областей, близких к экватору) в меридиональном направлении возникают волны *Россби–Блиновой*, порождающие циклоны и антициклоны в атмосфере и синоптические вихри в океане, служащие примерами двумерной макротурбулентности. В свою очередь, макротурбулентность, возникающая вследствие крупномасштабных неоднородностей притока тепла к атмосфере от подстилающей поверхности, порождает интенсивную микротурбулентность, обусловленную гидродинамической неустойчивостью вертикальных градиентов скорости ветра. С наличием тонких квазиоднородных слоев, разделенных поверхностями разрыва температуры и солености, связано развитие сравнительно слабой микротурбулентности (с малыми числами $\boldsymbol{Re}$) в океане (*Монин, 1986*). При изучении геофизической турбулентности и в некоторых других случаях оценка интенсивности турбулентного переноса может осуществляться по значениям коэффициента турбулентной вязкости ν^T (или диффузии D^T).

Приток солнечного тепла к атмосфере и поверхности Земли (а также других планет земного типа) служит основным источником энергии атмосферных физико-химических процессов, относительно небольшая доля которой превращается в кинетическую энергию вихревых движений всех масштабов. Характерный размер крупных энергонесущих вихрей, в которых, вследствие изменения (сдвига) средней гидродинамической скорости V, возникает кинетическая энергия тур-

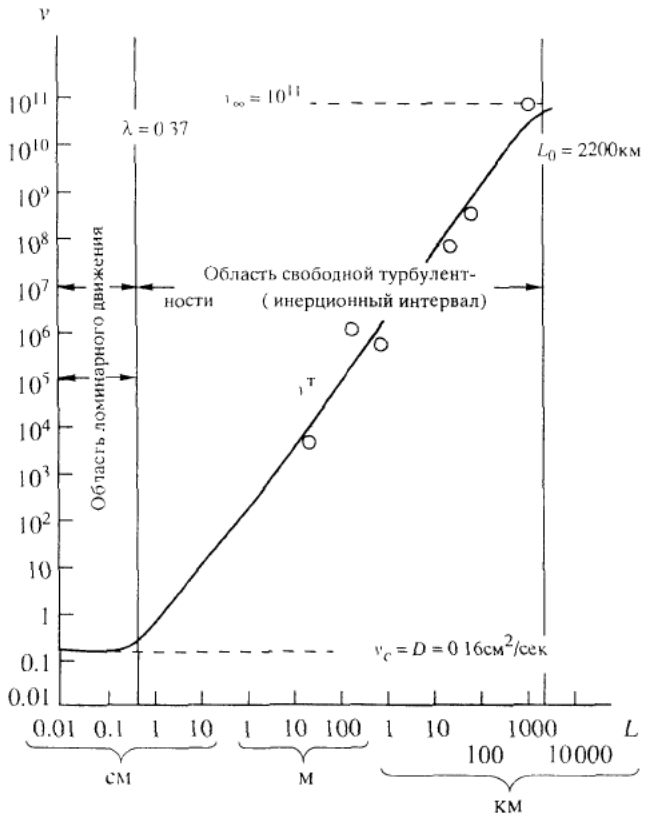


Рис. 1.1.1. Вертикальный коэффициент диффузии в функции масштаба турбулентности L. Выделены области ламинарного движения и свободной турбулентности (инерционный интервал). Показаны эмпирические точки, отвечающие закону Ричардсона–Обухова. Согласно (*Монин, 1969*).

булентного движения системы, определяет внешний (интегральный) масштаб турбулентности L. Вихри с размерами больше чем L, как правило, анизотропны, а вихри, размеры которых меньше внешнего масштаба турбулентности – приблизительно изотропны. В интервале масштабов от миллиметров до тысяч километров $l << r << L$ (где l – так называемый внутренний масштаб турбулентности, пропорциональный *колмогоровскому микромасштабу* l_k), охватывающем практически весь спектр динамических процессов в атмосфере, происходит каскадный процесс передачи энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным вихревым движениям. Квазистационарный режим существования подобного каскадного механизма в турбулизованной атмосфере Земли характеризуется некоторой приблизительно постоянной (не зависящей от масштаба вихря r) величиной $\varepsilon_e \approx 3$ см^2/с^3, которая, с одной стороны, является скоростью передачи кинетической энергии вихревого вращения от крупных атмосферных вихрей к более мелким вихрям, а с другой стороны, характеризует удельную скорость диссипации турбулентной (кинетической) энергии в тепло за счет молекулярной вязкости, которая происходит в вихрях минимального *колмогоровского размера* $l_k = \nu^{3/4}\varepsilon_e^{-1/4}$.

В инерциальном интервале масштабов, в котором имеет место указанный каскадный процесс в атмосфере, коэффициент турбулентной вязкости ν^T, отвечающий эмпирическому "закону четырех третей" Ричардсона–Обухова (этот закон следует также из соображений теории размерности и подобия) имеет вид: $\nu^T(r) \propto \varepsilon_e^{1/3} r^{4/3}$ (*Ричардсон, 1926; Обухов, 1941*). Зависимость эффективного вертикального коэффициента диффузии $\nu(L)$ от локального масштаба турбулентности $L(z)$ показана на Рис. 1.1.1, где выделены область ламинарного движения при малых L, с коэффициентом молекулярной вязкости $\nu = 0.16$ см^2/с, и область свободной турбулентности (инерционный интервал) при больших L. Как уже говорилось выше, при этих значениях L отсутствует продуцирование или диссипация кинетической энергии, а происходит лишь ее передача ко все более мелким масштабам r (вплоть до масштаба $r = l_k$), которым отвечает рост волнового числа κ на кривой спектральной плотности распределения энергии

$E(\kappa)$ поля скорости (см. Рис. 1.1.2). Максимальный коэффициент турбулентной вязкости ν^T в атмосфере соответствует типичному масштабу длины для синоптических процессов $L_0 = a/f$ (*Обухов, 1949*), где $a = \sqrt{gH}$ – изотермическая скорость звука. В умеренных широтах Земли $L_0 \sim 3000$ км и $\nu^T \approx 10^{11}$см^2/с. Очевидно, что при этом время вырождения атмосферной кинетической энергии вследствие турбулентной вязкости $\tau(L) \sim L^2 / \nu^T(L) \sim \varepsilon_e^{-1/3} L^{2/3}$ отвечает типичному времени превращения потенциальной энергии синоптических процессов $\tau = (E^{-1}\partial E / \partial t)^{-1} \cong 5 \cdot 10^5$ с, т.е. равно примерно неделе (здесь $E \approx 10^{21}$ *дж* – полная кинетическая энергия атмосферы; $\partial E / \partial t \approx 1 - 2 \cdot 10^{12}$ *квт* – скорость превращения потенциальной энергии в кинетическую) (*Монин, 1969*).

Как видим, турбулентность с коэффициентом турбулентной вязкости ν^T можно рассматривать в качестве эффективного механизма диссипации кинетической энергии для движений синоптического масштаба, или характерного размера крупномасштабных вихрей L. При этом минимальный масштаб синоптических движений, способных преодолеть вязкость, оценивается как $L_{\min} \propto \varepsilon_e^{-1/4} (\nu^T)^{3/4}$ (*Монин, 1969*). Такой подход отвечает представлениям о наличии универсальных связей между характеристиками крупно- и мелкомасштабных пульсаций для турбулентных течений, определяемых при $\boldsymbol{Re} \to \infty$ мелкомасштабными флуктуациями, а не крупномасштабными колебаниями скорости, определяющими средние значения всех термогидродинамических величин и по существу не зависящих от $\boldsymbol{Re}$. В этом находит свое выражение гипотеза Бетчелора (*1955*) о статистической независимости крупно- и мелкомасштабных движений.

О спектре атмосферных процессов. При теоретическом изучении турбулентных пульсаций скорости ветра (или других пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров) в атмосфере традиционно используется аппарат математической статистики для квазистационарных случайных процессов, корреляционный и спектральный анализ (см. Гл. 8). К наиболее употребительным статистическим характеристикам поля случайных величин $A(\boldsymbol{r}, t)$ относятся их средние значения (ниже для обозначения средних значений используется черта над осредненной величиной) и дисперсии, разнообразные корреляционные и структурные функции, спектральные плотности распределения и т.п. Вследствие того, что в атмосфере одновременно существуют системы движения различного пространственно-временного масштаба, характеризующие ее термогидродинамические параметры должны быть, вообще говоря, осреднены (предполагается, что индивидуальная реализация турбулентных течений может быть описана с помощью уравнений многокомпонентной гидродинамики для мгновенного движения). Осреднение может быть произведено либо по временному (или/и пространственному) интервалу Δt (например, по значениям пульсаций, измеренным в фиксированной точке в течении некоторого промежутка времени Δt), либо по ансамблю физически допустимых реализаций. Для получения репрезентативных статистических оценок определяющих параметров пульсирующего течения необходимо подходящим образом выбрать интервал осреднения, который должен быть тем больше, чем больше масштабы пульсаций.

Таким образом, для выбора масштаба осреднения, необходимо знать порядок величины (спектр) пульсаций для всех термогидродинамических параметров турбулентного течения смеси (таких как скорость ветра, давление, температура, и т.д.). Энергетический спектр пульсационного поля какой-либо физической величины $A(\boldsymbol{r},t)$ представляет из себя серию кривых, описывающих зависимость квадрата амплитуды пульсаций $\overline{A'^2}$ случайной величины A от круговой частоты ω ($\omega = 2\pi \mathrm{f}$, f – частота колебаний в c^{-1} или герцах) и/или линейных размеров κ ($\kappa = \mathrm{f}/V$ – волновое число, V – средняя скорость потока на рассматриваемом уровне в атмосфере) разномасштабных вихрей.

Среди характерного для атмосферы широкого спектра колебаний (во времени) указанных случайных величин, имеющих периоды от долей секунды до тысяч лет (см. (*Монин,1969*)), особо следует выделить микрометеорологические колебания с периодами от долей секунды до минут, которые возникают, в частности, непосредственно в приземном слое воздуха и представляют собой мелкомасштабную изотропную турбулентность, служащую наиболее важным механизмом вязкой диссипации. Максимум ее энергетического спектра $\omega E(\omega)$ (где $E(\omega)$ – *спектральная плотность кинетической энергии потока*) приходится на период $\tau_m = 1/\omega \approx 1$ мин, что для типичной скорости движений воздуха при синоптических процессах V = 10 м/с соответствует масштабу горизонтальных турбулентных неоднородностей $L = V\tau_m \approx 600$ м. При $\omega > 1/\tau_m$ спектры скорости ветра удовлетворяют "закону пяти третей" Колмогорова–Обухова (*Обухов, 1941*) $E(\omega) \sim (\varepsilon_e^{2/3}/V)(\omega/V)^{-5/3}$, и в области максимальных частот турбулентных флуктуаций $\omega \sim V\varepsilon_e^{1/4}\nu^{-3/4}$ спектр турбулентности резко обрывается (*Монин, 1969; 1988*).

Каскадный процесс передачи кинетической энергии от вихревых движений больших масштабов к вихрям малых масштабов в случае изотропного турбулентного течения удобно проанализировать в пространстве волновых чисел κ при использовании пространственной спектральной плотности энергии $E(\kappa)$, которая определяется следующим образом: $E(\kappa) = \int\limits_{|\kappa'|=k} \Phi_{jj}(\kappa')d\kappa'$, где $\Phi_{ij}(\kappa)$ – Фурье преобразование корреляционной функции случайного поля скоростей $R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \overline{V_i'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})V_j'(\boldsymbol{x})}$; κ – модуль волнового числа, $\kappa = |\kappa|$; (здесь по повторяющимся индексам производится суммирование). Отметим, что $R_{jj}(0) = \overline{V_j'V_j'}$ – кинетическая энергия пульсационного движения единицы массы. Отсюда, при использовании определения $E(\kappa)$, следует, что турбулентная энергия $e \equiv {}^1\!/_2\overline{V_j'V_j'} = {}^1\!/_2\int\limits_0^\infty E(\kappa)d\kappa$. На Рис. 1.1.2 показана картина распределения энергии турбулентного движения по различным масштабам, т.е. пространственный спектр величины e.

Глубокий физический смысл, характеризующий пульсационное движение поля скорости следует из "спектральной формы" *уравнения Кармана–Ховарта* (*Монин, Яглом,1996*), описывающего изменение во времени спектрального рас-

пределения энергии турбулентности $E(\kappa,t)$:

$$\partial E(\kappa,t)/\partial t = T(\kappa,t) - 2\nu\kappa^2 E(\kappa,t).$$

Здесь первое слагаемое $T(\kappa,t)$ описывает перераспределение энергии по спектру турбулентности вследствие взаимодействий ее спектральных компонент с волновыми числами κ со всеми другими спектральными компонентами, создаваемое нелинейными "инерционными членами" исходных уравнений гидродинамики. Важно при этом подчеркнуть, что перераспределение энергии между спектральными компонентами, происходит без изменения суммарной энергии турбулентного движения ($\int_0^\infty T d\kappa = 0$). Второе слагаемое $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$ описывает диссипацию энергии под действием вязкости и характеризует убывание кинетической энергии пульсаций возмущений с волновым числом κ, пропорциональное интенсивности этих возмущений, умноженной на $2\nu\kappa^2$. Это означает, что под действием вязкости энергия длинноволновых возмущений (с малыми κ) убывает значительно медленнее, чем энергия коротковолновых возмущений, отражая тем самым факт пропорциональности силы трения градиенту скорости. Спектры энергии $E(\kappa)$, диссипации энергии $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$ и вид функции $T(\kappa,t)$, определяющей перераспределение энергии по спектру, схематически показаны на Рис. 1.1.2. Как видим, отрицательные значения функции $T(\kappa)$ в области малых κ, которым соответствует максимум энергии крупномасштабных движений на кривой $E(\kappa)$, сменяется положительными значениями в области больших κ, которым соответствует максимум диссилации энергии на кривой $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$. Это подтверждает представление о каскадном переходе энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным компонентам движения, для которых характерны большие локальные градиенты скорости и, следовательно, велика роль вязкости. Следуя Монину и Яглому (*1996*), первый из этих интервалов, где сосредоточено до 80–90% полной энергии турбулентности $e = \frac{1}{2}\int_0^\infty E(\kappa)d\kappa \cong \int_0^{\kappa_0} E(\kappa)d\kappa$ носит название интервала энергии, а второй, где происходит ее полная диссипация

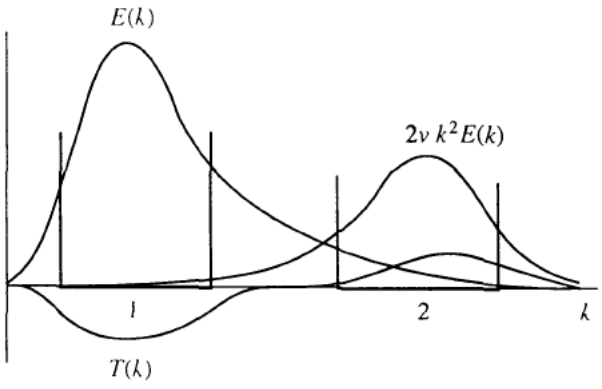


Рис. 1.1.2. Спектры энергии *E(k)* , диссипации энергии $2\nu k^2 E(k)$ и функции перераспределения энергии *T(k)*. Области 1 и 2 на горизонтальной шкале обозначают интервалы энергии и диссипации. Согласно (*Монин, Яглом, 1996*).

$2\nu\int_0^\infty \kappa^2 E(\kappa)d\kappa \cong 2\nu\int_{\kappa_0}^\infty \kappa^2 E(\kappa)d\kappa$ – интервала вязкой диссипации спектра (здесь κ_0 – промежуточное значение волнового числа в инерционном интервале, лежащее за интервалом энергии и перед интервалом диссипации). Там же приведено более полное рассмотрение проблемы "скорости перераспределения энергии по спектру" $T(\kappa)$, исходя из спектрального представления самого поля скорости, в основе которого лежит подход, развитый Бэтчелором (*1955*). Мы еще раз, таким образом, убеждаемся в том, что первоначальная энергия крупных вихрей, определяющая динамические и кинематические свойства течения, затрачивается на их дробление, что выражается через турбулентную вязкость, и, в конечном итоге, определяет свойства вязкой диссипации, при выполнении условия общего энергетического баланса.

1.1.2. О некоторых методах моделирования турбулентности. Помимо статистического подхода к моделированию турбулентности в настоящее время все более широкое применение находит феноменологический (полуэмпирический) подход и методы прямого численного моделирования турбулентности на основе решения специальных кинетических уравнений или нестационарной системы трехмерных уравнений Навье–Стокса, хотя в силу стохастичности данного явления в реальности удается получать лишь осредненные характеристики движения. Это позволяет, тем не менее, иногда проследить не только эволюцию образований различных пространственных структур с течением времени, но также изучать общую динамику и природу развития турбулентности. Например, результаты численного моделирования явления "*перебросов*" в гидродинамической системе (сконструированной в виде многоярусной модели зацепления простейших элементов – триплетов) иллюстрируют каскадный процесс передачи энергии в развитом турбулентном потоке, соответствующий известному закону Колмогорова–Обухова (*Гледзер и др.,1961*) и подкрепляют представления об общих свойствах в поведении динамических систем. Интересно также отметить, что исследование процесса стохастизации динамических систем и сценариев перехода к хаосу при численном моделировании турбулентности служит аналогом решения некорректных задач с использованием оператора осреднения и "*параметрического расширения*" (*Тихонов и Арсенин, 1986*). При таком подходе упорядоченная структура турбулентного течения, которая определяется как аттрактор асимптотически устойчивого решения для осредненных величин, представляет собой его регуляризованное описание (*Белоцерковский, 1997*). Следует однако заметить, что использование методов прямого численного моделирования турбулентности для решения практически важных задач (особенно задач, связанных с расчетами турбулентного тепло-и массопереноса в многокомпонентных химически активных смесях) часто затруднительно или является слишком громоздким. Поэтому подобные задачи целесообразнее решать с помощью более простых, "полуэмпирических" теорий.

Классический подход к моделированию многокомпонентной турбулентности основывается на идее Рейнольдса об осреднении гидродинамических уравнений смеси по ансамблю тождественных течений (возможных реализаций), или посредством другой эквивалентной процедуры. Полученные таким образом урав-

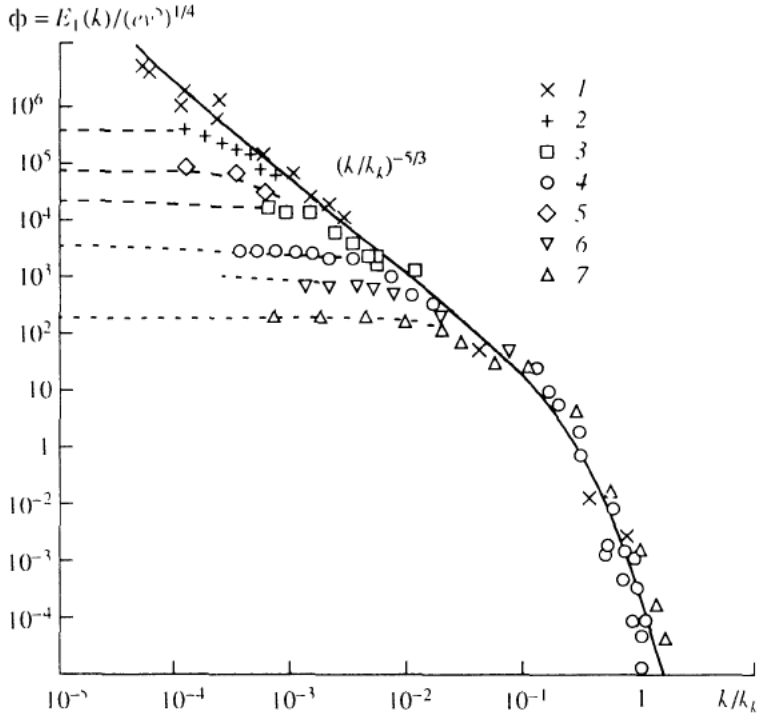


Рис. 1.1.3. Спектр продольной составляющей турбулентных пульсаций для различных течений. Здесь: 1 – приливно-отливный канал; 2 – круглая струя; 3 – течение в трубе; 4 – течение с постоянным сдвигом; 5 – след за цилиндром; 6 – турбулентность за сеткой; 7 – пограничный слой. Согласно (*Чепмен, 1980*).

нения масштаба среднего движения, вследствие нелинейности исходных уравнений Навье–Стокса, содержат неопределенные корреляционные члены (типа векторов турбулентной диффузии и тепла, или тензора турбулентных напряжений Рейнольдса) и потому оказываются незамкнутыми.

Замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики смеси обычно проводится с помощью тех или иных полуэмпирических моделей турбулентности (чему посвящена данная монография). Вместе с тем, важно уже здесь указать на принципиальный недостаток подобного подхода, который заключается в том, что осреднение Рейнольдса осуществляется по всем масштабам турбулентности, т.е. моделирование на основе полуэмпирических гипотез замыкания по необходимости проводится одновременно по всему спектру разномасштабных вихревых структур. Если учесть, что в отличие от практически универсального (для различных случаев течений) спектра мелкомасштабных пульсаций, крупномасштабные структуры существенно различны для разных течений (см. Рис. 1.1.3), то становится очевидной бесперспективность создания универсальных полуэмпирических моделей турбулентности, пригодных для описания разнотипных турбулентных течений смеси (поэтому задача состоит главным образом в установлении границ применимости той или иной модели турбулентности). Тем не менее есть основание надеяться, что привлечение многопараметрических аппроксимаций, основанных на эволюционных уравнениях переноса для старших моментов пульсирующих в многокомпонентном потоке термогидродинамических параметров, позволит до некоторой степени продвинуться на пути построения универсальных моделей турбулентности смеси, описывающих достаточно большое число разнообразных турбулентных течений.

1.1.3. Турбулентная диффузия. В комплексе проблем, связанных с теоретическим рассмотрением процессов тепло-и массопереноса в природной турбулизованной многокомпонентной среде, важное значение имеет моделирование распространения малых примесей в атмосфере (в том числе перемешивание воздушных масс с учетом их химической активности). Наряду с газами, в атмосфере присутствуют также аэрозоли различного типа и размеров, частично участвующие в химических превращениях и фазовых переходах. Сюда же относятся радиоактивные примеси, имеющие как естественное (радон, торон и продукты их распада), так и искусственное (производство и испытания ядерного оружия, выбросы при авариях на атомных электростанциях и других объектах) происхождение. В процессе переноса указанных примесей в атмосфере и их перемешивании определяющую роль играет турбулентная диффузия, характер которой зависит от структуры пульсационного поля скоростей и распределения энергии турбулентности между пульсациями различных пространственных масштабов. При описании процессов диффузии в турбулентной атмосфере можно выделить средние значения концентраций примеси $\overline{Z}_\alpha$ и пульсационные отклонения Z'_α от них, наряду со средней величиной $\overline{V}$ и пульсациями V' скорости движения воздуха. Это позволяет с помощью обычных приемов осреднения перейти от уравнений диффузии для мгновенных значений концентраций к уравнениям диффузии масштаба среднего движения (см. уравнение (3.1.24)). Как известно, в теории турбулентной диффузии смеси, в зависимости от масштабов явления, различают диффузию градиентного типа, создаваемую сравнительно мелкими вихрями, и диффузию неградиентного типа, создаваемую крупными вихрями (*Монин, Яглом, 1965*). К турбулентной диффузии градиентного типа может быть применен феноменологический подход (см. разд. 3.3.1). Поскольку турбулентность является свойством режима течения жидкости, а не самой жидкости, механизм обмена импульсом (энергией, веществом) лишь отдаленно напоминает молекулярный обмен импульсом. Тем не менее существует определенная аналогия между диффузией смеси в поле мелкомасштабной турбулентности и молекулярной диффузией (справедливая и в случае загрязнения среды мелкодисперсной примесью, когда масштаб турбулентности мал по сравнению с масштабами “облака загрязнения”). В основу такой аналогии положено допущение о пропорциональности между турбулентным потоком некоторого диффундирующего вещества и градиентом его осредненной концентрации. Действительно, подобно тому, как хаотическое молекулярное движение характеризуется некоторой средней скоростью движения молекул v_m и длиной свободного пробега l_m (так что молекулярный коэффициент диффузии $D \sim v_m\, l_m$), хаотическое турбулентное перемешивание можно описать через коэффициенты турбулентной диффузии $D^T \sim v_t\, l_t$, где v_t – характерная величина турбулентных флуктуаций скорости и l_t – локальный масштаб турбулентности (так называемый путь перемешивания). Однако, в отличие от v_m и l_m, параметры v_t и l_t – не просто свойства жидкости, а свойства течения. Соответственно, D и D^T понимаются как коэффициенты пропорциональности – в первом случае между молекулярным диффузионным потоком $\boldsymbol{J}_\alpha$ некоторой субстанции α и градиентом ее концентрации ∇Z_α ($\boldsymbol{J}_\alpha = -D\,\nabla Z_\alpha$), а

во втором случае – между турбулентным потоком данной субстанции в пульсирующем поле скоростей $\boldsymbol{J}_\alpha^T = \overline{\rho Z'_\alpha \boldsymbol{V}'}$ и градиентом ее осредненной концентрации $\nabla\overline{Z}_\alpha$, т.е. $\boldsymbol{J}_\alpha^T = -\overline{\rho} D^T \cdot \nabla\overline{Z}_\alpha$ (*Монин, 1962*). Заметим, что, поскольку турбулентная диффузия, в отличие от молекулярной, обычно имеет анизотропный характер, то в общем случае под D^T и $\boldsymbol{l}_t$ следует понимать тензоры.

Если частицы диффундирующей субстанции сохраняют свои индивидуальные свойства при движении в пульсирующем потоке (пассивная примесь), то наиболее естественно в основу модели турбулентного перемешивания положить лагранжеву концепцию (см. формулу (3.3.1)), что дает возможность без детальной конкретизации механизма перемешивания рассматривать такой перенос как "обычное движение" частиц жидкости, при котором происходит диффузия. Введение лагранжевой турбулентной пульсации $Z'_{\alpha L}$ $(\equiv Z'_\alpha + \boldsymbol{l}_t \cdot \nabla\overline{Z}_\alpha \cong 0)$ консервативного признака Z_α позволяет в этом случае определить некоторую длину $l_t = |\boldsymbol{l}_t|$ (приблизительно пропорциональную среднему линейному масштабу пульсаций скорости), на котором исчезает корреляция между начальной и конечной скоростью данной лагранжевой частицы, и смоделировать турбулентный коэффициент диффузии $D^T = \overline{\boldsymbol{l}_t \cdot \boldsymbol{V}'}$ на всем временном интервале пульсационного движения (*Пристли, 1962*). Нельзя при этом исключить возможности некоторого прямого влияния молекулярной диффузии на турбулентный диффузионный перенос при условии, что за время, в течение которого сохраняется определенная корреляция между значениями скорости движения крупномасштабного вихря, количество диффундирующей субстанции в этом вихре успеет заметно измениться. Следует, по-видимому, также допустить, что эти разноприродные диффузионные процессы обладают свойствами суперпозиции.

Отсутствие качественного различия между турбулентной и молекулярной диффузией сохраняется в атмосфере, вообще говоря, при не очень малых скоростях вихревых движений, что определяет границы применимости параболического уравнения диффузии (см. уравнение (3.2.5)). Так, в условиях приземного слоя атмосферы справедливо неравенство $D^T >> D$, что обусловлено, однако, тем, что $l_t >> l_m$, хотя $\nu_t << \nu_m$. Другими словами, поскольку скорость распространения примеси в турбулентной атмосфере ограничена величиной флуктуаций скорости ветра, создающих турбулентное перемешивание, привлекаемая аналогия с молекулярной диффузией справедлива лишь для ограниченных объемов. Более того, аналогия с молекулярной диффузией полностью утрачивается в поле крупномасштабной турбулентности, когда масштаб l_t становится соизмеримым или больше размера облака загрязнения L и расстояния между частицами фактически не изменяются при их переносе крупномасштабными движениями (вихрями больших размеров). В этом случае для моделирования диффузионного переноса применим более общий статистический подход (обсуждавшийся в разд. 1.1.1) к описанию крупномаштабной турбулентности, использующий две ключевые физические величины диссипативной гидродинамической системы (определяющие передачу энергии от крупных вихрей к более мелким) – скорость вязкой диссипации турбулентной энергии ε_e и масштаб турбулентности L (*Монин, Яглом, 1992*). При этом специфика многокомпонентности среды, в отличие от

случая градиентной диффузии, перестает играть сколько-нибудь заметную роль.

При моделировании коэффицентов турбулентной диффузии D^T для всевозможных атмосферных компонентов (в том числе загрязняющих примесей) необходимо учитывать такие факторы, которые оказывают наиболее существенное влияние на их перемешивание (рассеяние). В частности, в первую очередь необходима априорная оценка пути перемешивания (масштаба турбулентности), или его аппроксимация, с учетом термической (или/и концентрационной) стратификации атмосферы, которая и определяет в конечном счете характер диффузионных процессов (см.разд. 3.3.2.). Как уже упоминалось, в общем случае анизотропного пульсационного поля скоростей (концентраций) диффузионный перенос малых компонентов характеризуется тензором турбулентной диффузии D^T (или тензором вязкости ν^T). Для течений с ярко выраженным направлением неоднородности (например, в стратифицированной в поле силы тяжести атмосфере) турбулентные флуктуации скорости накладываются на ее среднюю (ветровую) составляющую в горизонтальном направлении и усиливаются при наличии ветрового сдвига. Для подобных течений успешно используются различные упрощенные аппроксимации для вертикального коэффициента турбулентной вязкости ν^T (типа модели пути перемешивания Прандтля (см. формулу (3.3.20)) или гипотезы Гейзенберга о роли малых вихрей в оценке ν^T , когда допустимо градиентное приближение), справедливые, однако, лишь при условии локального равновесия турбулентного поля (см. разд. 4.3.9), обеспечивающего баланс генерации и диссипации турбулентной энергии в каждой пространственной точке среды. При всем том, подобные подходы, вообще говоря, неприменимы для многокомпонентной химически активной смеси, поскольку в этом случае существенную роль может играть химическая кинетика, нарушающая лагранжеву инвариантность переносимой субстанции. Здесь мы вновь сталкиваемся с необходимостью разработки новых методов моделирования турбулентных коэффициентов переноса для смеси, которые позволили бы учесть специфику подобных сред.

1.1.4. Динамическая природа турбулентности. Сделаем несколько общих замечаний о динамической природе турбулентности в нелинейной диссипативной газожидкой системе, которая может обмениваться с окружающими телами как энергией, так и веществом (в силу чего возможно образование различных пространственно-временных структур, последовательности которых и составляют процесс самоорганизации). При наличии турбулентности каждая индивидуальная частица такой среды движется случайно, так что ее координаты и направление движения изменяются со временем по закону марковского случайного процесса. Полное статистическое описание турбулентного течения сводится к определению вероятностной меры на его фазовом пространстве $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, состоящем из всевозможных индивидуальных реализаций характеризующих его случайных термогидродинамических полей. Поэтому турбулентность можно рассматривать на основе статистической механики многих частиц (см., напр., (*Обухов, 1962*)), или для ее описания использовать кинетическое уравнение, являющееся аналогом уравнения Больцмана в фазовом пространстве для некоторой условной функции плотности распределения вероятностей $f_{турб}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$, служащей основной статистической характеристикой пульсирующего движения (*Климонтович,*

1990). Характерным свойством открытой системы с большим числом ($N \to \infty$) независимых динамических переменных ($\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$) является ее динамическая неустойчивость из-за перемешивания (экспоненциальной расходимости близких в начальный момент фазовых траекторий), так что любое начальное распределение функции плотности вероятностей в фазовом пространстве стремится к предельному равновесному распределению, то есть наиболее хаотичному состоянию с максимальной энтропией (в смысле Больцмана–Гиббса–Шенона). Турбулизацию движения жидкости или газа можно представить также как результат изменения топологии фазовых траекторий, приводящего к перестройке аттракторов и качественному изменению (*бифуркации*) состояния движения. Корреляции скорости в любой точке потока ограничены малыми временными интервалами, зависящими от начальных условий, за пределами которых причинную связь между полем скоростей в различные моменты времени, в том числе корреляцию с предыдущим движением, установить невозможно. Все это подкрепляет представление о стохастическом характере пульсаций скорости в турбулентном потоке, которые возникают как результат потери устойчивости ламинарного движения гидродинамической системы при изменении внешних управляющих параметров (например, числа $\boldsymbol{Re}$). С этой точки зрения турбулентное движение является более хаотическим, чем ламинарное – турбулентность отождествляется с хаосом (или шумом). Отражением стохастической природы турбулентности служит плотное переплетение фазовых траекторий с различным асимптотическим поведением (топологией) и структурой окружающих их областей притяжения (аттракторов). Такое поведение траекторий в фазовом пространстве означает, что система обладает *эргодичностью*, то есть почти для всех реализаций случайного поля временные средние равны соответствующим статистическим средним, ее временные корреляционные функции быстро затухают, а частотные спектры непрерывны. Эргодическое свойство, по-видимому, является одной из характерных черт стационарного однородного мелкомасштабного турбулентного поля (см., например, (*Кампе де Ферье, 1962*)).

С другой стороны, при переходе к предельно-развитой сдвиговой турбулентности в открытой гидродинамической системе между отдельными областями устанавливаются новые макроскопические связи (обусловленные коллективным взаимодействием образующих ее подсистем), что повышает внутренюю упорядоченность системы по сравнению с произвольными малыми флуктуациями, происходящими на молекулярном уровне. При этом множество пространственно-временных масштабов, на которых разыгрывается турбулентность, соответствует когерентному поведению огромного числа частиц, с чем связано, в частности, появление на фоне мелкомасштабного турбулентного движения, упоминавшихся в начале этого параграфа, четко упорядоченных когерентных (диссипативных) структур, с определенной степенью организации и формированием областей повышенной концентрации завихренности в виде вихревых трубок и вихревых слоев. Отсюда можно сделать, на первый взгляд, парадоксальное заключение, что развитое турбулентное движение, несмотря на его очень большую сложность, отвечает состоянию большей упорядоченности, чем более симметричное ламинарное движение. Данный феномен, “показывающий, сколь трудно при сложных движениях отличить порядок от хаоса” (*Климонтович, 1982*), составляет часть общей проблемы самоорганизации (синергетики). К этой пробле-

ме, обнаруживаемой в самых разных природных явлениях и областях техники, проявляется в последнее время возрастающий интерес. Согласно существующим представлениям (см. например, (*Николис, Пригожин, 1979; Хакен, 1980*)) подобные самоорганизующиеся диссипативные структуры появляются в результате стабилизации пространственно-неоднородных неустойчивостей в открытой нелинейной динамической системе за счет возникновения когерентности (сопровождающей процесс бифуркации) и тем самым достижения "порядка через флуктуации". Для таких систем, согласно Пригожину (*1986*), "вероятность становится объективным свойством, порождаемым, так сказать, внутри динамики и отражающим фундаментальную структуру динамической системы". К сожалению нужно отметить, что хотя со времени понимания "синергетической" природы турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых гидродинамических нелинейных системах, прошло около тридцати лет однако до сих пор представления об возникающих когерентных пространственно-временных диссипативных структурах не материлизовались в практические инженерные методы расчета крупномасштабной турбулентности.

§ 1.2. Турбулентность в атмосферах планет

Рассмотрим планету, имеющую атмосферу, т.е. газовую оболочку, ограниченную снизу твердой подстилающей поверхностью, или самую внешнюю область газожидкой планеты. В атмосферных потоках значение числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}$ обычно превышает $\boldsymbol{Re}_{cr}$, и поэтому течения являются турбулентными. Турбулизация атмосферных течений возникает из-за их деформации при обтекании неровностей подстилающей поверхности, либо при потере гидротермодинамической устойчивости крупномасштабным потоком под воздействием повышенных значений градиентов температуры и скорости ветра. В свободной атмосфере основной причиной возникновения турбулентности является потеря устойчивости внутренних гравитационно-сдвиговых волн. Разрушение подобных волн может вызываться "первичной" или "вторичной" неустойчивостью. "Первичная" неустойчивость (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) развивается в сдвиговом слое между потоками с различными скоростями, если в большей части волнового слоя $\boldsymbol{Re} < \boldsymbol{Re}_{cr}$. При "вторичной" неустойчивости поток в среднем устойчив, а неустойчивые участки локализуются вблизи гребней волн. Такой вид неустойчивости характерен в основном для слоев с сильно искривленными вертикальными профилями температуры и скорости ветра.

Одной из специфических особенностей атмосферы планеты является ее многокомпонентность и химическая активность атмосферных газов. Проявления турбулентности в однородном потоке и в реагирующем многокомпонентном потоке различны. Изменение плотности, температуры и состава смеси, возникающие из-за наличия химических реакций могут привести к турбулизации течения. Возникающие градиенты плотности порождают дополнительную завихренность путем взаимодействия с окружающими градиентами или флуктуациями в поле давления. Это связано с появлением источникова члена $\rho^{-1}\nabla\rho^{-1}\times\nabla p$ (равного нулю в баротропных средах) в уравнении Фридмана для завихренности

$$d(\Omega_a/\rho)/dt = (\Omega_a/\rho)\cdot\nabla \boldsymbol{V} - \rho^{-1}\nabla\rho^{-1}\times\nabla p + \rho^{-1}\nabla\times\boldsymbol{F}\,, \qquad (1.2.1)$$

где $\Omega_a = \omega + 2\Omega$ – вихрь абсолютной скорости движения, $\omega = \nabla \times V$ – вектор завихренности, Ω – вектор угловой скорости вращения планеты; F – сумма ускорений силы вязкости и внешних массовых сил (см., например, (*Монин и др., 1989*)). Когда массовая плотность ρ постоянна, все динамические эффекты, потенциально зависящие от этого члена "завихренности" отсутствуют. Таким образом, существование локальных неоднородностей (градиентов) массовой плотности составляет важнейшее свойство многокомпонентных реагирующих течений, которое обычно не рассматривается классическими моделями турбулентности однородной жидкости. Другим усложняющим аспектом проблемы моделирования многокомпонентной турбулентности является локальная энергия, выделяемая химическими реакциями. Локальное тепловыделение в газовых потоках ускоряет расширение среды и может индуцировать неустойчивость Релея–Тейлора (в стратифицированных в поле силы тяжести течениях при наличии архимедовой силы плавучести), реализуя тем самым обратную связь с гидродинамикой. Ниже мы рассмотрим несколько примеров турбулизованных многокомпонентных природных сред.

1.2.1. Планетные атмосферы. Свойства планетных атмосфер сильно отличаются друг от друга даже при относительно небольших расстояниях в пределах Солнечной системы, занимаемых планетами земной группы, куда, кроме Земли, относят Меркурий, Венеру и Марс. Меркурий, подобно Луне, практически лишен атмосферы – плотность его газовой оболочки у поверхности не превышает 10^{-17} г/см ^{3}, но ряд динамических эффектов возникает при взаимодействии плазмы солнечного ветра с магнитосферой и экзосферой Меркурия. Венера и Марс, как две предельных модели эволюции планеты, по многим параметрам схожей с Землей, представляют с этой точки зрения наибольший интерес для планетологии, включая специфику их метеорологии, формирования климата и динамику недр. Их атмосферы вторичного происхождения имеют окислительный характер и состоят в основном из углекислого газа, создающего давление у поверхности Венеры примерно на два порядка больше, а у поверхности Марса примерно на два порядка меньше, по сравнению с Землей. В то же время, к атмосферам планет-гигантов (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна), имеющим восстановительный характер и состоящим в основном из водорода, гелия и водородсодержащих соединений (вода, аммиак, метан и другие углеводороды), относят самые внешние оболочки этих газожидких планет, не имеющих твердых поверхностей и сохранивших свои первичные атмосферы по существу неизменными со времени образования (*Маров, 1986*). Химические реакции в их атмосферах и облаках (следствием которых является наблюдаемая богатая цветовая гамма на Юпитере и Сатурне) можно рассматривать в качестве аналога процессов, происходивших на самых ранних этапах эволюции планет земной группы.

В отличие от звезд, излучающих радиацию за счет ядерной энергии, генерируемой в их недрах, планеты являются холодными телами, отражающими и переизлучающими поглощенную энергию Солнца. С точки зрения энергообмена твердый (или жидкий) подстилающий и газовый слои представляют собой единую открытую термодинамическую систему, контролируемую либо приходящей солнечной радиацией, либо (как в случае Юпитера, Сатурна и Нептуна) также внутренней энергией недр, которая в два-три раза превышает энергию посту-

пающую от Солнца. Поглощаемая атмосферой планеты энергия, преобразуемая во внутреннюю и кинетическую энергию газовой среды, частично излучается в космос в виде *ИК*-радиации, обеспечивая в конечном итоге энергетический баланс. Тепло- и массоперенос происходит на фоне глобальной (с масштабами $L >> H$, где $H = p / \rho g$ – толщина однородной атмосферы), мезомасштабной ($L \approx H$) и локальной ($L << H$) атмосферной динамики, которая ответственна за многообразие происходящих в атмосфере метеопроцессов (при этом роль молекулярной теплопроводности в теплообмене ничтожна). Характерными модами регулярного тепло- и массопереноса служат адвекция, определяемая планетарной циркуляцией, и конвекция. Последняя обусловлена тем, что, поскольку на вращающихся планетах земной группы температура на данном уровне давления систематически изменяется в зависимости от широты ϕ, баротропная атмосфера становится бароклинной (см. уравнение состояния (3.2.1)), в которой, вследствие нелинейной эволюции гидродинамической неустойчивости Рэлея–Тейлора, возникает турбулентность. Сильные возмущения движения среды проявляются также в виде циклонических ветров, сопровождаемых турбулентным тепло- и массопереносом (*Чемберлен и Хантен, 1987*).

Конкретные реализации динамического переноса вещества на разных планетах, при наличии четырех типов сил, действующих на элементарный объем воздушной среды (сил тяжести и вязкого трения ($\boldsymbol{F}$), силы Кориолиса ($2\rho\Omega \times \boldsymbol{V}$) и градиента давления ($\nabla p$)), зависят, в основном, от соотношений периодов их вращения и тепловой релаксации атмосферы. Относительный вклад силы Кориолиса в динамику атмосферы определяется числом Кибеля–Россби $\boldsymbol{Ro} = U / fL$, где U и L – типичные горизонтальные масштабы скорости и длины для синоптических процессов (для земной атмосферы $\boldsymbol{Ro} \approx 10^{-1}$). Уравновешивая (в масштабах синоптических процессов) горизонтальные градиенты давления, сила Кориолиса придает течениям геострофичность, с которой связаны специфические колебания в атмосфере, с инерционной частотой $\tau = 2\Omega_z$ (где Ω_z – вертикальная составляющая угловой скорости вращения Земли). Совместный эффект вращения и сферичности планеты (изменение частоты τ (или f) по широте ϕ, так называемый "β-эффект") порождает упоминавшиеся ранее планетарные волны Россби–Блиновой, в ложбинах и гребнях которых образуются основные генераторы погоды – циклоны и антициклоны. Эти планетарные волны (распространяющиеся в атмосфере по горизонтали в западном направлении), имеют период, превышающий как период вращения планеты, так и периоды трех других типов волновых движений в атмосфере – приливных, акустических и внутренних гравитационных волн (*ВГВ*). Выше отмечалось, что короткопериодные *ВГВ* с относительно малыми амплитудами относятся к разряду микрометеорологических колебаний атмосферы и, наряду с конвекцией, служат источником мелкомасштабной турбулентности. Тем самым, они оказывают энергетическое (за счет диссипации) воздействие на формирование крупномасштабных погодных процессов. Для волн Россби–Блиновой справедливо условие Эртеля сохранения потенциальной завихренности Ω_* основного течения в виде

$$d\,\Omega_* / dt = 0, \qquad (\Omega_* \equiv \rho^{-1}\Omega_a \cdot \nabla S), \qquad (1.2.2)$$

где S – энтропия (на единицу массы) среды (причем, направление $\nabla S / |\nabla S|$ в стратифицированной атмосфере приблизительно вертикально – это, так называемая, термодинамическая вертикаль); Ω_* – потенциальный вихрь (адиабатический лагранжев инвариант, каковым по определению адиабатических процессов является и энтропия S $(dS/dt = 0)$). Условие (1.2.2) следует из уравнения для завихренности Фридмана (1.2.1) при адиабатических процессах, когда $\boldsymbol{F} = 0$. Характерным является также колебательный обмен между градиентом глобальной завихренности β, определяемой как $\beta = r^{-1}\partial f / \partial \phi$, и относительной завихренностью самой волны (*Чарни и Стерн, 1962; Монин, 1988; Ингерсолл и др., 1995*).

1.2.2. Динамика атмосфер Земли и Венеры. В атмосфере Земли силы, обусловленные градиентами давления, практически балансируются силами Кориолиса (число Россби $\boldsymbol{Ro} << 1$), поэтому типичной синоптической характеристикой является геострофический ветер, и по известному распределению давления могут быть определены его зональная и меридиональная составляющие $(u = -(\rho f)^{-1}\partial p / \partial y,\ v = (\rho f)^{-1}\partial p / \partial x)$. Между тем, на очень медленно вра-



Рис. 1.2.1. Изображение южной полусферы Венеры в ультрафиолетовых лучах с характерной конфигурацией в виде положенной на бок латинской буквы Y. Ее перемещение по диску с периодом около 4-х суток отражает характер циркуляции на Венере на уровне верхнего слоя сернокислотных облаков (примерно 65–70 км над поверхностью планеты), где наблюдаемые ультрафиолетовые контрасты образованы аэрозолями субмикронных размеров, состоящих, вероятно, из аллотропов серы. В структуре облаков хорошо различимы вихревые образования различных пространственных масштабов. Снимок космического аппарата "*Пионер -Венера*", с любезного разрешения *НАСА*.

щающейся Венере (один оборот за 243 земных суток) влияние сил Кориолиса незначительно ($\boldsymbol{Ro} >> 1$), в связи с чем оказывается справедливым условие циклострофического баланса (*Халтинер и Мартин, 1960; Маров и Гринспун, 1998*). Для него характерно то, что на циркуляционную ячейку (типа ячейки Хэдли), возникающую вследствие температурного градиента между экватором и полюсом, накладывается зональная (т.е. идущая вдоль параллелей) компонента, возрастающая с высотой. В результате создается суперротация атмосферы (или так называемая циркуляция карусельного типа), так что скорость ветра на Венере нарастает от 0.5 м/сек у поверхности до ~100 м/сек на высоте около 65 км, где она отчетливо прослеживается по перемещению характерных ультрафиолетовых контрастов на верхней границе облаков вблизи тропопаузы, предположительно обусловленных поглощением солнечной радиации аллотропами серы (Рис. 1.2.1).

На фоне в целом устойчивой стратификации тропосферы Венеры присутствуют зона конвективной неустойчивости в области среднего слоя облаков между 52 и 57 км и зоны сдвиговых течений, наиболее сильная из которых наблюдается в высотном профиле ветра на уровне 45–48 км (Рис. 1.2.2.). Интересно, что, хотя параметр статической устойчивости атмосферы здесь

$$d\,\theta/dz = (\theta/T)(dT/dz - \gamma_a) > 0 \qquad (1.2.3)$$

(где $\theta = T(p_0/p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ – потенциальная температура, p_0 – стандартное давление, $\gamma_a = g/C_p$ – адиабатический градиент) и градиентное число Ричардсона

$$\boldsymbol{Ri} = (g/\theta)(\partial\theta/\partial z)(\partial V_h/\partial z)^{-2} > \boldsymbol{Ri}_{cr} = 1/4\,, \qquad (1.2.4)$$

и следовательно, теоретически не должно возникать турбулентнсти (согласно теории, необходимым условием неустойчивости малых возмущений в невязком

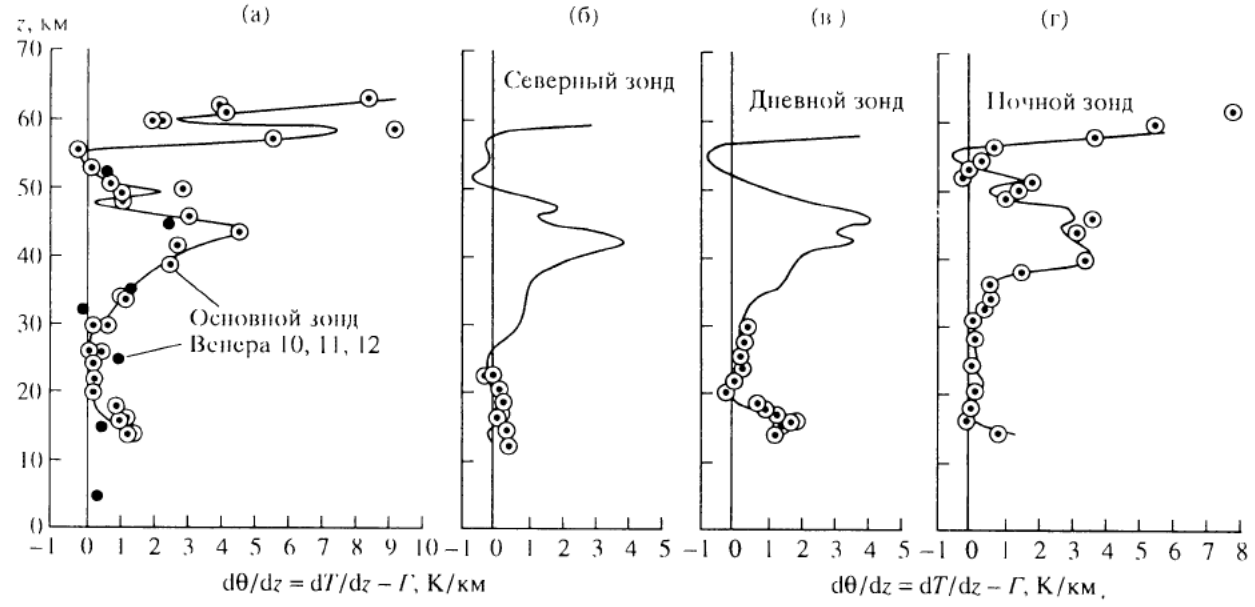


Рис. 1.2.2. Изменение параметра устойчивости атмосферы $d\theta/dz$ в функции высоты z на Венере по данным измерений температуры на космических аппаратах "*Венера 10, 11, 12*" и зондах "*Пионер-Венера*": а – "*Венеры*" (•) и *Большой зонд* (о); б – *Северный зонд*, в – *Дневной зонд;* г – *Ночной зонд*. Выделяются области конвективной неустойчивости на высотах 52–57 км и сдвиговых течений между 45 и 50 км. Наблюдаемое хорошее согласие данных в различных областях измерений и в разное время суток свидетельствует об однородном характере динамики атмосферы Венеры. Согласно (*Сифф, 1983*).

течении со сдвигом является Ri <0.25), она реально существует, как это имеет место и в земной атмосфере при аналогичных значениях $Ri \approx 2$–6. Ей соответствуют характерные для сдвиговой турбулентности флуктуации температуры ~ 0.1 K с масштабом ~ 100 м (*Ву, 1982; Сифф, 1983*). Они подтверждаются измерениями флуктуаций температуры в области высот 45–50 км, а также выше 60 км, по данным радиозатменных экспериментов.

Турбулентность, по-видимому, присутствует и в нижележащих областях тропосферы, по крайней мере выше 15–20 км, где были обнаружены вертикальные пульсации скорости величиной до 0.2–0.3 м/с при парашютном спуске аппаратов "*Венера*" путем измерений вертикальной составляющей допплеровского сдвига частоты, пример которых приведен на Рис. 1.2.3. (*Кержанович и Маров, 1983*).

В свою очередь, у верхней границы облаков (~ 60–65 км) устойчивость атмосферы повышается (параметр $\partial\theta / \partial z$ возрастает, Рис. 1.2.2), однако, помимо сдвиговых течений, наблюдаются также вихревые структуры различных пространственных и временных масштабов (Рис. 1.2.1), ассоциируемые с процессами глобальной циркуляции. Все сказанное свидетельствует о том, что турбулентность является важным элементом атмосферной динамики на Венере.

Заметим, что не менее важную роль она могла играть и на ранних этапах эволюции атмосферы Венеры, с чем связана гипотеза о первичном океане, который в дальнейшем, вследствие развития необратимого парникового эффекта, был потерян (*Маров и Гринспун, 1998*). Подкреплением этой гипотезы служат данные об обогащенности атмосферы Венеры дейтерием, отношение общего содержания которого к водороду ($N(D)/N(H) = (1.6 \pm 0.2)10^{-2}$) почти на два порядка больше земного, что можно объяснить за счет разделения изотопов при тепловом убегании (*диссипации*) водорода из атмосферы. Другими словами, дейтерий мог аккумулироваться в атмосфере по мере того, как вода первичного океана испарялась и и ее молекулы диссоциировались солнечной ультрафиолетовой радиацией. Однако, приведенное отношение $N(D)/N(H)$ означает, что масса испаренного океана составляла не более нескольких процентов от общего содержания воды в океанах Земли, что маловероятно на соседних планетах примерно

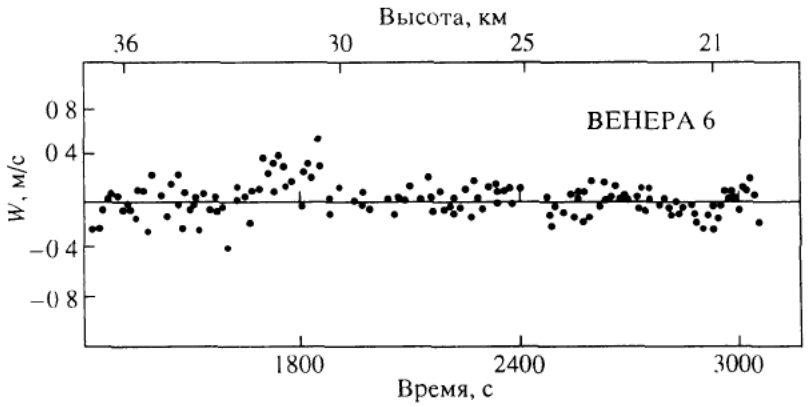


Рис. 1.2.3. Вариации вертикальной компоненты скорости ветра W при спуске на парашюте в атмосфере Венеры аппарата "*Венера 6*". Время спуска по оси абсцисс соответствует пройденному аппаратом интервалу высот от 51 до 18 км. Среднеквадратическое отклонение измеренных значений (при осреднении на интервале 10 с) не превосходит 0.2 м/с. Согласно (*Кержанович и Маров, 1983*).

одинаковых размеров. В связи с этим можно предположить, что тепловой механизм убегания действовал лишь на заключительном этапе, когда общее содержание водорода в атмосфере $N(H)$ уменьшилось до 2–3% от первоначального, а до этого действовал гидродинамический механизм диссипации, известный как *blow-off-assisted escape* (*Хантен, 1982; Хантен и др., 1988*), при котором за счет высокой скорости атомов водорода вместе с ним уносятся и более тяжелые атмосферные компоненты, а водород-дейтериевого фракционирования не происходит. Можно думать, что конкретная реализация такого процесса связана с важным вкладом многокомпонентной турбулентности.

1.2.3. Динамика атмосферы Марса. Динамика разреженной атмосферы Марса, обладающей малой тепловой инерцией, во многом отличается от земной и венерианской. Модель глобальной циркуляции, в основе которой лежит условие геострофического баланса ($\boldsymbol{Ro} \ll 1$), предсказывает аналогичную топологию движений в тропосфере и стратосфере, с преобладанием ветров, дующих в восточном направлении на высоких широтах зимой и в субтропиках летом, и в западном направлении на остальных широтах. В то же время, основным движущим механизмом переноса в меридиональном направлении служит сезонный обмен углекислым газом между атмосферой и полярными шапками, в результате чего возникают конфигурации типа ячейки Хэдли, с восходящими и нисходящими потоками и перестраивающейся системой ветров у поверхности и на больших высотах в летней и зимней полусферах (*Зурек и др., 1992; Маров, 1992; 1994*). На характер циркуляции сильное влияние оказывает рельеф поверхности (ареография), от которой зависят как наблюдаемая картина ветров, так и генерация горизонтальных волн различного пространственного масштаба. В свою очередь, планетарные волны, обусловленные бароклинной нестабильностью атмосферы, и внутренние гравитационные волны проявляются в виде нерегулярностей в профилях температуры и вертикальных движений в стратосфере. С ними связаны также наблюдаемые волновые движения в структуре облаков с подветренной стороны при обтекании препятствий, свидетельствующие о существовании в

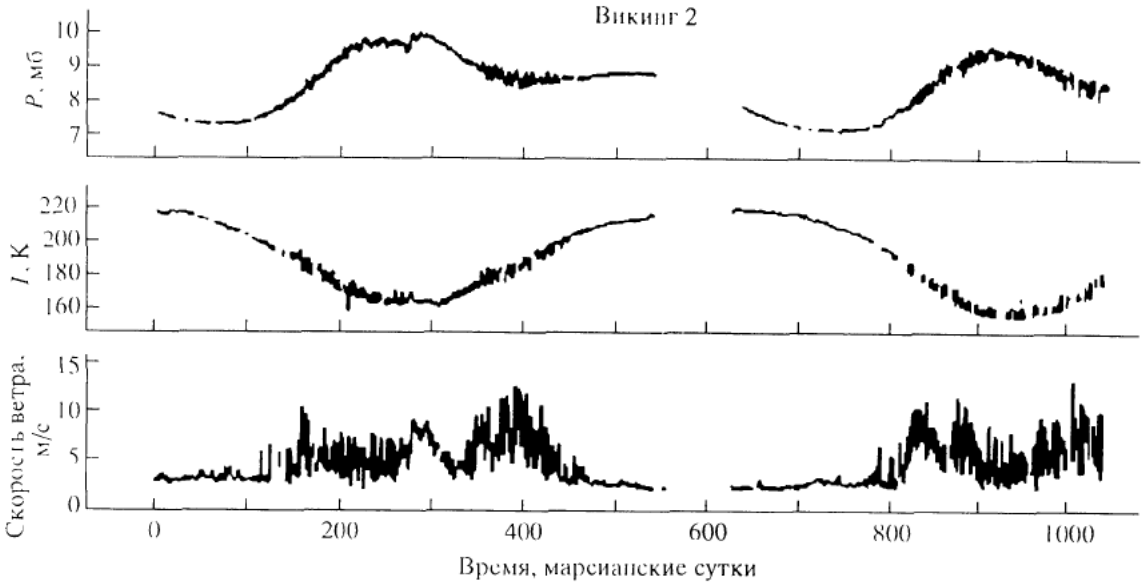


Рис. 1.2.4. Осредненные за одни марсианские сутки (SOL) значения давления P, температуры T и скорости ветра в приповерхностной атмосфере Марса, измеренные на посадочном аппарате "*Викинг - 2*" в области Утопия. По горизонтальной оси – время в SOL (1 SOL = 24 час 37 мин 23 с). Согласно (*Зурек и др., 1992*).

марсианской атмосфере сильных сдвиговых течений (*Бриггс и Леови, 1974*). Вариации температуры, давления и скорости горизонтального ветра у поверхности Марса по данным прямых измерений на посадочном аппарате "*Викинг-2*" приблизительно за три земных (полтора марсианских) года показаны на Рис. 1.2.4. Помимо характерного сезонного хода, обусловленного конденсацией CO_2 в полярных шапках, присутствуют менее упорядоченные вариации меньшего временного масштаба, связанные с суточными изменениями, локальными флуктуациями параметров атмосферы и волновыми процессами. Особенно сильные вариации наблюдаются в поле ветров, на основную составляющую которых накладываются влияние рельефа, шероховатости поверхности и турбулентности погранслоя. Исходя из имеющихся экспериментальных данных, можно допустить, что пограничный слой на Марсе аналогичен земному. Его структура схематично показана на Рис. 1.2.5 в виде высотных профилей температуры T и потенциальной температуры θ и условно подразделяется на очень тонкий (≤ 1 см) слой молекулярно-диффузионного теплообмена (A), непосредственно примыкающий к поверхности (в атмосфере Земли толщина этого слоя не превышает ~1 мм); сравнительно узкий (от нескольких метров до нескольких сот метров) слой наибольших вариаций температуры и скорости ветра (B); и конвективный слой (C) протяженностью в несколько километров, для которого $\theta \approx$ const (*Зурек и др., 1992*). Слои (B) и (C) характеризуются наиболее сильной турбулентной конвекцией, интенсивность которой существенно ослабляется за пределами погранслоя (выше слоя (C)).

Конвекция компенсирует высокую статическую нестабильность марсианской атмосферы, близкой к насыщению даже при очень низком относительном содержании водяного пара. Эффективность механизма возбуждения конвекции в дневные часы примерно на порядок выше, чем в атмосфере Земли, в то время как ночью она полностью блокируется вследствие образования у поверхности инверсионного слоя (D), имеющего положительный температурный градиент (Рис. 1.2.5). Вместе с тем, протяженность ночного погранслоя значительно больше, чем дневного, и подобно земной атмосфере, здесь, вероятно, дуют наиболее

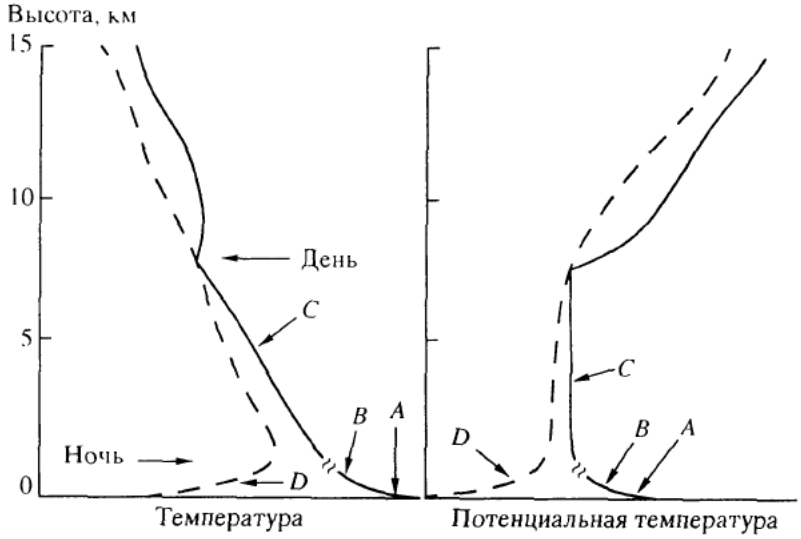


Рис. 1.2.5. Схематичное изображение марсианского пограничного слоя в виде зависимости от высоты температуры T (слева) и потенциальной температуры θ (справа). Сплошная кривая – день, штриховая – ночь. Выделены три характерных слоя A (D), B и C. Разрыв означает, что для слоев A (D) и B масштаб по высоте сильно завышен. Согласно (*Лиови, 1982*).

сильные ветры (*ночной джет*), не ослабляемые поверхностным трением при наличии инверсионного слоя (*Андре и др., 1978*). При этом, за счет сдвиговых течений в ночном джете, даже в условиях устойчивой стратификации вся приповерхностная атмосфера оказывается турбулентной. Конвекция поддерживает также большое содержание пыли, постоянно присутствующей в тропосфере Марса (как следствие, ее оптическая толща обычно не бывает меньше, чем $\tau \approx 0.2$) и создающей дополнительный динамический эффект, накладывающийся на глобальную систему ветров. Он возникает за счет положительной обратной связи между содержанием пыли и степенью разогрева атмосферного газа, что находит свое выражение в виде термически генерируемых суточных и полусуточных приливов, существование которых также подтверждается измерениями на "*Викингах*" (см. Рис. 1.2.4). Такая специфическая особенность атмосферы Марса наиболее ярко проявляется в периоды периодически возникающих глобальных пылевых бурь, когда мелкая пыль, благодаря турбулентному перемешиванию, поднимается до высоты свыше 30–40 км. Вследствие высокой степени непрозрачности тропосферы ($\tau \geq 5$) у поверхности создается антипарниковый эффект, сильно демфирующий циркуляционный перенос. Еще чаще в отдельных районах планеты могут возникать локальные пылевые бури (смерчи, или "*пылевые дьяволы*"), которые наблюдаются также на фазе спада глобальной пылевой бури, продолжающейся в течение нескольких месяцев.

В комплексе процессов, ответственных за возникновение, поддержание и распад пылевой бури, несомнено важную роль играет турбулентность диспергированной среды, характер которой существенно зависит от динамического и энергетического взаимодействия газовой и пылевой фаз, хотя детали этих механизмов до конца не ясны. Как известно, по данным измерений высотных профилей средней скорости $u(z)$ и температуры $T(z)$ в приземном погранслое можно оценивать турбулентные потоки импульса и тепла (*Монин и Яглом, 1992*). Допуская, что подобные закономерности справедливы также для атмосфер других планет, можно, обращая задачу, получить оценки соответствующих профилей для пограничного слоя Марса, которые модифицируются в случае турбулентных потоков, содержащих тяжелую примесь (*Баренблат, 1955; Голицын, 1972*). Было показано, что при нейтральной стратификации профиль средней скорости сводится к виду:

$$u(z) = (u_* / \kappa\omega) \ln(z / z_0), \qquad (1.2.5)$$

где $u_* = \sqrt{\tau / \rho}$ – динамическая скорость (скорость трения); $\tau = -\overline{\rho u'' v''}$ – турбулентный поток импульса; κ – постоянная Кармана; ρ – плотность газовой фазы. Безразмерный параметр $\omega = \nu / \alpha\kappa u_*$ определяется через скорость оседания пылевых частиц ν, отношение коэффициентов турбулентного обмена для примеси и количества движения α ($\alpha \approx 1$) и величину u_*. При этом оказывается, что, в случае присутствия в потоке сравнительно мелких частиц ($\nu < \alpha\kappa u_*$, или $\omega < 1$) формулу (1.2.5) можно интерпретировать так, что присутствие пыли в потоке приводит к уменьшению постоянной Кармана κ. Другими словами, градиенты скорости у поверхности возрастают, что способствует эффекту *скальтации* – отрыву и подъему в атмосферу больших количеств пылевых частиц.

1.2.4. Общая циркуляция атмосфер планет-гигантов. Структуру и динамику атмосфер планет-гигантов, характерным представителем которых служит Юпитер, отличает от планет земного типа целый ряд особенностей. Их тропосферы обладают большой протяженностью (~120–200 км), а тепловая структура соответствует адиабатическому температурному градиенту. В атмосферах Юпитера и Сатурна на уровне с давлением около 1 атм находится слой видимых облаков, состоящих из аммиака, а ниже – слои облаков из гидросульфида аммония (NH_4SH) и воды. Однако эти облака не объясняют наблюдаемого разнообразия цветов на дисках этих планет, поэтому следует допустить присутствие в них бо-

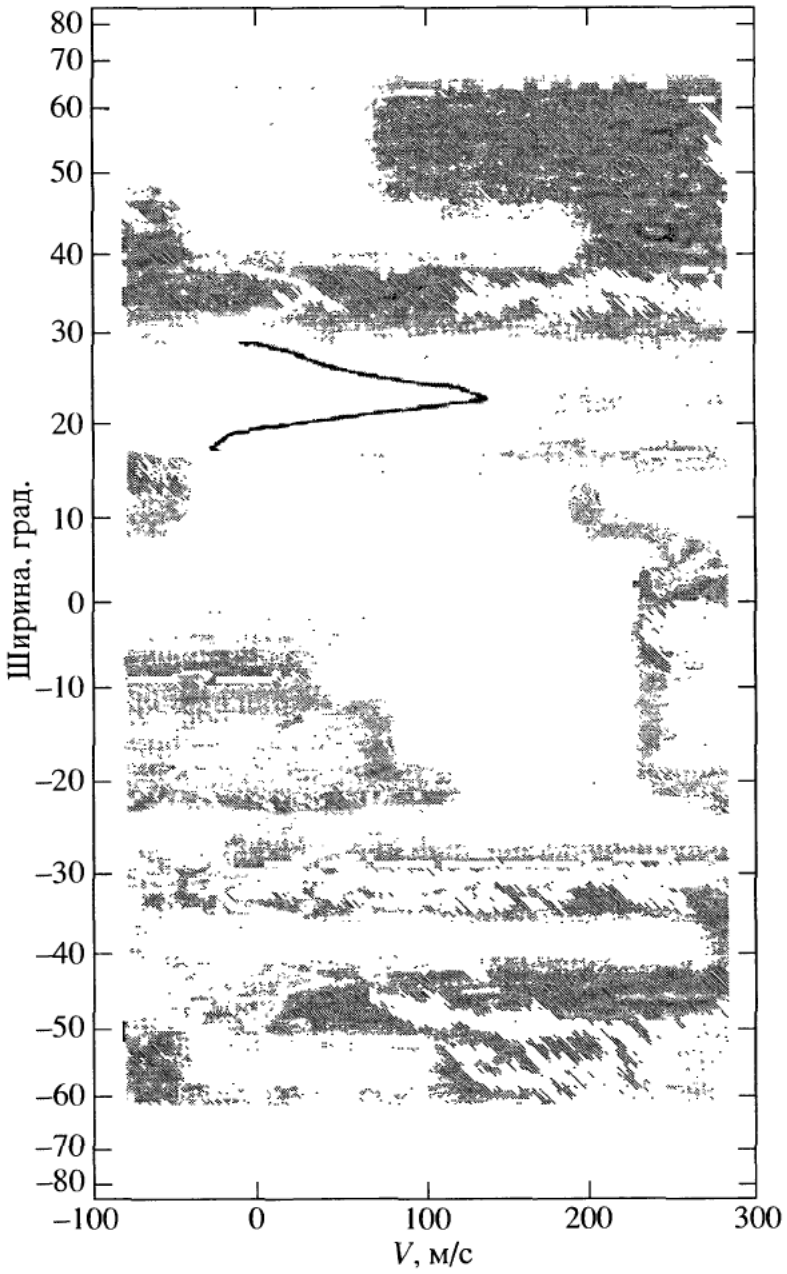


Рис. 1.2.6. Структура зон и поясов на Юпитере. Светлые области восходящих течений – зоны, более темные области нисходящих течений – пояса. Сплошной кривой показаны ветры переменного направления (со скоростью и в направлении собственного вращения планеты в зонах и в противоположном направлении в поясах); при этом в переходных областях возникают сильные сдвиговые течения. На эту картину накладываются неупорядоченные движения различного масштаба, наблюдаемые в структуре облаков. Две темных области в поясе на широте 8–18°N – 5-микронные горячие пятна. Снимок космического аппарата "*Вояджер*", с любезного разрешения *НАСА*.

лее сложных соединений, включая органические полимеры, образующиеся, как предполагают, под воздействием солнечной ультрафиолетовой радиации и грозовых разрядов.

В то же время, на Уране и Нептуне, при более низкой эффективной температуре, верхние слои облаков состоят из метана, под которыми, вероятно, расположены облачные слои из аммиака и серосодержащих соединений. Интенсивное поглощение метаном красной части солнечного спектра объясняет характерный аквамариновый цвет этих планет.

Главным свойством атмосферной циркуляции на Юпитере и Сатурне является наличие на низких и средних широтах упорядоченной системы зон и поясов и сильного джетового потока в направлении собственного вращения планеты в экваториальной области (Рис. 1.2.6 и 1.2.7). На Сатурне он достигает 500 м/с, по сравнению со 150 м/с на Юпитере, здесь же наблюдаются наибольшие температурные градиенты на фоне отсутствия заметного различия температур между экватором и полюсами (Рис. 1.2.8). Светлые зоны являются областями восходящих, а темные пояса – нисходящих течений. Для этих быстровращающихся планет $\boldsymbol{Ro} \ll 1$, поэтому, вследствие кориолисова взаимодействия меридиональных течений, между зонами и поясами возникают сильные зональные потоки. Наиболее сильные ветры переменного направления, скорость которых свыше 100 м/с, наблюдаются в этих переходных областях, где образуются сдвиговые течения. Вместе с тем, основным механизмом планетарной динамики, равно как и неупо-

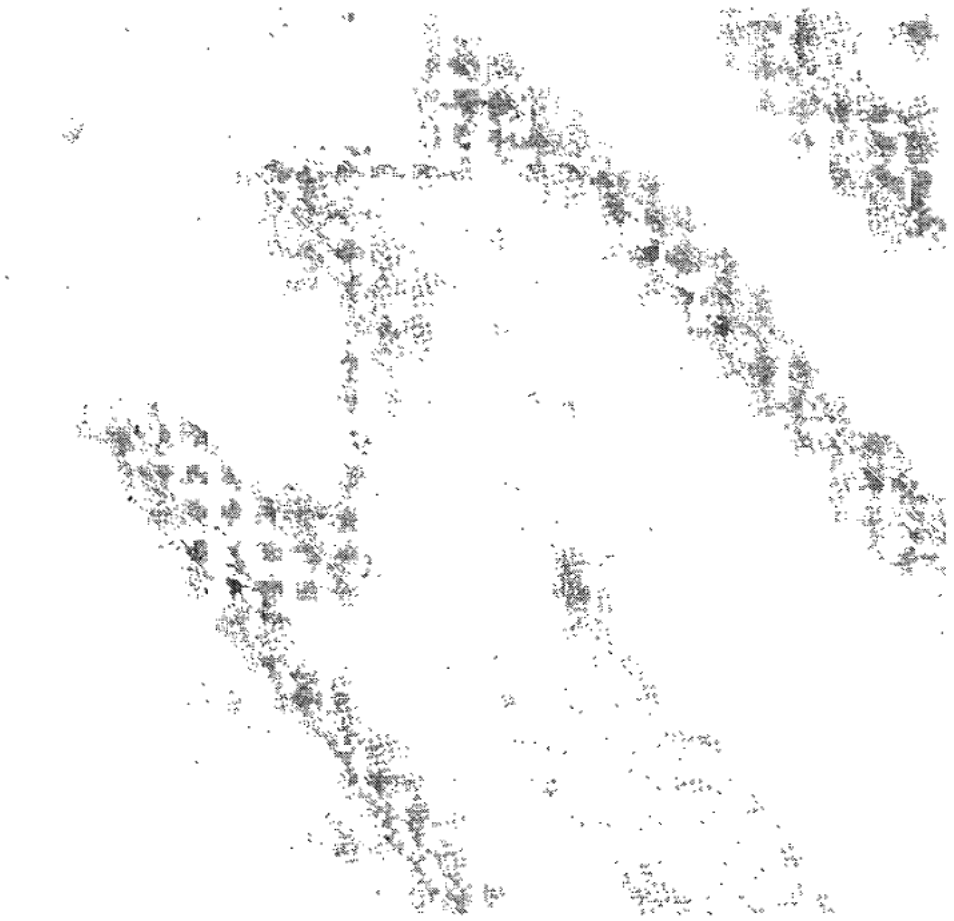


Рис. 1.2.7. Структура зон и поясов на Сатурне, характеризующаяся вцелом меньшей контрастностью их окраски по сравнению с Юпитером, но с более сильными ветрами, достигающими u = 5ОО м/с в экваториальной зоне. В структуре течений также наблюдаются неупорядоченности и вихри, подобные волновым движениям в темном поясе к низу от центра Снимок космического аппарата "*Вояджер*", с любезного разрешения *НАСА*

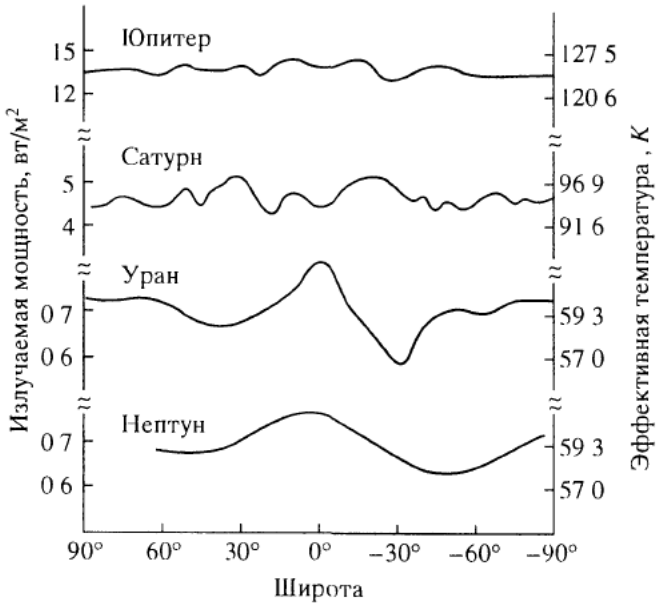


Рис. 1.2.8. Излучаемая мощность и эквивалентная яркостная температура в зависимости от широты на уровне с давлением 0.3–0.5 атм для планет-гигантов. Заметные различия температуры между экватором и полюсами отсутствуют, небольшие вариации отражают изменения скоростей зональных течений. Согласно (*Ингерсолл, 1990*).

рядоченных движений и многочисленных когеррентных вихревых структур (конвективных ячеек), которые наблюдаются на высоких широтах, является естественная конвекция, обусловленная существованием теплового источника в недрах. Поэтому данный механизм во многом аналогичен классической проблеме гидродинамической неустойчивости Рэлея–Тейлора горизонтального слоя жидкости, подогреваемой снизу – проблеме Бенара. Однако в рассматриваемом случае конвективные недра находятся в тесном динамическом взаимодействии с вышележащим газовым слоем, в котором происходит поглощение солнечной энергии, что приводит к чрезвычайно сложной структуре течений с многочисленными вихревыми образованиями и высокой степенью турбулизации, как это наиболее отчетливо наблюдается на диске Юпитера (Рис. 1.2.9).

Аналитические и численные исследования конвекции в быстро и равномерно вращающихся жидких сферах (*Буссе, 1970; 1976; Гилман, 1977; 1979*) показали, что при наличии внутреннего источника тепла в такой вязкой теплопроводной жидкости возникает периодическая система конвективных ячеек (валиков), ориентированных параллельно оси вращения. Одновременно, за счет наклона ячеек, вызванного вращением, создается слабый вторичный поток, состоящий из дифференциально вращающихся коаксиальных цилиндров (оболочек), как это показано на Рис. 1.2.10. Подобные структуры, полученные также в экспериментах с баротропной жидкостью во вращающемся осесимметричном контейнере, ассоциируются с зонами и поясами в атмосферах Юпитера и Сатурна, расположенными на несколько отличных по высоте уровнях.

Причиной возникновения вторичного потока служит нелинейный механизм передачи энергии вихрей в кинетическую энергию среднего движения или, другими словами, переноса в восточном направлении флуктуационных составляющих $\overline{\rho u' v'}$ количества движения относительно градиента среднего количества движения $\partial u / \partial r$, где u' и v' – отклонения от осредненных по долготе восточ-

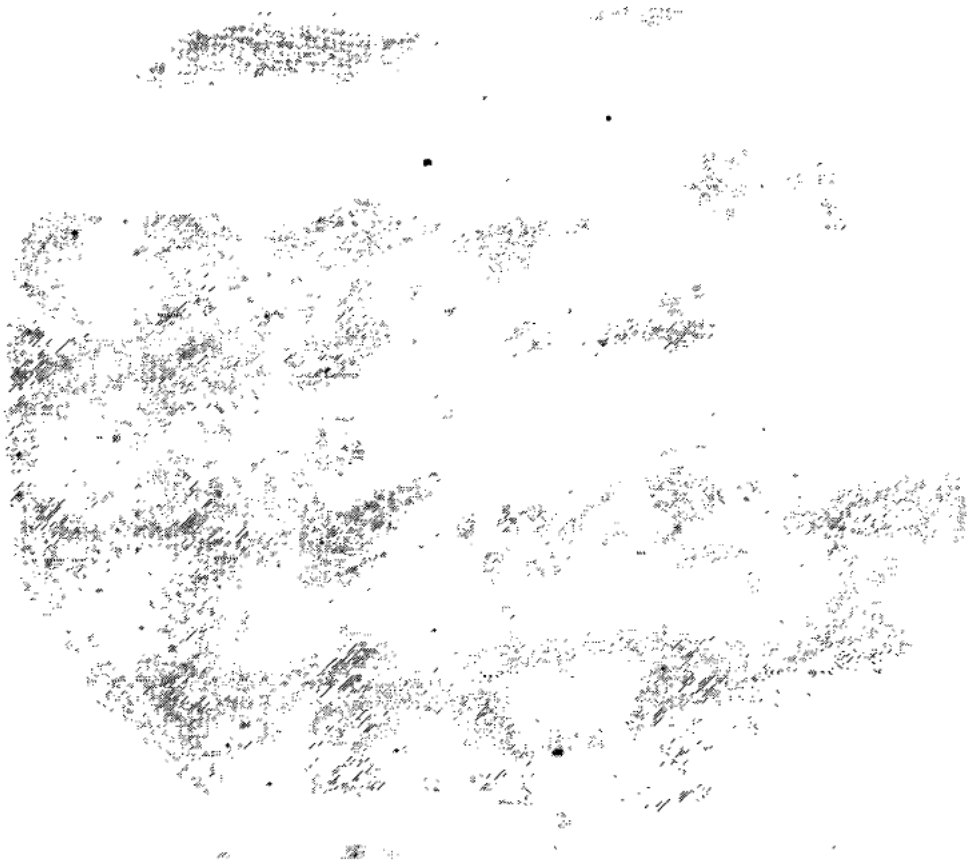


Рис. 1.2.9. Атмосферные движения на диске Юпитере, наблюдаемые в виде разнообразных конфигураций в структуре облаков. Это мозаичное изображение составлено из девяти телевизионных снимков, полученных через фиолетовый фильтр космическим аппаратом "*Вояджер*" с расстояния 4.7 миллионов километров. Максимальное разрешение на диске составляет 140 км. Упорядоченные зональные течения, отражающие систему планетарной циркуляции в экваториальных и средних широтах, сменяются полностью неупорядоченными структурами на высоких широтах, целиком обусловленными турбулентной конвекцией за счет теплового источника в недрах. Отчетливо видны вихревые движения различного пространственного масштаба. К югу от экватора в центре – Большое Красное Пятно (*БКП*). С любезного разрешения *НАСА*.

ной и радиальной скоростей движения u и v, а r – радиальное направление (*Ингерсолл и др., 1984*). К сожалению, полной аналогии с наблюдаемыми течениями данная модель не дает. Остается также открытым вопрос относительно толщины слоя, в пределах которого существуют зональные течения, то есть до какой глубины градиент температуры сохраняется близким к адиабатическому (γ_a) и как происходит диссипация энергии, зависящая от величины турбулентной вязкости ν^T и среднего квадрата скорости вихревых движений $|\partial u / \partial r|^2$. Ингерсолл и Поллард (*1982*) предприняли попытку получить эту оценку, исходя из допущения о равенстве турбулентных значений вязкости и температуропроводности, определив последнюю как отношение турбулентного потока тепла к градиенту потенциальной температуры $|\partial\theta / \partial r|$. Критерием проникновения зональных течений вглубь газожидкой планеты оказалось условие $\boldsymbol{Ri} = N^2 |\partial u / \partial r|^{-2} \geq 1$, где $N^2 = (g / \theta)\partial\theta / \partial r$ – частота Брента–Вяйсяля; g – ускорение силы тяжести, T – температура.

Этот вывод согласуется с предсказанием теории, что при градиентных

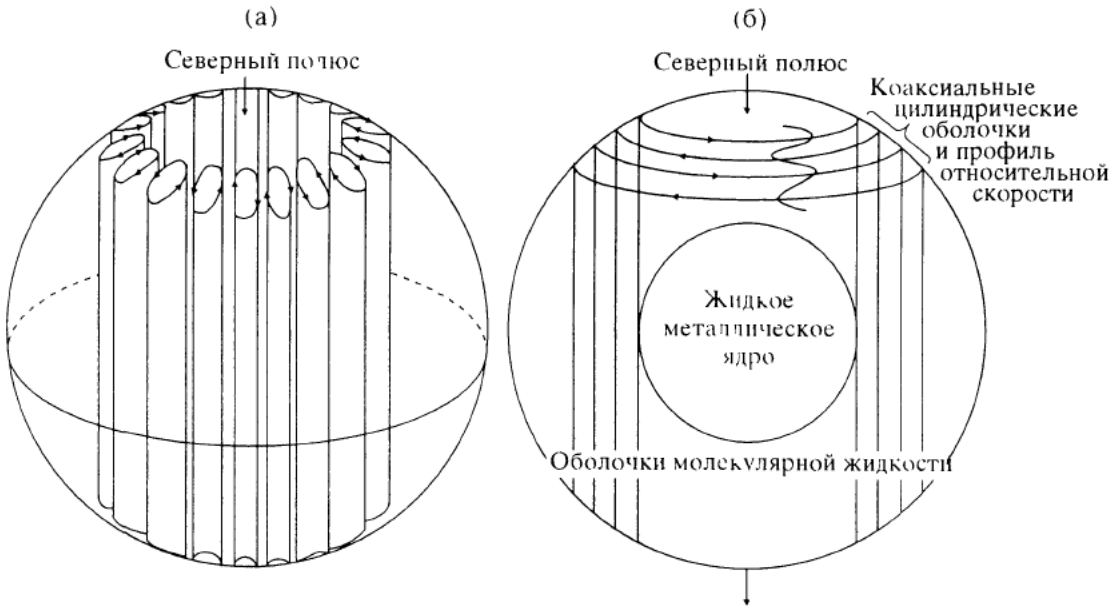


Рис. 1.2.10. Формирование конвективных ячеек валикового типа (а) и цилиндрического зонального потока (б) на быстро вращающейся жидкой сфере. Валиковая конвекция является наиболее характерной формой конвективной неустойчивости вязкой проводящей жидкости, подогреваемой снизу, при равномерном осесимметричном вращении, а коаксиальные цилиндрические поверхности служат наиболее общей формой зонального течения идеальной жидкости с внутренним адиабатическим градиентом температуры. Передача энергии наклонных конвективных ячеек зональному течению в сдвиговом горизонтальном слое отражает взаимодействие этих двух форм движений. Согласно (*Буссе, 1976, Ингерсолл, Поллард, 1982).*

числах Ричардсона $\boldsymbol{Ri} \approx 1$ в сдвиговом течении должны появляться наклонные конвективные ячейки (*Липпс, 1971*). Кроме того, согласно прямым измерениям атмосферного зонда "*Галилей*", достигшего уровня с давлением 21 бар, скорость ветра в процессе спуска действительно нарастала (*Ингерсолл и др , 1998*), хотя этой глубины едва ли достаточно для того, чтобы подтвердить или опровергнуть модель. Наоборот, с ростом высоты – в верхней тропосфере и стратосфере – ветры быстро ослабевают.

Механизм развития и поддержания планетарной циркуляции за счет передачи энергии вихрей $\overline{\rho u'v'}$ в средние зональные течения исследовался также путем численного моделирования движений в тонких слоях жидкости на вращающейся планете (*Вильямс, 1978; 1979*). Такая баротропная модель позволила проследить эволюцию вихрей, имитирующих конвективные ячейки и первоначально распределенных в шахматном порядке, при наличии турбулентной вязкости, причем, как оказалось, усиление зонального потока происходит в этом случае за счет совпадения по знаку средних вихревых напряжений $\overline{\rho u'v'}$ с меридиональной компонентой средней скорости $\partial u / \partial y$ (Рис. 1.2.11).

Положительная корреляция между $\overline{\rho u'v'}$ и $\partial u / \partial y$ на Юпитере была подтверждена измерениями на космических аппаратах "*Вояджер*", что привело к оценке вклада энергии диссипации вихревых движений в пределах облачного покрова в тепловую эмиссию планеты порядка 10% (*Ингерсолл и др ,1981; 1984*). Поскольку аналогичная оценка для Земли не превышает ~ 0.1% (при общем уровне диссипации всех форм кинетической энергии в тепло не более ~1%), это свидетельствует о существенном различии термогидродинамических циклов для этих планет.

Помимо Юпитера и Сатурна, конвекция, действующая в качестве теплового механизма при передаче энергии из глубины, должна играть важную роль также в динамике атмосферы Нептуна, в отличие от Урана, у которого внутренний источник тепла отсутствует. Наиболее интересной особенностью, определяющей тепловой режим и динамику атмосферы Урана, является необычная ориентация оси вращения, лежащей почти в плоскости его орбиты. Однако, несмотря на большое различие в наклонениях и энергетике, у обеих планет наблюдаются качественно одинаковые меридиональные профили температуры и зонального ветра на уровне облаков, хотя на Уране ветер примерно вдвое слабее. Важно, кроме того, подчеркнуть, что на Нептуне, несмотря на то, что мощность его энергетических источников на единицу площади примерно в 20 раз меньше, чем в атмосфере Юпитера, скорость ветра почти в 2.5 раза выше, достигая 400 м/с на экваторе.

Это связано с тем, что атмосфера Нептуна обладает очень малой турбулентной вязкостью, и соответственно, низким уровнем диссипации энергии ветровых движений и турбулизации сдвиговых течений (*Ингерсолл и др., 1995; 1998*). При этом направление ветров на Нептуне и Уране противоположно направлению их вращения, подобно суперротации атмосферы Земли на экваторе, что отличает их от Юпитера, Сатурна и Венеры (а также Солнца и Титана), для которых характерна экваториальная суперротация (Рис 1.2.12). Продолжая аналогии с Землей, заметим, что, в противоположность Нептуну, земная атмосфера обладает наи-

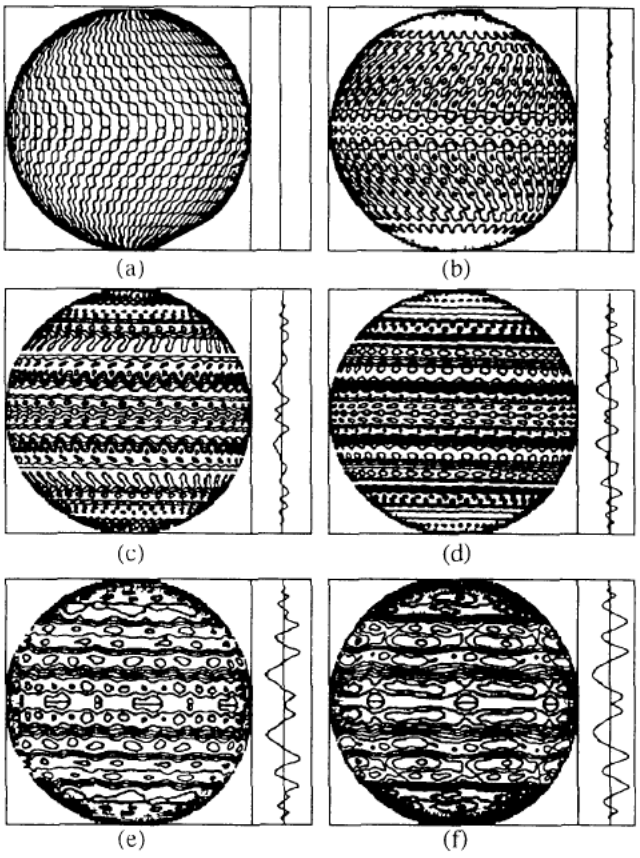


Рис 1.2.11. Развитие зональных течений из вихревых движений в тонкой атмосфере на вращающейся планете согласно численной модели (*Ушьямса, 1978*). В этой баротропной модели (при отсутствии изменений плотности в горизонтальном направлении) исходная ячеистая структура, обусловленная подводом снизу механической энергии (a), последовательно эволюционирует в зональные течения, на которые накладываются вихри различной конфигурации и размеров (b–f). Распределение скоростей зональных потоков показано на кривых справа.

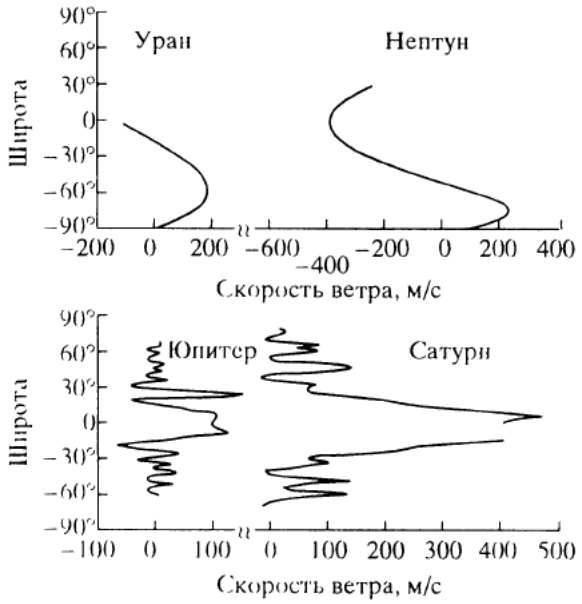


Рис. 1.2.12. Скорости зонального ветра в зависимости от широты на планетах-гигантах. В отличие от Юпитера, Сатурна и Урана, для которых характерна суперротация, на Нептуне преобладает субротация, а сдвиговые течения, как и на Уране, выражены слабо. Согласно (*Ингерсолл и др.*, 1995).

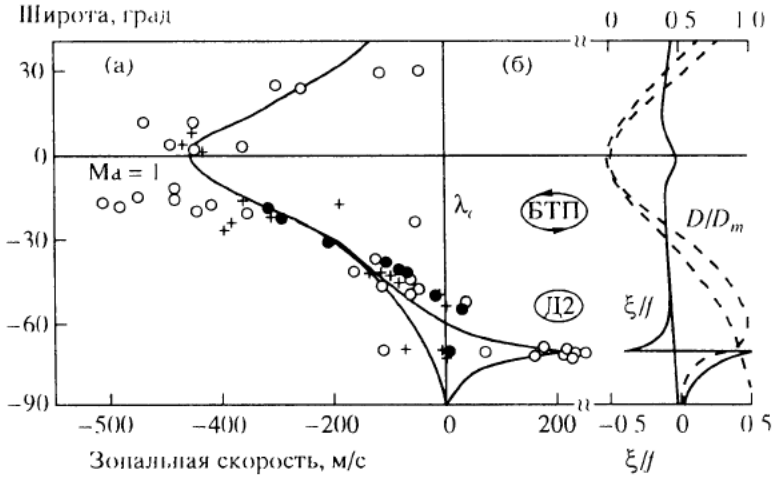


Рис. 1.2.13. Сопоставление профилей скорости зонального потока на Нептуне: а) согласно данным измерений перемещений облаков в трех сериях (∘, *, +) при пролете космического аппарата "*Вояджер*" и б) согласно модели мелкой воды (*Эллисон и Луметта, 1990*). Сплошная линия – отношение параметров относительной (ζ) и планетарной (f) завихренностей; пунктир – отношение вертикальной толщины слоя D к его максимальному значению в зависимости от широты ($D/D_m = h(\phi)$). Наилучшее согласие с измерениями дает модель, рассчитанная в предположении кусочно-постоянного значения потенциальной завихренности $q = (\zeta + f)/h$ в обоих полусферах. Показано положение БТП и пятна меньшего размера Д2.

большим уровнем диссипации, главную роль в которой, наряду с мелкомасштабной конвекцией и поверхностным трением, играют процессы, связанные с гидрологическим циклом. Поэтому, хотя Земля получает несравненно больше солнечной энергии, скорости ветра на ней почти на порядок ниже, чем на Нептуне.

Феномен Урана и Нептуна вновь приводит нас к вопросу о связи недр с наблюдаемым тонким верхним газовым слоем – атмосферой, о соотношениях кинетической и потенциальной энергии при формировании атмосферной динамики. Сопоставление измеренного профиля зональной скорости ветра u на Нептуне с расчетами в приближении модели мелкой воды (*Эллисон и Луметта, 1990; Ин-*

герсолл и др.,1995) показано на Рис. 1.2.13. Рассматривался устойчивый тонкий слой жидкости переменной толщины h на глубоком адиабатическом подслое. Вертикальная компонента относительной завихренности $\varsigma = (\nabla \times \boldsymbol{V})_z$ определялась в функции $\partial h / \partial \phi$, одновременно использовалось условие сохранения потенциальной завихренности основного течения $q(\phi) = const$ (где $q \equiv (\varsigma + f)/h$) (см. условие (1.2.2)) и, в качестве свободного параметра, так называемый радиус деформации $L_d = \sqrt{(gh\Delta\rho/\rho)/f}$, характеризующий влияние вихревых образований на быстро вращающейся планете (здесь $\Delta\rho/\rho$ – отношение плотностей слоев; остальные обозначения были приведены выше). Наилучшее согласие с измерениями получено при условиии, что $q(\phi)$ сохраняется постоянным не во всей полусфере, а лишь в пределах ограниченных интервалов $\Delta\phi$. При анализе результатов моделирования ключевое значение имеет параметр L_d, или, иными словами, горизонтальный размер возмущения, кинетическая энергия которого E_K сопоставима с потенциальной энергией E_P. Очевидно, у возмущений, меньших L_d, $E_K > E_P$, и наоборот. Имеющиеся данные не позволяют пока, к сожалению, наложить на этот параметр определенные ограничения.

Среди обсуждавшихся особенностей облачных структур у планет-гигантов с внутренним тепловым источником особо выделяются многочисленные крупно-



Рис. 1.2.14. Большое Красное Пятно (*БКП*) на Юпитере (размером ~25000× 12000 км) с сильно турбулизованными областями течений к западу и югу от него. Справа – вихри меньшего размера ("*белые овалы*"). Максимальное разрешение на снимке – 95 км. Снимок космического аппарата "*Вояджер*", с любезного разрешения *НАСА*.

масштабные вихревые образования (см. Рис. 1.2.9), наиболее характерные из которых – это Большое красное пятно (*БКП*) на Юпитере размером ~ 25 000 км (Рис. 1.2.14) и Большое темное пятно (*БТП*) на Нептуне размером ~ 15 000 км (Рис. 1.2.15). *БКП* представляет собой гигантский антициклон со временем жизни, оцениваемым в несколько тысяч лет, находящийся выше окружающего слоя облаков благодаря восходящим движениям и обладающий сложной морфологией внутренних вихревых течений.

Скорости течений на переферии превышают 100 м/с; здесь наблюдается особенно сильная турбулизация потока и обмен частицами газа и облаков между вихрем и соседними зонами. Убедительного объяснения существования подобных стабильных структур в атмосферах Юпитера, Сатурна и Нептуна на фоне хаотической мелкомасштабной активности в виде относительно небольших облаков, появляющихся и исчезающих в течение нескольких часов, пока нет. На Юпитере обнаружены также области с нисходящими движениями и более высокой температурой, чем окружающие их облака (так называемые 5-микронные горячие пятна, см. Рис. 1.2.4), с которыми связаны определенные локальные изменения химического состава атмосферы. Интересно, что в одном из таких пятен произошел спуск на парашюте зонда космического аппарата "*Галилей*", чем объясняется, по-видимому, измеренное им крайне низкое содержание в атмосфере водяного пара, не характерное для всей планеты (*Махаффи и др., 1998; Карлсон и др.,1998*).



Рис. 1.2.15. Большое Темное Пятно (*БТП*) на Нептуне (размером ~ 15 000×6 000 км) и меньшее пятно внизу справа, скорость перемещения которых по диску планеты составляет 18.3 и 16.1 час соответственно. Скорости ветровых движений в окрестности *БТП* достигают 550 м/с. Снимок космического аппарата "*Вояджер*", с любезного разрешения *НАСА*.

Наблюдаемые долготно-широтные осцилляции пятен, включая *БКП* и *БТП*, напоминают движение верхней части вихря в стабильно стратифицированном сдвиговом потоке. Подобно упорядоченным зональным течениям, их естественно рассматривать с позиций формирования гидрологического цикла в стратифицированной газожидкой среде, с учетом ее химического состава, энергетики и выполнения критерия устойчивости. Понимание всей совокупности гидрометеорологических элементов такой системы, включая взаимосвязь конвективных движений в недрах и атмосферах планет-гигантов со спецификой планетарной циркуляции и турбулентных процессов, наблюдаемых на уровне облаков, при различных соотношениях внутренней и солнечной энергии, является одной из актуальных задач геофизической гидродинамики.

§ 1.3. Турбулентность в верхних атмосферах планет

К верхней атмосфере относят разреженную газовую оболочку планеты, часто ассоциируемую с околопланетным космическим пространством. Значительная ее часть служит характерным примером многокомпонентной турбулентной среды. Многокомпонентность обусловлена тем, что газ неоднороден по своему химическому составу, находится в поле силы тяжести и частично диссоциирован. Ключевую роль в тепломассообмене играют разнообразные процессы фотолиза, химической кинетики и диффузии ответственные за энергетику и динамику среды. От относительного вклада турбулентной и молекулярной диффузии в значительной степени зависит стратификация атмосферного газа на больших высотах.

1.3.1. Верхние атмосферы планет земной группы. Под верхней атмосферой Земли обычно понимают области, лежащие выше стратосферы (~50 км). В последнее время сюда стали относить также и области, расположенные выше тропопаузы (~12–15 км), и весь интервал высот от этого уровня до *мезопаузы*, включая нижнюю *термосферу* (~110 км), называют средней атмосферой. В верхней части средней атмосферы и в находящейся над ней термосфере (области положительного температурного градиента) происходит основной энергообмен, обусловленный прямым поглощением солнечного коротковолнового излучения в диапазонах далекого ультрафиолета и мягкого рентгена (примерно от 2000 до 10 $\overset{o}{A}$), а также – после промежуточных процессов ускорения в магнитосфере – частиц солнечной плазмы. В ниже лежащих областях средней атмосферы поглощается более длинноволновая часть ультрафиолетовой радиации (4000–2000 $\overset{o}{A}$), ответственная, в частности, за образование *озоносферы*, а также высокоэнергичные солнечные протоны (с энергиями < 15–30 Мэв), генерируемые при солнечных вспышках (более подробно см. (*Акософу, Чепмен, 1974; Маров, Колесниченко, 1967*).

Помимо поглощения энергии солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации, значения таких важнейших параметров верхней атмосферы, как скорость ветра, массовая плотность, температура и химический и ионный состав, во многом определяются переносом массы, энергии и количества движения из нижележащих областей средней атмосферы и тропосферы, а также процессами магнитосферно-ионосферного взаимодействия. Последнее находит наиболее сильное выражение в распределении термогидродинамических параметров вы-

сокоширотной термосферы и ионосферы вследствие диссипации энергии высыпающихся из магнитосферы частиц и возбуждаемой токовой системы и, как следствие, мощного разогрева среды, сопровождаемого возникновением больших локальных градиентов массовой плотности и динамического переноса.

Атмосфера до высоты ~120 км (уровня гравитационно-диффузионного разделения газов) остается хорошо перемешанной, со средним молекулярным весом $M = 28.9$. Этот уровень служит, таким образом, границей между *гомосферой* и *гетеросферой*. Его также называют *турбопаузой* (или *гомопаузой*), характеризуя тем самым высоту, начиная с которой турбулентное перемешивание перестает быть эффективным и сменяется молекулярной диффузией, а атмосферные компоненты распределяются по высоте в соответствии со своей шкалой высот. Несмотря, однако, на постоянство M в средней атмосфере, ее состав подвержен большим изменениям из-за наличия малых (примесных) компонентов. Это связано с чрезвычайно большой сложностью химических и динамических процессов, в первую очередь, в стратосфере, и в меньшей мере – в мезосфере и нижней термосфере.

Преобладание азота N_2 – основной составляющей атмосферы у земной поверхности – сохраняется в среднем до высоты ~180 км. Выше в термосфере начинает доминировать атомарный кислород O, образующийся в результате диссоциации O_2, а еще выше – гелий He и водород H_2 (Рис. 1.3.1). В зависимости от температуры термосферы, определяемой, главным образом, уровнем солнечной активности в течение 11-летнего цикла и временем суток, концентрации He и O оказываются примерно одинаковыми на высотах между 500 и 700 км, а He и H_2 – между 900 и 1600 км. При этом, если концентрации N_2, O_2 и O с ростом температуры возрастают, то концентрация H_2, вследствие увеличения скорости его диссоциации, наоборот, падает. Еще более сложный характер носят вариации He, испытывающие сильный широтный ход под влиянием фазы солнечного цикла. В свою очередь, в нижней термосфере и мезосфере заметную роль в механизмах химических превращений и лучистого теплообмена играют водород- углерод- и азотсодержащие соединения, такие как CH_4, H_2O, OH, CO_2,

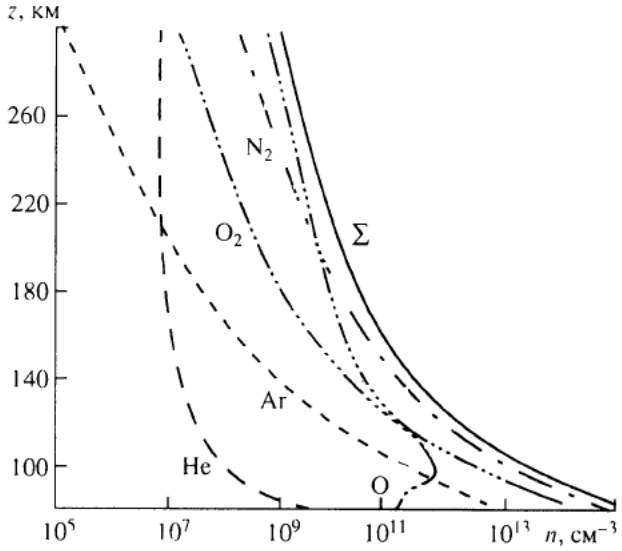


Рис. 1.3.1. Высотные профили нейтральных составляющих термосферы Земли для средних условий солнечной активности. Σ – суммарная концентрация частиц n, см$^{-3}$.

NO_x и O_3, некоторые их более сложные производные (в том числе антропогенного происхождения), а также ряд других относительно малых, в том числе метастабильных, компонентов (Рис. 1.3.2.). Аэрономические процессы с их участием, особенно при наличии частиц со *сверхтепловыми* скоростями, ответственными за неравновесность процессов химической кинетики, оказывают существенное влияние на структуру и энергетику не только этих областей, но и всей вышележащей атмосферы (*Маров, Колесниченко, 1987; Маров и др.,1996; 1997*).

Значительный вклад в структуру и энергетику средней атмосферы и термосферы вносят также различные динамические процессы, включая волновые движения. Динамика, связанная с общей циркуляцией, обусловливает перераспределение вещества и энергии в глобальном масштабе. Она во многом определяет (через обмен массой, импульсом и энергией) общий энергетический баланс, отражая тем самым глубокие внутренние связи во всем околопланетном пространстве. Вместе с тем, важную роль в тепловом балансе различных областей и наблюдаемых пространственно-временных вариациях структурных параметров играют также динамические вариации поля давления, в первую очередь уже упоминавшиеся атмосферные приливы и внутренние гравитационные волны (*ВГВ*). Основным источником приливов в атмосферах планет земной группы служат солнечный нагрев и гравитационное притяжение Солнца (для Земли также и Луны).

Затухание *ВГВ* служит важным энергетическим источником верхней атмосферы. Хотя существует много разнообразных источников волн с различными фазовыми скоростями, наличие стационарных нерегулярностей в основании ат-

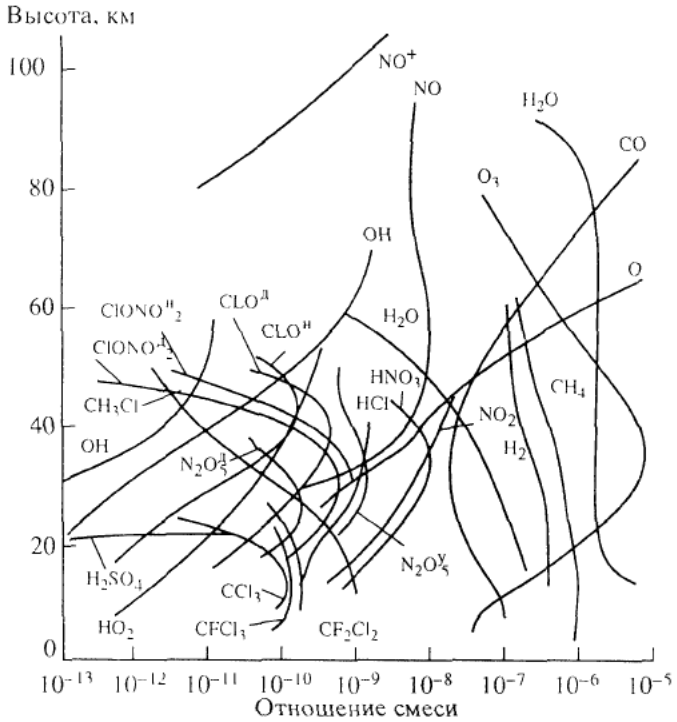


Рис. 1.3.2. Распределение по высоте концентраций малых компонентов в средней атмосфере Земли. Концентрации указаны в виде отношения смеси (по объему), т.е. относительно единичного объема, образованного суммой основных компонентов N_2,O_2 и Ar. Индексами д, н, у, в обозначены соответственно содержания компонентов днем, ночью, утром и вечером. Согласно "*Солнечно-земные исследования. 1981*".

мосферы создает пик в волновом спектре с нулевой горизонтальной скоростью. Поскольку поглощение волны приводит к ускорению среды в направлении распространения волны, суммарный эффект сводится, как правило, к торможению атмосферы (*Фелс, Линдзен, 1974; Линдзен, 1981; Холтон, 1982; Эндрюс и др., 1987*).

Для Марса характерно возникновение упоминавшегося выше термического прилива, а приливные эффекты в плотной атмосфере Венеры, возможно, оказывают также влияние на ее захват в резонансный режим с Землей (см., например, (*Кузьмин, Маров, 1974*)). Источником *ВГВ* служат различного рода возмущения, связанные с перестройкой метеорологических процессов, обтеканием воздушными потоками горных массивов, ветровыми сдвигами (*шировыми* нестабильностями), разогревом *авроральных* областей и др. В стратифицированной среде, подобной атмосфере, такие волны обычно распространяются как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении и, например, в возникшем начальном возмущении по вертикали с ростом высоты может преобладать горизонтальная компонента. Выделение тепла при диссипации энергии внутренних гравитационных волн в нижней термосфере оказывается сопоставимой с другими энергетическими источниками, связанными с притоком солнечной радиации на этих высотах (Рис. 1.3.3.).

Важным динамическим и энергетическим фактором, особенно в нижней термосфере, является турбулентность, временная и пространственная морфология которой остается до конца не выясненной. Ее возникновение обусловлено, главным образом, конвективной неустойчивостью, ветровыми сдвигами, приливными колебаниями, нестабильностью и/или распадом *ВГВ* и другими возмущениями. Поэтому, при анализе термогидродинамических процессов в средней атмосфере часто оказывается необходимым одновременно рассматривать уравнения, определяющие осредненные поля концентраций, температуры и скорости ветра вместе с такими характеристиками интенсивности турбулентных движений

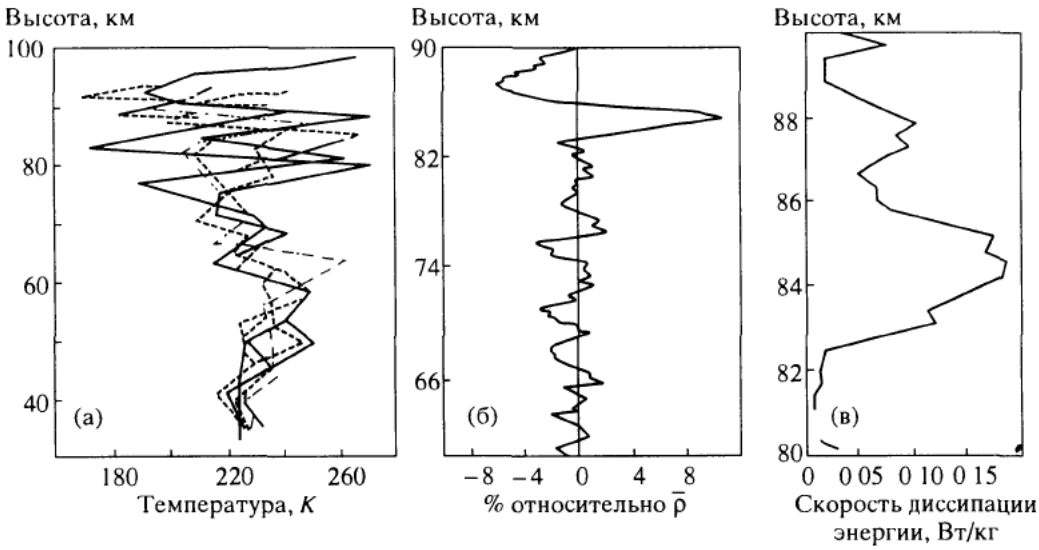


Рис. 1.3.3. Пример вариаций температуры T (*а*) и относительной плотности ρ (*б*) по высоте в средней атмосфере Земли, связанные с распространением внутренних гравитационных волн, по данным измерений при помощи высотных ракет и лидаров. С ними сопоставлен высотный профиль скорости диссипации энергии *ВГВ*, рассчитанный по данным измерений спектров мощности радиолокационных сигналов (*в*). Согласно "*Программе средней атмосферы, 1985*" и "*Доклада Геофизического института Университета Аляски,1983–1984*".

как коэффициент турбулентной диффузии D^T (иногда в качестве свободных параметров задачи). Многочисленные натурные эксперименты привели к выводу, что до ~ 100 км турбулентность присутствует почти постоянно, причем в области 60 –100 км часто отдельные турбулентные слои (толщиной в несколько километров) соседствуют с относительно спокойными. Здесь же присутствует флуктуационная компонента ветра, возникающая из-за волновых движений.

1.3.2. Турбулентная диффузия в атмосферах планет земной группы. С турбулентными процессами в верхней атмосфере планеты связано, прежде всего, высотное перераспределение компонентов (механизмом турбулентной диффузии), изменение скорости протекания химических реакций в условиях турбулентного перемешивания и турбулентный энергообмен (нагрев за счет вязкой диссипации турбулентной энергии и охлаждение механизмом турбулентной теплопроводности). Как уже было отмечено в разд. 1.1.3, упрощенно турбулентную диффузию D^T, обусловливающую инерционное взаимопроникновение элементарных объемов отдельных компонентов многокомпонентной жидкости (перемешивание), можно рассматривать как аналог молекулярной диффузии D с осредненными макроскопическими свойствами среды, что предполагает использование аналогичных форм диффузионного уравнения. Соответственно, и время выравнивания неоднородностей состава при переходе к равновесию $t \propto H^2 / d$ (где H – характерный масштаб порядка шкалы высот) определяется в зависимости от соотношения величин молекулярного ($d = D$) или турбулентного ($d = D^T$) коэффициентов диффузии. В частности, началу доминирования величины D над D^T отвечает, как отмечалось выше, положение переходной области от гомосферы к гетеросфере – гомопаузы. Очевидно, максимальная скорость диффузии достигается при полном перемешивании, а вне гомопаузы процессы молекулярной диффузии определяются молекулярными массами отдельных компонентов.

Под воздействием турбулентной диффузии, за счет которой, в основном, обеспечивается постоянство состава атмосферного газа с высотой (исключая химически активные малые компоненты), формируются структурные свойства гомосферы, в отличие от гетеросферы, для которой основным механизмом переноса вещества является молекулярная диффузия в разреженной газовой среде. В турбопаузе планеты процессы молекулярного и турбулентного переноса, конкурируя между собой, в значительной степени определяют закономерности структуры, динамики и энергетики верхней атмосферы. Турбулентным перемешиванием в гомосфере в значительной мере контролируется также подвод атомов водорода на уровень *экзобазы* и, тем самым, скорость диссипации (в данном случае – утекания) водорода из атмосферы (*Чемберлен и Хантен, 1987*).

При моделировании структуры, динамики и энергетики верхней атмосферы часто используются одномерные осредненные уравнения гидродинамики многокомпонентной смеси, учитывающие разнообразные процессы тепло- и массопереноса, радиационного обмена и химической кинетики (*Маров и Колесниченко, 1987*). При этом, осреднение выполняется по широте, долготе и в различной степени по времени так, что такие модели дают идеальное представление глобального среднего. Весь вертикальный перенос атомов и молекул в одномерной мо-

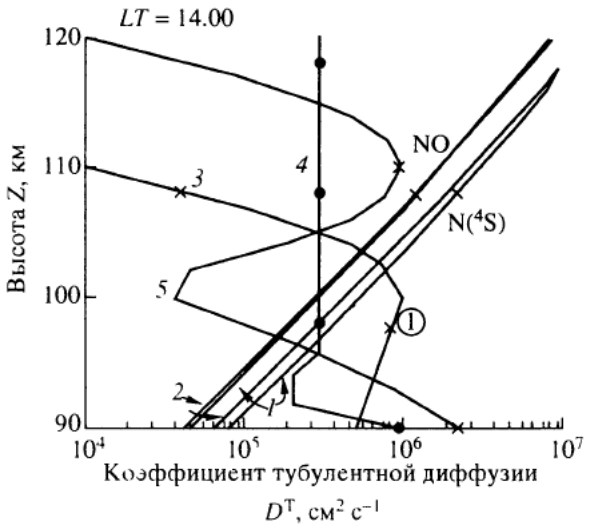


Рис. 1.3.4. Вариации компонентов семейства "нечетного" азота (*NO, N(⁴S)*) на высотах 90–120 км, (кривые 1–2), рассчитанные на основе диффузионно-фотохимической модели при разных зависимостях коэффициента турбулентной диффузии D^T, используемого в качестве параметра согласования (*Куликов и Павлюков, 1987*). Кривые 3–5 отвечают, соответственно, средним, минимальным и максимальным значениям D^T (z), принятым в модели.

дели должен быть представлен как глобально осредненная вертикальная диффузия, которая описывается коэффициентом турбулентной диффузии D^T (в этом случае D^T служит параметром согласования при сопоставлении результатов расчетов с измеренными высотными профилями компонентов). В качестве примера на Рис. 1.3.4 показаны рассчитанные в рамках диффузионно-фотохимической модели (*Куликов, Павлюков, 1967*) вариации компонентов семейства "нечетного" азота (*NO, N*(^4S)) на высотах 90–120 км при разных зависимостях D^T (*z*) от высоты, показанных в виде кривых 3 – 5. Они отвечают, соответственно, средним, минимальным и максимальным значениям величины D^T, изменяющейся в рассматриваемом диапазоне высот в пределах 10^6–10^4 см^2/с; среднему значению отвечает $D^T = 5\cdot10^5$ см^2/с. Эти оценки были получены, исходя из сравнения рассчитанных и измеренных температур термосферы (кривая 1), анализа результатов масс-спектрометрических измерений концентраций N_2, O_2, O и Ar (кривая 2) и сопоставления теоретических и измеренных распределений концентрации атомарного кислорода (кривая 3). По другим данным величина коэффициента D^T ближе к 10^6 см^2/с (*Хантен, 1975*). Как видим, различие концентраций *NO* и *N*, обусловленное неопределенностью коэффициента D^T, может достигать ~ 30%, что указывает на важность использования наиболее аккуратных оценок (моделей) этого коэффициента при анализе влияния турбулентности на процессы в термосфере. Заметим, что они зависят, в свою очередь, от корректности расчета скоростей производства нечетного азота при учете образования сверхтепловых или возбужденных частиц и путей их термализации и дезактивации за счет столкновительной релаксации или спонтанного излучения (*Маров и др.,1966; 1967*).

Рассмотренные особенности верхней и средней атмосферы Земли имеют много аналогов в атмосферах других планет Солнечной системы и нескольких их спутников, обладающих газовыми оболочками. Огромный прогресс в наших

знаниях об этих уникальных природных (многокомпонентных) средах и многообразии происходящих в них физико-химических процессов, достигнутый за три последних десятилетия благодаря, главным образом, полетам космических аппаратов, открыл возможности их детального изучения на сравнительно-планетологической основе и позволил расширить представления о путях эволюции небесных тел. При создании математических моделей планетных атмосфер основным источником служат данные о химическом составе и пространственно-временных вариациях структурных параметров с учетом определяющей роли аэрономических процессов в энергетике и атмосферной динамике.

В отличие от Земли, где в химических превращениях, в основном, участвуют продукты фотолиза кислорода и азот, на других планетах земной группы они определяются фотолизом CO_2, а на Венере важную роль играют также соединения серы и галогены в средней атмосфере. Они поглощают солнечное ультрафиолетовое излучение в диапазоне длин волн примерно от 4000 до 2000 $\overset{o}{A}$, в то время как поглощение углекислым газом приходится на область от 2300 до 10 $\overset{o}{A}$. От специфики аэрономических процессов в средней и верхней атмосфере зависят особенности атмосферной химии и связанных с ними циклов, в частности, циклов серосодержащих на Венере, с которыми связано образование сернокислотных облаков (*Эспозито и др.,, 1983; Волков и др., 1969; Маров и др., 1989; Маров и Гринспун, 1998*). В сочетании с диффузией и конвективным переносом, эти процессы определяют перераспределение компонентов по высоте и тепловой баланс атмосферы. Кроме того, в отсутствие магнитного поля (как у Венеры) или слабого *палеополя* (как у Марса) заметный вклад в энергетику вносят частицы солнечной плазмы и индуцированные при ее натекании токи и динамические процессы в ионосфере планеты. В динамике термосфер Венеры и Марса существенную роль играют также внутренние гравитационные волны. На Венере периодические возмущения плотности, обусловленные волновыми движениями с горизонтальными размерами от 100 до 600 км наблюдались при измерениях на космическом аппарате "*Пионер Венера*". Их источником могут быть вертикально распространяющиеся гравитационные волны, возникающие в области облаков на высотах 50–70 км (*Занг и др., 1996; Боуже и др., 1997*). Торможение (распад) этих волн в термосфере, аналогичный затуханию в мезосфере и нижней термосфере Земли (*Линдзен, 1981*) служит, повидимому существенным источником энергии и количества движения, способствующим зональной асимметрии в термосферной циркуляции, известной как механизм суперротации.

Подобно верхней атмосфере Земли, сток тепла обусловлен спонтанным излучением молекул и атомов в видимой и инфракрасной областях спектра и турбулентной теплопроводностью. Интенсивность излучения в линиях и полосах, наблюдаемого в виде атмосферных эмиссий в спектрах свечения дневного и ночного неба, зависит от степени неравновесности среды и эффективности столкновительной релаксации возбужденных состояний атмосферных компонентов (*Маров и др.,1997*).

Область турбулентного перемешивания на Венере и Марсе простирается немного дальше, чем на Земле – турбопауза находится на высоте ~130 км. Это способствует повышению эффективности процессов рекомбинации продуктов диссоциации CO_2, CO и O, благодаря чему их относительное преобладание на-

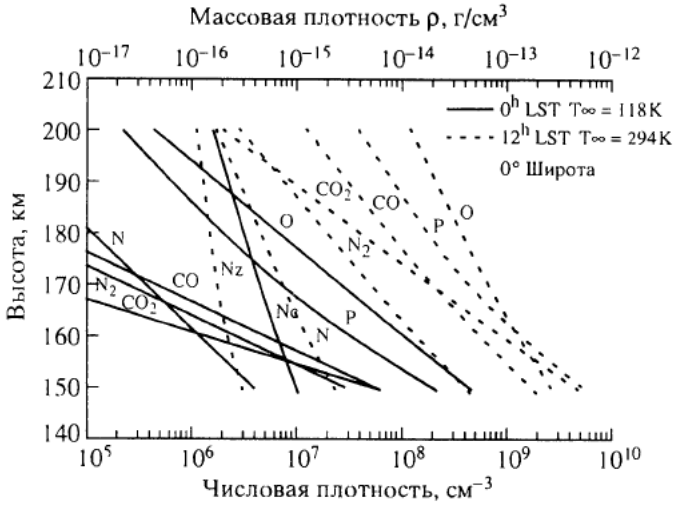


Рис. 1.3.5. Высотные профили парциальных концентраций в верхней атмосфере Венеры по данным масс-спектрометрических измерений на космическом аппарате "Пионер-Венера" ночью (сплошные кривые) и днем (пунктир). Относительное преобладание *CO* и *O* – продуктов диссоциации CO_2 начинается выше примерно 150 км в ночные часы и 170 км в дневные часы Показаны также ночной и дневной профили массовой плотности ρ, отнесенные к верхней горизонтальной шкале. Согласно (*Ниман и др., 1980*).

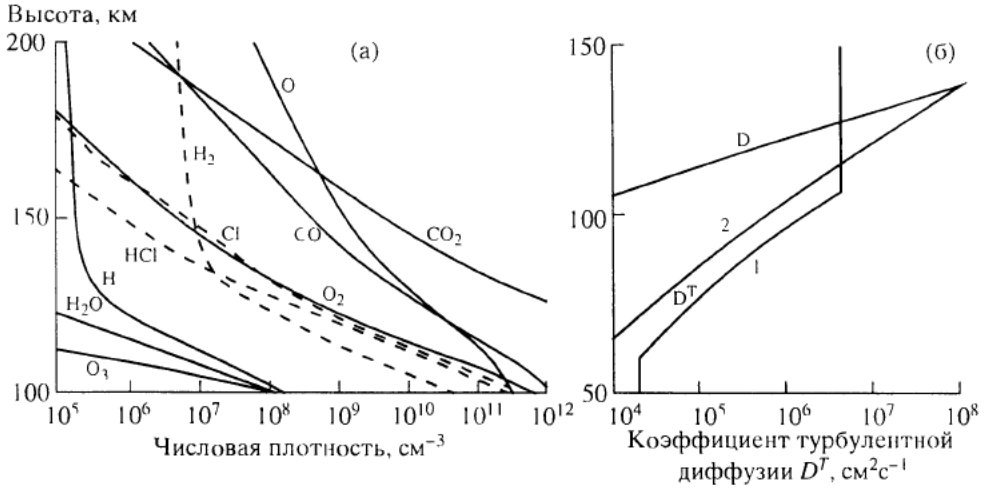


Рис. 1.3.6. Модель состава верхней атмосферы Венеры (а), рассчитанная при заданых значениях высотного профиля коэффициента турбулентной диффузии D^T (z) (б). Наилучшее согласие с измерениями на высотах более 110 км дает значение $D^T = 4 \cdot 10^6$ см^2/с. Согласно (*Краснопольский, Паршев, 1983*).

чинается лишь выше примерно 150 км в ночные часы и 170 км в дневные часы, как показано на Рис. 1.3.5, построенном по данным масс-спектрометрических измерений на космическом аппарате "*Пионер-Венера*" (*Ниман,1980*). Днем существенно возрастает также общая концентрация компонент за счет "*вздутия*" атмосферы при ее разогреве. С таким характером в поведении термосферы Венеры можно согласовать результаты моделирования при задании определенных значений коэффициента турбулентной диффузии, подобно тому, как это обсуждалось для земной термосферы. Помимо углекислого газа и продуктов его фотолиза, модель может предсказать также высотный ход ряда малых компонентов (*HCl, Cl, H_20, O_3*), не охваченных измерениями. Пример соответствующих расчетов вместе с использовавшимся высотным профилем $D^T(z)$ показан на Рис. 1.3.6 (*Краснопольский, Паршев, 1983*).

Оказалось, что наилучшее согласие с измерениями на высотах более 110 км дает значение коэффициента $D^T = 4 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{с}$, что заметно выше среднего значения в приведенной выше модели нижней термосферы Земли. Еще большее значение для этого параметра ($10^7 \text{ см}^2/\text{с}$) получено из анализа данных измерений космического аппарата *Пионер-Венера* для утренних условий в работе Вон Зана и др. (1980). Но самая высокая эффективность турбулентного перемешивания предполагается на Марсе, для которого было получено среднее значение $D^T \approx 2 \cdot 10^8 \text{ см}^2/\text{с}$ (*Нир и Макэлрой, 1977*). Очевидно, с большой эффективностью турбулентной диффузии, помимо интенсивного высвечивания атмосферного газа в инфракрасных полосах CO_2, связаны также более низкие, чем на Земле, экзосферные температуры Венеры и Марса, не превышающие 200–350 K по сравнению со средним значением 800–1000 K для Земли.

Кроме того, оказалось, что вся ночная полусфера Венеры, начиная с высот обычного расположения *термосферы*, необычайно холодная: ее температура около $100\,K$, что существенно ниже даже температуры земной *мезопаузы* ($\sim 170\,K$), вследствие чего эта область получила название *криосферы*

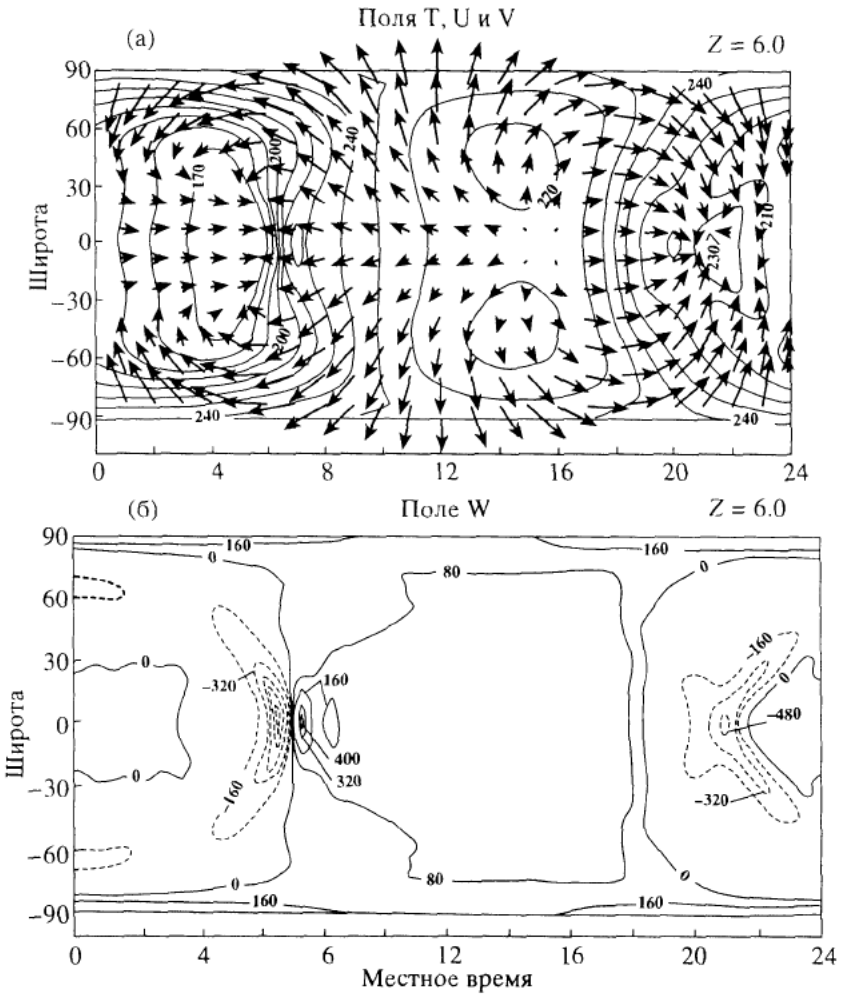


Рис. 1.3.7. Поля температуры T и горизонтального ветра u, v в термосфере Марса на высоте 210 км (а) и связанные с ними вертикальные течения w (б), рассчитанные на основе модели *TGCM*. Максимальные вариации температуры в течение суток составляют 110 K; область расходимости ветров приходится на $\sim 15^h\,LT$, а область сходимости на $\sim 5^h\,LT$. Скорость ветра у терминаторов и полюсов достигает 230 м/с. Максимальные скорости вертикальных и горизонтальных потоков от – 9.6 м/с в утренние до 400 м/с в поздние вечерние часы. Согласно (*Барт и др., 1992*).

большой продолжительностью венерианской ночи из-за крайне медленного собственного вращения планеты и, соответственно, длительной изоляции от дневной стороны. Подобной изоляции нет на Марсе, поэтому нет и столь резких различий температуры термосферы на дневной и ночной сторонах.

Наиболее адекватное описание структуры и динамики верхней атмосферы применительно к планетам земной группы, включающее в себя поля температуры, ветров и парциальных концентраций, дает термосферная модель общей циркуляции, или модель *TGCM* (*Дикинсон и др., 1984*), успешно реализованная для Венеры и Марса (*Боуже и др., 1988*). Результаты расчетов показали, что термосферы этих планет имеют ряд общих черт, определяемых, как и в случае Земли, источниками притока и стока тепла и эффективностью его перераспределения, зависящей от скорости вращения планеты. Один из примеров моделирования полей температуры T, горизонтальных (u,v) и вертикальных (w) ветров в термосфере Марса на высоте 210 км показан на Рис. 1.3.7 (*Барт и др., 1992*). Как видим, суточные вариации температуры составляют 110 K, а ветры, имеющие области расходимости и сходимости вблизи, соответственно, температурного максимума ($\sim 15^h$ LT) и минимума ($\sim 5^h$ LT) достигают у терминаторов и полюсов 230 м/с.

Непосредственно связанные с ними наиболее сильные нисходящие и восходящие вертикальные течения происходят со скоростями, соответственно, от –9.6 м/с до 400 м/с в утренние и поздние вечерние часы. Они приводят к значительному адиабатическому нагреву газа на ночной и охлаждению на дневной стороне. В частности, за счет дневного *апвеллинга* максимум разогрева термосферы смещается от полдня на экваторе к $\sim 15^h$ LT на широте $\sim 30°$. Такая динамическая картина создает существенное отличие теплового режима термосфер Марса и Венеры от радиационно-равновесных условий и, вместе с тем, свидетельствует о важной роли как крупномасштабных ветров, так и мелкомасштабных процессов в распределении нейтральных компонент. Интересно, что, как показали результаты данного моделирования, при учете крупномасштабной динамики достаточно использовать значительно меньшее, по сравнению с приведенным выше, значение коэффициента турбулентной диффузии ($\sim 2 \cdot 10^3$ см^2/с) ниже уровня турбопаузы, чтобы наилучшим образом согласовать расчетные результаты отношения $n(O)/n(CO_2)$ с данными измерений, полученных в различные периоды солнечного цикла. Это ставит под сомнение саму концепцию определения турбопаузы на Венере и Марсе как достаточно резкой границы раздела областей преобладания турбулентной и молекулярной диффузии (*Боуже и др., 1988*) и одновременно адекватность упрощенных подходов к моделированию верхней атмосферы планеты при использовании величины D^T в качестве параметра согласования.

1.3.3. Верхние атмосферы планет-гигантов. Средние и верхние атмосферы планет-гигантов, начинающиеся от тропопаузы, также формируются под действием прямого поглощения солнечной ультрафиолетовой радиации газами и аэрозолями. Оно вызывает разнообразные фотохимические и химические реакции с участием водородсодержащих соединений, влияющие на тепловую структуру выше облачного слоя, и в основном ответственно за образование ионосферы.

туру выше облачного слоя, и в основном ответственно за образование ионосферы.

Химическими реакциями с участием углеводородов и их производных обусловлено формирование плотных дымок в верхних атмосферах Урана и Нептуна, состоящих, по-видимому, из углеводородных льдов. Вероятно, такова же природа дымки на спутнике Сатурна Титане (Рис.1.3.8), обладающем очень плотной атмосферой и вызывающем повышенный интерес как небесное тело с возможными предбиологическими формами сложных органических веществ (*Хантен и др., 1990; Оуэн, 1994*). Между тем, термосферы планет-гигантов оказались зна-

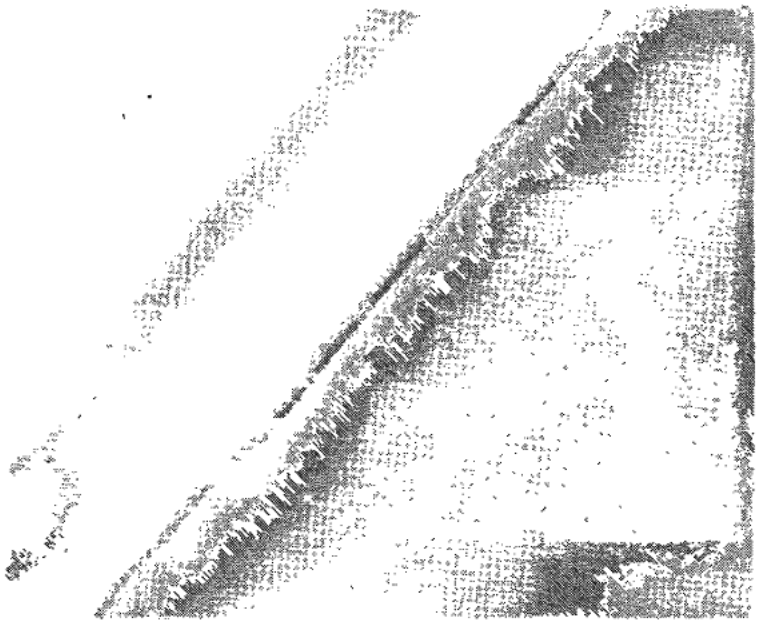


Рис. 1.3.8. Слои дымки, покрывающей спутник Сатурна Титан на изображении, полученном с расстояния 22 000 км. Границы, разделяющие слои с переменными оптическими свойствами, расположены на высотах 200, 375 и 500 км от поверхности Титана. Они предположительно состоят из аэрозолей, образованных углеводородными льдами. Снимок космического аппарата "*Вояджер*", с любезного разрешения *НАСА*.

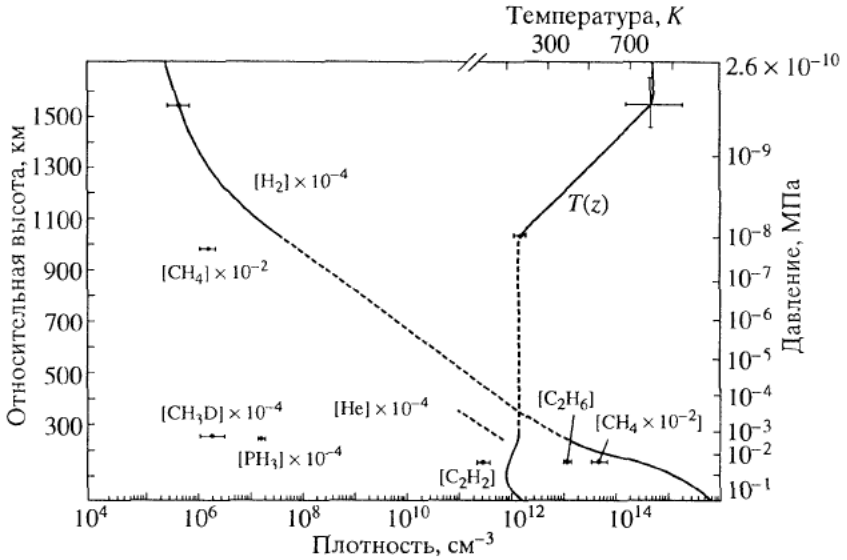


Рис. 1.3.9. Профили температуры и плотности верхней атмосферы Сатурна над уровнем с давлением 1 бар. Соотношение между давлением и высотой относительно этого уровня показано на левой и правой осях ординат. Сплошные линии – измерения, пунктир – интерполяция. Прерывистыми горизонтальными штрихами отмечены относительные содержания компонентов (в квадратных скобках), отвечающие более глубоким слоям атмосферы в северном полушарии. Согласно (*Атрейя и др.., 1990).*

чительно горячее, чем предполагалось на основе моделей поглощения энергии от Солнца. На Рис. 1.3.9 показаны профили температуры и плотности верхней атмосферы Сатурна. В средней атмосфере температура практически такая же как на Юпитере, она составляет около 140 K. В то же время, средняя *экзосферная* температура на Сатурне (600–800 K) лишь немного ниже, чем на Юпитере, где она примерно 1100 K; почти такая же, как у Сатурна, экзосферная температура Урана, и даже на далеком Нептуне она достигает 500 K.

Известно, что на Юпитере важную роль играют также другие энергетические источники, в первую очередь, инжектируемые из магнитосферы протоны и электроны, с которыми связаны интенсивные ультрафиолетовые эмиссии и полярные сияния, наблюдаемые даже с Земли, и вносящие существенный вклад в разогрев его термосферы (*Маров и др.,1997*). Для остальных планет данный механизм встречается с трудностями при быстро убывающем количестве ультрафиолетовых фотонов и значительно менее интенсивном высыпании *авроральных* частиц, которые не могут обеспечить достаточного количества энергии для нагрева их термосфер и экзосфер до наблюдаемых температур. Во всяком случае, определенная корреляция между этими температурами и расстоянием от Солнца, а также напряженностью собственного магнитного поля, отсутствует. Вместе с

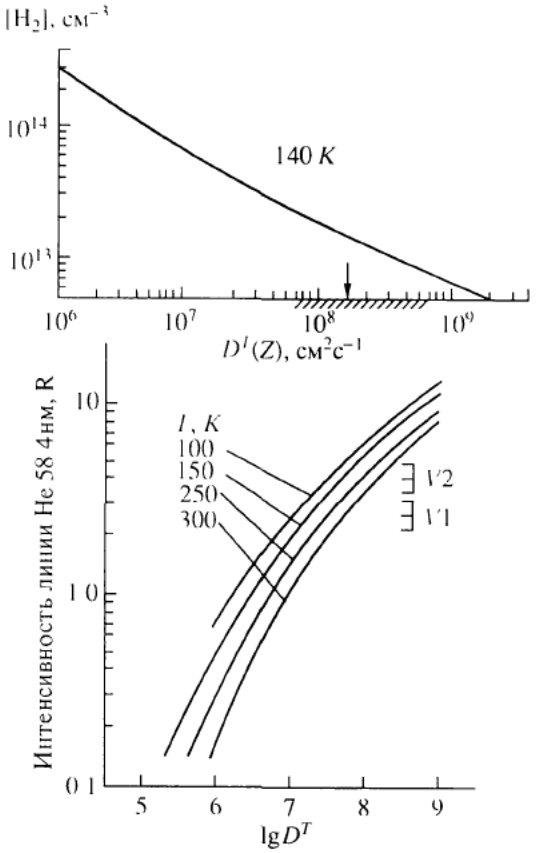


Рис. 1.3.10. Оценки величины турбулентной диффузии в атмосфере Сатурна на основе данных измерений содержаний H_2 – CH_4 и He. а – Зависимость от величины D^T плотности молекулярного водорода H_2 на высоте, соответствующей вертикальной оптической толщине в метане τ_{CH4} на линии $L\alpha$ на уровне гомопаузы Сатурна; измеренному распределению газов отвечает величина $D^T = 2 \cdot 10^8$ см^2/с; заштрихованная область на оси абсцисс соответствует возможной погрешности в определении высоты уровня $\tau_{CH4} = 1$. б – Зависимость от D^T интенсивности излучения в линии *HeI* 584 $\mathring{A}$ в рэлеях (R) при относительном объемном содержании $X_{He} = 0.06$ и разных температурах в области рассеяния; на уровне гомопаузы Сатурна (~1110 км) $T \approx 250$ К, чему для измеренной интенсивности линии отвечает $D^T \approx 10^8$ см^2/с. Согласно (*Атрейя и др., 1990*).

тем, предполагается наличие определенной корреляции между температурой термосферы и коэффициентом турбулентной диффузии, исходя из того, что Сатурн, при сравнительно низкой термосферной температуре, обладает наибольшим значением K, на Уране ситуация обратная, а Нептун занимает промежуточное положение (*Бишоп и др.,1995*).

Действительно, как уже отмечалось ранее, от интенсивности вертикального перемешивания принципиально зависит как распределение по высоте малых компонентов, так и энергообмен на уровне гомопаузы атмосферы планеты. Наиболее приемлемая величина коэффициента турбулентной диффузии определялась, исходя из имеющихся экспериментальных данных, в основу которых были положены три метода: вычисление интегральной плотности водорода в единичном столбе атмосферы по измерениям альбедо в линии $L\alpha$; сопоставление измеренных профилей водорода и метана как более тяжелого газа, плотность которого резко спадает начиная от уровня гомопаузы, с учетом процессов фотохимии и транспорта; и анализ интенсивности рассеяния солнечного излучения в линии *HeI* 584 $\overset{o}{A}$, с учетом зависимости коэффициента турбулентной диффузии D^T и, следовательно, относительного содержания *He* над основанием рассеивающих слоев атмосферы, от температуры. Все эти методы дали достаточно хорошо согласующиеся между собой значения D^T.

В качестве примера, зависимость плотности H_2 на высоте, соответствующей единичной вертикальной оптической толщине в метане на линии $L\alpha$ от D^T на гомопаузе Сатурна (при допущении $D^T \sim \rho^{1/2}$, где ρ – плотность газа) показана на Рис.1.3.10, из которого следует, что измеренному распределению газов отвечает очень большая величина $D^T \approx 2\cdot10^8$ см^2/с (*Атрейя и др., 1990*).

Таблица 1.3.1

Коэффициент турбулентной диффузии в верхней атмосфере планеты на уровне гомопаузы

Планеты	Высота гомопаузы, км	Давление, бар	D^T, см^2/с	Источник
Земля	110–115	10^{-7}	10^6	Маров, Колесниченко, 1987
Венера	130–135	$2\cdot10^{-8}$	10^7	Фон Зан и др., 1980
Марс	135	$2\cdot10^{-10}$	$(1.3-4.4)\cdot10^8$	Нир, Макэлрой, 1977
Юпитер	440	10^{-6}	$(0.7-2.2)\cdot10^6$	Атрейя и др., 1981; Макконнел и др., 1982
Сатурн	1110	$4\cdot10^{-9}$	$(0.7-6.0)\cdot10^8$ $(4.0-12)\cdot10^7$	Атрейя и др., 1982; Сандел и др., 1982
Титан	3500	$6\cdot10^{-10}$	$(0.3-3.0)\cdot10^8$	Смит и др, 1982
Уран	354–390	$(3.7-2.0)\cdot10^{-5}$	$(0.5-1.0)\cdot10^4$	Атрейя и др., 1991; Энкреназ и др., 1998
Нептун	550	10^{-6}	$(1.6-16)\cdot10^7$ $5\cdot10^6$	Бишоп и др., 1995 Йелле и др., 1993;

Эффективность турбулентного переноса в нижней термосфере Сатурна оказалась, таким образом, почти в 100 раз сильнее, чем на Юпитере. Возможная причина состоит в определенном отличии тепловой структуры его стратосферы и мезосферы и более высоком уровне турбулизации, обусловленном процессом конденсации гелия, сопровождаемым его отделением от водорода в глубоких слоях и выпадением на ядро, с чем связывается наличие теплового потока из недр. Несомненный интерес представляет Табл. 1.3.1, в которой приведены наилучшие современные оценки величины коэффициента турбулентной диффузии D^T на уровне гомопаузы для разных планет, относящиеся к периодам максимума солнечной активности. В основу ее положены данные, систематизированные в работе (*Атрейя и др.,1990*), которые дополнены имеющимися сведениями об Уране и Нептуне. Как видим, наименьшие величины D^T у Земли, Юпитера и Урана, а наибольшие у Марса, Сатурна и Титана, в то время как у Венеры и Нептуна промежуточное значение. Проведенное обсуждение подтверждает исключительно важную роль этого параметра в определении структуры и теплового режима верхней атмосферы планеты. Поэтому необходимо его более полное и физически обоснованное определение, которое непосредственно связано с детальным анализа самого процесса турбулентного переноса.

Как уже было отмечено, влияние различных специфических для верхней атмосферы свойств (таких как многокомпонентность смеси, переменность среднего молекулярного веса, наличие гравитации и химических реакций) на турбулентность в гомосфере и переходной области, приводящее к появлению разнообразных дополнительных эффектов, не позволяет в общем случае использовать при моделировании аэрономических процессов теоретические результаты, полученные в рамках традиционного описания турбулизованных течений однородной несжимаемой жидкости (см., например, (*Монин, Яглом, 1992; Левеллен, 1980*)) или воспользоваться полуэмпирической теорией коэффициентов турбулентного переноса для течений в многокомпонентном пограничном слое (*Иевлев, 1975*). Поэтому, задача моделирования подобных сред требует разработки адекватной теории турбулентности многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей.

§ 1.4. Астрофизические и космогонические модели

Процессы самоорганизации на фоне турбулентного движения являются важнейшим механизмом, формирующим свойства астрофизических объектов на разных стадиях их эволюции, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем. Эти основополагающие представления и развиваемые на их основе модели составляют основу звездной и планетной космогонии и являются также важным элементом космологии Вселенной. К сожалению, здесь пока сохраняется много проблем, ожидающих своего разрешения.

1.4.1. Рождение и эволюция звезд. Рождение звезд обусловлено механизмом гравитационной конденсации при достижении некоторой критической массы в гигантских звездных системах - галактиках, содержащих миллиарды звезд

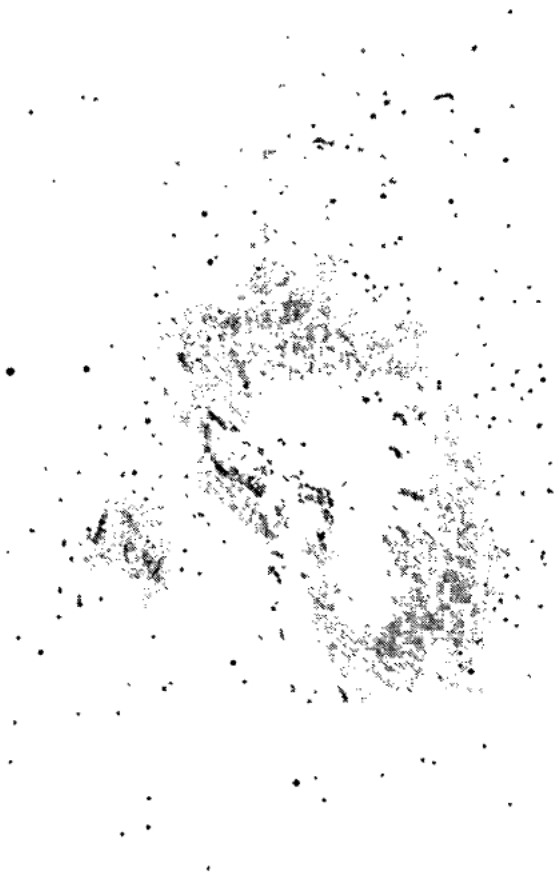


Рис. 1.4.1. Туманность Ориона, одна из ближайших к нам областей активного звездообразования, находящаяся на расстоянии около 1500 световых лет от Земли. Ее свечение обусловлено светом горячих, ярких звезд, родившихся за последние несколько миллионов лет.

различных возрастов, масс, светимостей и химического состава и представляющих собой основное состояние вещества Вселенной. Очаги звездообразования генетически связаны с массивным, сравнительно плоским галактическим диском, в плоскости симметрии которого концентрируется межзвездная среда, представляющая собой смесь газа и пыли с неоднородным распределением плотности. Из этой среды вследствие неустойчивости, обусловленной случайными флуктуациями, образуются (согласно теории гравитационой неустойчивости покоящегося вещества, развитой Джинсом (*1969*)) газовые конденсации, сопровождаемые сжатием, хаотическими движениями частиц газа и пыли и интенсивным тепловыделеннем вследствие перехода потенциальной энергии в кинетическую, а также передачей момента количества движения от образующегося сгущения переферийным областям (Рис. 1.4.1). При достижении в недрах *протозвезды* температуры в несколько миллионов градусов начинается процесс термоядерного синтеза и силы тяготения уравновешиваются внутренним давлением газа (гравитационное равновесие), в результате чего сжатие прекращается, и звезда занимает определенное положение на диаграмме *Герцшпрунга–Рессела*, зависящее от массы. Там она находится вплоть до исчерпания запасов ядерного горючего, сохраняя свои размеры, массу и светимость. Выделение громадной энергии вследствие ядерных реакций в центральной области звезды сопровождается лучистым переносом энергии и конвективными движениями, что приводит к активному перемешиванию вещества недр (звезды малых масс целиком конвективны).

Из теории звездной эволюции следует, что после завершения выгорания во-

дорода звезда с массой $M \leq 3M_{\odot}$, где $M_{\odot}$ – масса Солнца, сходит с главной последовательности, превращаясь вначале в красный гигант (когда ее светимость и радиус возрастают) и затем, в ходе углеродного цикла (последовательного завершения циклов выгорания гелия, углерода, кислорода и кремния, с промежуточным образованием соответствующих оболочек и ядер, завершающемся ядром железа) теряет массу, эволюционируя в состояние белого карлика – постепенно остывающие вырожденные звезды с массой $M \approx M_{\odot}$. Сжатие этих звезд после образования железного ядра уже не может быть остановлено выделением энергии за счет термоядерных реакций в ее центральной части, энергия сжатия расходуется на развал ядер железа, вплоть до образования нейтронного ядра, и давление в центре определяется вырождением электронного газа, а плотность – газом атомных остатков. Согласно представлениям современной статистической физики, максимальная масса, которая может удерживаться холодными электронами, равна предельной массе Чандрасекара $M = 5.75 M_{\odot}/\mu_e$, где μ_e – число нуклонов, приходящихся на один электрон (см., например, (*Бете, 1966*).

Потеря массы в ходе звездной эволюции согласно изложенным теоретическим воззрениям подтверждается наблюдениями, прежде всего примерами образования планетарных туманностей при медленном истечении вещества из красных гигантов, либо при вспышках новых, обусловленных внезапным выделени-

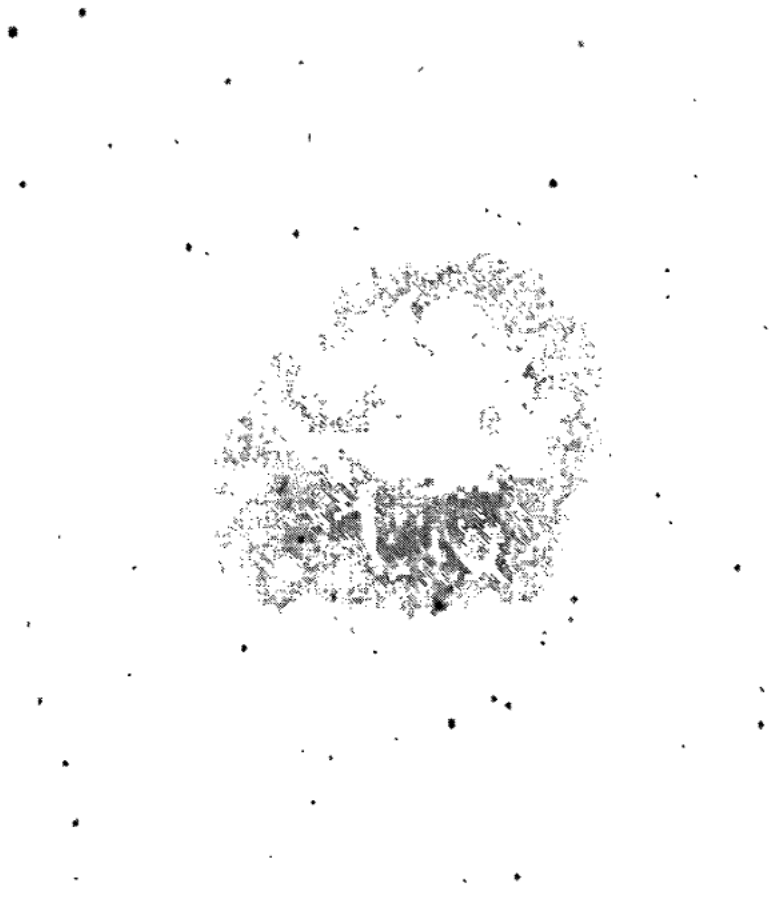


Рис. 1.4.2. Крабовидная туманность, представляющая собой остаток взрыва сверхновой, наблюдавшейся китайскими астрономами в 1054 году. Структура туманности представляет собой ажурную сетку расширяющихся газовых волокон, расположенных в виде оболочки по ее переферии и движущихся со скоростью, близкой к 0.1 *c*, взаимодействуя с крайне разреженным газом межзвездной среды. Снимок, полученный в красной линии водорода Hα на обсерватории *Китт Пик*.

ем огромной энергии вследствие внутренних процессов в звезде. Верхний предел масс звезд, превращающихся в белые карлики, определяется из наблюдений звездных ассоциаций. Более массивные звезды, с $M > (3–5)\ M_{\odot}$, гелиевые ядра которых не находятся в вырожденном состоянии, на конечной стадии эволюции, вследствие образования в центре сильной ударной волны при быстром сжатии (*коллапсе*), сбрасывают внешнюю оболочку – взрываются, что наблюдается как вспышки сверхновых со значительно (в тысячи раз) большим, чем у новых, выделением энергии, превышающем 10^{40} эрг/с. Это явление можно описать в рамках теории сильного взрыва, а его распространение по межзвездному газу – как детонационную волну (*Седов, 1965; Зельдович и Райзер, 1966; Зельдович, 1983*).

При вспышках сверхновых возникают чрезвычайно сложные конфигурации, вызываемые процессами взаимодействия расширяющегося газа (обладающего субрелятивистскими скоростями) с межзвездной средой (Рис. 1.4.2, 1.4.3). Поскольку, как в недрах звезд, так и, вероятно, при самих вспышках, происходят процессы *нуклеосинтеза*: сброшенная оболочка при попадании в межзвездную среду обогащает ее тяжелыми элементами, что приводит к посте-

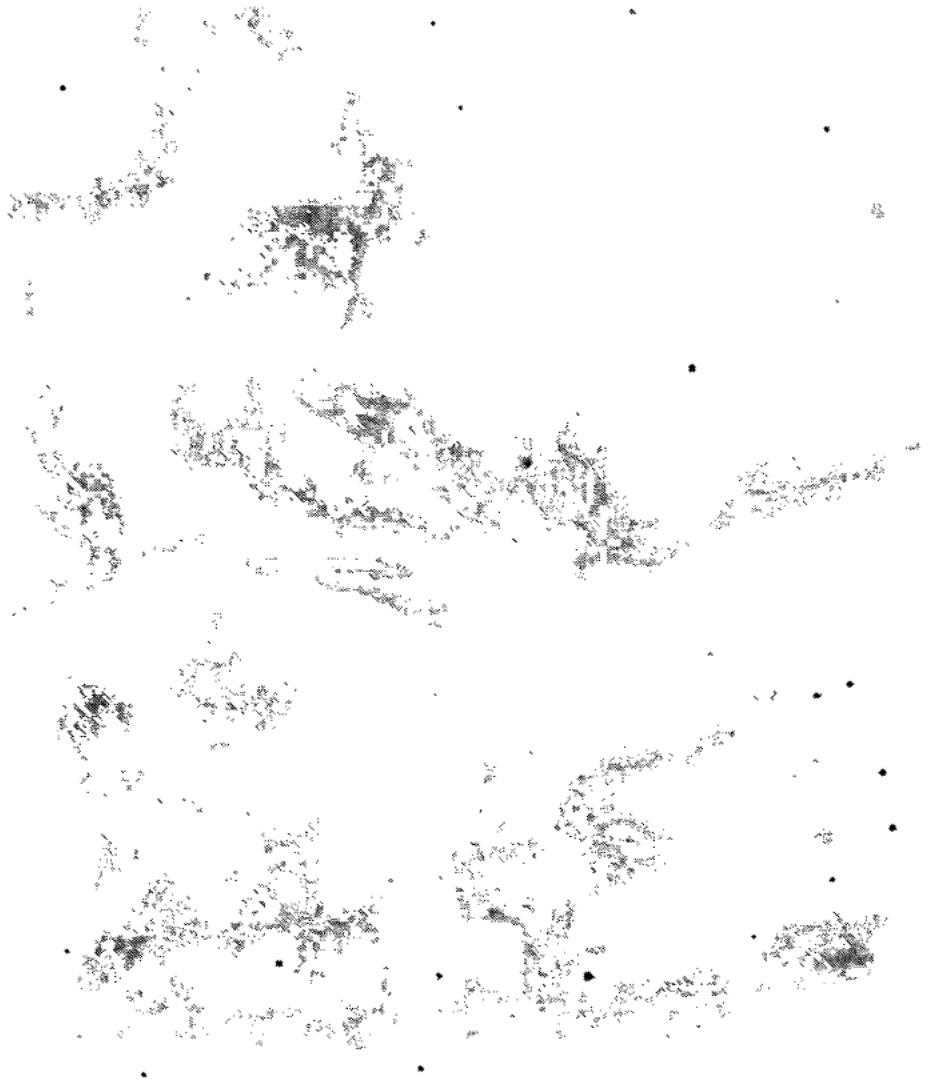


Рис. 1.4.3. Петля Лебедя – участок туманности Вейл в созвездии Лебедя, являющийся остатком взрыва сверхновой, произошедшего свыше 150 000 лет тому назад. Структура петель сформировалась в процессе эволюции расширяющегося газа. Снимок, полученный в линии OIII λ 5007 $\mathring{A}$ на обсерватории *Китт Пик*.

пенному росту среднего атомного числа Z . Большая часть тяжелых элементов сосредоточена в частицах космической пыли, образующихся, вероятно, в атмосферах холодных звезд-гигантов, но большое количество различных многоатомных молекул, включая сложные органические соединения, обнаружено радиоастрономическими методами и в газовой среде. Такая многофазная и многокомпонентная среда особенно характерна для массивных холодных плотных облаков, находящихся в процессе гравитационного сжатия и являющихся, по-видимому, ранней стадией формирования звездных скоплений и ассоциаций (*Пикельнер и др., 1976*). В зависимости от обогащенности межзвездной галактической среды тяжелыми элементами различают условия формирования звезд первого и последующих поколений.

Адекватное описание явления коллапса возможно лишь в рамках релятивистской теории гравитации, в основе которой лежит общая теория относительности Эйнштейна. Эта теория приводит к принципиально новой ситуации в релятивистском коллапсе с учетом новых явлений, возникающих при комбинации квантовой теории материи с теорией тяготения (*Зельдович и Новиков, 1975*). Ядра сверхновых звезд превращаются в нейтронные звезды или черные дыры – области особого состояния вещества с бесконечно большой плотностью, представляющие собой пространственно-временные сингулярности. Экспериментальное обнаружение нейтронных звезд и черных дыр стало возможным благодаря излучению, возникающему при их взаимодействии с ближайшими компаньонами (например, в случае, когда вблизи нейтронной звезды или черной дыры находится нормальная звезда, теряющая вещество вследствие мощного гравитационного притяжения ее соседа). Наиболее интенсивная потеря вещества идет тогда, когда звезда в ходе эволюции расширится и достигнет границ поверхности *Роша* – эквипотенциальной поверхности в тесной двойной системе, когда образуется односвязная область (Рис. 1.4.4). В этом случае возникает сложная динамическая структура массообмена, включающая поток вещества от звезды-донора с образованием ударных волн и тангенциальных разрывов, формирование *аккреционного диска* и изменение параметров звездного ветра в процессе эволюции системы, как это следует из численных газодинамических моделей (*Бисикало и др.,1997*).

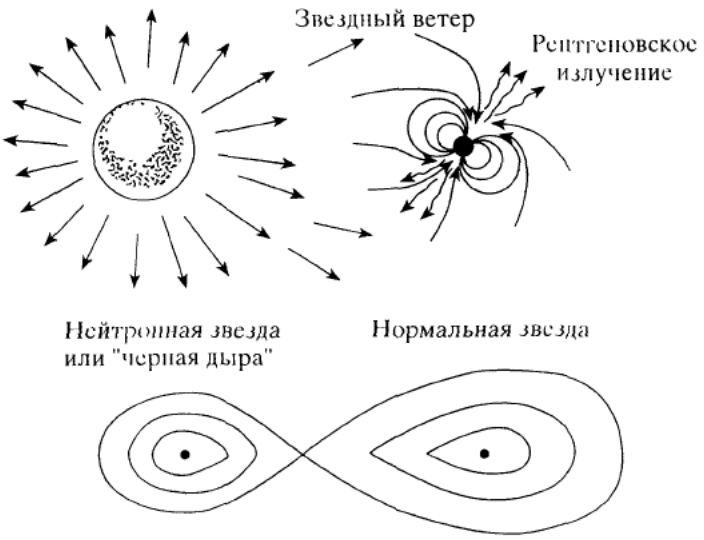


Рис 1.4.4. Схема образования односвязной области в тесной двойной системе в окрестности черной дыры и механизм генерации рентгеновского излучения.

При аккреции вещества на поверхность нейтронной звезды, обладающей сильным магнитным полем (создающим направленность потока к полюсам), или при образовании газового диска во вращающейся двойной системе с черной дырой (дисковая аккреция) происходит сильная турбулизация вещества и его разогрев до температуры в десятки и сотни миллионов градусов. Это создает направленное тормозное излучение горячей плазмы в рентгеновском диапазоне длин волн, модулированное эффектами вращения как самой нейтронной звезды, так и системы вцелом.

Излучение галактического межзвездного газа, находящегося преимущественно в состоянии нейтральных атомов водорода с температурой от десятков до тысяч градусов, наблюдается в диапазоне радиоволн. Моделирование структуры и эволюции галактик и всей Вселенной тесно связано с изучением природы радиолиний нейтрального водорода и возбужденных двухатомных молекул в источниках радиоволн сверхвысокочастотного диапазона - космических мазерах, сосредоточенных в газопылевых туманностях, а также природы первичного (реликтового) излучения (Рис. 1.4.5). Обнаружение этого излучения, равномерно заполняющего Вселенную, послужило толчком к разработке концепции горячей Вселенной и теории "*Большого взрыва*", согласно которым Вселенная в прошлом прошла стадию плотной горячей плазмы в состоянии полного термодинамического равновесия с *планковским* спектром излучения, и ее постепенное охлаждение в ходе расширения от момента сингулярности отвечает также равновесному спектру при современной температуре излучения $T = 2.7$ *К* (*Зельдович и Новиков, 1975; Дорошкевич и др., 1976*). Релятивистская теория однородной изотропной

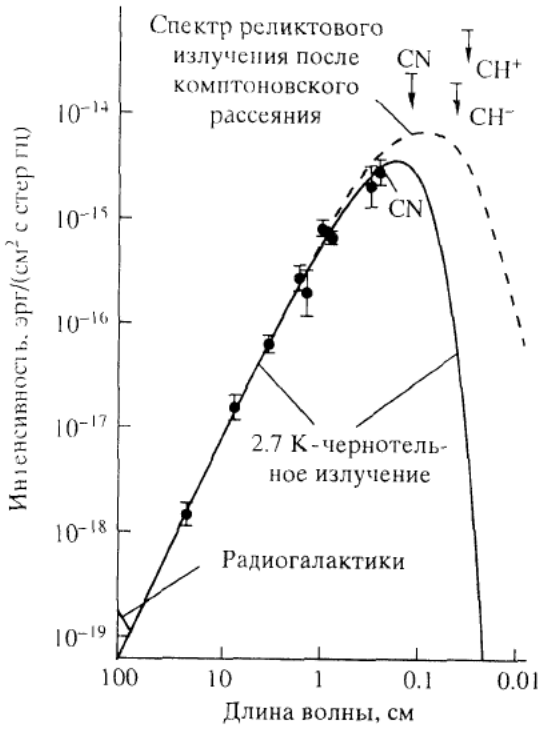


Рис 1.4.5. Спектр реликтового излучения – чернотельного излучения с температурой 2.7 *К*, которому удовлетворяют экспериментальные точки (о), нанесенные с учетом ошибок измерений. Пунктир учитывает возможное искажение спектра за счет комптоновского рассеяния на горячих электронах. Штрихи со стрелками соответствуют результатам определения верхней границы температуры реликтового излучения по населенности уровней межзвездных молекул *CN*, CH^- и CH^+. Согласно (*Зельдович, Новиков, 1975*).

продолжаться бесконечно, или же спустя определенное время сменится сжатием (теория *осциллирующей* Вселенной). Исследования относительно небольших пространственных вариаций интенсивности реликтового излучения, наряду с данными о радиоизлучении облаков горячего газа в областях скопления галактик и изучением содержания и свойств "*темной материи*", открывают перспективы ответа на вопрос о том, какая из моделей Вселенной – открытая или закрытая – является наиболее достоверной.

1.4.2. Роль турбулентности в эволюции Вселенной. В рамках изложенной концепции образование галактик (Рис. 1.4.6.) следует рассматривать как составной элемент процесса эволюции горячей Вселенной, от момента вариаций плотности и вихревых движений в первичной плазме, состоящей из электронов, про-

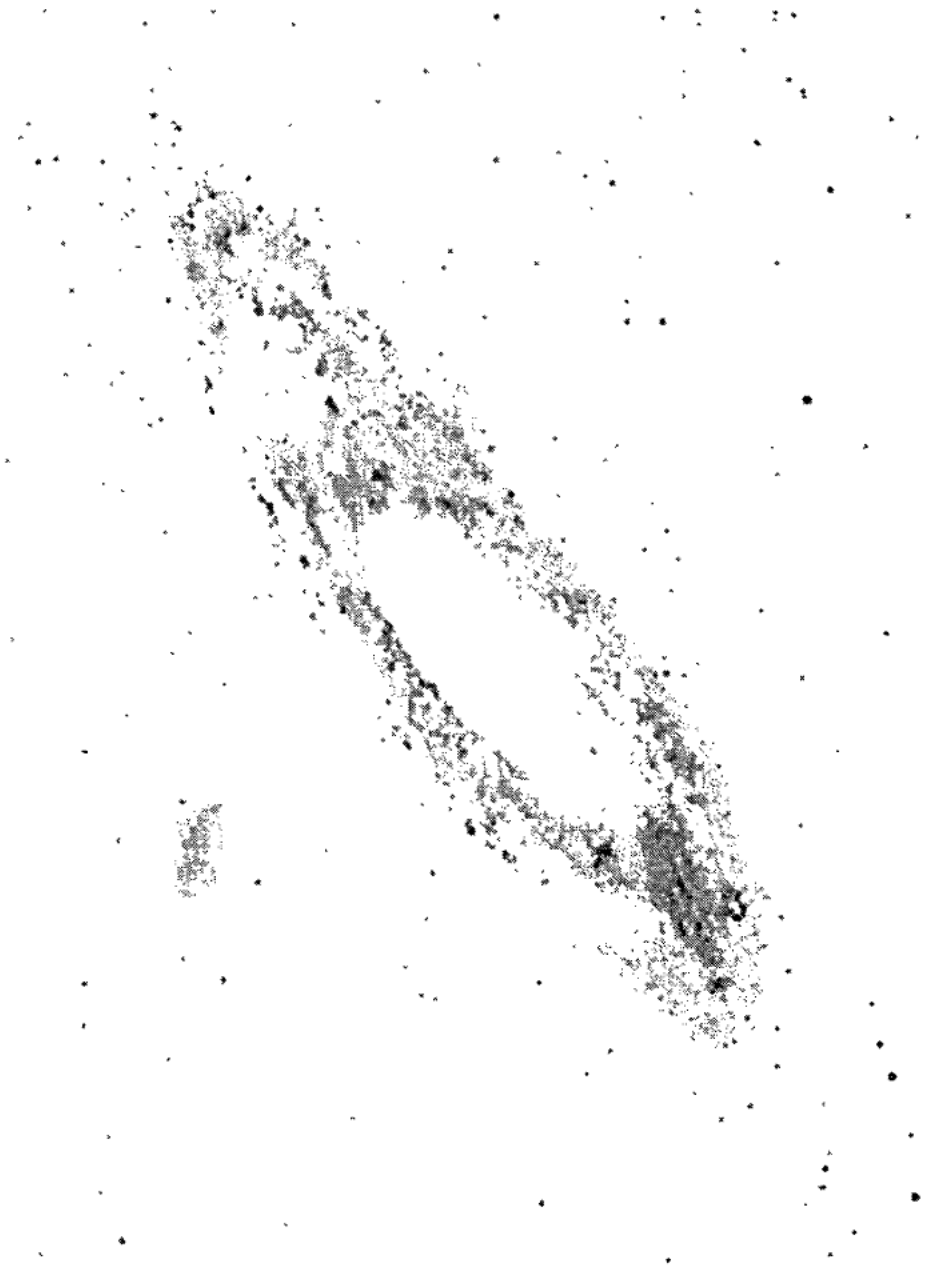


Рис. 1.4.6. Галактика M31 (NGC 224) Андромеда, находящаяся на расстоянии 2 миллионов световых лет от Земли. Эта спиральная галактика, напоминающая гигантский вихрь и состоящая из облаков газа и пыли, содержит около 300 миллиардов звезд. По своей форме и размерам она близка к нашей Галактике – Млечному пути и имеет два относительно небольших спутника эллиптической формы. Фотография в синих лучах, согласно (*Атлас Галактик Хаббла, 1961*).

концепции образование галактик (Рис. 1.4.6.) следует рассматривать как составной элемент процесса эволюции горячей Вселенной, от момента вариаций плотности и вихревых движений в первичной плазме, состоящей из электронов, протонов, положительно заряженных ядер гелия и фотонов, до завершения рекомбинации с образованием плотных облаков нейтрального газа, появлением ударных волн, вихря и турбулентности в сжатом газе. При этом роль турбулентности предполагается вообще определяющей в рамках вихревой теории происхождения галактик, исторические корни которой лежат в космогонии Солнечной системы. Согласно этой теории расширяющаяся Вселенная уже на самых ранних стадиях обладала не только анизотропией, но и динамической структурностью, в которой присутствовала заметная вихревая составляющая (*Озерной и Чибисов, 1970; Озерной, 1976*). Такая догалактическая, или космологическая, турбулентность, которая получила название фотонной, должна приводить к возмущениям плотности, которые затем усиливаются за счет гравитационной неустойчивости, чем обусловливается образование *протогалактик*. Однако вихревая теория, включая ее разновидности с сильной и слабой турбулентностью, встречается с рядом трудностей, поскольку сильная турбулентность противоречит наблюдательным данным, а в варианте слабой турбулентности первичные вихри не могут обеспечить наблюдаемое вращение галактик.

Более обоснованной представляется поэтому адиабатическая теория образования галактик (*Сюняев и Зельдович, 1972; Дорошкевич и др., 1976*), в которой турбулентность возникает естественным путем и играет важную роль в гидродинамике галактического и межгалактического газа. Последовательность процессов включает в себя возникновение плотных уплощенных облаков газа, для которого характерна анизотропия возмущений тензора деформации за счет действия приливных сил, адиабатическое сжатие газа в малой окрестности некоторой точки при его движении вдоль одного из направлений и последующая аккреция основной массы вещества на уже сжатый газ. В результате возникает весьма своеобразное распределение вещества в формирующемся диске, с острым максимумом

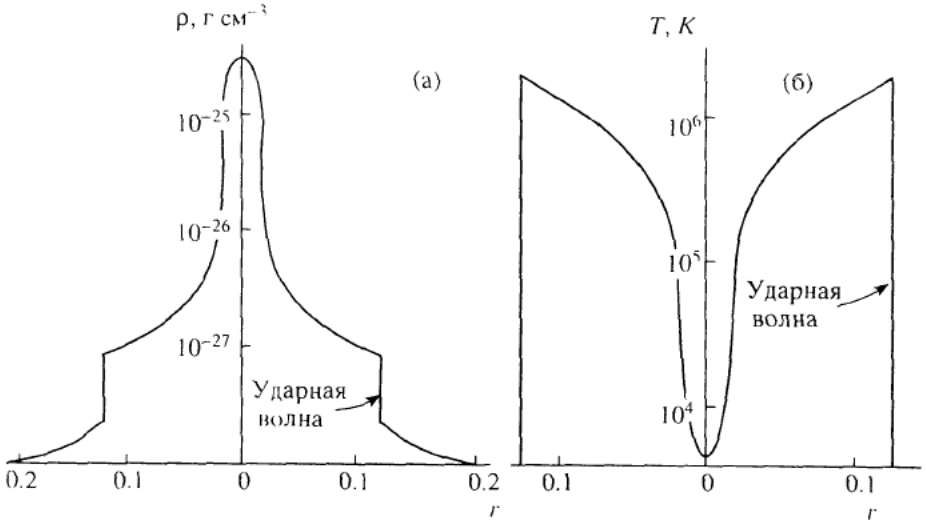


Рис. 1.4.7. Модель возникновения плотных уплощенных облаков газа в исходном веществе Вселенной – "*блинов*", из которых, согласно одной из моделей, возникают скопления галактик. Показано распределение вещества формирующемся диске в виде зависимости плотности (а) и температуры (б) от лагранжевой координаты *r*, ортогональной плоскости блина, на этапе быстрого адиабатического сжатия в малой окрестности точки неустойчивости с образованием ударной волны. Согласно (*Дорошкевич и др., 1976*).

наличие в нем мощных вихревых движений и турбулизации как горячего, так и остывающего газа. В горячем газе они поддерживаются потоком вихревой скорости через фронт ударной волны, а при остывании газа – тепловой неустойчивостью и неоднородностью плотности, что приводит к распаду "блина" на отдельные облака. Поэтому, согласно этим представлениям, турбулентные движения, особенно в его внешних областях, оказывают сильное влияние на параметры образующихся галактик.

1.4.3. Происхождение планетных систем. Вопросы эволюции галактик и звезд непосредственно связаны с проблемой происхождения Солнечной системы, а также планетных систем у других звезд, с большим разнообразием возможных конфигураций, обнаружение которых постепенно становится на экспериментальную основу (*Мейджор и др.,1997; Балтер и Марси, 1997; см. также Гланц, 1997*). Отправной концепцией служит идея о том, что в процессе звездного коллапса существенная часть материала облака, обладающего заметным угловым моментом, остается на орбите вокруг центрального сгущения и входит в состав протопланетного диска. По существу в основе этих представлений лежат гипотезы Канта–Лапласа об одновременном образовании Солнца и протопланетного облака вместе с идеей ротационной неустойчивости, ответственной за последовательное отделение с периферии этого облака плоских концентрических колец, из вещества которых в дальнейшем конденсировались планеты. Можно думать, что после выделения звезды вещество из внешних областей облака продолжает аккретировать на диск, что приводит к сильной турбулизации газопылевой среды из-за рассогласования удельных угловых моментов падающего вещества и вещества диска, участвующего в кеплеровском вращении (*Лиссер, 1975*).

Если модельные представления о происхождении протопланетных туманностей подкрепляются наблюдательными данными, то отправной концепцией образования планет служат механические и космохимические характеристики Солнечной системы. Действительно, существующие закономерности в системе планет и спутников определенно указывают на единый процесс их формирования, а данные о свойствах поверхностей и составе вещества планет и малых тел, в сопоставлении с образцами материала их зародышей и "*осколков*" – метеоритов, позволяют составить некоторые представления о вероятных путях и механизмах этого процесса. Наибольшее признание получила идея об аккумуляции планет из холодного газо-пылевого диска после его отделения (*Шмидт, 1957*). Она включает в себя динамику гравитирующих тел после развития возмущений во вращающемся *пылевом субдиске* и его распада вследствие возникновения гравитационной неустойчивости, а также последовательность аккреции вещества на телах промежуточных размеров – зародышевых сгустках и постепенное вычерпывание ими более мелких тел в процессе эволюции роя (Рис. 1.4.8). При этом, из-за приобретаемого телами центробежного ускорения и уменьшения гравитационного притяжения, их скорость вращения становится меньше *кеплеровой*, что увеличивает торможение в газе и способствует ускорению этого процесса. Важную роль должен был также играть механизм обмена исходным веществом в радиальном направлении, эффективность которого накладывает определенные ограничения на возможность реализации различных сценариев эволюции диска и степень его хаотизации при формировании зародышей планет (*Гринберг, 1989*).

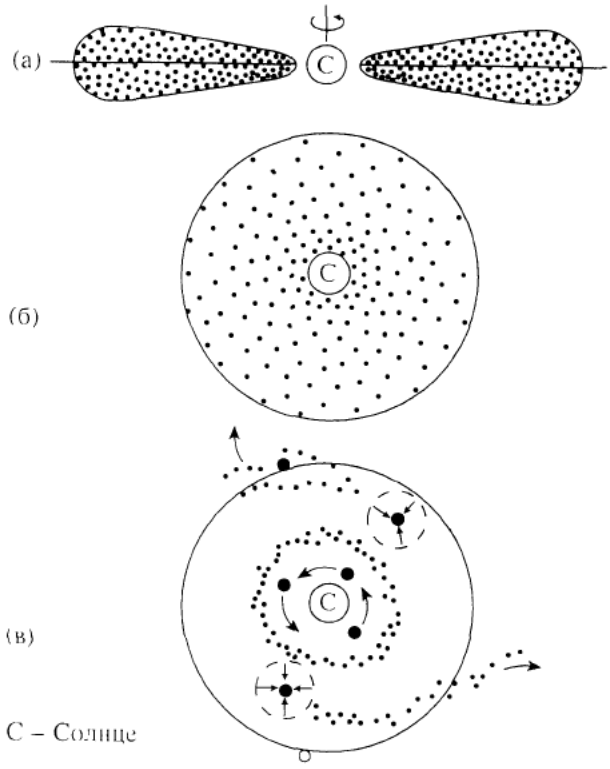


Рис.1.4.8. Схематическое изображение последовательности аккреции планетных тел из планетезималей: а) конденсация пылевых частиц из газового вещества протопланетной туманности и формирование диска вследствие их осаждения к центральной плоскости; b) образование зародышевых сгустков вследствие гравитационной неустойчивости и рост планетезималей размером в несколько километров; в) аккумуляция планет в процессе аккреции планетезималей, сопровождаемая их выбросом из областей роста планет-гигантов на переферию Солнечной системы, с образованием пояса Койпера и облака Оорта. Согласно (*Гринбергу, 1989).*

диальном направлении, эффективность которого накладывает определенные ограничения на возможность реализации различных сценариев эволюции диска и степень его хаотизации при формировании зародышей планет (*Гринберг, 1989*).

Большую популярность в планетной космогонии получила идея о том, что образование протосолнечной туманности произошло под воздействием взрыва сверхновой в окрестности компактного газового облака, изначально сформировавшегося вследствие фрагментации более массивного газового скопления. Ключом к исследованию промежутка времени между процессами *нуклеосинтеза*, сопровождавшими такой взрыв и инжекцию материала в протосолнечную туманность, и образованием твердых тел в Солнечной системе явились короткоживущие радионуклиды метеорита Альенде, в частности открытие исчезнувшего изотопа ^{26}Al (присутствие которого в ранней Солнечной системе надежно установлено) и его дочернего изотопа ^{26}Mg, с учетом теоретических концепций о взаимосвязи $^{24}Mg - ^{26}Mg$, ^{26}Al и ^{27}Al (*Вассербург и Попанастасиу, 1986*).

Этой идее благоприятствуют также результаты моделирования, свидетельствующие о необходимости избыточного давления, чтобы вызвать гравитационный коллапс диффузного облака, подобного родительскому облаку Солнечной системы, и отделение диска. Такое избыточное давление могло быть обеспечено за счет ударных волн, порожденных взрывом сверхновой. Интересно, что задолго до изучения метеорита Альенде на возможность подобной связи обратил внимание Фесенков (*1973*), который писал: "*...наличие в метеоритах продуктов*

распада различных короткоживущих изотопов делает весьма вероятным предположение, что незадолго до образования планет имел место взрыв Сверхновой, который мог способствовать возникновению различных неоднородностей в среде протопланетной туманности." Подобное событие нельзя считать исключительным с учетом наблюдаемой частоты появления сверхновых в Галактике. В частности, предположение о совсем недавнем ($\sim 10^5$ лет тому назад) взрыве сверхновой в сравнительно близкой (несколько десятков парсек) окрестности Солнца было выдвинуто, исходя из анализа интенсивности гамма-излучения в линии ^{26}Al и повышенного фона космических лучей в области мягкого рентгена, так что возможно Солнечная система находится сейчас внутри газового облака повышенной плотности, образовавшегося в результате такого взрыва (*Клейтон и др., 1986*).

Проблема формирования планетной системы непосредственно связана с механизмом передачи от коллапсирующей звезды солнечного типа протопланетному диску момента количества движения $J_\odot$. Для протосолнечной туманности равномерной плотности его величина заключена в пределах $10^{52} < J_\odot < 10^{53}$ г см^2 с$^{-1}$ и ограничена примерно на порядок большим значением для диска с массой, концентрирующейся к центру (*Рузмайкина и Макалкин, 1991*). Наиболее вероятно, что такая передача была обусловлена турбулентной вязкостью во вращающемся, конвективно нестабильном газовом диске, что определило временную шкалу его расширения (*Сафронов, 1969; 1991; Руден и Поллак, 1991; Стерзик и Морфилл, 1994*). В дальнейшем, в процессе аккумуляции зародышей, не менее важную роль могли играть турбулентные вихри, за счет которых частицы ускорялись и легче объединялись в "*кольца*" вещества. Альтернативные возможности потери углового момента Солнца на ранней стадии эволюции связываются со сдвиговыми движениями при кеплеровском вращении диска (*Шакура и Сюняев, 1973; Зельдович, 1981; Далбрулле, 1993*), а при наличии частично ионизованной среды – с действием электромагнитных сил или возникновением локальных шировых нестабильностей в полоидальном магнитном поле (*Альвен, 1978 ; Бэлбас и Хоули,1991*). Нельзя также исключить возможности уноса избыточного момента вращения на стадии сжатия, которому способствует магнитное поле, хотя у звезд магнитные поля относительно слабы (*Пикельнер и Каллан, 1976*). В последующем момент количества движения вещества может уноситься звездным ветром, и поскольку сумма момента количества движения плазмы на единицу массы и момента, связанного с магнитными напряжениями, сохраняется постоянной, момент вращения передается поверхности через магнитные напряжения, что приводит к постепенному уменьшению угловой скорости вращения звезды (*Баранов и Краснобаев, 1977*). Однако ни в одной из перечисленных моделей, включая турбулентную конвекцию, пока не удается найти адекватный механизм появления эффективной вязкости, чтобы объяснить перенос углового момента $J_\odot$ в радиальном направлении от центрального сгущения.

Условия возникновения и поддержания сдвиговой турбулентности на различных стадиях эволюции диска необходимо рассматривать для двухфазной (газопылевой) среды, обладающей дифференциальной угловой скоростью вращения ω, различным относительным содержанием пылевых частиц η (так что плотности газа ρ_g и пыли ρ_d связаны соотношением $\rho_d = \eta\, \rho_g$) и их распреде-

лением по размерам с учетом возможной коагуляции, влияющим на оптические свойства (непрозрачность) среды*).

Исходя из соображений размерности для турбулентного сдвигивого слоя толщиной z, вращающегося с угловой скоростью ω, можно предположить, что вихрь, возникающий в силу существования вертикального градиента скорости вращения $dv/dz = \omega = \ell \boldsymbol{Ro}$ (где $\boldsymbol{Ro}$ – число Россби) при $\boldsymbol{Ro} = const$ адаптируется к угловой скорости всего диска, что, однако, далеко не очевидно при наличии пылевых частиц (*Сафронов, 1996; Куззи и др., 1994*). Градиент dv/dz приводит к оседанию частиц вблизи плоскости $z = 0$ и образованию пылевого субдиска, что сопровождается возникновением радиального дрейфа в диске и изменением теплового режима за счет диссипации турбулентной энергии. Очевидно, турбулентность, отсутствующая в условиях полного перемешивания при $dv/dz = 0$, должна возрастать при оседании растущих частиц. С увеличением dv/dz до $\ell \boldsymbol{Ro}$ будет происходить изменение скорости оседания и временной шкалы этих конкурирующих процессов, что, в свою очередь, должно повлиять на возникновение условий гравитационной нестабильности в субдиске, обусловливающей рост более крупных тел.

Обращает на себя внимание тот факт, что генерируемая на границах слоев протопланетного диска турбулентность по своему характеру отвечает параметрам экмановского погранслоя с толщиной $\delta \sim (\nu^T / \omega)^{1/2} \sim \Delta v / \omega \, \boldsymbol{Re}^T$ (где, как и раньше, ν^T – турбулентная вязкость, Δv – разность вращательной скорости газового диска и келлеровой скорости пылевых частиц и $\boldsymbol{Re}^T = \Delta v \, \delta / \nu^T$ – турбулентное число Рейнольдса (*Сафронов, 1991; Кассен, 1994*). При этом длина перемешивания $\sim \delta$, а скорость турбулентного перемешивания $\nu^T \sim \delta^2 \omega$. В рамках большинства рассматриваемых эволюционных моделей аккреционного диска у молодого Солнца коэффициент ν^T отвечает скорости большей относительной скорости частиц v_r. Это приводит к представлениям о том, что при столкновениях частиц более вероятны процессы объединения (*кохезии*), а не фрагментации, и благоприятствует идее постепенного роста зародышей планет (*планетезималий*) в пылевом субдиске.

Привлечение механизма сдвиговой турбулентности подкрепляет также представления о возможности кольцевого сжатия плоского протопланетного облака и коагуляции планет из первоначально "*рыхлых*" газопылевых сгустков, заполняющих значительную часть своей сферы притяжения и медленно сжимающихся за счет внутренних гравитационных сил (*Энеев и Козлов, 1977; Мясников и Титоренко, 1994 а,б*). При этом, как было обнаружено в результате численных

---

*) Непрозрачность определяется в основном частицами микронных размеров, поэтому в процессе их роста изменяются условия теплообмена, что должно приводить к уменьшению конвективной неустойчивости и интенсивности турбулентных движений. Можно, однако, предполагать, что длительность этого процесса была значительной, превышающей время выпадения частиц межзвездной среды на внешнюю часть диска, поскольку регулировалась, помимо аггломерации, также переносом и испарением во внутренних областях среды, охваченной конвекцией (подробнее см. (*Накамура и др., 1994; Макалкин, Дорофеева, 1996*)).

экспериментов в рамках такой альтернативной модели, сам эффект кольцевого сжатия самогравитирующих сгустков инвариантен по отношению к размерам и массам первоначальных тел облака и не требует допущения о значительных *эксцентриситетах* частиц в процессе их вычерлывания. Важно также подчеркнуть, что данная космогоническая модель приводит к представлениям о том, что приливная эволюция естественным образом обусловила вращательные движения всех планет (включая вращающиеся в обратном направлении Венеру и Уран) на ранней стадии, и в процессе дальнейшего сжатия измененила их периоды и наклонения осей вращения до современных значений. Однако вопрос устойчивости протяженных рыхлых тел, постулируемых моделью, требует дополнительного обоснования.

1.4.4. О роли плазменной турбулентности в эволюции Вселенной. При изучении природы и эволюции астрофизических объектов и явлений в космосе следует также особо выделить плазменную турбулентность, возбуждаемую при неустойчивом состоянии плазмы, например, вследствие неустойчивости встречных конфигураций магнитного поля и быстропеременных процессов на Солнце, особенно в областях вспышек; неустойчивости быстрых частиц в солнечном ветре при его распространении в гелиосфере и в окрестности ударных волн при взаимодействии с планетами или кометами; анизотропного распределения частиц по скоростям в магнитосфере планеты или релятивистских потоков в солнечной короне, магнитосфере пульсара и т.п. Заметим, что от обычной гидродинамической турбулентности ее отличает более широкий спектр взаимодействующих между собой плазменных волн (таких, как *ленгмюровские*, *ионно-звуковые, альвеновские, спиральные*), и резонансное взаимодействие волн и частиц, обусловленное индуцированным излучением, поглощением и рассеянием волн частицами. Такое взаимодействие вызывает бесстолкновительную диссипацию волн в равновесном случае и возникновение неустойчивостей в неравновесной плазме, которые приводят к развитию турбулентных процессов. При этом могут изменяться дисперсионные характеристики волн и появляться новые моды коллективных движений плазмы, описание которых возможно в рамках феноменологической теории, опирающейся на результаты численного моделирования (*Шапиро и Шевченко, 1987*).

О масштабах развития плазменных неустойчивостей и сопровождающих их взаимодействиях волн и частиц в сильно турбулентной среде свидетельствуют процессы, наблюдаемые на поверхности фотосферы и в атмосфере Солнца, как типичного представителя звезд класса G2 главной последовательности на диаграмме *Герцшпрунга–Рессела.*

На Рис. 1.4.9. показана фотография Солнца, полученная в рентгеновских лучах, где видны темные области корональных дыр, из которых происходит непрерывное истечение горячей плазмы солнечного ветра, и многочисленные области активности, связанные с различной топологией магнитный полей, сильной концентрацией магнитной энергии и возникновением токовых систем в хромосфере, приводящим к мощным возмущениям (вспышкам) с образованием ударных волн. При разрушении токовых слоев и изменении структуры поля вследствие неоднородности движений в сильно замагниченной бесстолкновительной плазме происходит взрывное высвобождение электромагнитной энергии, что

вызывает ускорение частиц, генерацию мощных потоков коротковолнового излучения и выброс горячих плазменных сгустков (*Акасофу, Чепмен, 1974; Маров, Колесниченко, 1987*). Это вещество с вмороженными в него магнитными полями, "вытягиваемыми" из солнечной фотосферы в виде гигантских корональных петель, оказывает сильнейшее влияние на состояние и структуру межпланетного пространства, физические процессы в ближайших окрестностях планет и геофизические явления.

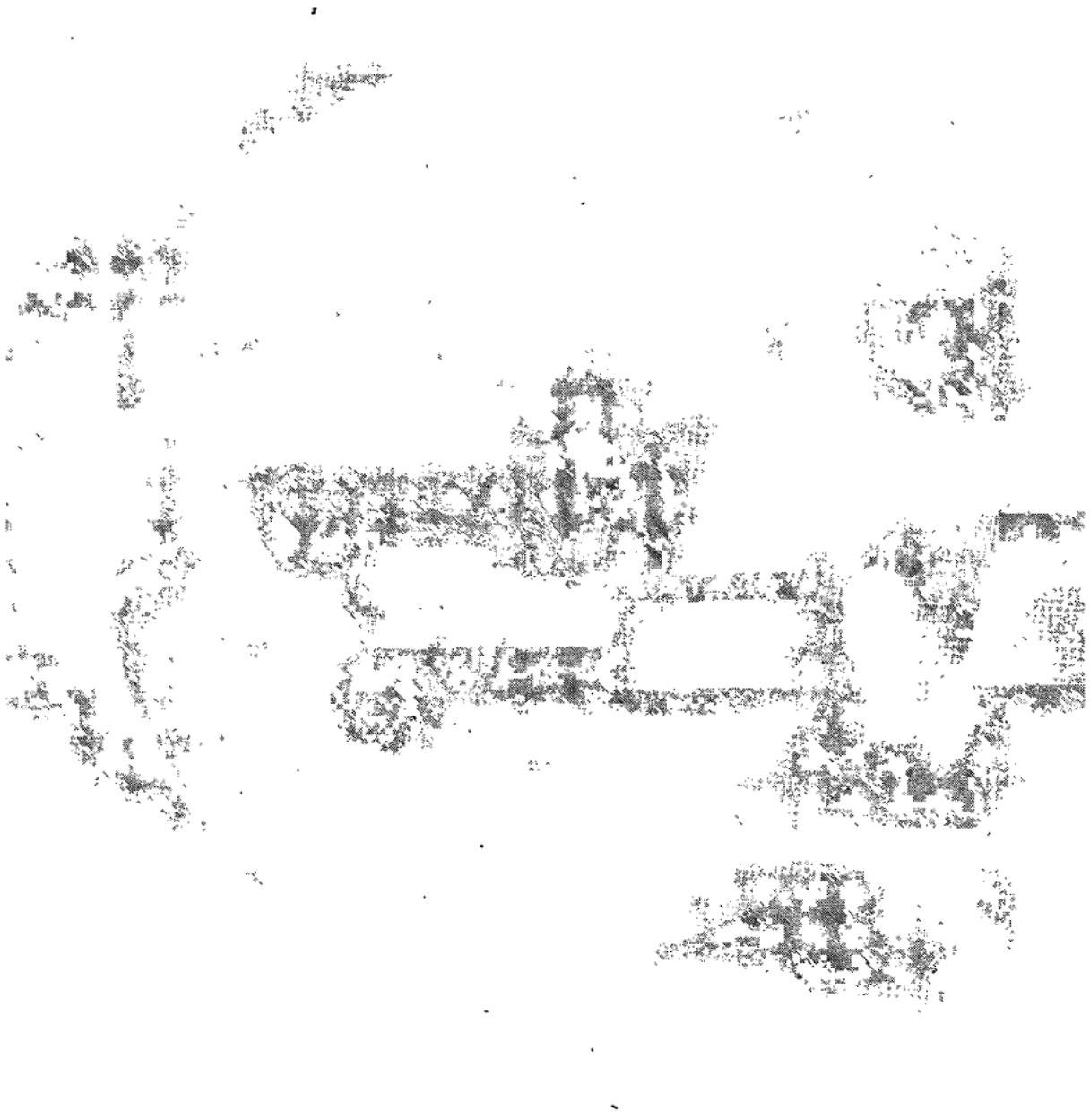


Рис. 1.4.9. Фотография Солнца в рентгеновских лучах. Большие яркие образования нерегулярной структуры представляют собой области активности в которых замкнутые силовые линии магнитного поля способны удерживать горячий, сильно турбулизованный газ, имеющий температуру ~10^6 *K*. В темных областях корональных дыр с разомкнутой топологией магнитных силовых линий происходит истечение плазмы солнечного ветра. Слева на диске – развитие мощной вспышки. Снимок космического аппарата "*Юкон*" (Англия, США, Япония), с любезного разрешения *NASA*.

Краткие выводы:

1. Турбулентность представляет собой широко распространенное и весьма сложное физическое явление, присутствующее в разнообразных природных средах и технических системах. Характерными примерами таких турбулизованных природных сред являются атмосферы планет Солнечной системы, в том числе внешние газовые оболочки этих небесных тел, лежащие в пограничных областях между атмосферой и космосом.

2. Многокомпонентная турбулентность играет важную роль в формировании структуры и свойств астрофизических объектов – галактик и звезд на разных этпах эволюции, а также протопланетных облаков и аккреционных дисков, служащих основой космогонических моделей. От структуры турбулентных потоков и распределения энергии между турбулентными движениями различных пространственных масштабов зависит распространение в атмосфере малых примесей, с чем связаны, в частности, проблемы охраны окружающей среды.

3. Обсуждение специфических особенностей многокомпонентных турбулентных сред и ключевых механизмов, определяющих их природу, создает необходимые предпосылки для разработки теоретических подходов с целью создания адекватных математических моделей данного явления.

ГЛАВА 2

РЕГУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ С ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ

Характерным представителем многокомпонентной природной среды служит верхняя атмосфера планеты, отличительной особенностью которой является непосредственное воздействие радиационных факторов при одновременных разнообразных химических превращениях в сочетании с процессами тепло- и массопереноса. Под воздействием интенсивного солнечного электромагнитного излучения происходят разнообразные фотохимические процессы – фотоионизация, фотодиссоциация, возбуждение внутренних степеней свободы (в том числе возбуждение электронных уровней) атомов и молекул. Эти процессы сопровождаются обратными реакциями ассоциации атомов в молекулы, рекомбинации ионов, спонтанного излучения фотонов и ударной дезактивации. Свойства газа формируются в гравитационном и электромагнитном полях; при этом важную роль играют процессы молекулярной и турбулентной диффузии и теплопередачи (в том числе и излучением) при различной степени эффективности коэффициентов молекулярного и турбулентного обмена на разных высотных уровнях. Возникающие температурные, концентрационные и барические градиенты приводят к развитию разномасштабных гидродинамических движений, характер которых до основания термосферы сохраняется турбулентным. Определенное воздействие на состав, динамику и энергетику верхней атмосферы оказывает также солнечное корпускулярное излучение и некоторые дополнительные источники энергии (такие как приливные колебания, вязкая диссипация энергии магнитогидродинамических и внутренних гравитационных волн и др.).

Теоретический анализ взаимосвязанных физико-химических, динамических и радиационных процессов и явлений в средней и верхней атмосфере представляет чрезвычайно сложную задачу. Наиболее полное и строгое исследование подобной среды может быть проведено в рамках кинетической теории многокомпонентных смесей многоатомных ионизованных газов, исходя из системы обобщенных интегро-дифференциальных уравнений Больцмана для функций распределения частиц каждого сорта смеси (с правыми частями, содержащими интегралы столкновений и интегралы реакций), дополненной уравнением переноса радиации и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Такой подход развит, в частности, в монографии авторов (*Маров, Колесниченко, 1987*), где для решения системы газокинетических уравнений реагирующей смеси применен обобщенный метод Чепмена–Энскога. Однако ряд упрощений, часто вводимых при решении сложных аэрономических задач (например, учет только парных столкновений взаимодействующих молекул, предположение об отсутствии внутренней структуры сталкивающихся частиц вещества при определении коэффициентов молекулярного обмена и т.п.), существенно уменьшает преимущества, заложенные изначально в кинетических уравнениях.

Наряду с этим, с точки зрения макроскопических свойств верхнюю атмосферу можно рассматривать как континуальную химически активную среду и для

ее адекватного математического описания воспользоваться методами механики многокомпонентных смесей, позволяющими феноменологически, с использованием принципов неравновесной термодинамики, получить систему гидродинамических уравнений со всеми необходимыми замыкающими соотношениями. Подобный феноменологический подход позволяет промоделировать как ламинарные, так и осредненные турбулентные режимы течений в верхней атмосфере планеты (*Колесниченко, 1980*). В настоящей главе обсуждается система гидродинамических уравнений для описания ламинарных движений многокомпонентной реагирующей сплошной среды, которая по предположению описывает и мгновенные (истинные) движения турбулентной газовой смеси.

§ 2.1. Исходные балансовые уравнения и законы сохранения для регулярных движений газовых смесей

Рассмотрим химически активную газовую смесь верхней атмосферы, состоящую из N компонентов. Термогидродинамическим параметрам, относящимся к разным компонентам смеси, будем далее присваивать различные индексы, в качестве которых будем использовать буквы греческого алфавита α, β и γ $(\alpha,\beta,\gamma = 1, 2,..., N)$. Макроскопически смесь будем рассматривать как один континуум с усложненными свойствами, характеризуемый системой *переменных состояния*, к которым в первую очередь можно отнести среднемассовую плотность $\rho(\boldsymbol{r},t)$, температуру $T(\boldsymbol{r},t)$, термодинамическое давление $p(\boldsymbol{r},t)$ и числовые плотности $n_\alpha(\boldsymbol{r},t)\,(\alpha = 1,2,...,N)$ химических компонентов смеси. Переменные состояния являются функциями времени t и пространственных координат x, y, z в относительной системе координат, неподвижной относительно планеты.

Как известно (*Ландау, Лифшиц, 1988*), в основе гидродинамической модели реагирующей смеси лежат связанные нестационарные дифференциальные уравнения механики сплошной среды (описывающие законы сохранения массы, импульса и энергии), необходимые уравнения состояния для давления (*термическое*) и внутренней энергии (*калорическое*) и определяющие (*реологические*) соотношения для различных термодинамических потоков (потоков диффузии и тепла, тензора вязких напряжений и пр.). Кроме того, необходимо знание выражений для всевозможных термодинамических функций (внутренней энергии, энтальпии, разных теплоемкостей компонентов и т.п.), формулы для различных коэффициентов молекулярного обмена и для коэффициентов скоростей химических реакций (если среда химически неравновесна). Дифференциальные уравнения в частных производных требуют знания начальных и граничных условий, которые, описывая геометрию *термодинамической системы* (материальный объект, имеющий четко заданные границы) и обмен массой, импульсом и энергией между системой и внешней средой, должны быть сформулированы *ad hoc* для каждой конкретной гидродинамической задачи.

Общая форма балансового уравнения. Уравнение субстанционального баланса для любого *определяющего параметра* смеси $A(\boldsymbol{r},t)$ (т.е. параметра, характеризующего состояние сплошной среды и ее динамику, в частности, мгновенное состояние турбулизованной смеси), может быть записано в следующем общем виде (*Дьярмати, 1974*) :

$$\rho dA/dt = -J_{(A)j},_j + \sigma_{(A)}. \qquad (2.1.1)$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{r},t)$ – суммарная массовая плотность смеси (см. (2.1.9)); A – удельное (локальное) значение какой-либо скалярной величины $\Lambda = \int_w \rho A dw$ (например, массы, энергии, энтропии и пр.), баланс которой составляется; w – некоторый произвольный объем системы; $J_{(A)j}(\boldsymbol{r},t)$ – составляющие вектора субстанциональной плотности молекулярного потока параметра A (суммарная величина всех видов переноса признака A через единичную поверхность, включающая конвективную составляющую $\rho A V_j$, а также потоки, определяющие поверхностные воздействия на интегральную величину Λ); $\sigma_{(A)}(\boldsymbol{r},t)$ – объемная плотность источника признака A (скорость возникновения ($\sigma_{(A)} > 0$) или уничтожения ($\sigma_{(A)} < 0$) величины A в единице объема и в единицу времени);

$$d(..)/dt = (..),_t + V_j(..),_j \qquad (2.1.2)$$

– субстанциональная (лагранжева) производная по времени (*операторное уравнение*); $V_j(\boldsymbol{r},t)$ – составляющие вектора гидродинамической скорости смеси (см. (2.1.9)). Для сокращения записи формул по повторяющимся индексам i, j и k ($i, j, k = 1,2,3$), относящимся к декартовым координатам точки $\boldsymbol{r}$, здесь и всюду далее производится суммирование; запятая обозначает дифференцирование. Параметр A является скаляром, декартовой компонентой вектора или тензора (соответствующим в случае турбулентного течения мгновенному значению полевой величины произвольного тензорного ранга). Поток $J_{(A)j}$ представляет собой тензор на один порядок выше, а скорость образования $\sigma_{(A)}$ – тензор того же порядка, что и характеристика A.

Отметим, что, вообще говоря, величины $J_{(A)j}$ и $\sigma_{(A)}$ не могут быть определены однозначно, поскольку замена потока $J_{(A)j}$ на поток $J_{(A)j} + B_j$ и источника $\sigma_{(A)}$ на источник $\sigma_{(A)} + B_j,_j$ (где B_j – некоторый произвольный вектор) не изменит уравнения баланса (2.1.1). При выборе вектора B_j в каждом конкретном случае необходимо принимать во внимание физический смысл величины A и при прочих равных условиях руководствоваться соображениями удобства.

Далее широко будем использовать *операторное соотношение*

$$\rho dA/dt = (\rho A),_t + (\rho A V_j),_j , \qquad (2.1.3)$$

дающее связь между субстанциональным и локальным изменениями характеристики A.

При $A \equiv 1$ соотношение (2.1.3) сводится к уравнению локального баланса массы суммарного континуума (*уравнение неразрывности*)

$$\rho,_t + (\rho V_j),_j = 0, \qquad (2.1.4)$$

следствием которого (2.1.3) и является (в чем легко убедиться, используя для вы-

вода (2.1.3) соотношения (2.1.2) и (2.1.4)). Уравнение (2.1.4) отражает факт сохранения полной массы в произвольном элементе объема w системы при ее движении, т.е. тот факт, что масса может изменяться только в том случае, когда вещество втекает в объем w , или вытекает из него.

При выводе (в последующих главах) многих важных соотношений между осредненными характеристиками движущегося турбулизованного многокомпонентного континуума (в частности, при выводе эволюционных уравнений переноса для вторых корреляционных моментов различных пульсирующих в потоке переменных состояния) широко будут использованы разнообразные балансовые уравнения для мгновенных (не осредненных по Рейнольдсу) значений термогидродинамических параметров смеси A, записанные в субстанциональной форме (2.1.1) (т.е. с указанием явного вида дивергентной ($J_{(A)j,j}$) и источниковой ($\sigma_{(A)}$) частей). Приведем их здесь с необходимыми (для дальнейших целей) подробностями.

2.1.1. Дифференциальные уравнения материального баланса. Рассмотрим в (2.1.1) последовательно случаи различных определяющих параметров A , описывающих состояние N-компонентной смеси реагирующих газов.

Баланс удельного объема. Примем в выражении (2.1.1) $A \equiv v(\boldsymbol{r},t)$, где $v \equiv 1/\rho$ – удельный объем системы и определим субстанциональный поток и источник величины $v(\boldsymbol{r},t)$ соотношениями

$$J_{(v)j} \equiv -V_j, \quad \sigma_{(v)} \equiv 0. \tag{2.1.5}$$

Тогда из (2.1.1) следует

$$\rho dv/dt = V_{j,j} \tag{2.1.6}$$

– уравнение баланса удельного объема суммарного материального континуума.

Уравнения неразрывности для концентраций химических компонентов смеси Диффузионное уравнение для α-й компоненты среды (в случае, когда составляющие смесь компоненты и химические реакции можно считать распределенными в пространстве непрерывно) в субстанциональной форме имеет вид (*Де Гроот, Мазур, 1964*)

$$\rho\, dZ_\alpha/dt = -J_{\alpha j,j} + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\xi_s, \quad (\alpha = 1,2,...,N), \tag{2.1.7}$$

где $Z_\alpha(\boldsymbol{r},t) \equiv n_\alpha/\rho$ – удельная (на единицу массы суммарного континуума) числовая плотность α-компоненты; $n_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ – числовая плотность (на единицу объема) молекул сорта α ; $J_{\alpha j}(\boldsymbol{r},t)$ – диффузионный (молекулярный) поток вещества α в системе отсчета, движущейся со среднемассовой скоростью смеси V_j (т.е. $J_{\alpha j} \equiv n_\alpha(V_{\alpha j} - V_j)$); $V_{\alpha j}(\boldsymbol{r},t)$ – гидродинамическая скорость частиц α-го сорта; $\sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\xi_s$ – источниковый член, выражающий общее увеличе-

ние (уменьшение) числа частиц сорта α в единице объема в единицу времени за счет химических реакций (подробнее см. разд. 3.2.3); $\xi_s(\boldsymbol{r},t)$ – скорость протекания s-ой химической реакции $(s=1,2,...,r)$, которая должна определяться из дополнительных физико-химических законов (считается, что $\xi_s > 0$, если реакция идет в положительную сторону); $\nu_{\alpha s}$ – стехиометрические коэффициенты вещества α в s-ой реакции, которые отрицательны для компонентов, вступающих в реакцию (т.е. являющихся "*реагентами*" в реакции s) и положительны для продуктов реакции, когда реакция идет в положительном направлении (коэффициенты $\nu_{\alpha s}$ определяют массовые доли соответствующих компонентов, участвующих в реакциях).

Уравнения (2.1.7) линейно зависимы, так как справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha = 1 \quad (^1), \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha J_{\alpha j} = 0 \qquad (j=1,2,3) \qquad (^2),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha \sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} \xi_s \left[\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha \nu_{\alpha s} \right] = 0 \qquad (^3) \tag{2.1.8}$$

(где M_α – молекулярная масса частицы сорта α), причем тождества (2.1.8 $^{(1,2)}$) являются следствием определения полной массовой плотности ρ и гидродинамической (среднемассовой) скорости V_j многокомпонентного континуума:

$$\rho \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha n_\alpha, \qquad V_j \equiv \rho^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha n_\alpha V_{\alpha j} \ , \tag{2.1.9}$$

а соотношение (2.1.8$^{(3)}$) – следствием закона сохранения массы в химических реакциях:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha \nu_{\alpha s} = 0 \qquad (s=1,2,\ldots,r).$$

В связи с этим, одно из дифференциальных уравнений (2.1.7) всегда можно исключить из рассмотрения, заменив его алгебраическим интегралом (2.1.8$^{(1)}$).

Сопоставляя (2.1.7) и (2.1.1) при $A \equiv Z_\alpha$, получим для значений потока и источника следующие выражения

$$J_{(Z_\alpha)j} \equiv J_{\alpha j} \quad , \quad \sigma_{(Z_\alpha)} \equiv \sigma_\alpha . \tag{2.1.10}$$

Уравнения сохранения химических элементов в газовой смеси. При феноменологическом описании реагирующей многокомпонентной смеси в различных конкретных случаях целесообразно использовать разные уравнения вещественного баланса. В аэрономических исследованиях важное значение имеют так называемые *уравнения диффузии химических элементов* (входящих в состав изучаемой системы), которые были получены в удобном для геофизических прило-

жений виде в работе (*Колесниченко, Тирский, 1979*). Обозначая через η_α^γ число атомов (*химических элементов*) сорта g в *"молекуле"* сорта a, будем иметь

$$n^\gamma = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^\gamma n_\alpha \qquad (2.1.11)$$

– полная числовая плотность химического элемента сорта g в единице объема многокомпонентного континуума.

Для компактности записи используемых далее соотношений, будем предполагать, что все химические элементы наличествующие в системе (в чистом или связанном виде) входят в число N компонентов смеси и им присвоены номера, начиная с N_m (где N_m – число сортов молекулярных (многоатомных) компонентов смеси). Это не нарушает общности математического описания, т. к. всегда реальную многокомпонентную смесь можно дополнить новыми компонентами – *химическими элементами* (которые не входят в нее изначально в чистом виде (т.е. в виде отдельных компонентов), но входят в состав молекул рассматриваемой системы), предполагая при этом, что для них (как "*элементов-компонентов*" N-компонентной среды) соответствующие термогидродинамические параметры (типа n_γ и $J_{\gamma j}$) равны нулю. Тогда будем иметь

$$\eta_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\gamma = \begin{cases} 1, & \alpha = \gamma \\ 0, & \alpha \neq \gamma \end{cases} \quad (\alpha, \gamma = N_m + 1,\ N_m + 2, \ldots, N) \ .$$

Умножая уравнения (2.1.7) на коэффициенты η_α^γ и суммируя результат по a (a=1,2,...,N) , получим законы сохранения отдельных химических элементов системы в виде

$$\rho\, dZ^\gamma / dt = -J_{j,j}^\gamma \quad (\gamma = N_m + 1,\ N_m + 2, \ldots, N) \ , \qquad (2.1.12)$$

где введены следующие обозначения :

$$Z^\gamma \equiv n^\gamma / \rho = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^\gamma Z_\alpha = Z_\gamma + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta_\alpha^\gamma Z_\alpha \qquad (2.1.13)$$

$$J_j^\gamma = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^\gamma J_{\alpha j} = J_{\gamma j} + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta_\alpha^\gamma J_{\alpha j}, \qquad (\gamma = N_m + 1,\ N_m + 2, \ldots, N), \qquad (2.1.14)$$

Здесь $Z^\gamma(\boldsymbol{r},t)$, $J_j^\gamma(\boldsymbol{r},t)$ – соответственно удельная числовая плотность и полный субстанциональный диффузионный поток химического элемента γ в многокомпонентном континууме. Поток $J_j^\gamma(\boldsymbol{r},t)$ включает перенос данного элемента γ всеми диффузионными потоками молекулярных компонентов (содержащих данный элемент среды); важно не смешивать величины $Z^\gamma(\boldsymbol{r},t)$, $J_j^\gamma(\boldsymbol{r},t)$ с плотностью $Z_\gamma(\boldsymbol{r},t)$ и потоком $J_{\gamma j}(\boldsymbol{r},t)$ "*элемента-компоненты*" сорта γ. При

написании (2.1.12) учтено то ключевое здесь обстоятельство, что источниковый член $\sigma_{(Z^\gamma)}$ для химических элементов исчезает, поскольку при химических реакциях элементы сохраняются в системе (ядерные реакции здесь не рассматриваются), т.е.

$$\sigma_{(Z^\gamma)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha^\gamma \sigma_\alpha = 0 \qquad (\gamma = N_m + 1, N_m + 2, \ldots, N). \tag{2.1.15}$$

Уравнения сохранения элементов (2.1.12), в которых отсутствуют объемные источники, удобно использовать вместо каких-либо из $(N - N_m)$ уравнений диффузии для многоэлементных компонентов системы (2.1.7).

Следует отметить, что здесь также (сравни с (2.1.8)) имеют место соотношения

$$\sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma Z^\gamma = 1 \qquad (^1), \qquad \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma J_J^\gamma = 0 \qquad (^2), \tag{2.1.16}$$

являющиеся следствием (2.1.8) и потому уравнения (2.1.12) являются линейно зависимыми. Действительно, имеем

$$1 = \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_m} M_\alpha Z_\alpha + \sum_{\alpha=N_m+1}^{N} M_\alpha Z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_m} M_\alpha Z_\alpha + \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma \Big[Z^\gamma -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta_\alpha^\gamma Z_\alpha \Big] = \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma Z^\gamma + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \Big[M_\alpha - \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} \eta_\alpha^\gamma M_\gamma \Big] = \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma Z^\gamma,$$

а также

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha J_{\alpha J} = \sum_{\alpha=1}^{N_m} J_{\alpha J} \left[\sum_{\gamma=N_m+1}^{N} \eta_\alpha^\gamma M_\gamma \right] + \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma J_{\gamma J} =$$

$$= \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma \left[J_{\gamma J} + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta_\alpha^\gamma J_{\alpha J} \right] = \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma J_J^\gamma .$$

Здесь использовано очевидное соотношение

$$M_\alpha = \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} \eta_\alpha^\gamma M_\gamma , \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N_m) \tag{2.1.17}$$

для массы M_α молекулы сорта α, выраженной через массы M_γ химических элементов.

Таким образом, при априорной подстановке $A \equiv Z^\gamma$ в уравнение (2.1.1), следовало бы положить

$$J_{(Z^\gamma)J} \equiv J_J^\gamma , \qquad \sigma_{(Z^\gamma)} \equiv 0 . \tag{2.1.18}$$

2.1.2. Уравнения сохранения количества движения суммарного континуума. В задачах геофизики и аэрономии приходится иметь дело с относительными движениями газовой среды в атмосфере, изучаемой в системе координат, связанной с вращающейся поверхностью планеты. Благодаря этому в соответствующих уравнениях движения появляются дополнительные члены, учитывающие ускорение Кориолиса, а также центростремительное ускорение (часто малое по сравнению с ускорением свободного падения), связанные с вращением планеты. Полное уравнение сохранения количества движения для многокомпонентной газовой смеси в субстанциональной форме в этом случае принимает вид

$$\rho\frac{dV_i}{dt} = -p_{,i} + \pi_{ij,j} + 2\rho\varepsilon_{kij}V_k\Omega_j + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha i}, \qquad (2.1.19)$$

где $p(\boldsymbol{r},t)$ – термодинамическое давление смеси; $\pi_{ij}(\boldsymbol{r},t)$ – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения всех компонент смеси (записанный здесь, в так называемом, *диффузионном приближении* (*Седов, 1984; Нигматулин, 1987*); см. также разд. 2.1.3); $2\rho\varepsilon_{kij}V_k\Omega_j$ – составляющие вектора силы Кориолиса; ε_{kij} – альтернирующий тензор Леви–Чивита:

$$\varepsilon_{ilk} = \begin{cases} 1, & i,l,k = 1,2,3;\quad 3,1,2;\quad 2,3,1; \\ 0, & i = l \qquad i = k \qquad l = k \\ -1, & i,l,k = 2,1,3;\quad 3,2,1;\quad 1,3,2. \end{cases} \qquad (2.1.20)$$

Ω_j – составляющие вектора угловой скорости вращения системы координат (относительно абсолютной системы координат), в которой записано уравнение (2.1.19) (везде ниже предполагается, что скорость вращения планеты $\Omega_j \equiv const$); $F_{\alpha j}(\boldsymbol{r},t)$ – суммарная внешняя сила, действующая на одну частицу α-компоненты. Далее силу тяжести будем выделять из $F_{\alpha j}$ в явном виде, тогда

$$F_{\alpha j} \equiv M_\alpha g_j + F^*_{\alpha j}, \qquad g_j = -g\,\delta_{j3}, \qquad (2.1.21)$$

где δ_{ij} – тензор Кронекера; ось *Oz* направлена вверх, по нормали к эквипотенциальной поверхности силы тяжести (координата $x_3 \equiv z$ отсчитывается от некоторой начальной эквипотенциальной поверхности – уровня моря в случае Земли); $g = |\boldsymbol{g}|$ – приведенное (с учетом центробежной силы) ускорение свободного падения $\left(\boldsymbol{g} = \nabla\left[\tfrac{1}{2}|\Omega\times\boldsymbol{R}|^2 - G\frac{M_{pl}}{|\boldsymbol{R}|}\right]\right.$, G – гравитационная постоянная, M_{pl} – масса планеты, $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор, проведенный из центра планеты в рассматриваемую точку пространства); $F^*_{\alpha i}$ – сила негравитационного происхождения (например, электромагнитная сила Лоренца, $F^*_{\alpha i} = e_\alpha(E_i + c^{-1}\varepsilon_{kij}V_{\alpha k}B_j)$).

Итак, сопоставление выражений (2.1.19) и (2.1.1) при $A \equiv V_i$, дает для субстанционального потока и объемного источника величины V_i следующие выражения

$$J_{(V_i)j} \equiv -\pi_{ij}, \sigma_{(V_i)} \equiv -p_{,i} + 2\rho\varepsilon_{kij}V_k\Omega_j + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha i}. \qquad (2.1.22)$$

Как было отмечено выше, выбор потока $J_{(V_i)j}$ и источника $\sigma_{(V_i)}$ количества движения неоднозначен и может быть другим. Так для геофизических приложений иногда удобно представить полное давление смеси в виде двух слагаемых

$$p = p^d + p_0, \qquad (2.1.23)$$

где p^d – так называемое *динамическое давление*, а p_0 – часть давления, удовлетворяющая уравнению (*гидростатики*)

$$p_{0,j} = \rho_0 g_j = -\rho_0 g \delta_{3j}, \qquad (2.1.24)$$

ρ_0 – некоторая характерная для атмосферы постоянная величина массовой плотности (например, на уровне моря), $\Delta\rho = \rho - \rho_0$. Тогда

$$J^*_{(V_i)j} \equiv p^d \delta_{ij} - \pi_{ij}, \quad \sigma^*_{(V_i)} \equiv -\delta_{i3} g\, \Delta\rho + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F^*_{\alpha i} + 2\rho\varepsilon_{kji}V_k\Omega_j. \qquad (2.1.25)$$

2.1.3. Разнообразные энергетические уравнения в многокомпонентной среде. При феноменологическом построении моделей (различного уровня сложности) многокомпонентной турбулентной среды нам понадобятся разнообразные уравнения энергетического баланса для реагирующей смеси. В этой вводной главе мы дадим вывод этих уравнений в случае консервативных внешних полей.

Баланс потенциальной энергии многокомпонентной смеси. Определим удельную потенциальную энергию газовой смеси соотношением

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_\alpha Z_\alpha, \qquad (2.1.26)$$

где $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ – скалярный потенциал (на одну частицу сорта α), удовлетворяющий условию

$$F_{\alpha j} = -\psi_{\alpha,j}, \qquad \psi_{\alpha,t} = 0. \qquad (2.1.27)$$

Соответствующее уравнение баланса получим, исходя из операторного соотношения (2.1.3). Полагая для этого $A \equiv \Psi$, будем иметь

$$\rho\frac{d\Psi}{dt} = \left[\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha Z_\alpha\right]_{,t} + \left[\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha Z_\alpha V_j\right]_{,j} = \sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\left[(\rho Z_\alpha)_{,t} + (\rho Z_\alpha V_j)_{,j}\right] +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}(\rho Z_\alpha\psi_{\alpha,t}+\rho Z_\alpha V_j\psi_{\alpha,j})=\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\rho\frac{dZ_\alpha}{dt}-\rho V_j\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F_{\alpha j}=\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha[-J_{\alpha j,j}+$$

$$+\sigma_\alpha]-\rho V_j\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F_{\alpha j}=-\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J_{\alpha j}\right],_j+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}\psi_{\alpha,j}-\rho V_j\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F_{\alpha j}+\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\sigma_\alpha.$$

Предполагая далее, что плотность внутреннего источника потенциальной энергии обращается в нуль

$$\sigma_{(\Psi)}{}^{(i)}\equiv\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\sigma_\alpha=0, \tag{2.1.28}$$

что справедливо только тогда, когда в химических реакциях выполняется условие сохранения потенциальной энергии (*Дьярмати, 1974*):

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\nu_{\alpha s}=0,\qquad(s=1,2,\ldots,r)\ , \tag{2.1.29}$$

окончательно получим

$$\rho\frac{d\Psi}{dt}=-\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J_{\alpha j}\right],_j+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}\psi_{\alpha,j}-\rho V_j\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F_{\alpha j}\quad . \tag{2.1.30}$$

Сопоставляя теперь (2.1.30) и уравнение (2.1.1), записанное при $A\equiv\Psi$, получим для субстанционального потока $J_{(\Psi)j}$ и объемного источника $\sigma_{(\Psi)}$ потенциальной энергии смеси следующие выражения

$$J_{(\Psi)j}\equiv\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J_{\alpha j}, \tag{2.1.31}$$

$$\sigma_{(\Psi)}\equiv-\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}F_{\alpha j}-\rho V_j\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F_{\alpha j}\ . \tag{2.1.32}$$

Сохранение полной энергии смеси. Закон сохранения полной энергии многокомпонентной смеси в субстанциональной форме имеет вид

$$\rho dE/dt=-J_{(E)j},_j\ , \tag{2.1.33}$$

где

$$E(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}V_jV_j+\Psi+\varepsilon \tag{2.1.34}$$

– удельная полная энергия многокомпонентного континуума; $\varepsilon(\boldsymbol{r},t)$ – удельная внутренняя энергия среды (соотношением (2.1.34) фактически определяется эта величина);

$$J_{(E)j}\equiv q_j+(p\delta_{ij}-\pi_{ij})V_i+\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J_{\alpha j} \tag{2.1.35}$$

– составляющие вектора субстанционального потока полной энергии движущейся смеси; $q_j(\boldsymbol{r},t)$ – молекулярный поток тепла (соотношение (2.1.35) также следует рассматривать, как точное определение величины потока тепла, выбором которого весьма свободно, как известно, пользуются в экспериментальной физике и теплофизике).

Следует отметить, что вводимое соотношением (2.1.34) значение внутренней энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r},t)$ (записанной здесь в так называемом *диффузионном приближении* (*Седов, 1984*) не является, вообще говоря, корректным, так как не явно включает в себя помимо членов, связанных с тепловым движением молекул и короткодействующим силовым межмолекулярным взаимодействием (что согласуется с обычным пониманием внутренней энергии) еще и члены, зависящие от макроскопической *кинетической энергии диффузии компонентов* (в системе центра масс). Различные случаи многофазной среды (мелкодисперсной, газопылевой и пр.), когда подобная добавка $^1\!/_2 \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha (V_\alpha - V)^2$ (величина второго порядка малости для многокомпонентной смеси) должна приниматься во внимание в явном виде, подробно рассмотрены в работе (*Колесниченко, 1978*).

Уравнение баланса механической энергии смеси. Уравнение (2.1.33) используем далее для вывода балансового уравнения для внутренней энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r},t)$ системы. Но сначала запишем уравнение баланса для *удельной кинетической энергии поступательного движения центра масс.* Умножая для этого уравнение движения (2.1.19) на $V_i(\boldsymbol{r},t)$ (скалярно) и делая стандартные преобразования, получим *теорему живых сил* для многокомпонентной смеси в следующей (субстанциональной) форме

$$\rho \frac{d(V_i V_i/2)}{dt} = \rho V_j \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha j} - \left[\left(p\delta_{ij} - \pi_{ij}\right)V_i\right]_{,j} + pV_{i,j} - \pi_{ij} V_{i,j}. \qquad (2.1.36)$$

Складывая теперь (2.1.30) и (2.1.36), получим следующее уравнение субстанционального баланса *удельной механической энергии* $\varepsilon_m \equiv {}^1\!/_2 V_i V_i + \Psi$:

$$\rho d\varepsilon_m / dt = -J_{(\varepsilon_m)j,j} + \sigma_{(\varepsilon_m)}, \qquad (2.1.37)$$

где

$$J_{(\varepsilon_m)j} \equiv (p\delta_{ij} - \pi_{ij})V_i + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha J_{\alpha j} \qquad (2.1.38)$$

– плотность субстанционального потока энергии ε_m;

$$\sigma_{(\varepsilon_m)} \equiv pV_{j,j} - \pi_{ij} V_{i,j} - \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j} \qquad (2.1.39)$$

– плотность источника механической энергии, причем последнее слагаемое $\sigma^{e}_{(\varepsilon_m)} \equiv -\sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}$ соответствует плотности внешнего источника механической энергии.

Отметим, что физическая интерпретация отдельных членов в разнообразных энергетических уравнениях для ламинарных (мгновенных) и осредненных турбулентных движений в многокомпонентном континууме часто совпадает. Поэтому, во избежании ненужного повтора, отложим ее до Гл. 3.

Уравнение баланса внутренней энергии для многокомпонентного континуума. Уравнение баланса внутренней энергии газовой смеси получим путем вычитания уравнения (2.1.37) из (2.1.33)

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -q_{j,j} - pV_{j,j} + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}. \qquad (2.1.40)$$

В геофизических и аэрономических приложениях часто удобно использовать уравнение для внутренней энергии газовой смеси, записанное через полную удельную энтальпию $h(\boldsymbol{r},t)$ вещества, определяемую соотношением (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$h = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha Z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} (\varepsilon_\alpha + p_\alpha / n_\alpha) Z_\alpha = \varepsilon + p/\rho. \qquad (2.1.41)$$

Тогда, с учетом преобразования

$$\rho d\varepsilon / dt + pV_{j,j} = \rho dh/dt - dp/dt, \qquad (2.1.42)$$

являющегося следствием определения (2.1.41) и уравнения неразрывности (2.1.4), будем иметь

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - q_{j,j} + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}. \qquad (2.1.43)$$

Для большинства целей, рассматриваемых в данной книге, достаточно аппроксимировать парциальную (на одну частицу) энтальпию $h_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ компоненты α с помощью выражения (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$h_\alpha \cong C_{p\alpha} T + h^0_\alpha, \qquad (2.1.44)$$

тогда

$$h = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha h_\alpha \cong C_p T + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha h^0_\alpha, \qquad (2.1.45)$$

$$C_p = \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha} Z_\alpha, \qquad (2.1.46)$$

где $C_{p\alpha}$ – парциальная теплоемкость (при постоянном давлении) компоненты α; h^0_α – энтальпия компоненты α при нулевой температуре (так называемая *теплота образования*); величины $C_{p\alpha}$ и h^0_α приняты далее постоянными, аппрокси-

мирующими действительные изменения теплоемкости $C_{p\alpha}(T)$ и парциальной теплоты образования $h_\alpha^0(T)$ в ограниченном температурном интервале; $C_p(\boldsymbol{r},t)$ – удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении.

Запишем теперь уравнение (2.1.43) в переменных $T(\boldsymbol{r},t)$ и $p(\boldsymbol{r},t)$. Используя соотношения (2.1.7), (2.1.41), (2.1.44) и (2.1.46), получим

$$\rho dh/dt = \rho d\left[\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha h_\alpha\right]/dt = \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha dh_\alpha/dt + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha dZ_\alpha/dt =$$

$$= \rho\left[\sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}Z_\alpha\right]dT/dt + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha[-J_{\alpha j},_j+\sigma_\alpha] = \rho C_p dT/dt - \left[\sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha J_{\alpha j}\right],_j +$$

$$+ T,_j \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}J_{\alpha j} + \sum_{s=1}^{r} q_s\xi_s, \qquad (2.1.47)$$

где соотношением

$$q_s(T) = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \nu_{\alpha s} = q_s^0 + \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}\nu_{s\alpha}, \quad (s = 1,2,\ldots,r) \qquad (2.1.48)$$

введена, так называемая, *теплота реакции* s при постоянных T и p, равная разности между суммой произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагирующих веществ (*реагентов*). Величина $q_s^0 = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 \nu_{\alpha s}$ интерпретируется как теплота химической реакции s при нулевой температуре. Тогда из (2.1.43) и (2.1.47) следует уравнение для внутренней энергии смеси в виде

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -J_{qj},_j + \frac{dp}{dt} + \pi_{ij}V_i,_j - \sum_{s=1}^{r} q_s\xi_s + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j}F_{\alpha j}^* - T,_j \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}J_{\alpha j}, \qquad (2.1.49)$$

где

$$J_{qJ} = q_j - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha J_{\alpha j} \qquad (2.1.50)$$

– *приведенный* поток тепла.

Последнее слагаемой в правой части (2.1.49) представляет эффект, так называемых, *"диффундирующих теплоемкостей"*. В большинстве практически важных случаев удельные изобарные теплоемкости отдельных компонентов газовой смеси $C_{p\alpha}^* \equiv C_{p\alpha}/M_\alpha$ весьма близки (так, что $C_{p\alpha}^* \approx idem$, $C_{p\alpha} \approx idem \cdot M_\alpha$), поэтому в силу $(2.1.8^{(2)})$ этот член уравнения часто может быть опущен. Уравнение для внутренней энергии реагирующей газовой смеси в форме (2.1.49) позволяет выделить в явном виде вклад теплот отдельных химических реакций в энергетику атмосферы (и тем самым в высотное распределение кинетической темпе-

ратуры газа).

Сравнивая (2.1.43) и уравнение (2.1.1), записанное при $A \equiv h$, найдем:

$$J_{(h)j} \equiv q_j \tag{2.1.51}$$

– значение субстанционального потока энтальпии смеси;

$$\sigma_{(h)} \equiv dp/dt + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j} \tag{2.1.52}$$

– значение плотности источника удельной энтальпии смеси (для регулярного течения).

2.1.4. Уравнение состояния смеси идеальных газов. В качестве термического уравнения состояния суммарного многокомпонентного газового континуума (уравнения для давления) будем использовать далее *бароклинное* уравнение состояния для смеси совершенных газов :

$$p = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha = \mathrm{k}T \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha = R^{*} \rho T = R^{*} T/v, \tag{2.1.53}$$

где

$$R^{*} = \mathrm{k} \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha . \tag{2.1.54}$$

– так называемая "*газовая постоянная*" для смеси. Здесь k – постоянная Больцмана; $p_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ – парциальное давление компоненты a, $p_\alpha = \mathrm{k}Tn_\alpha$; первое равенство в (2.1.53) (*закон Дальтона*) является следствием определения величины p_α (независимо от того, являются ли отдельные (составляющие смесь) газы совершенными или нет), как произведения общего термодинамического давления среды p на мольную долю $x_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ компоненты a

$$p_\alpha = x_\alpha p, \tag{2.1.55}$$

$$x_\alpha \equiv n_\alpha / n = n_\alpha / \sum_{\beta=1}^{N} n_\beta, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha = 1 \tag{2.1.56}$$

(где $n(\boldsymbol{r},t)$ – полная числовая плотность среды).

2.1.5. Полная система гидродинамических уравнений смеси для верхней атмосферы. Выпишем здесь (для удобства ссылок) полную систему уравнений многокомпонентной гидродинамики в форме, пригодной для решения задач геофизики и планетной аэрономии, связанных с определением структуры, динамики и теплового режима течений смеси в области средней и верхней атмосферы планеты (*Маров, Колесниченко, 1987*):

$$\rho d(1/\rho)/dt = V_{j,j} \quad , \tag{2.1.57}$$

$$\rho\frac{dZ_\alpha}{dt} = -J_{\alpha j},_j + \sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\xi_s, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N-1), \tag{2.1.58}$$

$$\rho\frac{dV_i}{dt} = -p,_i + \pi_{ij},_j + 2\rho\varepsilon_{kij}V_k\Omega_j + \rho g_i + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}Z_\alpha F^*_{\alpha i}, \tag{2.1.59}$$

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} = -\left[q_{Rj} + q_j - \sum_{\alpha=1}^{N}h_\alpha J_{\alpha j}\right],_j + \frac{dp}{dt} + \pi_{ij}V_i,_j - \sum_{s=1}^{r}q_s\xi_s +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}F^*_{\alpha j} - T,_j\sum_{\alpha=1}^{N}C_{p\alpha}J_{\alpha j} + Q_d, \tag{2.1.60}$$

$$p = kT\sum_{\alpha=1}^{N}n_\alpha = R^*\rho T. \tag{2.1.61}$$

Здесь Q_d – возможные дополнительные (локальные) источники нагрева верхней атмосферы (конкретный вид которых рассмотрен, например, в монографии (*Маров, Колесниченко, 1987*); см. также Гл. 6);

$$q_{Rj} = \int_0^\infty (q_{R\nu})_j d\nu = \int_0^\infty \omega_j I_\nu d\omega d\nu \tag{2.1.62}$$

– вектор потока радиационной энергии (так называемый *вектор Пойнтинга*), I_ν – спектральная интенсивность излучения: количество радиационной энергии, заключенное в единичном интервале частот ν и в единичном телесном угле, переносимое за единицу времени через единичную площадку, помещенную в точке $\boldsymbol{r}$ перпендикулярно направлению распространения энергии ω (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Гидродинамические уравнения многокомпонентной смеси (2.1.57)–(2.1.61) должны быть дополнены начальными и граничными условиями, а также соответствующими выражениями для источниковых членов (в уравнениях диффузии химических компонентов), для вектора радиационного потока тепла q_{Rj} и для определяющих соотношений, которые связывают тензор вязких напряжений π_{ij}, тепловой поток q_j и потоки диффузии $J_{\alpha j}$ с градиентами термогидродинамических параметров среды (массовой плотности, скорости, температуры и концентраций химических компонентов). Определяющие соотношения для ламинарных течений будут получены в разд. 2.3.3 методами неравновесной термодинамики, а вклад химических реакций в балансовые уравнения (2.1.58) будет подробно рассмотрен в Гл. 3.

По поводу системы гидродинамических уравнений (2.1.57)–(2.1.61) сделаем следующие замечания:

1) Часто можно ввести два упрощения диффузионных уравнений для отдельных химических компонентов смеси (2.1.58). Если процессы динамического и диффузионного переноса в рассматриваемой области высот не очень сущест-

венны, то получится так называемое "*фотохимическое приближение*"

$$\partial n_\alpha / \partial t = \sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \xi_s, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.1.58^*)$$

Если скорости прямых и обратных аэрономических реакций достаточно велики (время реакций достаточно мало), так что величина $\partial n_\alpha / \partial t$ окажется меньше других членов, то уравнение (2.1.58*) примет вид $\sigma_\alpha = 0$, что представляет собой уравнение *фотохимического равновесия* (*Маров, Колесниченко, 1987*):

2) Уравнение движения (2.1.59), описывая движение среды в целом, не раскрывает, однако, движений отдельных компонентов смеси (электронов, ионов и нейтралов). Сложный многокомпонентный (молекулярный и ионный) состав среды часто важно учитывать только при рассмотрении вопросов химии верхней атмосферы, тогда как для задач динамики достаточна система уравнений одно- (или двух-) жидкостной гидродинамики. Уравнения движения для отдельных нейтральных компонентов смеси в диффузионном приближении (*Седов, 1984*) рассмотрены в разд. 2.3.6.

3) Как было показано в монографии авторов (*Маров, Колесниченко, 1987*), наиболее сложную проблему при моделировании верхней атмосферы планеты представляет задача адекватного описание притока тепла в рассматриваемую область среды, обусловленного прямым поглощением солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации атмосферными составляющими и ее последующей трансформацией вследствие аэрономических реакций, выделения джоулева тепла, а также отдельных динамических процессов (включая диссипацию энергии волновых движений различных пространственных масштабов), в результате которых происходит перераспределение тепла от неоднородно распределенных в атмосфере источников. В связи с этим подобные источники энергии, учтенные в уравнении (2.1.60) в общем виде (член Q_d), целесообразно расшифровывать в каждом конкретном случае (*Гордиец и др.,1979, 1982*).

4) Отсутствие *локального термодинамического равновесия* в верхней атмосфере планеты не позволяет, вообще говоря, воспользоваться при численном моделировании теплового баланса одним (суммарным) энергетическим уравнением (2.1.60), записанным через *кинетическую температуру T* смеси (температуру поступательных степеней свободы). Отсутствие теплового равновесия выражается для поступательных степеней свободы – в различии кинетических температур ионов, электронов и нейтральных частиц (в значительном интервале высот, например, выше 150 км в термосфере Земли, особенно днем $T_e >> T_i$, $T_e >> T_n$ (*Брейс и др., 1969*); для внутренних степеней свободы – в отличии, при некоторых условиях, колебательной температуры компоненты (например, азота в атмосфере Земли) от кинетической, а также в постоянном присутствии в атмосфере химически активных компонентов и частиц с возбужденными энергетическими уровнями (*Ришбет, Гарриот, 1975; Маров и др., 1996;1997*). Учет многотемпературности термосферной среды проведен в монографии (*Маров, Колесниченко, 1987*) на основе трехжидкостной гидродинамики слабоионизованной смеси газов. Возможность рассмотрения одного энергетического уравнения для ней-

тральной составляющей атмосферного газа (содержащей большую часть тепловой энергии атмосферы) обусловлена тем, что, в общем случае, кинетические температуры нейтральных компонент различаются все же крайне мало.

5) Для турбулентных режимов течения смеси гидродинамические уравнения (2.1.57)–(2.1.61) также могут считаться справедливыми (в этом случае они описывают истинные (мгновенные) состояния среды), так как наименьший характерный масштаб турбулентных пульсаций обычно много больше длины свободного пробега молекул (об этом подробнее см. разд. 3.1.1).

Наконец, кратко остановимся на основных критериях применимости уравнений гидродинамики смеси для описания средней и верхней атмосферы. Как известно, континуальные гидродинамические уравнения пригодны и дают физически осмысленные результаты лишь в том случае, когда локальные макроскопические свойства газа заметно не меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега молекул l (*Ферцигер, Капер, 1976*), что справедливо, если распределение частиц по скоростям близко к максвелловскому $f_\alpha^{(0)}$ (см., например, (*Маров, Колесниченко, 1987*)). Для обеспечения малости отклонений от максвелловского распределения необходимо, чтобы время релаксации к равновесному распределению $f_\alpha^{(0)}$, определяемое временем между столкновениями частиц τ, было достаточно малым по сравнению с гидродинамическим временем t_0, в течении которого происходят характерные изменения основных макроскопических параметров. Иными словами, одновременно должны выполняться неравенства

$$t_0 \equiv \left|\partial \ln \Theta / \partial t\right|^{-1} >> \tau, \qquad (^1) \qquad L_0 \equiv \left|\nabla \ln \Theta\right|^{-1} >> l \quad (^2). \tag{2.1.63}$$

Здесь Θ – какой-либо термогидродинамический параметр. Поскольку в условиях термосферы концентрация частиц уменьшается с высотой, то увеличивается среднее время свободного пробега $\tau \approx (n\sigma v_t)^{-1}$ (v_t – тепловая скорость), равное по порядку величины времени установления равновесия по поступательным степеням свободы. Тем не менее, в условиях, например, термосферы Земли времена τ невелики и справедливо ограничение $\tau \le 10^{-3}$ с. Длительность процессов, определяющих изменение основных структурных параметров в верхней атмосферы, по современным данным значительно больше ($t \ge 1$ сек) (*Ришбет, Гарриот, 1975*). Таким образом, первый критерий применимости гидродинамического описания ($1.1.63^{(1)}$) выполняется. Второе неравенство ($1.1.63^{(2)}$) может быть записано в виде $l / L_0 \equiv \boldsymbol{Kn} << 1$ и сводится к требованию малости этого отношения (числа Кнудсена $\boldsymbol{Kn}$). Длина свободного пробега молекул l с высотой растет в термосфере Земли, например, при изменении высоты от 100 до 400 км параметр l меняется от 10 см до 5 км. Однако, несмотря на то, что длины свободного пробега велики, размеры термосферных неоднородностей обычно превышают их. Например, на высотах нижней термосферы Земли, при градиенте температуры равном 1 ° *К*/км, и температуре порядка 1000 °*К*, характерный масштаб L_0 ~10^8 см и число $\boldsymbol{Kn} << 1$. Возникает вопрос, до каких значений числа Кнудсена еще можно пользоваться уравнениями гидродинамического типа? Гидродинамическое описание применимо, если $\boldsymbol{Kn} \le 0.2$ (*Грэд, 1949, 1963*), что, по-видимому, имеет место везде в термосфере вплоть до экзосферных высот (*Хедин, 1991*). В

экзосфере (располагающейся в атмосфере Земли выше ~ 400–500 км), для описания физико-химических процессов следует использовать систему уравнений Больцмана (*Маров, Колесниченко, 1987*).

§ 2.2. Второй закон термодинамики. Скорость возникновения энтропии в газовых смесях

Термин молекулярный диффузионный перенос охватывает явления диффузии, теплопроводности, термодиффузии и вязкости. Эти явления описываются некоторыми частями уравнений сохранения массы, количества движения и тепла, приведенных в предыдущем параграфе (см. уравнения (2.1.57)–(2.1.60)). В каждое из этих уравнений входит дивергенция потока некоторой величины, связанной, хотя бы и неявно, с градиентами термогидродинамических параметров (так называемыми *термодинамическими силами*). Существуют два способа получения линейных связей (*определяющих соотношений*) между этими потоками и сопряженными им термодинамическими силами, основывающихся на макроскопическом (феноменологическом) и кинетическом подходах. Кинетический подход связан с решением системы обобщенных уравнений Больцмана для многокомпонентной газовой смеси и до конца разработан только для газов умеренной плотности, когда известен потенциал взаимодействия между элементарными частицами (см., например, (*Чепмен, Каулинг, 1960; Ферцигер, Капер, 1976; Маров, Колесниченко, 1987*)). Феноменологический подход, основанный на применении законов механики сплошной среды и неравновесной термодинамики к макроскопическому объему смеси, не связан с постулированием конкретной микроскопической модели взаимодействия частиц и годится для широкого класса сред. В рамках феноменологического подхода явный вид *кинетических коэффициентов* (коэффициентов при градиентах термогидродинамических параметров в определяющих соотношениях) не расшифровывается, однако их физический смысл часто может быть выяснен (например, для разреженных газов) в рамках молекулярно-кинетической теории (*Маров, Колесниченко, 1987*)

Наиболее полная попытка феноменологического вывода определяющих соотношений (включая *соотношения Стефана–Максвелла* для многокомпонентной диффузии) для неидеальных многокомпонентных сплошных сред была предпринята в работе (*Колесниченко, Тирский, 1976*). Определяющие соотношения, полученные в этой работе, по структуре тождественны аналогичным соотношениям, выведенным методами газовой кинетики в широко цитируемой до настоящего времени книге Гиршфельдера, Кертисса и Берда (*Гиршфельдер и др., 1961*). Однако в этой книге приняты весьма неудачные определения коэффициентов многокомпонентной диффузии (как несимметричных по индексам величин) и коэффициентов термодиффузии, не согласующиеся с *соотношениями взаимности Онзагера–Казимира* в неравновесной термодинамике (*Де Гроот, Мазур,1964; Дьярмати,1974*). Этот эмпирически установленный принцип "*взаимности*" (который может быть выведен также на основе методов статистической механики), носит фундаментальный характер и может быть назван *четвертым законом термодинамики* (третий закон о недостижимости абсолютного нуля температуры не обсуждается в этой книге). По этой причине соответствие коэффициентов молекулярного обмена принципу взаимности Онзагера–

Казимира обязательно; оно приобретает исключительно важное значение в случае использования теоретических результатов кинетической теории одноатомных разреженных газов (например, расчетных формул для коэффициентов переноса) при моделировании реальных многоатомных газовых смесей, в которых между компонентами осуществляются переходы между состояниями с различными внутренними степенями свободы, или протекают химические реакции. Ван де Ри (*Ван де Ри, 1967*) показал, что в подобных случаях важно принять такое определение кинетических коэффициентов, которое согласовывалось бы с соотношениями взаимности.

Эта программа (по наведению указанного соответствия) в рамках кинетического подхода наиболее последовательно была осуществлена Ферцигером и Капером в монографии (*Ферцигер, Капер, 1976*), в которой, в частности, коэффициенты многокомпонентной диффузии определены как симметричные. В данной книге предложен феноменологический вывод определяющих соотношений для термодинамических потоков (в частности, соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии и скоррелированного с ними выражения для полного потока тепла), а также всех важнейших алгебраических формул, связывающих между собой кинетические коэффициенты переноса. При этом все полученные результаты (определяющие соотношения, формулы связи для коэффициентов переноса) полностью тождественны соответствующим результатам кинетической теории, приведенным в монографии (*Ферцигер, Капер, 1976*). Однако, развитый здесь термодинамический вывод доказывает их универсальный характер, т.е. пригодность использования для описания не только одноатомных газов, но и более сложных сплошных сред, например многоатомных химически активных газовых смесей или жидких растворов (электролитов, суспензий и т.п.), для которых не разработан соответствующий кинетический аппарат.

2.2.1. Принцип Онзагера. Прежде чем применить формализм неравновесной термодинамики непрерывных сред к описанию процессов тепломассопереноса в ламинарном (а далее и в турбулентном (Гл. 5)) потоке многокомпонентной смеси, обсудим очень кратко сущность тех основных постулатов, которые лежат в основе теории и могут быть практически использованы при термодинамическом анализе любого необратимого процесса (протекающего, в том числе, и в турбулизованном континууме).

Как известно (*Де Гроот, Мазур, 1964*), в линейной неравновесной термодинамике в качестве определяющих (*реологических*) соотношений, которые дополняют систему гидродинамических уравнений сохранения, применяются феноменологические соотношения необратимых процессов (*соотношения Онзагера*)

$$J_k = \sum_{k=1}^{Q} L_{kl} X_l, \qquad (k = 1,2,\ldots,Q), \tag{2.2.1}$$

где Q – число независимых физических процессов, L_{kl} – матрица *феноменологических* (кинетических) коэффициентов, связывающая между собой потоки J_k и термодинамические силы X_l. Первые соответствуют скоростям изменения

экстенсивных величин (таких как масса, энергия), для которых существуют законы сохранения, или переносимых величин (таких как теплота), которые связаны с потоками в законах сохранения; вторые пропорциональны градиентам *интенсивных* параметров, отклоняющих термодинамическую систему от равновесия. Потоки и термодинамические силы в (2.2.1) являются, в общем случае, тензорными величинами любого ранга. Как было упомянуто выше, в рамках феноменологической теории явный вид кинетических коэффициентов в (2.2.1) не расшифровывается, однако их физический смысл может быть выяснен в рамках молекулярно - кинетической теории (*Ферцигер, Капер, 1976*). Число отличных от нуля кинетических коэффициентов в (2.2.1) ограничивается *принципом Кюри* (*Де Гроот, Мазур,1964*), согласно которому, в силу свойств симметрии рассматриваемой материальной среды, компоненты (здесь составляющие векторов вдоль осей координат) потоков будут зависеть не от всех компонентов термодинамических сил. Так, в частном случае *изотропной системы* (свойства которой в равновесном состоянии одинаковы во всех направлениях), процессы разной тензорной размерности не взаимодействуют друг с другом. Кроме того, при аксиоматическом подходе принимаются в качестве независимого постулата соотношения симметрии Онзагера–Казимира (*принцип взаимности*):

$$L_{kl}(\boldsymbol{B},\Omega) = \varepsilon_k \varepsilon_l L_{lk}(-\boldsymbol{B},-\Omega), \qquad (2.2.2)$$

позволяющие свести до минимума число феноменологических коэффициентов в линейных соотношениях (2.2.1) (*Де Гроот, Мазур, 1964*). Здесь $\boldsymbol{B}$ – магнитная индукция, $\mathbf{W}$ – угловая скорость вращения системы, а e_k =1 для четных (энергия, концентрации) и e_k = –1 для нечетных (плотность импульса) макроскопических параметров (четных или нечетных функций скоростей частиц). Для изотропной не вращающейся системы в отсутствии внешнего магнитного поля соотношения симметрии (1.2.2) приобретают более простой вид (*Де Гроот, Мазур, 1964*) :

$$L_{k\,l} = L_{l\,k}, \qquad (2.2.3)$$

где L_{kl} – скалярные величины. Соотношения симметрии (2.2.2) могут считаться эмпирически устойчивой аксиомой, независимо от их доказательства в рамках статистической механики (*Миллер, 1974*) . Согласно Мейсону (*Мейсон, 1974*), экспериментальное подтверждение принципа взаимности столь же убедительно, как и подтверждение *1, 2 и 3*-го начал термодинамики. Это дает основание возвести постулат (2.2.2) в статус парадигмы и использовать в качестве основы для описания широкого круга явлений.

Для определения потоков и сопряженных им термодинамических сил используется обычно конкретное представление *скорости производства* (плотности источника) энтропии $\sigma_{(S)}$ внутри системы в рассматриваемом необратимом процессе в виде билинейной формы (*Де Гроот, Мазур, 1964*)

$$T\,\sigma_{(S)} = \sum_{k=1}^{Q} J_k X_k \geq 0, \qquad (2.2.4)$$

причем, после того как определены потоки J_k , сопряженные им силы X_k нахо-

дятся однозначным образом, как коэффициенты перед соответствующими потоками в этом выражении.

Для расшифровки в рамках феноменологической теории формулы (2.2.4) для плотности источника энтропии необходимо получить в явном виде уравнение эволюции удельной энтропии S непрерывной системы

$$\rho\, dS/dt = J_{(S)j,j} + \sigma_{(S)}, \qquad (\sigma_{(S)} \geq 0), \tag{2.2.5}$$

в котором $J_{(S)j}$ – составляющие вектора субстанциональной плотности потока энтропии, причем дивергенция $J_{(S)j,j}$ описывает обратимый теплообмен между рассматриваемой системой и внешней средой, а неравенство $\sigma_{(S)} \geq 0$ соответствует второму закону термодинамики, который гласит, что энтропия замкнутой системы не может уменьшаться.

Явный вид уравнения (2.2.5) может быть получен с учетом балансовых уравнений для удельного объема (2.1.6), удельных числовых плотностей химических компонентов (2.1.7) и удельной внутренней энергии смеси (2.1.40) из следующего *тождества Гиббса* для этих величин, записанного вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объема:

$$TdS/dt = d\varepsilon/dt + pdv/dt - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha dZ_\alpha/dt. \tag{2.2.6}$$

Здесь μ_α – химический потенциал компоненты a, рассчитываемый на одну частицу вещества (*Пригожин, Дефей, 1966*),

$$\mu_\alpha = h_\alpha - TS_\alpha = \varepsilon_\alpha + pv_\alpha - TS_\alpha; \tag{2.2.7}$$

ε_α, v_α, S_α – соответственно парциальная внутренняя энергия, парциальный объем и парциальная энтропия компоненты α. Попутно заметим, что из (2.2.7) вытекает используемое далее выражение для удельной свободной энергии Гиббса (*удельного термодинамического потенциала*)

$$G = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \mu_\alpha = \varepsilon + pv - TS = h - TS, \tag{2.2.8}$$

в котором

$$\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \varepsilon_\alpha \quad (^1); \qquad v = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha v_\alpha \quad (^2); \quad S = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha S_\alpha \quad (^3). \tag{2.2.9}$$

Для смеси совершенных газов, подчиняющейся уравнению состояния (2.1.53), имеем: $v = (kT/p)\sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta$, откуда (*Пригожин, Дефей, 1966*) :

$$v_\beta = kT/p = 1/n. \tag{2.2.10}$$

Вывод и анализ эволюционного уравнения переноса удельной энтропии

(2.2.5) в явном виде для ламинарного режима течения многокомпонентной газовой смеси рассмотрен ниже в разд. 2.2.2. (для турбулентного континуума аналогичное рассмотрение проведено в Гл. 5).

По поводу применимости тождества Гиббса для неравновесных процессов в непрерывной термодинамической системе отметим следующее. Согласно принципу *квазилокального равновесия* (основного постулата неравновесной термодинамики) всю систему можно разбить на достаточно малые макроскопические области, каждую из которых можно рассматривать как равновесную (точнее *квазиравновесную*) термодинамическую систему. В случае, если в качестве *переменных состояния* смеси выбраны удельная плотность внутренней энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r},t)$, удельный объем $v(\boldsymbol{r},t)$ и удельные концентрации $Z_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ различных химических компонентов, то термодинамическое состояние физически элементарного объема в окрестности точки $\boldsymbol{r}$ (с координатами x_j $(j = 1,2,3)$) в момент времени t полностью описывается ключевой функциональной связью - удельной энтропией $S = S(\varepsilon(\boldsymbol{r},t), v(\boldsymbol{r},t), Z_1(\boldsymbol{r},t),\ldots, Z_N(\boldsymbol{r},t))$, для которой справедливо тождество Гиббса (2.2.6). На основании этого тождества сопряженным величинам

$$1/T = \left\{\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right\}_{V,\{Z_\alpha\}}; \quad p/T = \left\{\frac{\partial S}{\partial v}\right\}_{\varepsilon,\{Z_\alpha\}}; \quad -\mu_\alpha/T = \left\{\frac{\partial S}{\partial Z_\alpha}\right\}_{\varepsilon V,\{Z_\beta \neq Z_\alpha\}} \tag{2.2.11}$$

может быть приписан смысл локальной температуры $T(\boldsymbol{r},t)$, локального давления $p(\boldsymbol{r},t)$ и локального химического потенциала $\mu_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, компоненты а (а = 1,2,...,N) (т.е. эти величины фактически определяются соотношениями (2.2.11)). В рамках феноменологического подхода область применимости постулата о локальном термодинамическом равновесии определяется экспериментально. Обычно этот постулат справедлив, если диссипативные процессы в системе играют существенную роль и исключают появление больших градиентов переменных состояния.

Следует также отметить, что гипотеза о локальном равновесии среды эквивалентна предположению о справедливости не только соотношения Гиббса, но и всех остальных термостатических соотношений для бесконечно малых областей неравновесных систем. Так, например, допускается существование удельного термодинамического потенциала (2.2.8) и справедливость известного соотношения (*Де Гроот, Мазур, 1964*)

$$dG = -SdT - vdp + \sum_{\beta=1}^{N} \mu_\beta dZ_\beta, \tag{2.2.12}$$

из которого с помощью (2.2.6) может быть получено, имеющее фундаментальное значение для термодинамики многокомпонентных систем (и широко используемое далее), *соотношение Гиббса–Дюгема*

$$\rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha d\mu_\alpha = -\rho S dT + dp. \tag{2.2.13}$$

В заключение этого раздела суммируем основные утверждения, которые принимаются в качестве независимых постулатов при практическом использовании неравновесной термодинамики к любому необратимому процессу:

1) справедлив принцип квазилокального термодинамического равновесия;

2) для производства энтропии, связанного с необратимыми процессами в самой системе, справедливо неравенство $\sigma_{(S)} \geq 0$, выражающее *второе начало термодинамики;*

3) если ограничиться линейной областью, то справедливы феноменологические соотношения (2.2.1) для потоков и термодинамических сил, входящих в выражение (2.2.4) для производства энтропии.

4) имеют место соотношения симметрии (2.2.2) для кинетических коэффициентов, входящих в линейные законы (2.2.1).

Кроме этого, корректная аксиоматическая формулировка неравновесной термодинамики требует, чтобы принцип взаимности Онзагера–Казимира был дополнен описанием класса независимых термодинамических потоков (*Майкснер, 1969*).

2.2.2. Эволюционное уравнение переноса энтропии многокомпонентной газовой смеси. Для того, чтобы можно было воспользоваться линейными соотношениями Онзагера (2.2.1), вначале необходимо найти конкретную форму уравнения баланса энтропии (2.2.5) для рассматриваемой модели многокомпонентной термодинамической системы. Исключая для этого с помощью гидродинамических уравнений смеси (2.1.6), (2.1.7) и (2.1.40) для величин e, v, Z_α $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ соответствующие производные по времени в правой части тождества Гиббса (2.2.6), в результате получим

$$\rho \frac{dS}{dt} = -\frac{q_j{}_{,j}}{T} + \frac{1}{T}\left(\pi_{ij} V_i{}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F_{\alpha j} - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \sigma_\alpha \right) + \frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha J_{\alpha j}{}_{,j} . \qquad (2.2.14)$$

В таком виде соотношение (2.2.14) не соответствует уравнению субстанционального баланса типа (2.1.1). Однако, (2.2.14) с помощью преобразований

$$q_j{}_{,j}/T = (q_j/T)_{,j} - q_j (1/T)_{,j} = (q_j/T)_{,j} + (q_j/T^2) T_{,j} \quad , \qquad (2.2.15)$$

$$(\mu_\alpha/T) J_{\alpha j}{}_{,j} = (\mu_\alpha J_{\alpha j}/T)_{,j} - J_{\alpha j} (\mu_\alpha/T)_{,j} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \qquad (2.2.16)$$

нетрудно привести к форме уравнения субстанционального баланса

$$\rho \frac{dS}{dt} = -\left\{ \frac{1}{T}\left(q_j - \sum_{\beta=1}^{N} \mu_\beta J_{\beta j} \right) \right\}_{,j} + \frac{1}{T}\left\{ -J_{qj} \frac{T_{,j}}{T} + \pi_{ij} V_i{}_{,j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{N} \left[T(\mu_\beta/T)_{,j} + h_\beta T_{,j}/T - F_{\beta j} \right] \cdot J_{\beta j} + \sum_{s=1}^{r} A_s \xi_s \right\}, \qquad (2.2.17)$$

где

$$A_s = -\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \nu_{\alpha s} \qquad (s = 1,2,\ldots,r) \qquad (2.2.18)$$

– так называемое *химическое сродство s-й* реакции (*Де Гроот, Мазур, 1964*), а J_{qj} – приведенный поток тепла, определяемый формулой (2.1.50). Сравнивая (2.2.15) с общим уравнением баланса энтропии (2.2.5), получим для субстанциональной плотности потока энтропии следующее выражение

$$J_{(S)j} \equiv \frac{1}{T}\left[q_j - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha J_{\alpha j}\right] = \frac{1}{T}\left[J_{qj} - \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha J_{\alpha j}\right], \tag{2.2.19}$$

а умноженное на T производство энтропии $\sigma_{(S)}$, определяется как

$$0 \le T\sigma_{(S)} \equiv -J_{qj}\frac{T_{,j}}{T} + \pi_{ij}V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[-T(\mu_\alpha/T)_{,j} - h_\alpha\frac{T_{,j}}{T} + F_{\alpha j}\right]J_{\alpha j} + \sum_{s=1}^{r} A_s\xi_s, \tag{2.2.20}$$

причем эта величина (*рассеяние энергии*), согласно второму закону термодинамики, для необратимых процессов является положительно определенной.

Введем обозначения для *термодинамических сил*:

$$X_{0j} \equiv T_{,j}/T; \qquad X^{*}_{\alpha j} \equiv -F_{\alpha j} + T(\mu_\alpha/T)_{,j} + h_\alpha T_{,j}/T, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N)$$

$$e_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}); \quad A_s \equiv -\sum_{\beta=1}^{N}\mu_\beta \nu_{\beta s} \quad (s = 1,2,\ldots,r). \tag{2.2.21}$$

Рассеяние энергии $T\sigma_{(S)}$, являющееся локальной мерой неравновесности системы, имеет вид суммы парных произведений термодинамических сил (2.2.21) на потоки

$$J_{qj}, \quad J_{\alpha j} \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N); \quad \pi_{ij}; \quad \xi_s \quad (s = 1,2,\ldots,r), \tag{2.2.22}$$

соответствующие четырем источникам неравновесных процессов, имеющих различную физическую природу. Поэтому если далее постулировать линейную связь (2.2.1) между потоками (2.2.22) и термодинамическими силами (2.2.21), то можно воспользоваться соотношениями взаимности (2.2.2) для уменьшения числа неизвестных феноменологических коэффициентов и получить в итоге необходимые определяющие соотношения.

Изложенный формализм неравновесной термодинамики будет применен в полном объеме к турбулизованному многокомпонентному континууму в Гл. 5. В этой же вводной главе подробно рассмотрим процессы молекулярной диффузии и теплопроводности – явления, описываемые полярными векторами (т.е. векторами $\boldsymbol{b}$, которые при отражении относительно точки $\boldsymbol{r} = 0$ ведут себя как $\boldsymbol{b}^{ref}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{r},t)$). Такое обособленное рассмотрение процессов тепло- и массопереноса особенно законно в изотропных системах, в которых явления, описываемые термодинамическими силами и потоками различной тензорной размерности, не влияют друг на друга (*принцип Кюри*).

§ 2.3. Определяющие соотношения для потоков диффузии и тепла в непрерывных многокомпонентных смесях

В этом параграфе методами термодинамики необратимых процессов выведены определяющие соотношения для молекулярных потоков диффузии и тепла, а также получены *соотношения Стефана–Максвелла* для многокомпонентной диффузии и соответствующее им выражение для полного потока тепла, удобные для описания процессов тепло- и массопереноса в многокомпонентной газовой среде верхней атмосферы планеты.

2.3.1. Линейные конститутивные соотношения для молекулярных потоков диффузии и тепла. Согласно (2.2.20) для произвольной N-компонентной теплопроводящей смеси можно написать следующее выражение для рассеяния энергии $T\sigma^{*}_{(S)}$ за счет диффузии и теплопроводности

$$0 \le T\sigma^{*}_{(S)} = -J_{qj}\frac{T,_j}{T} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left\{-T\left(\frac{\mu_\alpha}{T}\right),_j - h_\alpha\frac{T,_j}{T} + F_{\alpha j}\right\}J_{\alpha j} = J_{qj}X_{0j} - \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j}X^{*}_{\alpha j}\ , \tag{2.3.1}$$

где введены обозначения

$$X_{0j} \equiv -T,_j/T\ ; \qquad X^{*}_{\alpha j} \equiv -F_{\alpha j} + T\,(\mu_\alpha/T),_j + h_\alpha(T,_j/T).$$

Для вывода определяющих соотношений для молекулярных потоков диффузии $J_{\alpha j}$ и тепла J_{qj} и возможности сравнения полученных далее результатов с результатами кинетической теории газов, выразим градиент химического потенциала μ_α компоненты α через градиенты термогидродинамических параметров. Будем далее считать рассматриваемую смесь идеальной смесью совершенных газов. Тогда химические потенциал любого из N компонентов имеют вид (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$\mu_\alpha = \mu^0_\alpha(T,p) + \mathrm{k}T\ \ln(x_\alpha) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N)\,, \tag{2.3.2}$$

где $\mu^0_\alpha(T,p)$ – химический потенциал чистой компоненты α при температуре T и давлении p (см.(3.2.13)); $x_\alpha = n_\alpha/n$ – мольная доля α-й компоненты смеси. Поэтому можно написать

$$(\mu_\alpha/T),_j = \frac{\partial\left[\mu^0_\alpha(T,p)/T\right]}{\partial T}T,_j + \frac{\partial\left[\mu^0_\alpha(T,p)\right]}{\partial p}\frac{p,_j}{T} + k\frac{x_\alpha,_j}{x_\alpha}\,. \tag{2.3.3}$$

Так как имеют место термодинамические соотношения (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$\frac{\partial\left[\mu^0_\alpha(T,p)/T\right]}{\partial T} = -\frac{h_\alpha}{T_2}, \qquad \frac{\partial\left[\mu^0_\alpha(T,p)\right]}{\partial p} = v_\alpha = 1/n\,, \tag{2.3.4}$$

то (2.3.3) можно переписать в виде

$$T(\mu_\alpha / T)_{,j} = -(h_\alpha / T)T_{,j} + p_{,j} / n + \mathrm{k}T(x_{\alpha,j} / x_\alpha). \qquad (2.3.5)$$

Тогда для термодинамической силы $X^*_{\alpha j}$ ($\alpha = 1,2,..,N$) получаем следующее выражение

$$X^*_{\alpha j} = -F_{\alpha j} + p_{,j} / n + \mathrm{k}T(x_{\alpha,j} / x_\alpha). \qquad (2.3.6)$$

Как было сказано выше, в состояниях, близких к состоянию термодинамического равновесия термодинамические потоки можно представить в виде линейных функций от термодинамических сил (основной постулат термодинамики необратимых процессов)

$$J_{qj} = L^{jk}_{00} X_{0k} - \sum_{\beta=1}^{N} L^{jk}_{0\beta} X^*_{\beta k}, \qquad (1)$$

$$J_{\alpha j} = L^{jk}_{\alpha 0} X_{0k} - \sum_{\beta=1}^{N} L^{jk}_{\alpha\beta} X^*_{\beta k}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (2) \qquad (2.3.7)$$

Здесь индексы $j, k = 1,2,3$ относятся к системе координат. Кинетические коэффициенты $L^{jk}_{\alpha\beta}$ ($\alpha,\beta = 0,1,\ldots,N$) представляют собой тензоры, зависящие от переменных состояния и параметров, характеризующих геометрическую симметрию среды.

Далее рассмотрим изотропные среды относительно полной группы ортогональных преобразований координат. Согласно общей теории тензорных функций (*Седов, 1984*) свойства симметрии изотропных сред вполне характеризуются метрическим тензором g^{jk}; все тензоры будут тензорными функциями только метрического тензора

$$L^{jk}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}\, g^{jk}, \qquad (2.3.8)$$

где $L_{\alpha\beta}$ – скалярные величины.

В прямоугольной системе координат $g^{jk} = \delta^{jk}$ и определяющие соотношения (2.3.7) примут вид :

$$J_{qj} = L_{00} X_{0j} - \sum_{\beta=1}^{N} L_{0\beta} X^*_{\beta j}, \qquad (1)$$

$$J_{\alpha j} = L_{\alpha 0} X_{0j} - \sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta} X^*_{\beta j}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \quad (2). \qquad (2.3.9)$$

Как только постулированы линейные соотношения (2.3.9), условие симметрии Онзагера–Казимира дает

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta = 0,1,2,\ldots,N), \tag{2.3.10}$$

что уменьшает число независимых феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ от $(N+1)^2$ до $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$.

Кроме этого, из факта линейной независимости термодинамических сил X_{0j} и $X^*_{\beta j}$ (b=1,2,...,N) и из соотношения (2.1.8), следует еще (N+1) дополнительных связей на коэффициенты Онзагера. Действительно, подставляя в тождество (2.1.8 $^{(2)}$) соотношения (2.3.9$^{(2)}$), получим

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha J_{\alpha j} = \left[\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha L_{\alpha 0}\right] X_{0j} - \sum_{\beta=1}^{N}\left[\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha L_{\alpha\beta}\right] X^*_{\beta j},$$

откуда, в силу линейной независимости указанных термодинамических сил, следует

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha L_{\alpha 0} = 0 \qquad (1), \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha L_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N) \qquad (2). \tag{2.3.11}$$

Таким образом, из $(N+1)^2$ остается только $\frac{1}{2}N(N+1)$ независимых коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ (a, b=0,1,...,N).

Из других свойств неотрицательно определенной матрицы феноменологических коэффициентов L_{ab} укажем следующие *условия Сильвестра* : $L_{aa} > 0$ (неотрицательность всех элементов матрицы L_{ab} на главной диагонали), $(L_{ab})^2 \le L_{aa} L_{bb}$ (каждый минор неотрицательно определенной матрицы L_{ab}, содержащий элементы ее главной диагонали как свою собственную главную диагональ, также должен быть неотрицательным) и т.п., являющиеся следствием неотрицательности диссипативной функции $T\sigma^*_{(S)}$, записанной с учетом (2.3.9) в виде однородной квадратичной формы сил. В пределах указанных ограничений введенные кинетические коэффициенты Онзагера изменяются в очень широком диапазоне величин в соответствии со степенью связи между процессами тепло- и массопереноса.

Для того чтобы при феноменологическом подходе определить коэффициенты молекулярного обмена, аналогичными соответствующим коэффициентам, даваемым кинетической теорией газов, введем вместо линейно независимых векторов $X^*_{\beta j}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$ некоторый новый набор линейно зависимых векторов $d_{\beta j}$. Это можно сделать, например, следующим образом: положим

$$d_{\beta j} = (n_\beta / p)(X^*_{\beta j} + M_\beta R^*_j), \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N), \tag{2.3.12}$$

причем, общий для всех компонентов вектор R^*_j определим из условия

$$\sum_{\beta=1}^{N} d_{\beta j} = 0; \tag{2.3.13}$$

тогда, с учетом (2.3.6), для вектора R_j^* получим

$$R_j^* = -\sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta X_{\beta J}^* = -p_{,J}/p + \sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta F_{\beta J}, \qquad (2.3.14)$$

откуда для величин $d_{\beta J}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$ окончательно найдем

$$d_{\beta J} = x_{\beta,j} + (x_\beta - M_\beta Z_\beta)\frac{p_{,J}}{p} + \left[-F_{\beta j} + M_\beta \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha j}\right]\frac{n_{,J}}{p}. \qquad (2.3.15)$$

Выражение (2.3.15) полностью совпадает с определением *векторов диффузионных термодинамических сил,* даваемым кинетической теорией разреженных газов (*Гиршфельдер и др., 1961*). Подставляя теперь формулу $X_{\beta j}^* = (p/n_\beta)d_{\beta J} - M_\beta R_j^*$ в (2.3.9) и учитывая соотношения (2.3.11), окончательно получим

$$J_{qJ} = L_{00}X_{0J} - p\sum_{\beta=1}^{N} L_{0\beta}\frac{d_{\beta J}}{n_\beta}, \qquad (2.3.16)$$

$$J_{\alpha j} = L_{\alpha 0}X_{00} - p\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}\frac{d_{\beta j}}{n_\beta}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.17)$$

Сопоставим эти реологические соотношения с аналогичными соотношениями из кинетической теории. В рамках основного предположения, что градиенты термогидродинамических величин и внешние силы вызывают малое отклонение функций распределения от равновесного максвелловского распределения, формальная кинетическая теория многокомпонентных газовых смесей одноатомных газов умеренной плотности в рамках метода Чепмена–Энскога (*Чепмен, Каулинг, 1960*) первого порядка приводит к следующим выражениям для полного потока тепла q_J и потоков диффузионных скоростей $w_{\alpha j} = V_{\alpha j} - V_J$ $(\equiv J_{\alpha J}/n_\alpha)$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ (см., например, (*Маров, Колесниченко, 1987*))

$$q_j = -\lambda_0(\xi)T_{,j} - p\sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta}d_{\beta j} + \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta n_\beta w_{\beta j}, \qquad (2.3.18)$$

$$w_{\alpha j} = -D_{T\alpha}\frac{T_{,J}}{T} - p\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}(\xi)d_{\beta j}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \qquad (2.3.19)$$

где $D_{\alpha\beta}(\xi)$ и $D_{T\alpha}(\xi)$ – соответственно симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии $(D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha})$ и коэффициенты термодиффузии; $\lambda_0(\xi)$ – парциальный коэффициент теплопроводности многокомпонентной газовой смеси при отсутствии всех диффузионных сил. Порядок приближения x=1,2,... , с

которым определены здесь коэффициенты переноса, соответствует числу первых членов в разложении коэффициентов возмущенных функций распределения компонентов в ряды по *полиномам Сонина–Лаггера*. Коэффициенты $D_{\alpha\beta}(\xi)$ и $D_{T\alpha}(\xi)$ не являются линейно независимыми:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha D_{T\alpha}(\xi) = 0 \quad (1), \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha D_{\alpha\beta} = 0, \quad (\beta = 1,2,...,N) \quad (2), \ (2.3.20)$$

поэтому для N-компонентной смеси имеется $\frac{1}{2}N(N-1)$ независимых коэффициентов диффузии и $(N-1)$ независимых коэффициентов термодиффузии.

По аналогии с кинетической теорией газов (формулы (2.3.18)–(2.3.20)), при феноменологическом подходе введем (через коэффициенты Онзагера) симметричные многокомпонентные коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N)$, коэффициенты термодиффузии $D_{T\alpha}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ и парциальный коэффициент теплопроводности λ_0 (через который далее будет выражен истинный коэффициент теплопроводности смеси; см. (2.3.73)) с помощью следующих формул

$$\lambda_0 \equiv L_{00}/T; \quad D_{T\alpha} \equiv L_{0\alpha}/n_\alpha \quad (\alpha = 1,2,...,N);$$

$$D_{\alpha\beta} \equiv pL_{\alpha\beta}/n_\alpha n_\beta, \quad (D_{\alpha\beta}=D_{\beta\alpha}) \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.21)$$

Тогда, определяющие соотношения (2.3.16) и (2.3.17) для потоков диффузии и тепла примут следующий стандартный вид

$$J_{qJ} = -\lambda_0 T_{,J} - p\sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta}\, d_{\beta J}, \qquad (2.3.22)$$

$$J_{\alpha J} = -n_\alpha D_{T\beta}(\ln T)_{,J} - n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\, d_{\beta J}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \qquad (2.3.23)$$

причем, введенные нами коэффициенты молекулярного переноса $D_{T\beta}$ и $D_{\alpha\beta}$ также удовлетворяют, в силу (2.3.10) и (2.3.11), соотношениям

$$\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta Z_\beta D_{T\beta} = 0 \quad (1), \qquad \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta Z_\beta D_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \quad (2). \qquad (2.3.24)$$

Относительно коэффициента λ_0 необходимо сделать следующее замечание. Как видно из (2.3.22) коэффициент λ_0 не может быть определен в результате прямого экспериментального измерения, так как градиент температуры в газовой смеси вызывает термодиффузию и, следовательно, приводит к градиентам концентраций. Поэтому даже в стационарных процессах величины $d_{\beta J}$ не равны нулю, а значит и тепловой поток, обусловленный градиентом температуры, всегда сопровождается тепловым потоком, обусловленным и градиентами концентраций.

Если газовая среда анизотропна, например, за счет взаимодействия с сильным электромагнитным полем планеты, то развитая выше теория усложняется. В этом случае в качестве аргументов для функций $L_{\alpha\beta}^{jk}$ необходимо вводить дополнительно к метрическому тензору g^{jk} еще другие тензоры, характеризующие анизотропию среды (*Седов, 1984*).

2.3.2. Соотношения Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии (история вопроса). Газокинетические определяющие соотношения (2.3.18) и (2.3.19) справедливы для любого числа приближений метода Чепмена–Эскога, и в общем случае коэффициенты молекулярного обмена $D_{\alpha\beta}(\xi)$, $D_{T\alpha}(\xi)$ и $\lambda_0(\xi)$ выражаются через отношения определителей порядка N x со сложными элементами (*Гиршфельдер и др., 1961*). Необходимость учета далеких приближений при вычислении подобных коэффициентов, например, в случае течений ионизованных газовых смесей в ионосфере (x=3 и более (*Девото, 1966*)), когда в потоке изменяется не только температура, но и элементный химический состав, приводит к чрезвычайно большому объему вычислений (*Гиршфельдер и др., 1961*). Еще более громоздким оказывается выражение для истинного коэффициента теплопроводности l. Для его вычисления необходимо исключить из (2.3.18) векторы $d_{\alpha j}$ с помощью диффузионных соотношений (2.3.19). Формальное решение последних относительно $d_{\alpha j}$ дает

$$d_{\beta j} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{E}_{\beta\alpha} w_{\alpha j} - \sum_{\alpha=1}^{N} D_{T\alpha} \mathrm{E}_{\beta\alpha} (\ln T)_{,j} \ , \qquad (2.3.25)$$

где $\mathrm{E}_{\beta\alpha}$ – элементы матрицы, обратной к матрице с элементами $D_{\beta\alpha}$ (*Колесниченко, Тирский, 1976*). Подставляя (2.3.25) в (2.3.18), найдем

$$q_j = -\lambda T_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha h_\alpha w_{\alpha j} + p \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta} \mathrm{E}_{\beta\alpha} D_{T\alpha}, \qquad (2.3.26)$$

где истинный коэффициент теплопроводности дается выражением

$$\lambda = \lambda_0 - \mathrm{k}\, n \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta} \mathrm{E}_{\beta\alpha} D_{T\alpha}. \qquad (2.3.27)$$

В задачах аэрономии, в которых переносные свойства определяются, в основном, нейтральными компонентами газовой смеси, величина l_0 мало отличается от истинного коэффициента теплопроводности l, и вторым членом в (2.3.27) часто можно пренебречь. Однако, с появлением, например, электронной компоненты в ионосфере вклад второго члена в (2.3.27) делается весьма существенным и может достигать порядка 30% (*Ферцигер, Капер, 1976; Маров, Колесниченко, 1987*). Использование формулы (2.3.27) в случае смеси частично ионизованных газов чрезвычайно затруднительно, поскольку соответствующие расчеты требуют двукратного обращения матриц высоких порядков: одно обращение связано с

нахождением коэффициентов l_0 , $D_{\beta\alpha}$ и $D_{T\alpha}$ из соответствующих систем алгебраических уравнений кинетической теории (*Маров, Колесниченко, 1987*), а второе – с разрешением системы (2.3.19) относительно векторов $d_{\alpha J}$. К тому же система диффузионных уравнений, получающаяся после подстановки диффузионных скоростей $w_{\alpha J}$ из (2.3.19) в балансовые уравнения (2.1.7), оказывается не разрешенной относительно старших производных. Как известно, численная реализация подобных систем сопряжена с определенными трудностями. Поэтому при описании диффузионных процессов в аэрономических исследованиях удобнее использовать определяющие соотношения (2.3.23), в виде разрешенном относительно диффузионных термодинамических сил $d_{\alpha J}$ через потоки $w_{\alpha J}$ (*Маров, Колесниченко, 1987*). Подобное обратное преобразование может быть записано в виде так называемых обобщенных *соотношений Стефана–Максвелла*

$$d_{\beta J} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} R_{\beta\alpha}(w_{\alpha J} - w_{\beta J}) + \frac{T_{,J}}{T}\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} R_{\beta\alpha}(D_{T\alpha} - D_{T\beta}), (\beta = 1,2,\ldots,N), \qquad (2.3.28)$$

в которые, вместо многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{\beta\alpha}$, входят коэффициенты диффузии в бинарных смесях газов $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ или коэффициенты сопротивления диффузии $R_{\beta\alpha}$, тесно связанные с $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ (см. формулы (2.3.59) и (2.3.62)). Наличие точных соотношений Стефана–Максвелла, справедливых в высших приближениях коэффициентов молекулярного обмена, позволило бы получить также и наиболее простые формулы для истинного коэффициента теплопроводности λ и коэффициентов термодиффузии $D_{T\alpha}$ в любом приближении метода Чепмена–Энскога (*Колесниченко, 1979*),.

Исторически соотношения (2.3.28) были получены Стефаном (*Стефан, 1871*) и Максвеллом (*Максвелл, 1890*) феноменологически (без учета термодиффузии, $D_{T\alpha} = 0$) в предположении, что сила, действующая на частицу сорта a со стороны частицы сорта b, пропорциональна разности их диффузионных скоростей, а полная сила сопротивления движению частицы сорта a в смеси равна сумме независимых сил сопротивления от всех остальных частиц (других сортов). Кроме того, они допустили, что матрица коэффициентов сопротивления $R_{\alpha\beta}$ для многокомпонентных смесей симметрична.

Обобщенные соотношения Стефана–Максвелла (учитывающие термодиффузию и влияние внешних массовых сил) методами кинетической теории одноатомных газов были получены в книге (*Гиршфельдер и др., 1961*) в рамках учета первого приближения теории Чепмена–Энскога для многокомпонентных коэффициентов диффузии $\left[D_{\alpha\beta}\right]_1$ и второго приближения для коэффициентов термодиффузии $\left[D_{T\alpha}\right]_2$ (т.е. когда в вариационном представлении интегральных уравнений, определяющих первую итерацию Чепмена–Энскога, использовалась пробная функция, содержащая единственный полином Сонина–Лаггера) в виде:

$$d_{\beta j} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1}(w_{\alpha j} - w_{\beta j}) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1}\left(\left[D_{T\alpha}\right]_2 - \left[D_{T\beta}\right]_2\right), (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{2.3.29}$$

При подстановке диффузионных сил из (2.3.29) в (2.3.18) для коэффициентов теплопроводности в этом приближении можно получить

$$\lambda = \left[\lambda_0\right]_2 - \frac{\mathrm{k}n}{2} \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1}\left\{\left[D_{T\alpha}\right]_2 - \left[D_{T\beta}\right]_2\right\}. \tag{2.3.30}$$

В работе (*Макенфус, Куртис, 1958*) соотношения (2.3.29) и истинный коэффициент теплопроводности были выведены в рамках полного второго приближения теории Чепмена–Энскога, однако симметрия коэффициентов сопротивления $R_{\alpha\beta}$ в этом приближении не была установлена. Более того, Трусделлом (*Трусделл, 1962*) было высказано предположение, что во втором приближении матрица $R_{\alpha\beta}$ несимметрична (другими словами, по мнению Трусделла соотношения Стефана–Максвелла (2.3.29) не носят универсального термодинамического характера, а являются математическим феноменом, присущим лишь первому приближению теории Чепмена–Энскога). Позднее, в работе (*Макенфус,1973*) предпринималась попытка получить соотношения (2.3.28) из кинетической теории газов в любом приближении, но был сделан неверный вывод о том, что поправочные множители к бинарным коэффициентам диффузии (учитывающие высшие приближения при разложении возмущенных функций распределения отдельных компонентов в ряды по полиномам Сонина–Лаггера) зависят только от числа приближений теории Чепмена–Энскога и числа N (количество компонентов в системе), но не зависят от самих взаимодействующих компонентов; кроме того не был получен явный вид этой поправки. Обобщенные соотношения Стефана–Максвелла и формулы для поправок к бинарным коэффициентам диффузии в любом приближении коэффициентов молекулярного переноса были выведены для частично ионизованных смесей впервые в работе (*Колесниченко, 1979*) (в которой был рассмотрен предельный случай нулевого магнитного поля) и в работах (*Колесниченко, 1982; Колесниченко, Маров, 1982*) (с учетом сильного магнитного поля, вносящего анизотропию в коэффициенты переноса). Там же была показана симметрия коэффициентов сопротивления в полном согласии с соответствующим результатом термодинамики необратимых процессов (*Колесниченко, Тирский, 1976*).

2.3.3. Вывод обобщенных соотношений Стефана–Максвелла методами термодинамики необратимых процессов. Для феноменологического вывода соотношений Стефана–Максвелла (для регулярных движений смеси) разрешим уравнения (2.3.16) и (2.3.17) относительно обобщенных термодинамических сил X_{0j} и $X_{\beta j} \equiv -(p/n_\beta)d_{\beta j}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$ через потоки J_{qj} и $J_{\alpha j}$ $(1,2,\ldots,N)$ (*Колесниченко, Тирский, 1976*). Опуская для этого последнее уравнение системы (2.3.17) и используя (2.3.11), представим соотношения (2.3.16) и (2.3.17) в виде

$$J_{qJ} - L_{00}X_{0j} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}\left[X_{\beta J} - \frac{M_\beta}{M_N}X_{NJ}\right], \tag{2.3.31}$$

$$J_{\alpha j} - L_{\alpha 0}X_{0j} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\left[X_{\beta j} - \frac{M_\beta}{M_N}X_{Nj}\right], \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N-1), \tag{2.3.32}$$

где введены обозначения

$$X_{0j} \equiv T_{,j}/T; \quad X_{\beta j} \equiv -(p/n_\beta)d_{\beta j} \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N-1).$$

Разрешая теперь систему (2.3.32) относительно разностей $X_{\beta J} - \left(M_\beta / M_N\right)X_{NJ}$ (b = 1,2,..., *N*), в результате найдем

$$X_{\beta j} - \left(M_\beta / M_N\right)X_{Nj} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\beta\alpha}(J_{\alpha j} - L_{\alpha 0}X_{0j}), \quad (\beta = 1,2,\ldots,N-1). \tag{2.3.33}$$

Здесь $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ – элементы обратной матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\beta\alpha}L_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \beta = \gamma \\ 0, & \beta \neq \gamma. \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Из симметрии феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ следует симметрия и коэффициентов $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N-1). \tag{2.3.35}$$

Из соотношения (2.3.31), при учете (2.3.33), получим

$$J_{qJ} = \left[L_{00} - \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}\mathcal{M}_{\beta\alpha}L_{\alpha 0}\right]X_{0J} + \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left[\sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}\mathcal{M}_{\beta\alpha}\right]J_{\alpha J}. \tag{2.3.36}$$

Умножая теперь каждое из уравнений (2.3.33) на Z_β (заметим, что $\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta Z_\beta = 1$; $\sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta X_{\beta J} = 0$) и суммируя их от 1 до (*N*–1), найдем искомые соотношения для векторов диффузионных сил в виде

$$X_{NJ} = \left[M_N \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}L_{\alpha 0}\right]X_{0j} - M_N \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left[\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}\right]J_{\alpha j}, \tag{2.3.37}$$

$$X_{\beta J} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{\alpha 0}\left[M_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha} - \mathcal{M}_{\beta\alpha}\right]X_{0J} - \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left[\mathcal{M}_{\beta\alpha} - M_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}\right]J_{\alpha J}.$$

(b = 1,2,..., *N*–1)

(2.3.38)

Термодинамическая сила X_{0j} может быть найдена из выражения (2.3.36). Уравнения (2.3.37) и (2.3.38) представляют собой обращение соотношений (2.3.32). Для того, чтобы записать эти уравнения в виде обобщенных соотношений Стефана–Максвелла, прибавим к (2.3.36), (2.3.37) и (2.3.38) тождество $\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha J_{\alpha j} = 0,$ умноженное соответственно на константы a_0, a_N и a_β $(\beta = 1,2,\ldots,N-1)$, и определим свободные параметры a_0 и a_β из условия симметрии коэффициентов A. Для этого необходимо положить

$$a_0 = -\sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha} L_{\alpha 0}, \tag{2.3.39}$$

$$a_\beta = \left(M_\beta / M_N\right) a_N - \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\beta} \quad (\beta = 1,2,\ldots,N-1)\ . \tag{2.3.40}$$

Тогда получим

$$J_{qj} = A_{00} X_{0j} + \sum_{\alpha=1}^{N} A_{0\alpha} J_{\alpha j}, \tag{2.3.41}$$

$$-X_{\beta j} = A_{\beta 0} X_{0j} + \sum_{\alpha=1}^{N} A_{\beta\alpha} J_{\alpha j}, \quad (\beta = 1,2,\ldots,N), \tag{2.3.42}$$

где коэффициенты A равны

$$A_{00} = L_{00} - \sum_{\beta=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{0\beta} \mathcal{M}_{\beta\gamma} L_{\gamma 0}, \tag{2.3.43}$$

$$A_{0N} = A_{N0} = a_0 M_N = -M_N \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha} L_{\alpha 0}, \tag{2.3.44}$$

$$A_{0\alpha} = A_{\alpha 0} = a_0 M_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\alpha} \mathcal{M}_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\beta 0} \left[\mathcal{M}_{\beta\alpha} - M_\alpha \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\beta} \right], \tag{2.3.45}$$

(a=1,2,...,N-1)

$$A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta} = -(M_\alpha M_\beta / M_N) a_N + \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \left(M_\alpha \mathcal{M}_{\gamma\beta} + M_\beta \mathcal{M}_{\gamma\alpha} \right) - \mathcal{M}_{\beta\alpha}, \tag{2.3.46}$$

(a,b=1,2,...,N-1)

$$A_{N\alpha} = A_{\alpha N} = -a_N M_\alpha + M_N \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}, \tag{2.3.47}$$

$$A_{NN} = -a_N M_N, \tag{2.3.48}$$

причем имеет место тождество

$$\sum_{\alpha=1}^{N} Z_{\alpha} A_{\alpha 0} = 0. \qquad (2.3.49)$$

Таким образом, коэффициенты $A_{\alpha\beta}(\alpha,\beta = 0,1,\ldots,N)$ определены с точностью до константы a_N, которая может быть выбрана, вообще говоря, любой. Здесь определим ее, считая потоки $J_{\alpha j}$ произвольными. Переписывая для этого соотношения (2.3.41) и (2.3.42) в виде

$$X_{0j} = (1/A_{00})J_{qj} - \sum_{\alpha=1}^{N} (A_{0\alpha}/A_{00})J_{\alpha j}, \qquad (2.3.50)$$

$$X_{\beta j} = -\left(A_{\beta 0}/A_{00}\right)J_{qj} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\left(A_{\beta 0}A_{0\alpha}/A_{00}\right) - A_{\beta\alpha}\right]J_{\alpha j}\ , \qquad (2.3.51)$$

(b=1,2,...,N)

и используя тождество $\sum_{\beta=1}^{N} Z_{\beta} X_{\beta j} = 0$ и произвольность векторов $J_{\alpha j}$, получим, с учетом (2.3.49), следующие важные соотношения

$$\sum_{\beta=1}^{N} Z_{\beta} A_{\beta\alpha} = 0, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.52)$$

Наконец, подставляя в соотношения (2.3.52) коэффициенты (2.3.46) и (2.3.47), находим для параметра a_N выражение :

$$a_N = M_N \sum_{\beta=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_{\beta} Z_{\gamma} \mathcal{M}_{\beta\gamma}. \qquad (2.3.53)$$

Константы в (2.3.43)–(2.3.48) определены, таким образом, полностью через элементы симметричной матрицы феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ и элементы обратной к ней симметричной матрицы $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Приведем теперь выражения (2.3.42) к виду обобщенных соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии. Вычтем для этого из (2.3.42) равенства (2.3.52), умноженные предварительно на $J_{\beta j}/Z_{\beta}$. Тогда найдем

$$-X_{\beta j} = A_{\beta 0}X_{0j} + \sum_{\alpha=1}^{N} A_{\beta\alpha} n_{\alpha}\left(w_{\alpha j} - w_{\beta j}\right), \quad (\beta = 1,2,\ldots,N), \qquad (2.3.54)$$

или в более привычных обозначениях

$$d_{\beta j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{n_{\beta} n_{\alpha}}{p} A_{\beta\alpha}\left(w_{\alpha j} - w_{\beta j}\right) - \frac{A_{\beta 0} n_{\beta}}{p}\frac{T_{,j}}{T}, \quad (\beta = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.55)$$

Осталось теперь показать, что имеет место следующее выражение

$$A_{\beta 0} = -\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha A_{\beta\alpha}\left[\frac{L_{0\alpha}}{n_\alpha} - \frac{L_{0\beta}}{n_\beta}\right], \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{2.3.56}$$

Используя для этого (2.3.45), (2.3.46) и тождества (2.3.49) и (2.3.52), найдем

$$\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha A_{\beta\alpha}\left[\frac{L_{0\alpha}}{n_\alpha} - \frac{L_{0\beta}}{n_\beta}\right] = \sum_{\alpha=1}^{N} A_{\beta\alpha} L_{0\alpha} - \frac{L_{0\beta}}{n_\beta}\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha A_{\beta\alpha} = A_{\beta N} L_{0N} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} A_{\beta\alpha} L_{0\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{0\alpha}\left[A_{\beta\alpha} - (M_\alpha / M_N) A_{\beta N}\right] = \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{0\alpha}\left[-\mathcal{M}_{\beta\alpha} + M_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}\right] = -A_{0\beta}. \tag{2.3.57}$$

Подставляя (2.3.56) в (2.3.55) и используя для коэффициентов термодиффузии обозначения (2.3.21), окончательно найдем

$$d_{\beta j} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{p} A_{\beta\alpha}\left(w_{\alpha j} - w_{\beta j}\right) + \frac{T_{,j}}{T}\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{p} A_{\beta\alpha}\left(D_{T\alpha} - D_{T\beta}\right), \tag{2.3.58}$$

(b=1,2,...,*N*)

что полностью совпадает с соотношениями Стефана–Максвелла (2.3.28), если положить

$$\left(n_\beta n_\alpha / p\right) A_{\beta\alpha} \equiv R_{\beta\alpha}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{2.3.59}$$

Таким образом, если имеет место принцип взаимности Онзагера–Каземира (2.3.10) для феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$, то матрица коэффициентов сопротивлений в выведенных (термодинамически) соотношениях Стефана–Максвелла симметрична

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{2.3.60}$$

Полученные нами соотношения (2.3.58) являются более общими, чем аналогичные соотношения

$$d_{\beta j} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{x_\beta x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(w_{\alpha j} - w_{\beta j}\right) + \frac{T_{,j}}{T}\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{x_\beta x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(D_{T\alpha} - D_{T\beta}\right), \quad (\beta = 1,2,\ldots,N), \tag{2.3.61}$$

полученные методами кинетической теории разреженных газов в работах (*Гиршфельдер и др., 1961; Колесниченко, 1979*) (здесь $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1 f_{\alpha\beta}^N(\xi)$; $f_{\alpha\beta}^N(\xi)$ – поправочные множители, учитывающие высшие приближения в бинар-

ных коэффициентах диффузии многокомпонентной смеси одноатомных газов).

К сожалению *термодинамика необратимых процессов* не дает метода определения феноменологических коэффициентов $A_{\alpha\beta}$ (a,b=1,2,...,N) и $A_{0\beta}$ (b=1,2,...,N). Эти коэффициенты в общем случае произвольной многокомпонентной газо-жидкой среды должны быть определены экспериментально; для разреженных газов, они могут быть найдены из детального рассмотрения динамики столкновений частиц с помощью кинетической теории (*Гиршфельдер и др., 1961; Ферцигер, Капер, 1976*). Воспользуемся здесь последним способом. Отождествляя (1.3.55) и (1.3.61), находим для идеальных газовых смесей

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \mathrm{k}T\ /n\,A_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N\ ), \tag{2.3.62}$$

где $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ – *бинарные коэффициенты диффузии*, величины которых могут быть заимствованы из кинетической теории газов в любом приближении метода Чепмена–Энскога (либо взяты из экспериментов).

В аэрономических исследованиях удобно определить через феноменологические коэффициенты $A_{0\beta}$ так называемые *термодиффузионные отношения* $K_{T\beta}$ по формуле

$$K_{T\beta} = n_\beta A_{\beta 0} / p \quad (\beta = 1,2,\ldots,N)\,. \tag{2.3.63}$$

В этом случае, при использовании соотношений (2.3.21), (2.3.57) и (2.3.62), для вновь введенных коэффициентов переноса $K_{T\beta}$ можно получить выражение

$$K_{T\beta} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{x_\beta x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(D_{T\beta} - D_{T\alpha}\right), \quad (\beta = 1,2,\ldots,N\ ), \tag{2.3.64}$$

связывающее $K_{T\beta}$ и, введенные ранее формулой (2.3.21), коэффициенты термодиффузии $D_{T\beta}$ для многокомпонентной смеси. При этом, в силу (2.3.49), справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} = 0. \tag{2.3.65}$$

Кроме того, легко проверить, что имеют место соотношения

$$\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta} A_{\beta 0} = L_{0\alpha}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N\ ), \tag{2.3.66}$$

из которых, с учетом определений (2.3.21) и (2.3.63), следует система уравнений для нахождения термодиффузионных отношений $K_{T\beta}$ через коэффициенты многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$ и термодиффузии $D_{T\alpha}$:

$$\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} K_{T\beta} = D_{T\alpha}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N\ ). \tag{2.3.67}$$

Действительно, используя соотношения (2.3.11), (2.3.34), (2.3.44) и (2.3.45), можно последовательно получить

$$\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}A_{\beta 0} = L_{\alpha N}A_{N0} + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}A_{\beta 0} = -a_0 \sum_{\beta=1}^{N-1} M_\beta L_{\beta\alpha} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\left[a_0 M_\beta + \sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{0\gamma}M_{\gamma\beta}\right] = \sum_{\beta=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}M_{\gamma\beta}L_{0\gamma} = L_{0\beta}. \qquad (2.3.68)$$

Таким образом, соотношения (2.3.64), (2.3.65) и (2.3.67) для термодиффузионных отношений, фигурирующие в кинетической теории разреженных газовых смесей (*Ферцигер Дж., Капер, 1976; Колесниченко, 1979*), также носят универсальный (феноменологический) характер, т.к. их вывод стал возможен и в рамках развитого здесь термодинамического подхода.

По поводу введенных нами термодиффузионных отношений $K_{T\beta}$ следует отметить следующее. В силу соотношений ($2.3.24^{(2)}$) детерминат коэффициентов системы (2.3.67) обращается в нуль. Единственным решением системы однородных уравнений, соответствующих уравнениям (2.3.67) является N-компонентный вектор относительно концентраций Z_α, но, согласно ($2.3.24^{(1)}$), этот вектор ортогонален N-компонентному вектору коэффициентов термодифузии, т.е. $\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha Z_\alpha D_{T\alpha} = 0$. Отсюда следует, что уравнения (2.3.67) имеют решение в форме некоторого вектора с компонентами $K_{T\alpha}$, определенными с точностью до постоянной, умноженной на концентрации Z_α; условие (2.3.65) обеспечивает единственность коэффициентов $K_{T\alpha}$.

Используя термодиффузионные отношения, выражение (2.3.23) для потока диффузии $J_{\alpha j}$ можно записать в виде следующего обобщенного *закона Фика* :

$$J_{\alpha j} = -n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\left[d_{\beta j} + K_{T\beta}\left(T_{,j}/T\right)\right], \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.23^*)$$

где

$$d_{\beta j} = x_{\beta,j} + (x_\beta - M_\beta Z_\beta)\frac{p_{,j}}{p} + \frac{n_\beta}{p}\left[-F_{\beta j} + M_\beta \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha j}\right]$$

– векторы термодинамических диффузионных сил.

Наконец, применяя (2.3.62) и (2.3.63) перепишем обобщенные соотношения Стефана-Максвелла (2.3.55) в удобном для аэономических приложений виде

$$\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta J_{\alpha j} - n_\alpha J_{\beta j}}{n^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}} = d_{\beta j} + K_{T\beta}\frac{T_{,j}}{T}, \quad (\beta = 1,2,\ldots,N). \qquad (2.3.69)$$

По поводу этих соотношений отметим следующее. Так как матрица коэффициен-

тов сопротивления $R_{\alpha\beta}$, определяемая выражением (2.3.59) является, в силу тождества (2.3.52), вырожденной, то не все из N различных диффузионных потоков $J_{\alpha j}$ могут быть найдены из (2.3.69). Необходимым дополнительным условием является *алгебраический интеграл* (2.1.8).

2.3.4. Полный поток тепла в идеальных многокомпонентных средах. Как было найдено выше полный тепловой поток многокомпонентной смеси за счет теплопроводности и диффузии q_j равен (см. (2.1.50) и (2.3.22))

$$q_j = J_{qj} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha J_{\alpha j} = -\lambda_0 T_{,j} - p\sum_{\alpha=1}^{N} D_{T\alpha} d_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha J_{\alpha j}. \tag{2.3.70}$$

С другой стороны из (2.3.41), с учетом (2.3.63), можно получить для приведенного потока тепла J_{qJ} другое (удобное для аэрономии) выражение, скоррелированное с соотношениями Стефана–Максвелла (2.3.69)

$$J_{qJ} = \mathrm{A}_{00} X_{0J} + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{A}_{0\alpha} J_{\alpha J} = -\lambda T_{,J} + p\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha J}. \tag{2.3.71}$$

Здесь через

$$\lambda = \mathrm{A}_{00}/T \tag{2.3.72}$$

определен так называемый *истинный коэффициент теплопроводности*, который связан с ранее введенным коэффициентом λ_0 соотношением

$$\lambda = \lambda_0 - \mathrm{k}T\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} D_{T\alpha} = \lambda_0 - \mathrm{k}T\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} K_{T\alpha} D_{\alpha\beta} K_{T\beta}. \tag{2.3.73}$$

Действительно, в силу (2.3.34), (2.3.43) и (2.3.68), будем иметь

$$A_{00} \equiv L_{00} - \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\delta=1}^{N-1} L_{0\delta}\mathcal{M}_{\delta\alpha} L_{0\alpha} = L_{00} - \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\delta=1}^{N-1} L_{0\delta}\mathcal{M}_{\delta\alpha}\Bigg[L_{0N} A_{N0} +$$

$$+\sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\mathrm{A}_{\beta 0}\Bigg] = L_{00} - \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}\mathrm{A}_{\beta 0} - \mathrm{A}_{N0} L_{0N} = L_{00} - \sum_{\beta=1}^{N} L_{0\beta}\mathrm{A}_{\beta 0}, \tag{2.3.74}$$

откуда, при использовании обозначений (2.3.21), (2.3.63) и (2.3.72), следует выражение (2.3.73).

Таким образом, полный поток тепла в многокомпонентных средах может быть записан в виде

$$q_J = -\lambda T_{,J} + p\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha J} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha n_\alpha w_{\alpha J}, \tag{2.3.75}$$

в полном согласии с кинетической теорией газов (*Ферцигер, Капер, 1976*).

В отличии от λ_0, коэффициент λ может быть непосредственно измерен экспериментально в стационарной системе, так как в стационарном случае все диффузионные скорости $w_{\alpha j}$ равны нулю (когда газ в целом покоится). Как видно из (2.3.73), разность между коэффициентами λ и λ_0 порядка $D_{T\alpha}^2$. Вследствие малости коэффициентов термодиффузии этой разностью при обычных условиях в атмосфере можно пренебречь (*Маров, Колесниченко, 1987*). Слагаемое $p\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha j}$ в выражении (2.3.71) для вектора теплового потока соответствует диффузионному потоку тепла.

2.3.5. Формулы для определения многокомпонентных коэффициентов диффузии смеси через бинарные коэффициенты диффузии. Получим теперь алгебраические уравнения, позволяющие вычислять многокомпонентные коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ через бинарные диффузионные коэффициенты $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$. Легко проверить, что справедливо соотношение

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} A_{\beta\alpha}\left(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}\right) = n_\gamma\left(\delta_{\alpha\gamma} - M_\alpha Z_\alpha\right) \quad (\alpha,\gamma = 1,2,\ldots,N). \tag{2.3.76}$$

Действительно, в силу (2.3.11), (2.3.46) и (2.3.52) имеем

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} A_{\beta\alpha}\left(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}\right) = \sum_{\beta=1}^{N} A_{\beta\alpha}\left(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}\right) = -n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} A_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta} =$$

$$= -n_\alpha\left[\sum_{\beta=1}^{N-1} A_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta} + A_{\beta N} L_{\gamma N}\right] = -n_\alpha\left[M_\alpha \sum_{\delta=1}^{N-1} Z_\delta\left(\sum_{\beta=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\delta\beta} L_{\beta\gamma}\right) - \sum_{\beta=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta}\right] =$$

$$= -n_\alpha\left[M_\alpha \sum_{\delta=1}^{N-1} Z_\delta \delta_{\delta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\right] = n_\gamma\left(\delta_{\alpha\gamma} - M_\alpha Z_\alpha\right).$$

При использовании обозначений (2.3.21) и (2.3.62) для величин $A_{\beta\alpha}(= \mathrm{k}T / n\mathcal{D}_{\alpha\beta})$ и $L_{\gamma\alpha}(= n_\gamma n_\alpha D_{\gamma\alpha} / p)$, соотношения (2.3.76) могут быть переписаны в виде следующих уравнений

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(D_{\gamma\alpha} - D_{\gamma\beta}\right) = \delta_{\gamma\alpha} - M_\alpha Z_\alpha, \quad (\gamma,\alpha = 1,2,\ldots,N), \tag{2.3.77}$$

пригодных для определения многокомпонентных коэффициентов диффузии смеси $D_{\gamma\beta}$ $(\gamma,\beta = 1,2,\ldots,N)$ через бинарные диффузионные коэффициенты $\mathcal{D}_{\gamma\beta}$ $(\gamma,\beta = 1,2,\ldots,N)$. Уравнения (2.3.77) линейно зависимы (так как суммирование по α соотношения (2.3.76) приводит к тождеству), поэтому к ним следует добавить еще одно уравнение, а именно (2.3.24).

Придадим уравнениям (2.3.77) и (2.3.24) удобный для определения коэффициентов $D_{\gamma\beta}$ вид. Для этого перепишем (2.3.77) сначала следующим образом

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} D_{\gamma\beta}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}-\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\frac{D_{\gamma\alpha}}{D_{\gamma\beta}}\right]=M_\alpha Z_\alpha-\delta_{\gamma\alpha} \tag{2.3.78}$$

Замечая, что из соотношений (2.3.24), следует что

$$M_\alpha Z_\alpha D_{\gamma\alpha}=-\sum_{\substack{\delta=1\\ \delta\neq\alpha}}^{N} M_\delta Z_\delta D_{\delta\gamma}\quad(\alpha,\gamma=1,2,\ldots,N), \tag{2.3.79}$$

приведем (2.3.78) к удобной для практических расчетов форме

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}+\sum_{\substack{\delta=1\\ \delta\neq\alpha}}^{N}\frac{M_\beta}{M_\alpha}\frac{x_\alpha x_\delta}{\mathcal{D}_{\alpha\delta}}\right]D_{\gamma\beta}=M_\alpha Z_\alpha-\delta_{\gamma\alpha}\quad(\alpha,\gamma=1,2,\ldots,N) \tag{2.3.80}$$

В частном случае смеси, состоящей из трех компонентов, из (2.3.80) могут быть найдены следующие типичные выражения для коэффициентов многокомпонентной диффузии

$$D_{11}=\frac{n^2}{\rho^2 n_1^2}\left(\frac{n_1 n_3 M_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}+n_1 n_2 M_2^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}+(\rho_2+\rho_3)^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{31}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}}\right),$$

$$D_{12}=\frac{n^2}{\rho^2}\left(\frac{n_3 M_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}-M_2(\rho_1+\rho_2)\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}-M_1(\rho_2+\rho_3)\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{11}}{n_1\mathcal{D}_{32}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}}\right), \tag{2.3.81}$$

где $\rho_\alpha=M_\alpha n_\alpha$ – массовая плотность частиц сорта а. Выражения для остальных коэффициентов $D_{\alpha\beta}$ могут быть получены из (2.3.81) с помощью соответствующей перестановки индексов.

Формулы типа (2.3.80) и (2.3.81) были впервые получены в кинетической теории газов одноатомных газов в первом приближении метода Чепмена-Энскога в известной работе (*Куртисс, 1968*). Здесь же приведен их феноменологический вывод и тем самым установлен универсальный характер подобных соотношений.

2.3.6. Многокомпонентная диффузия в верхней атмосфере. Обобщенные соотношения Стефана–Максвелла (2.3.69) служат исходными при численном моделировании процессов тепло- и массопереноса в термосфере (см. Часть II). Перепишем их здесь в несколько измененном виде, удобном при решении некоторых аэрономических задач (особенно в гетеросфере планеты).

Полная макроскопическая внешняя сила, действующая на частицу газа сорта а в относительной системе координат (связанной с поверхностью планеты), вращающейся относительно инерциальной системы с постоянной угловой скоро-

стью Ω_j, определяется выражением

$$F_{\alpha j} = M_\alpha g_j - 2M_\alpha \varepsilon_{kji} V_{\alpha k} \Omega_i, \tag{2.3.82}$$

где

$$g_j = \Omega^2 R_j + \left(GM_{pl} / |\boldsymbol{R}|^3\right) R_j$$

– приведенное гравитационное ускорение (R_j – центральный радиус-вектор). При подстановке (2.3.82) в формулу (2.3.15), и учете соотношения $p_\alpha = x_\alpha p$ для парциального давления, выражение для вектора термодинамической диффузионной силы $d_{\alpha j}$ может быть переписано в виде

$$d_{\alpha j} = p^{-1}\left[p_{\alpha,j} - M_\alpha Z_\alpha p_{,j} + 2M_\alpha n_\alpha \varepsilon_{kji} w_{\alpha k} \Omega_j\right]. \tag{2.3.83}$$

При использовании (2.3.83) и (2.1.59), обобщенным соотношениям Стефана–Максвелла (2.3.69) можно придать вид уравнений движения отдельных компонентов смеси в относительной системе координат (записанных в *диффузионном приближении*)

$$\rho_\alpha\left[\frac{dV_j}{dt} + 2\varepsilon_{kji} V_k \Omega_i\right] = -p_{\alpha,j} + \frac{\rho_\alpha}{\rho}\pi_{ij,i} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(w_{\beta j} - w_{\alpha j}\right) -$$

$$-pK_{T\alpha}\left(\ln T\right)_{,j} + \rho_\alpha g_j - 2\rho_\alpha \varepsilon_{kji} w_{\alpha k} \Omega_i. \tag{2.3.84}$$

В правой части (2.3.84) стоят члены, описывающие влияние различных сил, приложенных к частицам сорта α при их движении. Кроме указанных выше внешних сил $n_\alpha F_{\alpha j}$, отнесенных к единице объема, сюда относятся: градиент парциального давления; сила вязкого трения; сила трения, отражающая взаимодействие между однокомпонентными средами, движущимися с различными скоростями; термосила, вызывающая термодиффузию. Следует отметить,что ввиду малой разницы молекулярных весов диффундирующих газов в верхней атмосфере влияние термодиффузии на распределение нейтральных компонентов смеси можно учитывать только для легких малых составляющих, таких, например, как *H*, *D* и *He* (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Формулы из кинетической теории для расчета силы трения. Вводя эффективную частоту столкновений частиц α и b сортов

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} \equiv \mathrm{k} x_\beta / M_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{D}_{\alpha\beta} = \left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1, \tag{2.3.85}$$

где

$$\left[\mathcal{D}_{\alpha\beta}\right]_1 = \frac{3}{16n}\left(\frac{2\pi\ \mathrm{k}T}{M_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} \frac{1}{\pi\sigma_{\alpha\beta}^2\ \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)*}} \tag{2.3.86}$$

– бинарные коэффициенты диффузии, взятые в первом приближении теории Чепмена–Энскога (*Ферцигер, Капер, 1976*), запишем столкновительный член в (2.3.84) в виде

$$P_{\alpha\beta J} \equiv p\,\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(w_{\beta J} - w_{\alpha J}\right) = n_\alpha M_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}^{-1}\left(w_{\beta J} - w_{\alpha J}\right) \qquad (2.3.87)$$

Здесь $M_{\alpha\beta} \equiv M_\alpha M_\beta/(M_\alpha + M_\beta)$ – приведенная масса пары молекул типов a и b; $\sigma_{\alpha\beta} = \left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta\right)/2$ – расстояние между центрами двух молекул с диаметрами σ_α и σ_β в момент столкновения;

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)*} = \frac{4(l+1)}{(r+1)!\left[2l+1-(-1)^l\right]}\,\pi\sigma_{\alpha\beta}^2\int_0^\infty \exp\left[-\gamma_{\alpha\beta}^2\right]\gamma_{\alpha\beta}^{3+2r}\;\; Q_{\alpha\beta}^l\, d\gamma_{\alpha\beta} \qquad (2.3.88)$$

– приведенный интеграл столкновений элементарных частиц всех пар (*Гиршфельдер и др., 1961*), выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые сферы (для такой модели $\Omega^*_{\alpha\beta} = 1$); $\gamma_{\alpha\beta}^2 = M_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^2/2kT$; $\gamma_{\alpha\beta}$ – приведенная начальная относительная скорость сталкивающихся молекул; $Q_{\alpha\beta}^{(l)}$ – обобщенное сечение столкновений с передачей импульса между частицами типа α и β, имеющими относительную тепловую скорость $\left|\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}\right|$:

$$Q_{\alpha\beta}^{(l)} = Q_{\beta\alpha}^{(l)} = 2\pi\int_0^\infty\left(1-\cos^l\chi_{\alpha\beta}\right)\boldsymbol{b}\,d\boldsymbol{b} \qquad (2.3.89)$$

$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}\left(\boldsymbol{b}, \left|\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}\right|\right)$ – угол рассеяния (угол отклонения молекул в системе координат центра тяжести). Динамика столкновений входит в коэффициенты переноса в конечном счете через интегралы столкновений (2.3.88). Для вычисления приведенных интегралов Ω^* необходимо знать χ как функцию начальной относительной скорости $\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}$ и прицельного расстояния $\boldsymbol{b}$ (*Гиршфельдер и др.,1961*). Зависимость χ от $\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется потенциалом межмолекулярного взаимодействия $\varphi(r)$. Таким образом, задавая потенциал взаимодействия, можно вычислить интегралы Ω^*. Наиболее удовлетворительными (и удобными) являются вычисления Ω^*, выполненные на основе либо потенциала (6–12) Леннард–Джонса

$$\varphi_\alpha(r) = 4\,\epsilon_\alpha\left[\left(\frac{\sigma_\alpha}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma_\alpha}{r}\right)^6\right] \qquad (2.3.90)$$

либо модифицированного потенциала (6–exp) Бакингема

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_\alpha}{1-(6/\alpha_\alpha)}\left\{\dfrac{6}{\alpha_\alpha}\exp\left[\alpha_\alpha\left(1-\dfrac{r}{\sigma_\alpha}\right)\right] - \left(\dfrac{\sigma_\alpha}{r}\right)^6\right\}, & r > r_{\max} \\ \infty, & r < r_{\max}. \end{cases} \qquad (2.3.91)$$

Здесь $\epsilon_\alpha, \sigma_\alpha, \alpha_\alpha$ – параметры потенциалов взаимодействия однородных молекул сорта α (силовые константы). В кинетической теории газов показывается, что Ω^* – интегралы для этих потенциалов зависят только от характеристической температуры $T^* = kT / \epsilon$ (*закон соответственных состояний* для явлений переноса (k – постоянная Больцмана)) (*Гиршфельдер и др.,1961*). Расчетам Ω^* – интегралов как функций характеристической температуры T^* для конкретных потенциалов взаимодействия между частицами посвящена обширная литература (см., например, (*Чепмен, Каулинг*, 1960; *Гиршфельдер и др.,1961; Девото, 1966*)). Таблицы Ω^* – интегралов для потенциала (6-12) Леннард–Джонса и модифицированного потенциала (6–exp) Бакингема (а также для ряда других моделей) составлены авторами (*Гиршфельдер и др.,1961*). Результаты более поздних вычислений Ω^* – интегралов для этих потенциалов, выполненные рядом исследователей (*Мейсон, 1954; Манн и др., 1965*), воспроизведены в монографии (*Ферцигер, Капер, 1976*)].

Используя формулы (2.3.86) и (2.3.88), для величины $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ в первом приближении теории Чепмена–Энскога получаем

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = n_\beta \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi M_{\alpha\beta}}}\pi\sigma_{\alpha\beta}^2\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)*} = n_\beta < g_{\alpha\beta} >< Q_{\alpha\beta} >. \qquad (2.3.92)$$

Здесь $< g_{\alpha\beta} > = (8kT / \pi M_{\alpha\beta})^{1/2}$ – средняя относительная скорость частиц с максвелловским распределдением по скоростям, $< Q_{\alpha\beta} >$ – среднее эффективное сечение столкновений с передачей импульса между частицами типа a и b. Из соотношений (2.3.88) и (2.3.89) следует, что

$$< Q_{\alpha\beta} > = \frac{4}{3}\pi\sigma_{\alpha\beta}^2\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)*} = \frac{4}{3}\left(\frac{M_{\alpha\beta}}{2kT}\right)^3\int_0^\infty Q_{\alpha\beta}(g)\exp\left[-\left(\frac{M_{\alpha\beta}}{2kT}\right)g^2\right]g^5 dg, \qquad (2.3.93)$$

где $Q_{\alpha\beta}(g)$ – сечение столкновений с передачей импульса между частицами типа a и b, имеющими относительную тепловую скорость g. Для основных компонентов верхней атмосферы Земли средние сечения столкновений $< Q_{\alpha\beta} >$ приведены в работах (*Бэнкс, 1966; Бэнкс, Холзер, 1969*).

Полное уравнение движения для нейтральной составляющей атмосферы. Рассматривая верхнюю атмосферу как частично ионизованную многокомпонентную смесь газов, можно при использовании соотношений Стефана–Максвелла (2.3.69) получить уравнение движения только для нейтральной атмосферной составляющей. В случае, когда гидродинамическая скорость системы V_j приближенно совпадает со скоростью нейтрального газа V_{nj}, компоненты которого не диффундируют друг относительно друга ($w_{\alpha_j} = 0$), суммирование соотношений (2.3.84) по индексу a, относящемуся только к нейтральным компонентам смеси, приводит к следующему полному уравнению движения нейтральной верхней атмосферы (*Колесниченко, 1979*):

$$\rho_n\left[\frac{dV_{nj}}{dt}+2\varepsilon_{kji}V_{nk}\Omega_i\right]=-p_n{}_{,j}+\frac{\rho_n}{\rho}\pi_{ij}{}_{,i}+\sum_{\alpha}^{(n)}\sum_{\beta}^{(i)}n_\alpha M_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}^{-1}\left(V_{\beta j}-V_{nj}\right)-$$

$$-p\sum_{\alpha}^{(n)}K_{T\alpha}\frac{T_{,j}}{T}+\rho_n g_j. \qquad (2.3.94)$$

Здесь $\rho_n=\sum_{\alpha}^{(n)}\rho_\alpha$ – массовая плотность нейтральных частиц системы; $p_n=\sum_{\alpha}^{(n)}p_\alpha$ – давление нейтрального газа; верхние индексы (n) и (i) у сумм означают суммирование по нейтральным либо заряженным компонентам смеси соответственно. Третий член вправой части уравнения (2.3.94) описывает ионное торможение; этот член появляется при взаимодействии нейтральной атмосферы с ионосферой.

Наконец рассмотрим еще одну форму записи обобщенных соотношений Стефана–Максвелла, полезную для аэрономических приложений. При использовании уравнения состояния $p_\alpha=\mathrm{k}Tn_\alpha$ а-й компоненты и уравнения движения полного континуума (2.1.59), в котором здесь положим $\Omega_j=0$, соотношения (2.3.69) легко могут быть преобразованы к виду

$$n_{\alpha,j}=-\frac{n_\alpha}{H_\alpha}k_{zj}-\left(1+\frac{K_{T\alpha}}{x_\alpha}\right)\frac{n_\alpha}{T}T_{,j}+\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\frac{n_\alpha n_\beta(V_{\beta j}-V_{\alpha j})}{n\mathcal{D}_{\alpha\beta}}+\frac{n_\alpha M_\alpha}{\mathrm{k}T}\Psi_j, \qquad (2.3.95)$$

где $g_j=-gk_{zj}$, k_{zj} – единичный вектор в вертикальном направлении; $H_\alpha=\mathrm{k}T/M_\alpha g$ – локальная шкала высот для частиц сорта а; $\rho\Psi_j=-\rho\,dV_j/dt+\pi_{ij,i}$.

В верхних атмосферах планет обычно справедливо условие $\Psi_j k_{zj}\approx 0$ (*Акасофу, Чепмен, 1974; Ришбет, Гарриот, 1975*), т.е. в вертикальном направлении выполняется уравнение гидростатического равновесия $\partial p/\partial z=-\rho g$. В этом случае диффузионные соотношения (2.3.95) в направлении вектора k_{zj} принимают относительно простую форму

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial z}=-\frac{n_\alpha}{H_\alpha}-\left(1+\frac{K_{T\alpha}}{x_\alpha}\right)\frac{n_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial z}+\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\frac{n_\alpha n_\beta(V_{\beta z}-V_{\alpha z})}{n\mathcal{D}_{\alpha\beta}},\quad(\alpha=1,2,\ldots,N), \qquad (2.3.96)$$

которая была использована во многих ранних работах при определении высотного хода химических компонент в термосфере (см., например, (*Акасофу, Чепмен*, 1974; *Бауэр, 1976*)).

***Краткие выводы**:*

1) Методами механики сплошной среды построена гидродинамическая модель регулярного движения идельной многокомпонентной смеси (с учетом хими-

ческих реакций, процессов тепло и массопереноса и полей внешних консервативных сил), в рамках которой возможны постановки и численные решения практических задач аэрономии. Проанализированы различные балансовые уравнения, связанные с законами сохранения вещества, энергии и количества движения, с целью выявления наиболее удобных для теоретического анализа динамических и разнообразных физико-химических процессов и явлений в верхней атмосфере. Рассмотрен феноменологический подход (основанный на методах неравновесной термодинамики) к выводу определяющих соотношений для термодинамических потоков диффузии и тепла, а также к получению удобных алгебраических формул, связывающих между собой различные коэффициенты молекулярного переноса.

2) В аэрономических исследованиях при моделировании процессов тепло- и массопереноса удобно иметь подобные определяющие соотношения в виде соотношений Стефана–Максвелла, в которые, вместо многокомпонентных коэффициентов диффузии (для которых кинетическая теория разреженных газов дает чрезвычайно громоздкие расчетные формулы), входят коэффициенты диффузии в бинарных смесях газов. Эти соотношения и соответствующее им выражение для полного потока тепла в многокомпонентной смеси получены в монографии методами термодинамики необратимых процессов с использованием принципа взаимности Онзагера–Казимира. Феноменологический вывод обобщенных соотношений Стефана–Максвелла обосновывает законность их использования с полуэмпирическими выражениями для бинарных коэффициентов диффузии (и коэффициентов термодиффузии), что важно с точки зрения практических приложений.

3) Вывод обобщенных соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии позволяет также получить: очень важные алгебраические уравнения для расчета многокомпонентных коэффициентов диффузии через бинарные коэффициенты диффузии; формулы, связывающие термодиффузионные отношения с коэффициентами термодиффузии и многокомпонентной диффузии смеси; формулы, связывающие истинный и парциальный коэффициенты теплопроводности. Все найденные (феноменологически) формулы по структуре полностью тождественны выражениям, полученным в рамках первого приближения метода Чепмена–Энскога в кинетической теории многокомпонентных смесей одноатомных газов (сопоставление проведено с результатами, представленными в уникальной книге Ферцигера и Капера). Однако, в отличие от газокинетического подхода (до конца разработанного только для газов умеренной плотности, когда известен потенциал взаимодействия между частицами газа), феноменологический подход не связан с постулированием конкретной микроскопической модели среды и потому полученные здесь результаты носят универсальный характер, т.е. пригодны для описания широкого класса сред, например, многоатомных газовых смесей (что важно для аэрономических приложений), плотных газов, жидких растворов и т.п.

ГЛАВА 3

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Растущий в последнее время интерес к исследованиям развитых турбулентных течений сжимаемых газов (*Таунсенд, 1959; Ван Мигем, 1977; Иевлев, 1975, 1990; Лущик и др., 1978, 1986; Компаниец, 1979; Бруяцкий, 1986; Маров, Колесниченко, 1987; Турбулентность: Принципы и применения, 1980; Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*), был вызван необходимостью решения многочисленных задач ракетной и космической техники (*Авдуевский, 1962; Авдуевский, Медведев, 1968; Дональдсон,1972; Желазны и др., 1973; Меллор, Херринг, 1973; Маслов, Петровская, 1975; Петухов и др., 1984*), химической технологии (*Вильямс, 1971; Куманцев и др., 1974; Полак и др., 1975; Компаниец и др., 1977*), а также задач, связанных с охраной окружающей среды (*Гибсон, Лаундер, 1976; Израэль, 1979; Ламли, Пановский, 1966; Марчук, 1982; Метеорология и атомная энергия, 1959, 1971; Космическое землеведение, 1998*). Параллельно с этим совершенствовались методы теоретического моделирования природных сред, включая ранее недоступные области околоземного космического пространства и атмосфер других планет Солнечной системы. В частности, стало очевидным, что моделирование верхней атмосферы планеты требует разработки адекватной модели турбулентности, учитывающей многокомпонентность и сжимаемость среды, процессы тепло- и массопереноса и аэрономические реакции (*Маров, Колесниченко, 1971, 1981, 1983, 1987 ; Колесниченко, Маров, 1980, 1984, 1994*).

Мы начнем с вывода осредненных дифференциальных уравнений баланса вещества, количества движения и энергии (опорный базис модели), предназначенных для описания развитых турбулентных течений многокомпонентной смеси химически активных газов, и проанализируем физический смысл отдельных членов этих уравнений (§ 3.1). Особое внимание будет уделено выводу (традиционным способом, основанном на понятии пути смешения) замыкающих реологических соотношений для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений Рейнольдса (§ 3.3). Прогресс в развитии и применении полуэмпирических моделей турбулентности первого порядка замыкания (так называемых *градиентных моделей*) для однородной сжимаемой жидкости (см., например, (*Таунсенд, 1959; Бруяцкий, 1986; Ван Мигем, 1977*)) позволил получить обобщения некоторых из подобных моделей на важный для целей геофизики и аэрономии случай свободных стратифицированных течений многокомпонентной реагирующей смеси с поперечным сдвигом скорости (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Для химически активной среды проблема замыкания в общем случае усложняется из-за необходимости осреднения сильно нелинейных источниковых членов производства вещества в химических реакциях, имеющих экспоненциальный характер, и моделирования большого числа дополнительных одноточечных моментов второго порядка для пульсирующих в потоке температуры и концентраций химических компонентов смеси. Другими словами, необходимо учи-

тывать взаимовлияние турбулентности и кинетики химических реакций. В § 3.2 предложена процедура осреднения скоростей химических реакций любого порядка и намечена схема полуэмпирического моделирования этих дополнительных корреляций.

§ 3.1. Модельное описание среднего движения турбулентной многокомпонентной смеси с переменной плотностью

Одной из основных задач теоретической геофизики и аэрономии является численный расчет пространственных распределений и временных вариаций скорости, плотности, температуры и концентраций химических компонентов, а также некоторых других термогидродинамических параметров газовой смеси в турбулизованной атмосфере планеты при больших числах Рейнольдса $\boldsymbol{Re} = UL / \nu$ (где U – характерная скорость течения в атмосфере, L – масштаб основных энергонесущих вихрей). Система уравнений многокомпонентной гидродинамики (2.1.57)–(2.1.61), описывающая при определенных начальных и граничных условиях все детали истинного (мгновенного, неустановившегося) состояния полей указанных величин в атмосфере и их вариации, практически не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Это обусловлено тем, что применение численных методов влечет за собой аппроксимацию колоссального пространственно-временного поля течения конечным числом узлов сетки, которое нужно использовать, чтобы решить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать гидродинамические уравнения только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные структурные параметры *стохастической* (турбулизованной) атмосферы, а малые масштабы моделировать феноменологически. Стохастичность в данном случае означает существование ансамбля возможных реализаций поля течения, для которого определено понятие *статистически среднего* (математически ожидаемого) для всех пульсирующих термогидродинамических характеристик. Осреднение какого-либо параметра течения может быть проведено также по множеству реализаций в различные моменты времени в данной точки пространства, или по множеству значений в различных пространственных точках некоторого объема Δw в фиксированный момент времени. Как уже упоминалось в Гл.1, для устранения очевидной непоследовательности в осредненных гидродинамических уравнениях (когда параметры течения определены как осредненные по времени, хотя они представлены в этих уравнениях временными производными), промежутки времени Δt, за которые производится подобное осреднение, должны быть достаточно большими по сравнению со временем отдельных пульсаций, но, вместе с тем, малыми по сравнению со временем заметного изменения средних величин, если осредненное движение нестационарно. Соответственно, объем Δw должен удовлетворять условиям, аналогичным условиям на промежуток времени Δt. В частности, в атмосферной динамике принято различать средние зональные движения (их горизонтальный размер порядка 10^4 км) и отклонения относительно этих средних движений (называемые *пульсациями, флуктуациями, вихрями*). Эти пульсации могут иметь различный пространственный масштаб, от нескольких метров до тысяч километ-

ров. Таким образом, под словом "*турбулентный*" в аэрономии часто понимается просто отклонение от среднего, независимо от его масштабов (*Брасье, Соломон, 1987*).

Таким образом, разделение реального стохастического движения на медленно изменяющееся среднее и быстро колеблющееся турбулентное (нерегулярное, случайное, пульсирующее около средних значений) полностью зависит от выбора пространственно-временной области, для которой определены средние величины. Размер этой области фиксирует масштаб среднего движения. Все вихри большего размера вносят вклад в осредненное движение, определенное средними значениями параметров ρ, V_j, T, Z_α $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$. Все вихри меньшего размера, отфильтровыванные в процессе осреднения, вносят вклад в турбулентное движение, определенное соответствующими пульсациями тех же самых структурных параметров. Для получения *репрезентативных* средних значений и соответствующих им пульсаций физических величин необходимо, чтобы пространственно-временная область осреднения включала очень большое число вихрей, размер которых меньше области осреднения, и очень малую часть вихрей, размер которых превышает область осредения (*Ван Мигем, 1977*).

3.1.1. Выбор оператора осреднения. В теориях турбулентности жидкости и газа применяются различные способы осреднения физических величин $A(\boldsymbol{r},t)$, например, временное осреднение

$$\overline{A} = (1/\Delta t)\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} A(t)\,dt, \qquad (3.1.1)$$

когда интервал осреднения Δt предполагается достаточно большим по сравнению с характерным временным периодом пульсационного поля и существенно малым по сравнению с периодом изменения осредненного поля; пространственное осреднение, посредством интегрирования по пространственному объему; стохастическое осредение по ансамблю возможных реализаций. Последний подход, использующий понятие ансамбля, то есть бесконечной совокупности гидродинамических систем одинаковой природы, отличающихся друг от друга состоянием поля скоростей и/или других параметров движения в данный момент времени, является наиболее фундаментальным. Согласно известной гипотезе об *эргодичности* (*Монин, Яглом, 1965*), для стационарного случайного процесса средние по времени и ансамблю идентичны. Не обсуждая подробнее преимущества и недостатки различных способов осреднения, отметим лишь, что практика построения феноменологических моделей для изучения турбулентных движений показывает, что способы введения осредненных характеристик движения, вообще говоря, несущественны для составления полной системы осредненных гидродинамических уравнений, если потребовать в процессе любого осреднения выполнения постулатов Рейнольдса (*Седов, 1973, 1980*):

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{aA} = a\overline{A}, \qquad \overline{\overline{A}\,B} = \overline{A}\;\overline{B}. \qquad (^1) \qquad (3.1.2)$$

Здесь $A(\boldsymbol{r},t)$ и $B(\boldsymbol{r},t)$ – некоторые пульсирующие характеристики турбулентного поля; $\overline{A}(\boldsymbol{r},t)$ и $\overline{B}(\boldsymbol{r},t)$ – их средние значения, a – константа. Далее будем

предполагать, что любой используемый оператор осреднения в (3.1.2 ([1])) коммутирует с операторами дифференцирования и интегрирования как в пространстве, так и во времени

$$\overline{\partial A(\boldsymbol{r},t)/\partial t} = \partial\overline{A(\boldsymbol{r},t)}/\partial t\ , \qquad \overline{\int A(\boldsymbol{r},t)dt} = \int\overline{A(\boldsymbol{r},t)}\,dt\ , \quad ([2])$$

$$\overline{\partial A(\boldsymbol{r},t)/\partial x_j} = \partial\overline{A(\boldsymbol{r},t)}/\partial x_j\ , \quad \overline{\int A(\boldsymbol{r},t)dx_j} = \int\overline{A(\boldsymbol{r},t)}\,dx_j\ . \ ([3]) \tag{3.1.2}$$

Заметим, что при временном (пространственном) осреднении некоторые из соотношений (3.1.2) выполняются только приближенно, хотя они будут тем точнее, чем меньше средние значения $\overline{A}(\boldsymbol{r},t)$ изменяются во времени (и/или пространстве) в рассматриваемой области интегрирования.

В классических теориях турбулентности однородных несжимаемых жидкостей, разработанных к настоящему времени достаточно полно (см., например, (*Таунсенд, 1959; Иевлев, 1990; Монин, Яглом, 1965; Турбулентность: Принципы и применения, 1980*)), осреднения для всех без исключения термогидродинамических параметров обычно вводятся некоторым одинаковым способом и, как правило, без весовых коэффициентов. При осреднении по времени (3.1.2) или при осреднении по ансамблю возможных реализаций

$$\overline{A} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\mathrm{p}=1}^{N} A^{(\mathrm{p})} \tag{3.1.3}$$

(где суммирование ведется по набору реализаций, а соответствующее среднее поле $\overline{A}$ определяется как ожидаемое значение A для ансамбля одинаковых систем) мгновенное значение параметра A представляется в виде суммы осредненной $\overline{A}$ и пульсационной A' составляющих:

$$A = \overline{A} + A'\ , \qquad (\overline{A'} = 0)\ . \tag{3.1.4}$$

Вместе с тем, подобное осреднение (одинаковое для всех переменных состояния) в случае многокомпонентного континуума с изменяющейся плотностью ρ , приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям среднего движения, что связано с необходимостью удержания в структуре уравнений корреляторов типа $\overline{\rho V_j'}$, $\overline{\rho' V_i' V_j'}$, $\overline{\rho Z_\alpha'}$ и т. п., но и к затруднениям физической интерпретации каждого отдельного члена осредненных уравнений. Поэтому далее при разработке моделей турбулентности химически активной газовой среды будем использовать, наряду с "обычным" средним значением некоторой пульсирующей величины $A(\boldsymbol{r},t)$, так называемое *средневзвешенное* значение этой величины (среднее по Фавру (*Фавр, 1969*)), задаваемое, например, соотношением

$$< A >= \overline{\rho A}/\overline{\rho} = \left[\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}\rho^{(p)}A^{(p)}\right] \Big/ \left[\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N}\rho^{(p)}\right]. \tag{3.1.5}$$

В качестве “обычных” средних в аэрономии могут быть использованы средние по времени, или зональные, меридиональные и горизонтальные средние значения (*Брасье, Соломон, 1987*); при этом:

$$A = < A > + A'', \quad (\overline{A''} \neq 0); \tag{3.1.6}$$

A'' – соответствующая турбулентная пульсация. Таким образом, для обозначения средних величин далее будут использованы два символа: черта сверху означает осреднение по ансамблю (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение. Двойной штрих используется далее для обозначения пульсаций относительно величины, осредненной по Фавру.

Если $\rho \cong \bar{\rho} - const$ (например, в жидкости со свойствами Буссинеска (*Буссинеск, 1977*), то обе процедуры осреднения совпадают. В то же время, использование осреднения (3.1.5) для ряда пульсирующих термогидродинамических параметров в случае сжимаемого многокомпонентного газового континуума в значительной степени упрощает запись и анализ осредненных гидродинамических уравнений (*Ван Мигем, 1977; Маров, Колесниченко, 1987*). Кроме того, оно удобно по той причине, что экспериментальные исследования турбулентных течений, проводимые традиционными методами, приводят, по-видимому, к измерению как раз именно этих средних значений (подробнее см., например, (*Компаниец и др., 1979*)). Отметим, что на возможность использования средневзвешенных параметров потока при моделировании турбулентного движения однородной жидкости с переменной плотностью указывалось и ранее (*Ван Драйст, 1952*); позднее подобный подход к описанию многокомпонентных химически активных сплошных сред на основе неравновесной термодинамики был реализован в работе (*Колесниченко, 1980*) .

Средневзвешенные значения. Приведем здесь некоторые, в дальнейшем широко употребляемые, свойства средневзвешенных характеристик физических величин, которые легко выводятся из определения (3.1.5) и соотношений Рейнольдса (3.1.2) (см., например, (*Колесниченко, Маров, 1979*)

$$\overline{\rho A''} = 0, \quad \overline{A''} = -\overline{\rho' A''}/\bar{\rho}, \quad \overline{\rho AB} = \bar{\rho} < A >< B > + \overline{\rho A'' B''},$$

$$\overline{< A >_{,j}} = < A >_{,j}, \quad (AB)'' = < A > B'' + < B > A'' + A''B'' - \overline{\rho A'' B''}/\bar{\rho},$$

$$\overline{\rho A B_{,j}} = \bar{\rho} < A >< B >_{,j} + \overline{\rho A B''_{,j}},$$

$$\overline{\rho dA/dt} = \bar{\rho} D < A > / Dt + \overline{(\rho A'' V_j'')}_{,j}, \tag{3.1.7}$$

где

$$D < A > / Dt = < V_j >< A >_{,j} + < A >_{,t}$$

– субстанциональная производная для осредненного движения.

Осредненное уравнение неразрывности. Осредненная плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость $< V_j >= \overline{\rho V_j} / \bar{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\bar{\rho}_{,t}+\left(\bar{\rho}<V_j>\right)_{,j}=0\ . \qquad (3.1.8)$$

Это уравнение может быть получено путем применения, например, оператора осреднения (3.1.1) к уравнению неразрывности (2.1.4) для истинных значений плотности и гидродинамической скорости при условии, что осреднение распространяется на интервал Δt, который велик по сравнению с интервалом быстрого турбулентного изменения пульсации A', но мал по сравнению с характерным временем изменения осредненной гидродинамической величины $\bar{A}(\boldsymbol{r},t)$. Так как турбулентный поток массы $\overline{\rho V_j''}=0 \quad (\overline{V_j''}\neq 0)$, то в среднем (при осреднении по Фавру) переноса масс за счет турбулентности не происходит. Заметим, что при известных трудностях моделирования корреляций $\overline{\rho' V_j'}$, появляющихся при осреднении (2.1.4) без веса, сохранение стандартной формы уравнения неразрывности (с формальной заменой истинных значений плотности и скорости на средние) является сильным аргументом в пользу использования средневзвешенного осреднения $<V_j>$ для гидродинамической скорости течения (*Ван Мигем, 1977*).

Отметим, что *осреднение по Рейнольдсу* гидродинамических уравнений смеси может быть проведено и каким-либо другим не упомянутым выше способом; далее при построении моделей осредненного турбулентного многокомпонентного континуума в качестве оператора осреднения будем использовать оператор стохастического осреднения (3.1.3), если иной способ специально не оговаривается.

Осредненное операторное уравнение. Осреднение операторного соотношения (2.1.3), при использовании свойств (3.1.7) осредения по Фавру и осредненного уравнения неразрывности (3.1.8), приводит к следующему тождеству

$$\overline{\rho\, dA/dt}=\left(\overline{\rho A}\right)_{,t}+\left(\overline{\rho A V_j}\right)_{,j}=\left(\bar{\rho}<A>\right)_{,t}+\left(\bar{\rho}<A><V_j>\right)_{,j}+\left(\overline{\rho A'' V_j''}\right)_{,j}=$$

$$=\bar{\rho}<A>_{,t}+\bar{\rho}<V_j><A>_{,j}+\left(\overline{\rho A'' V_j''}\right)_{,j}\ . \qquad (3.1.9)$$

Определим формулой

$$J^T_{(A)j}\equiv\overline{\rho A'' V_j''}=\bar{\rho}<A'' V_j''> \qquad (3.1.10)$$

плотность турбулентного потока характеристики $A(\boldsymbol{r},t)$ – одноточечный второй момент (парная корреляция, коррелятор), представляющий перенос признака A турбулентными пульсациями скорости, и введем обозначение

$$D(..)/Dt\equiv(..)_{,t}+<V_j>(..)_{,j} \qquad (3.1.11)$$

для субстанциональной производной по времени для осредненного движения. Тогда тождество (3.1.9) перепишется следующим образом

$$\overline{\rho\, dA/dt}=\bar{\rho}D<A>/Dt+J^T_{(A)j},_j\ . \qquad (3.1.12)$$

Кроме того, в силу (3.1.8), справедливо операторное соотношение

$$\bar{\rho} DA / Dt = \left(\bar{\rho} A\right)_{,t} + \left(\bar{\rho} A < V_j >\right)_{,j}, \qquad (3.1.13)$$

дающее связь между субстанциональным и локальным изменением величины $A(\boldsymbol{r},t)$ в осредненном потоке. Следует подчеркнуть, что в (3.1.13) параметр $A(\boldsymbol{r},t)$ может быть, с одной стороны, мгновенным значением некоторой удельной полевой характеристики потока (скаляром, составляющей вектора или тензора и т.д.), а с другой стороны, может являться как ее осредненной $< A >$, так и пульсационной составляющей (A' или A'').

3.1.2. Осредненные законы сохранения для турбулизованной смеси. Будем рассматривать турбулизованную многокомпонентную газовую смесь, как континуальную среду, элементарные (мгновенные, истинные) состояния движения которой могут быть описаны системой уравнений гидродинамики (2.1.57)–(2.1.61) при случайной выборке начальных и граничных условий. Это возможно для пространственно-временных масштабов, заключенных между масштабами молекулярных движений и минимальными масштабами турбулентности (линейные размеры и время существования наименьших из вихрей), которые, как правило, на несколько порядков (по крайней мере на три порядка) превосходят масштабы молекулярных движений, т.е. расстояние между молекулами, а тем более – размеры молекул (*Ван Мигем, 1977*). Исключение составляют случаи сильно разреженных газов, которые здесь не рассматриваются. Поэтому далее для получения осредненых по Рейнольдсу балансовых уравнений и законов сохранения будем использовать результаты Гл.2.

Осредненое уравнение баланса общего вида. Используя тождество (3.1.9) при осреднении по ансамблю одинаковых систем уравнения (2.1.1), получим дифференциальную форму субстанционального баланса какого-либо структурного параметра $A(\boldsymbol{r},t)$ для осредненного континуума

$$\bar{\rho} D < A > / D t = J^{\Sigma}_{(A)j},_{j} + \overline{\sigma_{(A)}}, \qquad (3.1.14)$$

где

$$J^{\Sigma}_{(A)j} \equiv \overline{J_{(A)j}} + J^{T}_{(A)j} \qquad (3.1.15)$$

– субстанциональная плотность суммарного потока, включающего осредненный регулярный и турбулентный потоки, характеристики $A(\boldsymbol{r},t)$, $\overline{\sigma_{(A)}}$ – осредненная объемная плотность источника признака A. Заметим, что с определением потоков (3.1.15) связана главная проблема феноменологической теории турбулентности – проблема замыкания (см. Гл. 4 и 5).

Если преобразовать левую часть уравнения (3.1.14) с помощью соотношения (3.1.10), то получим локальную форму дифференциального уравнения баланса для осредненной по Фавру полевой величины $A(\boldsymbol{r},t)$:

$$\left(\bar{\rho} < A >\right)_{,t} + \left[\bar{\rho} < A >< V_j > + J^{\Sigma}_{(A)j}\right]_{,j} = \overline{\sigma_{(A)}} \quad . \qquad (3.1.17)$$

Здесь

$$J^{\Sigma 0}_{(A)J} \equiv \bar{\rho} < A >< V_J > + J^{\Sigma}_{(A)J} = \bar{\rho} < A >< V_J > + \overline{J_{(A)J}} + J^{T}_{(A)J}$$

– локальная плотность суммарного потока характеристики $< A >$ в осредненом турбулизованном континууме, включающая конвективный член $\bar{\rho} < A >< V_J >$. Плотность потока $J^{\Sigma 0}_{(A)j}$ есть количество величины $< A >$, проходящее через единицу площади поверхности в единицу времени, причем положение площади поверхности фиксировано во внешней системе координат и локальная плотность потока $J^{\Sigma 0}_{(A)J}$ направлена нормально к ней.

Переходя к выводу макроуравнений турбулéнтного движения многокомпонентной смеси, будем осреднять по ансамблю одинаковых систем справедливые в микромасштабе гидродинамические уравнения сохранения (удельного объема (2.1.6), удельных концентраций (2.1.7), количества движения (2.1.19) и энергии (2.1.43)) и уравнение состояния для давления смеси (2.1.53), вводя при этом естественным образом, как средневзвешенные значения соответствующих микрохарактеристик, физические параметры осредненого турбулизованного континуума, такие как $< Z_\alpha >, < V_j >, \quad < h >$ и т.п. Давление p, плотность ρ и все молекулярные термодинамические потоки $q_j, J_{\alpha J}, \pi_{ij}, \xi_s$ будем осреднять, однако, без использования весовых коэффициентов.

Уравнение для удельного объема турбулизованной среды. Примем в (3.1.14) $A \equiv \nu$, и используем выражения (2.1.5) для величин $J_{(\nu)J}$ и $\sigma_{(\nu)}$. Тогда получим

$$\bar{\rho} D < \nu > / Dt = -J^{\Sigma}_{(\nu)J},_j \quad , \tag{3.1.18}$$

где $< \nu >= 1/\bar{\rho}$ – осредненный удельный объем среды;

$$J^{\Sigma}_{(\nu)J} \equiv \overline{J_{(\nu)J}} + J^{T}_{(\nu)J} \tag{3.1.19}$$

– субстанциональная суммарная плотность потока удельного объема в турбулизованном континууме; при этом осредненный регулярный и турбулентный потоки величины ν определяются соответственно соотношениями

$$J_{(\nu)j} \equiv -\bar{\rho}\overline{\nu V_j} = -\overline{V_j} = - < V_j > - \overline{V_j''}, \tag{3.1.20}$$

$$J^{T}_{(\nu)j} \equiv \bar{\rho} < \nu'' V_j'' > = \overline{\rho \nu V_j''} = \overline{V_j''} = -\overline{\rho' V_j''}/\bar{\rho}. \tag{3.1.21}$$

Поэтому для полного потока удельного объема $J^{\Sigma}_{(\nu)J}$ будем иметь:

$$J^{\Sigma}_{(\nu)j} = -\overline{V_j} + \overline{V_j''} = - < V_j > - \overline{V_j''} + \overline{V_j''} = - < V_j >. \tag{3.1.19*}$$

Итак, уравнение баланса осредненного удельного объема в субстанциональной форме принимает вид

$$\bar{\rho} D < v > / Dt = < V_j >_{,j} . \qquad (3.1.22)$$

Приведем здесь широко используемое далее соотношение

$$v'' = -\rho' / \bar{\rho}\rho, \quad \text{или} \quad \rho v'' = -\rho' / \bar{\rho} , \qquad (3.1.23)$$

связывающее пульсации плотности ρ' и удельного объема v''. Это соотношение следует непосредственно из определения величины v'':

$$v'' = v - < v >= 1/\rho - 1/\bar{\rho} = (\rho - \bar{\rho})/\rho\bar{\rho} = -\rho'/\rho\bar{\rho}.$$

Уравнения диффузии для химических компонентов в турбулизованной смеси. Применение оператора осреднения (3.1.3) к диффузионному уравнению (2.1.7) приводит, при учете тождества (3.1.9), к следующему балансовому уравнению для осредненной величины $< Z_\alpha >$:

$$\bar{\rho} D < Z_\alpha > / Dt = -J^{\Sigma}_{\alpha j},_j + \overline{\sigma_\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \qquad (3.1.24)$$

где

$$J^{\Sigma}_{\alpha j} \equiv \overline{J_{\alpha j}} + J^{T}_{\alpha j} \qquad (3.1.25)$$

– полный диффузионный поток компоненты α в осредненной турбулизованной среде;

$$J^{T}_{\alpha j} \equiv \overline{\rho Z''_\alpha V''_j} = \bar{\rho} < Z''_\alpha V''_j > \qquad (3.1.26)$$

– поток турбулентной диффузии для вещества сорта α.

Влияние химических реакций, протекающих в системе, на пространственно-временное распределение удельной концентрации $< Z_\alpha >$ частиц сорта α учитывается с помощью осредненного источника σ_α:

$$\overline{\sigma_\alpha} = \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s}. \qquad (3.1.27)$$

Способ осреднения источникового члена $\overline{\sigma_\alpha}$ производства вещества в химических реакциях будет подробно рассмотрен в разд. 3.2.3.

Заметим, что, используя свойства средневзвешенного осредения (3.1.7), легко получить другую (традиционную) форму записи для потока турбулентной диффузии: $J^{T}_{\alpha j} = \overline{n'_\alpha V'_j} - \left(\overline{n_\alpha} / \bar{\rho}\right)\overline{\rho' V'_j}$. Громоздкость этого выражения по сравнению с (3.2.13) лишний раз свидетельствует об эффективности использования весового осреднения в многокомпонентной среде с переменной плотностью.

Применив оператор осреднения (3.1.3) к равенствам (2.1.8) и (2.1.9), получим их эквивалент для осредненного движения

$$\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta < Z_\beta >= 1 \quad (^1); \quad \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta \overline{J_{\beta j}} = 0 \quad (^2); \quad \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta \overline{\sigma_\beta} = 0 \quad (^3). \qquad (3.1.28)$$

Кроме этого, для турбулентных потоков диффузиии $J^T_{\beta j}$ справедливо тождество $\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta J^T_{\beta j} = \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta \overline{\rho Z_\beta V_j''} = \overline{\rho\left(\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta Z_\beta\right) V_j''} = \overline{\rho V_j''} = 0$, т.е.

$$\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta J^T_{\beta_J} = 0, \quad (^1); \quad \text{и, следовательно,} \quad \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta J^{\Sigma}_{\beta j} = 0, \quad (^2). \tag{3.1.29}$$

Таким образом, осредненные диффузионные уравнения (3.1.24), подобно их неосредненным аналогам (2.1.7), являются линейно зависимыми и одно из них должно быть заменено алгебраическим интегралом (3.1.29(^{2})).

Осредненные уравнения сохранения химических элементов. Дифференциальную форму законов сохранения для отдельных химических элементов в осредненом турбулизованном многокомпонентном континууме найдем, исходя из (3.1.14) и полагая $A \equiv Z^\gamma$ $(\gamma = N_m + 1,...,N)$. Используя формулы (2.1.18) для величин J^γ_j и $\sigma^\gamma_{(Z)}$, получим:

$$\overline{\rho} D < Z^\gamma > / Dt = -J^{\gamma\Sigma}_{j,j} \quad , \quad (\gamma = N_m + 1,...,N), \tag{3.1.30}$$

где

$$< Z^\gamma > = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta^\gamma_\alpha < Z_\alpha >, \quad (^1); \quad J^{\gamma\Sigma}_j \equiv \bar{J}^\gamma_j + J^{\gamma T}_j, \quad (\gamma = N_m + 1,...,N) \quad (^2). \tag{3.1.31}$$

Осредненная плотность регулярного потока диффузии элемента сорта γ удовлетворяет при этом соотношению

$$\bar{J}^\gamma_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta^\gamma_\alpha \bar{J}_{\alpha j} = \bar{J}_{\gamma J} + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta^\gamma_\alpha \bar{J}_{\alpha J}, \quad (\gamma = N_m + 1,...,N), \tag{3.1.32}$$

являющемуся осреднением (2.1.14). Для плотности турбулентного диффузионного потока химического элемента γ справедливо аналогичное соотношение

$$J^{\gamma T}_j \equiv \overline{\rho Z^\gamma V_j''} = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta^\gamma_\alpha \overline{\rho Z_\alpha V_j''} = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta^\gamma_\alpha J^T_{\alpha j} = J^T_{\gamma j} + \sum_{\alpha=1}^{N_m} \eta^\gamma_\alpha J^T_{\alpha j}. \tag{3.1.33}$$

Кроме того, так же как и для молекулярной диффузии, справедливы тождества

$$\sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma < Z^\gamma > = 1, \quad (^1); \quad \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma \bar{J}^\gamma_j = 0, \quad (^2); \quad \sum_{\gamma=N_m+1}^{N} M_\gamma J^{\gamma T}_j = 0, (^3), \tag{3.1.34}$$

причем первые два являются осредненными равенствами (2.1.16), а третье является результатом определения турбулентного диффузионного потока $J^{\gamma T}_j$ элемента сорта γ (3.1.33) и соотношения (2.1.17), определяющего массу молекулы через массы отдельных химических элементов.

Уравнение движения для турбулизованной смеси. Положим в уравнении (3.1.14) $A \equiv V_j$ и используем выражения (2.1.22) для потока $J_{(V_i)j}$ и источника $\sigma_{(V_i)}$ количества движения, в которых пульсациями величин Ω_j и $F_{\alpha j}$ в турбулизованном потоке будем пренебрегать. Тогда получим

$$\bar{\rho}\frac{D<V_i>}{Dt} = -\bar{p}_{,i} + \pi^{\Sigma}_{ij,j} + 2\bar{\rho}\varepsilon_{kij}<V_k>\Omega_j + \bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>F_{\alpha j} \qquad (3.1.35)$$

– уравнение движения для осредненного турбулизованного многокомпонентного континуума. Здесь

$$\pi^{\Sigma}_{ij} \equiv -J^{\Sigma}_{(V_i)j} = -\overline{J_{(V_i)j}} - J^{T}_{(V_i)j} = \overline{\pi_{ij}} + R_{ij} \qquad (3.1.36)$$

–полный (суммарный) тензор напряжений в турбулентном потоке;

$$R_{ij} \equiv -J^{T}_{(V_i)j} = -\overline{\rho V_i'' V_j''} = -\bar{\rho}<V_i'' V_j''> \qquad (3.1.37)$$

– тензор, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений и называемый поэтому напряжениями Рейнольдса. Этот симметричный тензор второго ранга описывает средний перенос количества движения за счет пульсаций турбулентной скорости. Если в потоке преобладают турбулентные движения, то осредненными вязкими напряжениями $\overline{\pi_{ij}}$ можно, как правило, пренебречь по сравнению с напряжениями Рейнольдса R_{ij} (если, конечно, не рассматривается область вязкого подслоя, граничащая с твердой стенкой). Составляющие тензора турбулентных напряжений R_{ij} являются неизвестными величинами; с указанием способа определения этих величин связано построение модели турбулентности.

При использовании формул (2.1.25) для потока $J_{(V_i)j}$ и источника $\sigma_{(V_i)}$, получается другая форма записи осредненного уравнения движения

$$\bar{\rho}\frac{D<V_i>}{Dt} = -p^{d}{}_{,j} + \pi^{\Sigma}_{ij,j} - \delta_{i3} g\overline{\Delta\rho} + 2\bar{\rho}\varepsilon_{kij}<V_k>\Omega_j + \bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>F^{*}_{\alpha i}\,. \qquad (3.1.38)$$

Такая форма записи уравнения движения, использующая динамическое давление p^d, удобна для геофизических приложений.

Для течений в свободной стратифицированной атмосфере, когда важны силы Архимеда (третье слагаемое в правой части (3.1.38)), все члены уравнения (3.1.38), как правило, имеют порядок $g\overline{\Delta\rho}$ или меньший. Так как градиент полного давления выражается суммой градиентов динамического и гидростатического давлений, то, в силу (2.1.24), будем иметь следующее приближенное равенство

$$\bar{p}_{,j} = \bar{p}^{d}{}_{,j} + p_{0,j} \approx -\delta_{j3} g\overline{\Delta\rho} - \delta_{j3}\rho_0 g = -\delta_{j3}\rho_0 g(1 + \overline{\Delta\rho}/\rho_0)\,.$$

Следовательно, в тех случаях когда справедлива оценка $\overline{\Delta\rho}/\rho_0 << 1$, градиент полного давления может быть представлен приближенным выражением:

$$\bar{p}_{,j} \approx -\delta_{j3}\rho_0 g\ , \tag{3.1.39}$$

которое будет использоваться в Гл.4.

В осредненном турбулизованном течении, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое разнообразие всевозможных механизмов обмена (*скоростей перехода*) между различными видами энергий движения частиц, вносящих свой вклад в суммарную сохраняющуюся энергию материального континуума. Для наиболее полного истолкования отдельных слагаемых энергетического баланса, рассмотрим полную систему уравнений энергии для осредненного поля пульсирующих термогидродинамических параметров смеси, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осредненной потенциальной энергии смеси. Осреднение по Рейнольдсу уравнения (2.1.30) приводит, при учете тождества (3.1.9), к следующему балансовому уравнению для осредненной удельной потенциальной энергии турбулизованной смеси

$$\bar{\rho} D <\Psi> /D t = -J^{\Sigma}_{(\Psi)j,j} + \overline{\sigma_{(\Psi)}}, \tag{3.1.40}$$

где

$$J^{\Sigma}_{(\Psi)j} \equiv \bar{J}_{(\Psi)j} + J^{T}_{(\Psi)j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_\alpha J^{\Sigma}_{\alpha j} \tag{3.1.41}$$

– полный субстанциональный поток потенциальной энергии в турбулизованном многокомпонентном континууме;

$$\bar{J}_{(\Psi)j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_\alpha \bar{J}_{\alpha j} \tag{3.1.42}$$

– осредненный регулярный поток потенциальной энергии смеси;

$$J^{T}_{(\Psi)j} = \bar{\rho} <\Psi V''_j> = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_\alpha \overline{\rho Z_\alpha V''_j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Psi_\alpha J^{T}_{\alpha j} \tag{3.1.43}$$

– турбулентный поток потенциальной энергии смеси.

Осредненный источник потенциальной энергии многокомпонентной смеси задается соотношением

$$\overline{\sigma}_{(\Psi)} = -\sum_{\alpha=1}^{N} J^{\Sigma}_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j} - \bar{\rho} <V_j> \sum_{\alpha=1}^{N} <Z_\alpha> F_{\alpha j}\ . \tag{3.1.44}$$

Отметим, что величина $\sum_{\alpha=1}^{N} J^{\Sigma}_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}$ представляет собой полную скорость перехода в единице объема потенциальной энергии среднего движения в другие формы энергии, что следует из сравнения уравнений (3.1.44) и (3.1.57); величина

$\overline{\rho}<V_j>\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>F_{\alpha j}$ связана со скоростью превращения осредненной потенциальной энергии в кинетическую энергию среднего движения (см. (3.1.45)), причем этот процесс обратимый (*адиабатический*).

Уравнение баланса кинетической энергии среднего движения турбулизованной среды. Умножая скалярно уравнение движения (3.1.35) на $<V_j>$ и учитывая несимметричные свойства тензора Леви–Чевита (2.1.20), получим после необходимых преобразований следующую субстанциональную форму *уравнения живых сил* для осредненного движения смеси (теорему количества движения), аналогичную (2.1.36)

$$\overline{\rho}\frac{D(<V>^2/2)}{Dt}=-\left[(\overline{p}\delta_{ij}-\pi_{ij}^{\Sigma})<V_i>\right]_{,j}+\overline{p}<V_j>_{,j}-$$
$$-\pi_{ij}^{\Sigma}<V_i>_{,j}+\overline{\rho}<V_j>\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>F_{\alpha j}, \qquad (3.1.45)$$

где $<V>^2/2$ – удельная кинетическая энергия среднего движения; первый, второй и третий члены в правой части уравнения, умноженные на Dt, соответственно, плотности работы внешних поверхностных сил, внутренних поверхностных сил и внешних массовых сил. Хотя уравнение (3.1.45) имеет энергетическую природу, оно не является законом сохранения энергии в турбулизованном континууме. Уравнение (3.1.45) описывает закон превращения кинетической энергии осредненного движения в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учета необратимого перехода механической энергии в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (3.1.45): величина $(\overline{p}<V_j>)_{,j}$ связана с оттоком механической энергии из единицы объема за единичный интервал времени; дивергенция $(\pi_{ij}^{\Sigma}<V_i>)_{,j}$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение π_{ij}^{Σ} совершает работу в единичном объеме осредненной движущейся системы; величина $\overline{p}<V_j>_{,j}$ (>0, или <0) связана со скоростью обратного адиабатического превращения осредненной внутренней энергии (тепла) в механическую энергию (см. (3.1.57)) и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема против осредненного давления $\overline{p}$ потоком движущейся смеси; знак величины $\overline{p}<V_j>_{,j}$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться ($<V_j>_{,j}>0$) или сжиматься ($<V_j>_{,j}<0$); величина $\pi_{ij}^{\Sigma}<V_i>_{,j}$ представляет собой полную скорость необратимого превращения в единице объема кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии (см. (3.1.57) и (3.1.68)), причем диссипация энергии среднего движения происходит как под влиянием молекулярной вязкости со скоростью $\overline{\pi}_{ij}<V_i>_{,j}$, так и под влиянием турбулентности со скоростью $R_{ij}<V_i>_{,j}(<0)$.

Если сложить уравнения (3.1.40) и (3.1.45), то получим уравнение баланса

механической энергии для среднего движения турбулизованного континуума

$$\overline{\rho}\frac{D(<V>^2/2+<\Psi>)}{Dt}=-\left[(\overline{p}\delta_{ij}-\pi_{ij}^{\Sigma})<V_i>+\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J_{\alpha J}^{\Sigma}\right],_j+$$

$$+\overline{p}\,<V_J>,_J-\pi_{iJ}^{\Sigma}\,<V_i>,_J-\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha J}^{\Sigma}F_{\alpha J}. \qquad (3.1.46)$$

<u>*Балансовое уравнение для осредненной внутренней энергии турбулизованной смеси.*</u> Это уравнение получим из уравнения (3.1.14), полагая в нем $A\equiv h$ и используя выражения (2.1.51) для потока тепла ($J_{(h)J}\equiv q_J$) и (2.1.52) для источника энергии ($\sigma_{(h)}\equiv dp/dt+\pi_{ij}V_i,_j+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}F_{\alpha j}^{*}$). В результате будем иметь

$$\overline{\rho}D<h>/Dt=-q_J^{\Sigma},_J+\overline{\sigma}_{(h)}, \qquad (3.1.47)$$

где

$$q_J^{\Sigma}\equiv\overline{q}_J+q_J^T \qquad (3.1.48(^a))$$

– суммарный поток тепла в осредненном многокомпонентном турбулизованном континууме;

$$q_j^T\equiv\overline{\rho h''V_j''}\cong<C_p>\overline{\rho T''V_j''}+\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^T \qquad (3.1.48\ (^b))$$

– турбулентный поток тепла (явного – первый член и скрытого – второй член), возникающий благодаря корреляции между пульсациями удельной энтальпии h'' смеси и гидродинамической скорости V_j'' течения. Приближенное равенство (3.1.47(^{b})) записано с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Его легко получить, используя свойства (3.1.7) осреднения Фавра и формулу

$$h''=\sum_{\alpha=1}^{N}\left[<Z_\alpha>h_\alpha''+<h_\alpha>Z_\alpha''+(Z_\alpha''h_\alpha'')''\right]=<C_p>T''+\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>Z_\alpha''+(C_p''T'')'' \qquad (3.1.49)$$

для пульсации удельной энтальпии смеси, где

$$h_\alpha''=C_{p\alpha}T'' \qquad (3.1.50(^a))$$

– пульсация парциальной энтальпии α-компоненты, ($C_{p\alpha}=const$);

$$<C_p>=\sum_{\beta=1}^{N}C_{p\beta}<Z_\beta>,\quad (^1);\quad C_p''=\sum_{\beta=1}^{N}C_{p\beta}Z_\beta'',\quad (^2) \qquad (3.1.50(^b))$$

– соответственно, осредненная и пульсационная составляющие удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении. Осредненная удельная энтальпия сме-

си в (3.1.47) определяется следующим точным соотношением

$$< h > = < C_p >< T > \left[1 + < C_p'' T'' > / < C_p >< T >\right] + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 < Z_\alpha >, \qquad (3.1.50(^c))$$

которое получается при осреднении выражения (2.1.41).

Субстанциональную производную от полного давления смеси в выражении для $\overline{\sigma}_{(h)}$ удобно представить в виде

$$d\,p\,/dt = Dp\,/Dt + V_j'' p_{,j} = Dp\,/Dt + V_j'' \overline{p}_{,j} + V_j'' p'_{,j} =$$

$$= Dp\,/\,Dt + (p' V_j'')_{,j} - p' V_{j,j}'' + V_j'' \overline{p}_{,j} \ .$$

Тогда можно написать

$$\overline{d\,p\,/d\,t} = D\,\overline{p}\,/\,Dt + \overline{(p' V_j'')}_{,j} - \overline{p' V_{j,j}''} + J^T_{(v)j}\,\overline{p}_{,j} \ . \qquad (3.1.51)$$

Кроме того, имеем

$$\overline{\pi_{ij} V_{i,j}} = \overline{\pi}_{ij} < V_i >_{,j} + \overline{\pi_{ij} V_{i,j}''} = \overline{\pi}_{ij} < V_i >_{,j} + \overline{\rho} < \varepsilon_e >, \qquad (3.1.52(^1))$$

где

$$\overline{\rho} < \varepsilon_e > \equiv \overline{\pi_{ij} V_{i,j}''} \ . \qquad (3.1.52(^2))$$

– средняя удельная на единицу времени и единицу объема жидкости скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под действием молекулярной вязкости – ключевая характеристика в теории турбулентности.

Подставляя (3.1.51) и (3.1.52(1)) в (3.1.47), окончательно получим

$$\overline{\rho} D < h > /Dt + \left(\overline{q}_j + q_j^{T\,*}\right)_{,j} = D\,\overline{p}\,/\,Dt + \overline{\pi}_{ij} < V_i >_{,j} -$$

$$- \overline{\dot{p}' V_j''}_{,j}^{\cdot} + J^T_{(v)j}\,\overline{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{J}_{\alpha j} F^*_{\alpha j} + \overline{\rho} < \varepsilon_e >, \qquad (3.1.47^*)$$

где величина

$$q_j^{T\,*} \equiv q_j^T - \overline{p' V_j''} \qquad (3.1.54)$$

определяет так называемый “обычный” турбулентный поток тепла; эта величина тесно связана с турбулентным потоком энтропии (см. разд. 3.3.4 и Гл. 5).

Уравнение (3.1.47) может быть также записано через осредненную внутреннюю энергию $< \varepsilon >$ турбулизованного континуума. Величина $< \varepsilon >$ определяется соотношением

$$< \varepsilon > = < h > - \overline{p}/\overline{\rho} = < C_V >< T > \left[1 + < C_V'' T'' > / < C_V >< T >\right] + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 < Z_\alpha >, \qquad (3.1.55(^a))$$

являющимся точным результатом осреднения выражения (2.1.41). Здесь

$$< C_V > = \sum_{\alpha=1}^{N} C_{V\alpha} < Z_\alpha >, \quad \left(< C_p > - < C_V > = < R^* > = \mathrm{k} \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > \right) \qquad (3.1.55(^b))$$

– осредненная удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме (переменная теплофизическая величина). Второе равенство в (3.1.55(а)) справедливо только в том случае, если

$$\varepsilon_\alpha = C_{V\alpha} T + h_\alpha^0, \quad (C_{V\alpha} = const). \qquad (3.1.55(c))$$

Используя преобразование (сравни с (2.1.42))

$$\overline{\rho} D <\varepsilon> / Dt + \overline{p} <V_j>_{,j} = \overline{\rho} D <h> / Dt - D\overline{p} / Dt, \qquad (3.1.56)$$

являющееся следствием соотношения (3.1.55(а)) и осредненного уравнения неразрывности (3.1.5), в результате получим

$$\overline{\rho} \frac{D <\varepsilon>}{Dt} + \left(\overline{q}_j + q_j^{T*}\right)_{,j} = -\overline{p} <V_j>_{,j} + \overline{\pi}_{ij} <V_i>_{,j} - \overline{p' V_j''}_{,j} +$$

$$+ J^T_{(v)j} \overline{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{J}_{\alpha j} F^*_{\alpha j} + \overline{\rho} <\varepsilon_e>. \qquad (3.1.57)$$

В этом уравнении величина $\overline{p' V_j''}_{,j}$ связана со скоростью преобразования кинетической энергии турбулентных вихрей во внутреннюю энергию (см. уравнение (3.1.68)) и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема окружающей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций давления p' и расширения или сжатия вихрей ($V_{j,j} > 0$ или $V_{j,j} < 0$). Сопоставление уравнений (3.1.57) и (3.1.40) показывает, что величина $\sum_{\alpha=1}^{N} \overline{J}_{\alpha j} F^*_{\alpha j}$ связна со скоростью перехода между осредненной внутренней и осредненной потенциальной энергией в результате работы негравитационных внешних сил. Аналогично, сопоставление (3.1.57) и (3.1.45) показывает, что величины $\overline{p} <V_j>_{,j}$ и $\overline{\pi}_{ij} <V_i>_{,j}$ связаны со скоростью перехода между внутренней и кинетической энергиями среднего движения.

Корреляция $\overline{\rho} <\varepsilon_e> = \overline{\pi_{ij} V_i''}_{,j}$ ($\approx \overline{\pi'_{ij} V'_{i,j}}$ в развитом турбулентном поле (см. разд. 4.2.3)) - это среднее значение работы, отнесенное к единице времени и единице объема, совершаемой пульсациями вязких напряжений над турбулентными вихрями со сдвигом скорости ($V_j''_{,j} \neq 0$). Эта работа всегда положительна, поскольку $<\varepsilon_e>$ представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости.

Наконец, рассмотрим скорость превращения $J^T_{(v)j} \overline{p}_{,j}$. Эту величину, при наличии сил Архимеда, удобно экстраполировать, с учетом (3.1.39), следующим выражением

$$J^T_{(v)j} \overline{p}_{,j} \approx g(\rho_0 / \overline{\rho}) \overline{\rho' V_3''}. \qquad (3.1.58)$$

Известно (см., например, (*Ван Мигем, 1977*)), что в турбулизованном потоке смеси в общем случае возможны следующие два случая:

1) Для крупных вихрей в атмосфере величина $g\overline{\rho' V_3''}$ отрицательна. Это связано с тем, что под влиянием эффекта плавучести пульсация ρ' рассматриваемых масштабов, имеющая термическое происхождение, определяет знак смещения вихря по вертикали. Действительно, т.к. легкие ($\rho'<0$) и тяжелые вихри совпадают, как правило, с теплыми и холодными вихрями, соответственно, то, например, для поднимающихся ($V_3''>0$) в гравитационном поле теплых вихрей ($\rho'<0$) величина $g\overline{\rho' V_3''}<0$. Таким образом, крупные вихри преобразовывают тепловую (внутреннюю) энергию потока в кинетическую энергию турбулентного движения.

2) Для мелкомасштабной турбулентности величина $g\overline{\rho' V_3''}$ положительна. Как отмечалось в Гл.1, локальной характеристикой стратификации служит частота Брента–Вяйсяля $N^2 = (-g/\overline{\rho})\overline{\rho}_{,3}$. В этом случае $N^2 > 0$ и архимедова сила является возвращающей, т.е. турбулентность тратит свою энергию на работу против сил плавучести. Величина $g\overline{\rho' V_3''}$ представляет собой скорость превращения в единице объема среды турбулентной энергии в осредненную внутреннюю энергию, или, другими словами, мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло (см. уравнение (3.1.68)).

Получим теперь субстанциональную форму закона сохранения осредненной полной энергии турбулизованного континуума. Это уравнение позволит вывести фундаментальное в теории турбулентности эволюционное уравнение переноса турбулентной энергии.

Закон сохранения полной энергии для турбулизованной смеси. Применяя оператор осреднения (3.1.3) к (1.1.33) и используя соотношения (2.1.34) и (2.1.35) для величин $E(\boldsymbol{r},t)$ и $J_{(E)j}$, получим субстанциональную форму закона сохранения осредненной полной энергии многокомпонентной смеси

$$\overline{\rho} D<E>/Dt = J^{\Sigma}_{(E)I},_j \quad , \quad (J^{\Sigma}_{(E)I} \equiv \overline{J}_{(E)j} + J^{T}_{(E)I}), \tag{3.1.59}$$

где

$$<E>=<V_jV_j/2> + <\Psi> + <\varepsilon> \tag{3.1.60}$$

– осредненная полная удельная энергия смеси;

$$J^{T}_{(E)j} \equiv \overline{\rho} <E''V_j''> = \overline{\rho(V_jV_j/2 + \Psi + \varepsilon)V_j''} \tag{3.1.61}$$

– турбулентный поток полной энергии смеси;

$$\overline{J}_{(E)j} = \overline{q_j + (p\delta_{ij} - \pi_{ij})V_i} + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha J_{\alpha j} = \overline{q}_j + (\overline{p}\delta_{ij} - \overline{\pi}_{ij})<V_i>,_j +$$

$$+\overline{pV_j''} - \overline{\pi_{ij}V_j''} + \sum_{\alpha=1} \psi_\alpha \overline{J}_{\alpha j} \tag{3.1.62}$$

– осредненный регулярный поток полной энергии в многокомпонентной системе.

Далее удобно преобразовать кинетическую энергию мгновенного движения

к виду

$$\rho V_j V_j / 2 = \rho\left(< V_j > + V_j''\right)\left(< V_j > + V_j''\right)/2 = \rho < V_j >< V_j > /2 + \rho < V_j > V_j'' + \rho V_j'' V_j'' / 2.$$

Производя статистическое осреднение этого равенства и учитывая выражение (3.1.4), получим

$$\overline{\rho V_j V_j / 2} = \overline{\rho} < V_j >< V_j > /2 + \overline{\rho V_j'' V_j'' / 2} \ , \qquad (3.1.63)$$

или

$$< V_j V_j > /2 = < V_j >< V_j > /2 + < e >, \qquad (3.1.64)$$

где равенством

$$< e > \equiv \overline{\rho e} / \overline{\rho} = \overline{\rho V_j'' V_j''} / 2\overline{\rho} \qquad (3.1.65)$$

введена еще одна ключевая в теории турбулентности величина – осредненное значение кинетической энергии турбулентных пульсаций (или просто *турбулентная энергия*); $e \equiv V_j'' V_j'' / 2$ – удельная пульсационная кинетическая энергия течения.

В итоге, выражения (3.1.60) и (3.1.61) при использовании преобразования (3.1.63) принимают вид

$$< E > = < V_j >< V_j > /2 + < \Psi > + < \varepsilon > + < e >, \qquad (3.1.66)$$

$$J^T_{(E)j} = \overline{\rho} < e V_j'' > - < V_i > R_{ij} + J^T_{(\Psi)j} + J^T_{(\varepsilon)j} \ , \qquad (3.1.67)$$

где корреляция

$$J^T_{(\varepsilon)j} \equiv \overline{\rho} < \varepsilon V_j'' > = \overline{\rho (h - p/\rho) V_j''} = q_j^T - \overline{p V_j''} = q_j^{T*} + \overline{p' V_j''} - \overline{p V_j''} \qquad (3.1.68)$$

определяет турбулентный поток удельной внутренней энергии смеси.

Наконец, объединяя формулы (3.1.62), (3.1.61*) и (3.1.66), для суммарного потока $J^{\Sigma}_{(E)j}$ полной энергии, окончательно найдем

$$J^{\Sigma}_{(E)j} = \overline{J}_{(E)j} + J^T_{(E)j} = \overline{q}_j + q_j^{T*} + \overline{\rho (e + p'/\rho) V_j''} - \overline{\pi_{ij} V_j''} +$$

$$+ (\overline{p}\,\delta_{ij} - \pi^{\Sigma}_{ij}) < V_i > + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha J^{\Sigma}_{\alpha j} \ . \qquad (3.1.67^*)$$

Здесь $q_j^{\Sigma} \equiv \overline{q}_j + q_j^T$ – суммарный поток тепла, обусловленный как осредненным молекулярным, так и турбулентным переносом; $\overline{p} < V_j >$ – поток механической энергии; $\pi^{\Sigma}_{ij} < V_i >$ – суммарный поток энергии, обусловленный работой вязких и турбулентных напряжений; $\left(\overline{\rho e V_j'' - \pi_{ij} V_i''}\right)$ – поток вихревой турбулентной

энергии, как следствие турбулентной "диффузии"; $\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha J^{\Sigma}_{\alpha j}$ – суммарный поток потенциальной энергии, обусловленный осредненной молекулярной и турбулентной диффузией.

Важно отметить, что член $\overline{p'V_j''}$ в (3.1.67) не играет роли потока энергии, так как он выпадает из полного энергетического уравнения при учете формулы (3.1.54) для "обычного" турбулентного потока тепла и введен здесь и далее из соображений удобства (см. § 3.3 и Гл.5).

Получим теперь *уравнение переноса турбулентной энергии* для многокомпонентной сжимаемой смеси. Это фундаментальное в теории турбулентности уравнение, или некоторые его модификации, лежит в основе многих современных полуэмпирических моделей турбулентности. Оно может быть выведено разными способами, один из которых приведен в Гл. 4. Здесь же его вывод основан на использовании балансовых уравнений (3.1.46), (3.1.57) и (3.1.59).

Уравнение переноса для турбулентной энергии многокомпонентной сжимаемой смеси. Вычитая (3.1.46) и (3.1.57) из уравнения (3.1.59), в котором величины $<E>$ и $J^{\Sigma}_{(E)j}$ определяются, соответственно, формулами (3.1.60*) и (3.1.67), получим уравнение субстанционального баланса осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций смеси в следующем виде

$$\bar{\rho}D<e>/Dt = -\left(\overline{\rho(e+p'/\rho)V_j''} - \pi_{ij}V_i''\right)_{,j} + R_{ij}<V_i>_{,j} +$$

$$+\overline{p'V_j''}_{,j} - J^{T}_{(v)j}\bar{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J^{T}_{\alpha j}F^{*}_{\alpha j} - \bar{\rho}<\varepsilon_e>. \qquad (3.1.68)$$

Член в левой части характеризует изменение во времени (а также конвективный перенос осредненным движением) осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций $<e>$; первый член в правой части выражает перенос кинетической энергии турбулентности за счет турбулентной "диффузии"; третий член – работу сил давления в пульсационном движении; четвертый и пятый – скорость порождения энергии турбулентности под действием эффектов плавучести и действия сил негравитационного происхожения; наконец, шестой – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности в тепловую внутреннюю энергию вследствие молекулярной вязкости. Величина $R_{ij}<V_i>_{,j}$ в правых частях уравнений (3.1.45) и (3.1.68) имеет противоположные знаки и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Следует еще раз подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора операции осреднения турбулентного движения. Известно, что в случае мелкомасштабной турбулентности $R_{ij}<V_i>_{,j} > 0$, так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности. Крупномасштабная турбулентность, однако, может превращать кинетическую энергию турбулентности в энергию среднего движения (*Ван*

Мигем, 1977).

Уравнение для осредненной внутренней энергии смеси, записанное через температуру и давление. Получим сначала необходимые выражения для осредненной $< h >$ и пульсирующей h'' составляющих энтальпии смеси. Полная удельная энтальпия для истинного движения турбулизованного континуума определяется соотношением (2.1.41), которое запишем здесь в виде $h = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha h_\alpha \approx C_p T + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha h_\alpha^0$, причем вторая форма записи справедлива только в случае использования простого выражения $h_\alpha = C_{p\alpha} T + h_\alpha^0$ для парциальной энтальпии α компоненты, когда постоянные в потоке величины $C_{p\alpha}$ и h_α^0 аппроксимируют в некотором рассматриваемом диапазоне температур, соответственно, парциальную теплоемкость (на одну частицу) и теплоту образования вещества α-сорта. Используя еще одно свойство средневзвешенного осреднения

$$(AB)'' = < B > A'' + (AB'')'' = < A > B'' + < B > A'' + (A''B'')'', \qquad (3.1.69)$$

а также соотношения (3.1.50([a])) и (3.1.50([b])) для осредненных и пульсационных составляющих величин h_α и C_p, из (2.1.45) получим искомое выражение для пульсаций полной энтальпии смеси

$$h'' = \sum_{\alpha=1}^{N} (Z_\alpha h_\alpha)'' = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[< Z_\alpha > h_\alpha'' + < h_\alpha > Z_\alpha'' + (Z_\alpha'' h_\alpha'')'' \right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[C_{p\alpha} < Z_\alpha > T'' + Z_\alpha'' < h_\alpha > + Z_\alpha'' h_\alpha'' - < Z_\alpha'' h_\alpha'' > \right] = < C_p > T'' + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' h_\alpha - < C_p'' T'' > \qquad (3.1.70)$$

Отсюда следует точное, в рамках сделанного выше предположения относительно характера температурной зависимости величин h_α, выражение для пульсаций температуры

$$< C_p > T'' = h'' - \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' h_\alpha + < C_p'' T'' > = h'' - \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' h_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha'' h_\alpha'' > . \qquad (3.1.71)$$

Эта формула, примененная нужное число раз (из-за последнего члена в правой части), позволяет в необходимых случаях исключить из рассмотрения пульсации температуры, заменяя их на пульсации энтальпии и состава смеси.

Умножая (3.1.71) на $\rho A''$, где $A(\boldsymbol{r}, t)$ – какой-либо пульсирующий в потоке параметр, и осредняя результат по ансамблю возможных реализаций, получим общее выражение

$$< C_p >< A'' T'' > = < A'' h'' > - \sum_{\alpha=1Б}^{N} < h_\alpha >< A'' Z_\alpha'' > - < A'' C_p'' T'' > \approx$$

$$\approx < A'' h'' > - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha >< A'' Z_\alpha'' > . \qquad (3.1.72)$$

В формуле (3.1.72) второе приближенное равенство записано с точностью до корреляций 3-го порядка и парных произведений корреляций 2-го порядка (пульсаций состава и энтальпии). Выпишем здесь полезные для дальнейшего использования соотношения, вытекающие из (3.1.72) при конкретизации $A(\boldsymbol{r},t)$

$$q_j^T \approx < C_p > \overline{\rho T'' V_j''} + \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J_{\alpha j}^T, \qquad (A \equiv V_j)$$

$$< C_p > \overline{T''} \approx \overline{h''} - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > \overline{Z_\alpha''}, \qquad (A \equiv v)$$

$$< C_p >< Z_\alpha'' T'' > \approx < Z_\alpha'' h'' > - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta >< Z_\beta'' Z_\alpha'' >, \qquad (A \equiv Z_\beta)$$

$$< C_p >^2 < T''^2 > \approx < h''^2 > - 2\sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta >< h'' Z_\beta'' > + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} < h_\alpha >< h_\beta >< Z_\alpha'' Z_\beta'' >, \quad (A \equiv T) \qquad (3.1.73)$$

Получим еще одну форму записи для осредненой полной энтальпии смеси, отличную от (3.1.50(°)). Применяя оператор осреднения к (2.1.45) будем иметь

$$< h > = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[< Z_\alpha >< h_\alpha > + < Z_\alpha'' h_\alpha'' > \right] = < C_p >< T > + \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > h_\alpha^0 + < C_p'' T'' > \qquad (3.1.74)$$

или, с учетом формулы (3.1.73(4)),

$$< h > \left[1 - < C_p'' h'' > / < C_p >< h > \right] = < C_p >< T > \left[1 - < C_p''^2 > / < C_p >^2 \right] +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{N} < Z_\beta > h_\beta^0 \left[1 - < C_p'' Z_\beta'' > / < C_p >< Z_\beta > \right]. \qquad (3.1.75)$$

Это выражение естественным образом упрощается для простых моделей многокомпонентной турбулентности, в которых просто не учитываются парные корреляции температуры и состава (в частности, в осредненном уравнении состояния для давления), и потому можно пренебречь пульсациями теплоемкости смеси C_p в турбулизованном потоке, формально положив $C_p'' = 0$). Подобное выражение для $< h >$ получается в более общем случае, когда корреляции типа $< A'' C_p'' >$ для параметров $A \equiv h, \quad C_p, \quad Z_\beta$ малы по сравнению с членами первого порядка $< A >< C_p >$:

$$< h > \approx < C_p >< T > + \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > h_\alpha^0 = \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha >< Z_\alpha >. \qquad (3.1.75^*)$$

Мы получили, таким образом, все необходимые соотношения, чтобы выразить энергетическое уравнение (3.1.47*) в переменных $< T >$ и $\bar{p}$. В случае, ко-

гда справедливо приближение (3.1.75*), для субстанциональной производной от $< h >$, с учетом уравнения диффузии (3.1.24), можно записать

$$\bar{\rho}\frac{D<h>}{Dt} = \bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>\frac{D<Z_\alpha>}{Dt} + \bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>\frac{D<h_\alpha>}{Dt} = \sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>\left[-J_{\alpha j}^{\Sigma}+\bar{\sigma}_\alpha\right]+$$

$$+\bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>C_{p\alpha}\frac{D<T>}{Dt} = \bar{\rho}<C_p>\frac{D<T>}{Dt} - \left\{\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^{\Sigma}\right\}_{,j}+$$

$$+<T>_{,j}\sum_{\alpha=1}^{N}C_{p\alpha}J_{\alpha j}^{\Sigma}+\sum_{s=1}^{r}<q_s>\bar{\xi}_s, \qquad (3.1.76)$$

(сравни с (2.1.47)), где

$$<q_s>=\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}<h_\alpha>, \quad (s=1,2,...,r) \qquad (3.1.77)$$

– осредненная теплота s-й реакции (2.1.48). Тогда уравнение для внутренней энергии осредненного турбулизованного континуума (3.1.47*), записанное через температуру и давление принимает вид

$$\bar{\rho}<C_p>\frac{D<T>}{Dt}=-\left\{\bar{q}_j+q_j^{T*}-\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^{\Sigma}\right\}_{,j}+\frac{D\bar{p}}{Dt}+\bar{\pi}_{ij}<V_i>_{,j}-\overline{p'V_j''}_{,j}-$$

$$-<T>_{,j}\sum_{\alpha=1}^{N}C_{p\alpha}J_{\alpha j}^{\Sigma}-\sum_{s=1}^{r}<q_s>\bar{\xi}_s+J_{(v)j}^{T}\bar{p}_{,j}+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}F_{\alpha j}^{*}+\bar{\rho}<\varepsilon_e>. \qquad (3.1.78)$$

Это уравнение может быть использовано в моделях турбулентности, основанных на использовании простых градиентных схем замыкания.

В более общем случае, с учетом формулы (3.1.75) для осредненной энтальпии $< h >$, для субстанциональной производной $\bar{\rho}D<h>/Dt$ можно получить

$$\bar{\rho}\frac{D<h>}{Dt} = \bar{\rho}<C_p>\left[1-\frac{<C_p''^2>}{<C_p>^2}\right]\frac{D<T>}{Dt}+\frac{\bar{\rho}}{<C_p>}\frac{D<C_p''h''>}{Dt}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\bar{\rho}H_\alpha^{*}\frac{D<Z_\alpha>}{Dt}\right]-\frac{\bar{\rho}}{<C_p>}\sum_{\alpha=1}^{N}\left[<h_\alpha>\frac{D<C_p''Z_\alpha''>}{Dt}\right], \qquad (3.1.79)$$

где $H_\alpha^{*}\equiv<h_\alpha>-C_{p\alpha}\ <C_p''T''>/<C_p>$. Отсюда видно, что в усложненных моделях многокомпонентной турбулентности, когда к рассмотрению привлекаются эволюционные уравнения переноса для парных корреляций пульсаций энтальпии (температуры) и состава, с которыми, в частности, связаны корреляторы $<C_p''Z_\alpha''>$ и $<C_p''h''>$), не удается записать осредненное уравнение внутренней энергии только через температуру $<T>$. Это один из весомых аргументов в

пользу отказа от температуры, как основного параметра состояния турбулизованного континуума в общем случае. В качестве основной переменной состояния, определяющей термогидродинамику осредненного турбулизованного многокомпонентного континуума, в подобных моделях удобнее использовать энтальпию смеси $< h >$.

§ 3.2. Гидродинамические уравнения для турбулентных течений реагирующих газовых смесей

В § 3.1 в рамках модели сплошной среды на основе общих законов сохранения получены основные гидродинамические уравнения в частных производных, предназначенные для описания осредненных турбулентных движений газофазных реагирующих смесей. Проблема замыкания этих уравнений сопряжена с дополнительными трудностями. Первая трудность возникает из-за необходимости учитывать сжимаемость химически активного континуума. К сожалению, до последнего времени мало внимания обращалось на течения с большими изменениями массовой плотности. В метеорологии рассматривались конвективные сжимаемые течения исключительно при использовании приближения Буссинеска. В этом приближении изменение плотности учитывается лишь в членах, описывающих влияние ускорения силы тяжести. Однако такой подход абсолютно неприменим, например, к турбулентному дефлаграционному горению, когда в потоке могут возникать многократные изменения плотности. Вторая трудность, на которой мы остановимся подробно в Гл. 4, связана с необходимостью моделирования большого числа дополнительных парных корреляций пульсаций температуры и концентраций, появляющихся при осреднении источниковых членов производства вещества в уравнениях, описывающих изменение состава смеси. Эволюционные уравнения переноса для подобных корреляций в случае сжимаемых реагирующих течений сильно усложняются.

3.2.1. Осредненное термическое уравнение состояния для смеси совершенных газов. Полученные в предыдущем параграфе дифференциальные уравнения сохранения должны быть дополнены осредненным уравнением состояния для давления. Мы рассматриваем атмосферный газ как сжимаемую *бароклинную* среду, когда уравнение состояния для давления есть уравнение состояния смеси совершенных газов (2.1.53). Применяя оператор статистического осреднения (3.1.3) к уравнению (2.1.53), получим следующее точное выражение

$$\overline{p} = \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{p}_\alpha = \mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{n}_\alpha + \mathrm{k} \sum_{\alpha=1}^{N} < T'' n_\alpha > = \overline{\rho}\, \mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > + \overline{\rho}\, \mathrm{k} \sum_{\alpha=1}^{N} < T'' Z_\alpha > =$$

$$= \overline{\rho}\, \mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > \left[1 + < T'' Z_\alpha'' > / < T > < Z_\alpha > \right] \qquad (3.2.1)$$

содержащее большое число парных корреляций пульсирующих в потоке температуры T'' и концентраций Z_α''. В тех случаях, когда корреляционные члены $< T'' Z_\alpha'' >$ малы по сравнению с членами первого порядка, т.е. $< T'' Z_\alpha'' > << < T > < Z_\alpha >$, либо когда молекулярные массы компонентов, состав-

ляющих смесь, не сильно различаются между собой, т.е. $M_\alpha = idem$, откуда следует, что $1 = \sum_{\beta=1}^{N} M_\beta Z_\beta \approx idem \sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta$ и $\sum_{\beta=1}^{N} <T''Z_\beta> \approx (1/idem) <T''> = 0$, осредненное уравнение состояния для давления упрощается и приобретает более простую форму

$$\bar{p} = \bar{\rho}\, \mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > = \bar{\rho} < R^* >< T >, \tag{3.2.2}$$

где

$$< R^* > = \mathrm{k} \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > = \mathrm{k}\, \bar{n} / \bar{\rho} \tag{3.2.3}$$

– осредненная по Фавру “газовая постоянная”; $\bar{n} = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{n}_\alpha$ – осредненное полное число частиц в единице объема смеси. Термическое уравнение состояния (3.2.2) используется далее в простых моделях многокомпонентной турбулентности, основанных на градиентной гипотезе замыкания.

3.2.2. Осредненные гидродинамические уравнения смеси. Балансовые дифференциальные уравнения (3.1.22), (3.1.24), (3.1.30), (3.1.35) и (3.1.57) и уравнение состояния (3.2.1) составляют систему точных гидродинамических уравнений смеси масштаба среднего движения (при выводе которых не делалось каких-либо упрощений, связанных, в частности, с априорным отбрасыванием отдельных членов), пригодную для описания турбулизованной средней атмосферы планеты. Для удобства ссылок выпишем здесь эти уравнения (*Маров, Колесниченко, 1987*):

$$\bar{\rho} \frac{D < v >}{Dt} = < V_j >_{,j} \quad , \qquad (< v > = 1/\bar{\rho}) \ , \tag{3.2.4}$$

$$\bar{\rho} \frac{D < Z_\alpha >}{Dt} = -\left(\bar{J}_{\alpha j} + J^T_{\alpha j}\right)_{,j} + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \bar{\xi}_s , \quad (< Z_\alpha > = \bar{n}/\bar{\rho}) \tag{3.2.5}$$

$$(\alpha = 1,2,...,N)$$

$$\bar{\rho} \frac{D < V_i >}{Dt} = -\bar{p}_{,i} + \left(\bar{\pi}_{ij} + R_{ij}\right)_{,j} + 2\bar{\rho}\varepsilon_{kji} < V_k > \Omega_j + \bar{\rho} \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > F_{\alpha i} \tag{3.2.6}$$

$$\bar{\rho} \frac{D < \varepsilon >}{Dt} + \left(\bar{q}_j + q^{T*}_j\right)_{,j} = -\bar{p} < V_j >_{,j} + \bar{\pi}_{ij} < V_i >_{,j} - \overline{p' V''_j}_{,j} +$$

$$+ J^T_{(v)j} \bar{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{J}_{\alpha j} F^*_{\alpha j} + \bar{\rho} < \varepsilon_e > . \tag{3.2.7}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}\, \mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > \left[1 + < Z''_\alpha T'' > / < Z_\alpha >< T >\right]. \tag{3.2.8}$$

Эта система оказывается незамкнутой, так как содержит наряду со средними значениями термогидродинамических параметров $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $<T>$, $<V_j>$, $<Z_\alpha>$ и их производными, новые неизвестные величины. Они возникают вследствие нелинейности исходных гидродинамических уравнений многокомпонентной смеси для мгновенных движений и характеризуют дополнительные (корреляционные) члены, обусловленные наличием турбулентных пульсаций. Из системы (3.2.4)– (3.2.8) видно, что осредненое движение реагирующей смеси описывается различными осредненными молекулярными термодинамическими потоками $\bar{q}_j$, $\bar{\pi}_{ij}$, $\bar{J}_{\alpha j}$ и $\bar{\xi}_s$, и смешанными одноточечными моментами второго порядка. Относительно молекулярных потоков пока лишь отметим, что, поскольку осреднение Фавра не позволяет достаточно просто осреднить их регулярные аналоги (например, прямое осреднение выражения (2.1.62) для тензора вязких напряжений значительно усложняет его структуру), с точки зрения построения феноменологической модели многокомпонентной турбулентности будет более последовательно получить соответствующие определяющие соотношения для указанных величин без привлечения аналогов для мгновенных значений, непосредственно методами неравновесной термодинамики, как это сделано в § 5.2. Что касается смешанных одноточечных моментов второго порядка (*парных корреляций, корреляторов*), входящих в осредненные гидродинамические уравнения, то они представляют собой перенос гидродинамических характеристик среды турбулентными пульсациями. Это, прежде всего, турбулентный поток удельного объема $J^T_{(v)j}$ (3.1.21), турбулентные потоки вещества $J^T_{\alpha j}$ ($\alpha = 1,2,\ldots,N$) сорта α (*потоки турбулентной диффузии*) (3.1.26), турбулентный поток удельной энтальпии смеси q^T_j (*турбулентный поток тепла*) (3.1.48), тензор турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ij} (3.1.37), а также большое число парных корреляций типа $<Z''_\alpha T''>$ и $<Z''_\alpha Z''_\beta>$ ($\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N$), которые для химически активных газовых смесей появляются при осреднении источниковых членов в диффузионных уравнениях (3.2.5) для концентраций (см. (3.2.41)), а также явно входят в осредненое уравнение состояния для давления (3.2.8). Для замыкания системы *осредненных по Рейнольдсу* гидродинамических уравнений многокомпонентной среды потребуется знание всех перечисленных величин. Корреляционные члены, включающие пульсации давления $\overline{p'V''_j}_{,j}$ и $\overline{(p'V''_j)}_{,j}$ и величину скорости вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии $<\varepsilon_e>$ также необходимо определить.

В моделях турбулентности несжимаемой однородной жидкости (в общем случае с пассивной добавкой, не влияющей на динамический режим турбулентности) первоначально наиболее широкое распространение получили простейшие схемы замыкания, основанные на градиентной гипотезе Буссинеска (*Буссинеск, 1977*), позволяющие линейно связать турбулентные потоки q^T_j, R_{ij}, $J^T_{\alpha j}$ с градиентами осредненных значений соответствующих характеристик среды $<h>$, $<V_j>$, $<Z_\alpha>$ через некоторые локальные коэффициенты пропорциональности – коэффициенты турбулентного обмена, или турбулентного переноса. Для сжимаемой многокомпонентной смеси подобные соотношения в наиболее

общем виде впервые были получены в работе (*Колесниченко, Маров, 1984*) и приводятся в следующем параграфе. Использование градиентных реологических соотношений для турбулентных потоков (с соответствующими коэффициентами пропорциональности) дает возможность привести осредненные уравнения движения для турбулизованного течения жидкости к такой же форме, какую имеют уравнения для ламинарного течения, что позволяет совместно решать задачи как для вязкого ламинарного, так и для турбулентного режимов течения. Следует, однако, подчеркнуть, что использование градиентной гипотезы не решает проблемы замыкания осредненной системы гидродинамических уравнений, если относительно коэффициентов турбулентного обмена не приняты некоторые дополнительные предположения и не указаны способы их расчета. Более того, подобный подход полностью неоправдан в тех случаях, когда существенно влияние конвективного и диффузионного переноса энергии турбулентности, т.е., когда важна предыстория процесса турбулизации, на характеристики течения в отдельной точке; при этом адекватные локальные коэффициенты турбулентного обмена ввести вообще не удается (*Иевлев, 1990)*.

Наряду с этим, следуя методу Фридмана–Келлера (*Келлер, Фридман, 1924*), развитому для однородной сжимаемой турбулизованной жидкости (см. § 4.1), можно получить дифференциальные уравнения, описывающие пространственно-временную эволюцию вторых корреляционных моментов q_J^T, R_{IJ} $J_{\alpha J}^T$ и т.п. через моменты третьего порядка, для нахождения которых, однако, снова потребуются дополнительные уравнения (с корреляциями четвертого порядка). Если этот процесс продолжить и дальше, то мы получим бесконечное число уравнений с бесконечным числом неизвестных корреляций высокого порядка. Ясно поэтому, что проблема построения модели многокомпонентной турбулентности заключается в установлении какой-либо гипотезы замыкания, с помощью которой иерархия подобных уравнений и неизвестных обрывается введением алгебраических связей между моментами порядка $(m+1)$ и m. Одно из предположений, известное как гипотеза Миллионщикова (*Миллионщиков, 1941*), состоит в том, что четвертые моменты (например, для пульсаций скорости V') связаны со вторыми моментами таким образом, как если бы пульсации V' были гауссовскими случайными величиными. Однако она не имеет достаточного физического обоснования и, кроме того, не учитывает, так называемых, *условий реализуемости*, налагаемых моментами низших порядков. Эти условия состоят в том, что если известны первые m моментов, то $(m+1)$ момент обязан удовлетворять определенным неравенствам, простейшим примером которого является *неравенство Шварца* $\left|\overline{A}\right| \le \sqrt{\overline{A'^2}}$. Тем не менее, существует бесконечное число турбулентных течений, которые могут быть изучены при помощи какой-либо ограниченной процедуры замыкания, и проблема состоит в нахождении замыканий, адекватных физической природе рассматриваемого явления.

В последние несколько лет наблюдается интенсивный прогресс в развитии и применении моделей сдвиговой турбулентности второго порядка для однородной жидкости, имеющих, по мнению ряда авторов (см., например, (*Турбулентность: Принципы и применения,1980; Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*), оптимальный на сегодняшний день уровень сложности. В этих схемах все вхо-

дящие в осредненные гидродинамические уравнения корреляционные моменты второго порядка описываются системой эволюционных уравнений переноса, подобных уравнению (3.2.6)·для поля средних скоростей, замыкание которых также основано на использовании градиентной гипотезы т.е. некоторых локальных алгебраических соотношений для моделирования корреляционных моментов третьего и более высоких порядков. Например, уравнения переноса для составляющих тензора рейнольдсовых напряжений, в которых величины R_{ij} являются зависимыми переменными системы уравнений в частных производных, принадлежат к моделями подобного типа. Следует, однако, отметить, что численная реализация такого рода дифференциальных уравнений часто требует неприемлимо больших затрат машинного времени и не всегда приводит к результатам, существенно лучшим, чем в случае использования более простых градиентных схем замыкания. Аналогичный подход развит в Гл.4 данной монографии, при конструировании усложненных моделей многокомпонентной турбулентности.

3.2.3. Вывод выражения для осредненной скорости химической реакции в турбулизованном потоке. В случае газовых смесей, содержащих малые примеси, и больших скоростей химических реакций, протекающих без значительного выделения или поглощения тепла, температуру и концентрации реагирующих примесных веществ часто можно рассматривать в качестве пассивных (и консервативных) компонентов в турбулентном потоке, т. е. как величины, не вносящие существенных изменений в динамические характеристики потока. При этом соответствующий источниковый член производства масс в химических реакциях $\sigma_\alpha=\sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\xi_s$ в диффузионных уравнениях (3.2.5) и источник химического нагрева $\sum_{s=1}^{r}q_s\xi_s$ в энергетическом уравнении (3.2.7), как правило, исключаются из рассмотрения. Если же температуру и концентрации реагирующей газовой смеси нельзя рассматривать в качестве пассивных примесей (например, при моделировании процессов горения, когда имеет место сильная взаимосвязь химической кинетики и газовой динамики), то необходимо введение химических реакций и источников тепловыделения в структуру осредненных гидродинамических уравнений, приведенных в разд. 3.2.2.

Особого внимания при моделировании подобных течений заслуживают проблемы, связанные с нахождением явного вида осредненных источников (стоков) $\overline{\sigma_\alpha}$ химических веществ и осредненной величины тепловыделения (теплопоглощения) $\sum_{s=1}^{r}<q_s>\overline{\xi}_s$ в гидродинамических уравнениях масштаба среднего движения, а также с определением дополнительных членов, описывающих влияние химических реакций на структуру эволюционных уравнений переноса в моделях замыкания на уровне моментов второго порядка. Это наиболее существенные проблемы взаимодействия химических реакций и турбулентности.

Процедура осреднения мгновенных значений интенсивности источника σ_α в уравнении (3.2.5) не тривиальна и требует специального рассмотрения. Осред-

ненная скорость химической реакции в условиях турбулентного течения не определяется, вообще говоря, *аррениусовой* кинетикой для осредненных параметров, а существенным образом зависит от их пульсаций (*Кузнецов, 1969; Компаниец и др., 1979; Иевлев, 1990*). Трудности осреднения обусловлены тем, что аналитические выражения, связывающие мгновенные скорости реакций с пульсирующими характеристиками течения (такими как, плотность, температура и концентрации компонентов), всегда существенно нелинейны, причем степень усложнения, очевидно, зависит от суммарного порядка химической реакции, а также от наличия нелинейной зависимости константы скорости реакции от температуры.

Получим выражение для среднего значения скорости $\overline{\xi}_s$ гомогенной химической реакции s в условиях турбулентного горения. Рассмотрим прежде всего некоторые сведения из формальной теории кинетики химических реакций. Результирующая скорость s-й реакции

$$\beta_{1s}[1]+\beta_{2s}[2]+\ldots \underset{\mathcal{K}_{rs}}{\overset{\mathcal{K}_{fs}}{\Leftrightarrow}} \eta_{1s}[1]+\eta_{2s}[2]+\ldots \qquad (s=1,2,\ldots,r) \tag{3.2.9}$$

для идеальных термодинамических смесей (см. разд. 2.3.1.) определяется через параметры скорости прямой реакции ω_{fs} и константу равновесия $\mathcal{K}_s$ формулой (*Де Гроот, Мазур, 1964*) :

$$\xi_s = \mathcal{K}_{fs}\prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\beta_{\alpha s}}\left\{1-\frac{1}{\mathcal{K}_s}\prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right\} = \omega_{fs}\left[1-\exp(-A_s/kT)\right]. \tag{3.2.10}$$

В (3.2.9) и (3.2.10) приняты следующие обозначения: $\beta_{\alpha s}, \eta_{\alpha s}$ – стехиометрические коэффициенты компоненты α по отношению к s-й химической реакции; $[\alpha]$ – химические символы реагирующих веществ; $\mathcal{K}_{fs}, \mathcal{K}_{rs}$ – константы скоростей, соответственно, для прямой и обратной реакции;

$\mathcal{K}_s = \mathcal{K}_{fs}/\mathcal{K}_{rs}$; $\nu_{\alpha s} = \eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s}$; $\omega_{fs} = \mathcal{K}_{fs}\prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\beta_{\alpha s}}$ и $A_s = -\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\mu_\alpha$ – скорость и химическое сродство s-й реакции, соответственно; знак $\Leftrightarrow$ означает, что реакция может протекать в обоих направлениях. Суммарный порядок прямой реакции ω_{fs} определяется как $\Delta\beta_s = \sum_{\alpha=1}^{N}\beta_{\alpha s}$.

Как известно, в приближении аррениусовой кинетики константа скорости $\mathcal{K}_{fs}$ аппроксимируется выражением (*Вильямс, 1971*)

$$\mathcal{K}_{fs} = \mathcal{K}_{fs}^0 T^{a_{fs}} \exp(-E_{fs}/\mathrm{k}T) , \tag{3.2.11}$$

в котором через $\mathcal{K}_{fs}^0$ и a_{fs} обозначены, соответственно, постоянная частотного фактора (*предэкспонент*) и температурный показатель частотного фактора хими-

ческой реакции, а через E_{fs} – *энергия активации.*

Рассматривая далее многокомпонентные идеальные системы (и временно отказываясь, для общности рассмотрения, от принятого в данной книге условия постоянства парциальных теплоемкостей $C_{p\alpha}$), возьмем химический потенциал α-компоненты μ_α (2.3.2) в следующем общем виде (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^0(T,p) + \mathrm{k}T\,\ln(x_\alpha) \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \tag{3.2.12}$$

где

$$\mu_\alpha^0(T,p) = kT\,\ln p + h_\alpha^0 - TC_{p\alpha}^0\,\ln T - T\int_0^T \frac{dT}{T}\int_0^T C_{p\alpha}^{\bullet}(T)dT - kT\gamma_\alpha \tag{3.2.13}$$

– химический потенциал чистой компоненты α при данных температуре T и давлении p смеси; γ_α – химическая постоянная частиц α-го сорта; $C_{p\alpha}^0$, $C_{p\alpha}^{\bullet}(T)$ – соответственно, поступательная и колебательная составляющие теплоемкости $C_{p\alpha} \equiv (\partial h_\alpha / \partial T)_{p,\{n_\beta\}}$; h_α^0 – экстраполированная на нулевую температуру парциальная энтальпия α-компоненты. Тогда константа равновесия $\mathcal{K}_s$ и химическое сродство A_s s-й реакции могут быть записаны следующим образом :

$$A_s = -\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\mu_\alpha = \mathrm{k}T\,\ln\left[\mathcal{K}_s(T)/\prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right], \quad (s = 1,2,\ldots,r) \tag{3.2.14}$$

$$\mathcal{K}_s(T) = n^{\Delta\nu}\exp\left[-\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\mu_\alpha^0/\mathrm{k}T\right] = \Delta\nu_s\,\ln(\mathrm{k}T) - q_s^0/\mathrm{k}T +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{k}}\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}C_{p\alpha}^0\,\ln T + \frac{1}{\mathrm{k}}\int_0^T\frac{dT}{T}\int_0^T\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}C_{p\alpha}^{\bullet}(T)dT + \sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\gamma_\alpha, \tag{3.2.15}$$

где $\Delta\nu_s = \sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}$ – алгебраическая сумма стехиометрических коэффициентов s-й реакции $q_s^0 = \sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}h_\alpha^0$ – теплота s-й реакции, экстраполированная к абсолютному нулю температуры. Выражение в квадратных скобках в правой части (3.2.14) имеет исключительно важное значение. Поскольку в равновесии как ξ_s, так и A_s обращаются в нуль, что следует из чисто термодинамических соображений (см. формулу (2.2.20)), то из (3.2.14) в этом случае следует уравнение (*закон действующих масс*)

$$\left[\mathcal{K}_s(T)/\prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\nu\alpha s}\right] = 1, \qquad (s = 1,2,\ldots,r)\ , \tag{3.2.15*}$$

позволяющее определить состав продуктов реакции при химическом равновесии.

Как уже было отмечено выше, осреднение результирующей мгновенной скорости ξ_s (3.2.10) химической реакции (3.2.9), с последующим отбрасыванием членов, содержащих моменты третьего и более высоких порядков, представляет, в общем случае, трудную задачу. Возникающие трудности связаны, во-первых, с сильной нелинейностью выражения (3.2.10), причем степень усложнения, очевидно, зависит от суммарного порядка реакции $\Delta\beta_s$, а также от наличия нелинейной зависимости константы скорости реакции $\mathcal{K}_{fs}$ от температуры (формула (3.2.11)); во-вторых, с необходимостью последующего моделирования большого числа корреляционных членов, содержащих турбулентные пульсации температуры и состава. Эти корреляционные члены должны определятся, вообще говоря, из соответствующих эволюционных уравнений переноса, содержащих, в свою очередь, корреляции более высокого порядка. Замыкание подобных уравнений возможно только при дополнительных предположениях о связи корреляционных членов высоких порядков с "известными" корреляциями более низкого порядка (см. Гл. 4).

Будем далее считать, что соотношения (3.2.10)–(3.2.15) описывают мгновенное состояние химически активного течения турбулизованной смеси. Тогда физические величины T, p и n_α, в соответствии с допущением Рейнольдса, могут быть представлены в виде суммы осредненных значений $<T>, <p>$ и $<n_\alpha>$ и их турбулентных колебаний δT, δp, δn_α. В этом разделе для единообразия записи будем использовать, независимо от способа осредения, одинаковые обозначения для осредненных и пульсационных составляющих любых физических параметров A, а именно символы $<A>$ и символы δA.

Так как $\xi_s = \xi_s(T, n_\alpha)$, то можно, ограничиваясь приближением только второго порядка малости, принять

$$\xi_s(T, n_\alpha) \approx \xi_s(<T>, <n_\alpha>) + \delta\xi_s + \tfrac{1}{2}\delta^2\xi_s, \tag{3.2.16}$$

где

$$\delta\xi_s = \left(\frac{\partial\xi_s}{\partial T}\right)_0 \delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial n_\alpha}\right)_0 \delta n_\alpha, \tag{3.2.17}$$

$$\delta^2\xi_s = \left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial T^2}\right)_0 (\delta T)^2 + \sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial T\,\partial n_\beta}\right)_0 \delta T\,\delta n_\beta + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial n_\alpha \partial n_\beta}\right)_0 \delta n_\alpha \delta n_\beta, \tag{3.2.18}$$

Здесь индексом "0" отмечены значения производных, вычисленные при $T = <T>$, $n_\alpha = <n_\alpha>$.

Прежде чем получить осредненное значение скорости химической реакции, записанной в самом общем виде, рассмотрим, в качестве примера, показывающего сложность проблемы, типичную химическую реакцию второго порядка $[1] + [2] \xrightarrow{\mathcal{K}_f} [3]$, протекающую только в прямом направлении. Осредненное значение скорости исчезновения компоненты $[1]$ можно записать в виде

$$-\bar{\sigma}_1 = \overline{K_f n_1 n_2} = \overline{\rho^2 K_f Z_1 Z_2} = <\rho\mathcal{K}_f>\left[\bar{\rho}<Z_1><Z_2> + \overline{\rho Z_1' Z_2''}\right] + \qquad (*)$$

$$+ <Z_1>\overline{\rho(\rho K_f)'' Z_2''} + <Z_2>\overline{\rho(\rho K_f)'' Z_1''} + \overline{\rho(\rho K_f)'' Z_1' Z_2''}.$$

В этом выражении первый член справа содержит произведение осредненных величин и может быть получен путем подстановки в выражение для источника σ_1 соответствующих средних параметров течения, а второй член описывает неоднородность распределения концентраций реагентов при эффективной величине константы скорости реакции, соответствующей принятому способу осреднения; остальные члены обусловлены влиянием пульсаций концентраций и константы скорости реакции. Поскольку константа скорости химической реакции зависит от температуры (формула (3.2.11)), то в случае неизотермического процесса пульсация константы скорости чрезвычайно сложным образом зависит от пульсаций температуры, что, в свою очередь, вносит значительные осложнения в формулу (*). Но даже в случае изотермического процесса в сильно разбавленных системах, когда можно с достаточной степенью точности считать постоянными плотность и коэффициент скорости реакции, выражение (*) содержит дополнительный член, приводящий к изменению скорости химической реакции по сравнению с ее значением, вычисленным по средним величинам.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Из выражения (3.2.10) варьированием независимых переменных T и n_β легко получить первую вариацию результирующей скорости $\xi_s = \xi_s(T, n_\alpha)$, которую запишем в виде

$$\delta\xi_s = \left[1 - \exp(-A_s / \mathrm{k}T)\right]\delta\omega_{fs} + \omega_{fs}\exp(-A_s / \mathrm{k}T)\,\delta(A_s / \mathrm{k}T), \qquad (3.2.19)$$

где

$$\delta\omega_{fs} = \omega_{fs}\left(\frac{E_{fs} + kTa_{fs}}{\mathrm{k}T^2}\delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\beta_{\alpha s}}{n_\alpha}\right). \qquad (3.2.20)$$

Далее, для получения вариации $\delta(A_s / \mathrm{k}T)$ воспользуемся известными термодинамическими соотношениями (*Де Гроот, Мазур, 1964*)

$$\left(\frac{\partial(A_s/T)}{\partial T}\right)_p = \sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\left(\frac{\partial(\mu_\alpha/T)}{\partial T}\right)_p = \frac{q_s(T,p)}{T^2}, \qquad (3.2.21)$$

$$\left(\frac{\partial A_s}{\partial p}\right)_T = -\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\left(\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial p}\right)_T = V_s(T,p), \qquad (3.2.22)$$

$$\left(\frac{\partial A_s}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p} = -\sum_{\beta=1}^{N}\nu_{\beta s}\left(\frac{\partial \mu_\beta}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p} = -\sum_{\beta=1}^{N}\nu_{\beta s}\mu_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N}\mu_{\beta\alpha}n_\beta\left(\frac{\nu_{\beta s}}{n_\beta} - \frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha}\right), \qquad (3.2.23)$$

в которых введены следующие обозначения

$$q_s(T,p)=\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}h_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\int_0^T C_{p\alpha}(T)dT+q_s^0\ , \tag{3.2.24}$$

$$V_s(T,p)=\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}v_\alpha\ , \tag{3.2.25}$$

$$\mu_{\beta\alpha}=\left(\frac{\partial\mu_\beta}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p,\{n_\beta\}\ \ (\beta\neq\alpha)}\ , \tag{3.2.26}$$

где v_α – парциальный молярный объем компоненты α; q_s – теплота реакции s при постоянных T и p, равная разности между суммой произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагирующих веществ (см. формулу (2.1.48)); $\mu_{\beta\alpha}$ – частная производная от химического потенциала μ_β по числовой плотности n_α при постоянных температуре T и давлении p и всех прочих n_β ($\sum_{\alpha=1}^{N}n_\alpha\mu_{\beta\alpha}=0$); $V_s(T,p)$ – изменение объема при протекании s-й реакции при постоянных температуре и давлении.

Для смеси совершенных газов будем иметь (см. формулу (2.3.4)): $v_\beta=1/n,\quad \mu_{\beta\alpha}=\mathrm{k}T(\delta_{\beta\alpha}/n_\alpha-1/n)$. Тогда

$$\delta\left(\frac{A_s}{\mathrm{k}T}\right)=\frac{q_s(T,p)}{\mathrm{k}T^2}\delta T-\frac{V_s(T,p)}{\mathrm{k}T}\delta p+\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\Delta\nu_s}{n}-\frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha}\right)\delta n_\alpha=$$

$$=\frac{q_s(T,p)-\Delta\nu_s\,\mathrm{k}T}{\mathrm{k}T^2}\delta T-\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha}\,\delta n_\alpha\,. \tag{3.2.27}$$

В соответствии с (3.2.20) и (3.2.27) первая вариация $\delta\xi_s$ скорости ξ_s химической реакции s может быть записана в виде

$$\delta\xi_s=\Lambda_{s0}\delta T+\sum_{\beta=1}^{N}\Lambda_{s\beta}\delta n_\beta, \tag{3.2.28}$$

где

$$\Lambda_{s0}=\omega_{fs}\left\{\frac{E_{fs}+a_{fs}\,\mathrm{k}T}{\mathrm{k}T^2}\left(1-\frac{1}{\mathcal{K}_s}\prod_{\alpha=1}^{N}n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right)+\frac{q_s-\Delta\nu_s\,\mathrm{k}T}{\mathrm{k}T^2\mathcal{K}_s}\prod_{\alpha=1}^{N}n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right\}, \tag{3.2.29}$$

$$\Lambda_{s\gamma}=\omega_{fs}\left(\frac{\beta_{\gamma s}}{n_\gamma}-\frac{\eta_{\gamma s}}{n_\gamma\mathcal{K}_s}\prod_{\alpha=1}^{N}n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right). \tag{3.2.30}$$

Для получения второй вариации $\delta^2\xi_s$ скорости $\xi_s=\omega_{fs}-\omega_{rs}$, (где

$\omega_{rs} = \omega_{fs} \exp(-A_s/\mathrm{k}T)$), которую далее удобно представить в виде

$$\delta^2\xi_s = \delta(\delta\omega_{fs} - \delta\omega_{rs}) = \delta\left[\omega_{fs}\delta(\ln\omega_{fs}) - \omega_{rs}\delta(\ln\omega_{rs})\right] =$$

$$= \omega_{fs}\left[(\delta\ln\omega_{fs})^2 + \delta^2(\ln\omega_{fs})\right] - \omega_{rs}\left[(\delta\ln\omega_{rs})^2 + \delta^2(\ln\omega_{rs})\right], \qquad (3.2.31)$$

используем формулу (3.2.20), а также легко выводимые, с учетом (3.2.20) и ((3.2.27), соотношения

$$\delta(\ln\omega_{rs}) = \frac{E_{fs} + a_{fs}\,\mathrm{k}T - q_s + \Delta\nu_s\,\mathrm{k}T}{\mathrm{k}T^2}\delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\eta_{\alpha s}}{n_\alpha}\delta n_\alpha, \qquad (3.2.32)$$

$$\delta^2(\ln\omega_{fs}) = -\frac{2E_{fs} + a_{fs}\,\mathrm{k}T}{\mathrm{k}T^3}(\delta T)^2 - \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\beta_{\alpha s}}{n_\alpha^2}(\delta n_\alpha)^2, \qquad (3.2.33)$$

$$\delta^2(A_s/\mathrm{k}T) = \frac{\Delta\nu_s\,\mathrm{k}T - q_s - q_s^0}{\mathrm{k}T^3}(\delta T)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha^2}(\delta n_\alpha)^2, \qquad (3.2.34)$$

$$\delta^2(\ln\omega_{rs}) = \delta^2(\ln\omega_{fs}) - \delta^2(A_s/\mathrm{k}T)\ . \qquad (3.2.35)$$

Тогда окончательно получим (*Колесниченко, Маров, 1984*)

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\xi_s = B_{s0}(\delta T)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N}B_{s\alpha}(\delta T\ \delta n_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}B_{s\alpha\beta}(\delta n_\alpha\delta n_\beta), \qquad (3.2.36)$$

где

$$B_{s\alpha} \equiv \omega_{fs}\frac{E_{fs}^*}{\mathrm{k}T^2 n_\alpha}\left\{\beta_{\alpha s} - \left(1 - \frac{q_s^*}{E_{fs}^*}\right)\frac{\eta_{\alpha s}}{\mathcal{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}n_\beta^{\nu_{\beta s}}\right\}, \qquad (3.2.37)$$

$$B_{s\alpha\beta} \equiv \frac{\omega_{fs}}{2n_\alpha n_\beta}\left\{\beta_{\alpha s}(\beta_{\alpha s} - \delta_{\alpha\beta}) - \frac{\eta_{\alpha s}}{\mathcal{K}_s}(\eta_{\alpha s} - \delta_{\alpha\beta})\prod_{\gamma=1}^{N}n_\gamma^{\nu_{\gamma s}}\right\}, \qquad (3.2.38)$$

$$B_{s0} \equiv \omega_{fs}\left\{\left(1 - \frac{1}{\mathcal{K}_s}\prod_{\alpha=1}^{N}n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right)\frac{E_{fs}^{*2} - \mathrm{k}T(2E_{fs}^* - a_{fs}\,\mathrm{k}T)}{2\mathrm{k}^2T^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_s^*(q_s^* - 2E_{fs}^* + \mathrm{k}T) + \mathrm{k}Tq_s^*}{2\mathrm{k}^2T^4\mathcal{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}n_\beta^{\nu_{\beta s}}\right\}. \qquad (3.2.39)$$

Здесь введены обозначения

$$E_{fs}^* \equiv E_{fs} + a_{fs}\,\mathrm{k}, \qquad q_s^* \equiv q_s(T,p) - \Delta\nu_s\,\mathrm{k}T\,. \qquad (3.2.40)$$

Все фигурирующие в формулах (3.2.29), (3.2.30), (3.2.37), (3.2.38) и (3.2.39) термодинамические переменные p, T, n_α осреднены одинаковым образом, но для упрощения записи символ осреднения опущен.

Осредняя теперь по ансамблю возможных реализаций приближенное равенство (3.2.16) и используя соотношения (3.2.28) и (3.2.36), для эффективного значения скорости химической реакции (3.2.9) в турбулизованном потоке будем иметь

$$<\xi_s(T, n_\alpha)> = \xi_s(< T >, < n_\alpha >) + B_{s0} < (\delta T)^2 > +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} B_{s\alpha} <\delta T\, \delta n_\alpha> + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} B_{s\alpha\beta} < \delta n_\alpha \delta n_\beta >. \qquad (3.2.41)$$

Из этого соотношения следует, что для уточненного определения источниковых членов $\overline{\sigma_\alpha}$ в осредненных диффузионных уравнениях (3.2.5), при необходимости учета влияния интенсивности поля турбулентных пульсаций на характер протекания химических реакций, нужно дополнительно привлекать к рассмотрению эволюционные уравнения переноса для парных корреляций пульсаций температуры и состава.

В этой связи отметим следующее. В силу экспоненциальной формы выражения (3.2.10) и медленной сходимости соответствующих степенных рядов разложения (3.2.16), необходимы, в общем случае, более детальные сведения о структуре турбулентного поля течения многокомпонентной смеси, другими словами знания одних только парных корреляций для пульсирующих температуры и состава (и может быть некоторых моментов более высокого порядка) совершенно недостаточно для удовлетворительного вычисления осредненной величины источникового члена $\overline{\sigma_\alpha}$. Более полную информацию можно было бы получить, вводя в рассмотрение, например, одноточечную функцию совместной плотности вероятности $P(\rho, V_j, T, Z_\alpha(\alpha = 1,2,\ldots,N); \boldsymbol{r}, t)$ для скорости V_j и основных термодинамических параметров течения смеси с химическими реакциями и решая соответствующее эволюционное уравнение для этой функции (см., например, (*Борги, 1984; О'Брайен, 1983; Шринивасон и др.,1977*). Подобный подход является новым и интенсивно развивающимся в настоящее время. Однако в силу отсутствия законченной теории, позволяющей непосредственно находить функции плотности вероятности с помощью определяющего ее эволюционного интегро-дифференциального уравнения и недостаточного числа решенных тестовых задач турбулентного тепло- и массопереноса, не представляется пока возможным оценить в полной мере его эффективность. Между тем, рассмотренная нами в данной монографии аппроксимация осредненных скоростей химических реакций $\overline{\xi_s}$ на уровне моментов второго порядка позволяет определенным образом учесть взаимовлияние химической кинетики и динамики турбулентного потока. По-видимому, даже такой ограниченный подход к решению этой сложной проблемы все таки лучше, чем ее полное игнорирование.

В заключении отметим, что учет влияния турбулизации течения на скорости протекания химических реакций (и наоборот) требует сопоставления между со-

бой следующих характеристических времен :

• характерного времени гидродинамических явлений $t_{гидр}$;

• временного масштаба турбулентности $t_{турб}$ (например, диссипативного масштаба $< e > / \varepsilon_e$;

• временного масштаба химических реакций $t_{хим}$.

Времена $t_{гидр}$, $t_{турб}$, $t_{хим}$ могут находится в различном соотношении друг с другом (обычно $t_{турб} << t_{гидр}$; например, для течений типа пограничного слоя $t_{турб}/t_{гидр} \sim 10^{-2}$ (см., например, (*Метеорология и атомная энергия, 1971*)). В аэрономических приложениях, при анализе связи турбулентности и химической кинетики, можно ограничиться рассмотрением следующих возможных случаев :

1) $t_{хим} > t_{гидр}$ (при этом $t_{хим} >> t_{турб}$) – химические реакции неравновесны по отношению к осредненному движению и "заморожены" по отношению к пульсационному; в этом случае процессы химического превращения не влияют на газодинамические характеристики потока, но средний состав газа должен определяться из осредненных уравнений неразрывности отдельных химических компонентов, в которых источниковые члены рассчитываются с учетом пульсаций температуры и состава (*Иевлев, 1990; Маров, Колесниченко, 1987*);

2) $t_{хим} < t_{гидр}$ – химические реакции независимы по отношению к осредненному и пульсационному движениям; в этом случае существенно взаимовлияние процессов химической кинетики и процессов тепло- и массопереноса в турбулизованном потоке;

3) $t_{хим} \sim t_{гидр}$ – осредненное течение можно считать термохимически равновесным, однако химические реакции могут быть неравновесными по отношению к пульсациям; в этом случае состав смеси определяется из закона действующих масс (3.2.15*) с учетом влияния пульсаций температуры и состава, а процессы химического превращения влияют на коэффициенты турбулентного обмена (*Иевлев, 1990; Маров, Колесниченко, 1987*).

§ 3.3. Вывод определяющих соотношений для турбулентных потоков в многокомпонентной среде

При построении модели турбулентности многокомпонентной реагирующей смеси для замыкания осредненных гидродинамических уравнений (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) необходимы реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии $J^T_{\alpha j} \equiv \bar{\rho} < Z''_\alpha V''_j >$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$, тепла $q^T_j \equiv \bar{\rho} < h'' V''_j >$, удельного объема $J^T_{(v)j} \equiv \bar{\rho} < v'' V''_j > = -\overline{\rho' V''_j} / \bar{\rho}$ и тензора рейнольдсовых напряжений $R_{ij} \equiv -\bar{\rho} < V''_i V''_j >$. Как уже упоминалось в § 3.2, имеется несколько подходов к моделированию подобных корреляционных величин, различающихся степенью сложности (см. Гл. 4 и 5). В частности, линейные реологические соотношения, связывающие турбулентные потоки вещества, количества движения и энергии с соответствующими градиентами осредненных термогидродинамических параметров турбулизованной смеси, могут быть получены традиционным способом, основанном на понятии *пути смешения* (перемешивания). Выведенные в этом параграфе подобным способом соотношения обобщают на случай турбулентных течений многокомпонентной сжимаемой смеси классические результаты, полу-

ченные для аналогичных целей в рамках однородной жидкости с постоянной плотностью.

3.3.1. Градиентная гипотеза. Будем предполагать, что перенос скалярных характеристик турбулентными пульсациями происходит как диффузионный процесс и что можно допустить существование некоторого масштаба пути перемешивания, представляющего собой расстояние, которое должен пройти элементарный объем газа в турбулентном потоке, прежде чем этот объем необратимо перемешается с окружающей средой. Обозначая через A_L'' лагранжеву турбулентную пульсацию полевой величины A, соответствующую эйлеровой пульсации A'', а через $\xi_{(A)j}$ – эффективный путь смешения признака A, на который перемещаются турбулентные вихри в потоке, прежде чем они разрушатся за счет взаимодействия с другими возмущениями, будем иметь (*Ван Мигем, 1977*)

$$A_L'' = A'' + \xi_{(A)j} < A >_{,j} . \qquad (3.3.1)$$

Турбулентные потоки диффузии. Считая здесь состав турбулизованной среды консервативным (т.е. допуская, что вихри, смещаясь на расстояние ξ_j сохраняют в лагранжевом объеме ту же удельную плотность компоненты α, которой она обладала на исходном уровне), получим

$$(Z_\alpha)_L'' = 0, \qquad Z_\alpha'' = -\xi_k < Z_\alpha >_{,k} . \qquad (3.3.2)$$

Отсюда для турбулентного потока вещества $J_{\alpha j}^T$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ имеем следующее реологическое соотношение

$$J_{\alpha j}^T \equiv \bar{\rho} < Z_\alpha'' V_j'' > = -\bar{\rho} < \xi_k V_j'' > < Z_\alpha >_{,k} = -\bar{\rho} D_{kj}^T < Z_\alpha >_{,k} , \qquad (3.3.3)$$

где выражение $D_{kj}^T \equiv < \xi_k V_j'' >$ определяет несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии, учитывающий в анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости и состава вдоль разных осей координат. Это эквивалентно утверждению, что турбулентный поток вещества сорта α пропорционален градиенту средней концентрации $< Z_\alpha >$ и имеет по отношению к нему обратное направление.

Следует отметить, что в общем случае для каждой α-компоненты смеси необходимо вводить в рассмотрение свой эффективный путь смешения $\xi_{\alpha k}$ для процесса переноса вещества. Кроме того, гипотеза консервативности (*лагранжевой инвариантности*) концентраций Z_α в химически активном потоке, вообще говоря, не оправдана, так как при конечных скоростях химических реакций имеет место существенное взаимовлияние химической кинетики и процессов турбулентного тепло- и массопереноса (*Иевлев, 1975; Маров, Колесниченко, 1987*). Однако, в силу почти полной неизученности данного вопроса, далее в этом разделе будем считать, что $\xi_{\alpha k} \equiv \xi_k$ и $(Z_\alpha)_L'' \equiv 0$. В Гл. 5 развит термодинамический подход к проблеме замыкания гидродинамических уравнений среднего движения смеси, позволяющий описать процессы переноса вещества при помощи нескольких коэффициентов турбулентного обмена (связанных, в конеч-

ном счете, с собственными масштабами длины и скорости перемешивания компонентов) и получить наиболее общие реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии (в частности, в виде обобщенных соотношений Стефана–Максвелла).

Турбулентный перенос вещества в стратифицированной среде. Рассмотрим турбулентный массоперенос в покоящейся газовой среде (когда $<V_j>=0$, но $V_j'' \neq 0$), находящейся в поле силы тяжести (например, в атмосфере при отсутствии ветра). Как известно из классической гидродинамики, смесь может находится в механическом равновесии, не находясь при этом в диффузионном и тепловом равновесии. Можно показать (*Ландау, Лифшиц, 1988*), что в этом случае, распределение давления, плотности, концентраций отдельных компонентов и температуры зависит только от высоты x_3 – жидкость *стратифицирована.* Тогда выражение (3.3.3) для турбулентного диффузионного потока в вертикальном направлении может быть преобразовано, с учетом уравнения состояния (3.2.2) и уравнения гидростатики

$$\bar{p}_{,3} = -\bar{\rho} g \tag{3.3.4}$$

(ось x_3 направлена вверх), к следующему виду

$$J^T_{\alpha 3} = -\bar{\rho} D^T <Z_\alpha>_{,3} = -D^T \left\{ \bar{n}_{\alpha,3} + \bar{n}_\alpha \left(\frac{1}{<H>} + \frac{<T>_{,3}}{<T>} - \frac{M^*_{,3}}{M^*} \right) \right\}. \tag{3.3.3*}$$

Здесь $D^T(x_3) \equiv \overline{\rho \xi_3 V_3''} / \bar{\rho}$ (>0) – коэффициент турбулентной диффузии в вертикальном направлении; $<H> = \mathrm{k} <T> / M^* g = \bar{p} / \bar{\rho} g$ – осредненное значение локальной шкалы высот (*однородной атмосферы*), см. (2.3.95); ξ_3 – путь смешения состава в вертикальном направлении. Существенная роль последнего члена соотношения (3.3.3*) (отсутствующего, заметим, в известной работе (*Летто, 1951*)) при описании диффузии в верхней атмосфере планеты, где средняя молекулярная масса турбулизованной газовой смеси $M^* = \bar{\rho} / \bar{n}$ сильно изменяется с высотой, очевидна.

Действительно, так как $\bar{\rho} <Z_\alpha>_{,3} = \bar{\rho}(\bar{n}_\alpha / \bar{\rho})_{,3} = \bar{n}_{\alpha,3} - \bar{n}_\alpha (\ln \bar{\rho})_{,3}$ и для логарифмической производной по вертикали от плотности $\bar{\rho}$, с учетом уравнения состояния смеси (2.2.2), можно написать

$$(\ln \bar{\rho})_{,3} = \bar{p}_{,3} / \bar{p} - (\ln <T>)_{,3} + (\ln M^*)_{,3} = -\bar{\rho} g / \bar{\rho} <R^*><T> -$$

$$-(\ln <T>)_{,3} + (\ln M^*)_{,3} = -1/<H> - <T>_{,3} / <T> + M^*_{,3} / M^*,$$

то справедливо выражение

$$\bar{\rho} <Z_\alpha>_{,3} = \bar{n}_{\alpha,3} + \bar{n}_\alpha \left(\frac{1}{<H>} + \frac{<T>_{,3}}{<T>} - \frac{M^*_{,3}}{M^*} \right). \tag{3.3.5}$$

Подставляя (3.3.5) в соотношение $J^T_{\alpha,3} = -\bar{\rho} D^T <Z_\alpha>_{,3}$, получим (3.3.3*).

Коэффициенты турбулентной диффузии D^T_{kj}, в отличие от коэффициентов молекулярной диффузии, описывают не просто свойства жидкости, а свойства конкретного турбулентного режима течения смеси и потому зависят непосредственно как от интенсивности турбулентного поля, так и от масштаба (способа) осреднения пульсирующих скорости и состава. Именно способ введения средних характеристик турбулентного движения является основой для разработки методов экспериментальных измерений коэффициентов турбулентного обмена, проведение которых необходимо для сравнения результатов теории турбулентности с опытными данными. Коэффициенты $D^T_{kj}(\boldsymbol{r})$ являются функциями координат и обычно во много раз превосходят свои ламинарные аналоги. Это замечание касается и всех других рассмотренных ниже коэффициентов турбулентного обмена.

Турбулентный поток тепла. Получим теперь реологическое соотношение для турбулентного потока тепла $q^T_j \equiv \overline{\rho h'' V''_j}$, определяемого формулой (3.1.48), в многокомпонентной смеси. Используя соотношение (*Пригожин, Дефей, 1966*)

$$G \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \mu_\alpha = h - TS \tag{3.3.6}$$

для свободной энергии Гиббса, а также свойство (3.1.69) осреднения Фавра, для турбулентной пульсации G'', получим следующее точное выражение

$$G'' \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \left[Z''_\alpha < \mu_\alpha > + (Z_\alpha \mu''_\alpha)'' \right] = h'' - < T > S'' - (ST'')'',$$

откуда вытекает

$$h'' - < T > S'' - \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha < \mu_\alpha > = \left(ST'' + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \mu''_\alpha \right)'' . \tag{3.3.7}$$

В предположении, что для осредненных термодинамических величин справедливы те же соотношения термодинамики, что и при обычном их определении для ламинарных режимов течения смеси, можно показать, что пульсационные составляющие давления, температуры и химического потенциала удовлетворяют *тождеству Гиббса–Дюгема* (2.2.13) (см. разд. 2.2.1.)

$$\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \mu''_\alpha = -S T'' + p'/\rho . \tag{3.3.8}$$

Умножая теперь тождество (3.3.7) на $\rho V''_j$ и проводя статистическое осреднение по ансамблю одинаковых систем, в результате будем иметь

$$q^T_j - < T > J^T_{(S)j} - \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > J^T_{\alpha j} = \overline{\rho (p'/\rho)'' V''_j} = \overline{\rho (p'/\rho) V''_j} = \overline{p' V''_j} ,$$

откуда для турбулентного потока энтропии смеси, определяемого соотношением

$J^T_{(S)J} \equiv \bar{\rho} < S''V''_j >$, при использовании (3.1.54), получим

$$J^T_{(S)J} = \frac{1}{<T>}\left(q^T_j - \overline{p'V''_j} - \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > J^T_{\alpha j} \right) = \frac{1}{<T>}\left(q^{T*}_j - \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > J^T_{\alpha j} \right) =$$

$$= \frac{1}{<T>} J^{T*}_{qJ} + \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > J^T_{\alpha J}, \qquad (q^{T*}_j \equiv q^T_j - \overline{p'V''_j}) . \tag{3.3.9}$$

В этой формуле (имеющей, кстати, ту же структуру, что и аналогичная формула для потока энтропии в многокомпонентном газе при ламинарном режиме течения (сравни (3.3.9) с формулой (2.2.17)) турбулентный поток энтропии содержит приведенные потоки тепла J^{T*}_{qJ} (J^T_{qj}) (см. (2.1.50))

$$J^{T*}_{qj} \equiv q^{T*}_j - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J^T_{\alpha j} = q^T_j - \overline{p'V''_j} - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J^T_{\alpha j} = J^T_{qj} - \overline{p'V''_j}, \tag{3.3.10(а)}$$

$$J^T_{qJ} \equiv q^T_j - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J^T_{\alpha J}, \tag{3.3.10(в)}$$

и перенос парциальных энтропий $< S_\alpha >$ турбулентными потоками диффузии $J^T_{\alpha j}$. В формуле (3.3.9) при написании последнего выражения для $J^T_{(S)j}$ использовано соотношение

$$< \mu_\alpha > = < h_\alpha > - < T >< S_\alpha >, (\alpha = 1,2,...,N), \tag{3.3.11}$$

для осредненного химического потенциала α -компоненты.

Переписывая теперь (3.3.9) в виде

$$J^{T*}_{qj} = < T > J^T_{(S)j} - < T > \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > J^T_{\alpha j} = < T > \overline{\rho V''_j (S'' - \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > Z''_\alpha)} \tag{3.3.12}$$

и подставляя в него выражения $S'' = S''_L - \xi_{(S)k} < S >_{,k}$ и $Z''_\alpha = Z''_{\alpha L} - \xi_k < Z_\alpha >_{,k}$, связывающие между собой эйлеровы и лагранжевы турбулентные пульсации величин S и Z_α, получим

$$J^{T*}_{qj} = < T > \overline{\rho V''_j \left(S''_L - \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > (Z_\alpha)''_L \right)} - < T > \overline{\rho V''_j \xi_{(S)k}} < S >_{,k} +$$

$$+ < T > \overline{\rho V''_j \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > \xi_k} < Z_\alpha >_{,k} = < T > \overline{\rho V''_j \left(S''_L - \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha > (Z_\alpha)''_L \right)} -$$

$$- < T > \bar{\rho} \left(\chi^T_{jk} < S >_{,k} - D^T_{jk} \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha >< Z_\alpha >_{,k} \right) =$$

$$=<T>\overline{\rho V_j''\left(S_L''-\sum_{\alpha=1}^{N}<S_\alpha>(Z_\alpha)_L''\right)}-\overline{\rho}<C_p>D_{jk}^T\left(<T>_{,k}-\frac{\overline{p}_{,k}}{\overline{\rho}<C_p>}\right), \quad (3.3.13)$$

или, с учетом (3.3.10$^{(b)}$),

$$q_j^T=\overline{p'V_j''}+\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^T-\overline{\rho}<C_p>D_{jk}^T\left(<T>_{,k}-\frac{\overline{p}_{,k}}{\overline{\rho}<C_p>}\right)+$$

$$+<T>\overline{\rho V_j''\left(S_L''-\sum_{\alpha=1}^{N}<S_\alpha>(Z_\alpha)_L''\right)}, \quad (3.3.14)$$

где выражение $\chi_{jk}^T\equiv<\xi_{(S)k}V_j''>$ определяет тензор турбулентной температуропроводности.

В общем случае энтропия и концентрации компонентов химически активной смеси не являются лагранжевыми инвариантами (т.е. $S_L''\neq 0,\quad Z_{\alpha L}''\neq 0$) турбулентного переноса, так как движения вихрей могут сопровождаться различными тепловыми эффектами (например, локальным тепловыделением за счет химических реакций, или турбулентным мелкомасштабным нагревом за счет вязкой диссипации) и/или изменениями химического состава. Если же сделать предположение, что параметры S и Z_α являются консервативными характеристиками среды, т.е. если допустить, что турбулентное движение лагранжевой вихревой частицы смеси от уровня $\boldsymbol{r}(x_j,t)$, где произошел ее отрыв от общего потока, до уровня $\boldsymbol{r}(x_j,t)+\xi_j$ происходит изэнтропически и с неизменным пространственным распределением химических компонентов газа, то лагранжевы пульсации $S_L''=0$ и $(Z_\alpha)_L''=0$ (*адиабатичность процесса*), и выражение (3.3.14) для турбулентного потока тепла в смеси q_j^T значительно упрощается

$$q_j^T=\overline{p'V_j''}+\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^T-\lambda_{jk}^T\left(<T>_{,k}-\frac{\overline{p}_{,k}}{\overline{\rho}<C_p>}\right), \quad (3.3.15)$$

где формулой $\lambda_{jk}^T\equiv\overline{\rho}<C_p>D_{jk}^T$ вводится тензор коэффициентов турбулентной теплопроводности.

В соответствии с выражением (3.3.15) существуют два механизма передачи тепловой энергии через турбулизованный многокомпонентный газ: под действием осредненного градиента температуры (потенциальной температуры (см. Гл.1) в стратифицированной среде); потоками турбулентной диффузии $J_{\alpha j}^T$, причем каждая частица вещества сорта α переносит с собой в среднем $<h_\alpha>$ тепловой энергии. Следует подчеркнуть, что первый член в (3.3.15) не играет роли потока энергии (величина $\overline{p'V_j''}$ выпадает из полного энергетического уравнения (3.1.78) при учете формулы (3.1.54) для потока q_j^{T*} – "обычного" турбулентного

потока тепла) и оставлен в (3.3.15) из соображений удобства (см. Гл. 5).

По поводу вывода соотношения (3.3.13) отметим следующее. При написании последнего равенства в (3.3.13) предполагалось, что так называемые турбулентные *числа Льюиса* равны единице ($\boldsymbol{Le}^T_{jk} \equiv \chi^T_{jk} / D^T_{jk} = 1$) – обычное предположение в теории турбулентности (*Лапин, 1989*). Подобное условие равнозначно тому, что пути смешения для вещества ξ_j и энтропии $\xi_{(S)j}$ смеси одинаковы (см. формулы (3.3.3) и (3.3.14)). Однако, в общем случае эти масштабы необходимо различать - турбулентные вихри могут участвовать в переносе тепла более активно, чем в переносе вещества (как и наоборот). Кроме того, было использовано соотношение

$$< S >_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha >< Z_\alpha >_{,j} = \frac{< C_p >}{< T >}\left(< T >_{,j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{\rho} < C_p >} \right), \qquad (3.3.16)$$

легко выводимое из осредненного соотношения Гиббса (2.2.6). Действительно, подставляя для этой цели тождество (см.(3.1.75*))

$$< h >_{,j} \approx \left(\sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha >< h_\alpha > \right)_{,j} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha} Z_\alpha \right) < T >_{,j} + \sum_{\alpha=Б}^{N} < h_\alpha >< Z_\alpha >_{,j} =$$

$$= < C_p >< T >_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha >< Z_\alpha >_{,j}$$

в осредненное соотношение Гиббса

$$< T >< S >_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha >< Z_\alpha >_{,j} = < \varepsilon >_{,j} + \bar{p} < v >_{,j} = < h >_{,j} - < v > \bar{p}_{,j},$$

перепишем последнее в виде

$$< T >< S >_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(< \mu_\alpha > - < h_\alpha > \right) < Z_\alpha >_{,j} = < C_p >< T >_{,j} - < v > \bar{p}_{,j},$$

или, с учетом формулы (3.3.11), так

$$< T > \left[< S >_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{N} < S_\alpha >< Z_\alpha >_{,j} \right] = < C_p >< T >_{,j} - < v > \bar{p}_j .$$

Отсюда следует соотношение (3.3.16).

Турбулентный поток тепла в вертикальном направлении. Для стратифицированной атмосферы определяющее соотношение (3.3.15) для вертикальной компоненты турбулентного потока тепла может быть переписано, с учетом уравнения гидростатики (3.3.4), следующим образом

$$q^T_3 = \overline{p' V_3''} + \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J^T_{\alpha 3} - \lambda^T \left(< T >_{,3} + \frac{g}{< C_p >} \right), \qquad (3.3.15*)$$

где $\lambda^T(x_3)$ – коэффициент турбулентной теплопроводности в вертикальном направлении (параметр, зависящий как от способа осреднения, так и от интенсивности турбулентного поля температуры и скорости); $\gamma_a = g/<C_p>$ – сухоадиабатический градиент температуры (например, в условиях земной тропосферы $\gamma_a = 0.98\,град/100\,м$), а выражение $\Theta \equiv <T> + \gamma_a x_3$ приближенно совпадает с известной в метеорологии потенциальной температурой (см. Гл.1).

Приведем здесь полезную для дальнейшего форму записи соотношения (3.3.15). В случае изотропной турбулентности тензоры коэффициентов турбулентного обмена сводятся к диагональному виду $D^T_{jk} = D^T \delta_{jk}$, $\chi^T_{jk} = \chi^T \delta_{jk}$. Используя (3.3.15) и (3.3.17), в результате можем написать

$$q^T_j = \overline{p'V''_j} - \bar{\rho} D^T <h>_{,j} + \left(\bar{\rho} D^T <C_p> - \lambda^T\right) <T>_{,j} + \lambda^T \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{\rho} <C_p>} =$$

$$= \overline{p'V''_j} - \bar{\rho}\chi^T \left(<h>_{,j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{\rho}} \right), \qquad (3.3.17)$$

где $\chi^T \equiv \lambda^T / \bar{\rho} <C_p>$ – *турбулентный коэффициент температуропроводности*; здесь также предполагалось, что число Льюиса $Le^T \equiv \chi^T / D^T = 1$. Выражение (3.3.17) по форме совпадает с выражением для теплового потока в однородной среде, но по существу здесь имеется глубокое различие: для многокомпонентной смеси осредненная энтальпия $<h>$ определяется формулой (3.1.75*), т.е. величина $<h>_{,j}$ зависит не только от $<T>_{,j}$ (как для однородной среды) но и от $<Z_\alpha>_{,j}$.

Тензор Рейнольдса. Тензор турбулентных напряжений Рейнольдса, определяемый соотношением (3.1.37)

$$R_{ij} \equiv -\overline{\rho V''_i V''_j} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho V''^2_1} & -\overline{\rho V''_1 V''_2} & -\overline{\rho V''_1 V''_3} \\ -\overline{\rho V''_2 V''_1} & -\overline{\rho V''^2_2} & -\overline{\rho V''_2 V''_3} \\ -\overline{\rho V''_3 V''_1} & -\overline{\rho V''_3 V''_2} & -\overline{\rho V''^2_3} \end{pmatrix}, \qquad (3.3.18)$$

является симметричным тензором второго ранга и описывает турбулентные напряжения, обусловленные взаимодействием движущихся турбулентных образований (вихрей). Турбулентные напряжения, как и молекулярные, являются в действительности результатом переноса количества движения, но за счет пульсаций турбулентной скорости. Можно показать, используя для этого лагранжевы пульсации компонентов вектора скорости, что тензор R_{ij} связан с градиентами средневзвешенных скоростей потока следующим линейным соотношением

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e> \delta_{ij} + 2\bar{\rho}\nu^T_{ijsl} \overset{o}{e}_{sl} =$$

$$= -\tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e> \delta_{ij} + \bar{\rho}\nu^T_{ijsl}\left(<V_s>_{,l} + <V_l>_{,s} - \tfrac{2}{3}\delta_{sl} <V_k>_{,k}\right), \qquad (3.3.19)$$

где $<e>\equiv \overline{\rho V_j'' V_j''}/2\bar{\rho}$ – турбулентная энергия потока, определяемая формулой (3.1.65); $\overset{o}{e}_{ij} \equiv e_{ij} - \frac{1}{3}\left(e_{kl}\delta_{kl}\right)\delta_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} <V_k>_{,k}$ симметрическая с нулевым следом часть тензора скоростей деформаций $e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left[<V_i>_{,j} + <V_j>_{,i}\right]$; ν^T_{ijsl} – тензор турбулентной (кинематической) вязкости. Симметричный по индексам i, j и по s, l тензор четвертого ранга ν^T_{ijsl} должен удовлетворять условию $\nu^T_{jjsl}\overset{o}{e}_{sl} = 0$, что следует из формулы (3.3.19), и, кроме того, может, в общем случае, сам зависеть от инвариантов тензора скоростей деформаций (по этой причине соотношение (3.3.19) *квазилинейно*). Исходя из предположения, что тензор ν^T_{ijsl} вырождается так, что может быть записан через симметричный тензор второго ранга $\nu^T_{ij} = <e>^{1/2} l_{ij}$, для него было рекомендовано использовать формулу $\nu^T_{ijsl} = \frac{1}{2}\left(\nu^T_{is}\delta_{jl} + \nu^T_{js}\delta_{il}\right)$ (*Монин, 1950*). Соотношение (3.3.19) может быть получено также методами неравновесной термодинамики (см. Гл.5).

В простейшем случае плоского сдвигового (по оси x_3) потока, горизонтальная составляющая напряжения Рейнольдса (3.3.19) принимает вид

$$R_{13} = -\overline{\rho V_1'' V_3''} = \bar{\rho}\nu^T <V_1>_{,3}\ , \qquad (3.3.19^*)$$

где $\nu^T = <\xi_3 V_3''>$ – вертикальный коэффициент турбулентной вязкости, определенный как отношение кажущегося внутреннего напряжения к соответствующей осредненной скорости деформации. При написании (3.3.19*) предполагалось, что $V_1'' = -\xi_3 <V_1>_{,3}$, т.е. вихри, смещающиеся по вертикали на расстояние ξ_3, сохраняют на уровне $x_3 + \xi_3$ то количество движения, каким они обладали на исходном уровне x_3 (*гипотеза Прандтля*).

Подчеркнем еще раз, что выведенные здесь линейные по градиентам соотношения (3.3.3), (3.3.15), (3.3.19) для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений справедливы далеко не всегда. Строго говоря, для их обоснованности необходимо, чтобы в каждой точке пространства турбулентное поле пульсирующих скоростей (и других термогидродинамических параметров) характеризовалось равновесием между возникновением и диссипацией энергии турбулентности (*Иевлев, 1975*). Если же в уравнении баланса для энергии турбулентных пульсаций (см. (3.1.68)) существенны конвективные и диффузионные члены (т.е. параметры потока в точке зависят от характеристик турбулентного потока в целом), то локальные формулы (3.3.3), (3.3.15), (3.3.19) становятся неточными (подробнее см. Гл.4).

3.3.2. Моделирование турбулентных коэффициентов переноса. Очевидно, реологические соотношения (3.3.3), (3.3.15), (3.3.19) для турбулентных потоков не решают проблемы моделирования многокомпонентной турбулентности, а только определяют характер (структуру) такой модели. Формулы типа $D^T_{kj} \equiv <\xi_k V_j''>$ не позволяют экспериментально определить D^T_{kj}, так как путь

смешения ξ_k – слишком неопределенная величина, которую невозможно измерить. Поэтому проблема замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси (3.2.4)– (3.2.8) остается и сводится теперь к задаче нахождения аппроксимирующих формул для коэффициентов турбулентного переноса. Подобный подход носит название *полуэмпирической теории турбулентности.* Выражения для коэффициентов турбулентной диффузии D^T_{kj}, турбулентной теплопроводности λ^T_{kj} и турбулентной вязкости ν^T_{ijsl} могут быть получены различными способами, различающимися степенью сложности. Один из возможных способов полуэмпирического определения коэффициентов турбулентного обмена, основанный на использовании эволюционных уравнений переноса, упрощенных до алгебраических соотношений, для одноточечных парных корреляторов пульсирующих в потоке скорости, температуры и состава, рассмотрен в Гл.7 и 8 . Здесь же мы кратко остановимся на менее сложном способе.

Модель Прандтля. Рассмотрим осредненное течение, когда действие гравитационных сил создает преимущественное направление. Обычно принимается следующая гипотеза (которая согласуется с принципом локального равновесия турбулентного течения): коэффициенты турбулентного переноса в каждой точке зависят только от локальных параметров потока в этой же точке. В соответствии со сказанным, выражение, например, для коэффициента турбулентной вязкости может иметь такой вид: $\nu^T = \nu^T(\overline{\rho}, \nu, L, f^i, \langle V_1 \rangle_{,3})$, где $L(\boldsymbol{r})$ – внешний масштаб турбулентности в данной точке потока, $f^i(\boldsymbol{r})$ – локальные характеристики полей объемных сил (в частности, сил инерции, связанных с ускорением жидкости в продольном направлении; тогда $f \propto \langle V_1 \rangle_{,1}$). В случае учета влияния на локальные свойства потока как первой, так и второй производной от скорости, указанная зависимость будет другой. Масштаб $L(\boldsymbol{r})$ характеризует геометрическую структуру турбулентного поля или характерный размер (и тогда это интегральный масштаб турбулентности L), участвующих в турбулентном переносе крупных вихрей, несущих большую часть кинетической энергии потока. Иногда $L(\boldsymbol{r})$ можно трактовать как средний путь перемешивания $\Lambda(x_3) = \sqrt{\overline{\xi^2}}$ (как это первоначально было сделано Прандтлем (*Прандтль, 1925, 1942*)), и тогда по порядку величины он совпадает с радиусом корреляции поля скоростей. Внешний масштаб турбулентности $L(\boldsymbol{r})$ должен определяться из дополнительных соображений, и благодаря этой неопределенности, в сугубо локальных формулах для коэффициентов турбулентного обмена остается некоторая возможность для учета интегральных свойств потока и его предыстории. В частности, для свободных слоев со сдвигом параметр Λ можно по всему слою полагать константой, пропорциональной толщине слоя. Коэффициент пропорциональности, зависит, однако, от типа свободного течения. Например, для потока, обтекающего бесконечную плоскую стенку, установлено, что средний путь перемешивания Λ пропорционален расстоянию до стенки: $\Lambda(x_3) = \kappa x_3$, где κ – *постоянная Кармана*, которую можно принять равной ~ 0.4 .

Используя соображения размерности, в области развитой турбулентности вдали от стенки, где турбулентность слабо зависит от молекулярной вязкости ν

и когда $f^i = 0$, для коэффициента турбулентной вязкости можно установить $\nu^T = \nu^T(\bar{\rho}, L \cdot <V_1>_{,3})$, откуда с точностью до постоянного множителя следует *формула Прандтля*

$$\nu^T = L^2 \left| <V_1>_{,3} \right| , \quad (\text{или} \quad \nu^T = \Lambda^2 \left| <V_1>_{,3} \right|, \quad \Lambda = \kappa x_3). \tag{3.3.20}$$

Постоянный множитель устанавливается для каждого конкретного типа движения на основании экспериментальных данных; в некоторых случаях его удобно опустить, переопределив соответствующим образом масштаб турбулентности L.

Вблизи твердой стенки, где существенно влияние молекулярной вязкости ν, получается $\nu^T = \nu \cdot \varphi\left(\dfrac{\Lambda^2 <V_1>_{,3}}{\nu} \right)$. Дальнейшее уточнение этого выражения может быть проведено как с помощью теоретических (точнее полуэмпирических) соображений, так и чисто экспериментально (*Лапин, 1989; Монин, Яглом, 1965*). Если в число аргументов включить силы инерции в продольном направлении, то приведенные соотношения для ν^T видоизменяются и могут быть записаны, соответственно, в виде :

$$\nu^T = \left(<V_1>_{,1} / <V_1>_{,3} \right) \cdot L^2 \cdot \left| <V_1>_{,3} \right| \quad \text{и} \quad \nu^T = \nu \cdot \varphi\left(\frac{\Lambda^2 <V_1>_{,3}}{\nu}, \frac{<V_1>_{,1}}{<V_1>_{,3}} \right).$$

Наиболее простое и часто используемое предположение, позволяющее определить коэффициенты турбулентной теплопроводности λ^T и диффузии D^T, состоит в том, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта

$$\boldsymbol{Pr}^T \nu^T / \chi^T = \bar{\rho} < C_p > \nu^T / \lambda^T , \qquad \boldsymbol{Sc}^T \equiv \nu^T / D^T \tag{3.3.21}$$

являются приблизительно постоянными. Это связано с тем, что, в отличии от самих коэффициентов турбулентного переноса, указанные отношения слабо меняются как в пределах турбулизованного течения, так и от течения к течению. Обычно принимают, что $\chi^T = D^T$ (число Льюиса $\boldsymbol{Le}^T = \chi^T / D^T = 1$), тогда числа Прандтля и Шмидта совпадают: $\boldsymbol{Pr}^T = \boldsymbol{Sc}^T = const$, причем $\boldsymbol{Pr}^T = 0.86 \div 0.90$ для течений вблизи стенки; $\boldsymbol{Pr}^T = 0.5$ в плоских струях и слоях смешения.

Запишем теперь, пользуясь формулами (3.3.20), (3.3.3*) и (3.3.15*), реологические соотношения для тензора рейнольдсовых напряжений и турбулентных потоков диффузии и тепла, описывающие перенос количества движения, вещества и тепловой энергии в вертикальном направлении при турбулентном перемешивании многокомпонентной смеси

$$R_{13} = \bar{\rho} L^2 \left| <V_1>_{,3} \right| <V_1>_{,3} , \tag{3.3.19**}$$

$$J^T_{\alpha 3} = -\frac{1}{\boldsymbol{Pr}^T} \bar{\rho} L^2 \left| <V_1>_{,3} \right| <Z_\alpha>_{,3} (\alpha = 1,2,...,N) , \tag{3.3.3**}$$

$$q_3^T = -\frac{1}{\boldsymbol{Pr}^T}\overline{\rho}\,\langle C_p\rangle L^2\left|\langle V_1\rangle_{,3}\right|\cdot\left(\langle T\rangle_{,3}+\frac{g}{\langle C_p\rangle}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle J_{\alpha 3}^T =$$

$$= -\frac{1}{\boldsymbol{Pr}^T}\overline{\rho}L^2\left|\langle V_1\rangle_{,3}\right|\cdot\left(\langle h\rangle_{,3}+g\right). \qquad (3.3.15^{**})$$

Среди предположений, сделанных при выводе этих формул, весьма существенна гипотеза *лагранжевой инвариантности* переносимой субстанции. Как было упомянуто выше, для химически активной газовой смеси, стратифицированной в гравитационном поле, указанная гипотеза в общем случае не справедлива, и в соотношения (3.3.19**), (3.3.3**) и (3.3.15**) необходимо вводить поправку, учитывающую влияние неоднородного распределения энтропии (температуры) и состава на эффективность турбулентного перемешивания. Такого рода поправка к турбулентным коэффициентам переноса в многокомпонентной смеси может быть найдена, вообще говоря, при использовании так называемой *К-теории* многокомпонентной турбулентности (см. разд. 4.3.9.). В однородной стратифицированной среде (например, в хорошо перемешанной нижней атмосфере планеты) этот эффект возникает только из-за имеющихся вертикальных градиентов температуры в отдельных областях пространства, благодаря чему появляются дополнительные силы плавучести (*архимедовы силы*) способствующие, или препятствующие образованию энергии турбулентности (см. § 4.2). Для учета этого факта Прандтлем был предложен безразмерный критерий- градиентное число Ричардсона $\boldsymbol{Ri} = (g/\langle T\rangle)(\langle T\rangle_{,3}+ g/\langle C_p\rangle)/(\langle V_1\rangle_{,3})^2$ (см. формулу (4.2.32)). Исходя из соображений теории подобия, естественно предположить, что все безразмерные характеристики турбулентного потока являются определенными функциями числа $\boldsymbol{Ri}$. Для того, чтобы учесть влияние сил плавучести в соотношениях (3.3.20), (3.3.3**) и (3.3.15**), можно использовать следующие поправки к масштабу L :

1) при устойчивой стратификации ($\boldsymbol{Ri}$ >0), затрудняющей развитие турбулентности: $L = L^*(1-\beta_1\boldsymbol{Ri})$, $5<\beta_1<10$ (обычно $\beta_1 \cong 7$) (*Монин, Яглом, 1965*)];

2) при неустойчивой стратификации ($\boldsymbol{Ri}$ <0), увеличивающей энергию турбулентности за счет энергии неустойчивости: $L = L^*(1-\beta_2\boldsymbol{Ri})^{-1/4}$ ($\beta_2 \cong 14$) (*Ламли, Пановский, 1966*); для этого же случая рекомендована также формула $L = L^*(1-c\boldsymbol{Ri})^{0,25}$, где $c-$ эмпирический коэффициент (*Брэдшоу, 1969*).

3) в предельном случае ($\boldsymbol{Ri}$ =0), когда адиабатическое распределение температуры с высотой ($\langle T\rangle_{,3} = -g/\langle C_p\rangle \equiv \gamma_a$) не оказывает влияния на развитие турбулентности: $L = L^*$ - длина пути смешения при отсутствии сил плавучести.

Одновременно архимедовы силы изменяют число Прандтля–Шмидта (*Мунк, Андерсон, 1948*):

$$\boldsymbol{Pr}^T = \boldsymbol{Pr}^{T*}(1+3.33\boldsymbol{Ri})^{1.5}/(1+10\boldsymbol{Ri})^{0.5}.$$

Отметим еще раз, что реологические соотношения (3.3.19**), (3.3.3**) и (3.3.15**) справедливы далеко не всегда. В частности, в турбулентном потоке за сеткой могут существовать области, где скорость осредненного течения постоян-

на и градиент $<V_1>_{,3}=0$, в то время как коррелятор $<V_1''V_3''>\neq 0$, поскольку турбулентность генерируется непосредственно позади сетки и далее переносится по течению осредненным потоком. Однако гипотеза пути смешения (3.3.20) требует нулевых величин ν^T, и согласно модели Прандтля (*Прандтль, 1942*), турбулентность отсутствует. Указанное обстоятельство раскрывает основной недостаток этой модели: гипотеза пути смешения предполагает локальную равновесность турбулентного поля. К счастью, смещение друг относительно друга точек пространства, в которых $<V_1''V_3''>\neq 0$ и $<V_1>_{,3}=0$, часто невелико; в этом случае применение формулы (3.3.19*) не приводит к значительным ошибкам при численном моделировании течения.

Для преодоления ограниченности гипотезы пути смешения возникла необходимость в разработке моделей турбулентности, позволяющих учитывать "диффузию" турбулентности путем решения эволюционных уравнений переноса для моментов второго порядка. Фундаментальная роль в развитии подобных теорий турбулентности принадлежит Колмогорову (*Колмогоров, 1942*), которым была предложена гипотеза, связывающая коэффициент турбулентной вязкости ν^T и скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon_e \equiv \overline{\pi'_{ij}V'_{i,j}}$ (см.(3.1.52(2))) с осредненным значением кинетической энергии турбулентных пульсаций $<e>\equiv<V_s'V_s''>/2$: $\nu^T = c_\mu L\sqrt{<e>}$, $\varepsilon_e = <e>^{3/2}/L$; здесь, в силу неопределенности масштаба L, константу во втором соотношении можно принять равной единице, тогда эмпирическая постоянная c_μ с учетом опытных данных близка к 0.09 (см. формулы (4.2.25) и (4.2.29)). Как известно, для однородных сред существует целая группа полуэмпирических моделей турбулентности Прандтля-Колмогорова–Лаундера, в которых эти соотношения используются для определения коэффициентов турбулентного переноса в свободных сдвиговых течениях (плоских или осесимметричных) путем численного решения системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений для турбулентной кинетической энергии $<e>$ и скорости диссипации ε_e или для внешнего масштаба турбулентности L (см., например, (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*)).

3.3.3. Формулы для определения корреляций, включающих пульсацию плотности. В отличие от однородного турбулизованного газового континуума, в котором эффекты сжимаемости часто пренебрежимо малы (*Монин, Яглом, 1965*), в многокомпонентной реагирующей газовой смеси полная массовая плотность ρ в общем случае значительно изменяется от точки к точке, например, в результате локального выделения тепла в химических реакциях. В уравнения баланса осредненной внутренней энергии смеси (3.1.57), баланса турбулентной кинетической энергии (3.1.68), а также в эволюционные уравнения переноса для турбулентных потоков тепла q_j^T, вещества $J_{\alpha j}^T$, количества движения R_{ij} (см. Гл.4) входят корреляции вида $\overline{\rho' A''}/\overline{\rho}$ $(\equiv -\overline{\rho}<\nu''A''>$, где $A = V_j,\ h,\ Z_\alpha)$. Для того, чтобы их определить, необходимо, вообще говоря, привлекать дополнительные балансовые уравнения для корреляционных функций типа $J_{(\nu)j}^T, \overline{\rho\nu''Z_\alpha''}$, $\overline{\rho\nu''h''}$, включающих, в свою очередь, целый ряд новых корреляционных членов, плохо

поддающихся моделированию. Такой подход намечен в § 4.3.

Вместе с тем, для большого числа турбулентных режимов движения в средней атмосфере относительные пульсации плотности многокомпонентной смеси, вызванные пульсациями давления, пренебрежимо малы по сравнению с ее относительными изменениями, вызванными пульсациями температуры и концентраций компонентов. Поэтому возможен более простой путь определения корреляций $\overline{\rho v''A''}$ через известные турбулентные потоки диффузии и тепла, основанный на использовании некоторого алгебраического соотношения, выводимого при помощи бароклинного уравнения состояния для давления смеси.

Для вывода этого соотношения получим сначала точное выражение для турбулентных пульсаций плотности ρ' в газовой смеси, в качестве уравнения состояния которой возьмем, как и прежде, уравнение состояния совершенного газа (2.1.53)

$$p = \mathrm{k}Tn = \mathrm{k}\rho T\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha = R^*\rho T,$$

где

$$R^* = \mathrm{k}n/\rho = \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha/\rho = \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \qquad (3.3.22)$$

суть "*газовая постоянная*" для смеси.

Подставляя в (2.1.53) истинные (мгновенные) значения величин R^* и T, записанные в виде суммы осредненных и пульсационных значений ($R^* = < R^* > + R^{*''}$, $T = < T > + T''$), перепишем его следующим образом

$$p = < R^* > \rho < T > + (R^*)''\rho < T > + < R^* > \rho T'' + (R^*)''\rho T'' =$$

$$= < R^* > \rho < T > + \mathrm{k}\rho < T > \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' + < R^* > \rho T'' + \mathrm{k}\rho\sum_{\alpha=1}^{N}(Z_\alpha'' T''). \qquad (3.3.23)$$

Здесь введены обозначения

$$< R^* > = \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > = \mathrm{k}\bar{n}/\bar{\rho}, \qquad (R^*)'' = \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha''. \qquad (3.3.24)$$

Если применить оператор статистического осреднения (3.1.3) к (3.3.23), то получим осредненное уравнение состояния для давления смеси (3.3.1), которое здесь удобно записать в несколько ином виде

$$\bar{p} = < R^* > \bar{\rho} < T > + \mathrm{k}\bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha'' T'' >. \qquad (3.3.25)$$

Из (3.3.25) следует

$$< R^* >< T > = \bar{p}/\bar{\rho} - \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha'' T'' >. \qquad (3.3.26)$$

Используем (3.3.26) для исключения произведения $<R^*><T>$ из (3.3.23); в результате получим

$$p = \bar{p}\rho/\bar{\rho} + <R^*>\rho T'' + k\rho <T> \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' + k\rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z_\alpha'' T'') -$$

$$- k\rho \sum_{\alpha=1}^{N} <Z_\alpha'' T''> = \bar{p} + \bar{p}\rho'/\bar{\rho} + <R^*>\rho T'' + k\rho <T> \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' + k\rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z_\alpha'' T'')'',$$

откуда вытекает искомое точное соотношение (*Маров, Колесниченко, 1987*)

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{<R^*>\rho T''}{\bar{p}} - \frac{k <T> \rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha''}{\bar{p}} - \frac{k\rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z_\alpha'' T'')''}{\bar{p}} \qquad (3.3.27)$$

для турбулентных пульсаций массовой плотности ρ' многокомпонентной газовой смеси, вызываемых пульсациями давления, температуры и концентраций отдельных компонентов. Важно подчеркнуть, что в выражении (3.3.27) осредненное давление $\bar{p}$ определяется точным уравнением состояния (3.3.25).

Отметим, что, например, для течений с малыми числами Маха $\boldsymbol{Ma}$ в формуле (3.3.27) можно пренебречь относительными турбулентными пульсациями давления по сравнению с относительными пульсациями плотности и/или температуры. Это условие известно как *гипотеза Морковина*, справедливость которой для течений без химических реакций была подтверждена вплоть до $\boldsymbol{Ma} = 5$ (*Морковин, 1961*). Так, для земной атмосферы вынужденная конвекция существенно проявляется только в тех струйных течениях, в которых градиенты скорости ветра достигают достаточно больших значений. В этом случае отношения пульсаций ρ', p' и T'' к соответствующим средним значениям $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ и $<T>$ имеют следующий порядок величин (*Ван Мигем, 1977*)

$$|\rho'|/\bar{\rho} \approx |T''|/<T> \approx 10^{-4}, \quad |p'|/\bar{p} \approx 10^{-5}. \qquad (3.3.28)$$

В то же время, масштаб турбулентных пульсаций давления для свободной конвекции в атмосфере, как правило, значительно больше, чем для вынужденной конвекции, и потому члены с пульсациями давления p' в формуле (3.3.27) отбрасывать, вообще говоря, нельзя.

В рассматриваемом здесь случае многокомпонентной химически активной смеси пульсацию температуры T'' в (3.3.27) удобно выразить через пульсацию энтальпии, используя для этой цели точное соотношение (3.2.16), которое запишем в виде

$$<C_p> T'' = h'' - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> Z_\alpha'' - \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha} (Z_\alpha'' T'')''. \qquad (3.3.29)$$

Это связано с тем, что в случае многокомпонентной смеси эволюционные уравнения переноса для корреляций, содержащих пульсации температуры, значи-

тельно сложнее аналогичных уравнений, содержащих пульсации полной энтальпии смеси (см. Гл.4). Так, например, уравнение для среднего квадрата пульсаций энтальпии $<h''^2>$, в отличии от подобного уравнения для дисперсии $<T''^2>$, не содержит большого числа дополнительных парных корреляций пульсаций температуры и состава, присутствие которых в уравнении для $<T''^2>$ связано, в конечном счете, с наличием химического источника тепловой энергии в регулярном уравнении для температуры (2.1.49) (*Колесниченко, Маров, 1980*).

Таким образом, при подстановке соотношения (3.2.29) в (3.3.27) будем иметь

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\rho v'' = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho <R^*>}{\bar{p} <C_p>}\left(h'' - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> Z_\alpha''\right) - \frac{\rho k <T>}{\bar{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha'' +$$

$$+ \frac{\rho <R^*>}{\bar{p} <C_p>} \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}^* (Z_\alpha'' T'')'' = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho <R^*>}{\bar{p} <C_p>}\left(h'' - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 Z_\alpha''\right) +$$

$$+ \frac{\rho <R^*>}{\bar{p} <C_p>} \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}^* (Z_\alpha'' T'')'. \qquad (3.3.30)$$

Здесь введены обозначения

$$C_{p\alpha}^* \equiv C_{p\alpha} - \frac{\bar{\rho} <C_p>}{\bar{n}} = \bar{n}^{-1} \sum_{\beta=1}^{N} \left(C_{p\alpha} - C_{p\beta}\right) \bar{n}_\beta \approx 0, \qquad (3.3.31)$$

причем приближенное равенство в (3.3.31) справедливо в случае, когда удельные теплоемкости отдельных компонентов не сильно отличаются друг от друга. Ниже это утверждение будет дополнительно уточнено.

Получим теперь точную формулу для искомой корреляции $\overline{\rho v'' A''}$. Умножая (3.3.30) на A'' и статистически осредняя по ансамблю возможных реализаций, получим

$$\bar{\rho} \overline{v'' A''} = -\frac{\overline{p' A''}}{\bar{p}} + \frac{<R^*>}{\bar{p} <C_p>}\left[\bar{\rho} <h'' A''> - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> \bar{\rho} <Z_\alpha'' A''>\right] -$$

$$- \frac{k <T>}{\bar{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{\rho} <Z_\alpha'' A''> + \frac{<R^*>}{\bar{p} <C_p>} \sum_{\alpha=1}^{N} C_{p\alpha}^* \bar{\rho} <Z_\alpha'' T'' A''>. \qquad (3.3.32)$$

Для исключения пульсаций температуры T'' из формулы (3.3.30) используем соотношение (3.3.29), применяя его последовательно два раза; в результате для корреляций $(Z_\alpha'' T'')$ будем иметь

$$(Z_\alpha'' T'') = \frac{1}{<C_p>}\left((h'' Z_\alpha'') - \sum_{\beta=1}^{N} <h_\beta> (Z_\alpha'' Z_\beta'') - Z_\alpha'' \sum_{\beta=1}^{N} C_{p\beta} (Z_\beta'' T'')''\right) =$$

$$= \frac{1}{< C_p >}\left\{(h''Z''_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta > (Z''_\alpha Z''_\beta) - \frac{Z''_\alpha}{< C_p >}\left((C''_p h'') - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta > (C''_p Z''_\beta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (C''_p \sum_{\beta=1}^{N} C_{p\beta}(Z''_\beta T'')'')''\right)\right\} = \frac{1}{< C_p >}\left\{(h''Z''_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta > (Z''_\alpha Z''_\beta)... \right. \quad (3.3.33)$$

Тогда, с учетом этого соотношения, для коррелятора третьего порядка в (3.3.32), можно написать

$$< Z''_\alpha T'' A'' > = < C_p >^{-2} < A'' Z''_\alpha > \left[< C''_p h'' > - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta >< C''_p Z''_\beta >\right] +$$

$$+ < C_p >^{-1} < Z''_\alpha h'' A'' > - < C_p >^{-1} \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta >< A'' Z''_\alpha Z''_\beta > -$$

$$- < C_p >^{-2} < A'' h'' C''_p Z'' > + < C_p >^{-2} < A'' Z''_\alpha [C''_p (C''_p T'')'']'' >, \quad (3.3.34)$$

где

$$< A'' Z''_\alpha [C''_p (C''_p T'')'']'' > = < A'' Z''_\alpha C''^2_p T'' > -$$
$$- < C''_p T'' >< A'' Z''_\alpha C''_p > - < A'' Z''_\alpha >< C''^2_p T'' >. \quad (3.3.35)$$

Проблема замыкания для многокомпонентной турбулентности решается здесь на уровне моментов второго порядка. Ограничиваясь поэтому учетом только парных корреляций в соотношении (3.3.34), для искомой величины $\bar{\rho} < v'' A'' >$ получим следующее соотношение, имеющее принципиальное значение для развитого здесь подхода

$$\bar{\rho} < v'' A'' > = \overline{A''} = -\frac{\overline{p' A''}}{\bar{p}} + \frac{< R^* >}{\bar{p} < C_p >}\left(\overline{\rho h'' A''} - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > \overline{\rho Z''_\alpha A''}\right) +$$

$$+ \frac{k}{\bar{p} < C_p >} \sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha \overline{\rho Z''_\alpha A''}, \quad (3.3.36)$$

где введены обозначения

$$H_\alpha \equiv < C_p >< T > + \frac{C^*_{p\alpha}}{< C_p >^2}\left(- < C''_p h'' > + \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta >< C''_P Z''_\beta >\right). \quad (3.3.37)$$

Если $C''_p \cong 0$, то формула (3.3.36) принимает более простой вид

$$< v'' A'' > = \frac{\overline{p' A''}}{\bar{p}\bar{\rho}} + \frac{< R^* >}{\bar{p} < C_p >}\left(< h'' A'' > - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha >< Z''_\alpha A'' >\right) +$$

$$+ \frac{k < T >}{\bar{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} < Z''_\alpha A'' >, \quad (3.3.38)$$

Соотношение (3.3.38) мы будем использовать в моделях многокомпонентной турбулентности, основанных на простых (*градиентных*) схемах замыкания, когда пренебрегается парными корреляциями для пульсаций температуры и состава (см. (3.1.79)). В случае, если $C^{*}_{p\alpha} \approx 0$ (и при этом, как легко видеть, $C''_p \propto (n/\rho)'' \neq 0$), справедлива формула

$$<v''A''> = \frac{\overline{p'A''}}{\bar{p}\,\bar{\rho}} + \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>}\left(<h''A''> - \sum_{\alpha=1}^{N} h^{0}_{\alpha} <Z''_{\alpha}A''>\right), \qquad (3.3.38^{*})$$

которой мы будем пользоваться в более сложных моделях турбулентности, основанных на дифференциальных уравнениях переноса для вторых моментов пульсирующих термогидродинамических величин.

Отождествляя теперь в (3.3.38) параметр A с гидродинамической скоростью течения V_j, получим выражение для *турбулентного потока удельного объема* смеси $J^{T}_{(v)j}$ – важнейшей характеристики турбулентного поля при полуэмпирическом моделировании многокомпонентной турбулентности с использованием весового осреднения Фавра

$$J^{T}_{(v)j} = -\frac{\overline{p'V''_j}}{\bar{p}} + \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>}\left(q^{T}_{j} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J^{T}_{\alpha j}\right) + \frac{\mathrm{k}}{\bar{p}<C_p>}\sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha J^{T}_{\alpha j} \approx$$

$$\approx \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>} J^{T}_{qj} + \frac{k<T>}{\bar{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} J^{T}_{\alpha j}, \qquad (3.3.39)$$

где второе приближенное соотношение справедливо в случае, если $C^{*}_{p\alpha} \approx 0$. Турбулентный поток удельного объема $J^{T}_{(v)j}$ фигурирует как в ранее полученных осредненных гидродинамических уравнениях смеси, так и во многих эволюционных уравнениях переноса для одноточечных вторых моментов, например, в уравнении сохранения турбулентной энергии (3.2.7).

Аналогично, полагая в (3.3.36) последовательно $A \equiv h,\ v,\ Z_\alpha$, получим соотношения

$$\overline{h''} = -\frac{\overline{p'h''}}{\bar{p}} + \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>}\left(\overline{\rho h''^{2}} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> \overline{\rho Z''_\alpha h''}\right) + \frac{\mathrm{k}}{\bar{p}<C_p>}\sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha \overline{\rho Z''_\alpha h''},$$

$$\overline{v''} = -\frac{\overline{p'v''}}{\bar{p}} + \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>}\left(\overline{h''} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> \overline{Z''_\alpha}\right) + \mathrm{k}\sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha \overline{Z''_\alpha}, \qquad (3.3.40)$$

$$\overline{Z''_\beta} = -\frac{\overline{p'Z''_\beta}}{\bar{p}} + \frac{<R^{*}>}{\bar{p}<C_p>}\left(\overline{\rho h''Z''_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> \rho\overline{Z''_\alpha Z''_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} H_\alpha \overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta}/\bar{p}<C_p>,$$

применяемые в случае усложненных моделей реагирующей турбулентности для исключения корреляционных членов типа $<v''A''>$ из соответствующих уравне-

ний переноса для вторых корреляционных моментов (см. Гл.4).

В заключение перечислим базисные (опорные) дифференциальные уравнения и конечные соотношения, характеризующие относительно простую модель турбулизованного многокомпонентного континуума. Она отвечает случаю, когда все вторые корреляции типа $< A''B'' >$ для пульсирующих термогидродинамических параметров A и B, отличных от гидродинамической скорости течения V_j в используемых формулах, малы по сравнению с членами первого порядка $<A><B>$ и могут быть опущены. Это, прежде всего, гидродинамические уравнения для среднего движения (3.2.4)–(3.2.7), осредненное уравнение состояния для давления в форме (3.2.2), соотношение (3.2.41) для скоростей химических реакций, взятое в виде $\overline{\xi_s} = \xi_s(<T>, \overline{n}_\alpha)$ (т.е. величины $\overline{\xi}_s$ рассчитываются только по осредненным значениям температуры и состава смеси), соотношение (3.3.39), определяющее турбулентный поток удельного объема смеси $J^T_{(v)j}$, а также реологические соотношения (3.3.3), (3.3.15) и (3.3.19) для турбулентных потоков диффузии $J^T_{\alpha j}$, тепла q^T_j и тензора рейнольдсовых напряжений R_{ij}. Перечисленная сопряженная система дифференциальных уравнений и конечных соотношений должна быть дополнена набором химических компонентов, с учетом их газодинамических, термофизических и химических свойств; универсальными законами кинетики и термодинамики, включающими уравнения состояния и выражения для различных термодинамических функций, сохраняющих в рассматриваемом приближении свой обычный вид; формулами для молекулярных и турбулентных коэффициентов переноса; а также начальными и граничными условиями. Она образует "упрощенную" континуальную модель реагирующей многокомпонентной турбулентности. С использованием такой модели могут решаться разнообразные геофизические и аэрономические задачи, примеры которых приведены в Гл.6 и 7.

***Краткие выводы**:*

1). Получена система замкнутых соотношений (дифференциальных уравнений среднего движения, уравнений химической кинетики и состояния в условиях турбулентного перемешивания, а также определяющих соотношений для разнообразных турбулентных потоков вещества, количества движения и энергии), учитывающая многокомпонентность и сжимаемость газовой смеси, диффузионный тепло- и массоперенос, химические реакции и воздействие поля гравитации. Эта система пригодна для описания широкого класса движений и физико-химических процессов в многокомпонентных реагирующих средах .

2). При осреднении исходных уравнений многокомпонентной гидродинамики, приведенных в Гл. 2, наряду с традиционным безвесовым осреднением (например, по ансамблю возможных реализаций), систематически использовано весовое осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись и анализ осредненных гидродинамических уравнений газовой смеси с переменной плотностью. Получены дифференциальные уравнения масштаба среднего движения, включающие в себя уравнение баланса для удельного объема; уравнения баланса для концентраций молекулярных компонент смеси; уравнения сохранения химических элементов; уравнение движения турбулизованной среды;

уравнение баланса для потенциальной энергии; уравнение баланса для кинетической энергии среднего движения системы; уравнение баланса внутренней энергии турбулизованной среды, в том числе записанное через температуру и давление; уравнение переноса турбулентной энергии сжимаемой смеси; и уравнение сохранения полной энергии турбулентного многокомпонентного континуума. Проанализирован физический смысл отдельных членов данных уравнений, в том числе составляющих энергетического баланса.

3). Предложена процедура осреднения скоростей химических реакций для реагирующей среды, позволяющая получить соответствующие кинетические законы в условиях турбулентного движения смеси. Это дает подход к решению проблемы моделирования таких сред, сложность которой состоит в необходимости осреднения сильно нелинейных источниковых членов производства масс в химических реакциях, имеющих экспоненциальный характер, и последующего определения большого числа дополнительных корреляций, связанных с пульсациями температуры и состава.

4). Получены традиционным способом, основанном на понятии пути смешения, реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений, обобщающие на многокомпонентный случай результаты, полученные для аналогичных целей в рамках однородной несжимаемой жидкости. Выведены соотношения для корреляций, включающих пульсации плотности, позволяющее замкнуть систему осредненных гидродинамических уравнений.

ГЛАВА 4

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ВТОРЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений переноса, описывающих эволюцию одноточечных вторых моментов $< A''B'' >$ турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров химически активной многокомпонентной среды с переменной плотностью и переменными теплофизическими свойствами. Такие уравнения для однородной жидкости в приближении Буссинеска (*Буссинеск*, 1877) лежат в основе *метода инвариантного моделирования* во многих современных теориях турбулентности различной степени сложности (см. (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*)). Несмотря на полуэмпирический характер уравнений для моментов, в которых при описании корреляционных функций высокого порядка используются приближенные выражения, содержащие эмпирические коэффициенты, следует признать достаточную гибкость основанных на них моделей. Они позволяют учесть воздействие механизмов конвекции, диффузии, а также возникновения, перераспределения и диссипации энергии турбулентного поля, на пространственно-временное распределение усредненных термогидродинамических параметров среды. Поэтому, подобные уравнения нашли широкое применение при численном моделировании таких течений жидкости, для которых существенно влияние предыстории потока на характеристики турбулентности в точке (*Турбулентность: Принципы и применения*, *1980; Иевлев, 1975, 1990*). С другой стороны, ими можно воспользоваться для нахождения коэффициентов турбулентного обмена в свободных потоках с поперечным сдвигом (градиентом скорости), в том числе применительно к специфике моделирования природных сред (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Одновременно следует подчеркнуть ограниченные возможности данного подхода к моделированию турбулентных течений. Дело в том, что само существование определенной формы аппроксимирующих соотношений для корреляций высокого порядка в уравнениях переноса для вторых моментов (с учетом того, что моделирующие соотношения должны характеризоваться теми же свойствами тензорной симметрии, что и у моделируемых членов, и иметь ту же размерность) возможно только при наличии некоторого "*равновесного*" при данных условиях спектра турбулентности. Кроме того, часто делаются предположения о постоянстве эмпирических констант, значения которых не нужно подбирать для каждого нового течения. Для другого режима турбулентного течения форма аппроксимирующих соотношений, и тем более значения констант, могут сильно отличаться (*Иевлев, 1975*). Вместе с тем, схемы замыкания, использующие эволюционные уравнения переноса для вторых моментов, представляются по своим потенциальным возможностям более перспективными, чем схемы первого порядка, рассмотренные нами в § 3.3.

Отметим также, что задачи со сложной геометрией (пространственные течения, отрывные течения и др.) с помощью полуэмпирических теорий практически не рассчитываются. Это связано с недостаточной универсальностью полуэмпирических теорий, не учитывающих, например, роль крупных вихрей (с разме-

рами, соизмеримыми с поперечными размерами потока, и характеристиками, существенно зависящими как от геометрии задачи, так и от режима течения) в механизме турбулентного переноса. Подобные задачи решаются обычно методом прямого численного моделирования крупномасштабной турбулентности , то есть путем численного эксперимента (*Белоцерковский, 1984, 1985, 1997*; *Иевлев, 1990*).

Сделаем еще несколько вводных замечаний относительно отличительных особенностей полуэмпирической теории многокомпонентной турбулентности применительно к планетной атмосфере. Существование градиентов концентраций составляет одно из важнейших свойств химически реагирующих течений, которое обычно не рассматривалось классическими моделями турбулентности с "постоянной" плотностью. Градиенты плотности, температуры и концентраций, возникающие из-за локального тепловыделения в химических реакциях, могут сильно изменить поле гидродинамической скорости жидкости посредством процессов турбулентного тепло- и массопереноса. Тем самым химическая кинетика реализует обратную связь с гидродинамикой. В случае турбулизованной смеси, в дополнение к пульсациям скорости, имеют место пульсации массовой плотности, температуры и концентраций отдельных компонентов. Очевидно, так как система осредненных уравнений многокомпонентной гидродинамики (3.2.4)–(3.2.8) содержит одноточечные парные корреляции, включающие указанные пульсации, то для ее замыкания необходимо привлекать к рассмотрению большое число дополнительных эволюционных (прогностических) уравнений переноса для вторых моментов. В этих уравнениях высшие моменты могут быть аппроксимированы градиентными соотношениями, написанными по аналогии с теми, которые используются в моделях нереагирующей турбулентности для течений с постоянной плотностью. Развиваемый в этой главе подход не является, таким образом, принципиально новым, а содержит изложение с единой точки зрения идей, используемых в феноменологических теориях турбулентности однородных жидкостей применительно к специфике сжимаемых многокомпонентных смесей.

§ 4.1. Общая форма уравнения переноса для парных корреляций в сжимаемом потоке

После осреднения по Рейнольдсу гидродинамических уравнений смеси (3.2.4)–(3.2.8) последние становятся незамкнутыми, в связи с чем возникает проблема получения дополнительных соотношений для турбулентных потоков вещества, количества движения и энергии (J^T_{vj}, $J^T_{\alpha j}$, q^T_j, R_{ij}) и некоторых других моментов второго порядка. Применение статистического осреднения (3.1.3) приводит, следовательно, к потери части информации о турбулентном течении. Недостающую информацию содержат уравнения для пульсационных составляющих плотности, скорости, температуры (энтальпии), состава и др. Подобные уравнения в методе Келлера и Фридмана (*Келлер, Фридман, 1924*) использованы в качестве исходных при выводе дифференциальных уравнений для корреляторов случайных (стохастических) величин произвольного порядка. Мы приведем здесь вывод общей формы эволюционного уравнения переноса для одноточечных вторых моментов пульсирующих термогидродинамических параметров в потоке сжимаемой смеси, полученных при весовом осреднении (3.1.5).

4.1.1. Дифференциальные уравнения переноса для пульсаций. Статистический подход к описанию процессов турбулентного переноса в однородной сжимаемой жидкости (*Келлер, Фридман, 1924*) основан на анализе цепочки зацепляющихся прогностических уравнений для корреляционных моментов связи возрастающего порядка. Рассмотрим кратко общую схему составления этих уравнений на примере несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.

Разноточечный и разновременный корреляторпульсаций скорости k-го порядка определяется статистическим осреднением произведения k пульсационных скоростей

$$\mathcal{B}_{\mathrm{A}_1\ldots\mathrm{A}_k}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\ldots;\boldsymbol{r}_k,t_k)=\overline{V'_{\mathrm{A}_1}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\ldots V'_{\mathrm{A}_k}(\boldsymbol{r}_k,t_k)}\ ,$$

где $\boldsymbol{r}_k$ – радиус-вектор точки в пространстве, t_k – момент времени, A_k – индекс, пробегающий значения x,y,z. Полное статистическое описание случайного поля скоростей эквивалентно определению всех корреляторов пульсаций скорости произвольного порядка, что практически невыполнимо. Поэтому, реально используют только корреляторы низших порядков, например, парный коррелятор $\mathcal{B}_{ij}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,t)=\overline{V_i'(\boldsymbol{r},t)\,V_j'(\boldsymbol{r}_1,t)}$ – разноточечный одновременный момент второго порядка пульсаций скорости. При изучении сдвиговой турбулентности несжимаемой жидкости часто удобно использовать лишь одноточечные парные корреляторы пульсаций скорости $\mathcal{B}_{ij}(\boldsymbol{r},t)=\overline{V_i'(\boldsymbol{r},t)V_j'(\boldsymbol{r},t)}$ – тензор Рейнольдса.

Производная по времени от коррелятора $\mathcal{B}_{ij}(\boldsymbol{r},t)$, в силу коммутативности операций осреднения и дифференцирования (постулат Рейнольдса, см. (3.1.2)), может быть представлена в виде

$$\partial_t\mathcal{B}_{ij}(\boldsymbol{r},t)=\overline{V_i'(\boldsymbol{r},t)\partial_tV_j'(\boldsymbol{r},t)}+\overline{V_j'(\boldsymbol{r},t)\partial_tV_i'(\boldsymbol{r},t)}\ .$$

Для получения эволюционных уравнений для вторых моментов $\mathcal{B}_{ij}(\boldsymbol{r},t)$, необходимо исключить производные по времени в правой части последнего равенства с помощью соответствующих гидродинамических уравнений для пульсаций скорости. Тогда в полученные уравнения войдут корреляционные функции для пульсаций скорости третьего порядка. Аналогичным образом можно вывести и более сложные эволюционные уравнения, например, для корреляторов третьего порядка, в которые войдут уже корреляционные функции четвертого порядка и т.д. Обрыв этой цепочки на любом шаге приводит к незамкнутой системе уравнений, что и представляет главную проблему *метода Келлера–Фридмана*.

Новая трудность возникает при обобщении этого подхода на многокомпонентные химически реагирующие сжимаемые среды. В связи с этим отметим, что даже для однородной жидкости система уравнений для моментов связи записывается настолько сложно, что в цитированной классической работе Келлера и Фридмана сами уравнения не выписывались, а лишь была указана основная идея их вывода и перечислено, сколько и каких уравнений при этом получается. Поэтому фактический вывод цепочки уравнений, описывающих динамику корреляционных моментов возрастающего порядка, полученных при весовом осреднении для турбулизованного потока многокомпонентной смеси с химическими ре-

акциями, имеет принципиальное значение как для решения проблемы замыкания в моделях разной степени сложности, так и для более глубокого понимания процессов кинетики и турбулентного переноса в подобных средах (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Уравнение переноса для пульсации плотности. Получим сначала балансовое уравнение для пульсаций ρ' среднемассовой плотности. Плотность и скорость жидкости имеют усредненную и пульсационную составляющие:

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \overline{\rho}(\boldsymbol{r},t) + \rho'(\boldsymbol{r},t), V_j(\boldsymbol{r},t) = \langle V_j(\boldsymbol{r},t)\rangle + V_j''(\boldsymbol{r},t)\,. \qquad (4.1.1)$$

Подставляя (4.1.1) в уравнение неразрывности (2.1.4), будем иметь

$$\overline{\rho}_{,t} + (\overline{\rho}\langle V_j\rangle)_{,j} + \rho'_{,t} + (\rho'\langle V_j\rangle)_{,j} + (\rho V_j'')_{,j} = 0\,.$$

Сумма первых двух слагаемых в этом соотношении, в силу уравнения неразрывности для среднего движения (3.1.8), обращается в нуль. Поэтому, при использовании операторного соотношения (3.1.8) для субстанциональной производной по времени в осредненном движении можно написать

$$D\,\rho'/Dt = -(\rho V_j'')_{,j} - \rho'\langle V_j\rangle_{,j}\,. \qquad (4.1.2)$$

Запишем (4.1.2) также в форме субстанционального баланса; используя для этого (3.1.8), получим

$$\overline{\rho} D(\rho'/\overline{\rho})/Dt = -(\rho V_j'')_{,j}\,. \qquad (4.1.3)$$

Дифференциальное уравнение переноса для величины $\rho A''/\overline{\rho}$. Пусть $A(\boldsymbol{r},t)$ – удельное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты тензора), субстанциональный баланс которой имеет вид (2.1.1). Тогда, в силу (3.1.14), можно записать

$$-J_{(A)j,j} + \sigma_{(A)} = \rho dA/dt \equiv (\overline{\rho} + \rho')\langle A\rangle/Dt + \rho V_j''\langle A\rangle_{,j} + \rho dA''/dt =$$

$$= \rho' D\langle A\rangle/Dt - J^{\Sigma}_{(A)j,j} + \overline{\sigma_{(A)}} + \rho V_j''\langle A\rangle_{,j} + \rho dA''/dt.$$

Отсюда следует

$$\rho dA''/dt = -\rho' V_j''\langle A\rangle_{,j} - \rho' D\langle A\rangle/Dt - J'_{(A)j,j} + \sigma'_{(A)}, \qquad (4.1.4)$$

или, с учетом выражения для величины $(\rho V_j'')_{,j}$, получаемого из (4.1.2), и осредненного уравнения неразрывности (3.1.8), будем иметь

$$\rho DA''/D't = -(\rho V_j''A'')_{,j} + A''(\rho V_j'')_{,j} - \rho V_j''\langle A\rangle_{,j} - \rho' D\langle A\rangle/Dt -$$

$$-J'_{(A)j,j} + J^{T}_{(A)j,j} + \sigma'_{(A)} = -[\rho V_j''A'' + J'_{(A)j} - J^{T}_{(A)j}]_{,j} - \rho V_j''\langle A\rangle_{,j} - \qquad (4.1.5)$$

$$-\overline{\rho}A''D(\rho/\overline{\rho})/Dt - \rho' D\langle A\rangle/Dt + \sigma'_{(A)}.$$

Таким образом, для субстанционального баланса величины $\rho A''/\overline{\rho}$ получим следующее эволюционное уравнение переноса

$$\overline{\rho} D\left(\rho A''/\overline{\rho}\right)/Dt + \left[\rho V_j'' A'' + J'_{(A)j} - J^T_{(A)j}\right]_{,j} =$$

$$= -\rho V_j'' < A >_{,j} - \rho'\left(\overline{\sigma_{(A)}} - J^{\Sigma}_{(A)j,j}\right) + \sigma'_{(A)} . \qquad (4.1.6)$$

Рассматривая случаи различных величин $A(\boldsymbol{r},t)$, можно из (4.1.6) получить уравнения переноса для пульсационной составляющей гидродинамической скорости V_j'', для пульсации удельной энтальпии h'', для пульсаций концентраций различных компонент смеси Z_α'' и т.д. Подобные уравнения могут быть использованы для получения важных в теории турбулентности эволюционных уравнений переноса для корреляторов (любого порядка) пульсирующих параметров в различных пространственно – временных точках (см., например, (*Монин, Яглом, 1965*; *Графов и др., 1990*)) .

Задачу описания турбулентных течений реагирующей смеси с переменной плотностью можно решать на моделях различного уровня сложности (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980; Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*). Нами проблема замыкания системы осредненных уравнений многокомпонентной гидродинамики решается, как уже неоднократно подчеркивалось, на уровне моментов связи второго порядка, когда к рассмотрению привлекаются эволюционные уравнения переноса только для одноточечных парных (смешанных) корреляторов. Достигнутый прогресс в развитии и применении моделей турбулентности второго порядка для однородной жидкости с постоянной плотностью (см., например, (*Дональдсон, 1972; Дирдорф, 1973; Андре и др., 1976; Турбулентность: Принципы и применения,1980*) позволяет надеяться на эффективность обобщений некоторых из них на случай течения сжимаемой многокомпонентной среды, имея при этом в виду, что, в конечном счете, качество любой используемой модели определяется сопоставлением с экспериментальными данными.

4.1.2. Общий вид эволюционного уравнения переноса для одноточечных парных корреляций пульсирующих параметров смеси. Для вывода этого уравнения умножим (4.1.4) на пульсацию B'' некоторого термогидродинамического параметра $B(\boldsymbol{r},t)$, для которого также может быть написано балансовое уравнение типа (2.1.1), и результат осредним по Рейнольдсу. В итоге будем иметь

$$\overline{\rho B'' \frac{dA''}{dt}} = -J^T_{(B)j} < A >_{,j} - \frac{\overline{\rho' B''}}{\overline{\rho}}\left(J^T_{(A)j,j} + \overline{\rho}\frac{D < A >}{Dt}\right) + \overline{B\left(\sigma'_{(A)} - J'_{(A)j,j}\right)} ,$$

или

$$\overline{\rho B'' \frac{dA''}{dt}} = -J^T_{(B)j} < A >_{,j} + \overline{B''\left(\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j}\right)} . \qquad (4.1.7)$$

Здесь учтено осредненное уравнение баланса общего вида (3.1.14). Аналогичное выражение можно написать, поменяв местами параметры A и B в соотношении (4.1.7)

$$\overline{\rho A''\frac{dB''}{dt}} = -J^{T}_{(A)j} < B >^{\circ}_{,j} + \overline{A''\left(\sigma_{(B)} - J_{(B)j,j}\right)}. \qquad (4.1.8)$$

Сложив теперь (4.1.7) с (4.1.8) и учитывая тождество (3.1.12), получим

$$\overline{\rho\frac{d(A''B'')}{dt}} \equiv \bar{\rho}\frac{D\left(\overline{\rho A''B''}/\bar{\rho}\right)}{Dt} + \left(\overline{\rho A''B''V''}\right)_{,j} =$$

$$= -J^{T}_{(A)j} < B >_{,j} - J^{T}_{(B)j} < A >_{,j} + \overline{A''\left(\sigma_{(B)} - J_{(B)j,j}\right)} + \overline{B''\left(\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j}\right)}$$

– уравнение балансов для одноточечных вторых моментов $\overline{\rho A''B''}/\bar{\rho}$ в субстанциональной форме. Отсюда для эволюционного уравнения переноса корреляций $< A''B'' >$ окончательно найдем

$$\underset{\text{Конвекция}}{\bar{\rho}\frac{D < A''B'' >}{Dt}} + \underset{\text{Диффузия}}{J^{T\Sigma}_{(AB)j,j}} = \underset{\text{Воспроизводство}}{-J^{T}_{(A)j} < B >_{,j} - J^{T}_{(B)j} < A >_{,j}} +$$

$$+ \underset{\text{Перераспределение}}{\overline{A''\sigma_{(B)} + B''\sigma_{(A)}}} - \underset{\text{Диссипация}}{\bar{\rho} < \varepsilon_{(AB)} >}. \qquad (4.1.9)$$

Здесь введены следующие обозначения :

$$J^{T\Sigma}_{(AB)j} \equiv \overline{\rho A''B''V''_j} + \overline{A''J_{(B)j}} + \overline{B''J_{(A)j}} = J^{T}_{(AB)j} + \overline{A''J_{(B)j}} + \overline{B''J_{(A)j}} \qquad (4.1.10)$$

– субстанциональная плотность полного турбулентного потока смешанной корреляции $< A''B'' >$;

$$\bar{\rho} < \varepsilon_{(AB)} > \equiv -\overline{\left(J_{(A)j}B''_{,j} + J_{(B)j}A''_{,j}\right)} \qquad (4.1.11)$$

– скорость диссипации величины $< A''B'' >$ под действием молекулярных процессов переноса.

Выражению для суммарного потока $J^{T\Sigma}_{(AB)j}$ можно придать также другую, более удобную для последующего анализа, форму

$$J^{T\Sigma}_{(AB)j} \equiv \bar{\rho} < AB''V''_j > + \overline{A'J'_{(B)j}} + \overline{B'J'_{(A)j}} + \bar{\rho} < v''A'' > \overline{J_{(B)j}} + \bar{\rho} < v''B'' > \overline{J_{(A)j}} =$$

$$= \overline{\rho A'B'V''_j} > + \overline{A'J'_{(B)j}} + \overline{B'J'_{(A)j}} + \overline{A''}J^{\Sigma}_{(B)j} + \overline{B''}J^{\Sigma}_{(A)j}, \qquad (4.1.10^{*})$$

где $J^{\Sigma}_{(A)j} \equiv \overline{J_{(A)j}} + J^{T}_{(A)j}$ – плотность суммарного (осредненного регулярного и турбулентного) потока характеристики $A(\boldsymbol{r},t)$ в турбулизованной среде.

В частном случае совпадающих пульсирующих характеристик потока

$A(\boldsymbol{r},t)=B(\boldsymbol{r},t)$ уравнение (4.1.9) превращается в балансовое уравнение для среднеквадратичной пульсации ("дисперсии") $<A''^2>$ термогидродинамического параметра $A(\boldsymbol{r},t)$ (*Колесниченко, 1981*) :

$$\bar{\rho}\frac{D<A''^2/2>}{Dt}+\left(\overline{\rho A''^2 V_j''/2}+\overline{A''J_{(A)j}}\right)_{,j}=-J^T_{(A)j}<A>_{,j}+\overline{A''\sigma_{(A)}}-\bar{\rho}<\varepsilon_{(A)}>, \tag{4.1.12}$$

где

$$\bar{\rho}<\varepsilon_{(A)}>\equiv\cdot\bar{\rho}<\varepsilon_{(AA)}>/2=-\overline{J_{(A)j}A''}_{,j} \tag{4.1.13}$$

– скорость скалярной диссипации дисперсии $<A''^2>$.

Таким образом, общее балансовое уравнение для смешанных парных корреляций (4.1.9), также как и уравнение для дисперсий (4.1.12), содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение турбулентной характеристики $<A''B''>$ следующих процессов: конвективного переноса, диффузии, образования за счет обмена энергии между осредненным и пульсационным движением, перераспределения турбулентной энергии между пульсационными движениями в различных направлениях и диссипации характеристики $<A''B''>$ вследствие молекулярных процессов переноса. Ниже мы рассмотрим последовательно случаи различных величин A и B .

§ 4.2. Уравнения баланса турбулентной энергии в сжимаемой многокомпонентной среде

Выведем уравнения переноса для составляющих тензора рейнольдсовых напряжений и уравнение баланса турбулентной энергии $<e>$, (которое следует из уравнения для R_{ki} при $i=k$) в случае сжимаемой многокомпонентной смеси. Эти уравнения, получаемые из общего эволюционного уравнения (4.1.9) для одноточечных парных моментов, являются точными, однако привлечение аппроксимационных соотношений с эмпирическими константами связи для моделирования ряда входящих в них неизвестных корреляций делает их модельными, справедливыми только для определенного класса течений. Многообразие достаточно обоснованных гипотез замыкания, существующее в настоящее время, привело в конечном счете к разработке большого числа моделей подобного рода (см., например, (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980; Турбулентные течения реагирующих газов, 1983; Маров, Колесниченко, 1987*).

Уравнения в частных производных для R_{ki} довольно сложны с вычислительной точки зрения, и поэтому без дополнительных упрощений непригодны для численных расчетов. Вместе с тем, они важны как средство совершенствования более простых моделей турбулентности. В частности, в *локально-равновесном* случае, когда конвективные и диффузионные члены уравновешивают друг друга, дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические уравнения для R_{ki}, сохраняющие при этом фундаментальные свойства исходных уравнений. Решение полученных таким образом алгебраических уравнений позволяет найти, при определенных условиях, локальные реологические соот-

ношения для тензора турбулентных напряжений типа (3.3.21), но уже с известным тензором коэффициентов турбулентной вязкости (см. разд. 4.3.9.). Коэффициенты турбулентной вязкости выражаются в этом случае через эмпирические константы, входящие в уравнение для R_{ki}, турбулентную энергию $<e>$ и масштаб турбулентности L (или скорость диссипации турбулентной энергии ε_e).

Как уже упоминалось в Гл.3, фундаментальное уравнение переноса для турбулентной энергии $<e>$ лежит в основе многих современных полуэмпирических моделей турбулентности (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*). В частности, его использование, наряду с формулой для масштаба турбулентности L, в случае локально-равновесного изменения величины R_{ki} позволяет в определенной мере учесть возможность неполного равновесия турбулентного поля скоростей с осредненным течением (см., например, (*Левеллен, 1980*)).

Отметим, что вывод эволюционных уравнений переноса для R_{ki} (и $<e>$), проведенный традиционными методами, т.е. без использования весового осреднения, в случае сжимаемой смеси оказывается громоздким, уравнения содержат целый ряд новых корреляционных характеристик турбулентности, включающих пульсацию массовой плотности и не имеющих ясного физического смысла (*Монин., Яглом, 1965*). Сведение подобных уравнений к виду аналогичному (4.2.9), возможно только после целого ряда упрощений, связанных, в частности, с априорным отбрасыванием отдельных малых членов, точная оценка которых возможна только для конкретного класса течений (*Иевлев, 1990*).

4.2.1. Уравнения для тензора турбулентных напряжений. Положим в уравнении (4.1.9) $A \equiv V_k(\boldsymbol{r},t)$, $B \equiv V_i(\boldsymbol{r},t)$ и используем для соответствующих потоков и скоростей возникновения импульса выражения (2.1.22)

$$J_{(V_i)j} \equiv -\pi_{ij}, \quad \sigma_{(V_i)} \equiv -p_{,i} + 2\rho\varepsilon_{kji}V_k\Omega_j + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha i}, \qquad (1)$$

$$J_{(V_k)j} \equiv -\pi_{kj}, \quad \sigma_{(V_k)} \equiv -p_{,k} + 2\rho\varepsilon_{jlk}V_j\Omega_l + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha k}. \qquad (2) \qquad (4.2.1)$$

В результате получим следующее *точное* уравнение переноса для тензора турбулентых напряжений Рейнольдса $R_{kj} = -\overline{\rho V_i'' V_j''}$ в потоке с переменной плотностью (*Маров, Колесниченко, 1987*)

$$-\bar{\rho}\frac{D(R_{ki})}{Dt} + \left(\overline{\rho V_k'' V_i'' V_j''} - \overline{\pi_{ij} V_k''} - \overline{\pi_{kj} V_i''}\right)_{,j} =$$

$$= R_{kj} <V_i>_{,j} + R_{ij} <V_k>_{,j} + \overline{V_k'' \sigma_{(V_i)}} + \overline{V_i'' \sigma_{(V_k)}} - \bar{\rho} <\varepsilon_{(V_k V_i)}> \qquad (4.2.2)$$

в котором

$$J^{T*}_{(V_k V_i)j} \equiv \left(\overline{\rho V_k'' V_i'' V_j''} - \overline{\pi_{ij} V_k''} - \overline{\pi_{kj} V_i''}\right) \qquad (4.2.3)$$

– "диффузионный поток" тензора рейнольдсовых напряжений R_{ki};

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{(V_k V_i)} > \equiv \left(\overline{\pi_{ij} V_k''_{,j}} + \overline{\pi_{kj} V_i''_{,j}} \right) \tag{4.2.4}$$

– величина (тензор второго ранга), связанная со скоростью диссипации тензора R_{ki} вследствие молекулярной вязкости.

Сделаем некоторые преобразования в уравнении (4.2.2). Перепишем слагаемые в предпоследнем члене, с учетом определений (4.2.1), следующим образом

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{(V_i)} V_k''} &= -\overline{V_k'' p_{,i}} - 2\varepsilon_{jli} R_{kj} \Omega_l + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha k}^{T} F_{\alpha i}^{*} , \qquad (1) \\ \overline{\sigma_{(V_k)} V_i''} &= -\overline{V_i'' p_{,k}} - 2\varepsilon_{jlk} R_{ij} \Omega_l + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha i}^{T} F_{\alpha k}^{*} , \qquad (2) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Используя далее для слагаемых с давлением в (4.2.5) тот же прием, что и при выводе формулы (3.1.51), получим для любого параметра A

$$\begin{aligned} \overline{A'' p_{,i}} &= \overline{A''} \, \overline{p}_{,i} + \overline{A'' p'_{,i}} = \overline{A''} \, \overline{p}_{,i} + \left(\overline{p' A''} \right)_{,i} - \overline{p' A''_{,j}} = \\ &= \overline{\rho v'' A''} \, \overline{p}_{,i} + \left(\delta_{ij} \overline{p' A''} \right)_{,j} - \overline{p' A''_{,i}} , \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

откуда, в случае $A \equiv V_k(\boldsymbol{r}, t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{V_k'' p_{,i}} &= \overline{V_k''} \, \overline{p}_{,i} + \overline{V_k'' p'_{,i}} = J_{(v)k}^{T} \, \overline{p}_{,i} + \left(\overline{p' V_k''} \right)_{,i} - \overline{p' V_k''_{,j}} = \\ &= \overline{\rho v'' A''} \, \overline{p}_{,i} + \left(\delta_{ij} \overline{p' A''} \right)_{,j} - \overline{p' A''_{,i}} , \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

и аналогично,

$$\overline{V_i'' p_{,k}} = J_{(v)i}^{T} \, \overline{p}_{,k} + \left(\delta_{jk} \overline{p' V_i''} \right)_{,j} - \overline{p' V_j''_{,i}} , \tag{4.2.8}$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Подставляя теперь соотношения (4.2.5)–(4.2.8) в уравнение (4.2.2), перепишем его в следующем компактном виде

$$-\overline{\rho} \frac{D\left(R_{ki} / \overline{\rho} \right)}{Dt} + J_{kij,j}^{T\Sigma} = P_{ki}^{*} + \Phi_{ki} + \overline{\rho} G_{ki} - \overline{\rho} < \varepsilon_{ki} > . \tag{4.2.9}$$

Здесь введены следующие обозначения :

$$J_{kij}^{T\Sigma} \equiv J_{(V_k V_i)j}^{T\Sigma} + \overline{p' \left(\delta_{ij} V_k'' + \delta_{kj} V_i'' \right)} =$$

$$= \overline{\rho V_k'' V_i'' V_j''} + \overline{\left(\delta_{ij} p' - \pi_{ij}\right) V_k''} + \overline{\left(\delta_{kj} p' - \pi_{kj}\right) V_i''} \ , \qquad (4.2.10)$$

$$P_{ki}^{*} \equiv R_{kj}\left(< V_i >_{,j} - 2\varepsilon_{jli}\Omega_l\right) + R_{ij}\left(< V_k >_{,j} - 2\varepsilon_{jlk}\Omega_l\right), \qquad (4.2.11)$$

$$\Phi_{ki} \equiv \overline{p'\left(V_k''_{,i} + V_i''_{,k}\right)}, \qquad (4.2.12)$$

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{ki} >= \overline{\rho} < \varepsilon_{(V_k V_i)} > \equiv \left(\overline{\pi_{ij} V_k''_{,j}} + \overline{\pi_{kj} V_i''_{,j}}\right) \qquad (4.2.13)$$

$$\overline{\rho} G_{ki} \equiv -J^{T}_{(v)k}\overline{p}_{,i} - J^{T}_{(v)i}\overline{p}_{,k} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[J^{T}_{\alpha k} F^{*}_{\alpha i} + J^{T}_{\alpha i} F^{*}_{\alpha k}\right]. \qquad (4.2.14)$$

Поясним смысл отдельных слагаемых уравнения (4.2.9):

$J^{T\,\Sigma}_{kji}$ – полный “диффузионный поток” тензора напряжений R_{ki}, включающий различные механизмы переноса турбулентности в пространстве: турбулентной диффузии (слагаемое $\overline{\rho V_k'' V_i'' V_j''}$); переноса под влиянием молекулярной вязкости, когда пульсирующей средой вовлекаются в движение соседние, до этого не пульсировавшие, слои газа (слагаемое $-\left(\overline{V_k''\pi_{ij} + V_i''\pi_{kj}}\right)$); переноса вследствие взаимодействия полей пульсационных скоростей и пульсационных давлений (слагаемое $\overline{p'\delta_{ij}V_k'' + p'\delta_{kj}V_i''}$);

P_{ki}^{*} – величина, связанная с процессами генерации турбулентности (тензора R_{ki}) из-за взаимодействия турбулентных пульсаций скорости с неоднородным полем осредненных скоростей, обусловленным ветровым сдвигом или вращением среды с общей угловой скоростью Ω_j – скоростью вращения относительной системы координат, в которой записано уравнение движения;

Φ_{ki} – тензор корреляций турбулентных пульсаций скорости и давления, описывающий перераспределение турбулентной энергии между различными составляющими тензора напряжения Рейнольдса;

$\overline{\rho} G_{ki}$ – величина, связанная с возникновением или исчезновением турбулентности, в зависимости от знака $\overline{\rho} G_{ki}$, при движении среды в поле неравномерного гидродинамического давления (в частности, в поле архимедовой силы, когда можно положить $\overline{p}_{,j} \approx -\delta_{j3}\overline{\rho} g$; см. (3.1.39)), либо под воздействием массовых негравитационных сил;

$\overline{\rho} < \varepsilon_{ki} >$ – слагаемое, связанное со скоростью изменения величины R_{ki} вследствие диссипации энергии турбулентности вследствие молекулярной вязкости.

При учете операторного соотношения (3.1.13) субстанциональную производную в (4.2.9) можно переписать следующим образом :

$$-\overline{\rho}\frac{D\left(R_{ki}/\overline{\rho}\right)}{Dt} = -\frac{\partial R_{ki}}{\partial t} - \left(R_{ki} < V_j >\right)_{,j} .$$

Второй член в левой части этого выражения является адвективным членом, характеризующим эффекты конвективного переноса тензора R_{ki} со скоростью осредненного течения.

Несмотря на определенную аналогию с уравнением для течения с постоянной плотностью (*Монин, Яглом, 1965*, уравнение (4.2.9) для сжимаемой многокомпонентной смеси имеет и некоторые важные отличия, касающиеся, в частности, структуры выражения для G_{ki}. При учете формулы (3.3.39) для потока удельного объема $J^T_{(v)j}$ выражение для G_{ki} легко может быть преобразовано к виду

$$\overline{\rho} G_{ki} = \frac{1}{\overline{p}}\left(\overline{p}_{,k}\,\overline{p' V_i''} + \overline{p}_{,i}\,\overline{p' V_k''}\right) - \frac{<R^*>}{\overline{p}<C_p>}\left(\overline{p}_{,k}\,J^T_{qi} + \overline{p}_{,i}\,J^T_{qk}\right) +)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha k}\left(F^*_{\alpha i} - \mathrm{k}<T_\alpha>\frac{\overline{p}_{,i}}{\overline{p}}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha i}\left(F^*_{\alpha k} - \mathrm{k}<T_\alpha>\frac{\overline{p}_{,k}}{\overline{p}}\right). \qquad (4.2.15)$$

Здесь для удобства введено обозначение (см. (3.3.31) и (3.3.37)):

$$<T_\alpha> = \frac{H_\alpha}{<C_p>} = <T> - \frac{C^*_{p\alpha}}{<C_p>^3}\left(\overline{C_p'' h''} - \sum_{\beta=1}^{N} <h_\beta>\overline{C_p'' Z_\beta''}\right) \cong <T>\ . \qquad (4.2.16)$$

В тех случаях, когда изменения массовой плотности в турбулизованной атмосфере, вызванные пульсациями давления, пренебрежимо малы, как, например, в режиме вынужденной конвекции, при наличии крупномасштабных атмосферных вихрей и т.п. (см. Гл.3 и (*Ван Мигем, 1977*)), первое слагаемое в (4.2.15) может быть опущено. Кроме того, если не учитывать возможного для многокомпонентной среды влияния на характер осредненного движения пульсаций теплоемкости ($C_p'' \approx 0$), что, по-видимому, справедливо при дозвуковом движении смеси (*Иевлев, 1975*), то величина $<T_\alpha>$ в (4.2.15) может быть заменена на температуру $<T>$. Для турбулентного движения в стратифицированных в поле силы тяжести средах выражение для G_{ki} приобретает вид

$$\overline{\rho} G_{ki} \cong \frac{\overline{\rho} g <R^*>}{\overline{p}<C_p>}\left(\delta_{k3} J^T_{qi} + \delta_{i3} J^T_{qk}\right) +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha k}\left(F^*_{\alpha i} + \delta_{i3} g\,\frac{\overline{\rho}\,\mathrm{k}<T>}{\overline{p}}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha i}\left(F^*_{\alpha k} + \delta_{k3} g\,\frac{\overline{\rho}\,\mathrm{k}<T>}{\overline{p}}\right), \qquad (4.2.15^*)$$

Формула (4.2.15*) находится в полном согласии с аналогичным членом уравнения (4.2.9), полученным для течений однородной жидкости в приближении Буссинеска (см. (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*)) и модифицирует его с учетом многокомпонентности смеси и сжимаемости среды.

Уравнения для тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, записанные

в виде (4.2.9) (шесть уравнений для составляющих симметрического тензора R_{ki}), не могут быть непосредственно использованы для замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси (3.2.4)–(3.2.8), поскольку содержат большое число новых неопределенных величин, представляющих собой корреляции с пульсациями давления, диссипативные члены, моменты третьего порядка и не выраженных через "известные" парные корреляции. Моделирование этих дополнительных величин в случае многокомпонентной турбулентности, необходимое для решения проблемы замыкания, в значительной степени зависит от возможности проведения аналогий с более или менее удовлетворительными и достаточно апробированными гипотезами замыкания, используемыми в теории турбулентности с "постоянной" плотностью (*Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*). Подчеркнем, что в настоящее время нет полной ясности относительно надобности существенной модификации подобных аппроксимаций для течений смеси с переменной плотностью.

Далее, для того чтобы более четко продемонстрировать возможности метода инвариантного моделирования применительно к турбулизованным смесям, мы рассмотрим упрощенные схемы замыкания второго порядка, использующие минимальное количество произвольных постоянных. Более сложные параметрические соотношения для моделируемых корреляторов для случая однородной жидкости приведены, например, в монографии (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*). Следующие аппроксимационные соотношения для корреляторов, используемые часто в полуэмпирических теориях турбулентности однородных жидкостей, по предположению будем считать справедливыми и в случае характеристик многокомпонентной турбулентности, полученных путем средневзвешенного осреднения (*Колесниченко, Маров, 1984*) :

$$\overline{\rho}<\varepsilon_{ki}>=\frac{2}{3}K_{e1}\delta_{ki}\frac{\overline{\rho}<e>^{3/2}}{L}-K_{e2}\frac{\nu R_{ki}}{L^2}, \tag{4.2.17}$$

$$\Phi_{ki}=K_{p1}\frac{<e>^{1/2}}{L}\left(R_{ki}+\frac{2}{3}\delta_{ki}\overline{\rho}<e>\right)-K_{p2}\left(P_{ki}-\frac{2}{3}\delta_{ki}P\right) \tag{4.2.18}$$

$$J^{T\Sigma}_{kij}=\left(c_1L<e>^{1/2}+c_2\nu\right)R_{ki},_j \tag{4.2.19}$$

Здесь $<e>=<V_s''V_s''>/2$ – турбулентная энергия единицы массы смеси (осредненная кинетическая энергия турбулентных пульсаций); ν – молекулярный кинематический коэффициент вязкости смеси; $L(\boldsymbol{r},t)$ – внешний масштаб турбулентного поля скоростей в точке, который взаимосвязан с интегральным масштабом турбулентности L и с длиной смешения Λ, обсуждавшимся в предыдущей главе, хотя и не совпадает с ними; $P_{ki}=P^{*}_{ki}+\overline{\rho}G_{ki}$ – суммарная скорость возникновения (исчезновения) турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ki}; $P=\frac{1}{2}\delta_{kj}P_{kj}=R_{kj}<V_k>,_j+\overline{\rho}G$ – полная скорость генерации турбулентной энергии $<e>$ под воздействием среднего сдвига (первое слагаемое) и эффектов

плавучести и взаимных превращений турбулентной и потенциальной энергий в стратифицированной многокомпонентной смеси (второе слагаемое). Последнее, с учетом (4.2.15), легко преобразовать к виду

$$\bar{\rho}G = \tfrac{1}{2}\bar{\rho}\delta_{kj}G_{kj} = -J^T_{(\nu)j}\bar{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}F^*_{\alpha j} =$$

$$= \overline{p'V_j''}\frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{p}} - \frac{<R^*>}{\bar{p}<C_p>}J^T_{qj}\bar{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(F^*_{\alpha j} - \mathrm{k}<T>\frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{p}}\right)J^T_{\alpha j}\ . \qquad (4.2.20)$$

Здесь K_e, K_p, c – свободные константы, определяемые на основе экспериментальных данных (*Компаниец и др., 1979 ; Турбулентность: Принципы и применения, 1980*), причем эмпирические коэффициенты K_{e2} и c_2 в уравнениях (4.2.17)–(4.2.19) важны только при небольших турбулентных числах Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T \equiv L<e>^{1/2}/\nu$, т.е. когда $K_{e1}\boldsymbol{Re}^T/K_{e2} \le 0(1)$ и $c_1\boldsymbol{Re}^T/c_2 \le 0(1)$ (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Соотношения (4.2.17)–(4.2.19) обеспечивают выполнение минимальных требований, которым должны удовлетворять любые схемы замыкания второго порядка. Выражение (4.2.17) для $<\varepsilon_{ki}>$ описывает влияние вязкой диссипации на структуру тензора R_{ki}. Основной причиной диссипации турбулентной энергии является наличие мелкомасштабных вихрей. Для течений с большим числом Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T$ эта мелкомасштабная турбулентность является изотропной. Комбинация членов в выражении (4.2.17) при больших числах Рейнольдса обеспечивает изотропию процесса вязкой диссипации (первый член), а при малых числах Рейнольдса учитывает возможность анизотропии процессов диссипации для каждой составляющей тензора R_{kj} (второй член). Так как масштаб крупных вихрей $L(\boldsymbol{r},t)$ не влияет на процесс диссипации, скорость их разрушения в (4.2.17) не зависит от ν.

Первое слагаемое в аппроксимации (4.2.18) для корреляций пульсаций давления и скорости Φ_{ki} описывает перераспределение турбулентной энергии от основного (осредненного) потока между отдельными составляющими пульсационных скоростей и стремление к изотропии пульсирующего течения, что отвечает модели Ротта (*Pomma, 1951*). Сумма в скобках $(R_{ki} + \tfrac{2}{3}\bar{\rho}<e>\delta_{ki})$ (точнее разность, так как $\bar{\rho}<e> = -\tfrac{1}{2}R_{ij}\delta_{ij}$) характеризует степень анизотропии потока и обладает необходимым свойством тензорной симметрии. Второе слагаемое в (4.2.18), соответствующее соотношению Лаундера (*Лаундер, 1975; Лаундер, Морс, 1982*) для многих турбулентных течений уравновешивает в уравнении (4.2.9) полную генерацию напряжений R_{kj} и описывает влияние механизмов образования турбулентной энергии на турбулентные пульсации скорости, а значит, и давления. Пропорциональность тензоров Φ_{ki} и $\left(P_{ik} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}P\right)$ эквивалентна предположению о том, что корреляции пульсаций давления и скорости не только стремятся сделать турбулентность изотропной со скоростью, линейно

связанной со степенью отклонения от изотропного состояния, но и перераспределяют генерацию турбулентности со скоростью, пропорциональной анизотропии этой генерации (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*).

Поток, определяемый выражением (4.2.19), обусловливает диффузионный перенос напряжений Рейнольдса R_{kj} из одной области течения в другую, без их генерации или затухания. Этот перенос препятствует образованию больших градиентов в пространственном распределении величины R_{kj} (см. (*Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*)). Заметим, что хотя обе части этого градиентного соотношения и являются тензорами третьего ранга, оно не согласуется по условиям симметрии с тензором $\left(\bar{\rho} V_k'' \overline{V_i'' V_j''}\right)$ и, кроме того, нарушает так называемые ограничения реализуемости, состоящие в необходимости удовлетворения *неравенству Шварца* для момента третьего порядка (см. разд. 3.2.2.). Тем не менее, имея в виду использование в дальнейшем только локально-равновесного варианта развиваемой модели, мы ограничимся этой простейшей аппроксимацией диффузионного члена.

Успех применения уравнений переноса для вторых моментов во многом зависит от того, насколько удачно выбраны значения эмпирических констант. Обычный путь их экспериментального определения лежит в изучении специальных турбулентных течений, зависящих только от одного (искомого) коэффициента. В идеальном случае для каждой замкнутой модели турбулентности, после того как выбран способ аппроксимации неизвестных членов в уравнениях, все вводимые эмпирические константы должны быть постоянными. С учетом этого соображения в настоящем исследовании приняты численные значения констант, в уравнениях (4.2.17)–(4.2.19), приведенные в монографии (*Турбулентность· Принципы и применения, 1980*) :

$$K_{e1} = 0.125; \quad K_{e2} = 6; \quad K_{p1} = 0.275; \quad K_{p2} = 0.55; \quad c_1 = 0.3 \pm 0.05 . \qquad (4.2.21)$$

Вместе с тем, как справедливо было отмечено Иевлевым (*Иевлев, 1975*), предположение о постоянстве констант возможно, вообще говоря, только при существовании некоторого “равновесного” для рассматриваемых условий течения спектра турбулентности. Для другого режима течения значения “констант” могут сильно изменяться. С целью учета этого обстоятельства некоторые авторы считают, что “константы” являются однозначными функциями от характерных безразмерных параметров течения (например, чисел Рейнольдса, Ричардсона, Россби) и некоторых других безразмерных характеристик турбулентности. В этом случае, однако, метод инвариантного моделирования полностью теряет свое преимущество относительно схем замыкания первого порядка.

4.2.2. Уравнение переноса турбулентной энергии в сжимаемой многокомпонентной смеси. Свертка уравнения (4.2.9) по индексам k и i $(-\frac{1}{2} R_{kj}\delta_{kj} = \bar{\rho} < e >)$ приводит к точному уравнению для осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций сжимаемой смеси (сравни с (3.1.68))

$$\bar{\rho}\frac{D < e >}{Dt} = -J_{<e>j,j} + R_{ij} < V_i >_{,j} + \overline{p' V_j''}_{,j} + \bar{\rho} G - \bar{\rho} < \varepsilon_e > . \qquad (4.2.22)$$

Это уравнение, в отличие от уравнения для тензора Рейнольдса, содержит только два неизвестных корреляционных члена. Первый, диффузионный член

$$J_{<e>J} \equiv \overline{\rho(e + p'/\rho)\, V_j''} - \overline{\pi_{ij} V_i''} = {}^1_2 J^{T\Sigma}_{(V_i V_i)j} + \overline{p' V_j''} =$$

$$= \overline{\rho e V_j''} + \overline{(p'\delta_{ij} - \pi'_{ij})\, V_i''} - \overline{\pi_{ij}} J^T_{(v)i} \qquad (4.2.23)$$

описывает полный субстанциональный поток энергии турбулентности, связанный с различными механизмами переноса в пространстве. В частности, величина $J^T_{(e)j} \equiv \overline{\rho e V_j''}$ интерпретируется, как поток кинетической энергии пульсационного (вихревого) движения, так что дивергенция $J^T_{(e)j},_j$ описывает среднюю скорость уменьшения вихревой кинетической энергии в единице объема за счет "турбулентной диффузии". В свою очередь, величина $-\left(\overline{\pi'_{ij} V_i''}\right),_j$ характеризует среднюю скорость увеличения вихревой кинетической энергии за счет работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений π'_{ij} на границе единичного объема. Второй, корреляционный член

$$\overline{\rho} < \varepsilon_e > \equiv \overline{\pi_{ij} V_i'',_j} = \overline{\pi'_{ij} V'_i,_j} + \overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i},_j = \overline{\rho}\varepsilon_e + \overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i},_j \ , \qquad (4.2.24)$$

где

$$\varepsilon_e \equiv \overline{\pi'_{ij} V'_i,_j} = {}^1_2 \nu \overline{\left(V'_i,_j + V'_j,_i - {}^2_3 \delta_{ij} V'_s,_s\right)^2} > 0 \,, \qquad (4.2.25)$$

описывает диссипацию турбулентной кинетической энергии в тепло под действием молекулярной вязкости. Он имеет смысл среднего значения работы, отнесенной к единице времени и единице объема, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений над турбулентными вихрями со сдвигом скорости ($V'_i,_j \neq 0$) (см. (3.1.68)).

Предпоследний член в правой части этого уравнения

$$\overline{\rho} G \cong -\frac{\overline{p},_J}{\overline{p}} \left(\mathrm{k} < T > \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} + \frac{< R^* >}{< C_p >} J^{T*}_{qj} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} F^*_{\alpha j} \qquad (4.2.20^*)$$

типичен для турбулентных течений многокомпонентной смеси в гравитационном поле. Он описывает генерацию турбулентной энергии в поле силы тяжести, обусловленную неоднородностью температуры и/или состава стратифицированной смеси, и взаимные превращения турбулентной и потенциальной энергий среды под действием массовых сил негравитационного происхождения. Член с пульсацией давления при этом часто может быть опущен (см.(4.2.20)).

Для самоподдерживающегося турбулентного поля скорость диссипации ε_e имеет тот же порядок величины, что и скорость генерации турбулентности сдвиговым потоком $R_{ij} < V_i >,_j$. Согласно (3.1.45), величина $R_{ij} < V_i >,_j$ связана со скоростью обмена между кинетической энергией среднего движения и кинетической энергией турбулентного (вихревого) движения, причем этот переход энер-

гии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора операции осреднения и турбулентных движений смеси.

В случае развитой турбулентности, когда $\boldsymbol{Re} \equiv LV/\nu >> 1$, справедливо неравенство $< e >^{1/2} \geq LV / L_{гидр}$ (знак $<$ относится к малым $\boldsymbol{Re}$) (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*). Здесь число Рейнольдса определяется по интегральному масштабу турбулентности L, соответствующему характерным размерам крупных вихрей, и характерной скорости течения V; $L_{гидр} = |\nabla \ln \theta|^{-1}$ – расстояние, на котором происходят существенные изменения каких-либо осредненных термогидродинамических параметров θ. При $\boldsymbol{Re} >> 1$ справедливо приближенное равенство

$$< \varepsilon_e >= \varepsilon_e \left(1 + \overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i},_j / \overline{\rho}\varepsilon_e\right) \approx \varepsilon_e \ . \qquad (4.2.26)$$

Действительно, оценивая порядок величины отдельных членов в (4.2.26), будем иметь:

$$\overline{\rho}\varepsilon_e \propto \left(\overline{\rho} < e >^{3/2}\right)/L; \quad \overline{\pi}_{ij} \propto \overline{\rho}\nu V / L_{гидр}; \quad J^T_{(v)i},_j = \overline{V_i'' ,_j} \propto < e >^{1/2} / L_{гидр} \ .$$

Поэтому справедлива оценка

$$\overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i},_j / \overline{\rho}\varepsilon_e \propto \left(\overline{\rho}\nu V / L_{гидр}\right) \cdot \left(< e >^{1/2} / L_{гидр}\right) \cdot \left(L / \overline{\rho} < e >^{3/2}\right) =$$

$$= \nu VL / < e > L^2_{гидр} = \left(\nu / LV\right) \cdot \left(V^2 L^2 / < e > L^2_{гидр}\right) \leq 1 / \boldsymbol{Re} \ .$$

Аналогичным образом, можно показать, что при $\boldsymbol{Re} >> 1$ последнее слагаемое в (4.2.24) может быть опущено

$$\overline{\pi'_{ij} V_i''} + \overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i} = \overline{\pi'_{ij} V_i'} \left(1 + \frac{\overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i}}{\overline{\pi'_{ij} V_i''}}\right) \approx \overline{\pi'_{ij} V_i'} \ , \qquad (4.2.27)$$

так как справедлива оценка

$$\overline{\pi}_{ij} J^T_{(v)i} / \overline{\pi'_{ij} V_i'} \propto \left(\overline{\rho}\nu V / L_{гидр}\right) \cdot < e >^{1/2} \cdot \left(L / \overline{\rho} < e >^{3/2} L_{гидр}\right) = \nu VL / < e > L_{гидр} \geq 1 / \boldsymbol{Re}$$

Таким образом, в предельно развитом турбулентном потоке многокомпонентной смеси уравнение переноса для турбулентной энергии приобретает вид

$$\overline{\rho} \frac{D < e >}{Dt} + \left(\overline{\rho e V_j''} + \overline{p' V_j'} - \overline{\pi'_{ij} V_i'}\right),_j = R_{ij} < V_i >,_j + \overline{p' V_j' ,_j} -$$

$$- J^T_{(v)j} \overline{p},_j + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} F^*_{\alpha j} - \overline{\rho}\varepsilon_e = P + \overline{p' V_j' ,_j} - \overline{\rho}\varepsilon_e \qquad (4.2.28)$$

где $J^T_{(v)j} = \dfrac{<R^k>}{<C_p>\overline{p}} J^{T*}_{qj} + \dfrac{k<T>}{\overline{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}$ – турбулентный поток удельного объема. Используя соотношения (4.2.23) и (4.2.24), легко показать, что в случае умеренных значений числа $\boldsymbol{Re}$, уравнение турбулентной энергии смеси также имеет вид (4.2.28), за исключением члена с градиентом давления, который надо заменить на $J^T_{(v)i}\left(-\delta_{ij}\overline{p} + \overline{\pi}_{ij}\right)_{,j}$.

Свертка аппроксимирующих соотношений (4.2.17)–(4.2.19) приводит к следующим моделям для неизвестных корреляционных членов уравнения баланса турбулентной энергии (4.2.28)

$$\overline{\rho}\varepsilon_e = \tfrac{1}{2}<\varepsilon_{kk}>\delta_{kl} = K_{e1}\frac{\overline{\rho}<e>^{3/2}}{L} + K_{e2}\frac{\overline{\rho}\nu<\dot{e}>}{L^2}, \qquad (4.2.29)$$

$$\overline{p'V''_{i,j}} = 0, \qquad (4.2.30)$$

$$J_{<e>j} = \overline{\rho(e + p'/\rho)V''_j} - \overline{\pi'_{ij}V''_i} = -\left(c_1 L<e>^{1/2} + c_2\nu\right)\left(\overline{\rho}<e>_{,j}\right). \qquad (4.2.31)$$

Соотношения (4.2.29)–(4.2.31) по существу следуют из соображений теории размерности и являются обобщением известной гипотезы Колмогорова (*Колмогоров, 1941,1942*), состоящей в том, что скорость диссипации энергии ε_e в данной точке развитого турбулентного потока определяется только локальными значениями средней турбулентной энергии единицы массы $<e>$ и масштабом турбулентности $L(\boldsymbol{r},t)$, а турбулентный перенос импульса и пульсационной энергии осуществляется посредством диффузионных членов градиентного типа. Как уже отмечалось, в таком виде уравнение (4.2.28) часто используется в конкретных расчетах турбулентных движений по моделям Колмогорова-Лаундера и других (*Левеллен, 1980*).

Числа Ричардсона. Как видно из уравнения (4.2.28), в стратифицированных струйных течениях многокомпонентной смеси возможны два дополнительных механизма генерации турбулентности. Если первый механизм имеет тепловую природу, то второй механизм возникновения турбулентности имеет диффузионную природу и возникает, когда имеются градиенты концентраций каких-либо диффундирующих компонентов. Это связано с тем, что пространственно-временная неоднородность (пульсации) массовой плотности обусловлена двумя факторами: неоднородностью полей (пульсациями) температуры и концентраций (см. формулу (3.3.27). Как известно, если в жидкости появляется локальная область с плотностью, меньшей плотности окружающей среды, то на нее в поле силы тяжести будет действовать выталкивающая сила Архимеда (*сила плавучести*). При определенных условиях (см. разд. 3.3.2.) происходит потеря устойчивости равновесия и эта сила приводит жидкость в движение. Именно величина $\overline{\rho}G = -J^T_{(v)j}\overline{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}F^*_{\alpha j}$ в уравнении (4.2.28), как уже неоднократно отмечалось, описывает генерацию турбулентной энергии, вызванную действием сил плавучести. С помощью соотношения (3.3.39) член $\overline{\rho}G$ выражается через турбу-

лентные потоки диффузии и тепла (см. формулу (4.2.20*). Таким образом, с двойственной природой архимедовой силы связано, в конечном итоге, возникновение (исчезновение) в струйных течениях смеси двух видов турбулентности - термической турбулентности и турбулентности, вызванной неоднородностью состава (градиентами концентраций).

Общепринято учет влияния термической стратификации смеси на эволюцию турбулентного течения проводить с помощью динамического числа Ричардсона $\boldsymbol{Rf}$, которое в рамках развиваемой модели может быть записано в следующем общем виде

$$\boldsymbol{Rf} = \frac{\left(<R^*>\overline{p}_{,j}/<C_p>\overline{p}\right)J^{T*}_{qj}}{R_{ij}<V_i>_{,j}} \cong -\frac{\left(g\delta_{j3}/<C_p><T>\right)J^{T*}_{qj}}{R_{ij}<V_i>_{,j}} =$$

$$= \frac{\frac{g\delta_{j3}}{<C_p><T>}\lambda^T\left(<T>_{,j}+\frac{g\delta_{j3}}{<C_p>}\right)}{\left[-\tfrac{2}{3}\overline{\rho}<e>\delta_{ij}+\overline{\rho}\nu^T\left(<V_i>_{,j}+<V_j>_{,i}-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}<V_s>_{,s}\right)\right]<V_i>_{,j}} =$$

$$= \frac{\frac{g\delta_{j3}}{<T>}\left(<T>_{,j}+\frac{g\delta_{j3}}{<C_p>}\right)}{\boldsymbol{Pr}^T\left[-\frac{2}{3}\frac{<e>}{\nu^T}<V_s>_{,s}+\left(<V_i>_{,j}+<V_j>_{,i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}<V_s>_{,s}\right)^2\right]} = \frac{\boldsymbol{Ri}}{\boldsymbol{Pr}^T} \qquad (4.2.32)$$

где $\boldsymbol{Ri}$ – градиентное число Ричардсона, а $\boldsymbol{Pr}^T = \overline{\rho}\nu^T<C_p>/\lambda^T$ – турбулентное число Прандтля. Вторая форма записи числа $\boldsymbol{Rf}$ в (4.2.32) получена с учетом гидростатического уравнения (3.1.39) и осредненного уравнения состояния газовой смеси, взятого в виде (3.2.2), а окончательное выражение числа $\boldsymbol{Rf}$ дано для изотропного случая, с привлечением реологических соотношений для турбулентного потока тепла (формула (3.3.15)) и для тензора турбулентных напряжений (формула (3.3.21)).

Учитывая большие сложности, связанные с трехмерностью, мы, в основном, ограничимся рассмотрением горизонтально однородных турбулентных сдвиговых течений в стратифицированной атмосфере. Если отождествить направление неоднородности с осью x_3 – направлением силы тяжести в задачах с плавучестью, и предположить, что средняя скорость течения $<V_j>$ не имеет составляющей в направлении оси x_3, а горизонтальная составляющая скорости направлена по оси x_1, то динамическое число Ричардсона принимает следующий стандартный вид

$$\boldsymbol{Rf} = \frac{\frac{g}{<T>}\left(<T>_{,3}+\frac{g}{<C_p>}\right)}{\boldsymbol{Pr}^T\left(<V_1>_{,3}\right)^2}. \qquad (4.2.33)$$

Для учета влияния стратификации состава смеси на образование (исчезновение) энергии турбулентности под действием сил плавучести и сил негравитационного происхождения (например, *пондеромоторной силы Лоренца*), далее будем использовать, так называемое, динамическое число Колмогорова

$$\boldsymbol{Kf} = -\frac{\sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j}^{T}\left(F_{\alpha j}^{*} - \mathrm{k}<T>\bar{p}_{,j}/\bar{p}\right)}{R_{ij}<V_i>_{,j}} \cong -\frac{\sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j}^{T}\left(F_{\alpha j}^{*} + M^{*} g\delta_{j3}\right)}{R_{ij}<V_i>_{,j}} \cong$$

$$\cong \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} F_{\alpha j}^{*}<Z_\alpha>_{,j} - g(\ln M^{*})_{,3}}{\boldsymbol{Sc}^{T}\left[-\frac{2}{3}\frac{<e>}{\nu^{T}}<V_s>_{,s} + \left(<V_i>_{,j} + <V_j>_{,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}<V_s>_{,s}\right)^{2}\right]} = \frac{\boldsymbol{Ko}}{\boldsymbol{Sc}^{T}}, \qquad (4.2.34)$$

где $\boldsymbol{Ko}$ – градиентное число Колмогорова, а $\boldsymbol{Sc}^{T} = \nu^{T}/D^{T}$ – турбулентное число Шмидта (в рассматриваемом здесь случае $\boldsymbol{Sc}^{T} = \boldsymbol{Pr}^{T}$, так как по сделанному выше предположению $\boldsymbol{Le}^{T} = \chi^{T}/D^{T} = \lambda^{T}/\rho D^{T} <C_P> = 1$). В последней записи $\boldsymbol{Kf}$ предполагалась одинаковость коэффициентов турбулентной диффузии для разных компонентов. Число $\boldsymbol{Kf}$ впервые было введено для аналогичных целей в теории турбулентности взвеси в работе (*Баренблатт, 1978*).

Используя определения (4.2.32) и (4.2.34), объединим стоящие в правой части уравнения (4.2.22) члены, выражающие полную генерацию энергии турбулентности. Тогда получим

$$P \equiv R_{ij}<V_i>_{,j} - \left(<R^{*}>\bar{p}_{,j}/<C_p>\bar{p}\right)J_{qj}^{T*} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j}^{T}\left(F_{\alpha j}^{*} - \mathrm{k}<T>\bar{p}_{,j}/\bar{p}\right) =$$

$$= R_{ij}<V_i>_{,j}\left(1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}\right). \qquad (4.2.35)$$

Отсюда видно, что в случае если $\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} < 0$, то турбулентная энергия генерируется как ветровым сдвигом, так и архимедовыми силами и массовыми силами негравитационной природы. Если величина $\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} \to 1$, то соответствующая сумма членов в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль, что означает, что турбулентное движение не поддерживается. В тех практически важных случаях, когда один из двух указанных механизмов возникновения силы плавучести не эффективен, можно говорить о критических числах Ричардсона $\boldsymbol{Ri}_c$, либо Колмогорова $\boldsymbol{Ko}_c$. Эти числа определяются из условия, что турбулентное движение существует только при $\boldsymbol{Ri} < \boldsymbol{Ri}_c$ (при постоянном составе), или только при $\boldsymbol{Ko} < \boldsymbol{Ko}_c$ (при постоянной температуре). При включении двух механизмов возникновения архимедовых сил они могут действовать, вообще говоря, как в одном, так и в противоположных направлениях. В случае, если толщины теплового и диффузионного слоев смешения существенно различаются, такая разнонаправленность действия источника турбулентной энергии может

привести к реверсированию в некоторой (внешней для более тонкого слоя) области струйного течения. Согласно (*Маров, Колесниченко, 1987*), сравнительно грубый критерий существования турбулентного движения смеси в общем случае можно описать двумя условиями $\boldsymbol{Re} > \boldsymbol{Re}_c$ и $(\boldsymbol{Ri} + \boldsymbol{Ko}) < (\boldsymbol{Ri} + \boldsymbol{Ko})_c$.

§ 4.3. Прогностические уравнения для корреляций, включающих пульсации энтальпии и состава реагирующей смеси

Для того, чтобы метод инвариантного моделирования, развитый к настоящему времени для турбулентной однородной жидкости, обобщить на сжимаемые многокомпонентные химически активные среды, следует, помимо выведенного в предыдущем параграфе уравнения для тензора рейнольдсовых напряжений, дополнительно получить эволюционные уравнения переноса для одноточечных вторых моментов пульсирующих термогидродинамических параметров смеси, в том числе и для скорости диссипации турбулентной энергии. Хотя используемый ниже подход к выводу этих достаточно однотипных уравнений обладает определенной трудоемкостью, он представляется совершенно необходимым, поскольку позволяет не только получить вполне обоснованные соотношения для указанных корреляций, но и одновременно выявить присущие этим уравнениям ограничения. С целью разработки методики моделирования коэффициентов турбулентного обмена, входящих в линейные реологические соотношения для турбулентных потоков, мы проанализируем здесь случай локально-равновесного приближения полученных эволюционных уравнений переноса и приведем численные значения эмпирических констант, входящих в аппроксимирующие соотношения для моделируемых неизвестных корреляций.

4.3.1. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Отождествляя в общем эволюционном уравнении (4.1.9) параметры A и B с истинными значениями полной энтальпии h и гидродинамической скорости V_j турбулизованной смеси и используя для потоков и скоростей возникновения этих величин выражения (2.1.22) и (2.1.52)

$$J_{(h)j} \equiv q_j, \qquad \sigma_{(h)} \equiv dp/dt + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j},$$

$$J_{(V_i)j} \equiv -\pi_{ij}, \qquad \sigma_{(V_i)} \equiv -p_{,i} + 2\rho\varepsilon_{kji} V_k \Omega_j + \rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha i},$$

приходим к точному эволюционному уравнению переноса для турбулентного потока тепла $q_j^T \equiv \overline{\rho h'' V_j''} = \bar{\rho} < h'' V_j'' >$ (*Колесниченко, Маров, 1984*):

$$\bar{\rho} \frac{D\left(q_j^T / \bar{\rho}\right)}{Dt} + \left[\overline{(\rho V_j'' V_k'' + p' \delta_{jk} - \pi_{jk}) h''} + \overline{q_k V_j''}\right]_{,k} = -q_k^T \left(< V_j >_{,k} + 2\varepsilon_{jlk} \Omega_l\right) +$$

$$+ R_{jk} \left(< h >_{,k} - \frac{\bar{p}_{,k}}{\bar{\rho}} \right) + \bar{\rho} G_{hj} + \overline{p' h''}_{,j} + \overline{V_j'' \left(\frac{dp'}{dt} + \pi_{lk} V_{l,k}'' \right)} - \bar{\rho} < \varepsilon_{hj} >, \qquad (4.3.1)$$

описывающему пространственно-временные распределения корреляций $< h''V_j'' >$ для турбулентного сдвигового течения. Здесь

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{hj} > \equiv \overline{\pi_{lj} h''_{,l}} - \overline{q_l V_j''_{,l}} \tag{4.3.2}$$

– скорость (векторная величина) разрушения корреляции $< h''V_j'' >$ под воздействием молекулярных процессов вязкости и температуропроводности;

$$\overline{\rho} G_{hj} \equiv -\overline{h''} \overline{p}_{,j} \tag{4.3.3}$$

– скорость образования (исчезновения) турбулентного потока тепла q_j^T под воздействием осредненного градиента давления (см. (3.3.40)). Термин "точное уравнение" употребляется нами в том смысле, что при выводе уравнения (4.3.1) не производилось никаких приблизительных преобразований.

По аналогии с уравнением для тензора напряжений (4.2.9) можно сказать, что в левой части уравнения переноса для составляющих вектора турбулентного потока тепла (4.3.1) стоят конвективный и "диффузионный" члены, а в правой части – члены, описывающие, соответственно, полную генерацию величины q_j^T под действием градиента осредненной скорости течения, градиента осредненной температуры (энтальпии) и архимедовых сил, а также перераспределение данной величины смешанным коррелятором пульсаций давления и градиента энтальпии смеси (этот член противодействует генерации $< h''V_j'' >$, ограничивая ее рост) и диссипацию потока q_j^T . В монографии (*Иевлев, 1975*) была проведена оценка предпоследнего слагаемого в уравнении (4.3.1), из которой следует, что оно мало по сравнению с диссипативным членом $\overline{\rho} < \varepsilon_{hj} >$ во всех тех случаях, когда существенен турбулентный перенос тепла. Далее это слагаемое учитываться не будет. Для фигурирующего в (4.3.1) молекулярного потока тепла q_j будем использовать упрощенное определяющее соотношение $q_j \cong -\chi \rho h_j$, где $\chi = \lambda / \rho C_p$ – молекулярный коэффициент температуропроводности; вывод этого соотношения приведен ниже в разд. 7.1.2 (см. также (*Маров, Колесниченко, 1987*)) .

С учетом формул (3.3.37), (3.3.40), (3.1.39), а также приближенного соотношения

$$\Xi_\alpha \equiv < h_\alpha > - \frac{\mathrm{k} < T >< C_p >}{< R^* >} = h_\alpha^0 + \frac{\mathrm{k} < T >}{< R^* >} \sum_{\beta=1}^{N} \left(C_{p\alpha} - C_{p\beta} \right) < Z_\beta > \approx h_\alpha^0 \ ,$$

величину $\overline{\rho} G_{hj}$ для стратифицированного в поле силы тяжести течения можно переписать в виде

$$\overline{\rho} G_{hj} \cong - \frac{\overline{p}_{,j} <R^*>}{<C_p> \overline{p}} \left(\overline{\rho h''^2} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> \overline{\rho Z_\alpha'' h''} \right) - \frac{\overline{p}_{,j} \, \mathrm{k} <T>}{\overline{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\rho Z_\alpha'' h''} =$$

$$\cong \delta_{j3}\frac{g}{<C_p><T>}\left(\overline{\rho h''^2}-\sum_{\alpha=1}^{N}h_\alpha^0\overline{\rho Z_\alpha'' h''}\right). \qquad (4.3.4)$$

Это выражение, описывающее генерацию турбулентного потока тепла под действием сил плавучести, содержит среднеквадратичный момент ("дисперсию") энтальпии и одноточечные парные корреляции пульсаций энтальпии и состава. При инвариантном моделировании многокомпонентной турбулентности для этих величин необходимо иметь свои собственные эволюционные уравнения переноса.

В точное (в указанном выше смысле) уравнение (4.3.1) для турбулентного потока q_j^T входят и другие неопределенные корреляционные члены, порождающие проблему замыкания. С учетом оговоренных выше соображений, моделирование этих дополнительных корреляций проведем с использованием следующих простых аппроксимаций (*Колесниченко, Маров, 1984*):

$$\overline{\rho}<\varepsilon_{hj}>=K_{e2}\frac{\nu+\chi}{2L^2}q_j^T\ , \qquad (4.3.5)$$

$$\overline{p'h''}_{,j}=-K_{s1}\frac{<e>^{1/2}}{L}q_j^T-K_{s2}P_{hj}\ , \qquad (4.3.6)$$

$$\left[\overline{(\rho V_j''V_k''+p'\delta_{jk}-\pi_{jk})h''}-\chi\overline{\rho V_j''h}_{,k}\right]=-\left[c_3L<e>^{1/2}+c_4(\nu+\chi)\right]q_{j,k}^T, \qquad (4.3.7)$$

в которых K_{s1}, K_{s2}, c_3 и c_4 – универсальные эмпирические константы (см. (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*)); $L=L(\boldsymbol{r},t)$ – локальный масштаб турбулентности, определяемый выражениями (4.2.17)–(4.2.19). Величина $P_{hj}\equiv q_k^T\left(<V_j>_{,k}+2\varepsilon_{ljk}\Omega_l\right)+\overline{\rho}G_{hj}$ определяет полную скорость генерации турбулентного теплового потока q_j^T, как под влиянием средней деформации, так и благодаря действию архимедовых сил.

По поводу соотношений (4.3.5)–(4.3.7) можно сказать следующее. Для локально изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса корреляционные моменты $\overline{\pi_{lk}h''}_{,l}$ и $\overline{q_lV_j''}_{,l}$, а тем самым и член с вязкой диссипацией $<\varepsilon_{hj}>$, равны нулю. Следовательно, нужны модельные аппроксимации величины $<\varepsilon_{hj}>$ только при малых числах $\boldsymbol{Re}^T$, например, в приповерхностном слое. Наиболее часто используемой аппроксимацией для корреляций $\overline{p'h''}_{,j}$ служит выражение, предложенное Мониным (*Монин, 1965*) – первый член в (4.3.6). Это выражение представляет собой прямой аналог приближения "*тенденции к изотропности*", введенного Роттой для величин Φ_{ki} – корреляций скоростей деформации с пульсациями давления в модели (4.2.18). Напомним, что для полной аналогии с этой моделью в случае турбулентности однородной жидкости, Лаундер ввел в аппроксимации для корреляций $\overline{p'h''}_{,j}$ дополнительные члены, про-

порциональные генерации величины $< h''V_j'' >$ за счет действия средней деформации и архимедовых сил – член с P_{hj} (*Лаундер, Сполдинг, 1972*). И, хотя корреляция $\overline{p'h''_{,j}}$ в этом случае частично компенсирует член с прямой генерацией величины $< h''V_j'' >$ силами плавучести, все же силы плавучести приводят к росту вертикального потока турбулентного тепла при нестабильной стратификации среды и к его уменьшению – при стабильной. Диффузионные члены в (4.3.1) моделируются, так же как и в случае уравнения для R_{ij} , с использованием гипотезы градиентного типа со скалярным коэффициентом диффузии.

Для свободных констант в соотношениях (4.3.5)–(4.3.7) на основе имеющихся в литературе сведений по моделированию плоских слоев смешения можно принять следующие значения:

$$K_{e2} = 6; \quad K_{s1} = 0.4; \quad K_{s2} = 0.5; \quad c_3 = 0.8 \ . \tag{4.3.8}$$

Для других типов течений эти константы подлежат дальнейшему уточнению.

4.3.2. Прогностическое уравнение для среднеквадратичных пульсаций энтальпии смеси. При использовании выражений (2.1.51) и (2.1.52) для мгновенных значений потока и скорости возникновения энтальпии многокомпонентной смеси

$$J_{(h)j} \equiv q_j , \quad \sigma_{(h)} \equiv dp\ /dt + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}$$

общее уравнение переноса (4.1.12) приводит к следующему эволюционному уравнению для дисперсии энтальпии $< h''^2 >$:

$$\bar{\rho} \frac{D(< h''^2 > /2)}{Dt} + \left(\overline{\rho h'' V_k'' / 2} + \overline{q_k h''} \right)_{,k} = -q_k^T \left(< h >_{,k} - \frac{\bar{p}_{,k}}{\bar{\rho}} \right) - \bar{\rho}\varepsilon_h -$$

$$- \overline{h'' \left(dp'/dt + \pi_{ij} V_{i,j}'' \right)} \ , \tag{4.3.9}$$

где величина

$$\bar{\rho}\varepsilon_h \equiv -\overline{q_j h''_{,j}} \cong \chi \overline{\rho h_{,j} h''_{,j}} \tag{4.3.10}$$

характеризует скорость скалярной диссипации корреляции $< h''^2 >$ под воздействием процессов молекулярной температуропроводности (см. формулу (7.1.7)). Последнее слагаемое в (4.3.9), согласно имеющимся оценкам (*Иевлев, 1975*), мало по сравнению с предпоследним диссипативным членом и может быть опущено.

Уравнение (4.3.9) для дисперсии $< h''^2 >$ имеет структуру, сходную с уравнением (4.2.22) для переноса кинетической турбулентной энергии, но значительно проще него, так как не содержит корреляторов с пульсациями давления, а также членов, обусловленных силами плавучести. Следует отметить, что для

случая многокомпонентной химически активной смеси уравнение (4.3.9) значительно проще также аналогичного уравнения для среднего квадрата пульсаций температуры $<T''^2>$, поскольку, в отличие от последнего, не включает большого числа дополнительных парных корреляций пульсаций температуры и состава. Присутствие подобных корреляций в уравнении для дисперсии $<T''^2>$ связано, в конечном счете, с явным присутствием химического источника (тепловой энергии) в уравнении (2.1.49) для энтальпии, записанном через температуру.

Диссипативные и диффузионные слагаемые уравнения (4.3.9) будем далее аппроксимировать с помощью соотношений:

$$\bar{\rho}\varepsilon_h = K_{h1}\frac{\bar{\rho}<e>^{1/2}<h''^2>}{L} + K_{h2}\frac{\chi\overline{\rho h''^2}}{L^2}\ , \qquad (4.3.11)$$

$$J_{<h>j} \equiv \left(\overline{\rho h''^2 V_j''/2} + \overline{q_j h''}\right) = -\left(c_5 L <e>^{1/2} + c_6\chi\right)(\bar{\rho}<h''^2/2>)_{,j} \qquad (4.3.12)$$

где K_{h1}, K_{h2}, c_5, c_6 – универсальные константы. Константы K_{h2} и c_6 существенны только при малых значениях турбулентного числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T$, т.е. когда $K_{h1}\boldsymbol{Pr}\,\boldsymbol{Re}^T / K_{h2} \le 0(1)$ и $c_5\boldsymbol{Pr}\,\boldsymbol{Re}^T / c_6 \le 0(1)$; здесь $\boldsymbol{Pr} = \nu/\chi$ – молекулярное число Прандтля. На основе сведений, приведенных в сборнике (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*), можно рекомендовать следующие типичные значения для этих коэффициентов:

$$K_{h1} = 0.45; \qquad K_{h2} = 3; \qquad c_5 = 0.3 \pm 0.05\,. \qquad (4.3.13)$$

Заметим, что скорость диссипации ε_h среднеквадратичных пульсаций энтальпии смеси вместе с величинами $<h''^2>$ и $<e>$, согласно аппроксимации (4.3.11), определяет линейный масштаб турбулентного переноса пульсаций энтальпии $L_h \propto <e>^{1/2}<h''^2>/\varepsilon_h$. Поэтому, в случае предположения $L = L_h$, дополнительное балансовое уравнение для величины ε_h может служить целям определения масштаба турбулентности $L(\boldsymbol{r},t)$ (см. разд. 4.3.8.).

4.3.3. Вывод формулы для корреляций, включающих пульсации источника производства вещества. Осредненые уравнения движения многокомпонентной смеси (3.2.4)–(3.2.8), уравнение переноса (4.2.9) для турбулентных напряжений Рейнольдса, уравнение (4.3.1) для турбулентного потока тепла и т.п. показывают, что для адекватного описания турбулентных течений химически активной среды необходимо знание пространственно-временных распределений одноточечных парных корреляций, включающих пульсации концентраций, т.е. корреляций $J^T_{\alpha j}$, $<h''Z''_\alpha>$ и $<Z''_\alpha Z''_\beta>$. Поэтому, точный вид прогностических уравнений, описывающих динамику этих моментов в реагирующем потоке, имеет принципиальное значение, как с точки зрения общей проблемы замыкания в теории многокомпонентной турбулентности второго приближения, так и для более полного понимания процессов турбулентного переноса вещества в стратифи-

цированной смеси.

Обратимся теперь к анализу уравнений переноса для указанных моментов на основе общего уравнения (4.1.9). Но прежде чем перейти к выводу уравнений переноса для корреляций типа $< Z''_\alpha A'' >$, получим общее выражение для величин $\overline{A''\sigma_\alpha}$, содержащих турбулентные пульсации источника вещества за счет химических реакций и фигурирующих в уравнениях подобного типа.

Используя свойства средневзвешенного осреднения (3.1.7) и выражение (3.1.27), величину $\overline{A''\sigma_\alpha}$ можно представить в виде

$$\overline{A''\sigma_\alpha} = \bar{\sigma}_\alpha \overline{A''} + \overline{\sigma'_\alpha A''} = \left(\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \bar{\xi}_s \right) \cdot \overline{A''} + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{A\, \xi'_s}, \qquad (4.3.14)$$

где для пульсаций скоростей химических реакций s $(s = 1,2,\ldots,r)$, согласно формуле (3.2.28), имеем

$$\xi'_s = \Lambda_{s0} T' + \sum_{\beta=1}^{N} \Lambda_{s\beta} n'_\beta \,. \qquad (4.3.15)$$

Так как при развитом здесь подходе все уравнения переноса содержат корреляции с пульсациями энтальпии h'' и/или концентраций Z''_α, удобно именно через них выразить пульсации скоростей химических реакций ξ_s в (4.3.15). Это можно сделать с помощью следующих очевидных преобразований

$$\begin{aligned} n'_\beta &= n_\beta - \overline{n_\beta} = \rho Z_\beta - \bar{\rho} < Z_\beta > = \\ &= \rho Z_\beta - \rho < Z_\beta > + \rho' < Z_\beta > = \rho Z''_\beta + \rho' < Z_\beta >, \end{aligned} \qquad (^1)$$

$$T' = T'' - \overline{T''} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\bar{\rho} T'' + \overline{\rho' T''} \right) = \frac{\rho T''}{\bar{\rho}} - \frac{(\rho' T'')'}{\bar{\rho}}. \qquad (^2) \qquad (4.3.16)$$

Для исключения пульсаций температуры T'' из правой части (4.3.16(^{2})), воспользуемся формулой (3.3.29); тогда получим

$$T' = \frac{1}{\bar{\rho} < C_p >} \left(\rho h'' - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta > \rho Z''_\beta - \sum_{\beta=1}^{N} C_{p\beta} \rho (Z''_\beta T'')'' \right) - \frac{(\rho' T'')'}{\bar{\rho}} \,. \qquad (4.3.17)$$

Применим теперь эти соотношения для определения входящих в (4.3.14) корреляций $\overline{A\, n'_\beta}$ и $\overline{A\, T'}$; в результате будем иметь

$$\overline{A n'_\beta} = \overline{\rho A'' Z''_\beta} - \bar{\rho} < Z_\beta > \overline{A''}, \qquad (4.3.18)$$

$$\overline{A\, T'} \cong \frac{1}{\bar{\rho} < C_p >} \left(\overline{\rho h'' A''} - \sum_{\beta=1}^{N} < h_\beta > \overline{\rho Z''_\beta A''} \right), \qquad (4.3.19)$$

причем в формуле (4.3.19) удержаны моменты только второго порядка.

Наконец, входящий в (4.3.14) корреляционный член $\overline{A\,\xi_s'}$, с учетом (4.3.15), (4.3.18) и (4.3.19), может быть записан в виде

$$\overline{A\xi_s'} = \frac{\Lambda_{s0}}{\bar{\rho} < C_p>}\overline{\rho h'' A''} + \sum_{\beta=1}^{N}\overline{\rho Z_\beta'' A''}\left(\Lambda_{s\beta} - \frac{\Lambda_{s0}}{\bar{\rho} < C_p>} < h_\beta >\right) - \left(\bar{\rho}\sum_{\beta=1}^{N}\Lambda_{s\beta} < Z_\beta>\right)\cdot\overline{A''}.$$

Отсюда, при использовании формулы (3.3.38*) для $\overline{A''}$, для искомого выражения $\overline{A''\sigma_\alpha}$ окончательно находим

$$\overline{A''\sigma_\alpha} = L_{0\alpha}^{(Ch)}\overline{\rho h'' A''} + \sum_{\beta=1}^{N} L_{\beta\alpha}^{(Ch)}\overline{\rho Z_\beta'' A''}\,, \tag{4.3.20}$$

где введены обозначения

$$L_{0\alpha}^{(Ch)} = \frac{1}{\bar{\rho} < C_p >}\sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\left[\Lambda_{s0} + \frac{\mathrm{k}\,\bar{n}}{\bar{p}}\left(\bar{\xi}_s - \sum_{\beta=1}^{N} n_\beta\Lambda_{s\beta}\right)\right], \tag{4.3.21}$$

$$L_{\beta\alpha}^{(Ch)} = \sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\left(\Lambda_{s\beta} - \frac{C_{p\beta} < T >}{\bar{\rho} < C_p >}\cdot\Lambda_{s0}\right) - h_\beta^0 L_{0\alpha}^{(Ch)}\,. \tag{4.3.22}$$

При выводе соотношений (4.3.20)–(4.3.22) мы пренебрегали произведениями парных корреляций типа $\overline{\rho Z_\beta'' A''}$ и $\overline{\rho h'' A''}$. По этой же причине, при условии применения формулы (3.2.41) для осредненных скоростей химических реакций $\bar{\xi}_s$, фигурирующих в (4.3.21), необходимо оставить в рассмотрении только первый член. Ниже будут разобраны случаи различных величин A.

4.3.4. Уравнения переноса для турбулентных потоков диффузии. Предположим, что в общем уравнении переноса (4.1.9) $A \equiv Z_\alpha$ и $B \equiv V_j$. Тогда, используя для мгновенных значений потоков и источников вещества сорта α и количества движения смеси соотношения (2.1.10) и (4.2.1), соответственно, получим точные эволюционные уравнения переноса для турбулентных потоков диффузии $J_{\alpha j}^T \equiv \overline{\rho Z_\alpha'' V_j''}$ $(\alpha = 1,2,...,N)$ в виде :

$$\bar{\rho}\frac{D(J_{\alpha j}^T/\bar{\rho})}{Dt} + \left[\overline{(\rho V_j'' V_k'' + p'\delta_{jk} - \pi_{jk})Z_\alpha''} + \overline{J_{\alpha k} V_j''}\right]_{,k} = R_{jk} < Z_\alpha >_{,k} +$$

$$+ J_{\alpha k}^T\left(< V_j>_{,k} + 2\varepsilon_{jlk}\Omega_l\right) + \overline{p' Z_\alpha''}_{,j} + \bar{\rho}G_{\alpha j} + \sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\overline{\xi_s V_j''} - \bar{\rho}<\varepsilon_{\alpha j}>. \tag{4.3.23}$$

Здесь

$$\bar{\rho} < \varepsilon_{\alpha j} > \equiv \overline{\pi_{jk} Z_\alpha''_{,k} - J_{\alpha k} V_j''_{,k}} \tag{4.3.24}$$

– скорость разрушения корреляции $< Z''_\alpha V''_j >$ вследствие молекулярных процессов вязкости и диффузии (векторная величина);

$$\overline{\rho} G_{\alpha j} \equiv \overline{\rho' Z''_\alpha} \frac{\overline{p}_{,j}}{\overline{\rho}} \tag{4.3.25}$$

– скорость генерации потока турбулентной диффузии $J^T_{\alpha j}$, обусловленная градиентом осредненного давления. В случае турбулентного течения газовой смеси, стратифицированной в поле силы тяжести, с учетом формулы (3.3.40) для корреляций $\overline{Z''_\alpha}$ и гидростатического уравнения $\overline{p}_{,j} \approx -\delta_{j3}\overline{\rho} g$, для величины $\overline{\rho} G_{\alpha j}$ получим

$$\overline{\rho} G_{\alpha j} \cong \delta_{j3} \frac{g}{< C_p >< T >} \left(\overline{\rho h'' Z''_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{N} h^0_\beta \overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta} \right). \tag{4.3.25*}$$

Члены уравнения (4.3.23), включающие корреляции с пульсациями гидродинамической скорости потока и химических источников $\overline{V''_j \sigma_\alpha}$, согласно формулам (4.3.20)–(4.3.22), приобретают вид

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s V''_j} = L^{(Ch)}_{0\alpha} q^T_j + \sum_{\beta=1}^{N} L^{(Ch}_{\beta\alpha} J^T_{\beta j} \ . \tag{4.3.26}$$

Для аппроксимации диссипативных и диффузионных членов эволюционного уравнения переноса для потоков диффузии $J^T_{\alpha j}$ будем использовать следующие простые выражения, аналогичные соотношениям (4.3.5) - (4.3.7) для турбулентного потока тепла

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{\alpha j} >= K_{e2} \frac{\nu + \chi}{2L^2} J^T_{\alpha j} \ , \tag{4.3.27}$$

$$\overline{p' Z''_{\alpha,j}} = -K_{\alpha 1} \frac{< e >^{1/2}}{L} J^T_{\alpha j} - K_{\alpha 2} P_{\alpha j} \tag{4.3.28}$$

$$\left(\overline{\rho V''_j V''_k} + p' \delta_{jk} - \pi_{jk} \right) \overline{Z''_\alpha} + \overline{J_{\alpha k} V''_j} = -\left(c_{\alpha 1} L < e >^{1/2} + c_{\alpha 2} (\chi + \nu) \right) J^T_{\alpha j,k} . \tag{4.3.29}$$

Здесь величина $P_{\alpha j} \equiv J^T_{\alpha k} \left(< V_j >_{,k} + 2\varepsilon_{ijk} \Omega_i \right) + \overline{\rho} G_{\alpha j}$ характеризует скорость генерации турбулентного потока диффузии $J^T_{\alpha j}$ вследствие средней деформации среды и эффектов плавучести; $K_{\alpha 1}, K_{\alpha 2}, c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ – эмпирические постоянные. Для численных значений универсальных констант модели, ввиду полного отсутствия в литературе необходимых сведений, полученных *ad hoc*, воспользуемся значениями, аналогичными (4.3.8)

$$K_{e2} = 6; \quad K_{\alpha 1} = 0.4; \quad K_{\alpha 2} = 0.5; \quad c_{\alpha 1} = 0.8,$$

что, по-видимому, возможно для пассивной (нереагирующей) смеси. В случае же химически активной смеси для точного определения этих констант необходимы дополнительные специальные эксперименты, позволяющие моделировать частные случаи реагирующей турбулентности.

Следует отметить, что N уравнений (4.3.23) для турбулентных потоков диффузии не являются независимыми; легко показать, что их суммирование, с предварительным умножением на M_α, приводит к тождеству. Поэтому, в качестве дополнительного соотношения для определения потоков $J^T_{\alpha j}$ необходимо использовать алгебраический интеграл $\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha J^T_{\alpha j} = 0$.

4.3.5. Эволюционное уравнение переноса корреляций с пульсациями энтальпии и состава смеси. Полагая в общем уравнении переноса для вторых моментов (4.1.9) $A \equiv Z_\alpha$ и $B \equiv h$ и учитывая определения

$$J_{(Z_\alpha)j} \equiv J_{\alpha j} \quad , \quad \sigma_{(Z_\alpha)} \equiv \sigma_\alpha ,$$

$$J_{(h)j} \equiv q_j \ , \sigma_{(h)} \equiv dp/dt + \pi_{ij} V_{i,j} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{\alpha j} F^*_{\alpha j} ,$$

для соответствующих потоков и источников, приходим к точным эволюционным уравнениям переноса для корреляций $< h'' Z''_\alpha >$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$

$$\rho \frac{D < h'' Z''_\alpha >}{Dt} + \left(\overline{\rho h'' Z''_\alpha V''_j + J_{\alpha j} h'' + q_j Z''_\alpha} \right)_{,j} = -q^T_j < Z_\alpha >_{,j} -$$

$$- J^T_{\alpha j} \left(< h >_{,j} - \frac{\overline{p}_{,j}}{\overline{p}} \right) + \overline{Z''_\alpha \left(p' + \pi_{ij} V_{i,j} \right)} + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s h''} - \overline{\rho} < \varepsilon_{h\alpha} > , \qquad (4.3.30)$$

где для скалярной скорости диссипации корреляции $< h'' Z''_\alpha >$ под воздействием молекулярных процессов и температуропроводности и диффузии введено обозначение

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{h\alpha} > \equiv -\overline{q_j Z''_{\alpha,j}} - \overline{J_{\alpha j} h''_{,j}} \ . \qquad (4.3.31)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (4.3.30), малое по сравнению с диссипативным членом (*Иевлев, 1975*), будем далее опускать.

Слагаемые, содержащие корреляции пульсаций энтальпии со скоростями химических реакций $\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s h''}$, с учетом формул (4.3.20)–(4.3.22), примут вид

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s h''} = L^{(Ch)}_{0\alpha} \overline{\rho} < h''^2 > + \sum_{\beta=1}^{N} L^{(Ch)}_{\beta\alpha} \overline{\rho} < Z''_\beta h'' > . \qquad (4.3.32)$$

Диссипативные и диффузионные члены уравнения (4.3.30) будем далее аппроксимировать с помощью соотношений (*Колесниченко, Маров, 1984*):

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{h\alpha} >= K_{h\alpha 1} \frac{\overline{\rho} < e >^{1/2}}{L} < h'' Z_\alpha'' > + K_{h\alpha 2} \frac{\chi}{L^2} \overline{\rho h'' Z_\alpha''} \quad , \tag{4.3.33}$$

$$\left(\overline{\rho h'' Z_\alpha'' V_j'' + J_{\alpha j} h'' + q_j Z_\alpha''}\right) = -\left(c_{h\alpha 1} L < e >^{1/2} + c_{h\alpha 2} \chi \right) \left(\overline{\rho h'' Z_\alpha''}\right)_{,j} . \tag{4.3.34}$$

Эмпирические постоянные $K_{h\alpha 2}$ и $c_{h\alpha 2}$ существенны только при малых значениях турбулентного числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T$, т.е. когда $K_{h\alpha 1} \boldsymbol{Pr}\, \boldsymbol{Re}^T / K_{h\alpha 2} \le 0(1)$ и $c_{h\alpha 1} \boldsymbol{Pr}\, \boldsymbol{Re}^T / c_{h\alpha 2} \le 0(1)$. По аналогии с (4.3.13) можно принять следующие значения эмпирических коэффициентов

$$K_{h\alpha 1} = 0.45; \qquad K_{h\alpha 2} = 3; \qquad c_{h\alpha 1} = 0.3 \pm 0.05 .$$

Уравнения (4.3.30) также линейно зависимы. По этой причине одно из них должно быть опущено. Дополнительным соотношением для определения корреляций $< h'' Z_\alpha'' >$ является равенство $\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha < h'' Z_\alpha'' > = 0$.

4.3.6. Уравнения переноса для корреляционных моментов пульсаций состава смеси. Наконец, полагая в общем уравнении переноса для вторых моментов (4.1.9) $A \equiv Z_\alpha$ и $B \equiv Z_\beta$ и учитывая для истинных потоков и источников вещества определения (2.1.10): ($J_{(Z_\alpha)j} \equiv J_{\alpha j}$ и $\sigma_{(Z_\alpha)} \equiv \sigma_\alpha$), в результате простых выкладок получим $N(N+1)/2$ симметричных по индексам α и β эволюционных уравнений для смешанных парных корреляций $< Z_\alpha'' Z_\beta'' >$ $(\alpha, \beta = 1,2,\ldots N)$

$$\overline{\rho} \frac{D < Z_\alpha'' Z_\beta'' >}{Dt} + \left[\overline{\rho Z_\alpha'' Z_\beta'' V_j''} - \chi \overline{\rho \left(Z_\alpha'' Z_{\beta,j}'' + Z_\beta'' Z_{\alpha,j}'' \right)}\right]_{,j} =$$

$$= -J_{\alpha j}^T < Z_\beta >_{,j} - J_{\beta j}^T < Z_\alpha >_{,j} + \sum_{s=1}^{r} \left(\nu_{\alpha s} \overline{\xi_s Z_\beta''} + \nu_{\beta s} \overline{\xi_s Z_\alpha''} \right) - \overline{\rho} < \varepsilon_{\alpha\beta} > , \tag{4.3.35}$$

где

$$\overline{\rho} < \varepsilon_{\alpha\beta} > \equiv \chi \overline{\rho \left(Z_{\alpha,j} Z_{\beta,j}'' + Z_{\beta,j} Z_{\alpha,j}'' \right)} \tag{4.3.36}$$

– скалярная скорость разрушения корреляции $< Z_\alpha'' Z_\beta'' >$ под воздействием процессов молекулярной диффузии. Слагаемые, содержащие парные корреляции пульсаций состава и скоростей химических реакций $\sum_{s=1}^{r} \nu_{\beta s} \overline{\xi_s Z_\alpha''}$ и $\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s Z_\beta''}$, с учетом формул (4.3.20)–(4.3.22), принимают вид

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\beta s} \overline{\xi_s Z''_\alpha} = L_{0\beta}^{(Ch)} \overline{\rho h'' Z''_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{N} L_{\gamma\beta}^{(Ch)} \overline{\rho Z''_\gamma Z''_\alpha} \ , \qquad (4.3.37)$$

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s Z''_\beta} = L_{0\alpha}^{(Ch)} \overline{\rho h'' Z''_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{N} L_{\gamma\alpha}^{(Ch)} \overline{\rho Z''_\gamma Z''_\beta} \ . \qquad (4.3.38)$$

Для аппроксимации диссипативных и диффузионнных членов уравнения (4.3.35) будем использовать простые выражения (*Колесниченко, Маров, 1984*)

$$\overline{\rho} <\varepsilon_{\alpha\beta}> = K_{\alpha\beta 1} \frac{\overline{\rho} <e>^{1/2}}{L} <Z''_\alpha Z''_\beta> + K_{\alpha\beta 2} \frac{\chi}{L^2} \overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta} \qquad (4.3.39)$$

$$\left[\overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta V''_j} - \chi \overline{\rho \left(Z''_\alpha Z''_{\beta,j} + Z''_\beta Z''_{\alpha,j}\right)}\right] = -\left(c_{\alpha\beta 1} L <e>^{1/2} + c_{\alpha\beta 2} \chi\right) (\overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta})_{,j} . \qquad (4.3.40)$$

Уравнения переноса (4.3.35) линейно зависимы. Дополнительными соотношениями для определения корреляций $<Z''_\beta Z''_\alpha>$ являются равенства

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha <Z''_\beta Z''_\alpha> = 0 \qquad \beta = (1,2,..., \ N) .$$

Вновь подчеркнем, что для наиболее полного моделирования многокомпонентной сжимаемой смеси необходимо, вообще говоря, дополнительно привлекать эволюционные уравнения для корреляций с пульсациями плотности. Как следует из предыдущего анализа, во многие алгебраические соотношения и дифференциальные уравнения, описывающие осредненное поле турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров смеси входят парные моменты с пульсациями массовой плотности типа $\overline{\rho v'' A''}$ $(= \overline{A''} = -\overline{\rho' A'} / \overline{\rho})$, например, величины: $J^T_{(v)j}$, $\overline{Z''_\alpha}$ и т.п. Исходя из общего эволюционного уравнения (4.1.9), для подобных корреляций также могут быть выведены уравнения переноса, аналогичные приведенным выше. В частности, прогностическое уравнение для турбулентного потока удельного объема смеси $J^T_{(v)j}$ принимает вид

$$\overline{\rho} \frac{D(J^T_{(v)j} / \overline{\rho})}{Dt} + \left[R_{ij} <v> + \overline{v''(p'\delta_{ij} - \pi_{ij})} - J^T_{(v)i} <V_j>\right]_j = R_{ij} <v>_{,j} -$$

$$-J^T_{(v)j} \left(<V_i>_{,j} + 2\varepsilon_{ilj}\Omega_l\right) + \overline{p' v''}_{,i} + \sum_{\alpha=1}^{N} F_{\alpha i} \overline{Z''_\alpha} - \overline{\rho} <\varepsilon_{(vV_i)}> . \qquad (4.3.41)$$

Однако на данном этапе развития теории инвариантного моделирования турбулентности для сред с переменной плотностью остаются проблемы, связанные с аппроксимацией многих неизвестных членов подобных уравнений (*Иевлев, 1975,1990*). В связи с этим нами предложен другой способ моделирования корреляций с пульсациями плотности $\overline{\rho v'' A''}$, основанный на систематическом применении приближенного алгебраического соотношения (3.3.36). Как уже отмеча-

лось, использование этого соотношения наиболее эффективно для тех режимов сдвиговых течений многокомпонентной смеси в стратифицированной атмосфере, для которых можно пренебречь относительными турбулентными пульсациями давления, по сравнению с относительными пульсациями температуры и концентраций химических компонентов смеси.

В заключение отметим, что полученные эволюционные уравнения переноса для моментов второго порядка замыкают, при том или ином способе задания масштаба турбулентности L, систему осредненных по Рейнольдсу уравнений многокомпонентной гидродинамики (3.2.4)–(3.2.8). В совокупности с гидродинамическими уравнениями они образуют усложненную полуэмпирическую модель турбулентности второго приближения, в рамках которой могут быть описаны достаточно сложные течения реагирующей газовой смеси. Предложенный здесь систематический вывод этих уравнений дает возможность проследить за теми гипотезами и допущениями, которые были приняты при их получении, что дает четкий критерий полноты описания турбулентного тепло- и массопереноса для каждой конкретной задачи. Кроме того, обобщенность записи, заложенная в структуру приведенных уравнений, в частности, удержание негравитационных массовых сил, позволяет легко получить их модификации и для других турбулизованных сред - например, влажных, мелкодисперсных или электропроводных.

4.3.7. Масштаб турбулентности. Для замыкания полученных эволюционных уравнений переноса для корреляционных моментов второго порядка необходимо указать способ определения масштаба турбулентности L, появляющегося в этих уравнениях при аппроксимации неизвестных корреляционных членов. Использование только одного масштаба турбулентности не всегда достаточно. В общем случае макромасштабы L_A турбулентных пульсаций соответствующих термогидродинамических характеристик потока A (скорости, энтальпии, концентраций) отличаются друг от друга. Вывод уравнений для L_A является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории сдвиговой турбулентности. Дело в том, что параметры L_A не могут быть, вообще говоря, определены только через одноточечные моменты пульсирующего признака A. Являясь мерой расстояния между двумя точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ в турбулизованном потоке, на котором двухточечные корреляторы $<A''(\boldsymbol{r}_1)A''(\boldsymbol{r}_2)>$ еще заметно отличаются от нуля, масштабы L_A могут быть найдены из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путем их интегрирования по расстоянию между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ (*Ламли, Пановский, 1966; Левеллен, 1980*). Полученные таким путем прогностические уравнения описывают процессы конвекции, генерации и диссипации масштаба L_A, но содержат большое число плохо определяемых из опыта коэффициентов пропорциональности, т.е. являются, в общем случае, значительно менее достоверными, чем, например, балансовые уравнения для составляющих тензора напряжений Рейнольдса, в которых многие члены определены точно (*Левеллен, 1980*)].

По этой причине, для обеспечения эффективности практических расчетов, масштаб турбулентности L часто задается в виде чисто эмпирически найденных функций, или находится с помощью алгебраической формулы (а иногда упро-

щенного дифференциального уравнения), учитывающей только геометрию потока (расстояние до стенки, форму канала и т.п.) и не зависящей от особенностей течения жидкости. Так, Прандтль на основе экспериментальных данных, полученных Никурадзе в гладких трубах, предложил следующую эмпирическую формулу для величины L (*Никурадзе, 1936*)

$$L = R\left[0.14 - 0.08(1 - z/R)^2 - 0.06(1 - z/R)^4\right], \qquad (4.3.42)$$

где R – радиус трубы, z – расстояние от стенки. В случае свободной конвекции в стратифицированных слоях со сдвигом для определения масштаба L можно использовать следующее простое дифференциальное уравнение (*Быкова, 1973*)

$$L = -\kappa c^{1/4}\Psi / (1 + a x_3)\Psi_{,3}\ , \qquad (4.3.43)$$

позволяющее рассчитать L через локальные средние характеристики движущегося потока. Здесь $\Psi = <e>^{1/2}/L$, $\kappa = 0{,}4$ – постоянная Кармана; коэффициент a имеет размерность L^{-1} и является функцией числа Россби $\boldsymbol{Ro}$; c – эмпирическая константа. Однако формулы (4.3.42) и (4.3.43) отличаются сравнительно небольшой универсальностью и, будучи пригодными для одного класса течений, должны быть значительно изменены при переходе к описанию течений другого класса. Кроме того, формулы типа (4.3.42) могут быть использованы только для "равновесной" турбулентности, характеристики которой определяются локальными условиями в каждой точке (*Иевлев, 1975*). Для "неравновесной" турбулентности, когда важно влияние предыстории потока на характеристики течения в точке, величина L должна определяться с помощью некоторого уравнения, учитывающего все виды энергетических преобразований в турбулентном потоке.

При инвариантном моделировании турбулентного переноса в однородной жидкости стремятся использовать "универсальное" эволюционное уравнение для масштаба турбулентности L , в какой-то мере устраняющее указанные выше недостатки в его нахождении. В работе (*Левеллен, 1980*) приведено подобное уравнение для макромасштаба турбулентности, определенного формулой $L = \dfrac{const}{<e>}\iiint_w <V''(x)\,V''(x+r)>\dfrac{dw}{r^2}$), которое было получено путем интегрирования по объему уравнения переноса для двухточечных корреляций скорости $<V''(x)\,V''(x+r)>$. Уравнение для L имеет вид :

$$\frac{DL}{Dt} - 0.3\left(L<e>^{1/2} L_{,j}\right)_{,j} = -0.35\frac{L}{\rho <e>} R_{ij} <V_i>_{,j} + 0.8\frac{L}{<e><T>} g\delta_{j3} q_j^T +$$

$$+ 0.6\frac{\nu L}{\lambda^2} - 0.375\frac{1}{<e>^{1/2}}\left[(<e>^{1/2} L)_{,j}\right]^2, \qquad (4.3.44)$$

где $\lambda = L/(3 + 0.125\boldsymbol{Re}^T)^{1/2}$ – *микромасштаб Колмогорова–Тейлора*. Слагаемое, включающее масштаб λ, учитывает, до некоторой степени, связь между пульсациями скорости на некотором расстоянии от стенки и пульсациями давления на

стенке, а также различие размеров вихрей в поперечном направлении и вдоль стенки. Трудности вывода этого и подобных ему уравнений для L связаны с тем, что ни один из членов исходного уравнения для корреляций $\overline{V_j'(x)V'(x+r)}$ нельзя проинтегрировать и потому все они должны быть промоделированы. С другой стороны, для дифференциального уравнения (4.3.44) возникает проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб L не стремится к нулю.

По этой причине для многокомпонентной турбулентности мы будем вводить в рассмотрение, вместо балансовых уравнений для макромасштабов турбулентности L_A, эволюционные уравнения переноса для комбинаций вида $(<A''^2>)^m (L_A)^n$, которые при совместном их использовании с уравнениями переноса для моментов $<A''^2>$, определяют масштабы L_A (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*). Одним из уравнений такого рода является прогностическое уравнение для скорости скалярной диссипации $<\varepsilon_{(A)}> \equiv \chi_A <A_{,j} A''_{,j}>$ некоторой характеристики течения A – величины, определяющей скорость смешения признака A до молекулярного уровня; здесь χ_A – соответствующий молекулярный коэффициент обмена. В частности, уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии ε_e, рассматриваемое совместно с эмпирическим соотношением $L \propto <e>^{3/2} / \varepsilon_e$, вытекающим из соображений размерности, позволяет полностью замкнуть систему уравнений для моментов второго порядка. Вопрос о граничных условиях в этом случае значительно упрощается, поскольку величина ε_e стремится к нулю на внешней границе.

Впервые эволюционное уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии ε_e в случае течения однородной несжимаемой жидкости получил Давыдов (*Давыдов, 1959, 1961*). Аналогичные уравнения для турбулизованных течений с переменной плотностью при использовании средневзвешенного осреднения (*Фавр,1969*) до последнего времени получить не удавалось.

4.3.8. Эволюционное уравнение переноса для скорости скалярной диссипации. Рассмотрим методику получения подобных уравнений в сжимаемом газе на примере уравнения переноса для скорости скалярной диссипации среднеквадратичной пульсации признака A (см. формулу(4.1.13))

$$\rho <\varepsilon_{(A)}> \equiv \overline{\rho\varepsilon_{(A)}} = -\overline{J_{(A)j} A''_{,j}} = \chi_A \overline{\rho A_{,j} A''_{,j}} . \qquad (4.3.45)$$

С этой целью возьмем производную по пространственной координате x_i от правой и левой частей уравнения субстанционального баланса (2.1.1) некоторого признака A; в результате получим

$$d(A_{,i})/dt = -A_{,j} V_{j,i} + \{[\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j}]/\rho\}_{,i} . \qquad (4.3.46)$$

Далее, используя тождество

$$dA''/dt = dA/dt - D<A>/Dt - V_j'' <A>_{,j} ,$$

а также частную производную по x_i от него, после несложных преобразований будем иметь

$$d(A''_{,i})/dt = -A''_{,j}V_{j,i} + \{[\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j}]/\rho\}_{,i} - \\ - [D<A>/Dt]_{,i} - [V''_j <A>_{,j}]_{,i}. \qquad (4.3.47)$$

Осредним теперь по ансамблю возможных реализаций величину $\rho d\varepsilon_{(A)}/dt$; принимая во внимание тождество (3.1.12), соотношения (4.3.46) и (4.3.47), а также осредненное уравнение баланса общего вида (3.1.14)

$$\bar{\rho} D <A>/Dt = [\overline{J_{(A)j}} + J^T_{(A)j}]_{,j} + \overline{\sigma_{(A)}},$$

получим следующее точное дифференциальное уравнение переноса

$$\overline{\rho d\varepsilon_{(A)}/dt} = \bar{\rho} D <\varepsilon_{(A)}>/Dt + \overline{(\rho\varepsilon_{(A)}V''_j)}_{,j} = \chi_A \overline{\rho d(A_{,i}A''_{,i}/dt} = \\ = \chi_A \overline{\rho A''_{,i}\{-A_{,j}V_{j,i} + [(\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j})/\rho]_{,i}\}} + \chi_A \overline{\rho A_{,i}\{-A''_{,j}V_{j,i} + \\ + [(\sigma_{(A)} - J_{(A)j,j})/\rho]_{,i} - [D<A>/Dt]_{,i} - [V''_j <A>_{,j}]_{,i}}. \qquad (4.3.48)$$

Из (4.3.48) легко найти общий вид эволюционного уравнения переноса для скорости скалярной диссипации среднеквадратичной пульсации признака A:

$$\bar{\rho} D <\varepsilon_{(A)}>/Dt + [\overline{\rho\varepsilon_{(A)}V''_j} + \chi_A \overline{(A_{,j} + A''_{,j})J_{(A)i,i}}]_{,j} = \\ = \overline{(J_{(A)i}A''_{,j} + J_{(A)j}A''_{,i})} <V_j>_{,i} + \overline{J_{(A)i}V''_{j,i}} <A>_{,j} + \overline{J_{(A)i}V''_j} <A>_{,ji} + \\ + \chi_A \overline{\rho[A''_{,i}(\sigma_{(A)}/\rho)_{,i} + A_{,i}(\sigma_{(A)}/\rho)''_{,i}}} - \chi_A \overline{\rho(A_{,i}A''_{,j} + A_{,j}A''_{,i})V''_{j,i}} - \\ + \chi_A \overline{[J_{(A)j,j}(\rho A_{,i} + \rho A''_{,i})_{,i}]/\rho} - \overline{J_{(A)i}}(J^{\Sigma}_{(A)j,j}/\bar{\rho})_{,i}. \qquad (4.3.49)$$

Простая оценка показывает что при достаточно больших числах $\boldsymbol{Re}^T$ последний член в (4.3.49) может быть опущен без существенной потери информации о течении. Отметим, что и для уравнения (4.3.49) характерным является наличие новых неизвестных корреляционных членов, порождающих проблему замыкания. При сопоставлении этого уравнения с эволюционными уравнениями переноса для вторых моментов турбулентных пульсаций видно, что члены, стоящие в правой части (4.3.49), могут интерпретироваться в терминах генерации посредством осредненного течения и диссипации, вызываемой молекулярными процессами переноса.

При модельном определении неизвестных корреляционных членов уравнение (4.3.49), рассматриваемое совместно с простым эмпирическим соотношением

$$L_A \propto <e>^{1}{}^{2} <A''^2>/<\varepsilon_{(A)}>, \qquad (4.3.50)$$

вытекающим из соображений размерности, позволяет определить макромасштаб L_A турбулентного перемешивания признака A и замкнуть систему уравнений для моментов второго порядка $< A''^2 >$.

Уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии. В качестве примера использования общего уравнение (4.3.49) при выводе уравнения переноса для скорости скалярной диссипации конкретного среднеквадратичного момента (например, $< e >$, $< Z_\alpha''^2 >$, $< h''^2 >$ и т.п.), получим здесь прогностическое уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности. В случае развитой турбулентности уравнение (4.3.49), записанное относительно диссипации кинетической энергии турбулентности $\varepsilon_e = {}^1\!/_2\, \nu\overline{(V_i',_j + V_j',_i)^2}$, принимает вид (*Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*)

$$\bar{\rho}\frac{D\varepsilon_e}{Dt} = 0.15\left(\frac{<e>}{\varepsilon_e} R_{kj}\varepsilon_e,_k\right),_j + 1.45\frac{\varepsilon_e}{<e>}\left(R_{ij} < V_i >,_j + 0.48\bar{\rho}G\right) - 1.92\frac{\bar{\rho}\varepsilon_e^2}{<e>}, \quad (4.3.51)$$

где величина $\bar{\rho}G$ определяется формулой (4.2.20*). В правой части уравнения (4.3.51) стоят простейшим образом смоделированные члены, которые остаются при больших числах $\boldsymbol{Re}^T$: генерация ε_e под действием градиента скорости, порождение диссипации турбулентной энергии силами плавучести и массовыми негравитационными силами, молекулярное разрушение величины ε_e. Это уравнение, рассматриваемое совместно с эмпирическим соотношением $L \propto < e >^{3/2} / \varepsilon_e$, вытекающим из соображений размерности, позволяет полностью замкнуть систему уравнений для моментов второго порядка.

Уравнение переноса для скорости скалярной диссипации дисперсии энтальпии смеси. В качестве другого примера применения общего уравнения (4.3.49) получим эволюционное уравнение переноса для скорости диссипации дисперсии энтальпии

$$\bar{\rho} < \varepsilon_h > = -\overline{q_j h'',_j} \approx \chi\overline{\rho h,_j h'',_j}\,. \quad (4.3.52)$$

Здесь снова необходимо выразить неизвестные корреляционные члены через "известные" вторые моменты и параметры $< \varepsilon_h >$, $< e >$. В случае простейшим образом смоделированных членов будем иметь (*Турбулентные сдвиговые течения-I, 1982*)

$$\bar{\rho}\frac{D < \varepsilon_h >}{Dt} = k_1\left[\frac{< e >}{< \varepsilon_e >} R_{ij} < \varepsilon_h >,_i\right],_j + k_2\frac{< \varepsilon_h >}{< h''^2 >} R_{ij} < V_j >,_i - \quad (4.3.53)$$

$$- 0.97\frac{\bar{\rho} < \varepsilon_h >}{< h''^2 >} q_j^T < h >,_j + 30.0\frac{\bar{\rho} < \varepsilon_e >^2}{< e >^3}(q_j^T)^2 - 3.0\frac{\bar{\rho} < \varepsilon_h >^2}{< h''^2 >} - 0.75\frac{\bar{\rho}\varepsilon_e\varepsilon_h}{< e >}\,.$$

В правой части уравнения (4.3.53) оставлены корреляционные члены, которые

доминируют при больших числах Рейнольдса, а именно: диффузии; порождения величины $<\varepsilon_h>$ под действием сдвига скорости ветра и температуры; порождения величены $<\varepsilon_h>$ силами плавучести; и, наконец, молекулярного разрушения диссипации среднего квадрата пульсаций энтальпии. Если предположить, что временной масштаб, определяемый величинами $<h''^2>$ и $<\varepsilon_h>$, применим также и для скорости диссипации $<e_e>$ турбулентной энергии, т.е.

$$<e>/<\varepsilon_e> = const <h''^2>/<\varepsilon_h>. \qquad (4.3.54)$$

то уравнение (4.3.53) может быть использовано, вместо уравнения (4.3.51), для определения масштаба турбулентности (4.3.50).

4.3.9. Алгебраические модели замыкания. Рассмотренная нами усложненная феноменологическая модель многокомпонентной турбулентности, включающая, в качестве дополнительных к осредненным гидродинамическим уравнениям смеси, прогностические уравнения (4.2.9), (4.3.1), (4.3.9), (4.3.23), (4.3.30) и (4.3.35) для парных корреляций R_{ij}, q_j^T, $<h''^2>$, $J_{\alpha j}^T$, $<h''Z_\alpha''>$, $<Z_\alpha''Z_\beta''>$ пульсирующих термогидродинамических параметров, отвечает наиболее реалистичному подходу при описании процессов турбулентного переноса в реагирующей смеси. По этой причине такая модель потенциально превосходит более простые модели, основанные на использовании градиентных соотношений (3.3.3**), (3.3.15**) и (3.3.19**) для турбулентных потоков. Однако прогностические уравнения довольно сложны с вычислительной точки зрения и потому на современной стадии развития теории не очень пригодны для практических приложений. Тем не менее, они важны с точки зрения совершенствования более простых моделей. В частности, дифференциальные уравнения для вторых корреляционных моментов можно упростить до алгебраических соотношений для этих же величин и использовать при моделировании турбулентных коэффициентов переноса D_{ij}^T, χ_{ij}^T и ν_{ij}^T, фигурирующих в градиентных соотношениях.



Рис. 4.3.1. Баланс энергии турбулентности в зоне смешения.

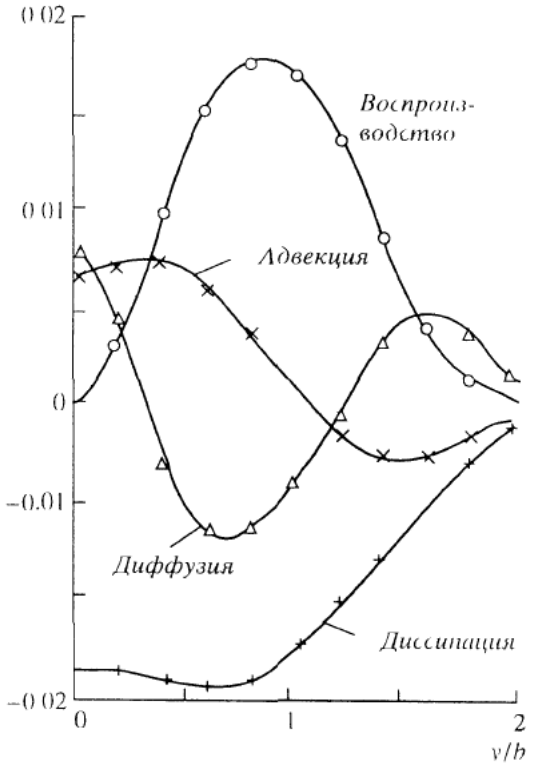


Рис. 4.3.2. Баланс турбулентной кинетической энергии в сечении плоской струи.

Локально равновесное приближение. Если в структуре турбулентности имеется некоторое внутреннее равновесие (хотя полного равновесия с полем средних скоростей при этом может и не быть), при котором конвективные и диффузионные члены в эволюционных уравнениях переноса (4.2.9), (4.3.1), (4.3.9), (4.3.23), (4.3.30) и (4.3.35) уравновешивают друг друга, так как они примерно равны по величине и противоположны по знаку (см. Рис. 4.3.1 и 4.3.2), то корреляционные моменты второго порядка R_{ij}, q_j^T, $<h''^2>$, $J_{\alpha J}^T$, $<h''Z_\alpha''>$, $<Z_\alpha''Z_\beta''>$ будут находиться в локальном равновесии. Другими словами, они не будут изменяться во времени или пространстве. В этом случае дифференциальные уравнения (4.2.9), (4.3.1), (4.3.9), (4.3.23), (4.3.30) и (4.3.35), превращаясь в алгебраические, принимают следующий вид:

1). *уравнение для тензора рейнольдсовых напряжений*

$$K_{p1}\frac{<e>^{1/2}}{L}\left(R_{ki}+\frac{2}{3}\delta_{ki}\bar{\rho}<e>\right)+(1-K_{p2})P_{ki}+\frac{2}{3}K_{p2}\delta_{ki}P-$$

$$-\frac{2}{3}K_{e1}\delta_{ki}\frac{\bar{\rho}<e>^{3/2}}{L}+K_{e2}\frac{\nu R_{ki}}{L^2}=0\ . \qquad (4.3.55)$$

2). *уравнение для турбулентного потока тепла*

$$-\left(K_{s1}\frac{<e>^{1/2}}{L}+K_{e2}\frac{\nu+\chi}{2L^2}\right)q_j^T+R_{jk}\left(<h>_{,k}-\frac{\bar{p}_{,k}}{\bar{\rho}}\right)+(1-K_{s2})P_{hj}=0\,. \qquad (4.3.56)$$

3). *уравнение для дисперсии энтальпии смеси*

$$K_{h1}\frac{\bar{\rho}<e>^{1/2}<h''^2>}{L}+K_{h2}\frac{\chi\overline{\rho h''^2}}{L^2}+q_k^T\left(<h>_{,k}-\frac{\bar{p}_{,k}}{\bar{\rho}}\right)=0. \qquad (4.3.57)$$

4). *уравнения для турбулентных потоков диффузии*

$$-\left(K_{\alpha1}\frac{<e>^{1/2}}{L}+K_{e2}\ \frac{\nu+\chi}{2L^2}\right)J_{\alpha j}^T+(1-K_{\alpha2})P_{\alpha j}+R_{jk}<Z_\alpha>_{,k}+$$

$$+L_{0\alpha}^{(Ch)}q_j^T+\sum_{\beta=1}^{N}L_{\beta\alpha}^{(Ch}J_{\beta j}^T=0,\quad(\alpha=1,2,\ldots,N). \qquad (4.3.58)$$

5). *уравнения для корреляций пульсаций энтальпии и состава*

$$-K_{h\alpha1}\frac{\bar{\rho}<e>^{1/2}}{L}<h''Z_\alpha''>-K_{h\alpha2}\frac{\chi}{L^2}\overline{\rho h''Z_\alpha''}-q_j^T<Z_\alpha>_{,j}-J_{\alpha j}^T\left(<h>_{,j}-\frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{p}}\right)+$$

$$+L_{0\alpha}^{(Ch)}\bar{\rho}<h''^2>+\sum_{\beta=1}^{N}L_{\beta\alpha}^{(Ch)}\bar{\rho}<Z_\beta''h''>,\quad(\alpha=1,2,\ldots,N). \qquad (4.3.59)$$

6). *уравнения для корреляций пульсаций состава смеси*

$$-K_{\alpha\beta1}\frac{\bar{\rho}<e>^{1/2}}{L}<Z_\alpha''Z_\beta''>-K_{\alpha\beta2}\frac{\chi}{L^2}\overline{\rho Z_\alpha''Z_\beta''}-J_{\alpha j}^T<Z_\beta>_{,j}-J_{\beta j}^T<Z_\alpha>_{,j}+$$

$$+L_{0\beta}^{(Ch)}\overline{\rho h''Z_\alpha''}+L_{0\alpha}^{(Ch)}\overline{\rho h''Z_\beta''}+\sum_{\gamma=1}^{N}L_{\gamma\beta}^{(Ch)}\overline{\rho Z_\gamma''Z_\alpha''}+\sum_{\gamma=1}^{N}L_{\gamma\alpha}^{(Ch)}\overline{\rho Z_\gamma''Z_\beta''}=0.$$

$$(\alpha,\beta=1,2,\ldots,N) \qquad (4.3.60)$$

Здесь величины P_{ki}, P, P_{hj} и $P_{\alpha j}$, описывающие генерацию, определены соотношениями

$$P_{ki}=R_{kj}\left(<V_i>_{,j}-2\varepsilon_{jli}\Omega_l\right)+R_{ij}\left(<V_k>_{,j}-2\varepsilon_{jlk}\Omega_l\right)+\frac{\bar{\rho}g<R^*>}{\bar{p}<C_p>}\left(\delta_{k3}J_{qi}^T+\delta_{i3}J_{qk}^T\right)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha k}^T\left(F_{\alpha i}^*+\delta_{i3}g\frac{\bar{\rho}\,k<T>}{\bar{p}}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha i}^T\left(F_{\alpha k}^*+\delta_{k3}g\frac{\bar{\rho}\,k<T>}{\bar{p}}\right), \qquad (4.3.61)$$

$$P=R_{kj}<V_k>_{,j}+\frac{g<R^*>\delta_{j3}}{\bar{p}<C_p>}\left(q_j^T-\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^T\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}^T\left(F_{\alpha j}^*+\delta_{j3}g\frac{k<T>}{\bar{p}}\right)=$$

$$= R_{ij} <V_i>_{,j} \left(1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}\right), \qquad (4.3.62)$$

$$P_{hj} \equiv q_k^T \left(<V_j>_{,k} + 2\varepsilon_{ljk}\Omega_l\right) + \delta_{j3} \frac{g}{<C_p><T>} \left(\overline{\rho h''^2} - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 \overline{\rho Z_\alpha'' h''}\right), \qquad (4.3.63)$$

$$P_{\alpha j} \equiv J_{\alpha k}^T \left(<V_j>_{,k} + 2\varepsilon_{ljk}\Omega_i\right) + \delta_{j3} \frac{g}{<C_p><T>} \left(\overline{\rho h'' Z_\alpha''} - \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta^0 \overline{\rho Z_\alpha'' Z_\beta''}\right). \qquad (4.3.64)$$

Уравнения (4.3.56)–(4.3.60) образуют замкнутую систему алгебраических уравнений, связывающих корреляционные моменты второго порядка R_{ij}, q_j^T, $<h''^2>$, $J_{\alpha j}^T$, $<h''Z_\alpha''>$, $<Z_\alpha''Z_\beta''>$ с параметрами осредненного течения, а также с масштабом турбулентности L и с турбулентной энергией $<e>$ (*K - теория турбулентности*). Поэтому общая система уравнений для описания течения должна включать в себя в рассматриваемом случае и уравнение баланса энергии турбулентности (4.2.28) и какое-либо выражение для масштаба L. Система уравнений, включающая уравнения для R_{ij} (для всех i и j) и $<e>$ будет при этом *переразмерена* – одно уравнение является лишним. В связи с этим одно какое-либо из уравнений (4.3.56) всегда должно быть опущено.

В уравнениях (4.3.56)–(4.3.60) и (4.2.28) необходимо было бы, вообще говоря, пренебречь членами, описывающими эффекты, присущие ламинарному течению, поскольку малые числа Рейнольдса несовместимы с предположением о локально-равновесной турбулентности. Однако, ввиду приближенности данного подхода, мы оставим их в рассмотрении и, кроме того, в уравнении баланса энергии турбулентности (4.2.28) будем учитывать конвективные и диффузионные члены

$$\overline{\rho}\frac{D<e>}{Dt} - \left[\left(c_1 L <e>^{1/2} + c_2 \nu\right)\left(\overline{\rho}<e>_{,j}\right)\right]_{,j} = P - K_{e1}\frac{\overline{\rho}<e>^{3/2}}{L} - K_{e2}\frac{\overline{\rho}\nu<e>}{L^2}. \qquad (4.3.65)$$

Этот подход (так называемое квазиравновесное приближение), по-видимому, значительно более точен, чем "*сверхравновесное приближение*", поскольку позволяет учесть до некоторой степени эффекты "неравновесности" течения турбулентного поля, когда характеристики турбулентности в каждой точке окажутся связанными со всем полем различных определяющих параметров. Применение полного уравнения (4.3.65) для определения турбулентной энергии $<e>$ может быть оправдано тем, что время установления "локально равновесной" структуры турбулентности много меньше, чем необходимое время для того, чтобы общая интенсивность поля турбулентных скоростей достигла уровня, соответствующего равенству производства и диссипации турбулентной энергии (*Иевлев, 1975*).

Таким образом, используя (4.3.56)–(4.3.60) и предполагая справедливыми градиентные соотношения

$$J_{\alpha j}^T = -\overline{\rho} D_{jk}^T <Z_\alpha>_{,k} \quad , \qquad (4.3.66)$$

$$q_j^T = -\bar{\rho} D_{jk}^T \left(<h>_{,k} - \frac{\bar{p}_{,k}}{\bar{\rho}} \right), \qquad (4.3.67)$$

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e> \delta_{ij} + \tfrac{1}{2}\bar{\rho} \left(\nu_{is}^T \delta_{jl} + \nu_{js}^T \delta_{il} \right) \left(<V_i>_{,j} + <V_j>_{,i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij} <V_k>_{,k} \right), \qquad (4.3.68)$$

можно, вообще говоря, найти выражения для коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии. Конкретный вид формул для коэффициентов турбулентного обмена, полученных на основе квазиравновесной теории турбулентности в случае горизонтального турбулентного течения со сдвигом при наличии стратификации, рассматривается в следующих главах.

В заключение отметим, что при использовании метода инвариантного моделирования во втором порядке замыкания все же нельзя точно рассчитать течения, в которых осуществляется перенос какой-либо величины в направлении, противоположном ее градиенту (*Меллор, Ямада, 1974, 1982*). Подобное явление имеет, например, место в пограничном слое земной атмосферы, который нейтрально стратифицирован по температуре, в случае развитой конвекции, когда поток тепла направлен вверх против градиента потенциальной температуры. Это приводит к тому, что коэффициент турбулентной теплопроводности в формуле (4.3.67) оказывается отрицательной величиной – эффект отрицательной теплопроводности. Соответственно, адекватная теория противоградиентного переноса может быть развита, по-видимому, только на основе моделей третьего порядка замыкания (*Лыкосов, 1991*).

Краткие выводы:

1). Построена усложненная математическая модель турбулентности для многокомпонентного химически активного континуума, позволяющая рассматривать разнообразные геофизические и аэрономические задачи, в которых существенны сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств, влияние стратификации среды и вращения планеты. Такая модель включает, в качестве базисных, наряду с гидродинамическими уравнениями для среднего движения смеси, замыкающие эволюционные уравнения переноса для одноточечных вторых моментов пульсирующих термогидродинамических параметров течения.

2). Применение оператора статистического осреднения к уравнениям гидродинамики смеси для мгновенных движений приводит к потери части информации о турбулентном течении. Недостающую информацию содержит полученная система уравнений для пульсационных составляющих термогидродинамических параметров. Она использована в качестве исходной при выводе уравнений переноса для одноточечных парных корреляций пульсирующих термогидродинамических параметров турбулентного поля.

3). На основе общего балансового уравнения для вторых моментов получены следующие модельные уравнения: эволюционные уравнения переноса для составляющих тензора турбулентных напряжений Рейнольдса; уравнение переноса турбулентной энергии многокомпонентной смеси; эволюционные уравнения

для вектора турбулентного потока тепла; уравнение переноса для дисперсии пульсаций энтальпии смеси; уравнения переноса для векторов турбулентной диффузии; уравнения переноса для вторых моментов пульсирующих энтальпии и состава смеси; уравнения переноса для парных корреляций пульсирующих концентраций компонент смеси. Для многокомпонентной смеси с переменной плотностью получено эволюционное уравнение переноса для скорости скалярной диссипации, позволяющее полностью замкнуть систему гидродинамических уравнений для среднего движения на уровне вторых моментов. Проведен анализ физического смысла отдельных членов перечисленных модельных уравнений переноса.

4). Рассмотренная модель многокомпонентной турбулентности второго порядка замыкания может быть использована при расчетах сложных течений многокомпонентных реагирующих газов с переменной плотностью, когда существенны конвективный и "диффузионный" перенос турбулентности (предыстория потока), т.е. течений, для которых оказываются неадекватными более простые модели, основанные на градиентной гипотезе замыкания. Одновременно, в рамках развитого подхода, могут быть получены полуэмпирические выражения для коэффициентов турбулентного обмена, фигурирующие в схемах замыкания первого порядка.

ГЛАВА 5

СООТНОШЕНИЯ СТЕФАНА–МАКСВЕЛЛА И ПОТОК ТЕПЛА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Мы показали, что некоторые задачи движения многокомпонентных газовых смесей в атмосфере, для которых важны процессы конвективного и диффузионного переноса турбулентности, могут быть решены с помощью моделей второго порядка замыкания, когда к рассмотрению привлекаются эволюционные уравнения переноса для вторых корреляционных моментов и ряд механизмов, ответственных за генерацию этих моментов, учитывается достаточно точно. Система модельных уравнений для корреляций $< A''B'' >$, получаемая из общего эволюционного уравнения (4.1.9) для одноточечных парных моментов, не замкнута и должна быть дополнена одним или несколькими дифференциальными уравнениями для статистических характеристик турбулентного движения, в известной мере эквивалентных пространственному масштабу турбулентности L. При таком подходе в этих последние уравнения необходимо вводить дополнительные модельные выражения для некоторых членов высокого порядка. Используемые для этих целей аппроксимационные выражения, в виде градиентных соотношений с некоторыми универсальными (для данного класса задач) константами пропорциональности, часто не имеют достаточной точности. Это приводит, в конечном счете, к тому, что соответствующие модели второго порядка, несмотря на свою математическую сложность, оказываются не лучше более простых моделей первого порядка, рассмотренных в § 3.3.

Вместе с тем, оценивая в целом состояние проблемы замыкания первого порядка, следует признать, что в настоящее время фактически не существует общей феноменологической теории турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии для многокомпонентных смесей. Используемые в литературе градиентные соотношения (см., например, (*Монин, Яглом 1965; Ван Мигем,1977; Лапин, Стрелец,1989*)) не обладают достаточной общностью и получены, в основном, для однородной жидкости, причем либо для турбулентных потоков с четко выраженным доминирующим направлением, либо при сильных и не всегда оправданных предположениях, таких, например, как равенство путей смешения для процессов турбулентного переноса количества движения, тепла или вещества пассивной примеси (см. § 3.3). В связи с этим, возникает необходимость рассмотрения других подходов к проблеме замыкания гидродинамических уравнений среднего движения смеси на уровне моделей первого порядка, например, в рамках термодинамического подхода к теории турбулентности сжимаемого газового континуума. Так, онзагеровский формализм неравновесной термодинамики позволяет получить наиболее общую структуру реологических соотношений для турбулентных потоков диффузии и тепла в многокомпонентной смеси, в том числе, в виде обобщенных соотношений Стефана–Максвелла для турбулентной многокомпонентной диффузии и соответствующего им выражения для

полного потока тепла (см. формулы (2.3.69) и (2.3.75)). В частности, заслуживает внимания детальный вывод подобных соотношений для мелкомасштабной турбулентности, когда в потоке наблюдается тенденция к установлению локальной статистической изотропности. На рассматриваемом уровне замыкания соответствующие реологические соотношения наиболее полно описывают турбулентный тепло- и массоперенос в многокомпонентной среде (*Колесниченко, Маров, 1985*).

§ 5.1. Уравнения баланса для осредненной энтропии в турбулентном потоке газовой смеси

Прежде чем применить формализм неравновесной термодинамики сплошных сред к описанию процессов тепло- и массопереноса в турбулентном потоке многокомпонентной сжимаемой смеси, сформулируем еще раз сущность тех основных постулатов, которые лежат в основе теории и могут быть практически использованы при термодинамическом анализе любого необратимого процесса, в том числе и для турбулизованного многокомпонентного континуума (*Де Гроот, Мазур,1964*):

1) справедлив принцип квазилокального термодинамического равновесия;

2) для производства энтропии, связанного с необратимыми процессами в самой системе, справедливо неравенство $\sigma_{(S)} \geq 0$, выражающее второе начало термодинамики;

3) если ограничиться линейной областью, то справедливы феноменологические соотношения (2.2.1) для потоков и термодинамических сил, входящих в выражение (2.2.4) для производства энтропии;

4) имеют место соотношения симметрии (2.2.2) для кинетических коэффициентов, входящих в линейные законы (2.2.1).

Термодинамический анализ турбулентной многокомпонентной среды проведем здесь в предположении, что одноточечные корреляции $< A''B'' >$ для любых, но не равных гидродинамической скорости течения V_j, пульсирующих термодинамических параметров A и B малы по сравнению с членами первого порядка $< A >< B >$ и могут быть опущены, т.е.

$$< A''B'' > / < A >< B > << 1 \quad (A \neq V_j, B \neq V_j). \tag{5.1.1}$$

Представление турбулизованного многокомпонентного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух подсистем – подсистемы осредненного движения (осредненного молекулярного и турбулентного хаоса) и подсистемы пульсационного движения (турбулентного хаоса, турбулентной надструктуры (*Невзглядов,1945 а, б*)) позволяет тогда получить необходимые реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений, обобщающие на случай многокомпонентных смесей соответствующие результаты гидродинамики однородной жидкости (*Колесниченко, Маров ,1984*).

5.1.1. Общий вид эволюционного уравнения для средневзвешенной энтропии. Балансовое уравнение для средневзвешенной удельной энтропии $< S >\equiv \overline{\rho S} / \overline{\rho}$ турбулентной многокомпонентной смеси получим путем статистического осреднения (3.1.5) эволюционного уравнения (2.2.5) для мгновенного значения пульсирующего в потоке параметра S:

$$\overline{\rho}\frac{D <S>}{Dt} + \left(\overline{J}_{(S)j} + J^{T}_{(S)j}\right)_{,j} = \sigma_{<S>}. \qquad (5.1.2)$$

Здесь $\sigma_{<S>} \equiv \overline{\sigma}_{(S)}$ - локальное производство осредненной энтропии $< S >$ смеси, т.е. возникновение величины $< S >$ в единицу времени в единице объема среды; $\overline{J}_{(S)j}$ и $J^{T}_{(S)j} \equiv \overline{\rho S'' V''_j}$ – соответственно осредненная субстанциональная плотность мгновенного значения молекулярного потока энтропии смеси и плотность турбулентного потока энтропии подсистемы осредненного движения.

Для получения явного вида выражений для осредненных величин $J^{T}_{(S)j}$, $\overline{J}_{(S)j}$ и $\sigma_{<S>}$ в (5.1.2) можно поступить двояким образом: либо осреднить (например, по ансамблю возможных реализаций) их соответствующие мгновенные аналоги, либо сопоставить уравнение (5.1.2) с тем уравнением, которое получается из осредненного тождества Гиббса (2.2.6) при исключении из него соответствующих субстанциональных производных от средних параметров состояния среды $< v >, < Z_\alpha >, \quad < \varepsilon >$. Воспользуемся здесь последним способом.

Осредненное тождество Гиббса. Осреднение фундаментального тождества Гиббса (2.2.6), справедливого, по предположению, для микродвижений смеси и записанного вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объема, приводит к следующему уравнению для средневзвешенных удельной энтропии $< S >$ и удельной внутренней энергии $< \varepsilon >$ смеси (*Маров, Колесниченко, 1983*)

$$\overline{\rho} < T > \frac{D <S>}{Dt} = \overline{\rho}\frac{D <\varepsilon>}{Dt} + \overline{\rho}\,\overline{p}\frac{D <v>}{Dt} - \overline{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N} <\mu_\alpha> \frac{D <Z_\alpha>}{Dt} + \Im. \qquad (5.1.3)$$

Здесь введено обозначение

$$\Im \equiv -\overline{T''\rho\, dS/dt} - < T > \left(\overline{\rho S'' V''_j}\right)_{,j} + \left(\overline{\rho\varepsilon'' V''_j}\right)_{,j} + \overline{p' V''_{j,j}} -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\mu''_\alpha \rho\, d\, Z_\alpha / dt} - \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > \left(\overline{\rho Z''_\alpha V''_j}\right)_{,j}. \qquad (5.1.4)$$

Можно показать, что, если для осредненных значений термодинамических параметров справедливы те же термодинамические соотношения, что и для соответствующих им мгновенных значений, что имеет место при выполнении усло-

вия (5.1.1)) и, в частности, следующие ключевые термодинамические тождества

$$< G >= \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha >< Z_\alpha >=< \varepsilon > + \bar{p} < v > - < T >< S > \qquad (^1)\ ,$$

$$< T > \delta < T > + \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > \delta < Z_\alpha >= \delta < \varepsilon > + \bar{p}\,\delta < v > \qquad (^2), \tag{5.1.5}$$

то величина $\Im \equiv 0$ (здесь δ – символ приращения). В этом случае фундаментальное тождество Гиббса (2.2.6) в субстанциональной форме сохраняет свой вид также и для подсистемы осредненного молекулярного и турбулентного хаоса (*Колесниченко, 1980*).

Действительно, усредняя по ансамблю возможных реализаций справедливое для любой полевой величины A тождество

$$\delta(\rho A\ \varepsilon) - T\delta(\rho A\ S) + p\ \delta A\ - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \delta(\rho A\ Z_\alpha) \equiv 0,$$

будем иметь

$$\delta(\bar{\rho} < A >< \varepsilon >) - < T > \delta(\bar{\rho} < A >< S > + \bar{p}\delta < A > - \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > \delta(\bar{\rho} < A >< Z_\alpha >) =$$

$$= -\delta(\overline{\rho\, A''\, \varepsilon''}) + < T > \delta(\overline{\rho\, A''\, S}) + \overline{T''\delta(\rho\, S\, A)} - \overline{p\, \delta A''} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > \delta(\overline{\rho Z_\alpha'' A''}) + \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\mu_\alpha \delta(\rho Z_\alpha A)}, \tag{5.1.6}$$

причем в силу допущения (5.1.5) левая часть этого равенства равна нулю при любых A. Полагая в (5.1.6) последовательно $A = 1$ и $A = V_j$, получим, соответственно, следующие два тождества :

$$-\overline{T''(\rho S)_{,t}} - \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\mu_\alpha''(\rho Z_\alpha)_{,t}} = 0 \qquad (^1),$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{N} < \mu_\alpha > \overline{(\rho Z_\alpha V_j'')_{,j}} + \overline{(\rho\varepsilon''\, V_j'')_{,j}} - < T > \overline{(\rho S''\, V_j'')_{,j}} -$$

$$-\overline{T''(\rho S V_j)_{,j}} + \overline{p V_j''_{,j}} - \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\mu_\alpha''(\rho Z_\alpha V_j)_{,j}} = 0 \qquad (^2), \tag{5.1.7}$$

из которых, как легко видеть, и следует $\Im \equiv 0$.

Формула для производства средневзвешенной энтропии смеси. Исключим теперь из правой части осредненного соотношения Гиббса (5.1.3) субстанцио-

нальные производные по времени от осредненных параметров состояния смеси $<v>$, $<\varepsilon>$ и $<Z_\alpha>$ $(\alpha = 1,2,...,N)$ с помощью гидродинамических уравнений масштаба среднего движения, взятых в в виде:

$$\bar{\rho}\frac{D<v>}{Dt} = <V_j>_{,j}\ , \tag{5.1.8}$$

$$\bar{\rho}\frac{D<Z_\alpha>}{Dt} = -(\bar{J}_{\alpha j} + J^T_{\alpha j})_{,j} + \sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\bar{\xi}_s \quad , \ (\alpha = 1,2,...,N) \tag{5.1.9}$$

$$\bar{\rho}\frac{D<\varepsilon>}{Dt} = -(\bar{q}_j + q^T_j - \overline{p'V''_j})_{,j} - \bar{p}<V_j>_{,j} + \bar{\pi}_{ij}<V_i>_{,j} - \overline{p'V''_j}_{,j} +$$

$$+ J^T_{(v)j}\bar{p}_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{N}\bar{J}_{\alpha j}F^*_{\alpha j} + \bar{\rho}<\varepsilon_e>, \tag{5.1.10}$$

где $J^T_{(v)j} \equiv \overline{\rho v''V''_j}$, $J^T_{\alpha j} \equiv \overline{\rho Z''_\alpha V''_j}$, $q^T_j \equiv \overline{\rho h''V''_j}$ – соответственно, турбулентные потоки удельного объема, диффузии и тепла, $<\varepsilon_e> \equiv \overline{\pi_{ij}V''_i}_{,j} / \bar{\rho}$ – средняя удельная скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости. В результате получим явную форму субстанционального баланса средневзвешенной энтропии $<S>$ для подсистемы осредненного движения турбулизованного многокомпонентного континуума

$$\rho<T>\frac{D<S>}{Dt} = -(\bar{q}_j + q^T_j - \overline{p'V''_j})_{,j} + \bar{\pi}_{ij}<V_i>_{,j} - \overline{p'V''_j}_{,j} + J^T_{(v)j}\bar{p}_{,j} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N}\bar{J}_{\alpha j}F_{\alpha j} - \sum_{\alpha=1}^{N}<\mu_\alpha>(\bar{J}_{\alpha j} + J^T_{\alpha j})_{,j} + \sum_{s=1}^{r}<A_s>\bar{\xi}_s + \bar{\rho}<\varepsilon_e>. \tag{5.1.11}$$

Здесь мы ввели осредненное химическое сродство $<A_s>$ реакций s в турбулентной среде, которое выражается через осредненный химический потенциал на одну молекулу (см. (3.2.14)

$$<A_s> = -\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}<\mu_\alpha> \qquad (s = 1,2,...,r). \tag{5.1.12}$$

Величина $<A_s>$ является скалярной термодинамической силой, сопряженной со скаляром $\bar{\xi}_s$ – скоростью s-й химической реакции (*Пригожин, Дефей, 1966*).

Уравнение (5.1.11) с помощью простых преобразований

$$\frac{q_j^{\Sigma},_j}{<T>}=\left(\frac{q_j^{\Sigma}}{<T>}\right),_j-q_j^{\Sigma}\left(\frac{1}{<T>}\right),_j=\left(\frac{q_j^{\Sigma}}{<T>}\right),_j+q_j^{\Sigma}\frac{<T>,_j}{<T>^2},$$

$$\frac{<\mu_\alpha>}{<T>}J_{\alpha j,j}^{\Sigma}=\left(\frac{<\mu_\alpha>J_{\alpha j}^{\Sigma}}{<T>}\right),_j-J_{\alpha j}^{\Sigma}\left(\frac{<\mu_\alpha>}{<T>}\right),_j\ ,$$

где

$$q_j^{\Sigma}\equiv\overline{q}_j+q_j^{T*}\quad(q_j^{T*}\equiv q_j^{T}-\overline{p'V_j''}),\qquad J_{\alpha j}^{\Sigma}\equiv J_{\alpha j}+J_{\alpha j}^{T}\tag{5.1.13}$$

соответственно, суммарные потоки тепла и диффузии в многокомпонентном турбулентном континууме, нетрудно преобразовать к форме (5.1.2) уравнения баланса осредненной энтропии смеси:

$$\overline{\rho}\frac{D<S>}{Dt}+\left\{\frac{q_j^{\Sigma}-\sum_{\alpha=1}^{N}<\mu_\alpha>J_{\alpha j}^{\Sigma}}{<T>}\right\},_j=-q_j^{\Sigma}\frac{<T>,_j}{<T>^2}-$$

$$-\frac{1}{<T>}\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{J}_{\alpha j}\left[<T>\left(\frac{<\mu_\alpha>}{<T>}\right),_j-F_{\alpha j}\right]-\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}^{T}<T>\left(\frac{<\mu_\alpha>}{<T>}\right),_j-\overline{\pi}_{ij}<V_i>,_j+\right.$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{r}<A_s>\overline{\xi}_s+\overline{p'V_j''},_j+\overline{\rho'V_j''}\frac{\overline{p},_j}{\overline{\rho}}-\overline{\rho}<\varepsilon_e>\right\}.\tag{5.1.14}$$

Сопоставляя теперь (5.1.14) с уравнением (5.1.2), получим для двух диффузионных потоков энтропии – осредненного молекулярного потока $\overline{J}_{(S)j}$ и турбулентного потока $J_{(S)j}^{T}$, а также для производства энтропии $\sigma_{<S>}$ в подсистеме осредненного (молекулярного и турбулентного) хаоса следующие выражения (см. (3.3.9)):

$$\overline{J}_{(S)j}=\frac{1}{<T>}\left[\overline{q}_j-\sum_{\alpha=1}^{N}<\mu_\alpha>\overline{J}_{\alpha j}\right]=\frac{1}{<T>}\overline{J}_{qj}+\sum_{\alpha=1}^{N}<S_\alpha>\overline{J}_{\alpha j},\tag{5.1.15}$$

$$J_{(S)j}^{T}=\frac{1}{<T>}\left[q_j^{T*}-\sum_{\alpha=1}^{N}<\mu_\alpha>J_{\alpha j}^{T}\right]=\frac{1}{<T>}J_{qj}^{T*}+\sum_{\alpha=1}^{N}<S_\alpha>J_{\alpha j}^{T},\tag{5.1.16}$$

$$\sigma_{<S>}\equiv\sigma_{<S>}^{i}+\sigma_{<S>}^{e},\tag{5.1.17}$$

где

$$0 \le \sigma^{i}_{<S>} \cdot <T> \equiv -q_j^{\Sigma *} \frac{<T>_j}{<T>} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left[- <T> \left(\frac{<\mu_\alpha>}{<T>} \right)_{,j} + F_{\alpha j} \right] J^{\Sigma}_{\alpha j} +$$

$$+ \overline{\pi}_{ij} <V_i>_{,j} + \sum_{s=1}^{r} <A_s> \overline{\xi}_s, \qquad (5.1.18)$$

$$\sigma^{e}_{<S>} \cdot <T> \equiv -\overline{p' V''_{j,j}} + J^{T}_{(v)j} \overline{p}_{,j} + \overline{\rho} <\varepsilon_e> - \sum_{\alpha=1}^{N} J^{T}_{\alpha j} F_{\alpha j} \equiv \Delta. \qquad (5.1.19)$$

Здесь (см. (3.3.10$^{(а)}$) и (3.3.10$^{(в)}$))

$$J^{T}_{qj} \equiv q^{T}_{j} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J^{T}_{\alpha j}, \qquad (^1)$$

$$J^{T*}_{qj} \equiv q^{T*}_{j} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J^{T}_{\alpha j} = q^{T}_{j} - \overline{p' V''_j} - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J^{T}_{\alpha j}, \qquad (^2) \qquad (5.1.20)$$

$\sigma^{i}_{<S>}$ – скорость локального производства осредненной энтропии $<S>$ смеси, обусловленная необратимыми процессами внутри подсистемы осредненного движения турбулизованного многокомпонентного континуума. Величина $\sigma^{e}_{<S>}$, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами пульсационного движения и осредненного движения. Эта величина может быть разной по знаку, в зависимости от конкретного режима турбулентного течения (*Николаевский,1984*). Так, скорость перехода энергии $\overline{p' V''_{j,j}}$, представляющая собой работу, совершаемую над вихрями окружающей средой за единицу времени в единице объема, как следствие существования пульсаций давления p' и расширения ($V''_{j,j} > 0$) или сжатия ($V''_{j,j} < 0$) вихрей, может быть разной по знаку. Величина $J^{T}_{(v)j} \cdot \overline{p}_{,j} \approx g \overline{\rho' V_3}$, представляющая собой скорость порождения энергии турбулентности под действием сил плавучести, положительна в случае мелкомасштабной турбулентности и отрицательна для крупных вихрей (*Ван Мигем, 1977*). Скорость превращения потенциальной энергии среднего движения в турбулентную энергию $\sum_{\alpha=1}^{N} J^{T}_{\alpha j} F^{*}_{\alpha j}$, связанная с работой негравитационных массовых сил, может быть также разной по знаку. Таким образом, из (5.1.14) следует, что в общем случае энтропия $<S>$ подсистемы осредненного хаоса может как расти, так и уменьшаться, что является характерной чертой термодинамически открытых систем.

Заметим, что, как уже неоднократно отмечалось, отнесение отдельных членов уравнения (5.1.14) к турбулентному потоку или к производству осредненной

энтропии неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения турбулентного теплового потока, отличные от (5.1.20). Эти соображения более подробно изложены в работах (*Де Гроот, Мазур, 1964; Дьярмати, 1974*).

5.1.2. Уравнения баланса энтропии и производство энтропии подсистемы турбулентного хаоса. Осредненная по Фавру энтропия смеси $< S >$, как фундаментальная характеристика турбулентной среды, не вполне определяет термодинамическое состояние полной системы, так как не зависит от "*переменных состояния*", описывающих турбулентную *надструктуру,* например, от турбулентной энергии $< e > \equiv \overline{\rho V_j'' V_j''} / 2\overline{\rho}$. Следуя Блэкадару (*Блэкадар, 1955*), определим термодинамическую структуру (модель) подсистемы турбулентного хаоса заданием "*калорического*" уравнения состояния – функционального соотношения $<e>=<e>\left(\overline{\rho}, S_F\right)$ между переменными состояния $< e >$, S_F и $\overline{\rho}$, где S_F – так называемая *энтропия турбулизации.* Тогда фундаментальное тождество Гиббса, постулируемое в виде (см. § 2.2)

$$\frac{D<e>}{Dt} = T_F \frac{DS_F}{Dt} - p_F \frac{D<v>}{Dt} \ , \qquad (5.1.21)$$

вводит для подсистемы турбулентного хаоса, или турбулентной надструктуры, так называемые *температуру турбулизации* $T_F \equiv \left\{\partial < e > / \partial S_F\right\}_{<v>}$ и *турбулентное, или пульсационное, давление* $p_F \equiv \left\{\partial < e > / \partial < v >\right\}_{S_F}$. Предполагается, что соответствующие производные положительны, т.е. $\left\{\partial < e > / \partial S_F\right\}_{<v>} > 0$ и $\left\{\partial < e > / \partial < v >\right\}_{S_F} > 0$.

Всевозможные функциональные связи между параметрами $< e >$, S_F, T_F и p_F, которые можно получить обычным способом из выписанных выше формул, могут интерпретироваться как различные уравнения состояния для подсистемы турбулентного хаоса. Далее будем предполагать, что заданная *a priori* функция $< e > = < e > \left(\overline{\rho}, S_F\right)$ позволяет получить подобные соотношения, аналогичные по своей структуре различным уравнениям состояния для совершенного одноатомного газа. В частности, будем считать, что справедливы следующие формулы для $< e >$ и S_F :

$$< e >= {}^3_2 < v > p_F = {}^3_2 R^* T_F, S_F = {}^3_2 R^* \ln\left(p_F < v >^{5/3} \right) + const . \qquad (5.1.22)$$

Соответствующее эволюционное уравнение переноса для энтропии турбулизации S_F получим из (5.1.21) рассмотренным выше способом с помощью уравнения (5.1.8) для удельного объема $< v >$ и балансового уравнения (4.2.22)

для турбулентной энергии $< e >$. Перепишем последнее в следующем виде

$$\bar{\rho}\frac{D<e>}{Dt} = -J_{<e>j},_j + R_{ij}<V_i>,_j + \overline{p'V_j''},_j - J^T_{(v)j}\bar{p},_j + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}F_{\alpha j} - \bar{\rho}<\varepsilon_e>,$$

где $J_{<e>j} \equiv \overline{\rho\left(e + p'/\rho\right)V_j''} - \overline{\pi_{ij}V_i''}$ – полный субстанциональный поток энергии турбулентности (см. (4.2.23)), $R_{ij} \equiv -\overline{\rho V_i'V_j''}$ – тензор рейнольдсовых напряжений. В результате получим следующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации S_F:

$$\bar{\rho}\frac{DS_F}{Dt} + J_{(S_F)j},_j = \sigma_{(S_F)} \equiv \sigma^i_{(S_F)} + \sigma^e_{(S_F)}, \tag{5.1.23}$$

где

$$J_{(S_F)j} \equiv \frac{1}{T_F}\left[\overline{\rho\left(e + p'/\rho\right)V_j'' - \pi_{ij}V_i''}\right] = \frac{1}{T_F}J_{<e>j} \tag{5.1.24}$$

– субстанциональный поток энтропии S_F подсистемы турбулентного хаоса, а рассеяние энергии, являющееся локальной мерой неравновесности подсистемы турбулентного хаоса и имеющее вид суммы парных произведений термодинамических сил на потоки, записывается в виде

$$0 \le T_F \cdot \sigma^i_{(S_F)} = -J_{<e>j}\frac{T_F,_j}{T_F} + R_{ij}<V_i>,_j + p_F<V_j>,_j, \tag{5.1.25}$$

$$T_F \cdot \sigma^e_{(S_F)} = \bar{p}'V_j'',_j - J^T_{(v)j}p,_j + \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}F^*_{\alpha j} - \bar{\rho} < \varepsilon_e > \equiv -\Delta, \tag{5.1.26}$$

причем величины $\sigma^i_{(S_F)}$ и $\sigma^e_{(S_F)}$ имеют смысл, соответственно, скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии S_F.

Преобразуем величину $T_F \cdot \sigma^i_{(S_F)}$ к удобному для дальнейшего анализа виду. Разделим для этого градиент скорости $<V_i>,_j$ на симметрическую и антисимметрическую части $<V_i>,_j = \frac{1}{2}\left[<V_i>,_j + <V_j>,_i\right] + \frac{1}{2}\left[<V_i>,_j - <V_j>,_i\right]$. Тогда, учитывая "уравнение состояния" (5.1.22), и вводя обозначения

$$\overset{\circ}{e}_{ij} \equiv e_{ij} - \tfrac{1}{3}\left(e_{kl}\delta_{kl}\right)\delta_{ij} = e_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}<V_k>,_k \tag{5.1.27}$$

для симметрической с нулевым следом части тензора скоростей деформаций $e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left[<V_i>,_j + <V_j>,_i\right]$ осредненного континуума и

$$\overset{\circ}{R}_{ij} \equiv R_{ij} - \tfrac{1}{3}\left(R_{kl}\delta_{kl}\right)\delta_{ij} = R_{ij} + \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\rho} < e >= R_{ij} + p_F \delta_{ij} \qquad (5.1.28)$$

для части (с нулевым следом) симметрического тензора Рейнольдса R_{ij}, будем иметь:

$$T_F \sigma'_{(S_F)} = -J_{(S_F)} T_{F,j} + \overset{\circ}{R}_{ij}\,\overset{\circ}{e}_{ij} . \qquad (5.1.29)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что скалярное произведение симметрического и антисимметрического тензоров всегда равно нулю.

Рассеяние энергии $T_F \sigma^e_{(S_F)}$, с учетом формулы (3.3.39) для турбулентного потока удельного объема

$$J^T_{(v)j} \cong -\frac{1}{\bar{p}}\overline{p'V_j} + \frac{\dot{<R^*>}}{\bar{p} < C_p >} J^T_{qj} + \frac{\mathrm{k} < T >}{\bar{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} ,$$

запишем в виде:

$$T_F \sigma^e_{(S_F)} = \overline{p' V''_{j,j}} + \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{p}} \overline{p' V''_j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{\rho} < T >< C_p >} J^T_{qj} - \bar{\rho} < \varepsilon_e > +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(F_{\alpha j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{n}}\right) J^T_{\alpha j} = \overline{p' V''_{j,j}} + \frac{\bar{p}_{,j}}{\gamma^T \bar{p}} \overline{p' V''_j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{\rho} < T >< C_p >} J^{T*}_{qj} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N}\left(F_{\alpha j} - \frac{\bar{p}_{,j}}{\bar{n}}\right) J^T_{\alpha j} - \bar{\rho} <\varepsilon_e>, \qquad (5.1.30)$$

где $\gamma^T \equiv < C_p > / < C_V > -$ коэффициент Пуассона для осредненного движения многокомпонентного турбулизованного континуума.

Проанализируем теперь эволюционное уравнение переноса (5.1.23), которое, с учетом преобразований (5.1.29) и (5.1.30), может быть записано в виде :

$$\bar{\rho}\frac{DS_F}{Dt} + J_{(S_F)j,j} = \sigma_{(S_F)} \equiv \frac{1}{T_F}\left[-J_{(S_F)j} T_{F,j} + \overset{\circ}{R}_{ij}\,\overset{\circ}{e}_{ij}\left(1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}\right) +\right.$$

$$\left. + \overline{p' V''_{j,j}} + \frac{\bar{p}_{,j}}{\gamma^T \bar{p}} \overline{p' V''_j} - \bar{\rho} < \varepsilon_e >\right], \qquad (5.1.31)$$

где $\boldsymbol{Rf}$ и $\boldsymbol{Kf}$ – динамические числа Ричардсона и Колмогорова, определяемые, соответственно, формулами (4.2.32) и (4.2.34) которые характеризуют влияние

температурной стратификации и стратификации состава смеси на эволюцию осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций. Из (5.1.31) следует, что:

1). При $(\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Kf})<1$ энтропия турбулизации увеличивается со скоростью $\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{e}_{ij}$ под влиянием рейнольдсовых напряжений за счет механизма поддержания турбулентности в сдвиговом течении быстрее, чем расходуется на работу, совершаемую против силы плавучести и других массовых сил негравитационного происхождения; этот случай отвечает, например, режиму вынужденной конвекции в атмосфере планеты. Член $\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{e}_{ij}$, играющий в этом случае ключевую роль, регулирует, как правило, переход кинетической энергии от осредненного движения к турбулентному (*Маров, Колесниченко,1987*).

2). Если $(\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Kf})=1$, то энергия, обусловленная градиентом осредненной гидродинамической скорости, полностью уходит на преодоление архимедовых сил, а также массовых сил негравитационного происхождения, и турбулентность поддерживаться не может.

3). При $(\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Kf})>1$ главную роль в образовании турбулентности, как термической, так и концентрационной, играют эффекты плавучести (член $J^{T}_{(v)j}\overline{p}_{,j}$), описывающие превращения внутренней энергии системы в осредненную кинетическую энергию среднего течения (*Ван Мигем, 1977*). Этот случай отвечает, например, режиму свободной конвекции в атмосфере планеты

Следует отметить, что формулы (4.2.32) и (4.2.34), вытекающие также из рассмотрения уравнения баланса (5.1.23) для энтропии турбулизации S_F, дают наиболее полное определение для динамических чисел Ричардсона и Колмогорова. Другие формулы для $\boldsymbol{Rf}$ и $\boldsymbol{Kf}$, фигурирующие в литературе, носят частный характер и имеют место при определенных дополнительных предположениях.

5.1.3. Балансовое уравнение для полной энтропии турбулизованного континуума. Введение двух энтропий $<S>$ и S_F конкретизирует наше представление о турбулентном течении смеси как термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем – подсистемы турбулентной надструктуры и подсистемы осредненного (турбулентного и молекулярного) хаоса. Из (5.1.14) и (5.1.23) следует суммарное эволюционное уравнение переноса для полной энтропии $<S>+S_F$ рассматриваемого турбулизованного континуума:

$$\overline{\rho}\frac{D\left(<S>+S_F\right)}{Dt}=\left\{\overline{J_{(S)j}}+J^{T}_{(S)j}+J_{(S_F)j}\right\}_{,j}+\sigma, \qquad (5.1.32)$$

где

$$0\le\sigma\equiv\sigma^{i}_{<S>}+\sigma^{i}_{(S_F)}+\sigma^{e}_{<S>}+\sigma^{e}_{(S_F)}=\sigma^{i}_{<S>}+\sigma^{i}_{(S_F)}+\sigma_{(<S>,S_F)}, \qquad (5.1.33)$$

$$\sigma_{(<S>,S_F)} \equiv \sigma^e_{<S>} + \sigma^e_{(S_F)} = \left[\left(T_F - <T>\right)/T_F <T>\right]\cdot\Delta . \qquad (5.1.34)$$

Из (5.1.18), (5.1.25) и (5.1.34) видно, что объемная скорость возникновения полной энтропии σ в турбулизованном многокомпонентном химически активном *газофазном* континууме представляет собой *билинейную форму*, образованную обобщенными термодинамическими потоками и сопряженными с ними термодинамическими силами, имеющими существенно различную физическую природу. В нее вносят вклад перенос тепла, вещества, импульса, а также химические реакции. Так, производство энтропии $\sigma_{(<S>,S_F)} \equiv \left[\left(T_F - <T>\right)/T_F <T>\right]\cdot\Delta$ описывает диссипативные необратимые процессы, связанные с обменом между осредненным и пульсационным турбулентными движениями. Источник энтропии, связанный с химическими реакциями, определяется как сумма билинейных форм скаляров $\bar{\xi}_s$ и $<A_s>$:

$$\sigma_{ch} = \frac{1}{<T>}\sum_{s=1}^{r} <A_s>\xi_s . \qquad (5.1.35)$$

Производство энтропии, обусловленное диффузией – осредненной молекулярной и турбулентной, – есть сумма скалярных произведений следующих полярных векторов

$$\sigma^i_{dif} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\left(\frac{<\mu_\alpha>}{<T>}\right)_{,j} - \frac{F_{\alpha j}}{<T>}\right](J^T_{\alpha j} + \bar{J}_{\alpha j}) . \qquad (5.1.36)$$

Точно также, производство энтропии, относящееся к переносу тепловой энергии теплопроводностью и "*турбулентной диффузией*", определяется следующим произведением полярных векторов

$$\sigma^i_{h.c.} = -(q^{T*}_j + \bar{q}_j)\frac{<T>_j}{<T>^2} - J_{<e>_J}\frac{T_{F,j}}{T_F^2} . \qquad (5.1.37)$$

Наконец, производство энтропии, обусловленное вязкими силами

$$\sigma^i_{vis} = \frac{1}{T_F}\left(R_{ij} <V_i>_{,j} + p_F <V_j>_{,j}\right) + \frac{1}{<T>}\bar{\pi}_{ij} <V_i>_{,j} , \qquad (5.1.38)$$

определяется билинейной формой от тензоров вязких и турбулентных напряжений и градиента среднемассовой скорости течения.

§ 5.2. Термодинамический вывод определяющих соотношений в многокомпонентных турбулизованных средах

Для нахождения реологических связей (*определяющих соотношений*) между обобщенными термодинамическими потоками и силами можно воспользо-

ваться онзагеровским формализмом неравновесной термодинамики, исходя из роста полной энтропии многокомпонентного турбулизованного континуума, учитывая тем самым взаимовлияние осредненных молекулярных и специфических турбулентных характеристик течения (*Колесниченко, 1980*).

5.2.1. Линейные кинематические конститутивные соотношения. Выразим в (5.1.14) градиент осредненного химического потенциала $<\mu_\alpha>$, взятого для турбулентной идеальной смеси совершенных газов в виде (см. формулу (3.2.12)) (*Пригожин , Дефей, 1966*)

$$<\mu_\alpha>=\mu_\alpha^0\left(\bar{p},<T>\right)+\mathrm{k}<T>\ln\left(\bar{n}_\alpha/\bar{n}\right)\qquad(\alpha=1,2,\ldots,N)\tag{5.2.1}$$

через градиенты осредненных термодинамических параметров $<T>$, $\bar{p}$, $x_\alpha^*\,(=\bar{n}_\alpha/\bar{n})$, где μ_α^0 – химический потенциал чистой компоненты α при температуре $<T>$ и давлении $\bar{p}$, k – постоянная Больцмана. Тогда можно получить для объемной скорости возникновения σ суммарной энтропии $(<S>+S_F)$ рассматриваемого термодинамического комплекса следующую билинейную форму

$$0\le\sigma\equiv\frac{1}{<T>}\left\{J_{qj}^{\Sigma*}\cdot X_{0j}^T-\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha j}^{\Sigma}\cdot X_{\alpha j}^{T*}+p^\nu<V_j>_{,j}+\overline{\overset{o}{\pi}}_{ij}\cdot\overset{o}{e}_{ij}+\sum_{s=1}^{r}<A_s>\bar{\xi}_s\right\}+$$

$$+\frac{1}{T_F}\left\{-J_{<e>j}\cdot\left(\frac{T_{F,j}}{T_F}\right)+\overset{o}{R}_{ij}\,\overset{o}{e}_{ij}\right\}+\frac{T_F-<T>}{T_F<T>}\cdot\Delta.\tag{5.2.2}$$

Здесь введены следующие обозначения для обобщенных термодинамических потоков и сопряженных с ними термодинамических сил

$$J_{qj}^{\Sigma*}\equiv q_j^{\Sigma*}-\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J_{\alpha j}^{\Sigma}\quad,\qquad q_j^{\Sigma*}\equiv\bar{q}_j+q_j^{T*}=\bar{q}_j+q_j^T-\overline{p'V_j''},\tag{5.2.3}$$

$$\bar{\pi}_{ij}\equiv\overline{\overset{o}{\pi}}_{ij}-p^\nu\delta_{ij},\qquad p^\nu\equiv\tfrac{1}{3}\bar{\pi}_{kl}\delta_{kl},\tag{5.2.4}$$

$$\overset{o}{R}_{ij}\equiv R_{ij}-\tfrac{1}{3}\left(R_{kl}\delta_{kl}\right)\delta_{ij}=R_{ij}+\tfrac{2}{3}\bar{\rho}<e>\delta_{ij},\tag{5.2.5}$$

$$\overset{o}{e}_{ij}\equiv\tfrac{1}{2}\left(<V_i>_{,j}+<V_j>_{,i}\right)-\tfrac{1}{3}<V_k>_{,k}\delta_{ij},e_{ij}\equiv\tfrac{1}{2}\left(<V_j>_{,i}+<V_i>_{,j}\right),\tag{5.2.6}$$

$$X_{0j}^T\equiv-<T>_{,j}/<T>,\tag{5.2.7}$$

$$X^{T*}_{\alpha j} \equiv -F_{\alpha j} + \langle T\rangle \left(\frac{\langle \mu_\alpha \rangle}{\langle T\rangle}\right)_{,j} + \langle h_\alpha\rangle \left(\frac{\langle T\rangle_{,j}}{\langle T\rangle}\right) = -F_{\alpha j} + \frac{\overline{p}_{,j}}{\overline{n}} + \mathrm{k}\langle T\rangle (\ln x^*_\alpha)_{,j}, \tag{5.2.8}$$

$$\Delta \equiv -\overline{p' V''_{,j}} + J^T_{(v)j}\overline{p}_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} F_{\alpha j} + \overline{\rho} < \varepsilon_e >. \tag{5.2.9}$$

Онзагеровский формализм неравновесной термодинамики позволяет найти линейные конститутивные связи между термодинамическими потоками и силами для трех основных областей турбулентного течения: для области ламинарного подслоя; для буферной зоны – промежуточной области, в которой эффекты молекулярного и турбулентного переноса сравнимы по значимости; для области развитого турбулентного течения, в которой $R_{ij} >> \overline{\pi}_{ij}$, $q^T_j >> \overline{q}_j$ и т.п.

В состояниях, близких к локальному равновесию, потоки можно представить в виде линейных функций от термодинамических сил (см. формулу (2.2.1)) $\Im_{\alpha j} = \sum_{\beta} \Lambda'_{\alpha\beta} X_{\beta j}$ $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N)$ (*Де Гроот, Мазур, 1964*). Матрица коэффициентов $\Lambda'_{\alpha\beta}$ в общем случае турбулизованного континуума будет зависеть не только от осредненных параметров состояния среды – температуры, давления, концентраций – и параметров, характеризующих ее геометрическую симметрию, но и от корреляционных характеристик турбулентного поля скоростей, т.е. от величин $< e >$, $< \varepsilon_e >$ и т.п. Как видно из (5.2.2), в случае турбулентного режима течения многокомпонентный среды спектр возможных перекрестных эффектов расширяется по сравнению с ламинарным режимом течения. Так, например, на осредненные молекулярные потоки диффузии $\overline{J}_{\alpha j}$ дополнительно оказывают влияние термодинамические силы $(\ln T_F)_{,j}$, обуславливающие "диффузионный" перенос турбулентной кинетической энергии потоком $J_{<e>j}$. Однако в настоящее время нет экспериментальных данных, подтверждающих и количественно описывающих перекрестные эффекты подобного типа. Кроме этого, обычно вклад любых перекрестных эффектов в общую скорость термодинамического процесса на порядок меньше по сравнению с прямыми эффектами (*Де Гроот, Мазур, 1964; Дьярмати, 1974*). Учитывая это обстоятельство, будем далее пользоваться требованиями положительности скоростей локального производства энтропий $\sigma'_{(S_j)}$, $\sigma'_{<S>}$, $\sigma_{(<S>+S)}$ независимо друг от друга, полагая при этом, что на соответствующие линейные связи относящиеся к подсистеме осредненного молекулярного хаоса (например, между симметричной частью осредненного тензора вязких напряжений $\overline{\overset{o}{\pi}}_{ij}$ со следом, равным нулю, и тензорной силой вязкости $\overset{o}{e}_{ij}$) подсистема турбулентного хаоса не оказывает заметного влияния. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в вы-

писываемых реологических соотношениях.

В качестве примера термодинамического подхода к выводу подобного рода связей рассмотрим детальный вывод определяющих соотношений в случае мелкомасштабной турбулентности, для которой, как правило, наблюдается тенденция к установлению локальной статистической изотропности, когда статистические свойства турбулентного течения не зависят от направления. Данный методический подход легко обобщается на случай неизотропной (крупномасштабной) турбулентности (*Маров, Колесниченко*, 1987).

Исходя из общей теории тензорных функций (*Седов, 1984*), свойства симметрии изотропных сред вполне характеризуются метрическим тензором g^{ij}: все тензоры будут тензорными функциями только метрического тензора $\Lambda^{ij}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}\, g^{ij}$ $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots N)$. Кроме того, вследствие отсутствия *интерференции* потоков и термодинамических сил различной тензорной размерности в изотропной системе (принцип Кюри) можно рассматривать, например, явления, описываемые полярными векторами, такие как теплопроводность или диффузия, независимо от явлений скалярных и тензорных (*Де Гроот, Мазур, 1964*). Таким образом, принимая обычные для неравновесной термодинамики дополнительные гипотезы, а именно марковость системы, когда потоки в данный момент зависят только от обобщенных сил, взятых в тот же самый момент времени, и линейность процессов переноса, когда потоки пропорциональны термодинамическим силам, получим из (5.2.2) в прямоугольной системе координат ($g^{ij} \equiv \delta_{ij}$) следующие феноменологические соотношения :

$$J^{\Sigma *}_{qj} = -L^{\Sigma}_{00}(\ln <T>)_{,j} - \sum_{\beta=1}^{N} L^{\Sigma}_{0\beta} X^{T\,*}_{\beta j}\,, \tag{5.2.10}$$

$$J^{\Sigma}_{\alpha j} = -L^{\Sigma}_{\alpha 0}(\ln <T>)_{,j} - \sum_{\beta=1}^{N} L^{\Sigma}_{\alpha\beta} X^{T\,*}_{\beta j} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \tag{5.2.11}$$

$$\bar{\pi}^{o}_{ij} = 2\mu \overset{o}{e}_{ij} \quad , \qquad p^{v} = \eta^{v} <V_k>_{,k} \quad , \tag{5.2.12}$$

$$\overset{o}{R}_{ij} = 2\mu^{T} \overset{o}{e}_{ij} \quad , \tag{5.2.13}$$

$$\bar{\xi}_s = \sum_{k=1}^{r} L^{Ch}_{sk} <A_k> \qquad (s = 1,2,\ldots,r), \tag{5.2.14}$$

$$J_{<e>j} = -L^{F}_{00}\left(T_{F},_{j}/T_{F}\right), \qquad \Delta = L^{F}\,\frac{T_F - <T>}{T_F <T>}. \tag{5.2.15}$$

Здесь кинетические коэффициенты L, η, μ являются функциями локальных параметров состояния турбулентной среды. Как только постулированы линейные

соотношения (5.2.10) и (5.2.11), теорема Онзагера–Казимира дает (*Де Гроот, Мазур, 1964)*

$$L^{\Sigma}_{\alpha\beta} = L^{\Sigma}_{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{5.2.16}$$

Кроме этого, из факта линейной независимости термодинамических сил следуют сооотношения (см. (2.3.11))

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_{\alpha} L^{\Sigma}_{\alpha 0} = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} M_{\alpha} L^{\Sigma}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{5.2.17}$$

Учитывая соотношения (5.2.4) и (5.2.12), для осредненного тензора вязких напряжений получим

$$\bar{\pi}_{ij} = \mu\left(<V_i>_{,j} + <V_j>_{,i}\right) - \left(\mu^{\nu} - \tfrac{2}{3}\mu\right) <V_k>_{,k} \delta_{ij}, \tag{5.2.18}$$

где μ и μ^{ν} – соответственно, коэффициент вязкости и коэффициент второй вязкости, зависящие от осредненных параметров турбулентной среды $<T>, \bar{\rho}, <Z_{\alpha}>$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$. Таким образом, определяющее соотношение для тензора $\bar{\pi}_{ij}$ получено здесь непосредственно методами неравновесной термодинамики без привлечения соответствующего аналога для мгновенных значений соответствующих величин.

Аналогично, используя (5.2.13) и (5.1.28), для тензора Рейнольдса получим следующую наиболее полную форму представления, справедливую в случае изотропной турбулентности

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e> \delta_{ij} + \mu^{T}\left(<V_i>_{,j} + <V_j>_{,i} - \tfrac{2}{3} <V_k>_{,k} \delta_{ij}\right), \tag{5.2.19}$$

где μ^{T} $(= \bar{\rho}\nu^{T})$, ν^{T} – соответственно, скалярный коэффициент турбулентной вязкости и коэффициент кинематической турбулентной вязкости. Следует, однако, еще раз отметить, что реологическое соотношение (5.2.19) для рейнольдсовых напряжений не является единственно возможным; в случае учета анизотропии турбулентного поля оно дополнительно усложняется, поскольку требует замены коэффициента турбулентной вязкости μ^{T} тензором (4-го ранга) (см. формулу (3.3.19), а также (*Монин, Яглом, 1965; Либби, 1975*).

5.2.2. Турбулентные потоки диффузии и тепла в развитом турбулентном потоке. Выражение для объемной скорости возникновения полной энтропии $\sigma_{(<S>+S_t)}$ упрощается для важного случая локально стационарного состояния развитого турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, при котором производство энтропии турбулизации примерно равно ее стоку. Как показывают измерения бюджета энергии

турбулентности в однородном потоке с градиентом скорости, эта ситуация имеет место, например, для режима вынужденной и естественной конвекции в приземном слое атмосферы (*Ламли, Пановский, 1966; Ван Мигем,1977*).

Итак, пусть $\sigma_{(S_F)} \approx 0$; тогда, в силу (5.1.25) и (5.1.26), будем иметь

$$-J_{(S_F)}T_F{}_{,j} \approx -\overset{o}{R}_{ij}\overset{o}{e}_{ij} + J^T_{(v)j}\overline{p}_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}F_{\alpha j} - \overline{p'V''_j}_{,j} + \overline{\rho} < \varepsilon_e > \equiv -\overset{o}{R}_{ij}\overset{o}{e}_{ij} + \Delta \tag{5.2.20}$$

и выражение (5.2.2) для рассеяния энергии ($<T>\cdot\sigma$) развитого турбулизованного течения, когда $R_{ij} >> \overline{\pi_{ij}}$, $J^T_{\alpha j} >> \overline{J_{ij}}$ и т.п., приобретает вид

$$0 \le \sigma \cdot <T> \equiv J^{T*}_{qj} \cdot X^T_{0j} - \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j} X^{T*}_{\alpha j} - J_{(S_F)j}T_F{}_{,j} + \overset{o}{R}_{ij}\overset{o}{e}_{ij} + \sum_{s=1}^{r} <A_s>\overline{\xi}_s . \tag{5.2.21}$$

В этом случае для турбулентных потоков диффузии $J^T_{\alpha j}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ и тепла J^{T*}_{qJ}, а также для потока энтропии турбулизации $J_{(S_F)j}$, можно написать следующие кинематические *конститутивные соотношения*

$$J^{T*}_{qj} = L^T_{00}X^T_{0j} - \sum_{\beta=1}^{N} L^T_{0\beta}X^{T*}_{\beta j} , \tag{5.2.22}$$

$$J^T_{\alpha j} = L^T_{\alpha 0}X^T_{0j} - \sum_{\beta=1}^{N} L^T_{\alpha\beta}X^{T*}_{\beta j}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \tag{5.2.23}$$

$$J_{(S_F)j} = -L_{FF}T_F{}_{,j}, \tag{5.2.24}$$

причем скалярные феноменологические коэффициенты L^T, зависящие от осредненных параметров состояния $\overline{\rho}$, $<T>$, $<Z_\alpha>$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ и параметра $<e>$, характеризующего физическую природу турбулентной среды, удовлетворяют условиям симметрии Онзагера–Казимира (5.2.16) и условиям (5.2.17).

Для того, чтобы далее сохранить некоторую аналогию с соответствующими выражениями для регулярных (ламинарных) режимов течения (см. § 2.3), введем вместо линейно независимых диффузионных сил $X^{T*}_{\beta j}$ новый набор линейно зависимых векторов $d^T_{\beta j}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$, положив для этого

$$d^T_{\beta j} \equiv (X^{T*}_{\beta j} + M_\beta R_j)(\overline{n}_\beta / \overline{p}) \quad (^1), \qquad \sum_{\beta=1}^{N} d^T_{\beta j} = 0 \quad (^2) . \tag{5.2.25}$$

Здесь R_j – некоторый неизвестный вектор, общий для всех компонентов системы, для определения которого служит формула (5.2.25(2)). Тогда, с учетом формулы (5.2.8), определяющей векторы $X^{T*}_{\beta j}$, для обобщенных диффузионных сил $d^T_{\beta j}$ в случае турбулизованного континуума получим выражение

$$d^T_{\beta j} \equiv x^*_{\beta,j} + \left(x^*_\beta - M_\beta <Z_\beta>\right)\frac{\overline{p}_{,j}}{\overline{p}} + \frac{\overline{n}_\beta}{\overline{p}}\left[-F_{\beta j} + M_\beta \sum_{\alpha=1}^{N} <Z_\alpha> F_{\alpha j}\right], \qquad (5.2.26)$$

где $x^*_\alpha \equiv \overline{n}_\alpha / \overline{n}$, которое по структуре полностью аналогично соответствующему выражению для случая ламинарного режима движения смеси (сравни с формулой (2.3.15)).

Подставляя теперь (5.2.25) в (5.2.22) и учитывая соотношения (5.2.17), получим

$$J^{T*}_{qj} = L^T_{00} X^T_{0j} - \overline{p} \sum_{\beta=1}^{N} (1/\overline{n}_\beta) L^T_{0\beta} d^T_{\beta j}, \qquad (5.2.27)$$

$$J^T_{\alpha j} = L^T_{\alpha 0} X^T_{0j} - \overline{p} \sum_{\beta=1}^{N} \left(1/\overline{n}_\beta\right) L^T_{\alpha\beta} d^T_{\beta j} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (5.2.28)$$

Наконец, из соотношений (5.2.27) и (5.2.28), при использовании формул (5.1.20) для приведенного потока тепла J^{T*}_{qj} и формулы (5.2.7) для термодинамической силы X^T_{0j}, окончательно найдем

$$q^T_j = \overline{p' V''_j} + \sum_{\beta=1}^{N} <h_\beta> J^T_{\beta j} - \lambda^T_0 <T>_{,j} - \overline{p} \sum_{\beta=1}^{N} D^T_{t\beta} d^T_{\beta j}, \qquad (5.2.29)$$

$$J^T_{\alpha j} = -\overline{n}_\alpha D^T_{t\alpha} (\ln <T>)_{,j} - \overline{p}\, n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} D^T_{\alpha\beta} d^T_{\beta j} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (5.2.30)$$

В соотношениях (5.2.29) и (5.2.30), по аналогии с формулами для ламинарного режима течения жидкости (см. (2.3.21)), введены симметричные многокомпонентные коэффициенты турбулентной диффузии $D^T_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N)$, коэффициенты турбулентной термодиффузии $D^T_{t\beta}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$ и коэффициент турбулентной теплопроводности λ^T_0 для многокомпонентного газа с помощью следующих определений

$$\begin{cases} \lambda_0^T = L_{00}^T / < T >, \qquad D_{t\beta}^T = L_{0\beta}^T / \bar{n}_\beta \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N), \\ D_{\alpha\beta}^T = D_{\beta\alpha}^T = \bar{p} L_{\alpha\beta}^T / \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N). \end{cases} \tag{5.2.31}$$

Коэффициенты турбулентного переноса $D_{\alpha\beta}^T$ и $D_{t\alpha}^T$, в силу (5.2.17), удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha <Z_\alpha> D_{t\alpha}^T = 0 \quad (^1), \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha <Z_\alpha> D_{\alpha\beta}^T = 0 \quad (\beta=1,2,\ldots,N) \quad (^2). \tag{5.2.32}$$

Полученные реологические уравнения (5.2.29) и (5.2.30) для потоков диффузии $J_{\alpha j}^T$ и тепла q_j^T наиболее полно описывают процессы тепло- и массопереноса в развитом изотропном турбулентном течении многокомпонентной газовой смеси, но, к сожалению, в силу ограниченности экспериментальных данных по коэффициентам турбулентного обмена на данном этапе развития полуэмпирической теории многокомпонентной турбулентности часто приходится пользоваться более упрощенными моделями (см. § 3.3).

В заключение этого раздела сделаем следующие замечания. В рамках развитого термодинамического подхода могут быть получены реологические соотношения и для других режимов течений многокомпонентной турбулизованной смеси. Например, в случае $< T > = T_F$, отвечающем режиму течения в буферной зоне - области течения, в которой молекулярные и турбулентные потоки сравниваются по порядку величины - можно вывести определяющие соотношения как для полных тепловых $q_j^{\Sigma *}$ и диффузионных потоков $J_{\alpha j}^{\Sigma}$ (в частности, в виде соотношений Стефана–Максвелла), так и и для полного напряжения силы трения π_{ij}^{Σ}, описывающих, соответственно, суммарный перенос тепла, разного сорта вещества и количества движения. К этому следует добавить, что моделирование введенных здесь коэффициентов турбулентного обмена, в частности многокомпонентных коэффициентов турбулентной диффузии, может быть проведено в рамках *K*-теории многокомпонентной турбулентности, рассмотренной в разд. 4.3.9, с привлечением полной системы дополнительных эволюционных уравнений переноса для парных корреляций пульсирующих термогидродинамических параметров смеси. Частный случай подобного подхода подробно рассмотрен нами в Гл. 8.

§ 5.3. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла для турбулентных смесей

Подобно режиму ламинарного тепломассопереноса смеси, определяющие соотношения для турбулентных потоков диффузии и тепла удобно привести к виду обобщенных соотношений Стефана–Максвелла, включающих бинарные

коэффициенты турбулентной диффузии. Это обусловлено, в частности, тем, что, в отличие от многокомпонентных коэффициентов турбулентного переноса, для бинарных коэффициентов легче, вообще говоря, воспользоваться эмпирическими данными.

5.3.1. Соотношения Стефана–Максвелла. Для вывода обобщенных соотношений Стефана–Максвелла (см. разд. 2.3.3.) для турбулентных многокомпонентных смесей, разрешим относительно термодинамических сил через потоки J_{qj}^{T*} и $J_{\alpha j}^{T}$ $(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ уравнения (5.2.27) и (5.2.28), предварительно переписав их в виде

$$J_{qj}^{T*} - L_{00}^{T} X_{0j}^{T} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}^{T} \left[X_{\beta j}^{T} - \frac{M_\beta}{M_N} X_{Nj}^{T} \right], \tag{5.3.1}$$

$$J_{\alpha j}^{T} - L_{\alpha 0}^{T} X_{0j}^{T} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}^{T} \left[X_{\beta j}^{T} - \frac{M_\beta}{M_N} X_{Nj}^{T} \right], \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N-1). \tag{5.3.2}$$

Здесь $X_{\beta j}^{T}$ $(\beta = 1,2,\ldots,N)$ – термодинамические силы, определяемые выражениями

$$X_{\beta j}^{T} \equiv -(\bar{p}/\bar{n}_\beta) d_{\beta j}^{T} \quad (^1), \qquad \sum_{\beta=1}^{N} \langle Z_\beta \rangle X_{\beta j}^{T} = 0 \quad (^2). \tag{5.3.3}$$

Эта процедура полностью аналогична той, которая приведена в разд. 2.3.3. для случая ламинарного режима течения многокомпонентной смеси при разрешении соотношений (2.3.31) и (2.3.32) относительно термодинамических сил через потоки диффузии $J_{\alpha j}$ и тепла J_{qj}. Используя эту аналогию, приведем сразу окончательный результат:

$$X_{0j}^{T} = (1/A_{00}^{T}) J_{qj}^{T*} - \sum_{\alpha=1}^{N} (A_{0\alpha}^{T}/A_{00}^{T}) J_{\alpha j}^{T}, \tag{5.3.4}$$

$$-X_{\beta j}^{T} = A_{\beta 0}^{T} X_{0j}^{T} + \sum_{\alpha=1}^{N} A_{\beta\alpha}^{T} J_{\alpha j}^{T} \quad (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{5.3.5}$$

Здесь коэффициенты A^T определяются выражениями

$$A_{00}^{T} = L_{00}^{T} - \sum_{\beta=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{0\beta}^{T} \mathcal{M}_{\beta\gamma}^{T} L_{\gamma 0}^{T}, \tag{5.3.6}$$

$$A_{0N}^{T} = A_{N0}^{T} = a_0^{T} M_N = -M_N \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} \langle Z_\gamma \rangle \mathcal{M}_{\gamma\alpha}^{T} L_{\alpha 0}^{T}, \tag{5.3.7}$$

$$A_{0\alpha}^T = A_{\alpha 0}^T = a_0^T M_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{0\beta}^T \mathcal{M}_{\beta\alpha}^T = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\beta 0}^T \left[\mathcal{M}_{\beta\alpha}^T - M_\alpha \sum_{\gamma=1}^{N-1} < Z_\gamma > \mathcal{M}_{\gamma\beta}^T \right] \qquad (5.3.8)$$

$(\alpha=1,2,...,N\text{-}1),$

$$A_{\beta\alpha}^T = A_{\alpha\beta}^T = -(M_\alpha M_\beta / M_N) a_N^T + \sum_{\gamma=1}^{N-1} <Z_\gamma> \left(M_\alpha \mathcal{M}_{\gamma\beta}^T + M_\beta \mathcal{M}_{\gamma\alpha}^T \right) - \mathcal{M}_{\beta\alpha}^T \qquad (5.3.9)$$

$(\alpha,\beta=1,2,...,N\text{-}1)$,

$$A_{N\alpha}^T = A_{\alpha N}^T = -a_N^T M_\alpha + M_N \sum_{\gamma=1}^{N-1} <Z_\gamma> \mathcal{M}_{\gamma\alpha}^T, \qquad (5.3.10)$$

$$A_{NN}^T = -a_N^T M_N , \qquad (5.3.11)$$

а коэффициенты a^T равны:

$$a_0^T = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} <Z_\gamma> \mathcal{M}_{\gamma\alpha}^T L_{\alpha 0}^T, \qquad (5.3.12)$$

$$a_N^T = M_N \sum_{\beta=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} <Z_\beta><Z_\gamma> \mathcal{M}_{\beta\gamma}^T . \qquad (5.3.13)$$

Элементы обратной матрицы $\mathcal{M}_{\beta\alpha}^T$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\beta\alpha}^T L_{\alpha\gamma}^T = \delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \beta = \gamma \\ 0, & \beta \neq \gamma \end{cases}, \qquad (5.3.14)$$

причем из симметрии феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}^T$ следует симметрия коэффициентов $\mathcal{M}_{\beta\alpha}^T$:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^T = \mathcal{M}_{\beta\alpha}^T \quad (\beta = 1,2,\ldots,N-1). \qquad (5.3.15)$$

Кроме того, коэффициенты $A_{0\alpha}^T$ и $A_{\alpha\beta}^T$ удовлетворяют тождествам (сравни с (2.3.49) и (2.3.52))

$$\sum_{\alpha=1}^{N} < Z_\alpha > A_{\alpha 0}^T = 0, \quad (^1), \quad \sum_{\beta=1}^{N} < Z_\beta > A_{\beta\alpha}^T = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \quad (^2) \qquad (5.3.16)$$

Преобразуем теперь уравнения (5.3.5) к виду обобщенных соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии в турбулентном потоке.

Вычтем для этого из (5.3.5) выражение (5.3.16(²)), умноженное на $J^T_{\beta j}/\langle Z_\beta\rangle$; тогда найдем

$$-X^T_{\beta j} = A^T_{\beta 0}X^T_{0j} + \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} A^T_{\beta\alpha}\left(J^T_{\alpha j} - \frac{\langle Z_\alpha\rangle}{\langle Z_\beta\rangle}J^T_{\beta j}\right) \quad (\beta = 1,2,\ldots,N), \tag{5.3.17}$$

или, в общепринятых обозначениях,

$$d^T_{\beta j} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{A^T_{\beta\alpha}}{\bar{p}}\left(\bar{n}_\beta J^T_{\alpha j} - \bar{n}_\alpha J^T_{\beta j}\right) - \frac{A^T_{\beta 0}\bar{n}_\beta}{\bar{p}}\frac{\langle T\rangle_{,j}}{\langle T\rangle} \quad (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{5.3.18}$$

Теперь осталось показать, что

$$A^T_{\beta 0} = -\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{n}_\alpha A^T_{\beta\alpha}\left[\frac{L^T_{0\alpha}}{\bar{n}_\alpha} - \frac{L^T_{0\beta}}{\bar{n}_\beta}\right] \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N). \tag{5.3.19}$$

Используя выражения (5.3.8) и (5.3.9), а также тождества (5.3.16), найдем

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{n}_\alpha A^T_{\beta\alpha}\left[\frac{L^T_{0\alpha}}{\bar{n}_\alpha} - \frac{L^T_{0\beta}}{\bar{n}_\beta}\right] = \sum_{\alpha=1}^{N}A^T_{\beta\alpha}L^T_{0\alpha} - \frac{L^T_{0\beta}}{\bar{n}_\beta}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{n}_\alpha A^T_{\beta\alpha} = A^T_{\beta N}L^T_{0N} + \sum_{\alpha=1}^{N-1}A^T_{\beta\alpha}L^T_{0\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1}L^T_{0\alpha}\left[A^T_{\beta\alpha} - (M_\alpha/M_N)A^T_{\beta N}\right] = \sum_{\alpha=1}^{N-1}L^t_{0\alpha}\left[-\mathcal{M}^T_{\beta\alpha} + M_\beta\sum_{\gamma=1}^{N-1}\langle Z_\gamma\rangle\mathcal{M}^T_{\gamma\alpha}\right] = -A^T_{0\beta}. \tag{5.3.20}$$

Подставляя (5.3.19) в (5.3.18) и используя обозначения (5.2.31), окончательно найдем

$$d^T_{\beta j} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{A^T_{\beta\alpha}}{\bar{p}}\left(\bar{n}_\beta J^T_{\alpha j} - \bar{n}_\alpha J^T_{\beta j}\right) + \frac{\langle T\rangle_{,j}}{\langle T\rangle}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\bar{n}_\beta\bar{n}_\alpha}{\bar{p}}A^T_{\beta\alpha}\left(D^T_{t\alpha} - D^T_{t\beta}\right) \tag{5.3.21}$$

$(\beta=1,2,\ldots,N).$

Если ввести бинарные коэффициенты турбулентной диффузии $\mathcal{D}^T_{\alpha\beta}$ и турбулентные термодиффузионные отношения $K^T_{t\beta}$ с помощью формул

$$\mathcal{D}^T_{\alpha\beta} = \mathrm{k}\langle T\rangle/\bar{n}A^T_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N) \qquad (^1),$$

$$K^T_{t\beta} = \bar{n}_\beta A^T_{\beta 0}/\bar{p} \qquad (\beta = 1,2,\ldots,N) \qquad (^2), \tag{5.3.22}$$

то для соотношений Стефана–Максвелла в развитом турбулентном многокомпонентном потоке из (5.3.21) получим следующий обобщенный вид

$$(1/\overline{n}^2)\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\overline{n}_\beta J^T_{\alpha j}-\overline{n}_\alpha J^T_{\beta j}}{\mathcal{D}^T_{\alpha\beta}}=d^T_{\beta j}+K^T_{t\beta}\frac{<T>_{,j}}{<T>},\qquad(\beta=1,2,\ldots,N),\tag{5.3.23}$$

где

$$d^T_{\beta j}\equiv x^*_{\beta,j}+\left(x^*_\beta-M_\beta<Z_\beta>\right)\frac{\overline{p}_{,j}}{\overline{p}}+\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{p}}\left[-F_{\beta j}+M_\beta\sum_{\alpha=1}^{N}<Z_\alpha>F_{\alpha j}\right].$$

Эти соотношения по структуре полностью аналогичны соотношениям Стефана–Максвелла (2.3.69), выведенным термодинамически (*Колесниченко, Тирский, 1976*) и газокинетически (*Маров, Колесниченко,1987*) для ламинарного режима течения жидкости и плазмы.

По аналогии с соотношениями (2.3.64) и (2.3.65), можно показать, что имеют место формулы

$$K^T_{t\beta}=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{x^*_\beta x^*_\alpha}{\mathcal{D}^T_{\alpha\beta}}\left(D^T_{t\beta}-D^T_{t\alpha}\right)\quad(\beta=1,2,\ldots,N),\tag{5.3.24}$$

связывающие турбулентные термодиффузионные отношения $K^T_{t\beta}$ (5.3.23) и турбулентные коэффициенты термодиффузии $D^T_{t\beta}$, введенные формулой (5.2.31) для многокомпонентных смесей, и формулы

$$\sum_{\alpha=1}^{N}K^T_{t\alpha}=0,\ (^1),\ \sum_{\beta=1}^{N}D^T_{\alpha\beta}K^T_{t\beta}=D^T_{t\alpha}\quad(\alpha=1,2,\ldots,N),\ (^2)\tag{5.3.25}$$

которые могут быть использованы для нахождения параметров $K^T_{t\beta}$ через параметры $D^T_{\alpha\beta}$ и $D^T_{t\alpha}$ в случае турбулизованных сред. Таким образом, формулы (5.3.24) и (5.3.25) носят универсальный характер, т.е. могут использоваться при описании обоих режимов движения многокомпонентной смеси.

Наконец, используя турбулентные термодиффузионные отношения $K^T_{t\beta}$, выражения (5.2.30) для турбулентных потоков диффузии $J^T_{\alpha j}$ можно переписать в следующем виде

$$J^T_{\alpha j}=-\overline{n}_\alpha\sum_{\beta=1}^{N}D^T_{\alpha\beta}\left[d^T_{\beta j}+K^T_{t\beta}\frac{<T>_{,j}}{<T>}\right]\quad(\alpha=1,2,\ldots,N).\tag{5.3.26}$$

5.3.2. Поток тепла в турбулентных многокомпонентных средах. Полный тепловой поток смеси за счет турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии $q_j^T = q_j^{T*} + \overline{p'V_j''}$, согласно (5.1.20) и (5.2.29), равен

$$q_j^{T*} = J_{qj}^{T*} + \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J_{\alpha j}^T = -\lambda_0^T <T>_{,j} - \bar{p} \sum_{\alpha=1}^{N} D_{t\alpha}^T d_{\alpha j}^T + \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J_{\alpha j}^T. \qquad (5.3.27)$$

Из уравнений (5.3.4), с учетом (5.3.22(2)), можно получить для приведенного турбулентного потока тепла J_{qj}^{T*} другое выражение, отвечающее соотношениям Стефана–Максвелла (5.3.23), а именно:

$$J_{qj}^{T*} = A_{00}^T X_{0j}^T + \sum_{\alpha=1}^{N} A_{0\alpha}^T J_{\alpha j}^T = -\lambda^T <T>_{,j} + \bar{p} \sum_{\alpha=1}^{N} (K_{t\alpha}^T / \bar{n}_\alpha) J_{\alpha j}^T. \qquad (5.3.28)$$

Здесь через

$$\lambda^T = A_{00} / <T> \qquad (5.3.29)$$

обозначен истинный коэффициент турбулентной теплопроводности, который связан с ранее введенным коэффициентом λ_0^T (см. (5.2.31)) соотношением

$$\lambda^T = \lambda_0^T - \mathrm{k} <T> \sum_{\alpha=1}^{N} K_{t\alpha}^T D_{t\alpha}^T = \lambda_0^T - \mathrm{k} <T> \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} K_{t\alpha}^T D_{\alpha\beta}^T K_{t\beta}^T. \qquad (5.3.30)$$

Вывод выражения (5.3.30) аналогичен тому, который был приведен в разд. 2.3 при получении формулы (2.3.74).

Таким образом, полный поток тепла в турбулентной многокомпонентной газовой среде может быть окончательно записан в виде

$$q_j^T = \overline{p'V_j''} - \lambda^T <T>_{,j} + \mathrm{k} <T> \sum_{\alpha=1}^{N} (K_{t\alpha}^T / x_\alpha^*) J_{\alpha j}^T + \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J_{\alpha j}^T. \qquad (5.3.31)$$

За исключением первого слагаемого, это соотношение по структуре полностью аналогично соответствующему выражению (2.3.75) для ламинарного режима движения смеси, полученному как термодинамически (*Колесниченко, Тирский 1976*), так и методами кинетической теории многокомпонентных газов (*Маров, Колесниченко,1987*). Подчеркнем, что истинный коэффициент турбулентной теплопроводности λ^T, в отличии от коэффициента λ_0^T, может быть измерен экспериментально при стационарном режиме движения смеси, так как в этом случае (и если газ в целом покоится) все турбулентные потоки диффузии $J_{\alpha j}^T$ равны нулю. Отметим также, что, по аналогии с системой (2.3.80), можно

выписать также систему уравнений, позволяющую определить многокомпонентные коэффициенты турбулентной диффузии смеси $D^T_{\alpha\beta}$ через бинарные коэффициенты турбулентной диффузии $\mathcal{D}^T_{\alpha\beta}$ (*Колесниченко, 1994*) .

***Краткие выводы*:**

1). В рамках феноменологической теории турбулентности многокомпонентного химически активного газового континуума рассмотрен термодинамический подход к замыканию гидродинамических уравнений осредненного движения на уровне моделей первого порядка, позволивший найти более общие выражения для турбулентных потоков в многокомпонентной среде, чем те, которые выводятся с использованием понятия пути смешения. Представление турбулизованного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух подсистем – подсистемы среднего движения (осредненного молекулярного и турбулентного хаоса) и подсистемы пульсационного движения (турбулентной надструктуры) дало возможность получить при использовании методов неравновесной термодинамики реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и количества движения, обобщающие на случай многокомпонентных смесей соответствующие результаты гидродинамики однородной жидкости.

2). Путем осреднения фундаментального тождества Гиббса, справедливого для микродвижений многокомпонентной смеси, получена субстанциональная форма баланса средневзвешенной удельной энтропии для подсистемы осредненного движения турбулизованного континуума. Найден явный вид для осредненного молекулярного и турбулентного потоков энтропии, связанных с соответствующими потоками диффузии и тепла, а также для скорости локального производства осредненной энтропии, обусловленной необратимыми процессами внутри подсистемы осредненного молекулярного хаоса, и скорости обмена энтропией между подсистемами пульсационного и среднего движения. С помощью постулирования соответствующего тождества Гиббса введены параметры состояния для подсистемы турбулентного хаоса, такие, как температура и давление турбулизации. Проанализировано эволюционное уравнение баланса для энтропии турбулизации и найдены выражения для потока пульсационной энтропии, а также локального производства и стока энтропии подсистемы турбулентного хаоса. С использованием эволюционного уравнения переноса для полной энтропии турбулизованного континуума получены уточненные реологические соотношения для турбулентных термодинамических потоков в многокомпонентных средах.

3). Рассмотрен детальный вывод реологических соотношений для случая мелкомасштабной многокомпонентной турбулентности, для которой наблюдается тенденция к установлению локальной статистической изотропности, когда статистические свойства турбулентного течения и, соответственно, ко-

эффициенты турбулентного обмена, не зависят от направления. Развитая методика, иллюстрирующая возможности предложенного термодинамического подхода к проблеме замыкания первого порядка, допускает обобщение на случай неизотропной крупномасштабной турбулентности и на случай учета интегральных свойств течения на характеристики турбулентности в точке.

4). Для локально-стационарного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, получены соотношения Стефана–Максвелла для многокомпонентной диффузии и соответствующее выражение для потока тепла в турбулизованном континууме. Данные соотношения наиболее полно описывают тепло- и массообмен в многокомпонентной турбулизованной среде, хотя, в силу ограниченности экспериментальных данных по коэффициентам турбулентного переноса, приходится использовать упрощенные модели.

ЧАСТЬ II

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Развитые к настоящему времени эффективные численные методы решения задач математической физики (см., например, (*Самарский, 1977,1978; Белоцерковский, 1985, 1994*)), опирающиеся на бурный прогресс вычислительной техники, обеспечили возможности решения сложных научных и прикладных проблем. Они привели к конструированию разнообразных моделей, в том числе моделей сплошных сред с усложненными свойствами и новых схематизированных постановок задач в рамках этих моделей (*Седов, 1980*). К ним относится изучение турбулизованных природных сред, в которых протекают сложные и разообразные физико-химические процессы. Характерным примером таких сред являются внешние газовые оболочки (верхние атмосферы) планет, которые представляют собой многокомпонентную газовую среду, подверженную прямому воздействию коротковолнового (ультрафиолетового и рентгеновского) солнечного излучения. Комплекс соответствующих проблем объединяется понятием планетной аэрономии.

Мы уделим внимание некоторым вопросам создания моделей таких сред на примерах аэрогидродинамических задач, фундаментом которых служат теоретические положения, развитые в предыдущих главах. В частности, рассмотрены примеры задач, связанные с моделированием состава, динамики и теплового режима тех областей верхней атмосферы Земли, которые формируются под воздействием процессов турбулентного перемешивания. Сами эти примеры носят, по необходимости, ограниченный характер, что обусловлено сложностью изучаемых явлений. Тем не менее, они позволяют составить вполне определенные представления о специфике подходов к решению соответствующих модельных задач, в целом отражающих достигнутый уровень в области прикладной аэрономии.

ГЛАВА 6

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕРМОСФЕРЕ

Исследования аэрономических проблем ведутся по двум основным направлениям. Первое из них связано с созданием полуэмпирических моделей верхней атмосферы, описывающих структуру и вариации таких параметров, как температура, массовая плотность, концентрации химических компонентов и скорость ветра, в зависимости от гелио-геофизических условий. Они базируются на экспериментальной информации, полученной с помощью ракетных и спутниковых данных (см., например, (*Бажинов и др., 1985; Хедин, 1987, 1988, 1991; Маров, Красицкий, 1990*)). Со вторым направлением связана разработка математических моделей, в основе которой лежит теоретический анализ важнейших физико-химических механизмов, ответственных за наблюдаемые пространственно-временные распределения и вариации атмосферных параметров (см., например, (*Харрис, Пристер, 1962; Иванов, 1967; Ивановский и др., 1967 Бэнкс, Ко-*

картц, 1973; Кошелев и др., 1983; Брасье, Соломон, 1987; 1990; Маров, Колесниченко, 1987; Брюнелли, Намгаладзе, 1988; Намгаладзе и др.,1990)). К ним относятся процессы фотолиза, химической кинетики, молекулярного и турбулентного тепло- и массопереноса. Подобные модели призваны не только дать физическую интерпретацию влияния солнечных и геомагнитных возмущений на структуру и состав газовой среды, но и прогнозировать ее поведение на высотах, где располагаются орбиты ИСЗ и пилотируемых орбитальных станций.

Исторически изучение взаимосвязей между сложной совокупностью аэрономических процессов часто проводилось в рамках одномерных моделей, когда осреднение выполняется по широте и долготе, причем вертикальная составляющая вектора гидродинамической скорости оказывает не меньшее влияние на состав атмосферы, чем диффузия и горизонтальный перенос (см., например, (*Кошелев, 1976; Акмаев, Швед, 1978*)). При этом вертикальный перенос вещества за счет ветра (адвекция) и турбулентного переноса описывается, как вертикальная турбулентная диффузия с некоторым эффективным коэффициентом турбулентного обмена D^T, учитывающим динамические эффекты в атмосфере. Он рассматривается в качестве свободного параметра и вводится таким образом, чтобы получить наилучшее согласование между расчетами и данными наблюдений.

С учетом этих соображений представлялось целесообразным критически проанализировать данный подход, опираясь на полученные нами результаты изучения многокомпонентных турбулентных сред. К сожалению, как оказалось, в ряде работ, посвященных численному моделированию процессов массопереноса в верхней атмосфере допущены определенные неточности (*Атмосфера. Справочник, 1991*). Так, например, используемые выражения для потоков турбулентной диффузии не обеспечивают равенства нулю суммарного потока вещества, т.е. не выполняется условие (3.1.29). С другой стороны, расчеты молекулярного массопереноса либо проводятся по формулам, взятым из ранней работы (*Колегров и др., 1966*), либо основаны на определяющих соотношениях для потоков молекулярной диффузии с несимметричными коэффициентами диффузии $D_{\alpha\beta}$, (неудачно введенными, как отмечалось нами ранее, в монографии (*Гиршфельдер и др., 1961*)). Однако асимметрия коэффициентов $D_{\alpha\beta}$ не согласуется с фундаментальным соотношением взаимности Онзагера в неравновесной термодинамике (см. § 2.2), хотя такое согласование имеет принципиальное значение при моделировании процессов тепло- и массопереноса в реальной многоатомной, химически активной смеси атмосферных газов (*Куртисс, 1968*). Между тем, как отмечалось в Гл. 2, для этих целей часто некритично используются результаты, полученные методами кинетической теории одноатомных нереагирующих газов. По этим причинам полезно более подробно рассмотреть процессы диффузионного переноса в стратифицированной атмосфере. Термин диффузионный перенос охватывает здесь явления диффузии, теплопроводности и термодиффузии.

§ 6.1. Диффузионный перенос в многокомпонентной смеси атмосферных газов

Обратимся к результатам моделирования структуры и энергетики верхней атмосферы Земли в области высот 70–400 км, полученным с использованием одномерных уравнений гидродинамики смеси (*Маров, Колесниченко, 1987*). Модель содержит аккуратное описание процессов тепло- и массопереноса в термосфере (области положительного температурного градиента выше уровня мезопаузы) на основе использования соотношений Стефана-Максвелла для многокомпонентной молекулярной диффузии, термодинамический вывод которых дан в § 2.3, и реологических соотношений для потоков турбулентной диффузии и тепла, полученных в § 3.3.

6.1.1. Молекулярный тепло- и массоперенос. Молекулярная диффузия становится существенной в переносе вещества только в области термосферы планеты, где за счет диффузионного разделения газов в поле силы тяжести начинают доминировать более легкие компоненты. Например, в термосфере Земли это атомарный кислород, гелий и водород. Как отмечалось в Гл. 2, возможны два эквивалентных способа описания молекулярной диффузии в многокомпонентной газовой среде: на основе обобщенного закона Фика (2.3.19) или соотношений Стефана–Максвелла (2.3.69). Рассмотрим здесь эти взаимосвязанные подходы с учетом ограничений, накладываемых спецификой аэрономических задач.

В рамках основного предположения неравновесной термодинамики о наличии локальной линейной связи между потоками и сопряженными с ними термодинамическими силами (см. разд. 2.2.1), макроскопическая теория процессов тепло- и массопереноса приводит к следующим определяющим соотношениям для диффузионных скоростей $w_{\alpha j} = V_{\alpha j} - V_j \quad (= J_{\alpha j} / \ n_\alpha)$ отдельных компонентов многокомпонентной смеси (см. (2.3.23*))

$$w_{\alpha j} = -\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\left[d_{\beta j} + K_{T\beta}\left(\frac{T_{,j}}{T}\right)\right], \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \tag{6.1.1}$$

где, как и ранее,

$$d_{\beta j} = x_{\beta,j} + (x_\beta - c_\beta)\frac{p_{,j}}{p} + \frac{\rho c_\beta}{p}\left[-\frac{1}{M_\beta} F_{\beta j} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{c_\alpha}{M_\alpha} F_{\alpha j} \right] \tag{6.1.2}$$

– векторы термодинамических диффузионных сил; $K_{T\beta}$ – термодиффузионные отношения, определяемые единственным образом из решения системы алгебраических уравнений (см.(2.3.65) и (2.3.67))

$$\sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} = 0, \qquad \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} K_{T\beta} = D_{T\alpha}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,N); \tag{6.1.3}$$

$D_{\alpha\beta}$, $D_{T\alpha}$ – соответственно, коэффициенты многокомпонентной диффузии и коэффициенты термодиффузии; $x_\beta = n_\beta / n$, $c_\beta = M_\beta Z_\beta \ (= M_\beta n_\beta / \rho)$ – мольная

доля и массовая концентрация каждого β-компонента смеси ($\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta = 1$); $V_{\beta j}$ – средняя скорость частиц β-го сорта; $n = \sum_{\beta=1}^{N} n_\beta$, $p = kTn$, V_j – соответственно, полная числовая плотность, давление и гидродинамическая скорость N-компонентного континуума.

Коэффициенты многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$ и коэффициенты термодиффузии $D_{T\alpha}$ являются линейно зависимыми (см. (2.3.24)), т.е.

$$\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta D_{T\beta} = 0 \quad (1), \qquad \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta D_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \quad (2). \tag{6.1.4}$$

Кроме того, коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ определены, как симметричные величины относительно перестановок индексов: $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$ $(D_{\alpha\alpha} > 0)$ (см. (2.3.21)). Поэтому для N-компонентной смеси имеется только $\frac{1}{2}N(N+1)$ независимых коэффициентов многокомпонентной диффузии.

В силу принятого нами определения для среднемассовой гидродинамической скорости потока $V_j = \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta V_{\beta j}$, диффузионные скорости $w_{\beta j}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta w_{\beta j} = 0, \tag{6.1.5}$$

т.е. в системе отсутствует суммарный импульс, возникающий из-за взаимной молекулярной диффузии.

Для стратифицированной атмосферы, с учетом уравнения гидростатики $\partial p / \partial z = -\rho g$, формулы (6.1.1) и (6.1.2) могут быть преобразованы к виду (сравни с формулой (2.3.96))

$$w_{\alpha z} = -\frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial n_\beta}{\partial z} + (1 + \alpha_{T\beta}) \frac{n_\beta}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{n_\beta}{H_\beta} \right], \tag{6.1.6}$$

где $\alpha_{T\beta} \equiv nK_{T\beta} / n_\beta$ – фактор термической диффузии (*Ферцигер, Капер, 1976*); $H_\beta \equiv kT / M_\beta g$ – локальная шкала высот для β-го компонента, g – ускорение силы тяжести, z $(\equiv x_3)$ – высота.

Заметим, что в ряде работ по моделированию состава верхней атмосферы (см., например, (*Атмосфера. Справочник, 1991*, стр. 374; *Власов, Давыдов, 1982; Брюнелли, Намгаладзе, 1988*)) систематически употребляются неверные выражения для диффузионных скоростей $w_{\alpha z}$ компонентов смеси: в формуле (6.1.6) перед суммой, вместо множителя $1/n$, используется множитель $1/n_\alpha$.

Методами кинетической теории процессов тепло- массопереноса нами были получены (*Маров, Колесниченко, 1987*) выражения для термодиффузионных отношений $K_{T\alpha}$ в виде отношения определителей со сложными элементами, позволяющие рассчитать их в первом приближении теории Чепмена–Энскога через ключевые в кинетической теории разреженных газов величины – полные интегральные скобки Λ, т.е. без предварительного вычисления коэффициентов молекулярного обмена $D_{\alpha\beta}$ и $D_{T\alpha}$. Выражения для полных интегральных скобок Λ, являющихся алгебраическими функциями от приведенных интегралов столкновений частиц всех пар (Ω^* – интегралов, см. формулу (2.3.88)), приведены, например, в монографии (*Гиршфельдер и др., 1961*) до 4-го приближения включительно.

Многокомпонентные коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ в (6.1.1) могут быть найдены в общем случае из решения системы алгебраических уравнений (см.(2.3.80))

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}+\sum_{\substack{\delta=1\\ \delta\neq\alpha}}^{N}\frac{M_\beta}{M_\alpha}\frac{x_\alpha x_\delta}{\mathcal{D}_{\alpha\delta}}\right]D_{\gamma\beta}=c_\alpha-\delta_{\gamma\alpha},\quad(\alpha,\gamma=1,2,\ldots,N)\,, \tag{6.1.7}$$

связывающих коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ с коэффициентами диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ бинарных смесей. В частном случае смеси, состоящей из трех компонентов, уравнения (6.1.7) позволяют определить коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ в виде

$$D_{11}=\frac{n^2}{n_1\rho^2}\frac{n_1n_3M_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}+n_1n_2M_2^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}+(\rho-\rho_1)^2\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{12}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}},$$

$$D_{22}=\frac{n^2}{n_2\rho^2}\frac{n_2n_3M_3^2\mathcal{D}_{13}\mathcal{D}_{32}+n_2n_1M_1^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{13}+(\rho-\rho_2)^2\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{23}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}},$$

$$D_{33}=\frac{n^2}{n_3\rho^2}\frac{n_1n_3M_1^2\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{31}+n_3n_2M_2^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}+(\rho-\rho_3)^2\mathcal{D}_{32}\mathcal{D}_{13}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}},$$

$$D_{12}=\frac{n^2}{\rho^2}\frac{n_3M_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}-M_2(\rho_1+\rho_3)\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}-M_1(\rho_2+\rho_3)\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{12}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}},$$

$$D_{13}=\frac{n^2}{\rho^2}\frac{n_2M_2^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{21}-M_3(\rho_1+\rho_2)\mathcal{D}_{13}\mathcal{D}_{23}-M_1(\rho_1+\rho_3)\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{13}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}},$$

$$D_{32}=\frac{n^2}{\rho^2}\frac{n_1M_1^2\mathcal{D}_{13}\mathcal{D}_{21}-M_3(\rho_1+\rho_2)\mathcal{D}_{32}\mathcal{D}_{13}-M_2(\rho_1+\rho_3)\mathcal{D}_{21}\mathcal{D}_{32}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}}. \tag{6.1.8}$$

Формулы (6.1.8) для коэффициентов $D_{\alpha\beta}$ в существенно отличаются от несимметричных выражений для этих же коэффициентов, приведенных в цитируемой выше работе (*Власов, Давыдов, 1982*).

Однако в общем случае (в частности, когда в смеси присутствует более четырех или пяти компонентов) систему уравнений (6.1.7) затруднительно использовать для определения многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$, поскольку непосредственное обращение матриц в уравнениях (6.1.7) требует около N^3 арифметических операций на узел разностной сетки (*Оран, Борис, 1990*). К тому же, система дифференциальных уравнений, получающаяся после подстановки скоростей $w_{\alpha j}$ из (6.1.1) в соответствующие уравнения диффузии (2.1.58) для концентраций компонентов, оказывается не разрешенной относительно старших производных. Как известно, численная реализация подобных систем сопряжена с дополнительными трудностями. Поэтому, при решении аэрономических задач удобней иметь определяющие соотношения (6.1.1), разрешенные относительно диффузионных скоростей $w_{\alpha j}$ через термодинамические диффузионные силы $d_{\alpha j}$. Они записываются в форме соотношений Стефана–Максвелла, в которые, вместо коэффициентов многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$, входят коэффициенты диффузии в бинарных смесях газа $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ (2.3.86).

Соотношения Стефана-Максвелла для многокомпонентной диффузии. Для стратифицированной в поле силы тяжести смеси соотношения Стефана–Максвелла (2.3.96) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial n_\beta}{\partial z} = -\frac{n_\beta}{H_\beta} - \left(1+\alpha_{T\beta}\right)\frac{n_\beta}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\alpha J_{\beta z} - n_\beta J_{\alpha z}}{n\,\mathcal{D}_{\alpha\beta}}, \quad (\beta = 1,2,\ldots,N) \qquad (6.1.9)$$

Эти соотношения являются основными при дальнейшем анализе процессов многокомпонентной молекулярной диффузии в верхней атмосфере. Так как матрица коэффициентов сопротивления $R_{\alpha\beta} = (x_\alpha x_\beta / \mathcal{D}_{\alpha\beta})$, определяемая уравнениями (6.1.9), является вырожденной (см. (2.3.52) и (2.3.59)), то не все из N различных потоков диффузии могут быть независимыми. Необходимым дополнительным уравнением является условие

$$\sum_{\beta=1}^{N} M_\beta J_{\beta z} = 0. \qquad (6.1.5^*)$$

В случае прямого решения соотношений Стефана–Максвелла (6.1.9) относительно диффузионных потоков $J_{\alpha z}$ возникают те же трудности, что и при решении алгебраических уравнений (6.1.7) относительно коэффициентов $D_{\alpha\beta}$, т.е. из-за необходимости обращения матриц размерности $(N-1)^2$ количество необходимых арифметических операций возрастает пропорционально $(N-1)^3$. Это обстоятельство практически исключает возможность использования соотношений (6.1.9) без дополнительной модификации для смеси атмосферных газов с

большим числом компонентов ($N \geq 10$) .

Поэтому при определении диффузионных потоков из (6.1.9) удобно применять такие вычислительные процедуры (например, метод последовательных приближений), которые позволяют избежать необходимого обращения матриц (*Тирский, 1963*). Подобная итерационная процедура применительно к задаче расчета состава термосферы может быть осуществлена на основе следующей формы записи соотношений Стефана-Максвелла (6.1.9):

$$J_{\alpha z} = -\rho D_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{n_\alpha}{\rho}\right) + \delta J_{\alpha z}, \quad \frac{1}{D_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}},$$

$$\delta J_{\alpha z} \equiv n_\alpha D_\alpha \left[\frac{1}{n} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} \left(\frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}} - \frac{M_\beta}{M_\alpha \mathcal{D}_{\alpha\alpha}} \right) J_{\beta z} - \frac{\partial \ln \mathcal{M}}{\partial z} + \left(1 - \frac{M_\beta}{\mathcal{M}}\right) \frac{1}{H} - \alpha_{T\beta} \frac{\partial \ln T}{\partial z} \right], \quad 6.1.10)$$

где $H \equiv kT / \mathcal{M}g$ – локальная шкала высот для смеси в целом, $\mathcal{M} \equiv \rho / n$ – средняя молекулярная масса смеси, которая получается из (6.1.9) при использовании условия (6.1.5) – равенства нулю суммарного импульса компонентов смеси. Согласно формуле (6.1.10), поток диффузии α-компоненты зависит от состава и диффузионных потоков других компонентов; однако, так как для решения задач часто используются методы последовательных приближений, это обстоятельство не является существенным. Численный расчет по формуле (6.1.11) реализован далее с помощью метода Гаусса–Зейделя, при котором на каждом шаге по времени (глобальной итерации при решении стационарной задачи методом установления) выполняется только одна итерация (*Лапин и др., 1984*).

Следует заметить, что с точки зрения затрат машинного времени указанный метод практически эквивалентен методу расчета диффузионных потоков $J_{\alpha z}$ на основе обобщенного закона Фика, справедливого, как известно, только в приближении диффузии малой примеси, с эффективным коэффициентом диффузии Уилки :

$$J_{\alpha z} = -\rho D_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{n_\alpha}{\rho}\right), \quad \frac{1}{D_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N). \qquad (6.1.11)$$

В то же время, он свободен от существенных недостатков последнего, связанных, в частности, с невыполнением равенства (6.1.5*), что приводит в общем случае к заметному нарушению интегральных условий баланса масс для отдельных компонентов смеси. Однако, слабой стороной метода, основанного на соотношениях (6.1.10), является необходимость хранения в машинной памяти больших массивов – полей векторов $J_{\alpha z}$.

Молекулярный перенос энергии теплопроводностью. Молекулярная теплопроводность служит важным механизмом перераспределения тепловой энергии в термосфере, где ее роль в формировании высотного профиля температуры особенно велика. Полный молекулярный поток тепла многокомпонентной смеси,

определяемый соотношением (2.3.75), для стратифицированной атмосферы может быть записан в виде

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + p \sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha z} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha n_\alpha w_{\alpha z}, \qquad (6.1.12)$$

где $\lambda(T, n_1, \ldots, n_N)$ – молекулярный коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры и состава газа. Коэффициент λ для смеси многоатомных атмосферных газов с хорошей степенью точности может быть рассчитан по формулам (*Мэзон, Саксена, 1958*) :

$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha \boldsymbol{Eu}_\alpha \left(1 + 1.065 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{N} \frac{x_\beta}{x_\alpha} G^{\lambda}_{\alpha\beta} \right)^{-1}, \qquad (6.1.13)$$

$$\lambda_\alpha = \frac{25\sqrt{\pi M_\alpha \mathrm{k} T}}{32\pi\sigma_\alpha^2 \Omega_\alpha^{(2,2)*}} \frac{3\mathrm{k}}{2M_\alpha}, \qquad \boldsymbol{Eu}_\alpha = 0{,}115 + 0{,}354 \frac{C_{p\alpha}}{\mathrm{k}}, \qquad (6.1.14)$$

$$G^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left(\frac{2M_\beta}{M_\alpha + M_\beta} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta} \right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \right)^{1/2} \right]^2. \qquad (6.1.15)$$

где $\boldsymbol{Eu}_\alpha$ – поправка Эйкена для коэффициента λ_α теплопроводности чистого газа, учитывающая внутреннюю энергию реальных многокомпонентных молекул (в формулах (6.1.14) использованы те же обозначения, что и в разд. 2.3.6.).

В нижней термосфере Земли, на высотах 90÷120 км, знак производной

$$Q_T \equiv -\frac{\partial}{\partial z} \left(q_z - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha n_\alpha w_{\alpha z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - p \sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha z} \right), \qquad (6.1.16)$$

определящей приток или сток тепловой энергии за счет молекулярной теплопроводности (см. уравнение энергии (3.1.78)), положителен; в то же время, на высотах $z \geq 160$ км молекулярная теплопроводность способствует выхолаживанию термосферы ($Q_T < 0$) (*Гордиец и др., 1982*).

6.1.2. Турбулентные многокомпонентные потоки массы и энергии. На высотах $z \leq 120$ км в самой нижней части термосферы и в мезосфере Земли, наряду с молекулярной диффузией, важную роль играет турбулентное перемешивание. Поэтому здесь особенно важны механизмы турбулентной диффузии и теплопроводности, формирующие высотный профиль состава и температуры всей верхней атмосферы. На турбулентность оказывают влияние различные специфические для верхней атмосферы факторы, такие как многокомпонентность, перепад массовой плотности с высотой на несколько порядков, наличие аэрономических реакций, что приводит к появлению различных дополнительных эффектов (*Маров, Колесниченко, 1987*). Это не позволяет в общем случае воспользоваться

при моделировании атмосферных процессов тепло- и массопереноса результатами, полученными в рамках традиционного описания (*Монин, Яглом, 1965*) турбулентных течений однородной жидкости в гравитационном поле. В Гл.3, с использованием средневзвешенного осреднения Фавра, была получена система уравнений гидродинамики смеси для осредненных значений термогидродинамических параметров, пригодная для адекватного моделирования данных областей атмосферы планеты, а в § 3.3 выведены необходимые для замыкания этой системы реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии $J_{\alpha z}^{T}$ и тепла q_z^T .

При гидродинамическом описании динамического и термического состояния такой среды пространственный масштаб моделирования $L_{гидр} = |\nabla \ln \theta|^{-1}$, где θ – какой-либо структурный параметр, выбирается порядка километра в вертикальном направлении и сотен километров в горизонтальном направлении (*Брасье, Соломон, 1987*). Движения, пространственные масштабы которых значительно меньше указанных, при этом рассматриваются как диффузионные, приводящие к турбулентному перемешиванию, а не как упорядоченные движения в масштабе соответствующих расстояний.

Потоки турбулентной диффузии. В одномерном приближении выражение (3.3.3) для турбулентного потока диффузии $J_{\alpha z}^{T}$ принимает вид

$$J_{\alpha z}^{T} = -\overline{\rho} D^{T} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{n}_{\alpha}}{\overline{\rho}}\right), \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N), \tag{6.1.17}$$

причем потоки $J_{\alpha z}^{T}$ линейно зависимы (см. (3.1.29))

$$\sum_{\alpha=1}^{N} M_{\alpha} J_{\alpha z}^{T} = 0 . \tag{6.1.18}$$

Здесь D^T – коэффициент турбулентной диффузии в вертикальном направлении. Выражение для $J_{\alpha z}^{T}$ может быть преобразовано с учетом осредненного уравнения состояния многокомпонентной смеси (3.2.2) и уравнения гидростатики (3.3.4) к следующему удобному для численных расчетов виду

$$J_{\alpha z}^{T} = -\overline{\rho} D^{T} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{n}_{\alpha}}{\overline{\rho}}\right) = -D^{T}\left\{\frac{\partial \overline{n}_{\alpha}}{\partial z} + \overline{n}_{\alpha}\left(\frac{1}{<H>} + \frac{1}{<T>}\frac{\partial <T>}{\partial z} - \frac{1}{M^{*}}\frac{\partial M^{*}}{\partial z}\right)\right\}, \tag{6.1.19}$$

где $<H> \equiv \mathrm{k}<T>/M^{*}g = \overline{p}/\overline{\rho}g$ – средневзвешенное значение локальной шкалы высот для атмосферы в целом. Существенная роль последнего члена уравнения (6.1.19) в турбопаузе Земли, где осредненная молекулярная масса газовой смеси $M^{*} = \overline{\rho}/\overline{n}$ сильно изменяется с высотой, очевидна, хотя он отсутствует в работах (*Летто, 1951*; *Атмосфера. Справочник, 1990*). Еще раз отметим здесь, что коэффициент турбулентной диффузии D^T , в отличие от своего молекуляр-

ного аналога D_α, не является собственно характеристикой смеси, а зависит как от выбора пространственного масштаба осреднения турбулентного поля, так и вертикального гидродинамического переноса.

Турбулентный поток тепла. Ниже ~105 км нагрев атмосферного газа поглощаемым солнечным излучением и инициируемыми этим поглощением химическими процессами компенсируется турбулентной теплопроводностью. Полный поток тепловой энергии многокомпонентной смеси, переносимый турбулентностью, возникающий благодаря корреляции между пульсациями удельной энтальпии и среднемассовой скорости течения, для стратифицированной атмосферы можно записать в виде (см. (3.3.15*)):

$$q_z^T = \overline{p'V_z''} + \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J_{\alpha z}^T - \lambda^T \left(\frac{\partial < T >}{\partial z} + \frac{g}{< C_p >} \right), \qquad (6.1.20)$$

где $\lambda^T = \bar{\rho} < C_p > D^T$ – коэффициент турбулентной теплопроводности в вертикальном направлении. Скорость нагрева (охлаждения) многокомпонентной среды за счет переноса тепла турбулентной теплопроводностью, согласно уравнению (3.1.78) для внутренней энергии осредненного турбулизованного континуума, описывается формулой (*Чандра, Синха, 1974 ; Джонсон, 1975*)

$$Q_T^T \equiv -\frac{\partial}{\partial z}\left(q_z^T - \overline{p'V_z''} - \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > J_{\alpha z}^T \right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{\rho} < C_p > D^T \left(\frac{\partial < T >}{\partial z} + \frac{g}{< C_p >} \right) \right]. \qquad (6.1.21)$$

Отметим, что при устойчивой стратификации земной термосферы адиабатический градиент $\left(\partial < T > / \partial z + g / < C_p >\right) > 0$ и интеграл от величины Q_T^T по высоте всегда отрицателен; поэтому интегрально механизм турбулентной теплопроводности охлаждает термосферу. Тем не менее, на отдельных высотах в термосфере знак величины Q_T^T может быть произвольным. Поскольку вблизи мезопаузы $\left|\partial <T> / \partial z\right| << g / <C_p>$, то из (6.1.21) следует, что знак Q_T^T определяется здесь знаком производной $\partial(\bar{\rho} D^T) / \partial z$, на что было обращено также внимание в работе (*Гордиец, Куликов, 1982*).

Турбулентный нагрев газа. Исходя из предположения, что турбулентность обусловлена внутренними гравитационными волнами, вязкая диссипация турбулентной энергии должна приводить к динамическому нагреву мезосферы и нижней термосферы, причем скорость нагрева сопоставима со скоростью нагрева солнечной радиацией (*Хайнс, 1965)*. Это предположение было в дальнейшем подтверждено в целом ряде работ (*Ропер,1966; Джустус, 1967, 1969; Джустус, Ропер, 1968; Розенберг , 1968; Гаврилов,1974*)).

Получим здесь алгебраическое выражение для локальной скорости нагревания $Q_{<e>}^T$ многокомпонентного турбулентного течения, обусловленного диссипацией энергии турбулентности как за счет молекулярной вязкости, так и за счет работы турбулентных пульсаций давления против сил плавучести. С этой целью рассмотрим локально-равновесное приближение эволюционного уравнения пе-

реноса турбулентной энергии (4.2.28), которое в одномерном случае приобретает вид

$$\overline{\rho}\frac{D<e>}{Dt}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\rho e V_z''}+\overline{p' V_z'}-\overline{\pi_{iz}' V_i'}\right)\approx 0 =$$

$$= R_{iz}\frac{\partial}{\partial z}<V_i>+\overline{p'\partial V_z'/\partial z}\;-J^T_{(v)z}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}-\overline{\rho}\varepsilon_e\,. \qquad (6.1.22)$$

Здесь $J^T_{(v)z}$ – турбулентный поток удельного объема в вертикальном направлении, определяемый соотношением (4.2.28)

$$J^T_{(v)z} = \frac{<R^*>}{<C_p>\overline{p}}J^{T*}_{qz}+\frac{\mathrm{k}<T>}{\overline{p}}\sum_{\alpha=1}^{N}J^T_{\alpha z}\,, \qquad (6.1.23)$$

где $J^{T*}_{qz} = q^T_z-\overline{p'V_z''}-\sum_{\alpha=1}^{N}<h_\alpha>J^T_{\alpha z}=-\lambda^T\left(\frac{\partial<T>}{\partial z}+\frac{g}{<C_p>}\right)$ – приведенный поток тепла (см. формулу (3.3.10)). Из (6.1.22) следует, что в локально-равновесном приближении, которое имеет место при некотором критическом значении $\boldsymbol{Rf}_c$ динамического числа Ричардсона, скорость накачки энергии от сдвигового ветра $R_{iz}\partial<V_i>/\partial z$ равна скорости диссипации турбулентной энергии $\overline{\rho}\varepsilon_e$ и работе турбулентных пульсаций давления против сил плавучести $J^T_{(v)z}\partial\overline{p}/\partial z$.

Из (6.1.22) следует, что объемная скорость турбулентного нагрева атмосферы $Q^T_{<e>}\equiv\overline{\rho}\varepsilon_e+J^T_{(v)z}\partial\overline{p}/\partial z\;-\overline{p'\partial V_z''/\partial z}$ (см. уравнение баланса (3.1.78) для осредненной внутренней энергии среды) может быть в стационарном состоянии записана в виде

$$Q^T_{<e>}\approx R_{iz}\partial<V_i>/\partial z\,,\quad (i=1,2) \qquad (6.1.24)$$

При использовании критического значения $\boldsymbol{Rf}_c$ динамического числа Ричардсона (формула (4.2.32))

$$\boldsymbol{Rf}=\frac{\left(\frac{<R^*>}{<C_p>\overline{p}}\right)\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}J^{T*}_{qz}}{R_{iz}\frac{\partial}{\partial z}<V_i>}\cong\frac{\frac{g}{<T>}\left(\frac{\partial<T>}{\partial z}+\frac{g}{<C_p>}\right)}{\boldsymbol{Pr}^T\left[\left(\partial<V_x>/\partial z\right)^2+\left(\partial<V_y>/\partial z\right)^2\right]}=\frac{\boldsymbol{Ri}}{\boldsymbol{Pr}^T}\,, \qquad (6.1.25)$$

при котором поддерживается локально-равновесный режим турбулентности, формула (6.1.24) запишется следующим образом

$$Q^T_{<e>}=\frac{1}{\boldsymbol{Rf_c}}D^T\frac{g}{<T>}\left(\frac{\partial<T>}{\partial z}+\frac{g}{<C_p>}\right). \qquad (6.1.26)$$

Необходимые для расчета $Q^T_{<e>}$ величины $\boldsymbol{Pr}^T$ и $\boldsymbol{Ri}_c$ должны быть получены из эксперимента. Для земной термосферы, согласно измерениям (*Джустус, 1967*), $1/\boldsymbol{Pr}^T$ =0.3; число $\boldsymbol{Ri}_c$, согласно оценкам (*Гордиец и др., 1976*), изменяется в пределах 0.66–2 .

Аналогично, при учете влияния стратификации состава смеси атмосферных газов на турбулентность и использовании критического значения $\boldsymbol{Ko}_c$ динамического числа Колмогорова (формула (4.2.34))

$$\boldsymbol{Kf} = \frac{M^* g \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha z}}{R_{iz}\partial < V_i > /\partial z} \cong \frac{g\dfrac{\partial}{\partial z}(\ln M^*)}{\boldsymbol{Sc}^T\left[\left(\partial < V_x > /\partial z\right)^2 + \left(\partial < V_y > /\partial z\right)^2\right]} = \frac{\boldsymbol{Ko}}{\boldsymbol{Sc}^T} \qquad (6.1.27)$$

(где $\boldsymbol{Ko}$ – градиентное число Колмогорова, а $\boldsymbol{Sc}^T = \nu^T / D^T$ – турбулентное число Шмидта выражение для $Q^T_{<e>}$ принимает вид

$$Q^T_{<e>} = \frac{1}{\boldsymbol{Kf}_c} D^T \frac{g}{M^*}\left(\frac{\partial M^*}{\partial z}\right). \qquad (6.1.28)$$

Заметим, что в рассматриваемом здесь случае $\boldsymbol{Sc}^T = \boldsymbol{Pr}^T$, поскольку, как обычно, предполагается, что $\boldsymbol{Le}^T = \chi^T / D^T = \lambda^T / \bar{\rho} D^T < C_P >= 1$.

При использовании критических значений чисел Ричардсона и Колмогорова ($\boldsymbol{Rf}_c$ и $\boldsymbol{Kf}_c$), для объемной скорости диссипации ε_e турбулентной энергии за счет молекулярной вязкости, с учетом формул (6.1.25) и (6.1.27) и уравнения (6.1.22), можно получить

$$\varepsilon_e = R_{iz}\frac{\partial < V_i >}{\partial z}\left(1 - \boldsymbol{Rf}_c - \boldsymbol{Kf}_c\right) = \frac{gD^T}{< T >}\left(\frac{\partial < T >}{\partial z} + \frac{g}{< C_p >}\right)\frac{1 - \boldsymbol{Rf}_c - \boldsymbol{Kf}_c}{\boldsymbol{Rf}_c} =$$

$$= gD^T \frac{\partial(\ln M^*)}{\partial z}\frac{1 - \boldsymbol{Rf}_c - \boldsymbol{Kf}_c}{\boldsymbol{Kf}_c} . \qquad (6.1.29)$$

Эта формула может служит основой при экспериментальном определении коэффициента турбулентной диффузии D^T путем измерения величины ε_e (*Джустус, 1967*).

§ 6.2. Моделирование нижней термосферы Земли

К нижней термосфере относится область гомопаузы в верхней атмосфере планеты, где одинаково важную роль играют конкурирующие процессы молекулярного и турбулентного тепло- и массопереноса. Моделирование этой области сопряжено с определенными трудностями, поскольку требует учета многих факторов, для которых теоретические предпосылки, суммированные в предыдущем параграфе, должны быть дополнены необходимой экспериментальной информацией. К последней относится, в частности, аппроксимация эффективного коэф-

фициента турбулентного обмена D^T, параметризующего динамические эффекты. До последнего времени, при моделировании многокомпонентной турбулентности в атмосфере, он использовался как единственный коэффициент турбулентного переноса при заданном турбулентном числе Прандтля–Шмидта $\boldsymbol{Pr}^T = \nu^T / D^T = \nu^T / \chi^T$, являющимся, по предположению, приблизительно постоянным в широком интервале высот. При таком подходе коэффициент D^T (наряду с динамическим числом Ричардсона $\boldsymbol{Rf}$) служит параметром согласования расчетных данных и данных, полученных по результатам наблюдений.

Существуют и некоторые другие эмпирические и полуэмпирические способы определения коэффициента D^T, а также числа $\boldsymbol{Pr}^T$ применительно к верхним атмосферам планет (см., например, (*Роупер, 1966, 1974; Джустус, 1967, 1969; Ллойд и др., 1972; Рис и др., 1972; Изаков, 1978; Гордиец, Куликов, 1981; Сасси, Висконти, 1990*)). Известно, в частности, что одним из важнейших механизмов, ответственных за поддержание турбулентности в этих средах, служит ветровой сдвиг осредненого движения. Вариации ветрового сдвига на высотах земной турбопаузы могут быть связаны, в частности, с диссипацией приходящих снизу акустико-гравитационных волн (*Хайнс, 1965; Джустус, 1969; Гаврилов, 1974; Гаврилов, Швед, 1975; Гинзбург, Кузин, 1981;*), при которой их энергия и количество движения преобразуются в тепло и кинетическую энергию среднего течения. В этом случае расчет коэффициентов турбулентного обмена для стратифицированных струйных течений многокомпонентных газовых смесей связан с определенной спецификой (*Колесниченко, Маров, 1980, 1985; Колесниченко, Васин, 1984*).

При создании глобальной модели верхней атмосферы планеты, предназначенной для исследования крупномасштабных динамических процессов и самосогласованно описывающей термосферный ветер, газовый состав и температурный режим, необходимо знание не только молекулярных, но и турбулентных коэффициентов обмена, входящих в определяющие соотношения (3.3.3*), (3.3.15*), и (5.2.19) для турбулентных потоков. Высотный ход этих коэффициентов оказывает существенное влияние на динамику атмосферы, на распределение отдельных газовых компонентов и на температуру. От пространственного распределения коэффициентов турбулентного обмена λ^T и ν^T зависит, в частности, относительная эффективность двух основных проявлений турбулизации потока в области нижней термосферы: охлаждение ее за счет турбулентной теплопроводности или нагрев за счет диссипации турбулентной энергии под воздействием эффектов молекулярной вязкости (*Изаков, 1978; Колесниченко, Маров, 1979*).

Разработке глобальных аэрономических моделей уделяется в настоящее время большое внимание, и на этом пути достигнут существенный прогресс. Совершенствование таких моделей, некоторые из которых упомянуты в Гл. 1 (см., например, (*Дикинсон и др., 1984; Боуже и др., 1988*)), обычно достигается как за счет большей размерности, так и полноты учета химических процессов и энергообмена, но при этом не меняется принципиальный подход к аппроксимации эффектов турбулентного тепло- и массообмена. Другими словами, с учетом очевидных трудностей моделирования процессов крупно- и мелкомасштабной динамики на одном уровне точности, сохраняет свою силу подход, при котором динамические эффекты параметризуются за счет эффективного коэффициента

(тензора) турбулентной диффузии D^T. Приведенная ниже одномерная модель, основанная на подобной идеологии и предыдущих работах авторов, не претендует на полноту, а лишь служит целям иллюстрации соответствующего подхода. В следующей главе предпринята попытка конкретизации этого понятия, опираясь на полученные нами теоретические результаты описания турбулентности многокомпонентных реагирующих сред.

6.2.1. Система дифференциальных уравнений модели. При численном моделировании земной гомопаузы будем исходить из системы осредненных гидродинамических уравнений смеси, включающих в себя уравнение неразрывности для континуума в целом (3.2.4); диффузионные уравнения (3.2.5) для отдельных химических компонентов среды, учитывающие аэрономические реакции и процессы молекулярной и турбулентной диффузии; реологические соотношения Стефана–Максвелла типа (5.3.23) для осредненных молекулярных диффузионных потоков; уравнение для внутренней энергии осредненного турбулизованного континуума (3.1.78); гидростатическое уравнение (3.3.4); и осредненное уравнение состояния для давления (3.2.2).

В одномерном приближении, достаточном для указанной цели, данные уравнения принимают следующий вид:

1). уравнение неразрывности для газа в целом

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial(1/\bar{\rho})}{\partial t}+<V_z>\frac{\partial(1/\bar{\rho})}{\partial z}\right)=\frac{\partial<V_z>}{\partial z}, \qquad (6.2.1)$$

где $<V_z>$ – вертикальная компонента гидродинамической скорости;

2). уравнения для концентраций компонентов нейтрального газа

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial(\bar{n}_\alpha/\bar{\rho})}{\partial t}+<V_z>\frac{\partial(\bar{n}_\alpha/\bar{\rho})}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{J}_{\alpha z}+J^T_{\alpha z}\right)=P_\alpha-\bar{n}_\alpha L_\alpha, \qquad (6.2.2)$$

$$(\alpha=1,2,\ldots,N-1)$$

где величины P_α и $\bar{n}_\alpha L_\alpha$ обозначают, соответственно, скорости образования и исчезновения частиц сорта α вследствие фотохимических и химических реакций;

3). осредненные соотношения Стефана–Максвелла для описания многокомпонентной молекулярной диффузии

$$\frac{\partial\bar{n}_\alpha}{\partial z}=-\frac{\bar{n}_\alpha}{\bar{H}_\alpha}-\left(1+\bar{\alpha}_{T\alpha}\right)\frac{\bar{n}_\alpha}{<T>}\frac{\partial<T>}{\partial z}+\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\bar{n}_\beta\bar{J}_{\alpha z}-\bar{n}_\alpha\bar{J}_{\beta z})}{\bar{n}\,\bar{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}}, \quad (\alpha=1,2,\ldots,N-1); \qquad (6.2.3)$$

где индекс α относится к компонентам O, O_2, N_2, H, He, Ar;

4). гидростатическое уравнение

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=-\bar{\rho}g\ ; \qquad (6.2.4)$$

5). уравнение состояния смеси совершенных газов

$$\bar{p} = \mathrm{k} < T > \sum_{\beta=1}^{N} \bar{n}_{\beta} ; \qquad (6.2.5)$$

6). Уравнение теплового баланса

$$\bar{\rho} < C_p > \left(\frac{\partial < T >}{\partial t} + < V_z > \frac{\partial < T >}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{q}_z + q_z^{T*} - \sum_{\beta=1}^{N} < h_{\beta} > (\bar{J}_{\beta z} + J_{\beta z}^{T}) \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + < V_z > \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) + \bar{\pi}_{iz} \frac{\partial < V_i >}{\partial z} - \frac{\partial < T >}{\partial z} \sum_{\beta=1}^{N} C_{p\alpha} (\bar{J}_{\beta z} + J_{\beta z}^{T}) + Q_{\odot}^{uv} + Q_{< e >}^{T} + Q_L + Q_{don} , \qquad (6.2.6)$$

где величина $q_z^{T*} \equiv q_z^T - \overline{p' V_z''}$ определяет турбулентный поток тепла в вертикальном направлении (см. формулу (3.1.54)); $Q_{\odot}^{uv}$ – скорость (функция) нагревания нейтрального газа солнечной *УФ*-радиацией за счет совместного вклада в энергетику среды радиационных процессов и химических реакций; Q_L – скорость охлаждения нейтрального газа вследствие *ИК*-излучения; $Q_{< e >}^{T}$ – источник тепла за счет диссипации турбулентной энергии (см. формулу (6.1.26)) ; Q_{don} – дополнительные источники и стоки тепла. Методика построения функции нагревания для различных газовых смесей, а также различные дополнительные источники и стоки тепла, подробно рассмотрены в монографии авторов (*Маров, Колесниченко, 1987*). В свою очередь, членом Q_L учитывается излучение в области длин волн 1÷20 мкм, в первую очередь в колебательно-вращательных полосах 5.3 и 15 мкм молекул *NO* и CO_2; этот вклад в энергетическое уравнение для земной атмосферы изучен в работах (*Гордиец и др., 1982; Гордиец, Куликов, 1982*).

Потоки $\bar{q}_z$, $J_{\alpha z}^{T}$, q_z^{T} определялись, соответственно, формулами (6.1.12), (6.1.19) и (6.1.20). При расчетах величины $Q_{< e >}^{T}$ (см. формулу (6.1.26)) использовался высотный профиль критического динамического числа Ричардсона (6.1.25), полученный с использованием осредненного по высоте параметра $(\boldsymbol{Pr}^{T})^{-1} = 0{,}3$ (*Джустус, 1967*) и, в качестве внешнего параметра задачи, модуль горизонтальной скорости ветра $\sqrt{\left(\partial < V_x > /\partial z\right)^2 + \left(\partial < V_y > /\partial z\right)^2}$, основанный на экспериментальных данных (например, (*Розенберг, 1968*)).

6.2.2. Граничные и начальные условия. Система гидродинамических уравнений масштаба среднего движения (6.2.1)–(6.2.6) является замкнутой системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных для нахождения осредненной вертикальной составляющей $< V_z >$ среднемассовой скорости, осредненных числовых плотностей $\bar{n}_{\beta}$ химических компонентов смеси, осредненной среднемассовой плотности $\bar{\rho}$ и осредненной температуры $< T >$ смеси реагирующих атмосферных газов. Частное решение системы опре-

деляется начальными условиями, набором химических компонентов и их газодинамическими, термофизическими, химическими свойствами и граничными условиями.

Граничные условия выбирались следующим образом:

а) На нижней границе (z =70 км) значения температуры и числовых концентраций задавались из стандартной модели атмосферы MSISE 90 (*Хедин, 1991*):

$$< T >|_{z=70} = T_{MSISE\,90}, \quad \bar{n}_\beta\big|_{z=70} = n_\beta\big|_{MSISE\,90}, \quad \bar{p}\big|_{z=70} = p\big|_{MSISE\,90}, \tag{6.2.7}$$

а для атомарного кислорода – из условия фотохимического равновесия (см.(2.1.58*)):

$$\partial \bar{n}(0)/\partial t = P(0) - \bar{n}(0)L(0) = 0\ ; \tag{6.2.8}$$

б) На верхней границе (z =400 км) предполагалось, что, вследствие большой температуропроводности среды $\chi = \lambda / \bar{\rho} < C_p >$, вертикальный градиент температуры обращается в нуль. Граничное условие на вертикальную скорость ветра ставилось с учетом условия отсутствия потока массы через верхнюю границу. Моделирование условия $\lim_{z\to\infty} \bar{\rho} < V_z > = 0$ требует знания асимптотического поведения параметров $\bar{\rho}$ и $< V_z >$ на бесконечности: для $\bar{\rho}$ – это экспоненциальное убывание с высотой, а величина $< V_z >$, должна линейно стремиться к бесконечности, т.е. вторая производная скорости по высоте должна быть равной нулю (*Изаков и др., 1972; Морозов, Красицкий, 1978*). Таким образом, при $z = 400$ км использовались следующие граничные условия:

$$\partial^2 < V_z > /\partial z^2\big|_{z=400} = 0, \qquad \partial < T > /\partial z\big|_{z=400} = 0. \tag{6.2.9}$$

Кроме того, предполагалось, что на верхней границе все газы находятся в состоянии гравитационно-диффузионного равновесия (см. (2.3.96))

$$\frac{\partial \bar{n}_\alpha}{\partial z} + \frac{\bar{n}_\alpha}{H_\alpha} = 0, \qquad \alpha = O,\ O_2, N_2,\ H,\ He,\ Ar\ . \tag{6.2.10}$$

Следует отметить, что для водорода и гелия условие отсутствия диффузионного потока вещества через верхнюю границу не вполне корректно из-за наличия диссипации (убегания). Детальное описание этого явления связано с необходимостью задания потока этих компонентов через верхнюю границу. Вместе с тем, как показали расчеты высотного распределения атмосферных составляющих, различия в значениях концентраций (например, *n(H)* на высоте 140 км), вычисленных с нулевым диффузионным потоком и с учетом диссипации, равной $2\cdot10^7$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$, составляют менее 10% (*Шимазаки, 1972*).

Наконец, начальные условия также задавались из модели (*Хедин, 1991*); важно однако, подчеркнуть, что решение, получаемое методом установления, не зависит от начальных условий.

6.2.3. Коэффициенты переноса. В расчетах использовались полуэмпирические выражения для коэффициентов бинарной диффузии (табл. 6.2.1), описывающие изменение $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ в широком диапазоне термосферных температур (*Оран, Борис,1990*). Факторы термодиффузии, слабо изменяющиеся с высотой в интервале $120 \le z \le 250$ км, предполагались равными: $\alpha_T(O_2) = 0.12$; $\alpha_T(N_2) = 0.08$; $\alpha_T(O) = -0.08$; $\alpha_T(H) = -0.38$; $\alpha_T(He) = -0.27$; $\alpha_T(Ar) = 0{,}17$ (*Бэнкс, Кокарц, 1973*).

Таблица 6.2.1

Коэффициенты бинарной диффузии

Смесь	$\mathcal{D}_{\alpha\beta}$,см^2·с$^{-1}$	Смесь	$\mathcal{D}_{\alpha\beta}$,см^2·с$^{-1}$
$O_2 - N_2$	$0.829\cdot10^{17}\cdot T^{0.724}\cdot n^{-1}$	$O - He$	$3.43\cdot10^{17}\cdot T^{0.749}\cdot n^{-1}$
$O_2 - He$	$3.21\cdot10^{17}\cdot T^{0.710}\cdot n^{-1}$	$O - Ar$	$0.551\cdot10^{17}\cdot T^{0.841}\cdot n^{-1}$
$O_2 - Ar$	$0.717\cdot10^{17}\cdot T^{0.736}\cdot n^{-1}$	$N_2 - He$	$1.16\cdot10^{20}\cdot T^{0.524}\cdot n^{-1}$
$O - N_2$	$0.969\cdot10^{17}\cdot T^{0.774}\cdot n^{-1}$	$N_2 - Ar$	$0.663\cdot10^{17}\cdot T^{0.752}\cdot n^{-1}$
$O - O_2$	$0.969\cdot10^{17}\cdot T^{0.774}\cdot n^{-1}$	$N_2 - H$	$6.10\cdot10^{17}\cdot T^{0.732}\cdot n^{-1}$

Коэффициент турбулентной диффузии. Существуют различные экспериментальные оценки коэффициента турбулентной диффузии D^T, получаемые обычно с помощью соотношений типа (6.1.29) путем прямого измерения скорости диссипации энергии турбулентности ε_e в атмосфере (*Роупер, 1966; Джустус, 1967; Джустус, Роупер, 1968; Розенберг, 1968*). В расматриваемой модели для высотной зависимости коэффициента турбулентной диффузии $D^T(z)$ можно использовать, например, выражение (*Шимазаки, 1971*):

$$\begin{cases} D^T(z) = D_m^T \exp\left[-S_1(z - z_m)^2\right], & z \ge z_m \\ D^T(z) = \left(D_m^T - D_0^T\right)\exp\left[-S_2(z - z_m)^2\right] + D_0^T \exp\left[S_3(z - z_m)\right], & z \le z_m \end{cases} \quad (6.2.11)$$

где D_m^T, D_0^T, z_m, S_1, S_2, S_3 – эмпирические константы; z – высота в километрах; z_m – высота достижения максимума D^T, которая варьировалась в пределах 85–105 км; D_m^T – максимальное значение коэффициента D^T, которое достигается на высоте z_m; $D_m^T = 10^6 \div 10^7$ см^2·с$^{-1}$. В расчетах использовались следующие значения : $D_0^T = 2\cdot10^6$ см^2·с$^{-1}$, $S_1 = S_2 = 0.05$ км$^{-1}$, $S_3 = 0.07$ км$^{-1}$ (*Чандра, Синха, 1976*).

Очевидно, приведенные значения параметров z_m и D_m^T следует рассматривать как ориентировочные. По результатам ряда измерений коэффициент D^T возрастает с ростом солнечной активности, а также от лета к зиме и заключен в

интервале значений $10^5 \div 10^7$ см$^2\cdot$с$^{-1}$ на высотах мезосферы и нижней термосферы. В то же время, по другим косвенным оценкам D^T имеет обратный сезонный ход и достигает максимума на средних и высоких широтах, причем сезонно-широтные вариации z_m и D_m^T находятся в следующих интервалах численных величин: $z_m \approx 90-110$ км, $D_m^T = 10^6$–10^7 см$^2\cdot$с$^{-1}$ (*Данилов, Калгин, 1992*).Можно предположить, что учет меридиональной циркуляции снимает противоречие относительно сезонного хода коэффициента турбулентной диффузии и,кроме того, позволяет утверждать, что турбулентность в области гомопаузы сильнее развита зимой, чем летом.

Коэффициент молекулярной теплопроводности. Для коэффициента молекулярной теплопроводности смеси атмосферных газов использовалось следующее полуэмпирическое выражение (*Бэнкс, Кокартц, 1973*)

$$\lambda = \frac{1}{\bar{n}} \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha \bar{n}_\alpha < T >^{0.69}, \qquad (6.2.12)$$

где $b(O_2) = b(N_2) = 56, \quad b(O) = 75.9, \quad b(H) = 379, \quad b(He) = 299.$

6.2.4. Ионизация, диссоциация и поглощение атмосферными компонентами. Ослабление потока солнечной *УФ*-радиации происходит за счет фотодиссоциации и фотоионизации атмосферных компонентов. Относительную долю этой энергии, переходящую в конечном счете в нагревание нейтрального газа, или так называемую эффективность солнечного нагрева, приближенно можно записать в виде (*Маров, Колесниченко, 1987*)

$$Q_\odot^{uv} \approx \varepsilon^{dis} \sum_{\lambda<\lambda_{d\alpha}} h\nu q_{d\alpha}^{\lambda} + \varepsilon^{ion} \sum_{\lambda<\lambda_{i\alpha}} h\nu q_{i\alpha}^{\lambda}. \qquad (6.2.13)$$

Здесь $h\nu$ – энергия фотона; $q_{d\alpha}^{\lambda}$ и $q_{i\alpha}^{\lambda}$ – скорости диссоциации и ионизации α-й газовой компоненты излучением с длиной волны λ, определяемые соответственно выражениями

$$q_{d\alpha}^{\lambda} = I_{\lambda\infty}\sigma_{d\alpha}^{\lambda}\bar{n}_\alpha \exp(-\tau_\lambda), \quad q_{i\alpha}^{\lambda} = I_{\lambda\infty}\sigma_{i\alpha}^{\lambda}\bar{n}_\alpha \exp(-\tau_\lambda), \qquad (6.2.14)$$

$\lambda_{d\alpha}, \lambda_{i\alpha}$ – соответствующие пороговые длины волн; $I_{\lambda\infty}$ – интенсивность солнечного излучения на верхней границе атмосферы; $\sigma_{d\alpha}^{\lambda}, \sigma_{i\alpha}^{\lambda}$ – соответственно, сечения ионизации и диссоциации для частиц сорта α; ε^{dis} и ε^{ion} представляют собой эффективности, соответственно, для диссоциирующего и ионизирующего излучений. Оптическая толща τ_λ выражается в виде

$$\tau_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_{a\alpha}^{\lambda} \int_z^\infty \bar{n}_\alpha ds, \qquad (6.2.15)$$

где $\sigma_{a\alpha}^{\lambda}$ – сечение поглощения падающего излучения α-й компонентой; интегрирование производится вдоль пути светового луча s от бесконечности до заданной точки на некоторой высоте z. Значения нтенсивности солнечного излучения на верхней границе атмосферы, а также сечения поглощения, ионизации и диссоциации приведены, например, в работах (*Метеорология и атомная энергия, 1971; Меллор, Херринг, 1973; Торр и др., 1979, 1985; Тобиска, 1990, 1991, 1993*).

В случае распределения атмосферных компонентов по барометрической формуле, для оптической толщи τ_λ имеет место следующее приближенное соотношение (*Маров, Колесниченко, 1987*)

$$\tau_\lambda \cong \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_{a\alpha}^{\lambda} \bar{n}_\alpha H_\alpha Ch(X_\alpha, \chi_\odot) \qquad (6.2.16)$$

где $Ch(X_\alpha, \chi_\odot)$ – функция Чепмена; $X_\alpha \equiv (R_{pl} + z)/H_\alpha$; $H_\alpha \equiv kT/M_\alpha g$ – локальная шкала высот для α-го компонента; $\chi_\odot$ – зенитный угол Солнца, являющийся функцией локального времени, широты и сезона:

$$\cos\chi_\odot = \cos\delta_\odot \cos\varphi \cos\Theta_t + \sin\delta_\odot \sin\varphi \qquad (6.2.17)$$

$\delta_\odot$ – склонение Солнца; φ – широта; Θ_t – часовой угол, задаваемый формулой

$$\Theta_t = S + \Omega t - \alpha_\odot; \qquad (6.2.18)$$

S – звездное время в гринвичскую полночь; Ω – угловая скорость вращения Земли $(2\pi/86400)$; t – локальное (местное) время; $\alpha_\odot$ – прямое восхождение Солнца; R_{pl} – радиус планеты. Звездное время S, склонение $\delta_\odot$ и прямое восхождение $\alpha_\odot$ Солнца вычислялись по формулам (*Маров и др., 1989*).

Солнечная радиация с длинами волн короче $\propto 1000\ \overset{o}{A}$, вызывающая ионизацию основных составляющих атмосферы на высотах 100–300 км, ответственна за образование ионосферы. Возникающие в процессе ионизации фотоэлектроны теряют избыточную энергию при упругих и неупругих соударениях и вызывают возбуждение молекул. Часть энергии при этом переходит в тепло, образуя основной источник нагревания термосферы Земли (*Маров, Колесниченко, 1987*). В свою очередь, солнечная радиация в интервале длин волн $1000 < \lambda < 2200\ \overset{o}{A}$ поглощается, главным образом, молекулярным кислородом, в то время как более длинноволновая часть спектра – озоном. Сечения поглощения этих двух нейтральных компонентов, в основном, определяют фотодиссоциацию нейтральной атмосферы. При этом сечение поглощения молекулярного кислорода изменяется в широких пределах: от $\propto 10^{-24}$ на длине волны $2420\,\overset{o}{A}$ до максимального значения $\propto 10^{-17}$ см^2 вблизи $\lambda \propto 1450\ \overset{o}{A}$. С этим ходом связано существование на определенных интервалов высот характерного поглощения в континууме Шумана–Рунге ($1310 < \lambda < 1750\ \overset{o}{A}$) в нижней термосфере, в полосах Шумана–Рунге

($1750 < \lambda < 2100\,\overset{o}{A}$) в мезосфере и в континууме Герцберга ($2100 < \lambda < 2400\,\overset{o}{A}$) в стратосфере. В табл. 6.2.2. приведены используемые в работе сечения диссоциации O_2 и потоки солнечной *УФ*-радиации.

Таблица 6.2.2

Сечения диссоциации и потоки солнечной УФ-радиации

$\Delta\lambda$, $\overset{o}{A}$	$I_{\lambda\infty}$, см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$	$\sigma_a(O_2) = \sigma_d(O_2)$, см^2	$\Delta\lambda$, $\overset{o}{A}$	$I_{\lambda\infty}$, см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$	$\sigma_a(O_2) = \sigma_d(O_2)$, см^2
1200 – 1250	1.0 + 10	4.7–18	1800–1850	6.7	3.3–20
1215.67	2.7 + 11	1.5–20	1850–1900	1.0 + 12	4.7–21
1250 – 1300	4.7 + 09	4.4–19	1900–1950	1.6	6.0–22
1300 – 1350	1.5 + 10	2.0–18	1950–2000	2.8	6.7–23
1350 – 1400	9.5 + 09	1.1–17	2000–2050	4.1	7.4–24
1400 – 1450	1.2 + 10	1.4	2050–2100	7.4	7.0
1450 – 1500	2.0	1.3	2100–2150	1.8 + 13	6.2
1500 – 1550	3.6	1.0	2150–2200	2.2	5.3
1550 – 1600	4.0	6.6–18	2200–2250	3.1	4.2
1600 – 1650	6.5	3.5	2250–2300	3.4	3.3
1650 – 1700	1.3 + 11	1.5	2300–2350	3.4	2.4
1750 – 1750	2.4	5.4–19	2350–2400	3.4	1.7
1750 – 1800	4.3	1.3	2400–2450	4.2	1.2

Примечание. Порог диссоциации O_2 *равен 2423.7* $\overset{o}{A}$.

Следует подчеркнуть, что радиационный перенос в полосах Шумана–Рунге ($1750–2000\,\overset{o}{A}$) для O_2 имеет достаточно сложный характер. Поэтому, для упрощения расчетов скорости фотодиссоциации J_{SRB} можно использовать аппроксимационные формулы (*Николе, 1984*), которые дают точность ±10%, когда столб молекул меньше чем 10^{19} см$^{-2}$, и точность ±15%, когда столб молекул O_2 больше 10^{19} см$^{-2}$; при этом в термосфере $J_{SRB} = 1.1\cdot10^{-7}\exp\left[-1.97\cdot10^{-10}N(O_2)^{0.522}\right]$с$^{-1}$ для $N(O_2) \le 1\cdot10^{19}$ см$^{-2}$ и в мезосфере $J_{SRB} = 1.45\cdot10^{-8}N(O_2)^{-0.83}$ с$^{-1}$ для $N(O_2) \ge 1\cdot10^{19}$ см$^{-2}$.

В модели использовалась сравнительно простая схема фотохимических

процессов, включающая (J и k – коэффициенты скоростей реакций):

диссоциацию O_2 за счет солнечной радиации в интервале 2200–2400 $\overset{o}{A}$:

$$O_2 + h\nu \rightarrow O + O\ ; \qquad (J_1)$$

реакцию рекомбинации атомарного кислорода при тройном столкновении

$$O + O + M \rightarrow O_2 + M\ , \qquad (k_1)$$

причем $k_1 = 4.7 \cdot 10^{-33} (< T > / 300)^{-2}\, см^6 \cdot с^{-1}$;

реакцию рекомбинации O и O_2 в тройном столкновении

$$O + O_2 + M \rightarrow O_3 + M\ , \qquad (k_2)$$

причем $k_2 = 6.0 \cdot 10^{-34} (< T > / 300)^{-2\,3}\, см^6 \cdot с^{-1}$;

реакцию диссоциации O_3 за счет солнечной радиации

$$O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O\ ; \qquad (J_2)$$

реакцию

$$O_3 + O \rightarrow O_2 + O_2 \qquad (k_3)$$

причем $k_3 = 8.8 \cdot 10^{-12} \exp(-2060 / < T >) см^3 \cdot с^{-1}$.

Значения коэффициентов k_1, k_2 и k_3 были взяты согласно (*Лабор. реакт. движ.,1987*). Оценки показали, что время жизни атомов O на высотах около 100 км, где скорость образования атомарного кислорода максимальна, намного превышает сутки, экспоненциально возрастая с высотой.

6.2.5. Результаты расчетов состава атмосферы. Одномерные уравнения гидродинамики (6.2.1)–(6.2.6) с различными источниками и стоками энергии, подробно проанализированными в работах (*Гордиец и др., 1979, 1982*) и в монографии (*Маров, Колесниченко, 1987*), служащие для описания совместного поведения температуры и концентраций компонентов в нижней термосфере, решались численно методом установления. Представленные здесь результаты расчетов относятся к положению Солнца, соответствующему 15 ч местного времени на 45^o с.ш. вблизи весеннего равноденствия, при индексе солнечной активности $F_{10\,7} = 150$. В этих условиях зенитный угол Солнца равен $\chi_\odot = 60.6°$.

На Рис. 6.2.1 показаны профили концентрации (числовой плотности) атомарного кислорода, рассчитанные при различных коэффициентах турбулентной диффузии D^T . Высота z_m максимума этого коэффициента D^T_m и величина параметра S_1, определяющего характер уменьшения D^T при $z > z_m$, сильно влияют на распределение атомарного кислорода. Результаты расчетов показывают, что высотный ход O имеет один максимум, когда высота z_m равна 100 км или более. При z_m = 90 и 85 км образуется два максимума концентрации

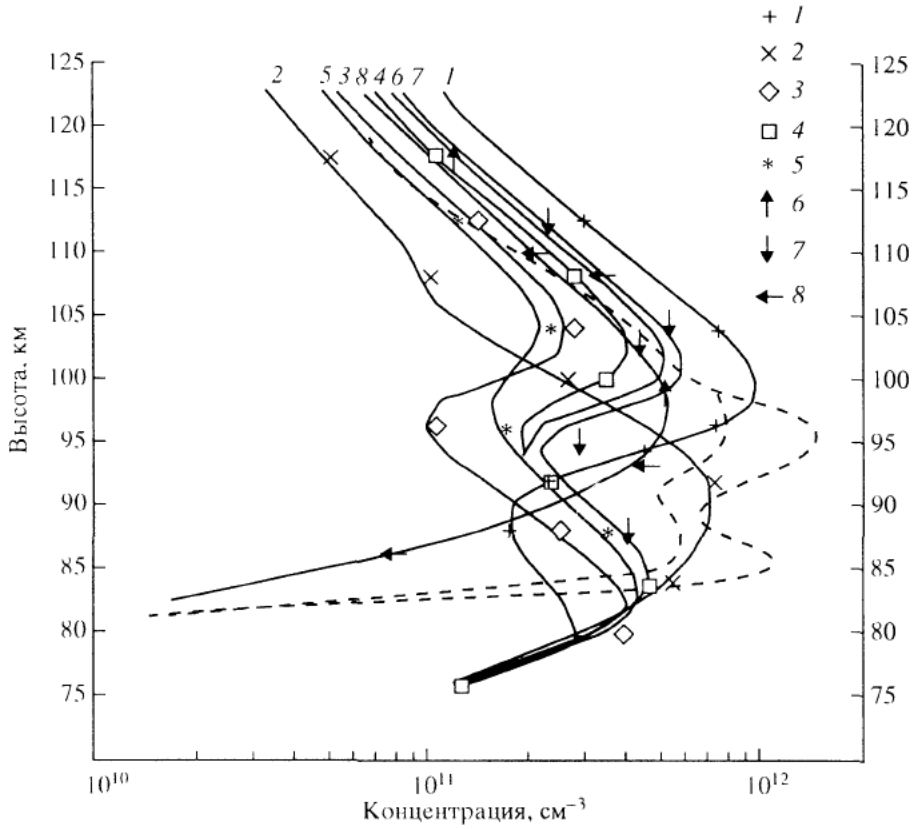


Рис. 6.2.1. Профили числовой плотности атомарного кислорода $n_O(z)$, вычисленные при разных значениях D_m^T, z_m и S_1:

1 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 85$ км, $S_1 = S_2 = 0.05$ км$^{-2}$;

2 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 100$ км, $S_1 = S_2 = 0.05$ км$^{-2}$;

3 – $D_m^T = 3 \cdot 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 90$ км, $S_1 = S_2 = 0.05$ км$^{-2}$;

4 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 90$ км, $S_1 = S_2 = 0.05$ км$^{-2}$;

5 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 90$ км, $S_1 = 0.025$ км$^{-2}$;

6 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 90$ км, $S_1 = 0.075$ км$^{-2}$;

7 – $D_m^T = 10^7 см^2 \cdot c^{-1}$, $z_m = 90$, $S_1 = 0.1$ км$^{-2}$;

8 – профиль из модели *MSISE90* (*Хедин, 1991*); штрихованные кривые – измерения (*Муртаг и др., 1990*).

атомарного кислорода.

Вариант 2 на Рис. 6.2.1, рассчитанный при $z_m = 100$ км, имеет один максимум $n_O(z)$, который расположен на высоте 90 км. Вариант 8, соответствующий модели *MSISE90*, также имеет один максимум $n_O(z)$, расположенный на высоте 98 км. При z_m =85–90 км первый максимум $n_O(z)$ находится на высотах 100–104 км – несколько выше по сравнению с моделью *MSISE90*, а второй максимум – на высотах 80–84 км. Профиль 1 коэффициента турбулентной диффузии на Рис. 6.2.2 наилучшим образом согласуется с профилем из модели *MSISE90*, однако при этом приблизительно вдвое завышается числовая плотность *O* на высотах 100–400 км по сравнению с этой моделью. Совпадения расчетного значения $n_O(z)$ с модельным профилем в этом интервале высот можно

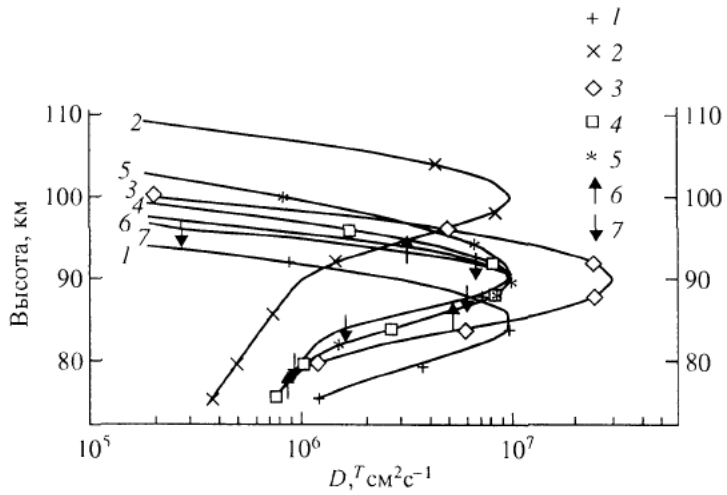


Рис. 6.2.2. Высотные профили коэффициентов турбулентной диффузии D^T, вычисленные по формуле (6.2.11) при разных значениях D_m^T, z_m и S_1 (см. Рис. 6.2.1). Область между штрихованными кривыми – значения D^T согласно (*Хокинг, 1990*).

достигнуть за счет увеличения коэффициента турбулентной диффузии. Таким образом, высота максимума коэффициента турбулентной диффузии в рассматриваемой модели оказывается значительно меньше обычно принимаемой величины z_m =105км и находится на высотах 85–90 км. На $z < 90$ км расчитанные нами числовые плотности значительно превышают, однако, как модельные (*MSISE90*), так и экспериментальные плотности.

Глубина и высота максимумов n_O (z) определяются параметром S_1, причем при увеличении S_1 усиливается образование двойного максимума. Результаты измерений (*Муртаг и др.*, 1990), показанные штриховыми линиями на Рис. 6.2.1, свидетельствуют о наличии двойного максимума и в первом приближении согласуются с результатами расчетов. Из Рис. 6.2.1 также видно, что числовая плотность атомарного кислорода в термосфере может изменяться вдвое за счет изменения S_1 и в 4 раза за счет изменения z_m. Использованные в расчетах профили D^T с различными значениями параметров z_m и S_1 показаны на Рис. 6.2.2.

На Рис. 6.2.3 представлены характерные времена различных физико-химических процессов, определяющих высотное распределение основных компонентов термосферы для варианта 1 на Рис. 6.2.1 и Рис. 6.2.2 . Кривая 1 показывает время химической релаксации атомарного кислорода и характеризуется резким уменьшением характерного времени с высотой, так что на высотах меньше 80 км можно считать, что для атомарного кислорода выполняется условие фотохимического равновесия. В то же время, на высотах 80–100 км определяющими процессами являются турбулентная диффузия и рекомбинация атомов O. На высотах, больших 100 км, в процессы переноса вещества уже начинает вносить существенный вклад молекулярная диффузия.

На Рис. 6.2.4 сравниваются расчитанные нами профили концентраций веществ O, N_2 и O_2 (вариант 1 на Рис. 6.3.1) с моделью *MSISE90*. Как видим, при выбранном профиле коэффициента турбулентной диффузии (вариант 1 на Рис. 6.2.1) вычисленная числовая плотность атомарного кислорода приблизи-

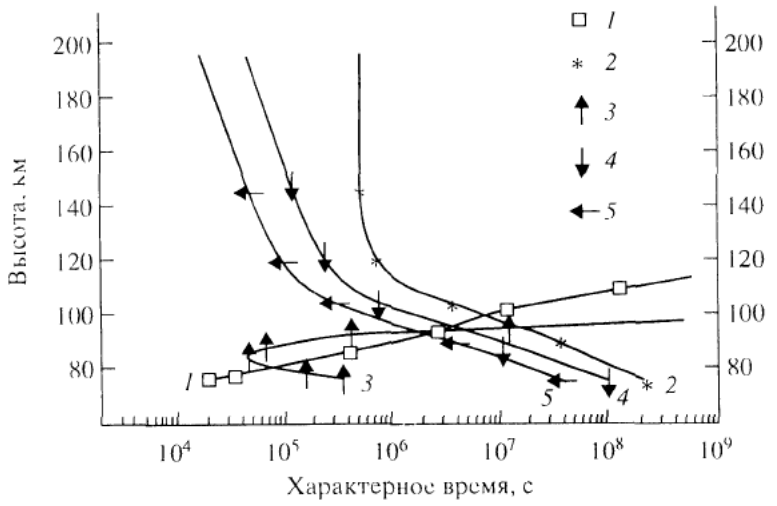


Рис. 6.2.3. Характерные времена физико-химических процессов: 1 – химическая релаксация O; 2 – химическая релаксация O_2; 3 – турбулентная диффузия; 4 – молекулярная диффузия для O; 5 – молекулярная диффузия для O_2.

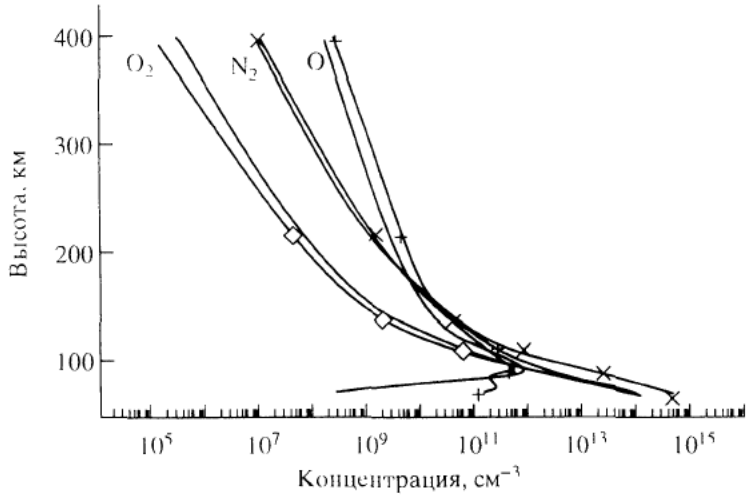


Рис. 6.2.4. Сравнение расчетных профилей концентраций O, N_2 и O_2 с моделью *MSISE90* (кривые без маркеров).

тельно вдвое превышает модельную на высотах 100–400 км. В то же время числовая плотность O_2 на высоте 400 км в три раза меньше модельной, что объясняется отклонением расчетной кривой от барометрического распределения за счет диссоциации O_2. Профиль концентрации молекулярного азота практически совпадает с модельным. Возможное небольшое отклонение может объясняться ошибками, связанными с разностной аппроксимацией по высоте, и различием в ускорении силы тяжести при расчетах в модели *MSISE90*.

Что касается высотного хода температуры, то оно зависит от эффективности вкладов турбулентной теплопроводности Q_T^T (6.1.21) и молекулярной диссипации турбулентной энергии $Q_{<e>}^T$ (6.1.26) в энергетику нижней термосферы, другими словами, от того, больше или меньше величина тепла, выделенного за счет диссипации турбулентной энергии, величины энергии, отводимой турбу-

лентной теплопроводностью. Эти вопросы подробно рассматривались нами ранее (*Маров, Колесниченко, 1987*) с учетом результатов численных расчетов (*Гордиец и др., 1979*) и был сделан вывод, что при типичном высотном профиле коэффициента турбулентной диффузии D^T с максимумом на высоте ~110 км в области $z \geq 100–105$км турбулентность охлаждает атмосферу, а в области $z \leq 100–105$ км нагревает атмосферу. Заинтересованный читатель может найти дополнительные сведения в приведенных выше ссылках.

В рассматриваемой здесь модели гомосферы Земли не принимались во внимание функциональные связи между основными характеристиками турбулентного поля, такие, например, как $D^T = D^T(\boldsymbol{Rf}_c, \boldsymbol{Kf}_c)$. К сожалению, из-за малого объема экспериментальной информации, точный характер подобных связей не может быть в настоящее время установлен эмпирически. Эти обстоятельства не позволяют в рамках подобных моделей рассчитать высотный ход коэффициента турбулентной диффузии в нижней термосфере самосогласованно с температурой и составом. По этой же причине, оценки эффективности охлаждения и нагревания атмосферы турбулентностью, зависящие, в конечном итоге, от высотного распределения внешних параметров задачи $D^T(z)$, $\boldsymbol{Rf}_c(z)$, $\boldsymbol{Kf}_c(z)$, также мало эффективны, поскольку приходится использовать нескореллированные между собой экспериментальные данные, имеющие к тому же значительный разброс. В связи с этим особенно важное значение приобретают теоретические методы нахождения функциональных связей типа $D^T = D^T(\boldsymbol{Rf}_c, \boldsymbol{Kf}_c)$, позволяющие самосогласованно, в указанной выше смысле, рассчитывать баланс тепла в такой турбулентной среде, какой является нижняя термосфера планеты.

Краткие выводы:

1) Проведено моделирование структуры и энергетики верхней атмосферы Земли в области высот 70–400 км. Наряду с учетом вклада основных источников нагрева, включая поглощение солнечного ультрафиолетового излучения и каналов охлаждения в инфракрасном диапазоне, выполнено детальное описание диффузионных процессов на основе систематического использования соотношений Стефана–Максвелла для многокомпонентной молекулярной диффузии и градиентных соотношений для турбулентных потоков тепла и вещества в турбулентной многокомпонентной смеси.

2) Рассмотрена диффузионно-фотохимическая модель нижней термосферы Земли, иллюстрирующая существующий подход по использованию усредненного по времени коэффициента турбулентной диффузии D^T в качестве параметра согласования при решении аэрономических задач. Путем сопоставления теоретических и экспериментальных кривых для высотного распределения атомарного кислорода дана оценка наиболее вероятной величины этого коэффициента.

3) Дальнейшее совершенствование подобных моделей возможно на пути разработки методики самосогласованного расчета температуры, состава и коэффициентов турбулентного тепло-и массообмена для сдвиговых течений многокомпонентной смеси в области гомопаузы планетной атмосферы.

ГЛАВА 7

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

Эволюционные уравнения переноса для турбулентной энергии $< e >$ и для среднеквадратичных пульсаций энтальпии $< h''^2 >$ многокомпонентной газовой смеси, выведенные в Гл. 4, позволяют разработать методику моделирования коэффициентов турбулентного обмена в горизонтально однородном потоке с поперечным сдвигом гидродинамической скорости. В основе полуэмпирической методики получения алгебраических формул для расчета коэффициентов D^T, χ^T и ν^T, фигурирующих в реологических соотношениях (3.3.3*), (3.3.15*), (5.2.19) для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений, лежит принцип квазилокального равновесия в теории турбулентного переноса многокомпонентной смеси (см. разд. 4.3.9). Развитый подход к моделированию коэффициентов турбулентного обмена в турбулизованных многокомпонентных природных средах рассмотрен здесь на примере гомосферы Земли, для которой получены численные оценки коэффициентов турбулентной вязкости ν^T и температуропроводности χ^T.

§ 7.1. Исходные уравнения и их преобразования.

Как уже было сказано, при самосогласованном моделировании динамики, температуры, состава и коэффициентов турбулентного обмена в атмосферах планет необходимы функциональные связи типа $D^T(z) = D^T[\boldsymbol{Rf}_c(z),\ \boldsymbol{Kf}_c(z)]$ для подобных коэффициентов, удовлетворяющие определенным физическим критериям и позволяющие адекватно рассчитывать сложные процессы тепло- и массопереноса в этих областях планетной атмосферы (*Колесниченко, Васин, 1984*). Методика получения такого рода связей является частным случаем применения общей *K*-теории многокомпонентной турбулентности, рассмотренной в разд. 4.3.9. Ниже, в качестве примера, рассмотрен простейший способ построения полуэмпирической теории коэффициентов турбулентного обмена. Более полный подход приведен в Гл.8, в которой моделируются тензоры коэффициентов турбулентного обмена, учитывающие различия интенсивностей турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров вдоль разных осей координат.

7.1.1. Исходные эволюционные уравнения переноса. В § 4.1 показано, что балансовые уравнения переноса для среднеквадратичных пульсаций $< A''^2 >$ термогидродинамических параметров смеси $A(\boldsymbol{r},t)$, мгновенные значения которых удовлетворяют законам сохранения типа (2.1.1), можно получить из следующего общего уравнения (*Колесниченко, 1981*) :

$$\bar{\rho}\frac{D < A''^2/2 >}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho A''^2 V_j''/2} + \overline{A'' J_{(A)j}}\right) = -J^T_{(A)j}\frac{\partial}{\partial x_j} < A > + \overline{A''\sigma_{(A)}} - \bar{\rho} < \varepsilon_{(A)} >, \tag{7.1.1}$$

содержащего члены, соответствующие конвективному переносу, диффузии, об-

разованию, перераспределению и диссипации соответствующей турбулентной характеристики потока. Здесь $\bar{\rho} < \varepsilon_{(A)} > \equiv -\overline{J_{(A)j} \partial A'' / \partial x_j}$ – скорость скалярной диссипация дисперсии $< A''^2 >$; $J^T_{(A)j} \equiv \overline{\rho A'' V_j''}$ – плотность турбулентного потока признака $A(\boldsymbol{r},t)$.

При отождествлении в (7.1.1) величины A с гидродинамической скоростью течения V_k и использовании для мгновенных значений потоков и скоростей возникновения импульса выражений $J_{(V_k)j} = -\pi_{kj}$, $\sigma_{(V_k)} = -\partial p / \partial x_k$ (см. (2.1.22)) уравнение баланса турбулентной энергии $< e >$ может быть записано в виде (ср. с (4.2.22))

$$\bar{\rho} \frac{D<e>}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j}[\overline{\rho(e + p'/\rho)V_j''} - \overline{\pi_{ij} V_i''}] + R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} < V_i > + \overline{p' V_{j,j}''} + \bar{\rho} G - \bar{\rho} < \varepsilon_e >, \tag{7.1.2}$$

где $\bar{\rho} G = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\left[\frac{J^T_{qj}}{\bar{\rho} < T >< C_p >} - \frac{1}{\bar{n}} \sum_{\alpha=1}^{N} J^T_{\alpha j}\right]$ – скорость порождения турбулентной энергии $< e >$ под воздействием эффектов плавучести; $J^T_{qj} \equiv q^T_j - \sum_{\alpha=1}^{N} <h_\alpha> J^T_{\alpha j}$ – приведенный турбулентный поток тепла (см. (3.3.10)); $< \varepsilon_e >$ – скорость диссипации турбулентной энергии в тепло вследствие молекулярных процесов вязкости (все обозначения соответствуют приведенным в § 3.3 и § 4.2).

В общем случае химически активной газовой смеси балансовое уравнение для дисперсии энтальпии $< h''^2 >$ значительно проще аналогичного уравнения для среднего квадрата пульсаций температуры $< T''^2 >$, поскольку не содержит большого числа дополнительных корреляций температуры и концентраций, связанных с происходящими в среде химическими реакциями. При выводе уравнения переноса для среднеквадратичных пульсаций $< h''^2 >$ энтальпии в турбулизованном многокомпонентном потоке отождествим в уравнении (7.1.1) величину A с удельной энтальпией многокомпонентной смеси h и учтем выражения $J_{(h)j} \equiv q_j$, $\sigma_{(h)} \equiv dp/dt + \pi_{ij} \partial V_i / \partial x_j$ для мгновенных значений субстанционального потока тепла и плотности источника энтальпии (см. формулы (2.1.51) и (2.1.52)). В результате получим

$$\bar{\rho} \frac{D(< h''^2 > /2)}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho h'' V_k''/2} + \overline{q_k h''}\right) = -q^T_k \left(\frac{\partial < h >}{\partial x_k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k}\right) - \bar{\rho} < \varepsilon_h >, \tag{7.1.3}$$

где величина $\bar{\rho} < \varepsilon_h > \equiv -\overline{q_j \partial h'' / \partial x_j}$ (см. (4.3.10)) характеризует скорость скалярной диссипации корреляции $< h''^2 >$ под воздействием процессов молекулярной температуропроводности.

Сделаем важное упрощение в уравнении для $< h''^2 >$. Фигурирующий в (7.1.3) вектор полного молекулярного потока тепла в многокомпонентной среде

$q_j = -\lambda \partial T / \partial x_j + p \sum_{\alpha=1}^{N} K_{T\alpha} w_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha n_\alpha w_{\alpha j}$ (см.(2.3.75)), преобразуем следующим образом. Из формулы для энтальпии смеси (2.1.45) следует

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = C_p \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_j},$$

откуда можно получить

$$q_j = -\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta \left[\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial Z_\beta}{\partial x_j} + J_{\beta j} \right] + kT \sum_{\beta=1}^{N} \alpha_{T\beta} J_{\beta j} . \qquad (7.1.4)$$

Для аккуратного количественного анализа процессов молекулярной многокомпонентной диффузии, необходимо использовать соотношения Стефана-Максвелла (2.3.69). Ограничившись для простоты рассмотрением газовой смеси, состоящей из компонентов близкого молекулярного веса, будем считать коэффициенты бинарной диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ приблизительно равными между собой ($\mathcal{D}_{\alpha\beta} \approx \mathcal{D}$). При этом, как известно, несущественны и перекрестные эффекты молекулярного теплопереноса (процессы термо- и бародиффузии). Тогда в принятых предположениях соотношения (2.3.69) принимают форму закона Фика

$$J_{\beta j} = -n\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{n_j}{n} \right) \equiv -\rho \mathcal{D} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_j}, \quad (\rho \propto n) , \qquad (7.1.5)$$

а формула для молекулярного потока тепла q_j может быть переписана в виде

$$q_j = -\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta \left[\frac{\lambda}{C_p} - \rho \mathcal{D} \right] \frac{\partial Z_\beta}{\partial x_j} . \qquad (7.1.6)$$

Если к тому же потенциалы межмолекулярных сил (см. (2.3.90)) для частиц разных сортов не сильно различаются между собой, то во всем интервале температур, характерном для верхней атмосферы, коэффициенты бинарной диффузии для всех компонентов смеси $\mathcal{D}$ приближенно равны коэффициенту температуропроводности $\chi = \lambda / \rho C_p$. Тогда для молекулярного потока тепла q_j окончательно будем иметь

$$q_j = -\rho \chi \partial h / \partial x_j . \qquad (7.1.7)$$

С учетом этого соотношения уравнение переноса для дисперсии $\langle h''^2 \rangle$ (7.1.3) примет вид

$$\bar{\rho} \frac{D(\langle h''^2 \rangle)}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho h'' V_k''} - 2\chi \overline{\rho h'' \partial h / \partial x_k} \right) = -2 q_k^T \left(\frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} \right) - 2\bar{\rho} \langle \varepsilon_h \rangle , \qquad (7.1.3^*)$$

где $\overline{\rho} < \varepsilon_h > \cong \chi \overline{\rho h_{,j}\, h''_{,j}}$.

7.1.2. Моделирование корреляционных членов. Для моделирования потока $J^T_{<e>k}$ турбулентной энергии и потока $J^T_{<h>k}$ дисперсии энтальпии смеси (включающих и моменты третьего порядка), а также диссипативных членов $< \varepsilon_e >$ и $< \varepsilon_h >$, входящих в эволюционные уравнения переноса (7.1.2) и (7.1.3*), используем далее следующие простейшие аппроксимационные выражения :

а) поток турбулентной кинетической энергии определим соотношением (ср. с формулой (4.2.31))

$$J_{<e>j} = \overline{\rho(e + p'/\rho)V_j''} - \overline{\pi'_{ij} V_i''} = -\left(c_1 \nu^T + c_2 \nu\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho} <e>\right); \qquad (7.1.8)$$

б) диффузионный поток дисперсии энтальпии $J^T_{<h>k}$, входящий в (7.1.3*), зададим в виде (ср. с формулой (4.3.12))

$$J_{<h>j} \equiv \left(\overline{\rho h''^2 V_j''/2} + \overline{q_j h''}\right) = -\left(c_5 \chi^T + c_6 \chi\right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} <h''^2/2>), \qquad (7.1.9)$$

в) скорость диссипации турбулентной энергии $< \varepsilon_e >$ примем:

– при малых значениях турбулентного числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T \equiv L <e>^{1/2} / \nu$ пропорциональной величине $\nu < e > / L^2$, где L – внешний масштаб турбулентности;

– при больших значениях числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T$ пропорциональной величине $\nu_m < e > / L^2$, где ν_m – некоторый эффективный кинематический коэффициент вязкости, определяющий воздействие мелких турбулентных вихрей на крупномасштабные пульсации скорости;

– при произвольных значениях числа $\boldsymbol{Re}^T$ пропорциональной величине $(\nu + \nu_m) < e > / L^2$;

г) аналогично, для средней скорости разрушения дисперсии $< h''^2 >$ будем иметь $< \varepsilon_h > \propto (\chi + \chi_m) < h''^2 > / L^2$.

Коэффициенты ν_m и χ_m естественно принять пропорциональными соответствующим коэффициентам турбулентного переноса, определяемым крупными вихрями, т.е. пропорциональными величинам ν^T и χ^T : $\nu_m = \alpha \nu^T$, $\chi_m = \beta \chi^T$, где α, β – *const* $(\alpha, \beta < 1)$. Тогда окончательно получаем (ср. с формулами (4.2.29) и (4.3.11))

$$< \varepsilon_e > = \frac{1}{a_1^4} \left(\nu^T + \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{<e>}{L^2}, \qquad (7.1.10)$$

$$< \varepsilon_h > = \frac{1}{a_2^4} \left(\chi^T + \frac{\chi}{\beta}\right) \frac{\overline{h''^2}}{L^2} , \qquad (7.1.11)$$

где a_1, a_2 – некоторые эмпирические константы.

Выведенные здесь балансовые уравнения (7.1.2) и (7.1.3*) для корреляций $<e>$ и $<h''^2>$ положим в основу рассматриваемых далее методов приближенного (полуэмпирического) определения турбулентных коэффициентов обмена ν^T и χ^T. В частном случае изотропной турбулентности реологические соотношения для турбулентных потоков могут быть записаны в виде (см. (3.3.3*), (3.3.15*), (5.2.19)):

$$J^T_{\alpha j} = -\bar{\rho} D^T \partial <Z_\alpha> / \partial x_j , \tag{7.1.12}$$

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e> \delta_{ij} + \bar{\rho}\nu^T \left[\partial <V_i> / \partial x_j + \partial <V_j> / \partial x_i\right], \tag{7.1.13}$$

$$q^T_j = -\lambda^T \left[\frac{\partial <T>}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho} <C_p>}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\right] + \sum_{\beta=1}^{N} <h_\beta> J^T_{\beta j} \cong -\bar{\rho}\chi^T \frac{\partial <h>}{\partial x_j} + \chi^T \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}, \tag{7.1.14}$$

где $\chi^T = \lambda^T / \bar{\rho} <C_p>$ – турбулентный коэффициент температуропроводности. Второе (приближенное) выражение для q^T_j записано с учетом обычного в теории турбулентности предположения о равенстве единице турбулентного числа Льюиса $\boldsymbol{Le}^T$ $(\equiv \chi^T / D^T) = 1$.

§ 7.2. Метеорологическая аппроксимация

При исследовании большинства атмосферных систем движения, в частности при анализе вынужденных и естественно-конвективных движений атмосферных газов, применимо приближение Буссинеска. Ранее было показано, что в случае, когда изменение массовой плотности смеси происходит под влиянием, главным образом, изменения температуры (концентраций) в поле гравитационных сил, то гидродинамические уравнения смеси могут быть упрощены, при условии, что колебания температуры T не слишком велики (порядка нескольких градусов) и коэффициент объемного расширения $\rho' / \bar{\rho} T''$ (формула (3.3.27) очень мал, $\sim 10^{-3} K^{-1}$ или меньше. Для таких сред относительное отклонение $\rho' / \rho \approx \rho' / \bar{\rho}$ массовой плотности ρ можно не учитывать во всех членах гидродинамических уравнений движения, кроме тех членов которые выражают влияние гравитационного поля на пульсации плотности ρ', таких как силы Архимеда в уравнении движения (3.1.38).

7.2.1. Приближение Обербека–Буссинеска. В этом случае справедливы следующие приближенные соотношения: $\rho \approx \bar{\rho}$, $\rho' \approx 0$, $<V_j> \approx \bar{V}_j$, $V''_j \approx V'_j$, $<h> \approx \bar{h}$, $h'' \approx h'$, $Z''_\alpha \approx Z'_\alpha$ и т.п. Вводя обозначения

$$V'_j = u_j , \quad h' = H , \quad T' = \Theta , \quad n'_\alpha = \gamma_\alpha \tag{7.2.1}$$

и сохраняя для упрощения записи знаки осреднения лишь в пульсационных членах, перепишем эволюционные уравнения переноса (7.1.2) и (7.1.3*) для корреляций $<e>$ и $<h''^2>$ в случае горизонтально – однородного в плоскости $z = \text{const}$ осредненного течения в виде:

$$\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}J^T_{<e>z}=-\overline{u_x u_y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{g}{T}\overline{\Theta u_z}+\frac{g}{n}\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\gamma_\alpha u_z}-\varepsilon_e, \tag{7.2.2}$$

$$\frac{\partial(\overline{H^2/2})}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}J^T_{<h>z}=-\overline{Hu_z}\left(g+\frac{\partial h}{\partial z}\right)-\varepsilon_h\ . \tag{7.2.3}$$

Здесь: $<V_j>=V(z)\delta_{3j}$; $V(z)$ – горизонтальная составляющая скорости; для кинетической энергии турбулентных пульсаций введено обозначение $b\equiv\bar{e}$.

Воспользуемся теперь определением динамических чисел Ричардсона $\boldsymbol{Rf}$ и Колмогорова $\boldsymbol{Kf}$ для многокомпонентной смеси (см. формулы (4.2.33) и (4.2.34)), характеризующих отношение стабилизирующих эффектов плавучести и стратификации состава смеси к дестабилизирующему эффекту сдвига ветра

$$\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Kf}=g\left[\frac{1}{T}\overline{\Theta u_z}+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\gamma_\alpha u_z}\right]\cdot\left[\overline{u_x u_y}\frac{\partial V}{\partial z}\right]^{-1}=$$

$$=g\frac{\chi^T}{\nu^T}\left[\frac{g}{C_pT}+\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{M^*}\frac{\partial M^*}{\partial z}\right]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^{-2}=\frac{\boldsymbol{Ri}+\boldsymbol{Ko}}{\boldsymbol{Pr}^T}, \tag{7.2.4}$$

где $\boldsymbol{Pr}^T=\chi^T/\nu^T$ – турбулентное число Прандтля, $\boldsymbol{Ri}$, $\boldsymbol{Ko}$ – градиентные числа Ричардсона и Колмогорова для смеси. Тогда уравнение переноса для турбулентной энергии (7.2.1) приобретает вид, пригодный для численного моделирования потока со сдвигом

$$\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}J^T_{<e>z}=\nu^T(1-\boldsymbol{Rf}-\boldsymbol{Kf})\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2-\varepsilon_e\ . \tag{7.2.5}$$

7.2.2. Формулы для коэффициентов турбулентного обмена. Ограничимся далее рассмотрением случая локально-равновесного стратифицированного в поле силы тяжести течения, при котором корреляционные моменты второго порядка не изменяются во времени и пространстве (см. разд.4.3.9). Такая ситуация возникает при некоторых критических значениях чисел Ричардсона $\boldsymbol{Rf}_{cr}$ и Колмогорова $\boldsymbol{Kf}_{cr}$. Уравнения (7.2.3) и (7.2.5) примут вид (у величин $\boldsymbol{Rf}_{cr}$ и $\boldsymbol{Kf}_{cr}$ индекс "*cr* "далее будем опускать)

$$-\overline{u_x u_y}(1-\boldsymbol{Rf}-\boldsymbol{Kf})\frac{\partial V}{\partial z}=\left(\frac{\nu}{\alpha}+\nu^T\right)\frac{b}{a_1^4L^2}, \tag{7.2.6}$$

$$-\overline{Hu_z}\left(g+\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\left(\frac{\chi}{\beta}+\chi^T\right)\frac{\overline{H^2}}{a_2^4L^2}\ . \qquad (7.2.7)$$

Важной особенностью уравнений (7.2.6) и (7.2.7) является то, что них входят только локальные значения величин $\nu(z)$, $\chi(z)$, $\partial V(z)/\partial z$, $\partial h(z)/\partial z$, $b(z)$ и $L(z)$, от которых зависят, в конечном счете, искомые коэффициенты турбулентного переноса ν^T и χ^T. В этом находит свое выражение так называемый "принцип локального подобия" в турбулентном переносе (*Иевлев, 1990*), в основе которого лежит гипотеза о существовании в ряде случаев "локально-равновесной" структуры турбулентного поля. Подобный подход к проблеме моделирования турбулентных движений использован при исследовании высокотемпературных пограничных слоев (*Иевлев, 1975*).

Полуэмпирические выражения для коэффициентов ν^T и χ^T с использованием алгебраических уравнений (7.2.6) и (7.2.7) могут быть получены как простыми, так и более сложными способами. Очевидно, применение последних в связи с приближенным характером выражений для ν^T и χ^T вряд ли оправдано. Рассмотрим поэтому один из простых вариантов построения полуэмпирической теории.

Будем считать корреляцию $-\overline{u_x u_y}$ пропорциональной турбулентной энергии b, а корреляцию $-\overline{Hu_z}$ пропорциональной величине $b^{1/2}\left(\overline{H^2}\right)^{1/2}$. В этом случае можно написать

$$-\overline{u_x u_y}=k_1 b(\partial V/\partial z)/(|\partial V/\partial z|)=\nu^T\partial V/\partial z\,, \qquad (7.2.8)$$

$$-\overline{Hu_z}=k_2 b^{1/2}(\overline{H^2})^{1/2}=\chi^T(g+\partial h/\partial z)\ , \qquad (7.2.9)$$

где k_1, k_2 – так называемые, коэффициенты корреляции. Исключая теперь с помощью соотношений (7.2.8) и (7.2.9) величины $\partial V/\partial z$ и $(\overline{H^2})^{1/2}$) из уравнений (7.2.6) и (7.2.7), получим

$$\frac{\nu^T}{L\sqrt{b}}=-\frac{\nu}{2\alpha L\sqrt{b}}+\sqrt{1-\boldsymbol{Rf}-\boldsymbol{Kf}+\frac{\nu^2}{4\alpha^2 bL^2}}\ , \qquad (7.2.10)$$

$$\frac{\chi^T}{L\sqrt{b}}=-\frac{1}{\boldsymbol{Pr}}\frac{\nu}{2\beta L\sqrt{b}}+\frac{1}{\boldsymbol{Pr}}\sqrt{\frac{\nu^2}{4\beta^2 bL^2}+\left(\frac{\boldsymbol{Pr}}{\boldsymbol{Pr}^{T*}}\right)^2}\ , \qquad (7.2.11)$$

где $\boldsymbol{Pr}$ – молекулярное число Прандтля. Здесь для некоторого комплекса из эмпирических констант введено обозначение $\boldsymbol{Pr}^{T*}=1/k_2a_2^2$. Величины $\boldsymbol{Pr}^{T*}$, α и β являются дополнительными эмпирическими константами, которые входят в (7.2.10) и (7.2.11). Так как одну из констант всегда можно ввести в линейный масштаб L, то далее будем предполагать, что $a_1^4k_1^2=1$. Таким образом, коэффи-

циенты ν^T и χ^T оказываются выраженными только через параметры b и L и локальные свойства среды. При $\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} = 1$ из (7.2.10) получаем $\nu^T = 0$; такое же значение ν^T необходимо принять и при $\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} > 1$, так как в этом случае упрощенное уравнение баланса турбулентной энергии (7.2.5) не может быть удовлетворено ни при каких положительных значениях величины ν^T. Из формул (7.2.10) и (7.2.11) следует также, что параметр $\boldsymbol{Pr}^{T*}$ – это турбулентное число Прандтля в области развитой турбулентности ($\nu^T >> \nu$) в случае, когда на баланс турбулентной энергии силы плавучести и стратификация состава не оказывают влияния, т.е. при $\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} \to 0$.

Не лишне заметить, что, строго говоря, в локально-равновесном приближении энергия турбулентности b не должна входить в число аргументов для коэффициентов турбулентного переноса, поскольку сама эта энергия определяется теми же параметрами течения, что и коэффициенты ν^T и χ^T. Тем не менее, величина b включена здесь в формулы (7.2.10) и (7.2.11) специально, с целью косвенного учета "неравновесности" турбулентного поля скоростей (см. разд. 4.3.9).

Из (7.2.5)–(7.2.9) легко также получить формулы

$$\nu^T / \nu = -1/\alpha + a_1^2(1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf})\boldsymbol{Re}^{T*}, \tag{7.2.12}$$

$$\chi^T / \nu = -1/\beta\boldsymbol{Pr} + \boldsymbol{Re}^{T*}\boldsymbol{Pr}^T / (\boldsymbol{Pr}^{T*})^2 \tag{7.2.13}$$

позволяющие в равновесном случае рассчитать коэффициенты ν^T и χ^T по известным значениям чисел $\boldsymbol{Rf}_{cr}$ и $\boldsymbol{Kf}_{cr}$ в атмосфере. Здесь $\boldsymbol{Re}^{T*} = L^2(\partial V / \partial z)/\nu$ – локальное турбулентное число Рейнольдса.

Наконец, из (7.2.12) и (7.2.13) следует алгебраическое уравнение для определения турбулентного числа Прандтля $\boldsymbol{Pr}^T$ в локально-равновесном приближении

$$\frac{1}{(\boldsymbol{Pr}^{T*})^2}(\boldsymbol{Pr}^T)^3 + \frac{1}{a_1^2\beta\boldsymbol{PrRe}^{T*}}(\boldsymbol{Pr}^T)^2 + \left(\frac{1}{a_1^2\alpha\boldsymbol{Re}^{T*}} - 1\right)\boldsymbol{Pr}^T + \boldsymbol{Ri} + \boldsymbol{Ko} = 0. \tag{7.2.14}$$

В заключение сделаем еще одно существенное замечание. Строго говоря, условие локального равновесия подтверждается экспериментом не для каждого турбулентного течения. Оно справедливо для течений в трубах, в пограничном слое и слое смешения, когда в некоторой основной (промежуточной) зоне течения, на которую приходится большая часть общего изменения средней скорости, производство энергии турбулентности примерно равно диссипации. Однако данное условие нарушается, во-первых, в тонком поверхностном слое (у стенки), где существенен "диффузионный" перенос турбулентности, связанный, главным образом, с действием молекулярной вязкости и теплопроводности среды, а также с пульсациями давления, и, во-вторых, в широкой внешней зоне пограничного слоя, где существенны турбулентная диффузия турбулентности и конвективные члены.

Что касается движений в стратифицированной в поле силы тяжести газовой

среде атмосферы, то здесь важно уметь моделировать процессы переноса в свободных турбулентных течениях с поперечным сдвигом, таких, как струи и слои смешения. Как известно (см. (*Таунсенд, 1959*), для струйных течений баланс энергии в слое смешения струи сильно отличается от баланса в канале или пограничном слое (см. Рис. 4.3.1 – 4.3.2). В струе практически отсутствуют области, в которых производство энергии турбулентности уравновешивалось бы диссипацией. В этом случае основную роль приобретают конвективный перенос и диффузия турбулентности. При моделировании таких течений, по аналогии с однородной жидкостью, мы поэтому предполагаем, что в структуре турбулентности существует некоторое "внутреннее равновесие" по отношению к полям средних скоростей и температур (*Иевлев, 1975*). Соответственно, коэффициенты турбулентного обмена ν^T и χ^T могут быть выражены через параметры b и L и локальные свойства среды (например, параметры $\boldsymbol{Rf}(z)$ и $\boldsymbol{Kf}(z)$) и в тех случаях, когда распределение турбулентной энергии b не является "равновесным", а зависит от предыстории процесса турбулизации и должно определяться из полного дифференциального уравнения переноса турбулентной энергии (7.2.5). Время установления подобного "внутреннего равновесия" при этом меньше, чем время, необходимое для того, чтобы общая интенсивность турбулентности достигла уровня, соответствующего равенству производства и диссипации турбулентной энергии, и поэтому оно часто существует. Исходя из этого, мы можем считать универсальными зависимости вида

$$\nu^T / bL = f(\nu / bL, \boldsymbol{Rf}, \boldsymbol{Kf}), \tag{7.2.15}$$

$$\chi^T / bL = g(\nu / bL, \boldsymbol{Rf}, \boldsymbol{Kf}), \tag{7.2.16}$$

которые, как было показано, можно найти для условий, когда производство турбулентности равно диссипации, и затем использовать их в неравновесных случаях. Иными словами, соотношения (7.2.12) и (7.2.13), полученные выше для локально-равновесного случая, могут использоваться в качестве искомых связей между отдельными корреляционными характеристиками турбулентного течения и тогда, когда турбулентная энергия b определяется из полного эволюционного уравнения переноса (7.2.5). Как уже было отмечено, для замыкания модельных уравнений (7.2.12), (7.2.13), (7.2.14) и (7.2.5) необходимо указать способ определения масштаба турбулентности L. Этот масштаб может задаваться в виде эмпирической функции, учитывающей геометрию рассматриваемого течения, или быть найден из решения полуэмпирического модельного уравнения (см. разд. 4.3.7.).

§ 7.3. Численный расчет коэффициентов турбулентного обмена

Воспользуемся теперь результатами анализа, изложенными в предыдущих параграфах, чтобы промоделировать коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности применительно к конкретной природной среде. В целях сохранения преемственности с Гл. 6, в качестве примера была взята верхняя атмосфера Земли в интервале высот $90 \le z \le 130$ км на средних широтах, к которой принадлежит область гомопаузы.

7.3.1. Основные уравнения и граничные условия. В рассматриваемой модели использовалась система уравнений (7.2.5), (7.2.10), (7.2.11) и (7.2.14), которая решалась численно. Для масштаба турбулентности L можно использовать упрощенное дифференциальное уравнение (4.3.43)

$$L = -\kappa c^{1/4}\Psi / (1+a z)\partial\Psi / \partial z \ , \qquad (7.3.1)$$

позволяющее расчитать L для сдвиговых течений через локальные средние характеристики среды в случае свободной конвекции и различных режимов стратификации движущегося потока. Здесь $\Psi = b^{1/2} / L$, $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана; коэффициент a имеет размерность L^{-1} и является функцией числа Россби $\boldsymbol{Ro}$; c – эмпирическая константа. Поправка $(1+az)$ в выражении (7.3.1) к формуле Лайхтмана, впервые предложенная в работе (*Быкова, 1973*), позволяет получить более реалистичные распределения по высоте коэффициентов турбулентного обмена ν^T и χ^T (*Вагер, Надёжина, 1979*). Следует заметить, что при учете всех членов в эволюционном уравнении переноса (7.2.5) для энергии турбулентности, упрощенная формула вида (7.3.1), вообще говоря, не справедлива. К сожалению, универсальность и точность приведенных в литературе более сложных дифференциальных уравнений для L не подтвержена (*Иевлев, 1975*; *Турбулентность: Принципы и применения, 1980*).

Граничные условия для системы уравнений (7.2.5), (7.2.10), (7.2.11) и (7.2.14) задавались следующим образом:

(1) $\overline{\rho}\partial b / \partial z = 0$, при $z = z_0$, т.е. предполагалось условие “непроницаемости” термосферы для потока энергии турбулентности вблизи ее нижней границы т.е. турбулентная диффузия у границы замедлена; $L(z_0) = L_0$;

(2) $b = 0$ при $z = z_0 + d$, т.е. использовалось условие затухания турбулентности на верхней границе турбопаузы; d = 40 км.

Таким образом, величины b, ν^T, χ^T подлежат определению при $t \to \infty$.

Сформулированная начально-краевая задача для системы уравнений (7.2.5), (7.2.10), (7.2.11), (7.2.14). и (7.3.1) с независящими от времени краевыми условиями (1) и (2) и произвольными начальными условиями решалась методом установления, т.е. искалось решение соответствующей стационарной краевой задач с использованием специальной вычислительной процедуры, подробно изложенной в монографии (*Маров, Колесниченко, 1987*).

Численное значение коэффициента “a_1” в формуле (7.1.10) определялось следующим образом. Так как формула (7.2.10) носит универсальный характер, ее можно использовать в области развитой турбулентности и в случае, когда на баланс турбулентной энергии силы плавучести не оказывают влияния ($\boldsymbol{Rf} + \boldsymbol{Kf} \to 0$). Тогда (7.2.10) переходит в известное соотношение Колмогорова $\nu^T \cong b^{1/2} L$. Из (7.1.10) в этих же предположениях следует закон Ричардсона-Обухова $\nu^T = a_1^{4/3}\varepsilon_e^{1/3}L^{4/3}$ (см. разд. 1.1.1), который с хорошей точностью выполняется для атмосферы при $a_1 = 0.18$.

Параметр c_1 в формуле (7.1.8) обычно порядка единицы (см. Гл. 4). Для нахождения коэффициента c_2 можно воспользоваться уравнением переноса (7.2.5) (в случае течения смеси с параметрами $\rho, \nu = const$) в непосредственной близости от верхней границы турбопаузы, где $\nu^T << \nu$; тогда $b / \alpha a_1^4 L^2 = -c_2 \partial^2 b / \partial z^2$. Отсюда, учитывая, что у "стенки" $\sqrt{b} \propto z_*$ и $a_1^2 L \propto \kappa z^*$ $(z^* = z - d)$, находим $c_2 = 1/2\alpha\kappa^2$. На высоте 90 км масштаб L~0.5 км, что согласуется как с размерами глобул, наблюдаемых в дымовых следах, так и с масштабами турбулентности, которые рассчитывались с помощью структурных функций.

Молекулярные коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности определялись для многокомпонентного газа, состоящего из N_2, O_2 и O, по формулам (6.1.13). Градиент энтальпии многокомпонентной смеси расчитывался по формуле $\partial < h > / \partial z = < C_p > \partial < T > / \partial z + \sum_{\alpha=1}^{N} < h_\alpha > \partial < Z_\alpha > / \partial z$ с использованием высотных профилей температуры $< T(z) >$ и концентраций компонентов смеси $< Z_\alpha(z) >$ согласно стандартной атмосфере, а также данных по значениям величин теплообразования веществ h_α^0 при стандартных условиях (*Щетинков, 1965*).

На Рис.7.3.1 показан высотный профиль градиентного числа Ричардсона $\boldsymbol{Ri}$ для смеси атмосферных газов, рассчитанный по средним высотным профилям температуры и полной числовой плотности стандартной атмосферы и вертикальному градиенту скорости ветра, определенному по многочисленным экспериментальным данны и сглаженному по значительному временному интервалу. При этом свободные параметры задачи α и β варьировались в пределах от 0.125 до 1, а параметр $\boldsymbol{Pr}^{T*}$ изменялся от 0.9 до 4.

Примеры результатов расчетов численных значений турбулентных коэффициентов температуропроводности приведены на Рис. 7.3.2 и 7.3.3. Для выбора окончательных значений подгоночных параметров α, β и $\boldsymbol{Pr}^{T*}$ было проведено сравнение рассчитанных профилей скорости вязкой диссипации турбулентной энергии ε_e, с учетом результатов решения уравнений (7.2.5), (7.2.10), (7.2.11) при различных значениях параметров α, β и $\boldsymbol{Pr}^{T*}$, со средними экспериментальными значениями турбулентной диссипации ε_e. Наиболее близкими к экспериментальным кривым оказались расчетные профили диссипации ε_e, соответствующие значениям $\boldsymbol{Pr}^{T*} = 2.2$ и $\alpha = \beta = 0.5$.

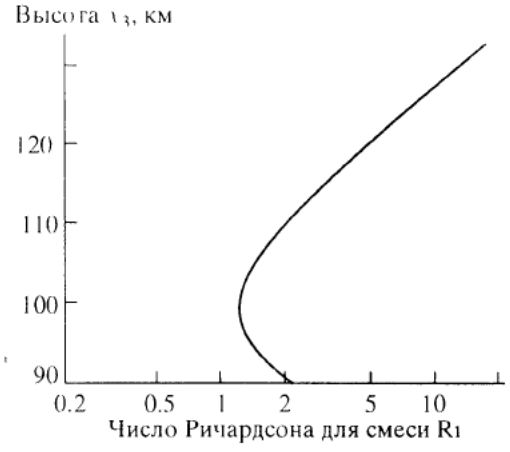


Рис. 7.3.1. Высотное распределение в атмосфере числа Ричардсона $\boldsymbol{Ri}$.

Окончательный выбор численных значений свободных параметров α и β, ответственных за высоту максимума профилей ко-

эффициентов ν^T и χ^T (Рис.7.3.4), проводился с учетом результатов работы (*Гордиец и др., 1982*). В частности, было показано, что только для значений χ^T, не превышающих $(1 \div 2) \cdot 10^6$ см/с и имеющих максимум в области высот ~105 км, теоретические высотные профили температуры газа, полученные с учетом *ИК*-излучения, оказываются близкими к эмпирическим. В то же время, кривые 2 и 3 на Рис. 7.3.3 согласно некоторым полуэмпирическим моделям свидетельствуют о завышении значений параметра χ^T по сравнению с нашими результатами, что объясняется, по-видимому, неточностью учета вкладов *ИК*-излучения в уравнение теплового баланса нижней термосферы.

Рассчитанное высотное распределение турбулентного числа Прандтля показано на Рис. 7.3.5. Проведенный на основе уравнения переноса (7.2.5) анализ особенностей энергетического баланса турбулентности в различных областях нижней термосферы показал, что до высот 110 км производство энергии турбу-

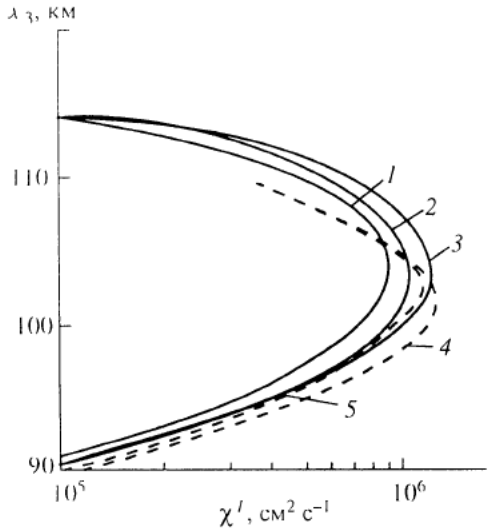


Рис. 7.3.2. Высотное распределение коэффициента турбулентной температуропроводности. кривые 1–3 – решения уравнения переноса турбулентной энергии (7 2 5) ($\boldsymbol{Pr}^{T*} = 3$; 2.6 и 2.2; соответственно, $\alpha = \beta = 0.5$); кривые 4–5 – результаты, полученные из алгебраических соотношений (7.2 12)–(7.2.13) ($\boldsymbol{Pr}^{T*}$=2.2 и 2.6 соответственно; $\alpha = \beta = 1$)

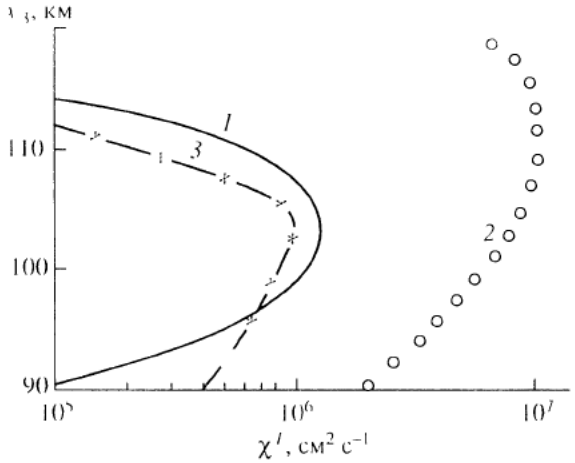


Рис. 7.3.3. Высотное распределение коэффициента турбулентной температуропроводности χ^T : 1 – результаты нашего расчета при $\boldsymbol{Pr}^{T*} = 2.2$ и $\alpha = \beta = 0.5$. 2 – результаты модели (*Гордиец и др , 1979*), 3 – профиль, использованный в (*CIRA-72*).

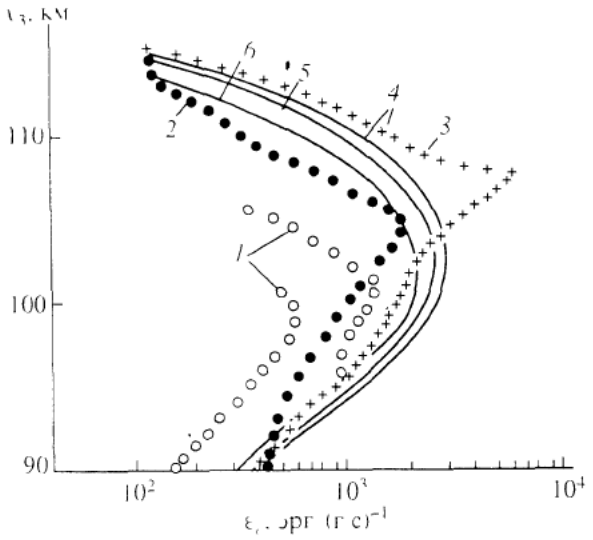


Рис.7.3.4. Высотные профили удельной скорости вязкой диссипации турбулентной энергии ε_e : 1, 2, 3 – измерения (*Рис и др., 1972*; *Роупер, 1974*; *Джастас, 1967*); 4–6 – результаты расчетов при $\alpha = \beta = 0.5$ и $Pr^{T*} = 3$, 2.6 и 2.2 соответственно.

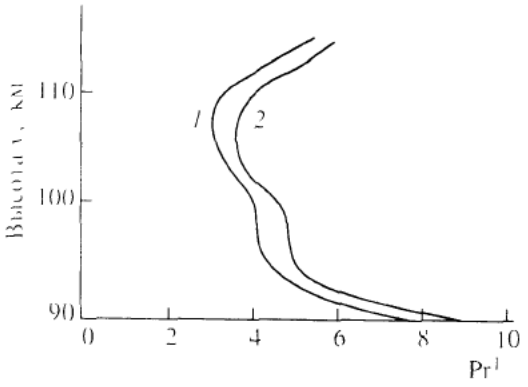


Рис.7.3.5. Высотное распределение турбулентного числа Прандтля (расчет); при Pr^{T*}=2.2 (кривая 1), при Pr^{T*}=2.6 (кривая 2); $\alpha = \beta = 0.5$.

лентности примерно равно диссипации. Этот баланс нарушается выше 110 км, где становится существенной диффузия турбулентности. Расчеты турбулентных коэффициентов, проведенные с помощью алгебраических соотношений (7.2.12)–(7.2.13), представлены на Рис. 7.3.2. Они показывают, что на высотах до 110 км вполне могут быть использованы упрощенные уравнения баланса (7.2.6) и (7.2.7). Из сопоставления Рис. 7.3.1 и Рис. 7.3.5 следует, что одновременно с ростом числа Ричардсона Ri растет и турбулентное число Прандтля Pr^T. Действительно, силы плавучести в большой степени затрудняют вертикальный перенос тепла (массы), чем вертикальный перенос, осуществляемый также пульсациями давления.

Были специально рассчитаны вклады величин Q_T^T и $Q_{<e>}^T$ (формулы (6.1.21) и (6.1.26)) в общий тепловой баланс рассматриваемых областей термосферы, связанных с эффектами турбулентной теплопроводности и диссипации турбулентной энергии за счет молекулярной вязкости. Проведенные нами расчеты свидетельствуют о том, что на высотах от 90 до 105 км происходит нагрев верхней атмосферы за счет диссипации, а на высотах больших 105 км она охлаждается турбулентной теплопроводностью, что подкрепляет ранее сделанный вывод.

В заключение отметим, что развитый метод полуэмпирического моделирования коэффициентов турбулентного обмена может быть использован при создании прогностической гидродинамической модели верхней атмосферы Земли в областях, мало изученных экспериментально, но сильно влияющих на структуру и тепловой режим всего околоземного космического пространства. Вместе с тем, необходимость учета, в общем трехмерном случае, анизотропии коэффициентов турбулентного обмена, а также отсутствие универсальных и точных дифференциальных уравнений для определения внешнего масштаба турбулентности требует разработки дополнительных подходов.

Краткие выводы:

1) На основе эволюционных уравнений переноса для турбулентной энергии и среднего квадрата пульсаций энтальпии смеси разработана методика полуэмпирического моделирования изотропных коэффициентов турбулентного обмена в стратифицированном в поле силы тяжести, турбулизованном многокомпонентном газовом потоке с поперечным сдвигом гидродинамической скорости.

2) Получены универсальные алгебраические выражения для коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности смеси в вертикальном направлении, зависящие от локальных значений таких параметров среды, как кинетическая энергия турбулентных пульсаций, динамические числа Ричардсона и Колмогорова, а также от внешнего масштаба турбулентности. Выведено алгебраическое уравнение для турбулентного числа Прандтля. Использование величины турбулентной энергии в качестве аргумента в выражениях для коэффициентов турбулентного обмена позволяет (при решении дополнительного дифференциального уравнения) приближенно учитывать неравновесность турбулентности по отношению к полям средних скоростей и температур, которая имеет место в свободных течениях в слоях с поперечным сдвигом скорости.

3) На основе разработанной методики проведено численное моделирование коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности в нижней рермосфере Земли и сопоставлены с имеющейся экспериментальной информацией. В общем трехмерном случае необходимо учетывать анизотропию коэффициентов турбулентного обмена, что требует разработки дополнительных подходов.

ГЛАВА 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ФЛУКТУАЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СРЕДЫ

Одно из важных приложений теории турбулентности многокомпонентных сред связано с моделированием динамических свойств средней атмосферы. При этом, в качестве исходных, используются различные данные измерений, в том числе данные, получаемые по результатам зондирования атмосферы в диапазонах оптических и радиоволн. Все более важную роль приобретают методы регулярного космического мониторинга, в связи с чем возрастает значимость разработки соответствующих физико-математических моделей, служащих целям аккуратной оперативной дешифровки измерительной информации в реальном масштабе времени.

На возможность получения информации о статистических параметрах турбулентности при изучении взаимодействия световой волны и турбулизованной газовой среды впервые было указано в работе (*Обухов, 1953*). Принципиальные возможности и перспективы развития подобных исследований широко обсуждались в литературе (см., например, (*Рытов, 1937; Татарский, 1967; Гурвич и др., 1976*)). В отличие от хорошо изученного как теоретически, так и экспериментально, приповерхностного слоя Земли, сведения о турбулентности в средней атмосфере сравнительно немногочисленны. Известно, что вертикальная и горизонтальная структура турбулентности в свободной атмосфере неоднородна. В частности, до высоты стратопаузы существуют слои, которые характеризуются резкими градиентами скорости ветра и температуры, а в ряде случаев – наличием регулярных внутренних гидродинамических волн, являющихся источником энергии турбулентного нагревания (*Александров и др., 1990; Гаврилов, 1974*). Нет достаточно полных сведений о вариациях спектра пульсаций показателя преломления атмосферных газов, учитывающих слоистую структуру атмосферы и особенности, связанные с макромасштабными метеорологическими явлениями. Основываясь на измерениях микроструктуры скорости ветра и температуры в таких слоях можно, тем не менее, считать, что соответствующие спектры близки к степенным. Это позволяет, при учете влияния атмосферной турбулентности на характер распространения зондирующего излучения, использовать в малых областях, пространственные масштабы которых много меньше внешнего масштаба турбулентности L (связанного с характерным размером крупных анизотропных энергонесущих вихрей), теорию локально-однородной и локально-изотропной турбулентности (*Татарский, 1967*).

Действительно, на высотах средней атмосферы спектр пульсаций показателя преломления воздуха в области масштабов волновых чисел 10^{-5} см$^{-1}$ $\le \kappa \le 10^{-1}$ см$^{-1}$ неплохо аппроксимируется в инерционном интервале законом Колмогорова $\Phi_n(\kappa) \propto C_n^2 \kappa^{-11/3}$ (*Колмогоров, 1941*). Тогда единственным неопределенным параметром, характеризующим интенсивность поля турбулентных пульсаций, оказывается структурная характеристика C_n^2 показателя преломления. По

существу, любой оптический эксперимент по определению статистических параметров световой волны, прошедшей слой турбулизованной атмосферы, в принципе дает возможность определить величину C_n^2. Из теории флуктуационных явлений при распространении волн в турбулизованной среде следует, что ключевой в ней является структурная характеристика показателя преломления, которая входит, например, в качестве сомножителя в формулу для дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности излучения. Это позволяет найти параметр C_n^2 оптическим путем по измеренным спектрам. С другой стороны, структурная характеристика C_n^2 функционально связана с двумя фундаментальными в теории турбулентности осредненных пульсационных полей скорости и температуры величинами: скоростью диссипации энергии турбулентности ε_e (формула (4.2.25)) и скоростью "рассасывания" пульсаций потенциальной температуры ε_h (формула (4.3.2)). Это дает другой, гидродинамический, способ нахождения функциональной связи величины C_n^2 с осредненными термогидродинамическими параметрами атмосферы и с их градиентами. Отсюда возникает возможность определения некоторых важных статистических характеристик турбулентности верхней атмосферы, например, таких, как внешний и внутренний масштабы турбулентности, коэффициенты турбулентного обмена и т. п. по оптическим измерениям пульсаций показателя преломления воздуха. Мы рассмотрим здесь, исходя из идеологии непрерывного космического мониторинга атмосферы, некоторые возможные подходы к моделированию внешнего масштаба турбулентности L по известному высотному распределению величины C_n^2. В свою очередь, определение структурной характеристики показателя преломления C_n^2 оказывается возможным проводить в интерактивном режиме по измеренной дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности излучения источника в оптическом диапазоне длин волн.

§ 8.1. Алгебраические уравнения для моделирования коэффициентов турбулентного переноса

Ранее (Гл. 3) была получена система гидродинамических уравнений смеси (3.2.4)–(3.2.8) масштаба среднего движения, которая может быть использована для адекватного моделирования средней атмосферы. В реологические соотношения (3.3.3), (3.3.15), (3.3.19) для входящих в эти уравнения турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений входят коэффициенты (в общем случае – тензоры) турбулентного обмена, которые должны быть заданы a priori. Обычно принимается гипотеза Колмогорова (*Колмогоров,1941*) , составляющая основу "принципа локального подобия" в теории полуэмпирического моделирования турбулентных коэффициентов однородной жидкости: коэффициенты турбулентного обмена, такие как ν^T , χ^T и скорость диссипации турбулентной энергии ε_e в каждой точке развитого турбулентного течения зависят только от свойств среды и объемных сил в этой точке (см. разд. 3.3.2), энергии турбулентности $<e>$ и локального значения внешнего масштаба турбулентности $L(\boldsymbol{r})$. В соответствии с этим, выражения, например, для величин ν^T и ε_e в слу-

чае квазиравновесной турбулентности будут иметь вид: $\nu^T = c_\mu L\sqrt{<e>}$, $\varepsilon_e = <e>^{3/2}/L$. Для определения параметра $<e>$ Колмогоров использовал эволюционное уравнение переноса (4.2.28) для турбулентной энергии. Важно, однако, подчеркнуть, что внешний масштаб турбулентности L оставался при этом неопределенным. В случае многокомпонентной турбулентности для получения более общих полуэмпирических выражений для коэффициентов турбулентного обмена могут быть использованы квазиравновесные алгебраические уравнения переноса для одноточечных вторых моментов пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров, выведенные в разд. 4.3.9.

8.1.1. Моделирование коэффициентов турбулентного обмена. Рассмотрим квазиравновесное приближение модели многокомпонентной турбулентности, когда дифференциальные уравнения переноса (4.2.9), (4.3.1), (4.3.9) для вторых моментов пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров записаны без конвективных и диффузионных членов и используются для установления алгебраических связей между корреляциями R_{ij}, $<e>$, q_j^T и $<h''^2>$:

$$-\bar\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R_{ij}}{\bar\rho}\right)\cong 0\cong(1-K_{p2})[R_{ik}<V_j>_{,k}+R_{jk}<V_i>_{,k}+\bar\rho G_{ij}]+$$

$$+K^*_{p1}\left(\frac{<e>^{1/2}}{L}\right)[R_{ij}+\tfrac{2}{3}\delta_{ij}\bar\rho<e>]-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}\left\{-K_{p2}[R_{sk}<V_s>_{,k}-\right.$$

$$\left.-\bar\rho G]-K^*_{e1}\bar\rho\frac{<e>^{3/2}}{L}\right\}, \qquad (8.1.1)$$

$$\bar\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q_j^T}{\bar\rho}\right)\cong 0\cong R_{jk}\left[<h>_{,k}-\frac{\bar p_{,k}}{\bar\rho}\right]-(1-K_{s2})q_k^T<V_j>_{,k}+$$

$$+(1-K_{s2})\bar\rho G_j-K^*_{s1}\frac{<e>^{1/2}}{L}q_j^T, \qquad (8.1.2)$$

$$\bar\rho\frac{\partial<e>}{\partial t}\cong 0\cong R_{ik}<V_j>_{,k}+\bar\rho G-K^*_{e1}\bar\rho\frac{<e>^{3/2}}{L}, \qquad (8.1.3)$$

$$\bar\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{<h''^2>}{2}\cong 0\cong -q_k^T\left[<h>_{,k}-\frac{\bar p_{,k}}{\bar\rho}\right]-K^*_{h1}\bar\rho\frac{<e>^{1/2}}{L}<h''^2>. \qquad (8.1.4)$$

Эта система замкнутых алгебраических уравнений, связывающих корреляционные моменты второго порядка и градиенты определяющих параметров осредненного течения смеси, составляет, так называемую, K-теорию многокомпонентной турбулентности. Она позволяет, вообще говоря, получить полуэмпирические выражения для коэффициентов турбулентного обмена.

В уравнениях (8.1.1)–(8.1.4) использованы следующие обозначения

$$K_{p1}^{*}=K_{p1}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{Re}^{T}}\frac{K_{e2}}{K_{p1}}\right),\ K_{e1}^{*}=K_{e1}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{Re}^{T}}\frac{K_{e2}}{K_{e1}}\right),$$

$$K_{s1}^{*}=K_{s1}\left(1+\frac{1+1/\boldsymbol{Pr}}{2\boldsymbol{Re}^{T}}\frac{K_{e2}}{K_{s1}}\right),\ K_{h1}^{*}=K_{h1}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{Pr}\,\boldsymbol{Re}^{T}}\frac{K_{h2}}{K_{h1}}\right). \qquad (8.1.5)$$

Коэффициенты K^{*} в (8.1.5) зависят от турбулентного числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^{T}$ ($\equiv \nu^{-1}L<e>^{1/2}$) и молекулярного числа Прандтля $\boldsymbol{Pr}$ ($\equiv\nu/\chi$, где $\chi=\lambda/\rho C_{p}$ – молекулярный коэффициент теплопроводности); случай развитой турбулентности, когда число $\boldsymbol{Re}^{T}$ велико и все коэффициенты $K^{*}\equiv K$, известен как "сверхравновесное" приближение (*Дональдсон, 1972*). Следует отметить, что, хотя малые числа Рейнольдса несовместимы с предположением о локально-равновесной турбулентности, в уравнениях (8.1.1)–(8.1.4) нами, тем не менее, оставлены в рассмотрении члены, описывающие эффекты, присущие ламинарному потоку. Сделано это по той причине, что в дальнейшем будут использоваться формулы для коэффициентов турбулентного обмена, полученные для локально-равновесного течения и в условиях, когда величина $<e>$ определяется из полного дифференциального уравнения переноса (7.2.5).

В качестве простого примера полуэмпирического моделирования коэффициентов турбулентного обмена рассмотрим свободное горизонтальное двухмерное течение со сдвигом, когда $<V_j>=\{<V(z)>,0,0\}$, $g_j=(0,0,-g)$ и $<T>=<T(z)>$; координата x направлена горизонтально вдоль основного течения, а координата z – вертикально вверх. В этом случае исходная система уравнений (8.1.1)–(8.1.4) для корреляций R_{ij}, $<e>$, q_j^{T} и $<h''^{2}>$ позволяет получить следующие реологические соотношения для парных корреляций (потоков турбулентного переноса) в стратифицированной в поле силы тяжести среде:

$$<e>=\frac{1}{K_{e1}^{*}}L^{2}\boldsymbol{Pr}^{T}\left(\frac{\partial<V>}{\partial z}\right)^{2}\Psi\cdot(1-\boldsymbol{Rf}-\boldsymbol{Kf}), \qquad (8.1.6)$$

$$R_{xz}=\bar{\rho}L<e>^{1/2}\boldsymbol{Pr}^{T}\Psi\cdot\frac{\partial<V>}{\partial z}, \qquad (8.1.7)$$

$$R_{zz}=-\frac{2}{3}\bar{\rho}<e>+\frac{4}{3}\bar{\rho}<e>E_{2}\frac{0{,}5+\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{Kf}}{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{Rf}-\boldsymbol{Kf}}, \qquad (8.1.8)$$

$$q_{x}^{T}=\Psi\cdot L^{2}\bar{\rho}\frac{1}{K_{s1}^{*}}(1-\boldsymbol{Pr}^{T}-K_{s2})\frac{\partial<V>}{\partial z}\left(g+\frac{\partial<h>}{\partial z}\right), \qquad (8.1.9)$$

$$q_{z}^{T}=-\bar{\rho}L<e>^{1/2}\Psi\cdot\left(g+\frac{\partial<h>}{\partial z}\right), \qquad (8.1.10)$$

$$< h''^2 >= L^2 \Psi \cdot \frac{1}{K^*_{h1}} \left(g + \frac{\partial < h >}{\partial z} \right)^2 . \qquad (8.1.11)$$

Фигурирующие в этих соотношениях динамические числа Ричардсона $\boldsymbol{Rf}$ и Колмогорова $\boldsymbol{Kf}$, учитывающие влияние стратификации температуры и химического состава смеси на механизм поддержания турбулентности, а также турбулентное число Прандтля $\boldsymbol{Pr}^T$ и характеристическая (для режима сдвигового течения смеси) функция Ψ определяются выражениями:

$$\boldsymbol{Rf} \equiv -\frac{g q_z^T}{< C_p >< T > R_{xz} \dfrac{\partial < V >}{\partial z}} = \frac{\chi_{zz}^T}{\nu_{xz}^T} \frac{g \left[g + \dfrac{\partial < h >}{\partial z} \right]}{< C_p >< T > \left(\dfrac{\partial < V >}{\partial z} \right)^2} = \frac{\boldsymbol{Ri}}{\boldsymbol{Pr}^T}, \qquad (8.1.12)$$

$$\boldsymbol{Kf} \equiv \frac{g \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha J_{\alpha z}^T}{< C_p >< T > R_{13} \dfrac{\partial V}{\partial z}} = -\frac{\chi_{zz}^T}{\nu_{xz}^T} \frac{g \sum_{\alpha=1}^{N} \dfrac{\partial < Z_\alpha >}{\partial z}}{< C_p >< T > \left(\dfrac{\partial < V >}{\partial z} \right)^2} = \frac{\boldsymbol{Ko}}{\boldsymbol{Pr}^T} \qquad (8.1.13)$$

$$\boldsymbol{Pr}^T \equiv \frac{\nu_{xz}^T}{\chi_{zz}^T} = \gamma \frac{\boldsymbol{Rf}_2 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}}{\boldsymbol{Rf}_1 - \boldsymbol{Rf} - \beta \boldsymbol{Kf}} , \quad \Psi = \Psi_0 \frac{\boldsymbol{Rf}_0 - \boldsymbol{Rf} - \alpha \boldsymbol{Kf}}{1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}} , \qquad (8.1.14)$$

а параметры $\alpha, \beta, \gamma, \Psi_0$, $\boldsymbol{Rf}_0, \boldsymbol{Rf}_1, \boldsymbol{Rf}_2$, зависящие от числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}^T$, определяются через эмпирические константы модели турбулентности следующим образом

$$\alpha = \frac{1 + 2E_2}{1 + 2E_2 + 1.5E_1}, \quad \beta = \frac{2 + E_2}{2 + E_2 + 3E_1}, \quad \gamma = \frac{K_{s1} E_2}{K_{e1}} \cdot \frac{2 + 4E_2 + 3E_3}{2 + E_2 + 3E_1}, \qquad (8.1.15)$$

$$\mathbf{Rf}_0 = \frac{1 - E_2}{1 + 2E_2 + 1.5E_1}, \quad \mathbf{Rf}_1 = \frac{1 - E_1}{1 + 0.5E_2 + 1.5E_1}, \quad \mathbf{Rf}_2 = \frac{1 - E_2}{1 + 2E_2 + 1.5E_3}, \qquad (8.1.16)$$

$$\Psi_0 = \frac{2 + 4E_2 + 3E_1}{3K_{s1}}, \qquad (8.1.17)$$

где

$$E_1 = \frac{K^*_{e1}(1 - K_{s2})}{K^*_{h1}}, \quad E_2 = \frac{K^*_{e1}(1 - K_{p2})}{K^*_{p1}}, \quad E_3 = \frac{K^*_{e1}(1 - K_{s2})}{K^*_{s2}}. \qquad (8.1.18)$$

Проведенный сравнительный анализ численных значений параметров (8.1.16), вычисленных для различных известных в литературе полуэмпирических моделей турбулентности (см., например, (*Дирдорф, 1973; Андрэ и др., 1976; Левеллен, 1980;*)), показал, что в случае развитой турбулентности (т.е., когда $\boldsymbol{Re}^T >> 1$) параметры $\boldsymbol{Rf}_0$, $\boldsymbol{Rf}_1$ и $\boldsymbol{Rf}_2$ являются положительно определенны-

ми, причем неравенство $\boldsymbol{Rf}_1 < \boldsymbol{Rf}_2$ справедливо всегда, а условие $\boldsymbol{Rf}_0 < \boldsymbol{Rf}_1$ имеет место, когда $E_1 > E_2 + E_3$. Последнее неравенство справедливо для всех известных моделей (см. Табл. 8.1.1). Таким образом существует некоторое критическое значение числа Ричардсона $\boldsymbol{Rf}_c = \boldsymbol{Rf}_0 < 1$, являющееся предельным для комбинации величин $\boldsymbol{Rf} + \alpha \boldsymbol{Kf}$ в развитом турбулентном потоке. При $\boldsymbol{Rf} + \alpha \boldsymbol{Kf} > \boldsymbol{Rf}_0$ характеристическая функция $\Psi < 0$, а потому формулы (8.1.6) - (8.1.11) теряют смысл, что физически соответствует режиму затухания турбулентности.

Кроме того, используя (8.1.14), можно найти критические значения чисел Прандтля $\boldsymbol{Pr}_c^T$ и Ричардсона $\boldsymbol{Ri}_c = \boldsymbol{Rf}_c \boldsymbol{Pr}_c^T$, которые также являются предельными в развитом турбулентном потоке. В случае, когда $\boldsymbol{Ri} > \boldsymbol{Ri}_c$, следует, для сохранения физического смысла приведенных формул, полагать, что характеристическая функция $\Psi \equiv 0$. Критические значения этих параметров, рассчитанные для модели (*Меллор, 1973*) равны $\boldsymbol{Ri}_c$ =2.2 и $\boldsymbol{Pr}_c^T$ =12.6.

Таблица 8.1.1

Модельные значения параметров $\alpha, \beta, \ldots,$

E_1	E_2	E_3	α	β	γ	Ψ_0	$\boldsymbol{Rf}_0$	$\boldsymbol{Rf}_1$	$\boldsymbol{Rf}_2$
2.25	0.12	0.11	0.28	0.24	0.34	0.76	0.18	0.19	0.55

$\boldsymbol{Pr}^*$	a	b	c	D
0.99	2.29	0.65	–0.87	1.16

8.1.2. Коэффициенты турбулентного обмена. Для турбулентного числа Прандтля $\boldsymbol{Pr}^T$ удобно использовать выражение, связывающее число $\boldsymbol{Pr}^T$ с градиентными числами Ричардсона $\boldsymbol{Ri}$ и Колмогорова $\boldsymbol{Ko}$. Из (8.1.14) легко найти следующую формулу для $\boldsymbol{Pr}^T$

$$\mathbf{Pr}^T = 0.5\mathbf{Pr}^* + (a\ \mathbf{Ri} + b\ \mathbf{Ko}) + [0.25\ \mathbf{Pr}^{*2} + (a\mathbf{Ri} + b\ \mathbf{Ko})^2 - c\boldsymbol{Ri} - d\,\boldsymbol{Ko}]^{1/2}, \quad (8.1.19)$$

где

$$a = \frac{2 + E_2 + 3E_1}{4(1 - E_2)},\ b = \frac{2 + E_2}{4(1 - E_2)},\ c = \boldsymbol{Pr}^* \frac{2 + 7E_2 + 6E_3 - 3E_1}{4(1 - E_2)},$$

$$d = \boldsymbol{Pr}^* \frac{2 + 7E_2 + 6E_3}{4(1 - E_2)},\ \boldsymbol{Pr}^* = \frac{K_{s1}^* E_2}{K_{e1}^*}. \quad (8.1.20)$$

Подкоренное выражение в (8.1.19) положительно при любых значениях чисел $\boldsymbol{Ri}$ и $\boldsymbol{Ko}$ (при условии, что $E_1 > E_2 + E_3$). Фигурирующая в (8.1.19) комбинация параметров модели (обозначенная как $\boldsymbol{Pr}^*$) имеет смысл турбулентного числа Прандтля для специального режима течения, когда на баланс турбулентной энергии силы плавучести не оказывают влияния, т.е. когда $\boldsymbol{Ri} \to 0$ и $\boldsymbol{Ko} \to 0$. Расче-

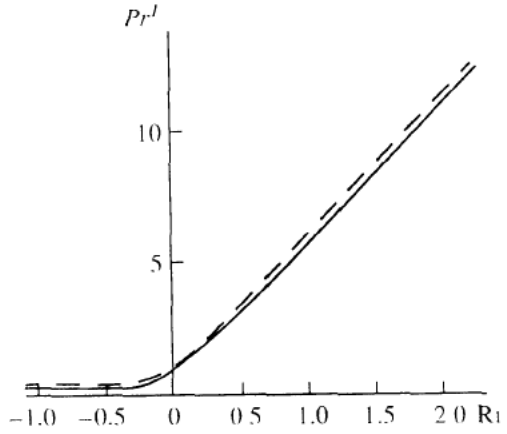


Рис. 8.1.1. Функциональная зависимость числа Прандтля $\boldsymbol{Pr}^T$ от градиентов основного течения (числа $\boldsymbol{Ri}$), полученная с помощью "сверхравновесного" подхода (— $\boldsymbol{Ko}$ = 0, --- $\boldsymbol{Ko}$ =0.1).

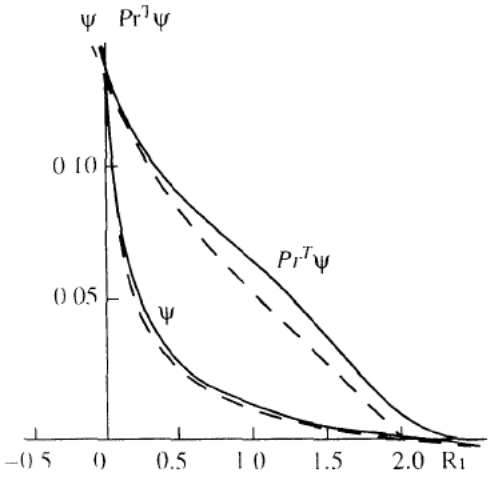


Рис. 8.1.2. Функциональная зависимость функций Ψ и $\Psi\,\boldsymbol{Pr}^T$ от числа $\boldsymbol{Ri}$ в "сверхравновесном" приближении (—$\boldsymbol{Ko}$ = 0, --- $\boldsymbol{Ko}$ = 0.1).

ты числа $\boldsymbol{Pr}^*$ для различных моделей турбулентности показывают, что $\boldsymbol{Pr}^*\sim 1$. Из уравнения (8.1.19) следует, что при стратификации, близкой к безразличной, когда $\boldsymbol{Pr}^T \sim \boldsymbol{Pr}^*$, с ростом неустойчивости атмосферы величина $\boldsymbol{Pr}^T$ уменьшается, а с увеличением ее устойчивости, т.е. с ростом численных значений параметров $\boldsymbol{Ri}$ и $\boldsymbol{Rf}$, число $\boldsymbol{Pr}^T$ быстро возрастает (Рис. 8.1.1). Функциональная зависимость важнейших характеристик многокомпонентной турбулентной среды – характеристической функции Ψ и комбинации $\Psi\,\boldsymbol{Pr}^T$ – от градиентов основного течения (чисел $\boldsymbol{Ri}$ и $\boldsymbol{Ko}$), получаемая из уравнений (8.1.1)–(8.1.5) в "сверхравновесном" приближении, показана на Рис.8.1.2. Единственным свободным параметром согласования в этом случае является число Колмогорова для основного течения.

Используя соотношения (8.1.6)–(8.1.10) для корреляционных моментов, получим для коэффициентов турбулентного обмена следующие выражения

$$\nu^T_{xz} \equiv \frac{R_{xz}}{\bar{\rho}\partial <V>/\partial z} = \frac{L^2 \boldsymbol{Pr}^T \Psi^{3/2}}{K^{*1/2}_{e1}} \sqrt{\boldsymbol{Pr}^T - \boldsymbol{Ri} - \boldsymbol{Ko}}\, \frac{\partial <V>}{\partial z}\quad , \tag{8.1.21}$$

$$\nu^T_{zz} \equiv \frac{R_{zz} + \tfrac{2}{3}\bar{\rho} <e>}{\bar{\rho}\partial <V>/\partial z} = \frac{4}{3} L^2 \Psi) \frac{1 - K_{p2}}{K^*_{p1}} (0{,}5\boldsymbol{Pr} + \boldsymbol{Ri} + \boldsymbol{Ko}) \frac{\partial <V>}{\partial z}. \tag{8.1.22}$$

$$\chi^T_{xz} \equiv -\frac{J^T_{qx}}{\bar{\rho}\dfrac{\partial <V>}{\partial z}\left(g + \dfrac{\partial <h>}{\partial z}\right)} = -\frac{L^2 \Psi^{3/2}}{K^{*1/2}_{e1}} (1 + \boldsymbol{Pr}^t - K_{s2}) \frac{\partial <V>}{\partial z}, \tag{8.1.23}$$

$$\chi^t_{zz} \equiv -\frac{J^T_{qz}}{\bar{\rho}\left(g + \dfrac{\partial <h>}{\partial z}\right)} = -\frac{L^2 \Psi^{3/2}}{K^{*1/2}_{e1}} (\boldsymbol{Ri} + \boldsymbol{Ko} - \boldsymbol{Pr}^T) \frac{\partial <V>}{\partial z}\,. \tag{8.1.24}$$

При $\boldsymbol{Rf} + \alpha \boldsymbol{Kf} = \boldsymbol{Rf}_0$ из (8.1.21)–(8.1.24) следует, что $\nu^T = \chi^T = 0$; такое же значение для коэффициентов ν^T и χ^T необходимо принять при $\boldsymbol{Rf} + \alpha \boldsymbol{Kf} > \boldsymbol{Rf}_0$, так как и в этом случае упрощенные уравнения (8.1.6)–(8.1.10) не могут быть удовлетворены ни при каких положительных значениях ν^T и χ^T.

На Рис. 8.1.3 и Рис. 8.1.4 показана функциональная зависимость корреляционных моментов от градиентов основного течения (от числа $\boldsymbol{Ri}$) в сверхравновесном приближении. Профили составляющих тензора напряжений Рейнольдса обезразмерены делением на $L^2(\partial <V> /\partial z)^2$, а профили корреляций пульсаций энтальпии - делением на $L^2(\partial <V> /\partial z)(g + \partial <h> /\partial z)$.

Исходя из необходимости учета неравновесности реального поля турбулентности, будем, как и в Гл.7, предполагать существование некоторого "внутреннего равновесия" в структуре турбулентности по отношению к полю средних скоростей и температур, при котором коэффициенты турбулентного обмена могут быть выражены через параметры $<e>$ и L и локальные свойства среды соотношениями типа

$$\nu^T_{z\,z} = L <e>^{1/2} \boldsymbol{Pr}^T \Psi, \quad \chi^T_{z\,z} = L <e>^{1/2} \Psi; \tag{8.1.25}$$

при этом пространственно-временное распределение величины $<e>$ определяется из следующего эволюционного уравнения переноса турбулентной энергии

$$\rho \frac{D<e>}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z}\left(c_1 \rho L <e>^{1/2} \frac{\partial <e>}{\partial z} \right) = \nu^T_{zz} \left(\frac{\partial <V>}{\partial z} \right)^2 (1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf}) - K_{e1} \rho \frac{<e>^{3/2}}{L}. \tag{8.1.26}$$

Заметим, что подобный подход, развитый ранее для сдвиговой турбулентности в однородной среде (*Меллор, Ямада, 1982*), более точен, поскольку он учитывает в уравнении переноса турбулентной энергии как конвективный и диффузионный

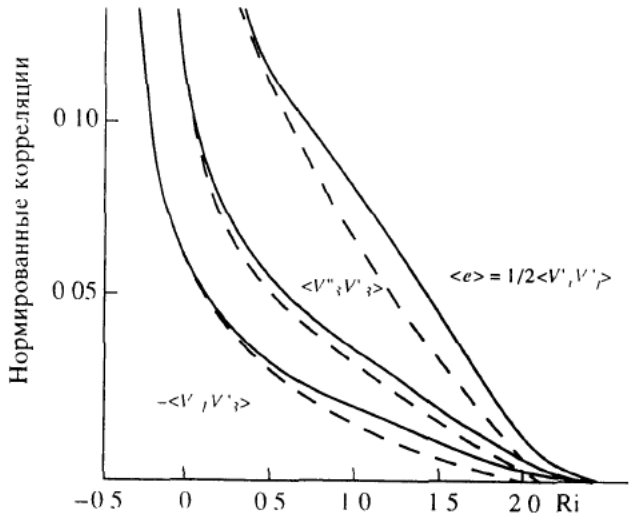


Рис. 8.1.3. Функциональная зависимость составляющих тензора напряжений Рейнольдса, обезразмеренных делением на $L^2(\partial <V> /\partial z)^2$, от градиентного числа Ричардсона $\boldsymbol{Ri}$ (— $\boldsymbol{Ko} = 0$, --- $\boldsymbol{Ko} = 0.1$).

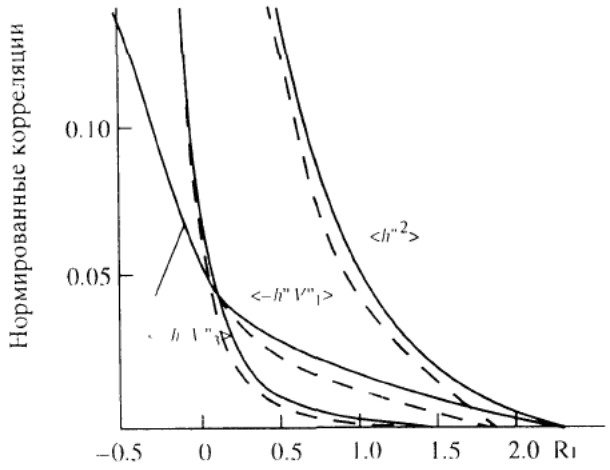


Рис. 8.1.4. Функциональная зависимость профилей корреляций энтальпии и скорости, обезразмеренных делением на $L^2(\partial < V > /\partial z)(g + \partial < h > /\partial z)$, от градиентного числа Ричардсона $\boldsymbol{Ri}$ (— $\boldsymbol{Ko} = 0$, --- $\boldsymbol{Ko} = 0.1$).

перенос, так и предысторию процесса; поэтому, в случае свободной атмосферы, когда эти факторы играют важную роль, он оказывается предпочтительнее, чем просто "сверхравновесное" приближение.

Масштаб турбулентности и методическое приложение. Для окончательного замыкания рассмотренной модели необходимо задать внешний масштаб турбулентности L. Масштаб L, появляющийся в эволюционных уравнениях переноса для вторых моментов при параметризации неизвестных корреляций и характеризующий размеры больших энергосодержащих вихрей, зависит, вообще говоря, от процессов конвективного переноса, генерации и диссипации турбулентности, а также от предыстории этого процесса. В Гл.7 показано, что в свободных слоях со сдвигом масштаб L может быть определен при помощи простого модельного уравнения (см. формулу (7.3.1)). Вывод более общих дифференциальных уравнений для L является одной из самых сложных задач полуэмпирической теории многокомпонентной турбулентности. Как уже подчеркивалось в Гл. 4, параметр L не определяется только через одноточечные моменты пульсирующих величин. Являясь мерой расстояний между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ в потоке, на которых еще существуют отличные от нуля корреляции $<V''(\boldsymbol{r}_1)V''(\boldsymbol{r}_2)>$, внешний масштаб турбулентности L должен находиться из соответствующего дифференциального уравнения, получаемого из уравнения для $<V''(\boldsymbol{r}_1)V''(\boldsymbol{r}_2)>$, путем интегрирования его по расстоянию между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ (см. § 4.3). Между тем, используемые в литературе подобные уравнения для масштаба L содержат, как правило, большое число плохо определенных и недостаточно экспериментально обоснованных коэффициентов пропорциональности. Поэтому их следует рассматривать как менее достоверные, чем, например, балансовое уравнение для тензора напряжений Рейнольдса, в котором многие члены определены точно.

С учетом изложенных соображений и их развития применительно к мето-

дическому обеспечению проекта непрерывного космического мониторинга средней атмосферы, нами был предложен другой способ определения внешнего масштаба турбулентности (*Колесниченко, Маров, 1996*). Он позволяет рассчитать L по известной структурной характеристике показателя преломления воздуха C_n^2, измеренной оптическими методами непосредственно на борту космического аппарата при дистанционном зондировании атмосферы светом от эталонной звезды. Такой проект, названный "*Gomos*", предложен в целях постоянного космического мониторинга состояния озоносферы Земли (*Бертo и др., 1988*). Основу концепции составляет установка на борту искусственного спутника Земли спектрометра высокого разрешения и регистрация света от выбранных каталожных звезд с учетом эффекта затмения, которое происходит всякий раз, когда световая волна ослабляется атмосферой при заходе данной звезды. Одной из главных целей проекта является реконструкция содержания озона и других малых атмосферных составляющих, влияющих на условия его химического равновесия (окислы азота, углерода, серы, хлорфторуглеводороды), их максимальных концентраций и пространственно-временных вариаций. Подобная реконструкция связана, в частности, с необходимостью учета таких искажающих эффектов в распространении света, как случайная рефракция, вызванная турбулизациёй атмосферы. Действительно, при движении спутника по орбите, лучи света от звезды, попадающие на приемный объектив, пересекают различные пространственные неоднородности показателя преломления воздуха, что вызывает мерцание звезд - случайные изменения блеска во времени. В качестве основного статистического параметра зондирующей световой волны удобно для этих целей использовать, например, дисперсию флуктуаций амплитуды, величина которой может быть рассчитана по измеряемому в эксперименте индексу мерцаний.

Таким образом, для успешной реализации проекта важно предусмотреть комплексный анализ экспериментальных данных, с учетом отфильтровывания эффектов, обусловленных влиянием турбулентности среды, которые должны быть скоррелированы с результатами численных расчетов пространственных распределений малых атмосферных составляющих. В свою очередь, по измерениям самих этих эффектов (сцинтилляций) можно определять характеристики турбулентности, в частности коэффициенты турбулентного переноса, и тем самым строить более репрезентативные модели средней атмосферы, состояние которой определяется сложной совокупностью процессов динамики, тепло- и массопереноса и химической кинетики.

§ 8.2. Определение внешнего масштаба турбулентности через структурную характеристику показателя преломления

Напомним, что специфика атмосферы, как турбулентной среды, состоит в том, что в присутствии силы тяжести в неравномерно нагретых горизонтальных атмосферных слоях механическое равновесие невозможно, и возникающие архимедовы силы плавучести приводят к появлению вихревых движений (термическая и концентрационная турбулентность), стремящихся перемешать среду. Большие градиенты давления (и температуры) способствуют возникновению глобальных перемещений воздушных слоев с вертикальным сдвигом ветра, который способствует зарождению дополнительных вихрей (механическая тур-

лентность), отдавая им часть своей энергии. В атмосфере Земли наблюдается широкий спектр вихревых движений: от микромасштабов, наименьший из которых характеризует тепловое движение молекул смеси, до макромасштабов, наибольшему из которых отвечает зональный поток, с горизонтальным линейным размером порядка 10^4 км. Вихри мелкомасштабной турбулентности, с размерами от миллиметров до сотен метров, вызывают пульсации показателя преломления воздуха. Последние практически полностью обусловлены пульсациями температуры. Таким образом, малые термические неоднородности обуславливают не только турбулентный перенос тепла, но и оказывают существенное влияние на характер распространения зондирующего излучения, вызывая искажение распространяющихся световых волн. В этом параграфе мы исследуем влияние случайных неоднородностей показателя преломления $n(\boldsymbol{r})$ на характер распространения оптического излучения при дистанционном зондировании атмосферы светом от звезды. Вопросы кинематики турбулентности и микроструктуры поля показателя преломления воздуха $n(\boldsymbol{r})$ подробно рассмотрены в работе (*Колесниченко, Маров, 1996*).

8.2.1. Кинематика турбулентности и микроструктура полей атмосферных параметров. Микроструктура турбулентных неоднородностей в атмосфере, возникающих при больших числах Рейнольдса $\boldsymbol{Re} = VL/\nu$ ($\boldsymbol{Re} >> \boldsymbol{Re}_c = 2500...5000$) в потоке с характерным размером крупномасштабных вихрей внешнего масштаба турбулентности L и характерной скоростью V (разностью гидродинамических скоростей на расстоянии L) определяется механизмом каскадного дробления под влиянием сил инерции крупных вихрей на все более мелкие. При этом происходит перераспределение кинетической энергии V^3/L (единицы массы) несущего потока от крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным с характерными параметрами L_k и V_k вплоть до самого малого с характерным размером внутреннего масштаба турбулентности l. Каскадный механизм передачи кинетической энергии атмосферных вихрей $V^3/L \approx V_1^3/L_1 \approx V_2^3/L_2 \approx \ldots \approx V_n^3/L_n \equiv v^3/l$ (где $L > L_1 > L_2 > \ldots > L_n \equiv l$) в случае развитой турбулентности не затухает во времени только потому, что существуют внешние источники энергии, непрерывно подпитывающие сдвиговый поток. Как указывалось в Гл. 1, кинетическая энергия, почерпнутая относительно крупными вихрями, после каскадного механизма передачи ее к более мелким вихрям диссипирует в тепло в этих вихрях. Диссипация энергии в единице массы жидкости за единицу времени, равная по порядку величины $\nu V_k^2/L_k^2$ для вихрей с размерами L_k и V_k, с уменьшением размера вихря возрастает и продолжается до тех пор, пока не будет достигнут минимальный размер вихря l, при котором его кинетическая энергия по порядку величины равна диссипации энергии за счет молекулярной вязкости $V^3/L \approx V_1^3/L_1 \approx V_2^3/L_2 \approx \ldots \approx V_n^3/L_n (\equiv v^3/l) \approx \nu v^2/l^2 \approx \varepsilon_e$. Таким образом, квазистационарный режим существования подобного каскадного механизма характеризуется, с одной стороны, некоторой приблизительно постоянной величиной ε_e – скоростью передачи кинетической энергии вихревого вращения от крупных вихрей к более мелким вихрям, а с другой стороны, для

молекулярной кинематической вязкостью ν. Величина ε_e соответствует скорости диссипации турбулентной энергии в тепло, ранее введенной формулой (4.2.25). Процесс дробления более крупных вихрей останавливается в случае, когда силы вязкости в жидкости начинают играть определяющую роль, что происходит для вихрей с числами Рейнольдса $\boldsymbol{Re} = v_0 l_0 / \nu \sim 1$. Область диссипации турбулентной энергии вследствие молекулярной вязкости определяется колмогоровским масштабом турбулентности $l_k = \nu^{3/4}\varepsilon_e^{-1/4}$, который совпадает по порядку величины с внутренним масштабом турбулентности l_0.

В Гл.1 отмечалось, что адекватное описание поля турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров (скорости ветра, температуры, показателя преломления воздуха и т.п.) турбулизованной атмосферы, возможно только в рамках статистического подхода. Если число Рейнольдса $\boldsymbol{Re} = VL / \nu$ велико, то, несмотря на анизотропию и неоднородность исходных крупных вихрей, случайный процесс их дробления приводит к тому, что для широкого диапазона масштабов турбулентных неоднородностей в атмосфере, в интервале масштабов $l_k < r < L$, структура развитой турбулентности, т.е. мелкомасштабные вихревые поля термогидродинамических параметров, имеет существенно однородный и изотропный характер. В этом случае наиболее подходящим инструментарием при изучения турбулентности являются, так называемые, структурные функции для случайных параметров среды (*Колмогоров, 1941*) и соответствующие им спектры.

8.2.2. Структурные и спектральные функции случайных полей. В общем случае при статистическом моделировании турбулентности в атмосфере приходится иметь дело со случайными функциями пульсирующих термогидродинамических параметров, зависящими от трех пространственных координат и времени. Рассмотрим сначала локально однородные в некоторой области G, т.е. инвариантные относительно сдвигов пары точек $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}$, случайные поля $f(\boldsymbol{r})$ не зависящие от времени ($f(\boldsymbol{r})$ – действительно). В качестве статистических характеристик для локально однородной флуктуирующей атмосферы удобно использовать структурные функции $D_f(\boldsymbol{r}) = <\left[f(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}_0)\right]^2>$ для случайных полей $f(\boldsymbol{r})$ каких-либо макроскопических параметров (*Колмогоров, 1941*). Для рассматриваемого далее локально-однородного и изотропного, т.е. инвариантного относительно вращений и зеркальных отражений вектора $\boldsymbol{r}_0$, случайного поля $f(\boldsymbol{r})$, структурная функция зависит только от величины радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и не зависит от его направления, $D_f(\boldsymbol{r}) = D_f(r)$; здесь $r = |\boldsymbol{r}|$ – расстояние между точками наблюдения. В этом случае спектральное разложение структурной функции $D_f(r)$ в трехмерные (или одномерные) интегралы Фурье может быть представлено в виде (см., например, (*Татарский, 1967*)

$$D_f(r) = 8\pi \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) \Phi_f(\kappa)\kappa^2 d\kappa \left(= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \kappa r) V_f(\kappa) d\kappa\right), \tag{8.2.1}$$

где κ – модуль волнового числа, $\kappa = |\kappa|$; $\Phi_f(\kappa)$ (≥ 0) – трехмерная спектральная плотность изотропного случайного поля $f(r)$, связанная с одномерной спектральной плотностью $V_f(\kappa)$ соотношениями

$$\Phi_f(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa}\frac{dV_f(\kappa)}{d\kappa}, \tag{8.2.2}$$

$$V_f(\kappa) = \frac{1}{8\pi\kappa}\int_0^\infty \sin\kappa r \frac{dD_f(r)}{dr}\,dr\,. \tag{8.2.3}$$

Знание структурной функции $D_f(r)$ позволяет рассчитать корреляционную функцию $B_f(r) = < f(r_0 + r)\cdot f(r_0) >$ случайного изотропного поля $f(r)$ (в тех случаях, когда последняя существует) с помощью простой формулы: $B_f(r) = \frac{1}{2}[D_f(\infty) - D_f(r)]$; соответствующая, т.е. сопряженная по Фурье корреляционной функции $B_f(r)$, трехмерная спектральная плотность $\Phi_f(\kappa)$ может быть найдена при этом по формулам (8.2.2) и (8.2.3).

При анализе случайных пульсирующих параметров излучения (света от звезды), проходящего через атмосферу, представляют интерес статистические характеристики этих параметров на плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения. Для описания свойств случайного поля $f(r)$, однородного и изотропного в плоскости x = const, удобно использовать двумерные Фурье-спектры $F_f(0,\kappa_2,\kappa_3)$ структурной функции $D_f(0,\eta,\xi)$; здесь $x = x'$, $y - y' = \eta$, $z - z' = \xi$ – разности координат двух точек на плоскости x = const. В случае, когда функция $f(\boldsymbol{r})$ локально однородна в плоскости x = const, можно написать (*Татарский, 1967*)

$$D_f(0,\eta,\xi) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int [1 - \cos(\kappa_2\eta + \kappa_3\xi)]F(0,\kappa_2,\kappa_3)\,d\kappa_2 d\kappa_3\,. \tag{8.2.4}$$

Если к тому же случайное поле $f(\boldsymbol{r})$ является и локально изотропным в плоскости x = const, то двумерная спектральная плотность $F_f(|x|,,\kappa_2,\kappa_3)$ зависит лишь от комплекса $\kappa = (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^{1/2}$, и тогда для структурной $D_f(\rho)$ и корреляционной $B_f(\rho)$ функций в этой плоскости имеем (в полярных координатах)

$$D_f(\rho) = 4\pi\int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)]F_f(\kappa,0)\kappa d\kappa, \tag{8.2.5}$$

$$B_f(\rho) = 2\pi\int_0^\infty J_0(\kappa\rho)F_f(\kappa,0)\kappa d\kappa\,, \tag{8.2.6}$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя; $\rho = (\eta^2 + \xi^2)^{1/2}$ расстояние между точками (y, z) и (y', z') в плоскости x = const. Двумерная спектральная плотность $F(\kappa,x)$ локально

изотропного случайного поля может быть выражена через его трехмерную спектральную плотность $\Phi(\kappa)$ с помощью следующих, сопряженных по Фурье, соотношений

$$F_f(\kappa_2,\kappa_3,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\kappa_1 x)\Phi_f(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)\,d\kappa_1, \quad (1)$$

$$\Phi_f(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\kappa_1,\kappa_2,x)\cos(\kappa_1 x)\,dx\,. \quad (2) \qquad (8.2.7)$$

Гипотеза замороженности Тейлора. При исследовании влияния атмосферной турбулентности на распространение света от звезды (в системе координат, связанной со спутником) большую роль играют случайные поля $f(\boldsymbol{r},t)$, например, поле интенсивности излучения $I_\lambda(y,z,t)$, изменения во времени которых вызываются простым перемещением их пространственной "замороженной" структуры с постоянной скоростью $\boldsymbol{w}$; в нашем случае $\boldsymbol{w}$ – перпендикулярная к направлению распространения световой волны составляющая скорости движения спутника. Математически условие "замороженности" записывается следующим образом: $f(\boldsymbol{r},\tau)=f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}\,\tau,\,0)$. Для таких неизменных полей может быть установлена связь между пространственно-временными структурными функциями $D_f(\boldsymbol{r},\tau)$ и чисто пространственными функциями $D_f(\boldsymbol{r})$

$$D_f(\boldsymbol{r},\tau)=D_f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}\,\tau).$$

Отсюда можно получить формулу, связывающую временной (частотный) спектр случайного скалярного поля $W_f(\omega)$, определяемый соотношением

$$B_f(\tau) = 2\int_0^{\infty}W_f(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \qquad (8.2.8)$$

с его трехмерной пространственной спектральной плотностью Φ_f, где $B_f(\tau)$ – временная автокорреляционная функция. Для случая локально-изотропного случайного поля $f(\boldsymbol{r},t)$ эта связь выражается формулами

$$\Phi_f(\omega/|\boldsymbol{w}|) = -\frac{|\boldsymbol{w}|^3}{2\pi\omega}\,\frac{dW_f(\omega)}{d\omega}\,, \qquad (8.2.9)$$

$$W_f(\omega) = \left(\frac{2\pi}{|\boldsymbol{w}|}\right)\int_{|\omega|/|\boldsymbol{w}|}^{\infty}\Phi_f(\kappa)\kappa\,d\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{w}|}V_f(\omega/|\boldsymbol{w}|)\,, \qquad (8.2.10)$$

где ω ($=2\pi f$) – круговая частота (f – частота). Эти формулы пересчета удобно использовать при обработке экспериментальных данных, полученных со спутника, поскольку при зондировании атмосферы измеряются как раз частотные спектры, в то время как теоретически проще определить пространственную структуру

случайного поля изучаемого структурного параметра $f(\boldsymbol{r})$.

8.2.3. Структурная функция показателя преломления. Мелкомасштабные неоднородности показателя преломления воздуха $n(\boldsymbol{r})$ в оптическом диапазоне длин волн определяются, главным образом, хаотическими пространственно-временными вариациями температуры. Микропульсации поля температуры, в свою очередь, появляются в результате турбулентного перемешивания в термически стратифицированной атмосфере. Многочисленные наблюдения рефракции света из космоса (*Гречко и др., 1981*), показали, что в верхней тропосфере и стратосфере постоянно присутствуют мелкомасштабные температурные неоднородности, представляющие собой сильно анизотропные слоистые образования. На существование анизотропных неоднородностей показателя преломления в стратосфере определенно указывают также исследования по радиолокационному зондированию стратосферы, в которых зафиксировано значительное превышение эхо-сигналов при вертикальном зондировании над сигналами при наклонном зондировании (*Роттжер и др., 1981*).

Как известно, для пульсаций показателя преломления $n'' = n - < n >$ в области локально-изотропной атмосферной турбулентности соответствующая структурная функция $D_n(r) = < [n''(r_0 + r) - n''(r_0)]^2 >$ может быть представлена "законом двух третей" Колмогорова–Обухова для случайного поля показателя преломления (*Татарский, 1967*)

$$D_n(r) = \begin{cases} C_n^2 r^{2/3}, & l_0 << r << L, \\ C_n^2 l_0^{2/3} (r / l_0)^2, & r << l_0, \end{cases} \tag{8.2.11}$$

где l_0=3.8 l_k – внутренний масштаб турбулентности; C_n^2 – так называемая, *структурная характеристика* показателя преломления воздуха – ключевая величина, характеризующая интенсивность турбулентных пульсаций параметра $n(\boldsymbol{r})$ в атмосфере. В приземном слое атмосферы внутренний масштаб турбулентности l_0 составляет 0.1–1 мм, а внешний масштаб L равен $L = 0.4z$ (см. разд. 3.3.2).

Применяя формулу (8.2.3), можно рассчитать одномерную спектральную плотность, соответствующую какой-либо структурной функции общего вида $D_f(r) = C_f^2 r^p$, где $0 < p < 2$; в результате получим

$$V_f(\kappa) = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) C_f^2 \kappa^{-(p+1)} . \tag{8.2.12}$$

Используя (8.2.3) и (8.2.12), можно найти соответствующую трехмерную спектральную плотность $\Phi_f(\kappa)$ любого случайного процесса $f(r)$

$$\Phi_f(\kappa) = \frac{\Gamma(p+1)}{4p^2} \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) C_f^2 \kappa^{-(p+3)} \approx 0.033 C_f^2 \kappa^{-11/3} . \tag{8.2.13}$$

Из соотношений (8.2.11)–(8.2.13) следует формула колмогоровского спектра

плотности пульсаций показателя преломления воздуха в атмосфере для локально однородного и изотропного турбулентного поля

$$\Phi_n(\kappa) = \begin{cases} 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}, & 2\pi/L << \kappa << 2\pi/l_0, \\ 0, & 2\pi/l_0 << \kappa, \end{cases} \qquad (8.2.14)$$

где $(2\pi/L << \kappa << 2\pi/l_0)$ и $(2\pi/l_0 << \kappa)$ – соответственно, инерционный и вязкий интервалы волновых чисел. В диапазоне волновых чисел $0<\kappa<2\pi/L$ (энергетический интервал) трехмерный спектр $\Phi_n(\kappa)$, в общем случае, анизотропен и его вид зависит от конкретного механизма образования атмосферной турбулентности; другими словами, спектр $\Phi_n(\kappa)$ не имеет здесь универсального вида.

Пульсации параметров оптического излучения обусловлены, в основном, неоднородностями, попадающими в инерционный интервал волновых чисел κ. В тех редких случаях, когда необходимо учитывать эффект влияния на пульсационные характеристики проходящего излучения турбулентных неоднородностей, размеры которых далеко выходят за пределы инерционного интервала, обычно применяются различные модельные описания спектра турбулентности. Руководствуясь исключительно соображениями математического удобства, далее, при расчетах необходимых статистических характеристик пульсирующего поля зондирующей оптической волны во всем диапазоне изменения волновых чисел κ, будем использовать спектр Кармана

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{L^2}\right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \qquad (8.2.15)$$

где число κ_m связано с внутренним масштабом турбулентности l_0 соотношением $\kappa_m = 5.92/l_0$). Этот спектр, являясь физически плохо обоснованным, совпадает с формулой (8.2.14) для трехмерного спектра $\Phi_n(\kappa)$ в инерционном интервале волновых чисел и учитывает конечность размеров внешнего $(L = 2\pi/\kappa_0)$ и внутреннего $(l_0 = 5{,}92/\kappa_m)$ масштабов турбулентности в атмосфере.

Свойства земной атмосферы, как турбулизованной среды, характеризуются широким диапазоном изменения структурной характеристики показателя преломления воздуха C_n^2. Например, для приземного слоя атмосферы величина C_n^2, в зависимости от метеорологических условий, изменяется от 10^{-13} см $^{-2/3}$ до 10^{-17} см$^{-2/3}$. Как будет показано далее (§ 8.3), статистические параметры зондирующей атмосферу оптической волны существенно зависят от величины C_n^2.

8.2.4. Структурная характеристика в плавно неоднородной турбулентной атмосфере. Очевидно, реальную атмосферную турбулентность можно считать локально однородной и изотропной лишь внутри некоторой области G с размерами порядка внешнего масштаба турбулентности L. В случае, когда $l_0 << r << L$, структурная функция равна $D_f(r) = C_n^2 r^{2/3}$ для случайного поля

$f(r)$ любого термогидродинамического параметра. В любой другой области G_1 с тем же характерным размером L, удаленной от G на расстояние порядка L, поле $f(r)$ также будет локально-однородным и изотропным; структурная функция здесь также будет выражаться "законом $^2/_3$", но, вообще говоря, с другим значением постоянной C_n^2. Можно, следовательно, считать, что структурная характеристика $C_n^2(\boldsymbol{r})$ является очень плавной функцией пространственных координат, существенно меняющейся лишь на расстояниях порядка L. Таким образом, при исследовании распространения световых волн в реальной атмосфере в условиях, когда основную роль играют малые неоднородности, турбулентность атмосферы следует описывать структурными функциями вида (*Татарский, 1967*)

$$D_f(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}) = <\left[f(\boldsymbol{r}_0)-f(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r})\right]^2> = C_n^2(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}/2)r^{2}{}^{3}, \quad l_0 << r << L. \quad (8.2.16)$$

В формуле (8.2.16) масштаб $r << r_0$ и значение структурной характеристики показателя преломления $C_n^2(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}/2)$ следует вычислять в середине отрезка, соединяющего точки наблюдения. Физический смысл такого подхода состоит в том, что внутри объема с характерным размером порядка r и с центром в точке $(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}/2)$ значения параметров $\varepsilon_e(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}/2)$ и $\varepsilon_h(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}/2)$ можно считать постоянными (см. ниже формулу (8.2.21)).

Из сказанного следует, что для неоднородной атмосферы можно сразу написать локальное выражение для трехмерной спектральной плотности $\Phi_n(\boldsymbol{r},\kappa)$, заменив постоянную величину C_n^2 в формуле (8.2.14) на функцию $C_n^2(\boldsymbol{r})$. Тогда

$$\Phi_n(\boldsymbol{r},\kappa) = C_n^2(\boldsymbol{r})\Phi_n^0(\kappa), \quad (8.2.17)$$

где $\Phi_n^0(\kappa) = 0{,}033\kappa^{-11/3}$, при $\kappa < \kappa_m$; $\Phi_n^0(\kappa) = 0$, при $\kappa > \kappa_m$.

В частности, при вертикальном распространении оптического пучка света в атмосфере при ее зондировании, необходимо учитывать изменения структурной характеристики показателя преломления C_n^2 вдоль всей трассы распространения. С увеличением высоты над поверхностью Земли численное значение величины C_n^2 убывает. Хорошей аппроксимацией для $C_n^2(\boldsymbol{r})$ в атмосфере на высотах более 10 км является формула (*Зуев и др., 1988*)

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_0)\exp(-z/z_e), \quad z < z_0, \quad (8.2.18)$$

которая, при соответствующем подборе величины "эффективной толщи" атмосферы z_e ($z_e \approx 3200$), часто удовлетворительно описывает экспериментальные данные. Согласно некоторым данным измерений C_n^2 в диапазоне сантиметровых радиоволн, эта величина с высотой убывает, как z^{-2}:

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_0)/[1+(z/H_0)^2]. \quad (8.2.19)$$

где H_0 – высота однородной атмосферы.

8.2.5. Флуктуации показателя преломления воздуха. Для оптической части спектра, в диапазоне длин волн от 0.2 до 20 мкм, показатель преломления земной атмосферы $n(r)$ может быть рассчитан по известным температуре $T,°K$, атмосферному давлению p, мб и парциальному давлению водяного пара по формуле

$$n_\lambda = 1 + 10^{-6} N_\lambda, \quad N_\lambda = (77.6p/T) - (0.584p/T\lambda^2) - 0.06p_{\text{вод.}}, \qquad (8.2.20)$$

где N – индекс рефракции. Формула (8.2.20) справедлива только в "окнах прозрачности" атмосферы, а в полосах и линиях поглощения формула для показателя преломления может заметно отличаться от (8.2.20).

Пульсации индекса рефракции N вызваны, главным образом, пульсациями поля температуры и давления; оценка влияния пульсаций влажности на показатель преломления в оптическом диапазоне длин волн показывает, что она не играют существенной роли. В условиях развитой турбулентности пульсации скорости ветра, как известно, имеют колмогоровский спектр (типа (8.2.13)), в то же время параметры p и T пульсируют хаотически и не обязательно следуют турбулентному движению. Наряду с этим, известно также (см. Гл 1), что такие ко́мбинации этих параметров, как потенциальная температура $\Theta = (h + gz)/C_p$ переносится в поле скоростей турбулетности без заметного изменения, т. е. величина Θ формально может рассматриваться как пассивная примесь, а потому так же, как и скорость потока, она подчиняется колмогоровскому спектру (8.2.13). В частности, для структурной функции пульсации Θ'' потенциальной температуры Θ также справедлив "закон двух третей" (формула (8.2.11) при замене параметра C_n^2 на C_h^2).

Структурная характеристика поля потенциальных температур C_h^2 связана при этом с двумя фундаментальными в теории макроскопической турбулентности величинами – скоростью диссипации турбулентной энергии $\varepsilon_e(\boldsymbol{r})$ и скоростью выравнивания энтальпийных неоднородностей $\varepsilon_h(\boldsymbol{r})$ – соотношением (*Татарский, 1967*)

$$C_h^2(\boldsymbol{r}) = \alpha\varepsilon_h(\boldsymbol{r}) / \left[\varepsilon_e(\boldsymbol{r})\right]^{1/3}, \; l_0 << r << L \qquad (8.2.21)$$

где α – некоторая универсальная константа, значение которой заключено в пределах от 1.5 до 3.5; предложено использовать значение $\alpha \sim 2.8$, которое является следствием "закона $\frac{2}{3}$" Обухова для поля температур (*Монин, Яглом, 1965*).

Следует подчеркнуть, что так как величины $\varepsilon_e(\boldsymbol{r})$ и $\varepsilon_h(\boldsymbol{r})$ являются одновременно характеристиками и микроструктуры турбулентного поля (определяя, соответственно, скорость передачи кинетической энергии и скорость передачи температурных неоднородностей по каскаду вихрей от крупных ко все более мелким), то эти параметры осуществляют связь между микроструктурой турбулентного поля и осредненными характеристиками турбулентности, введенными в Гл.3 и 4. Именно поэтому, в конечном счете, оказывается возможным определение параметров крупномасштабной турбулентности (например, L) по измерени-

ние параметров крупномасштабной турбулентности (например, L) по измерениям флуктуационных характеристик электромагнитных волн при дистанционном зондировании планетных атмосфер (*Голицын, 1970*).

В атмосфере пульсации индекса рефракции вызваны, главным образом, пульсациями температуры; пульсации давления практически можно не принимать во внимание. Пользуясь этим приближением, из (8.2.20) легко получить формулу, связывающую пульсации показателя преломления n'' с пульсациями потенциальной температуры Θ'' :

$$n'' = 10^{-6}(N - < N >) = 10^{-6}\left[(77{,}6 - 0{,}584\lambda^{-2})\bar{p}\Theta''\right]/(\gamma - 1) < T >^2 . \qquad (8.2.22)$$

Вследствие пропорциональности пульсаций n'' и Θ'', статистические характеристики этих величин можно считать подобными. Тогда для оптической части спектра структурная характеристика показателя преломления сухого воздуха $C_n^2(\boldsymbol{r},\lambda)$ связана с величиной $C_h^2(\boldsymbol{r})$ следующим важным соотношением

$$C_n^2(\boldsymbol{r},\lambda) = \mathcal{M}^2(\lambda)C_h^2(\boldsymbol{r}) = \alpha\mathcal{M}^2(\lambda)\varepsilon_h(\boldsymbol{r})/[\varepsilon_e(\boldsymbol{r})]^{1/3}, \qquad (8.2.23)$$

где параметр

$$\mathcal{M}(\lambda) = \frac{10^{-6}}{(\gamma - 1) < T >}\left(\frac{77.6\bar{p}}{< T >} - \frac{0.584\bar{p}}{\lambda^2 < T >}\right) = \frac{10^{-6} < N >}{(\gamma - 1) < T >} \qquad (8.2.24)$$

учитывает, в частности, зависимость параметра $C_n^2(\boldsymbol{r},\lambda)$ от длины зондирующей волны λ.

8.2.6. Определение внешнего масштаба турбулентности через структурную характеристику показателя преломления. Согласно формуле (8.2.23), структурную характеристику показателя преломления воздуха $C_n^2(\boldsymbol{r})$ можно рассчитать, если известны скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon_e(z)$ и скорость диссипации флуктуаций потенциальной температуры $\varepsilon_h(z)$. Благодаря этому величину $C_n^2(\boldsymbol{r})$ можно связать, таким образом, с внешним масштабом турбулентности L .

Действительно, согласно соотношениям (8.1.3) и (8.1.4), для вычисления диссипативных величин $\varepsilon_e(z)$ и $\varepsilon_h(z)$ имеем

$$\varepsilon_e = K_{e1} < e >^{3/2}/L , \qquad (8.2.25)$$

$$\varepsilon_h = K_{h1} < e >^{1/2} < h''^2 > /L = < e >^{1/2} L\,\Psi\left(g + \frac{\partial < h >}{\partial z}\right), \qquad (8.2.26)$$

где характеристическая функция $\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{Rf}_0 - \boldsymbol{Rf} - \alpha\boldsymbol{Kf})(1 - \boldsymbol{Rf} - \boldsymbol{Kf})^{-1}$ (см. формулу (8.1.14)). Тогда для высотного распределения структурной характеристики $C_n^2(\boldsymbol{r})$ можно получить выражение

$$C_n^2(\boldsymbol{r},\lambda) = \alpha M^2(\lambda)\varepsilon_h(\boldsymbol{r})/[\varepsilon_e(\boldsymbol{r})]^{1/3} = \frac{\alpha M^2(\lambda)}{(K_{e1})^{1/3}} \Psi L^{4/3}\left(g + \frac{\partial < h >}{\partial z}\right)^2, \quad (8.2.27)$$

позволяющее гидродинамически расчитать $C_n^2(\boldsymbol{r})$ в свободной атмосфере. по известному масштабу турбулентности. Формула (8.2.27) обобщает на случай свободного течения многокомпонентной газовой смеси аналогичное выражение для $C_n^2(\boldsymbol{r})$, полученное для приземного слоя однородной атмосферы (*Исимару, 1981*).

С другой стороны, для внешнего масштаба турбулентности L из (8.2.27) следует важное соотношение

$$L(z) = [C_n(z,\lambda)]^{3/2}\delta / \Psi^{3/4} M^{3/2}(g + \partial <h> /\partial z)^{3/2}, \quad \delta \equiv (K_{e1})^{1/4}/\alpha^{3/4} \quad (8.2.28)$$

позволяющее связать L с градиентами усредненных гидродинамических параметров течения газовой смеси (числами Ричардсона ***Ri*** и Колмогорова ***Ko***) и со структурной характеристикой флуктуаций показателя преломления воздуха C_n^2.

Отметим, что в соотношениях (8.2.27) и (8.2.28) учтено влияние архимедовых сил исключительно на характеристики среднего движения. Однако, как показано в работах (*Обухов, 1959; Монин, 1962*), эти силы оказывают влияние не только на параметры осредненного движения, но и на микроструктуру турбулентного поля. С учетом этого обстоятельства формула (8.2.11) для структурной функции $D_n(r)$ видоизменяется следующим образом

$$D_n(r) \propto \varepsilon_h^{4/5}(g/<T>)^{-2/5} r^{2/5}, \quad (8.2.29)$$

причем линейный масштаб $L_k \propto \varepsilon_e^{5/4}(g/<T>)^{-3/2}\varepsilon_h^{-3/4}$ (соотношение, полученное с помощью анализа размерности), определяющий размеры неоднородностей, на которые существенное влияние оказывают силы плавучести, можно связать с величиной L. В рассматриваемом в этой главе случае свободного горизонтального двухмерного течения со сдвигом, при использовании формул (8.2.25) и (8.2.26), для L_k можно получить

$$L_k \propto L\,\Psi^{3/4}\left(\frac{\boldsymbol{Pr}^T - \boldsymbol{Ri} - \boldsymbol{Ko}}{|\boldsymbol{Ri}|}\right)^{3/2}. \quad (8.2.30)$$

Отсюда следует, что если $|\boldsymbol{Ri}| << 1$, то в свободной атмосфере масштаб L_k может быть в несколько раз больше, чем внешний масштаб турбулентности L; в этом случае влияние архимедовых сил на микроструктуру турбулентного поля проявляется лишь вне инерционного интервала турбулентности. Если же $|\boldsymbol{Ri}| >> 1$, то L_k попадает внутрь инерционного интервала, деля его на две части: при $l_0 << r << L_k$ справедливы прежние формулы для структурной функции $D_n(\boldsymbol{r})$, а при $L_k << r << L$ необходимо использование более сложных формул (см., например, (*Исимару, 1981*)).

В заключение еще раз отметим, что для оперативного определения малых атмосферных компонентов в турбулизованной средней атмосфере, в частности по методу космического мониторинга, необходимы осредненные значения структурных параметров среды. Соответственно, при компьютерном моделировании процессов атмосферной динамики и химической кинетики приходится численно решать не только систему гидродинамических уравнений смеси масштаба среднего движения, но и эволюционное уравнение переноса турбулентной энергии, которое следует дополнить выражением (8.2.28) для внешнего масштаба турбулентности L и данными по пространственному распределению структурной характеристики показателя преломления воздуха C_n^2. Данную характеристику можно получить, например, из эксперимента по зондированию атмосферы светом от звезды.

§ 8.3. Определение структурной характеристики показателя преломления методами оптического зондирования атмосферы

Формула (8.2.27) позволяет гидродинамически рассчитать структурную характеристику $C_n^2(\boldsymbol{r})$ показателя преломления воздуха. Рассмотрим здесь другой способ расчета этой величины, основанный на анализе оптических параметров зондирующего излучения. Как уже отмечалось, почти любой эксперимент по определению статистических характеристик оптической волны, прошедшей слой турбулизованной атмосферы, в принципе дает возможность найти интенсивность турбулентных пульсаций, описываемую структурной характеристикой $C_n^2(\boldsymbol{r})$. Мы проанализируем здесь возможность определения величины $C_n^2(\boldsymbol{r})$ по измерениям дисперсии пульсаций логарифма интенсивности излучения распространяющейся монохроматической оптической волны при дистанционном зондировании турбулентной атмосферы светом от звезды с борта космического аппарата, основываясь на фундаментальных принципах теории распространения электромагнитных волн в турбулизованной атмосфере (*Обухов, 1953; Татарский, 1967; Гурвич, 1968; Рытов и др., 1978*). Мы будем опираться на эти работы при использовании результатов расчета флуктуаций амплитуды (и фазы) плоской монохроматической волны на основе решения волнового уравнения методом малых и плавных возмущений (*МПВ*).

8.3.1. Решение волнового уравнения методом малых возмущений. Пусть на некоторый объем турбулизованной воздушной среды падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. За счет турбулентного перемешивания внутри объема возникают беспорядочные пульсации коэффициента преломления воздуха, рассеивающие проходящую волну. Требуется определить пульсации параметров распространяющейся волны, позволяющие в конечном счете рассчитать величину $C_n^2(\boldsymbol{r})$. Статистические характеристики турбулентного поля (например, спектральные плотности структурных или корреляционных функций коэффициента преломления) свяжем вначале с соответствующими характеристиками отдельной волны, а затем, при дополнительных предположениях относительно закона распределения вероятностей флуктуаций интенсивности излучения, осуществим переход к осредненной интенсивности излучения, т. е. к нахож-

дению спектральных характеристик непосредственно измеряемых в эксперименте величин.

Чтобы учесть дифракционные эффекты при решении поставленной задачи, будем основываться на стохастическом волновом уравнении $\Delta u + k^2 n^2(\boldsymbol{r})\, u = 0$, в котором $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, а $u(\boldsymbol{r})$ может означать любую из 3-х составляющих электрического поля $\boldsymbol{E}$. Коэффициент преломления $n(\boldsymbol{r})$ в этом уравнении является случайной функцией координат со средним значением $< n(\boldsymbol{r}) > = 1$. Обозначая через $n''(\boldsymbol{r})$ пульсацию коэффициента преломления ($n''(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r}) - 1$) и предполагая, что $|n''(\boldsymbol{r})| << 1$, решение волнового уравнения будем искать в виде $u = A \exp(i\Psi)$, где A – амплитуда и Ψ – фаза волны. Функция $u(\boldsymbol{r})$ равна сумме $(u = u_0 + u_1)$ невозмущенного решения $u_0 = A_0 \exp(i\Psi_0)$, удовлетворяющего уравнению $\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0$, и малого возмущения u_1, для которого $|u_1| << |u_0|$. Полагая $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ и $\ln A = \ln A_0 + X$, где $\Psi_1 = \mathrm{Im}(u_1/u_0)$ и $X = \mathrm{Re}(u_1/u_0)$ – малые возмущения ($X = \ln(A/A_0)$ – "уровень" пульсаций амплитуды оптической волны в логарифмической шкале), будем искать пульсации амплитуды X и фазы Ψ_1 плоской волны Малость флуктуаций коэффициента преломления позволяет применить к решению исходного волнового уравнения методы малых и плавных возмущений (*Рытов, 1937*). Отметим, что на теорию слабых флуктуаций практически целиком опираются в настоящее время исследования в области дистанционного зондирования атмосферы.

8.3.2. Пульсации амплитуды оптической плоской волны в локально - изотропной турбулентной среде. Выберем направление распространения оптической (монохроматической) волны за ось x. Пусть источник волны расположен в плоскости $x = 0$, а точка наблюдения имеет координаты (S, y, z), т. е находится на расстоянии S от источника. Полное решение рассматриваемого волнового уравнения позволяет связать двухмерную спектральную плотность (см. формулу (8.2.7)) пульсаций амплитуды $F_A(\kappa,0) = F_A(0,\kappa_2,\kappa_3)$ (или фазы $F_\Psi(\kappa,0)$) волны в плоскости $x = S$ с трехмерной спектральной плотностью корреляционной функции коэффициента преломления среды $\Phi_n(\kappa) = \Phi_n(0,\kappa_2,\kappa_3)$. В случае плоской волны, распространяющейся в неоднородном турбулентном воздушном потоке с плавно меняющимися в пространстве характеристиками, такими как $C_n^2(\boldsymbol{r})$ подобная связь для величины $F_A(\kappa,0)$ имеет вид (*Татарский, 1967*)

$$F_A(\kappa,0) \cong 2\pi k^2 \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r}) \Phi_n^0(\kappa) \sin^2[\kappa^2 (S-\eta)/2k]\, d\eta \qquad (8.3.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны излучения, $\kappa^2 = \kappa_2^2 + \kappa_3^2$, S – длина трассы распространения волны. При помощи формул (8.2.5) и (8.2.6) от спектральной плотности $F_A(\kappa,0)$ можно перейти к структурной $D_A(\rho)$ и корреляционной $B_A(\rho)$ функциям пульсаций амплитуды волны в плоскости $x = S$.

Рассмотрим здесь корреляционную функцию пульсаций амплитуды волны в плоскости $x = S$. Согласно общей формуле (8.2.6) можно написать

$$B_A(\rho) = 4\pi^2 k^2 \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r}) d\eta \int_0^\infty J_0(\kappa\rho)\Phi_n^0(\kappa)\sin^2\left(\frac{\kappa^2(S-\eta)}{2k}\right)\kappa d\kappa, \qquad (8.3.2)$$

откуда

$$B_A(0) \equiv < [\ln(A/A_0)]^2 > = 4\pi^2 k^2 \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r}) d\eta \int_0^\infty \Phi_n^0(\kappa)\sin^2\left(\frac{\kappa^2(S-\eta)}{2k}\right)\kappa d\kappa\,. \qquad (8.3.3)$$

Формулы (8.3.2) и (8.3.3) полностью решают задачу о пульсациях амплитуды монохроматической плоской волны, распространяющейся в турбулентной среде. Аналогичные соотношения имеют место и для корреляционной функции пульсаций фазы волны.

В частном случае, когда для спектра плотности пульсаций показателя преломления воздуха $\Phi_n^0(\kappa)$ справедлива формула Кармана (8.2.15), для среднего квадрата пульсаций логарифма амплитуды волны в локально однородной турбулентной среде из (8.3.3) может быть получено следующее основное для данной задачи соотношение:

$$\sigma_\chi^2 \equiv < X^2 > \equiv < [\ln(A/A_0)]^2 > \equiv B_A(0) \equiv D_\chi(\infty)/2 = \qquad (8.3.4)$$

$$= 4\pi^2 \;\; 0.033k^2 \int_0^S C_n^2(\mathrm{r}) d\eta \int_0^{\kappa_m} \kappa^{-11/3}\sin^2[\kappa^2(S-\eta)/2k]\kappa d\kappa.$$

Получим важные для дальнейшего асимптотические формулы, вытекающие из (8.3.4). При $\kappa_m^2 S/k << 1$, т.е. $\sqrt{\lambda S} << l_0$, что отвечает приближению геометрической оптики, которое практически реализуется на достаточно коротких трассах S, из (8.3.4) получим

$$\sigma_x^2 = 4\pi^2 0.033k^2 \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r}) d\eta \int_0^{\kappa_m} \kappa^{-11/3}\left(\frac{\kappa^4(S-\eta)^2}{4k^2}\right)\kappa d\kappa = \qquad (8.3.5)$$

$$= 7.37 l_0^{-7/3} \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r})(S-\eta)^2 d\eta.$$

При $\kappa_m^2 S/k >> 1$, т.е. $\sqrt{\lambda S} >> l_0$, когда становятся существенными дифракционные эффекты (что для зондирующей атмосферу оптической волны практически всегда имеет место), интегрирование в формуле (8.3.4) можно распространить до бесконечности; тогда получим

$$\sigma_x^2 = D_\chi(r)/2 = 0.563k^{7/6} \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r})(S-\eta)^{5/6} d\eta = 0.56k^{7/6} \int_0^S C_n^2(\boldsymbol{r}) x^{5/6} dx. \quad (8.3.5^*)$$

Интегрирование в формулах (8.3.5) ведется по “лучу зрения” от точки наблюдения S к источнику света; при этом для второго интеграла начало координат по-

мещено в точку наблюдения. В случае $C_n^2(\boldsymbol{r})$ = const , что отвечает полностью однородной турбулентности по трассе зондирующего луча (в атмосфере подобная ситуация возможна, например, для горизонтальных трасс), из формул (8.3.5) вытекают следующие соотношения для среднего квадрата пульсаций логарифма амплитуды плоской волны:

$$\sigma_x^2 = 2.46 C_n^2 S^3 l_0^{-7/3}, \quad \text{при } \sqrt{\lambda S} << l_0, \quad (1)$$

$$\sigma_x^2 = 0.31 C_n^2 k^{7/6} S^{11/6}, \quad \text{при } \sqrt{\lambda S} >> l_0. \quad (2) \qquad (8.3.6)$$

Учет неоднородности трассы не вносит никаких принципиальных трудностей, но требует для проведения расчетов задания конкретной модельной зависимости структурной характеристики $C_n^2(\boldsymbol{r})$ от расстояния. Рассмотрим два примера. При анализе мерцания и дрожания изображений звезд необходимо учитывать крайне неравномерное распределение пульсаций коэффициента преломления по высоте. Наиболее сильные пульсации наблюдаются ближе к поверхности Земли, и с высотой они ослабевают. В этом случае в интеграле $\int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/6} dz$, связанном с пульсациями амплитуды волны, основную роль играют высокие слои атмосферы. Пусть, например, величина $C_n^2(\boldsymbol{r})$ определяется формулой (8.2.18). Тогда, считая, что $\sqrt{\lambda z_0} >> l_0$,

$$\sigma_\chi^2 \equiv < X^2 > = 0.56 k^{7/6} C_{n0}^2 z_0^{11/6} \Gamma(\tfrac{11}{6}) = 0.53 C_{n0}^2 k^{7/6} z_0^{11/6}. \qquad (8.3.7)$$

Если величина $C_n^2(\boldsymbol{r})$ определяется формулой (8.2.19), то

$$< X^2 > = 0.56 \cdot \pi C_{n0}^2 \cdot k^{7/6} H_0^{11/6} / 2\sin(\pi/12) \cong 3.4 C_{n0}^2 k^{7/6} H_0^{11/6}. \qquad (8.3.8)$$

Как видим, выражения (8.3.5)–(8.3.8) имеют одинаковую структуру, но сильно отличаются значениями численных коэффициентов. Структурная характеристика показателя преломления воздуха C_n^2 входит в них в качестве сомножителя, что позволяет рассчитать ее величину оптическим способом, например, при экспериментальном определении дисперсии пульсаций логарифма амплитуды волны σ_χ^2 в оптическом диапазоне длин волн. Естественно, в каждом конкретном случае необходимо предварительно задать каким-либо способом высотный профиль величины $C_n^2(\boldsymbol{r})$.

8.3.3. Пульсации интенсивности оптического излучения в условиях применимости метода плавных возмущений. Рассмотрим теперь методику определения величины σ_χ^2 . Пусть в плоскости наблюдения $x = S$ (плоскости измерения характеристик зондирующей плоской световой волны) существует рас-

пределение интенсивности света $I_\lambda(y,z)$. Величину $I_\lambda(y,z)$ можно представить в виде

$$I_\lambda(y,z) = I_{\lambda 0}\exp\left[2\ln(A/A_0)\right] = I_{\lambda 0}\exp\left[2X(y,z)\right]. \qquad (8.3.9)$$

Из теории следует, что в условиях применимости первого приближения метода плавных возмущений Рытова (*МПВ*) комплексная амплитуда оптической волны (или комплексная фаза Ψ_1), имеет вид интеграла от некоторой детерминированной функции $F(\boldsymbol{r})$ и случайного поля пульсаций показателя преломления n'' по объему D, занимаемому турбулентной средой на пути распространения света: $\ln(A/A_0) = \iiint\limits_D F(\boldsymbol{r})n''d\nu$. В случае эксперимента по зондированию атмосферы линейные размеры этого объема намного превышают масштаб L корреляции случайного поля показателя преломления n. Если разбить область интегрирования на объемы размером порядка внешнего масштаба турбулентности L, то можно представить этот интеграл в виде суммы большого числа независимых слагаемых. В результате получаем формулу $\ln(A/A_0) = \sum\limits_J \iiint\limits_{D_J} F(\boldsymbol{r})n''d\nu_j$, представляющую $\ln(A/A_0)$ как сумму большого числа некоррелированных величин. Отсюда, в соответствии с центральной предельной теоремой, можно сделать вывод о том, что в приближении (*МПВ*) величина $\ln(A/A_0)$ распределена нормально, а интенсивность I_λ световой волны имеет логарифмически нормальный закон распределения вероятностей.

Многочисленные измерения зондирующего, в том числе лазерного, излучения, проведенные на реальных атмосферных трассах, как в условиях слабых пульсаций интенсивности, так и при *насыщении* (см. ниже), в большинстве случаев дают распределения, близкие к логарифмически нормальному закону, с некоторыми отклонениями от него в области глубоких замираний и больших выбросов интенсивности над средним уровнем. Учитывая это обстоятельство, рассмотрим некоторые характеристики логарифмически нормального закона, необходимые для анализа экспериментальных данных, полученных при зондировании атмосферы.

8.3.4. Определение дисперсии пульсаций интенсивности плоской световой волны через индекс мерцаний. Плотность распределения вероятностей $P(I_\lambda)$ логарифмически нормального закона для интенсивности света зависит от средних значений уровня интенсивности $<\ln I_\lambda>$ и дисперсии этого уровня $\sigma^2_{\ln I} = <\left[\ln I_\lambda - <\ln I_\lambda>\right]^2>$:

$$P(I_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}I_\lambda\sigma_{\ln I}}\exp\left(-\frac{(\ln I_\lambda - <\ln I_\lambda>)^2}{2\sigma^2_{\ln I}}\right), \qquad (8.3.10)$$

Из этой формулы следует, что среднее значение самой интенсивности $<I_\lambda>$ и ее дисперсия $\sigma_I^2 = <\left[I_\lambda - <I_\lambda>\right]^2>$, соответственно, равны

$$< I_\lambda >= \exp\left(< \ln I_\lambda > + \tfrac{1}{2}\sigma^2_{\ln I}\right), \qquad \sigma_I^2 =< I_\lambda >^2 \left[\exp(\sigma^2_{\ln I}) - 1\right]. \tag{8.3.11}$$

Используя формулы (8.3.11), параметры $\sigma^2_{\ln I}$ и $< \ln I_\lambda >$ можно выразить через среднюю интенсивность излучения $< I_\lambda >$ и нормированную дисперсию пульсаций интенсивности излучения β^2, задаваемую соотношением

$$\beta^2 =< [I_\lambda - < I_\lambda >]^2 > / < I_\lambda >^2 = \frac{\sigma^2_{I_\lambda}}{< I_\lambda >^2} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{I_\lambda}(\mathrm{f}) d\,\mathrm{f}\ , \tag{8.3.12}$$

где β^2 – так называемый индекс мерцаний, представляющий собой экспериментально определяемую величину, а $W_I(\mathrm{f})$ – соответствующий частотный спектр (см. (8.2.10)) :

$$\sigma^2_{\ln I} = \ln(1+\beta^2), \qquad < \ln I_\lambda >= \ln\left[\frac{< I_\lambda >}{\sqrt{1+\beta^2}}\right]. \tag{8.3.13}$$

Таким образом, опираясь на рабочую гипотезу о нормальности распределения величины $\ln I_\lambda$, можно связать входящую в теорию величину

$$\sigma^2_{\ln I} =< [\ln I_\lambda - < \ln I_\lambda >]^2 > \cong 4 < [\ln A_\lambda / A_{\lambda 0}]^2 >= 4\sigma_x^2 = 4 < X^2 > \equiv \sigma_0^2 \tag{8.3.14}$$

и измеряемые в эксперименте по зондированию атмосферы индексы мерцаний β^2 :

$$4 < X^2 > = 4\sigma_x^2 = \sigma^2_{\ln I} = \sigma_0^2 = \ln(1+\beta^2)\,. \tag{8.3.15}$$

Формула (8.3.15), рассматриваемая совместно с (8.3.5*), может быть использована для определения структурной характеристики показателя преломления воздуха C_n^2 по известной величине индекса мерцаний β^2.

Не останавливаясь далее на математических деталях метода плавных возмущений, коснемся лишь вопроса о границах его применимости. Если формально оценивать границы применимости *МПВ* из требования малости первых отброшенных членов в исходном волновом уравнении, то получается очень жесткое достаточное условие (которое не является одновременно необходимым условием) сходимости ряда *МПВ* для амплитудных вариаций

$$\beta_0^2 \equiv 4 < X^2 > = 1.23 C_n^2 \kappa^{7/6} S^{11/6} < 1. \tag{8.3.16}$$

Из этой формулы следует, что дисперсия β_0^2 увеличивается с длинной трассы пропорционально $S^{11/6}$. Однако в действительности, с неограниченным ростом трассы S имеет место, так называемое, "насыщение" или даже уменьшение дисперсии флуктуаций интенсивности излучения. Сопоставление экспериментальных данных с расчетными в приближении *МПВ*, приведенное на Рис. 8.3.1, показывает, что для пульсаций амплитуды расхождение экспериментальных данных с результатами *МПВ* начинает проявляться уже при $< X^2 >\geq 0.7$. Это условие существенно ограничивает область применимости *МПВ*.

8.3.5. Сильные флуктуации. Несмотря на ограниченную область применимости формулы (8.3.15) , параметр $\beta_0^2 = 1.23 C_n^2 \kappa^{7/6} S^{11/6}$ широко используется в качестве универсальной характеристики условий воздействия атмосферной турбулентности на распространяющееся по трассе S излучение. Как известно, обычно различают режимы слабых ($\beta_0^2 < 1$) и сильных ($\beta_0^2 > 1$) пульсаций интенсивности света вдоль трассы, определяемые величиной параметра β_0^2. В реальных атмосферных условиях индекс мерцаний β^2 сложным образом зависит от геометрии распространяющихся оптических пучков, условий атмосферной турбулентности, длины трассы, волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ и других факторов. Величину β_0^2 часто рассматривают, как универсальный параметр, от которого зависит индекс мерцаний $\beta^2 = \beta^2(\beta_0^2)$.

В условиях сильных пульсаций интенсивности излучения света, когда рассмотренная теория возмущений становится неприменимой, сделать какие-либо определенные выводы о распределении вероятностей интенсивности оказывается невозможным. В некоторых теоретических работах, на основе приближенных расчетов (*Де Вольф, 1973*) или путем использования качественных соображений о природе рассеянного поля излучения (*Гориери, Тейлор,1972*), утверждалось,

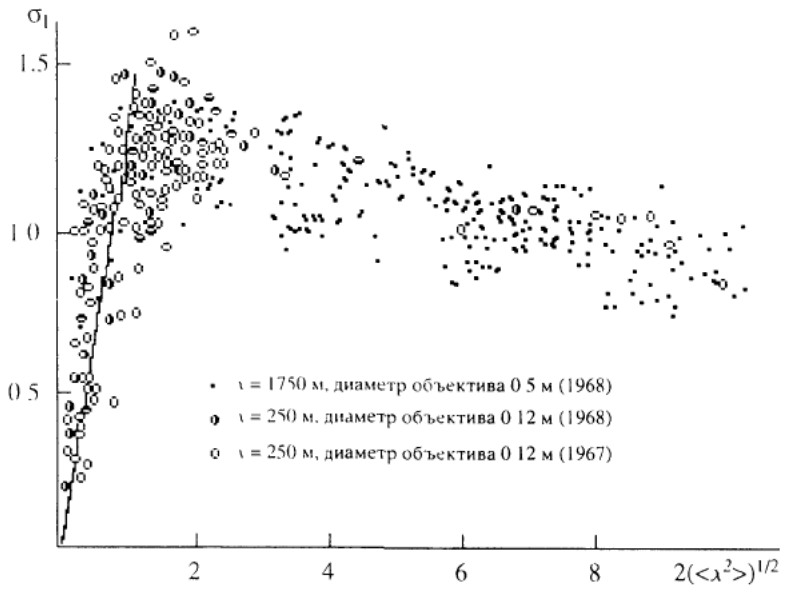


Рис. 8.3.1. Сравнение дисперсий флуктуаций интенсивности света измереннных и рассчитанных в приближении метода плавных возмущений.

что распределение вероятностей флуктуаций амплитуды в области насыщения является релеевским. Это утверждение о нормальном распределении поля излучения в области сильных флуктуаций основывается на представлении о том, что суммарное поле в точке приема есть результат сложения полей, рассеянных большим числом независимо переизлучающих объемов. Однако подобные рассуждения, очевидно, неприменимы для атмосферы с крупномасштабными неоднородностями, рассеивающей под малыми углами вперед. В этом случае главную роль в процессе возникновения флуктуаций интенсивности, повидимому, должны играть интерференционные эффекты, обусловленные сильной корреляцией разностей фаз лучей, близко расположенных друг к другу. На Рис. 8.3.2 приведен пример гистограммы, полученной при $\beta_0^2 = 25$. На этом же рисунке сплошной кривой нанесена плотность вероятности, соответствующая логарифмически нормальному закону со средним значением и дисперсией, вычисленными из экспериментальной гистограммы. Штрихованной прямой изображено экспоненциальное распределение вероятностей интенсивности

$$P(I_\lambda) = (1/\langle I_\lambda \rangle)\exp[-I_\lambda / \langle I_\lambda \rangle], \qquad (8.3.17)$$

соответствующее релеевскому распределению для амплитуды. Из этого графика видно, что распределение (8.3.17) гораздо хуже согласуется с экспериментальными данными, чем логарифмически нормальное распределение.

Для полноты приведем здесь также сведения по распределению вероятности интенсивности излучения согласно (*Исимару, 1981*), свидетельствующие о том, что в области значений $0.3 < \beta_0^2 < 25$ распределение вероятностей не является ни логарифмически нормальным, ни рэлеевским. В то же время, в области значе-

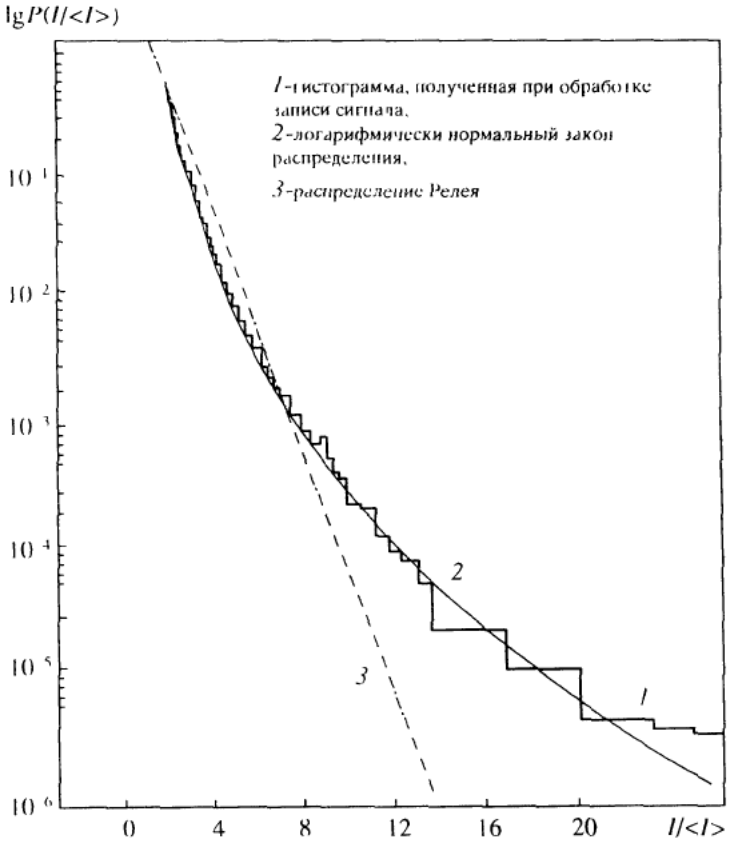


Рис. 8.3.2. Плотность вероятности P относительных флуктуаций интенсивности $I / \langle I \rangle$.

ний $25 < \beta_0^2 < 100$ распределение вероятности, по-видимому, близко к логарифмически нормальному. Наконец, при $\beta_0^2 \to \infty$ оно приближается к рэлеевскому.

В заключение этого раздела отметим, что определенный прогресс в теории флуктуаций интенсивности излучения связан с определением области сильных флуктуаций амплитуды плоской волны методами квантовой теории поля. Полученная зависимость $\sigma_I = f(\beta_0)$ (*Татарский, 1967*) может быть с хорошей точность аппроксимирована формулой

$$\sigma_I^2 = 1 - [1/(1 + 1.5\beta_0^2)^{1/6}] , \qquad (8.3.18)$$

что согласуется с приведенными на Рис. 8.3.3 экспериментальными значениями. Анализ всех доступных на сегодняшний день данных приводит к следующей аппроксимационной формуле для величины β^2 в области сильных флуктуаций (*Прохоров* и др., 1974)

$$\beta^2 = 1 + 0.87\sigma_0^{-4/3}, \sigma_0^2 < 1 \text{ (или } \sigma_0^2 = 0.706(\beta^2 - 1)^{-5/2} \text{)}, \qquad (8.3.19)$$

которая выполняется с точностью до членов порядка $\sigma_0^{-8/5}$.

§ 8.4. Определение структурной характеристики показателя преломления по индексу мерцаний звезд

Мерцания звезд и обусловливаемые ими флуктуации светового потока на приемнике излучения при его прохождении через земную атмосферу вызываются неоднородностями показателя преломления воздуха n. В случае установки приемника на космическом аппарате при его движении по орбите световые лучи испытывают неодинаковое преломление за счет неоднородностей показателя преломления, что приводит к случайным вариациям блеска звезды. Визуальные наблюдения мерцаний звезд из космоса с пилотируемых аппаратов, включая орбитальные станции "*Салют-7*" и "*Мир*", дали ряд интересных результатов отно-

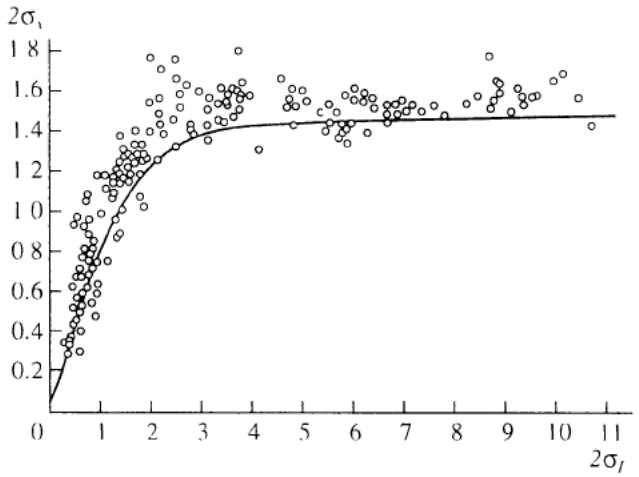


Рис. 8.3.3. Сопоставление экспериментально полученных значений среднего квадрата флуктуаций логарифма интенсивности света $(2\sigma_\chi)$ с соответствующей величиной, рассчитанной в первом приближении метода плавных возмущений $(2\sigma_I)$.

сительно структуры температурного поля в стратосфере Земли (*Гречко и др., 1980*; *Гурвич и др., 1985; Гречко и др., 1989*). Они проводились с использованием звездных фотометров, которые позволяли регистрировать характеристики мерцаний ярких звезд в диапазоне высот перигея луча z =20–45 км. Полученные записи *фототока мерцаний* показали, в частности, что мерцания наблюдаются повсеместно и имеют качественно сходную картину, независимо от района и времени наблюдений. Были рассчитаны величины *индекса мерцаний*, проведен анализ спектральной плотности и флуктуаций фототока на разных высотах и получены оценки их характерных масштабов. По измеренным спектрам мерцаний были восстановлены вертикальные спектры флуктуаций температуры в диапазоне высот 20–40 км. Для нас эти результаты представляют, в первую очередь, методический интерес, поскольку аналогичные измерения одновременно служат основой для расчета структурной характеристики C_n^2 и создают, тем самым, необходимые предпосылки для моделирования атмосферной турбулентности.

8.4.1. Геометрия наблюдений мерцаний. Типичная геометрия мерцаний заходящих звезд при наблюдении из космоса показана на Рис. 8.4.1. Эффективная толщина атмосферы вдоль луча визирования S составляет несколько сот километров. В данной конфигурации, отвечающей рабочим параметрам проекта *Gomos*, космический аппарат (*КА*) находится на круговой орбите с высотой от поверхности Земли z_{sp} = 824 км. Расстояние от перигея луча визирования, расположенного над терминатором, до наблюдателя (приемника на *КА*) составляет $d \approx$3250 км. В зависимости от величины угла β между плоскостью орбиты и направлением на звезду могут реализовываться различные траектории захода звезды относительно горизонта в плоскости терминатора: при β=0 – вертикальный заход, при $\beta \geq \arcsin(R_e/H_e) \cong 71.4°$ (R_e – радиус Земли, $H_e = R_e + z_{sp}$ – расстояние до *КА* от центра Земли) звезда перестает заходить, касаясь горизонта. Проводя, таким образом, наблюдения при разных углах β можно зондировать атмосферу по различным направлениям – от вертикального ($\alpha = 0$) до горизонтального ($\alpha = \pi/2$), где α – угол между касательной к проекции траектории движения наблюдателя на плоскость терминатора и местной вертикалью.

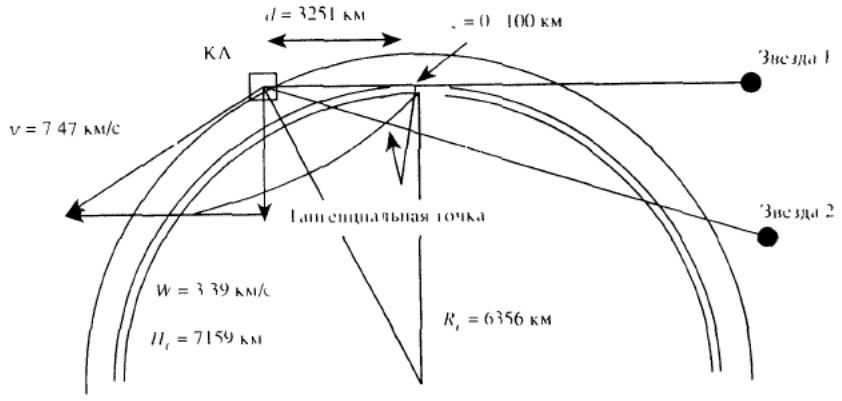


Рис. 8.4.1. Геометрия наблюдений из космоса мерцаний, заходящих за атмосферу звезд.

Заметим, что задача определения статистических характеристик зондирующего излучения может быть несколько упрощена, поскольку расстояние от эффективной области атмосферы до наблюдателя значительно превышает толщину этой области. Тогда в режиме слабых мерцаний $\sigma_I < 1$ можно рассматривать воздействие атмосферы на распространяющееся в ней излучение в приближении эквивалентного фазового экрана, расположенного в плоскости терминатора (*Исимару, 1981*).

8.4.2. Фототок мерцаний. Фотоэлектрическое устройство, помещенное в фокальной плоскости телескопа, преобразует световой поток в электрическое напряжение, вариации которого используются для статистического анализа. В верхней части Рис. 8.4.2, в качестве примера, показана запись фототока при наблюдении *Канопуса* (*альфы Киля*) во время захода 25.XI.1987г. (*Гречко и др., 1989*). В этих наблюдениях применялся светофильтр с полосой пропускания $\Delta\lambda =$ 0.05 мкм по уровню 0.5 с центром на длине волны 0.45 мкм. По оси абсцисс, кроме времени t, отложены высоты перигея луча z, по оси ординат – величина фототока I в относительных единицах. В нижней части Рис. 8.4.2 показаны отдельные фрагменты той же записи, растянутые во времени в 10 раз по сравнению с основной записью. Флуктуации фототока на больших высотах $z \geq$70–100 км, где влияние атмосферы еще очень слабо, представляют собой практически дробовой шум фотоумножителя, соответствующий среднему уровню сигнала $< I >= I_0$, ограниченный полосой пропускания приемного устройства. При заходе звезды средний уровень сигнала $< I >$ уменьшается и начинают проявляться мерцания, обусловленные атмосферой, которые усиливаются при дальнейшем погружении луча в атмосферу. Начиная примерно с z = 20 км и ниже, заметное влияние на характер мерцаний начинает оказывать хроматическая дисперсия рефракции; при этом записи мерцания становятся заметно более низкочастотными.

На Рис. 8.4.2. показана запись типичной картины мерцаний света на случайных неоднородностях показателя преломления воздушной среды с сильными

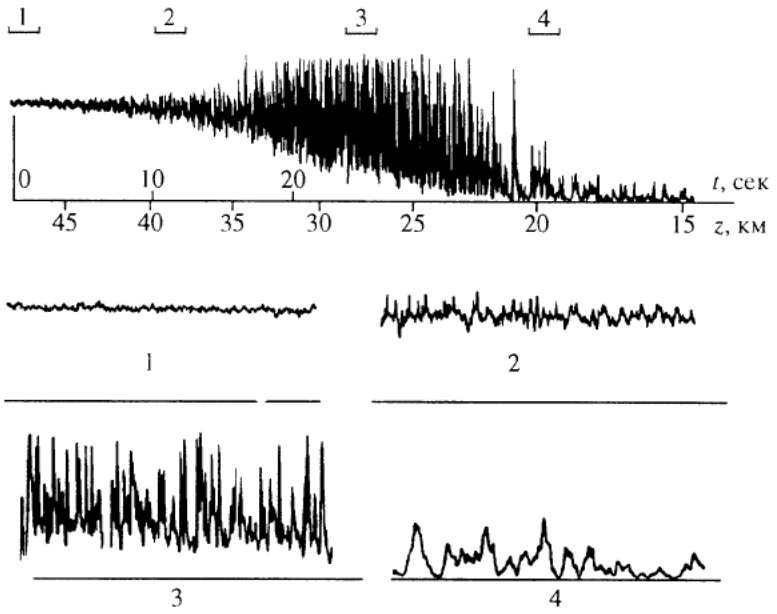


Рис. 8.4.2. Запись фототока мерцаний Канопуса от 25.11.1987 г. Отдельные фрагменты записи растянуты во времени в 10 раз.

выбросами (случайными фокусировками) и глубокими замираниями. Уменьшение среднего уровня сигнала $< I >$ определяется молекулярным и аэрозольным рассеянием, поглощением озона в полосе Шаппюи и рефракционным ослаблением. Для приближенных оценок экстинкции за счет рассеяния и поглощения можно считать, что экспоненциальное изменение рефракционного ослабления $< I >$ по высоте примерно определяется высотой однородной атмосферы H_0. Поскольку экстинкция избирательна по длинам волн, атмосфера воздействует на проходящее через нее излучение как некий фильтр.

Обработка подобных записей мерцаний позволяет найти:

•эффективную длину световой волны λ и полосу длин волн $\Delta\lambda$, формирующих фототок мерцаний, с учетом спектра излучения звезды, спектральной чувствительности фотокатода фотоумножителя и пропускания светофильтра;

•спектры относительных флуктуаций мерцаний W (f) при использовании программы быстрого преобразования Фурье;

•значения среднего тока $< I >$ на каждом участке записи, используемые для нормировки.

Для корректной обработки данных в зависимости от угла захода β должны использоваться участки записей с длительностью $\Delta\tau$, изменяющейся от 2 до 8 с, с тем чтобы соответствующие этому времени высотные интервалы составляли $\Delta z = v\Delta\tau \cong 3$–$4$ км. При больших длительностях обрабатываемых реализаций определяющее влияние на спектры мерцаний в области самых крупных масштабов оказывают не случайные, а регулярные изменения фототока с характерным масштабом порядка H_0.

8.4.3. Зависимость мерцаний от диаметра телескопа. Величина флуктуаций светового потока, проходящего через телескоп, сильно зависит от диаметра телескопа и диафрагмы, зенитного расстояния источника света, его угловых размеров и метеорологических условий. Величину флуктуаций потока характеризуют индексом мерцаний

$$\sigma_P^2 = < (P - < P >)^2 > / < P >^2, \qquad (8.4.1)$$

где P – световой поток через обьектив телескопа. Если $I_\lambda(y, z)$ – интенсивность монохроматической световой волны на поверхности объектива с площадью Σ, то $P = \iint_\Sigma I_\lambda(y,z)dydz$. Величина $I_\lambda(y, z)$, в соответствии со сказанным ранее, имеет логарифмически нормальный закон распределения вероятностей. Если $\sqrt{\Sigma} \le \sqrt{\lambda S}$, т.е. диаметр объектива меньше радиуса корреляции флуктуаций интенсивности света и, следовательно, колебания светового потока через различные участки объектива происходят одновременно, величина P также подчиняется логарифмически нормальному закону распределения. Если же $\sqrt{\Sigma} > \sqrt{\lambda S}$, т.е. в пределах площади объектива одновременно укладывается большое число некоррелированных неоднородностей светового поля, величина P, в силу центральной предельной теоремы, распределена по нормальному закону. Однако практически используемые телескопы имеют такие размеры, что в пределах Σ укладывается не более $2 \div 4$ неоднородностей поля, и закон распределения P ос-

тается очень близким к логарифмически нормальному. В этом случае теоретически определяемая величина $<(P/P_0)^2>$ связана с измеряемым индексом мерцаний светового потока σ_P^2 соотношением

$$<(P/P_0)^2>=\ln(1+\sigma_P^2). \tag{8.4.2}$$

С другой стороны, для величины $<(P/P_0)^2>$ получено следующее теоретическое соотношение, справедливое для дисперсии $<X^2>$ слабых флуктуаций амплитуды монохроматической световой волны (*Татарский, 1967*)

$$<(P/P_0)^2>=4<X^2>G(X,Y)=\beta_0^2 G(X,Y), \tag{8.4.3}$$

где

$$G=(1/\beta_0^2)\ln\left\{\frac{16}{\pi}\int_0^1 \exp[4B_A(Dx)](\arccos x - x\sqrt{1-x^2})x\,dx\right\}, \tag{8.4.4}$$

$X=D/(\lambda\Sigma)^{1/2}$; $\Psi=\beta_0^2$; D – размер диафрагмы; $B_A(Dx)$ – корреляционная функция флуктуаций амплитуды волны, определяемая соотношением (8.3.2). Функция $G(X,Y)$ характеризует уменьшение мерцания за счет осредняющего действия объектива. Численное интегрирование выражения (8.4.4) при $\beta_0^2 = 4$ и $\beta_0^2 \to 0$ приводит к результатам, графически показанным на Рис. 8.4.3. Как видно из этого графика, при $D >> (\lambda S)^{1/2}$ функция G мала по сравнению с единицей. Таким образом, в случае, когда диаметр диафрагмы телескопа значительно превышает радиус корреляции флуктуаций $(\lambda S)^{1/2}$, флуктуации полного светового потока через диафрагму телескопа значительно ослабляются.

8.4.4. Определение структурной характеристики по индексу мерцаний. Результаты измерений индекса мерцаний звезд могут быть положены в основу

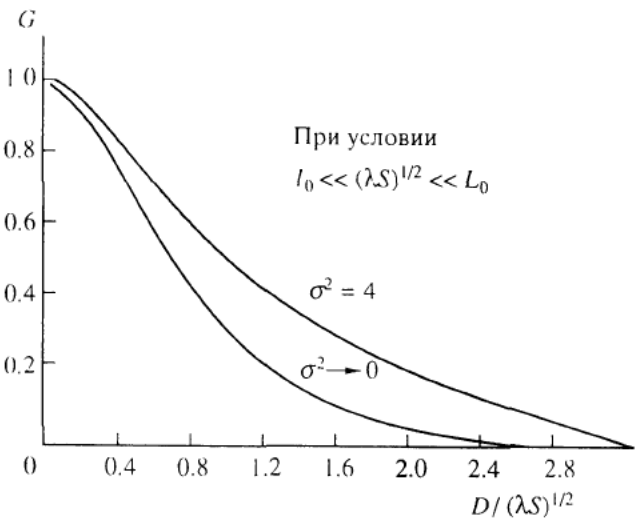


Рис. 8.4.3. Относительное уменьшение величины флуктуаций полного светового потока в зависимости от диаметра объектива (теоретические оценки).

определения параметра C_n^2. Предполагая, что C_n^2 зависит лишь от высоты z, произведем в соотношении (8.3.5*) замену переменной $x = z \sim \sec\theta$, где θ – зенитный угол звезды; тогда для среднего квадрата флуктуаций интенсивности света получаем формулу

$$4 < X^2 >= \sigma_0^2 =< (I/I_0)^2 >= 2.24 \cdot k^{7/6} (\sec\theta)^{11/6} \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/6} dz. \qquad (8.4.5)$$

Для того, чтобы получить средний квадрат флуктуаций светового потока P через диафрагму телескопа диаметром D, правую часть (8.4.5) необходимо умножить на функцию $G(D/\sqrt{\lambda S})$. Поскольку $S = H_0 \sec\theta$, где H_0 – толщина слоя атмосферы порядка шкалы высот, в котором происходят заметные флюктуации показателя преломления, то функция $G(D/\sqrt{\lambda S})$ также зависит от θ.

Таким образом,

$$\ln(1+\sigma_P^2) =< (\ln P/P_0)^2 >= \sigma_0^2 G(D/\sqrt{\lambda H_0 \sec\theta}) =$$
$$= 2.24 \cdot k^{7/6} (\sec\theta)^{11/6} G(D/\sqrt{\lambda H_0 \sec\theta}) \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/6} dz. \qquad (8.4.6)$$

Для того, чобы по полученным данным о мерцании изображений звезд, т.е. по известному значению дисперсии σ_p^2, можно было произвести оценку структурной характеристики C_n^2, необходимо каким-либо способом задать высотный профиль величины C_n^2. Если величина $C_n^2(z)$ убывает с высотой как z^{-2}, например, может быть задана в виде $C_n^2(z) = C_{n0}^2 [1 + (z/H_0)^2]^{-1}$, то из (8.4.6) легко найти следующее соотношение

$$< (\ln P/P_0)^2 >= 13.6 \cdot k^{7/6} (\sec\theta)^{11/6} G(D/\sqrt{\lambda H_0 \sec\theta})\, C_{n0}^2 H_0^{11/6}. \qquad (8.4.7)$$

Как видим, для оценки величины C_{n0}^2 необходимо:

- основываясь на логарифмически нормальном законе распределения интенсивности излучения I_λ в плоскости объектива телескопа, по индексу мерцаний светового потока σ_p^2 вычислить величину $< (\ln P/P_0)^2 >= \ln(1+\sigma_P^2)$;
- после определения величины $< (\ln P/P_0)^2 >$, относящейся к мерцанию источника света с конечным угловым размером, по кривой, изображеной на Рис. 8.4.3, произвести привязку результатов измерений к источнику с бесконечно малыми угловыми размерами;
- наконец, воспользовавшись формулой (8.4.7), оценить величину C_{n0}^2.

8.4.5. Спектры флуктуаций интенсивности света. Как отмечалось в § 8.2, при экспериментальной оценке относительной дисперсии флуктуаций светового потока σ_P^2 удобнее использовать частотные спектры соответствую-

щих случайных полей, поскольку именно они измеряются при обработке получаемых данных, хотя теоретически проще определить пространственную структуру случайного поля изучаемого структурного параметра f. При расчете частотной спектральной плотности флуктуаций амплитуды волны $W_X(\mathrm{f})$ обычно используется гипотеза "замороженности", рассмотренная в разд. 8.2.2 .

Определим временную корреляционную функцию пульсаций амплитуды волны соотношением $B_X(t) = < X(\boldsymbol{r}, t+\tau)X(\boldsymbol{r}, t) >$. Тогда, с учетом использования условия замороженности ($f(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}\cdot t, 0)$, где $\boldsymbol{w}$ – скорость движения неоднородностей перпендикулярно распространению волны, в плоскости объектива x=const будем иметь соотношение

$$B_X(t) = B_A(\boldsymbol{w}\tau)), \tag{8.4.8}$$

где $B_A(r)$ – пространственная корреляционная функция, связанная с двумерной спектральной плотностью $F_{\mathrm{A}}(\kappa,0)$ выражением (8.3.1). Частотный спектр флуктуаций амплитуды волны $W_X(\mathrm{f})$ и соответствующая корреляционная функция $B_X(t)$ связаны соотношением, обратным (8.3.2)

$$W_X(\mathrm{f}) = 4\int B_X(\tau)\cos(2\pi\,\mathrm{f}\,\tau)d\tau = 4\int_0^\infty B_A(|w|\tau)\cos(2\pi\,\mathrm{f}\,\tau)d\tau\,. \tag{8.4.9}$$

Для вычисления $W_X(\mathrm{f})$ из формулы (8.4.9), выразим сначала $B_A(|\boldsymbol{w}|\tau))$ через двумерную спектральную плотность флуктуаций амплитуды $F_A(\kappa,0)$; тогда получим

$$B_A(|w|\tau) = 2\pi\int_0^\infty J_0(\kappa|w|\tau)F_X(\kappa,S)\kappa d\kappa\,. \tag{8.4.10}$$

Подставляя теперь это соотношение в (8.4.9) и используя свойства интеграла Вебера, приходим к следующей формуле

$$W_X(f) = (8\pi/|w|)\int_0^\infty F_A(\sqrt{\kappa^2 + (4\pi f^2/|w|^2}),S)d\kappa\,, \tag{8.4.11}$$

позволяющей рассчитать частотный спектр флуктуаций амплитуды волны по заданной, т.е. теоретически определенной, двумерной пространственной спектральной плотности пульсаций амплитуды $F_A(\kappa,0)$. Теоретическая и экспериментальная оценка относительной дисперсии флуктуаций светового потока σ_p^2 должна выполняться при этом с учетом соотношения

$$\sigma_P^2 = \int_0^\infty W_X(\mathrm{f})d\,\mathrm{f}\,. \tag{8.4.12}$$

Примеры частотных спектров, полученных по результатам заходов двух

звезд для разных высот z_0, относящихся к середине соответствующих высотных интервалов, для которых рассчитывались спектры, приведены на Рис. 8.4.4 (*Александров и др., 1990*). По оси абсцисс отложена частота мерцаний f, по оси ординат – безразмерная величина $fW_I(f)$, где $W_I(f)$ – сглаженные оценки спектральной плотности интенсивности относительных флуктуаций светового потока от звезды через приемный объектив.

С учетом предположения о "замороженности", частотные спектры мерцаний могут быть пересчитаны в одномерные пространственные спектры. В этом случае существенным параметром является скорость движения точки пересечения луча с плоскостью эквивалентного фазового экрана **w**. Для одномерного двухстороннего спектра мерцаний вдоль направления, коллинеарного **w**, можно записать:

$$V_I(\kappa_s) = (|w|/4\pi)W_I(\kappa_s|w|/2\pi), \quad -\infty<\kappa_s<\infty \qquad (8.4.13)$$

где $\kappa_s = 2\pi f/|w|$ –волновые числа.

Очевидно, если неоднородности показателя преломления в атмосфере статистически изотропны, то спектры мерцаний $V_I(\kappa_s)$ не должны зависеть от угла захода. Если же такие неоднородности сильно анизотропны и вытянуты по гори-

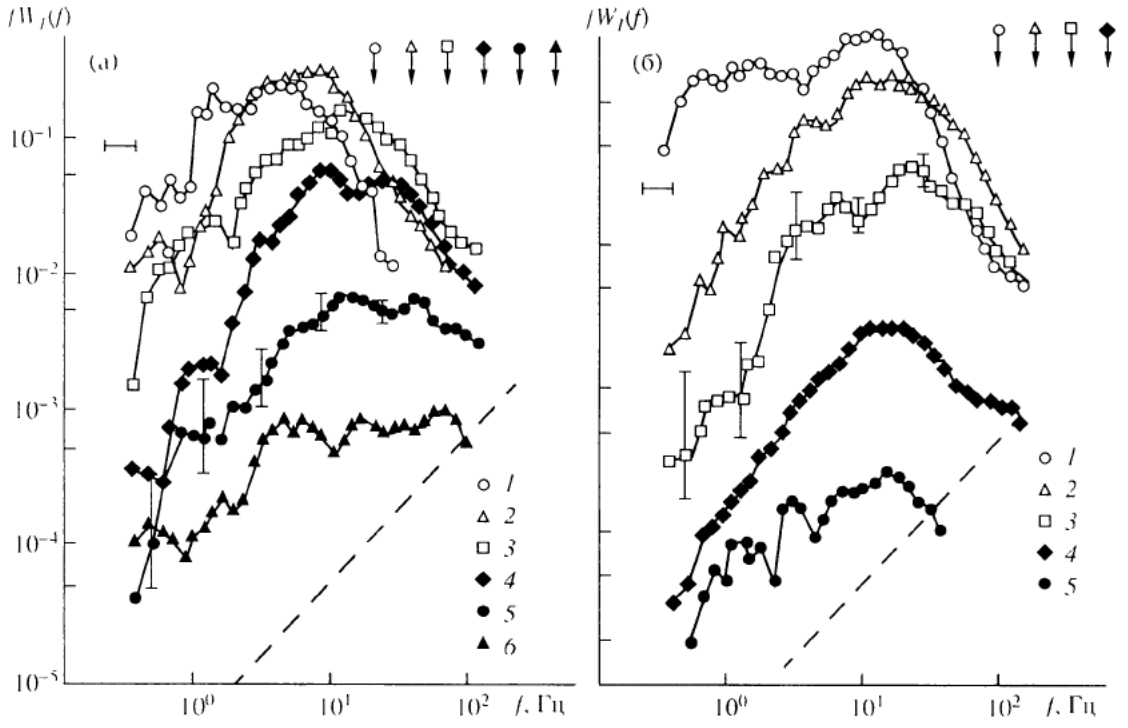


Рис. 8.4.4. Частотные спектры мерцаний Арктура (а) и Канопуса (b), полученные, соответственно, 9.X. 1987 г. и 25.XI. 1987 г. (*Александров и др., 1990)*. Горизонтальные отрезки вверху слева – ширина окна сглаживания, стрелки вверху справа – оценки частот f_c, штриховые прямые внизу – оценки уровня дробового шума; z_0 – середины соответствующих высотных интервалов Δz :

a: 1 – z_0 =18.5 км, σ_p =65%; 2 – z_0=22.5 км, σ_p =75%;
3 – z_0=26.5 км, σ_p =55%; 4 – z_0= 31.0 км, σ_p =33%;
5 – z_0=36.0 км, σ_p =12%; 6 – z_0=41.5 км, σ_p =4.5%;

b: 1– z_0=20.0 км, σ_p = 85%; 2 – z_0=25.5 км, σ_p = 60%.

зонтали то частотный спектр мерцаний определяется вертикальной скоростью w_v и, следовательно, измеренные спектры мерцаний должны совпадать только при пересчете их к вертикальным волновым числам $\kappa_1 = 2\pi f/v_\perp$, где $v_\perp$ – вертикальная компонента скорости **w**. Соответственно, в этом случае вертикальные спектры мерцаний (κ_1) определятся следующим образом:

$$V_I(\kappa_1) = (v_\perp / 4\pi) W_I(\kappa_1 v_\perp / 2\pi). \qquad (8.4.14)$$

Пространственные спектры мерцаний звезд Ахернара (альфа Эридана) и Сириуса (альфа Большого Пса) для двух высот, пересчитанные из частотных спектров по соотношениям (8.4.13) и (8.4.14), приведены в виде зависимостей безразмерных величин $\kappa_s V_I(\kappa_s)$ и $\kappa_1 V_I(\kappa_1)$ от волновых чисел κ_s и κ_1 на Рис. 8.4.5. Для наглядности выбраны заходы с сильно отличающимися углами 90^o–α. Из Рис. 8.4.5 видно, что спектры мерцаний, приведенные к волновым числам κ_s, смещены один относительно другого по оси *x* более чем на порядок. В то же время, спектры мерцаний, приведенные к вертикальным волновым числам κ_1 вполне удовлетворительно совпадают друг с другом. Аналогичная картина наблюдается при сравнительном анализе спектров мерцаний для других заходов.

В заключение укажем, что проведенный здесь анализ данных наблюдений заходящих звезд с борта пилотируемых космических аппаратов важен с методической точки зрения, поскольку позволяет лучше понять особенности предложенного подхода и круг проблем, возникающих при его практической реализа-

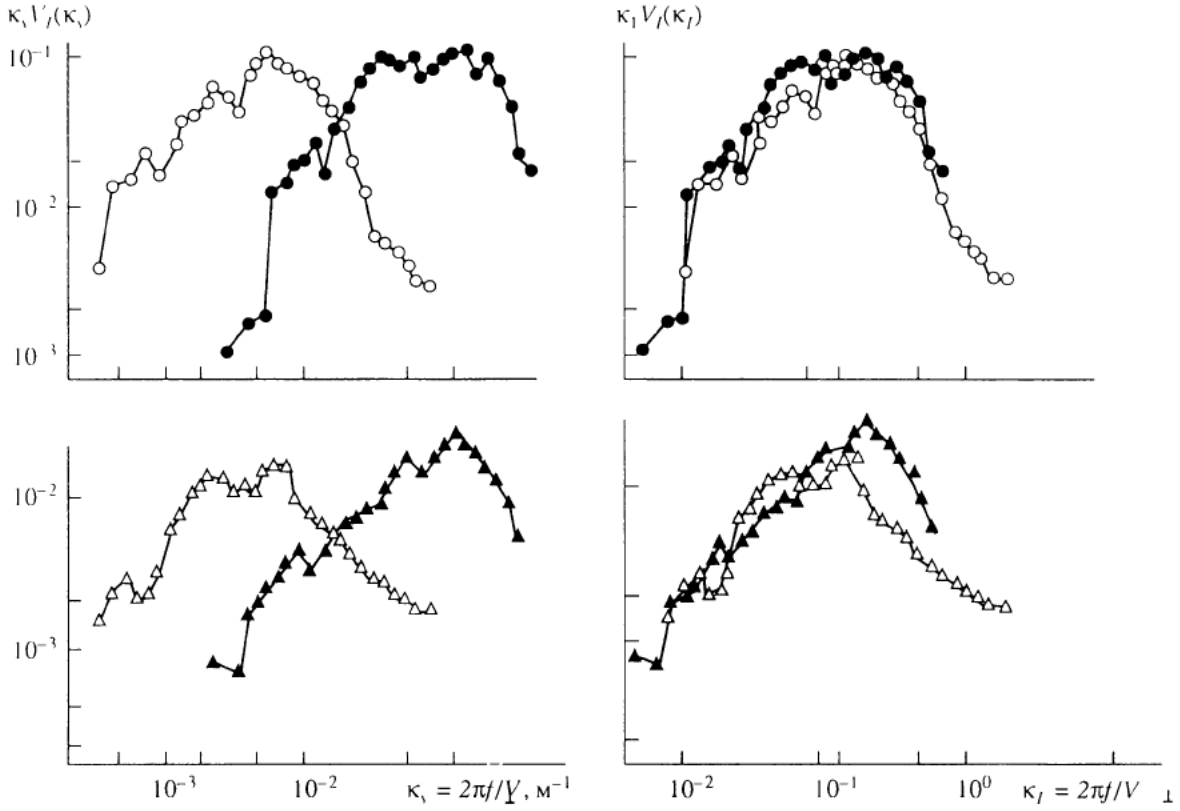


Рис. 8.4.5. Пространственные спектры мерцаний Ахернара по измерениям 6.X.1987 г. (светлые значки) и Сириуса по измерениям 5.IV.1988 г. (зачерненные значки) для высот z_0=25 км (верхние спектры) и z_0=33 км (нижние спектры) (согласно *(Александров и др., 1990)*).

ции. Примерно аналогичные исходные данные ожидаются при осуществлении проекта космического мониторинга, что предполагает использование практически тех же методов обработки с целью оперативного получения в процессе эксперимента численных значений коэффициентов турбулентного обмена. Это позволяет, в конечном итоге, проводить одновременное реконструирование содержаний малых компонентов и выявлять особенности поведения флуктуаций определяющих параметров средней атмосферы в значительном диапазоне высот и географических широт.

Краткие выводы:

1). Одним из важных приложений теории турбулентности многокомпонентных сред является моделирование динамических свойств средней атмосферы Земли с использованием данных измерений, получаемых методом космического мониторинга. В частности, в рамках космического проекта "Gomos" открывается возможность, наряду с исследованиями состояния озоносферы по измерению спектров эталонных звезд при их погружении в атмосферу, изучать статистическую структуру турбулентного поля.

2). Применительно к методическому обеспечению данного проекта предложен способ расчета внешнего масштаба турбулентности L по известной структурной характеристике показателя преломления воздуха C_n^2, измеряемой оптическими методами на борту космического аппарата при дистанционном зондировании атмосферы. В основу оптического определения структурной характеристики C_n^2 положен расчет величины индекса мерцаний звезд на основе анализа флуктуаций фототока приемника излучения на разных высотах.

3). Основные методические вопросы, связанные с практической реализацией предложенного подхода, рассмотрены с использованием ранее полученных результатов наблюдений ряда заходящих звезд с борта пилотируемых космических аппаратов. Обработка аналогичных исходных данных предполагается при осуществлении проекта космического мониторинга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние годы существенно возрос интерес к изучению многокомпонентных природных сред и происходящих в них термогидродинамических процессов. Это обусловлено непрерывно расширяющимися представлениями об окружающих областях пространства, возможностями изучения Земли и ее ближайших окрестностей в сопоставлении с другими планетами Солнечной системы и проникновения в физическую сущность явлений, характерных для многообразных объектов Вселенной. Возрастающую роль приобретают методы математического моделирования природных сред, что требует разработки адекватного аппарата для их теоретического описания. В совокупности с доступными экспериментальными данными, такой подход обеспечивает возможность получения наиболее полной информации о явлениях на Земле и за ее пределами, включая ключевые физико-химические механизмы и различные пути формирования небесных тел на основе разработки разнообразных эволюционных моделей.

Подавляющее большинство гидродинамических процессов и процессов тепло- и массопереноса, определяющих термогидродинамическое состояние природных объектов, таких как атмосферы и недра звезд и планет, происходят на различных пространственно-временных масштабах (от распространения малых примесей в региональном объеме атмосферы планеты до образования гигантских газо-пылевых туманностей, звездных ассоциаций и галактических скоплений) и носят, как правило, турбулентный характер. Турбулентность приобретает ряд особенностей в условиях, когда газ является многокомпонентным, что обычно имеет место в реальных природных средах. Наиболее исчерпывающе такие особенности проявляются при относительно малой плотности газовой смеси, что характерно, в частности, для разреженных газовых оболочек небесных тел – верхних атмосфер планет, состояние которых дополнительно определяется многочисленными комплексами элементарных процессов, инициируемых солнечным ультрафиолетовым и рентгеновским излучением. Теоретическое описание и моделирование турбулентности многокомпонентного химически активного континуума в приложении к планетным атмосферам, определяемое понятием аэрономика, носит, таким образом, достаточно общий характер и позволяет составить представления об основных принципах и подходах, используемых при описании широкого класса турбулентных природых сред.

Эти проблемы нашли свое отражение в данной монографии, в которой, наряду с построением макроскопических моделей развитой турбулентности реагирующей газовой смеси, приведены конкретные примеры аэрономических задач, анализируемых в рамках разработанных моделей сплошной среды с усложненными свойствами. Кратко суммируем ее основные результаты.

Получена система замкнутых соотношений (гидродинамических уравнений масштаба среднего движения, уравнений химической кинетики и состояния в условиях турбулентного перемешивания, а также определяющих (реологических)

соотношений для турбулентных потоков вещества, импульса и энергии), учитывающих многокомпонентность и сжимаемость газовой среды, переменность теплофизических свойств, диффузионный тепло- и массоперенос, химические реакции и воздействие поля гравитации. При осреднении исходных уравнений гидродинамики смеси, наряду с традиционным безвесовым осреднением, систематически использовано весовое осреднение Фавра, позволяющее существенно упростить анализ осредненных гидродинамических уравнений смеси с переменной плотностью. Для химически активной среды предложена процедура осреднения скоростей реакций, на основе которой получены соотношения для быстроты химических превращений, протекающих в условиях турбулентного режима течения реагирующих веществ. Это позволило учесть в осредненных гидродинамических уравнениях наличие сильно нелинейных источниковых членов производства вещества в химических реакциях (имеющих экспоненциальный характер) и появление большого числа дополнительных корреляций, связанных с пульсирующими в потоке температурой и составом. Реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений, выведенные, в частности, традиционным способом, основанном на понятии пути смешения, обобщают результаты, полученные в рамках однородной несжимаемой жидкости, на сдвиговые течения многокомпонентный смеси, стратифицированной в поле силы тяжести. Получены также алгебраические уравнения для определения корреляций с пульсациями массовой плотности для турбулентных течений с малыми числами Маха, когда можно пренебречь относительными изменениями плотности, вызванными пульсациями давления, по сравнению с изменениями, связанными с пульсациями температуры и состава.

Параллельно с этим упрощенным подходом разработана усложненная математическая модель геофизической турбулентности, для которой, наряду с базисными гидродинамическими уравнениями для среднего движения, выведены эволюционные уравнения переноса для одноточечных вторых моментов пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Модель включает в себя эволюционные уравнения переноса для составляющих тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, составляющих векторов турбулентного потока тепла и турбулентной диффузии, уравнения переноса для турбулентной энергии и дисперсии пульсаций энтальпии среды, а также уравнения переноса для парных корреляций пульсаций энтальпии и состава смеси и смешанных парных корреляций пульсирующих концентраций отдельных компонентов смеси. Такой подход обеспечивает возможность расчета сложных течений многокомпонентных реагирующих газов с переменной плотностью, когда существенны диффузионный перенос турбулентности, конвективные члены и предыстория потока, и потому более простые модели (основанные на идее изотропных коэффициентов турбулентного обмена) оказываются неадекватными.

Особое внимание уделено принципиально важной для теории турбулентности проблеме замыкания. Термодинамический подход к замыканию гидродинамических уравнений осредненного движения смеси на уровне моделей первого

порядка позволил получить более общие реологические (градиентные) соотношения для турбулентных потоков вещества, импульса и энергии в многокомпонентном континууме по сравнению с теми, которые выводятся с использованием понятия пути смешения. В основу термодинамического анализа среды положено представление турбулизованного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух подсистем: подсистемы среднего движения (осредненного молекулярного и турбулентного хаоса) и подсистемы пульсационного движения (турбулентной надструктуры). Онзагеровский формализм неравновесной термодинамики позволил найти определяющие связи между термодинамическими потоками и силами для трех основных областей турбулентного течения: ламинарного подслоя, буферной зоны (промежуточной области, в которой эффекты молекулярного и турбулентного переноса сравнимы по значимости) и развитого турбулентного потока. Для частного случая локально-стационарного состояния развитого турбулентного поля (при котором производство энтропии турбулизации примерно равно ее стоку) получены обобщенные соотношения Стефана–Максвелла для многокомпонентной турбулентной диффузии и соответствующее выражение для турбулентного потока тепла, а также алгебраические уравнения для определения многокомпонентных коэффициентов турбулентной диффузии через турбулентные бинарные коэффициенты диффузии. Выведенные соотношения наиболее полно описывают тепло- и массоперенос в турбулентной многокомпонентной среде и обобщают на случай турбулентных режимов течения результаты, полученные ранее для описания регулярных (молекулярных) процессов переноса, когда определяющие соотношения разрешены относительно диффузионных термодинамических сил через потоки (т.е. записаны в виде соотношений Стефана–Максвелла, в которые, вместо многокомпонентных коэффициентов диффузии входят коэффициенты диффузии в бинарных смесях газов).

Как уже отмечалось, конкретизация разработанных теоретических подходов к описанию многокомпонентных турбулентных сред проведена применительно к актуальным аэрономическим проблемам и моделированию процессов, в связи с которыми эти подходы получили свое дальнейшее развитие. Детально исследован диффузионный перенос в верхней атмосфере планеты на основе систематического использования обобщенных соотношений Стефана–Максвелла. Рассмотрена диффузионно-фотохимическая модель химического состава и температуры нейтральной атмосферы Земли в области верхней мезосферы – нижней термосферы и дана оценка величины усредненного по времени коэффициента турбулентной диффузии. Разработана методика полуэмпирического моделирования изотропных коэффициентов турбулентного обмена в стратифицированном в поле силы тяжести, многокомпонентном газовом потоке с поперечным сдвигом гидродинамической скорости. Получены универсальные алгебраические выражения для определения коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности смеси в вертикальном направлении, зависящие от локальных значений кинетической энергии турбулентных пульсаций, динамических чисел Ричардсона, Колмогорова и турбулентного числа Прандтля, а также от внешнего

масштаба турбулентности. Показана возможность приближенного учета неравновесности турбулентности по отношению к полям средних скоростей и температур, возникающей в свободных течениях жидкости в слоях с поперечным сдвигом скорости. На основе разработанной методики проведено численное моделирование коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности в земной турбопаузе, оказывающей сильное влияние на структуру и тепловой режим околоземного космического пространства.

Специальное внимание уделено проблеме определения коэффициентов переноса средней атмосферы по данным о высотном распределении структурной характеристики C_n^2 показателя преломления среды – важнейшей характеристике микроструктуры атмосферного турбулентного поля. На основе модельных уравнений переноса для составляющих тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного потока тепла, а также уравнений для турбулентной энергии и среднеквадратичных пульсаций энтальпии газовой смеси предложена методика самосогласованного расчета коэффициентов турбулентного переноса (учитывающих в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций состава, скорости и температуры вдоль разных осей координат) в зависимости от структурной характеристики флуктуаций показателя преломления среды. Развитый подход основан в конечном счете на возможности определения внешнего масштаба турбулентности, как по градиентам осредненных термогидродинамических параметров течения многокомпонентной газовой смеси, так и по экспериментально определяемой структурной характеристике показателя преломления воздуха, с учетом его высотного распределения. Разработанная методика может найти применение в проекте непрерывного космического мониторинга озоносферы Земли путем зондирования атмосферы светом от эталонной звезды. В качестве основного статистического параметра зондирующей световой волны удобно для этих целей использовать, например, дисперсию флуктуаций амплитуды, величина которой может быть рассчитана по измеряемому в эксперименте индексу мерцаний звезд.

Приведенные примеры не исчерпывают результаты исследований по моделированию многокомпонентных турбулентных сред, но, вместе с тем, свидетельствуют об эффективности применения разработанных методов к изучению разнообразных природных объектов, включая возможности их использования в ряде приложений. Обсуждение других направлений исследований потребовало бы, однако, существенного расширения объема книги, что на данном этапе, по известным причинам, оказалось невозможным. Совершенствование теории и модельных подходов открывает перспективы дальнейшего расширения класса моделей, в рамках которых можно ожидать углубленного понимания реагирующей турбулентности и связанных с нею явлений природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Авдуевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе// Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962. – № 4. – С. 3–12.

Авдуевский В.С., Медведев К.И. Физические особенности течения в трехмерных отрывных зонах. –В кн.: Тепло- и массоперенос, т.1. –М.: Энергия, 1968. –С. 140–147.

Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. –М.: Мир, 1974,Часть 1, – 384 с.

Акмаев Р.А., Швед Г.М. Моделирование распределения O и O_2 в нижней термосфере с учетом турбулентного перемешивания и вертикальных движений// Геомагнетизм и аэрономия, – 1978. – Т.18, – № 3, – С. 487–490.

Александров А.П., Гречко Г.М., Гурвич А.С., Кан В., Манаров М.Х., Пахомов А.И., Романенко Ю.В., Савченко С.А., Серова С.И., Титов В.Н. Спектры вариаций температуры в стратосфере по наблюдениям мерцания звезд из космоса// Изв. АН СССР, ФАО. – 1990. –Т. 26. –№ 1. – С. 5–16.

Аллисон, Луметта (Allison M., Lumetta J.T.). A simple inertial model for the Neptune zonal circulation// Geophys. Res. Lett., 1990, – V. 17, – P. 2269–2272.

Альвен (Alfven H.). In: Protostars and Planets (ed. T.Gehrels), 1978, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, – P. 533–544.

Андре и др. (Andre J.C., De Moor G., Lacarrere P., Therry G., Vacht R.). Modeling the 24 hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer// J. Atmos. Sci., 1978, – V.35, – P. 1861–1883.

Андре и др. (Andre J.C., Moor G.De., Vachat Du). Turbulence approximation for inhomogeneous flow: Part II. The numerical simulation of a penetrative convection experiment// J. Atmos. Sci. – 1976. – V.33. – № 3. – P. 482–491.

Анфимов Н.А. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов// Изв.АН СССР. Сер. Механ. и машиностр., – 1962. – № 1 .– С. 25–31.

Атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, –1991. –50 с.

Атрейя и др. (Atreya, S.K., Donahue T.M., Festou M.C.). Jupiter: Structure and composition of the upper atmosphere// Astrophys J., – 1981, – V. 247, – P. L43–L47.

Атрейя и др. (Atreya, S.K., Sandel, B.R., Romani, P.N.). Photochemistry and vertical mixing in Uranus. In: Uranus (eds. J. Bergstrlah et al.), Univ. Arizona Press, –1991, – P. 110–146.

Атрейя и др. (Atreya S.K., Festou M.C., Donahue T.M., Kerr R.B., Barker E.S., Cochran W.D., Bertaux J.L., Upson W.L. II). Copernicus measurement of Jovian Lyman-alpha emission and its aeronomical significance// Astrophys J., – 1982, –V. 262, –P. 377–387.

Атрейя С., Уэйт Дж. (мл.), Донахью Т., Нэги А., Мак-Коннэл Дж., Теория, наблюдения и модели верхней атмосферы и ионосферы Сатурна. В Сб.: Система Сатурна (под ред. М.Я. Марова и В.Н. Жаркова), –М.: Мир, –1990, – С. 88–116.

Бажинов И.К., Буцко П.А., Волков И.И. и др. Гост-84. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов ИСЗ. Гост- 25645. 115-84. – М.: Издательство стандартов. –1985. – 43 с.

Балтер, Марси (Butler R. P., Marcy G.W.). The Lick Observatory planet search// In: Astronomical and Biochemical Origins and the Search for Life in the Universe (C.B. Cosmovici, S. Bowyer, and D.Werthimer eds.), –1997, Editrice Compositori, Bologna, –P. 331–342.

БарановВ.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы, –М.: Наука, –1977, –335 с.

Баренблат Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины// Прикл. матем. мех., –1955, –Т. 19, – № 1, – С. 61–88.

Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика (Теория и приложения к геофицической гидродинамике).–Ленинград: Гидрометеоиздат, – 1978. – 206 с.

Барт и др. (Barth C.A., Stewart A.I.F., Bougher S.W., Hunten D.M., Bauer S.J., Nagy A.F.). Aeronomy of the current Martian atmosphere// In: Mars (ed. H.H. Kieffer, B.M. Jakosky, C.W. Snyder, and M.S. Matthews), –1992, The University of Arizona Press, Tucson and London, –P. l054–1089.

Бауэр З. Физика планетных ионосфер. –М.: Мир, –1976. – 251 с.

Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности// Журн.вычисл. математики и мат. физики, – 1985. –Т. 25, – № 12. – С. 1856–1882

Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. –М.: Наука, I изд.,–1984; II изд.(исправленное и дополненное) –1994. – 519 с.

Белоцерковский О.М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. –М.: Наука, –1997. –206 с.

Берто и др. (Bertaux J.L., Chassefiere E., Dalaudier F., GodinS., Goutail F., Hauchecorne A., Le Texier H., Megie G., Pommereau G., Simon P., Brasseur G., Pellinen R., Kyrola E.,Tuomi T., Korpela S., Leppelmeir G., Visconti G., Fabian P.,Isaksen S.A., Larsen S.H., Stordahl F., Carriolle D., Lenob–le J., Naudet J.P., Scott N.). GOMOS– Global Ozone Monitoringby the Occultation of Stars. Proposal in Response to ESAEPOP 1// A.O. Servise d'Aeronomie du CNRS, Verrieres le Buisson, –1988. –125 p.

Бете Г.А. Теория сверхновых// В Сб. Ядерная астрофизика (под ред. А.Г. Масевич), –М.: Мир, – 1966, – С. 418–445.

Бетчелор Дж.К. Теория однородной турбулентности. –М.: Изд-во иностр. лит., –1955, –197 с.

Бисикало и др. (Bisikalo D., Boyarchuk A., Kuznetsov O., and Chechetkin V.). Mass transfer in binary stars// J. of Journals (Review of Global Scientific Achievements), – 1997, – № 1, –P. l2–17.

Бишоп и др. (Bishop J., Atreya S.K., Romani P.N., Orton G.S., Sandel B.R., Yelle R.V.). The middle and upper atmosphere of Neptune// In: Neptune and Triton (ed. D. Cruikshank), –1995, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 427–487).

Блэкадар (Blackadar A.K.). Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system// –J. Meteorology, –1955. –V. 12.

Бобылева И.М.,Зилитинкевич С.С.,Лайхтман Д.Л. Турбулентный режим в стратифицированном пограничном слое атмосферы. – В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. – М.: Наука, – 1967. – С. 179–190.

Бобылева И.М. Расчет характеристик турбулентности в планетарном пограничном слое атмосферы. –Труды ЛГМИ, – 1970. –Вып. 40. –С. 3

Борги Р. Модели для численных расчетов турбулентного горения. –В кн.: Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, –1984. –С. 399–455.

Боуже и др. (Bougher S.W., Dickinson R.E., Ridley E.G., Roble R.G.). Venus mesosphere and thermosphere. III. Three dimensional general circulation with coupled dynamics and composition// Icarus, –1988, –V. 73, –P. 545–573.

Боуже и др. (Bougher, S.W., Alexander, M.J., Mayr H.G.) Upper atmosphere dynamics: Global circulation and gravity waves. In: Venus II, Geology, Geophysics, Atmosphere, and Solar Wind Envinroment. (eds. S.W. Bougher, D.M. Hunten, and R.J. Phillips), The University of Arizona Press, Tucson, – 1997, – P. 259–291.

Брасье Г.,Соломон С. Аэрономия средней атмосферы. –Ленинград: Гидрометеоиздат, – 1987. – 413 с.

Брейс и др. (Brace L.H., Mayr H.G., Carignan G.R.). Measurements of electron cooling rates in the midlatitude and auroral–zone thermosphere// J. Geophys. Res. – 1969. –V. 74. –P. 257.

Брейс и др. (Brace L.H., Mayr H.G., Findlay J.A.). Electron measurements bearing on the energy and particle balance of the upper F-region// J. Geophys. Res. – 1969. –V. 74. –P. 2952–2965.

Бриггс и др. (Briggs G.A., Leovy C.B.). Mariner 9 observations of the Mars north polar hood// Bull. Amer. Meteorol. Soc., –1974, –V. 55, –P. 278–296.

Бруяцкий Е.В. Турбулентные стратифицированные струйные течения. – Киев: Наукова думка, –1986. –295 с.

Брэдшоу (Bradshaw P.). The analogy between streamline curvature and buoeancy in turbulent shear flow. Ibid., – 1969, –V. 36, pt 1, –P. 117–191.

Брюнелли Б.Е., Намгаладзе А.А. Физика ионосферы. –М.: Наука, –1988, – 527 с.

Буссе (Busse F.H.). Differential rotation in stellar convection zones// Astrophys. J. –1970, –V. 159, –P. 629–639.

Буссе (Busse, F.H.). A simple model of convection in the Jovian atmosphere// Icarus, –1976, –V. 29, –P. 255–260.

Буссинеск (Boussinesq J.). Essai sur la theoriedes eaux courantes. Memoires presentees par diverses Savants a l'Acad. d. Sci. –Paris, –1977. –V. 23. –P. 46.

Быкова Л.П. Опыт расчета характеристик пограничного слоя атмосферы позаданным параметрам подслоя шероховатости. –Труды ГГО, –1973. –Вып. 297, –С. 12–19.

Бэлбас, Хоули (Balbus S.A., Hawley J.F.). A powerful local shear instability in weakly magnetised disks: 1. Linear analysis// Astrophys J., –1991, –V. 376, –P. 214–222.

Бэнкс (Banks P.M.). Charged particle temperatures and electron thermal con ductivity in the upper atmosphere// Ann.Geophys. –1966. –V. 22. –P. 577–587.

Бэнкс (Banks P.M.). Collision frequencies and energy transfer// Planet. Space Sci. – 1966. –V. 14. –P. 1085–1103, 1105–1122.

Бэнкс, Холзер (Banks P.M., Holzer T.E.). Features of plasma transport in the upper atmosphere// J. Geophys. Res. – 1969. –V.74. –P. 6304–6316.

Бэнкс, Кокартц (Banks P.M., Kockarts G.). Aeronomy. Part A. New Yorkand London: Academic press, –1973. – 430 p.

Бэнкс, Кокартц (Banks P.M., Kockarts G.). Aeronomy. Part B. New Yorkand London: Academic press, –1973. –355 p.

Вагер Б.Г., Надёжина Е.Д. Пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности .– Ленинград: Гидрометеоиздат, –1979. – 135 с.

Ван де Ри (Van de Ree J.). On the definition of the diffusion coefficient in reactinggases// Physica. –1967. –V. 36. –P. 118.

Ван Драйст. Турбулентный пограничный слой в сжимаемых средах. – В кн.: Механика, –1952. –№ 1./ 11. –С. 27

Ван Мигем Ж .Энергетика атмосферы. Л .:"Гидрометеоиздат",–1977,–327 с.

Вассербург Г. Дж. и Попанастасиу Д.А. Некоторые короткоживу–щие нуклиды в ранней Солнечной системе – связь с исходной межзвездной средой// В Сб. Ядерная астрофизика (под ред. АГ. Масевич), М.: Мир, – 1966, –С. 85–142.

Вильямс Ф.А. Теория горения. –М.: Наука, –1971. – 615 с.

Власов, Давыдов (Vlasov M. N., Davydov V. E.). Theoretical description of the main neutral constituents in the Earth's upper atmosphere// J. Atmos. Terr. Phys. – 1982. –V. 44. –№ 8. –P.641–647.

Волков В.П., Маров М.Я., Лебедев В.Н., Сидоров Ю.И., Шари В.П. Облака// В сб.: Планета Венера (под ред. В.Л. Барсукова). М.: Наука, – 1969, – С. 66–94.

Вон Зан (Von Zahn V.). Mass spectrometric measurement of atomic oxygen in the upper atmosphere: A critical review// J.Geophys. Res. –1967. –V. 72, –P. 5933.

Ву и др. (Woo R., Armstrong J.W., Kliore A.J.). Small scale turbulence in the atmosphere of Venus// Icarus, –1982, – V. 52, – № 2.

Гаврилов Н.М. Тепловой эффект внутренних гравитационных волн в верхней атмосфере// Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана. –1974. –Т. 10, – № 1. –С. 83–84.

Гаврилов, Швед (Gavrilov N.M., Shed G.M.).On the closure of equation system for turbulized layer of the upper atmosphere// Ann.geophys. –1975. –V. 31. –№ 3. –P. 375–387.

Гибсон М.М., Лаундер Б.Э. О расчетесвободных горизонтальных турбулентных течений со сдвигом в условиях влияния естественной конвекции// Теплопередача. Сер. С. –1976. –Т. 98. – № 1. – С. 86–94.

Гилман (Gilman P.A.). Nonlinear dynamics of Boussinesq convection in a deep rotation spherical shell// Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., –1977, –V. 8, – P. 93–135.

Гилман (Gilman, P.A.). Model calculations concerning rotation at high solar latitudes and the depth of solar convection zone// Astrophys. J., – 1979, – V. 231, –P. 284–292.

Гинзбург Э.И.,Кузин Г.И. Эффект разбухания поля коротких внутренних гравитационных волн как возможная причина турбулизации мезосферы и нижней термосферы// Геомагнетизм и аэрономия. –1981. –Т. 21. – № 3. – С. 489–496.

Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. –М.: ИЛ.– 1961. –930 с.

Гланц (Glanz J.). Is first extrasolar planet a lost world?// Science, –1997, –V. 275, –P. 1257–1258).

Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М., Системы гидродинамического типа и их применение. М. : Наука, –1981, –366 с.

Голицин (Golitsyn G. S.). A similarity approach to the general circulation of planetary atmospheres//Icarus, –1970. –V.13, –№ 1, –P. 1–24.

Голицын Г.С. Введение в динамику планетных атмосфер. Л.: Гидрометеоиздат, –1973, –103 с.

Гордиец Б.В., Куликов Ю.Н., Марков Н.Н., Маров М.Я. Теоретическая модель земной термосферы с учетом ее инфракрасного излучения// Препринт № 112. – М.: ФИАН им. П. Н. Лебедева АН СССР, –1979. –76 с.

Гордиец Б.Ф., Куликов Ю.Н. Влияние турбулентности и ИК-излучения на тепловой режим термосферы Земли// Космич.исслед. –1981. –Т.19. –Вып. 4. – С. 539–550.

Гордиец Б.В., Куликов Ю.Н. О роли турбулентности и инфракрасного излучения в тепловом балансе нижней термосферы//Инфракрасная спектроскопия космического вещества и свойства среды в космосе. Тр. ФИАН. – 1982. – Т. 130, – С. 29–47.

*Гордиец Б.Ф., Куликов Ю.Н., Марков М.Н., Маров М.Я.*Численное моделирование нагрева и охлаждения газав в околоземном космическом пространстве. – В кн.: Инфракрасная спектроскопия космического вещества и свойства среды в космосе. Тр. ФИАН им. П.Н. Лебедева, М.: –1982. –Т. 130, –С. 3–28

Графов Б.М., Мартемьянов С.А.,Некрасов Л.Н. Турбулентный диффузионный слой в электрохимических системах. –М.: Наука, –1990. –294 с.

Гречко А. С., Гурвич А.С., Романенко Ю. В. Структура неоднородностей плотности в атмосфере по наблюдениям с орбитальной станции "Салют–6"// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. –1980. –Т. 16. –№ 4. – С. 339–344.

Гречко Г. М., Гурвич А. С., Романенко Ю. В. и др. Слоистая структура температурного поля в атмосфере по измерениям рефракции с орбитальной станции "Салют–6"// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. –1981. –Т. 17. –№ 2. – С. 115 – 122.

Гречко Г. М., Гурвич А. С., Джанибеков В. А. и др. Исследование вариаций плотности и температуры в стратосфере по наблюдениям мерцаний звезд из космоса// Исслед. Земли из космоса. –1989. –№ 4. –С. 22 – 27.

Грэд (Grad H.). On the kinetic theory of rarefied gases// Comm. Pure Appl. Math., –1949. –V. 2. –P. 331. (Имеется перевод в сб. "Механика" –М.: ИЛ, 1952. – № 4. – С. 71; № 5. –С. 61).

Грэд (Grad H.). Asymptotic theory of the Boltzman equation// Phys. Fluids. – 1963. –V. 6. –P. 147.(Рус. пер. в сб."Некоторые вопросы кинетической теории газов". – М.: Мир, –1965).

Гурвич А.С. Определение характеристик турбулентности из экспериментов по распространению света// Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968 –Т. 4, –№ 2. –С. 160–169.

Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. –М.: Наука, –1976. –277 с.

Гурвич А.С., Романенко Ю. В. Структура неоднородностей плотности в атмосфере по наблюдениям с орбитальной станции "Салют–6"// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. –1980. – Т. 16. –№ 4. – С. 339 – 344.

Гурвич А. С., Захаров И., Кан В, и др. Мерцания звезд по наблюдениям с орбитальной станции "Салют–7"// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1985. –Т. 21. –№ 12. –С. 1235 – 1241.

Давыдов Б.И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости// Докл. АН СССР, –1959. –Т. 127. –№ 4. –С. 768–771.

Давыдов Б.И. К статистической турбулентности// Докл. АН СССР. –1959. – Т. 127. –№ 5. –С. 980–982.

Давыдов Б.И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости// Докл. АН СССР. –1961. –Т. 136. –№ 1. –С. 47–50.

Далбрулле (Dulbrulle B.). Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula// Icarus, –1993, –V. 106, –№ I, –P. 59–77.

Данилов А.Д., Калгин Ю.А. Сезонно–широтные вариации коэффициента турбулентной диффузии в нижней термосфере и мезосфере// Геомагнетизм и аэрономия. –1992. –Т.32. –№ 4. –С. 69–77.

Де Вольф (De Wolf D. A.)//J. Opt. Soc. Amer. – 1973, –V. 63, –№ 2, –P.171–179.

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. –М.: "Мир", –1964, –456 с.

Девото (Devoto R.S.) Transport properties of ionized monotomik gases// Phys.Fluids. – 1966. –V. 9. – № 6. –P. 1230.

Джинс (Jeans J.H.). Astronomy and Cosmology// Cambridge Univ. Press, –1969, London and New York.

Джонсон, Готлиб (Johnson F.S., Gotlieb B.). Eddy mixing and circulation at ionospheric levels// Planet. Space Sci. –1970. – V. 18. –P. 1707–1718.

Джонсон (Johnson F.S.). Transport processes in the upper atmosphere// J.Atmos. Sci. –1975. –V. 32. –№ 9. –P. 1658–1666.

Джустус (Justus C.G.) The eddy diffusivity, energy balance parameters and heatingrate of upper atmospheric turbulence// J. Geoph. Res. –1967. –V. 72. –P. 1035–1043.

Джустус, Ропер (Justus C.G.,Roper R.G.) Some observations of turbulence in the 80 to 110km region of the upper atmosphere// Meteorol. Monographs. –1968. –V. 9. –№ 31. –P. 122–128.

Джустус (Justus C.G.) Dissipation and diffusion by turbulence and irregular winds near 100 km// J. Atmos. Sci. –1969. –V. 26. –№ 5. –P. 1137–1141.

Дикинсон и др. (Dickinson R.E., Ridley E.C., Roble R.G.). Thermospheric general circulation with coupled dynamics and composition// J. Atmos. Sci., –1984, –V. 43, –P. 205–219.

Дирдорф (Deardorff J.W.) The use of subgrid transport equations in a three–dimensional model of atmospheric turbulence// J. Fluids Eng. –1973. –V. 95. –P. 429–438.

Доклад Геофизического института Университета Аляски, –1983–1984 (Geophysical Institute University of Alaska Biennial Report –1983–1984, Fairbanks, 99775–0800).

Дональдсон С.Р. Расчет турбулентных течений в атмосфере и изолированном вихре// Ракетная техника и космонавтика. –1972. –Т. 10. –№ 1. – С. 4–14.

Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Сюняев Р.А. Адиабатическая теория образования галактик// В Сб.: Происхождение и эволюция галактик и звезд (под ред. С.Б. Пикельнера), –М.: Наука, –1976, – С. 65–104.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. – М.: "Мир", –1974, – 304 с.

Железны С.В., Моргенталер И.Х.,Херендин Д.Л. Модели для расчета напряжений трения и интенсивности турбулентныхпульсаций для осесимметричных спутных струй// Ракет. техника и космонавтика. –1973. –Т. 11. –№ 8. –С. 137–146.

Занг и др. (Zhang, S., Bougher, S.W., Alexander, M.J.) The impact of gravity waves on the Venus thermosphere and O_2 IR nightglow// J. Geophys. Res. –1996, –V. 101, –P. 23195–23205.

Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, –1966, – 686 с.

Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. –М.: Наука, –1975.

Зельдович (Zeldovich, Ya. B.). On the friction fluids between rotating cylinders// Proc. Roy. Soc., –1981, –V. A374, –P. 299–312.

Зельдович Я.Б. Структура Вселенной// В сб.: Итоги науки и техники. Астрономия (под ред. Р.А. Сюняева), –1983, –Т. 22, –С. 4–32.

Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. –Л.: Гидрометеоиздат. –1988. –270 с.

Зурек и др. (Zurek R.W., Barnes J.R., Haberle R.M. Pollack J.B., Tillmann J.E., Leovy C.B.) Dynamics of the atmosphere of Mars// Mars./ Eds Kieffer H.H. et al. Tucson: Univ. Arizona Press, –1992, –P. 835–933.

Иванов М.Н. О структуре нейтральной верхней атмосферы// Space Sci. Rev. –1967. –V. 7. –P. 579–641.

Ивановский А.И., Репнев А.И., Швидковский Е.Т. Кинетическая теория верхней атмосферы. –Л.: Гидрометеоиздат, –1967. –258 с.

Иевлев (Ievlev V.M.). The methods of calculation of the turbulentboundary layer for a high–temperature gaseous flow. AIAA 9th Aerospace Sci. Meeting, N.–Y., AIAA Paper. –1971. –№ 71–165, –1971. –15p.

Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. –М.: Наука, –1975. –256 с.

Иевлев В. М. Численное моделирование турбулентных течений. –М.: Наука, –1990. –215 с.

Изаков М.Н., Морозов С.К.,Шноль Э.Э. Теоретическая модель суточных вариаций температуры, плотности и ветров в экваториальной термосфере Земли в период равноденствия// Препринт ИКИ АН СССР. –М., –1972. –42 с.

Изаков М.Н. Оценка коэффициента турбулентного перемешивания и высоты гидропаузы на Венере, Марсе и Юпитере// Космич. исслед. –1977. –Т. 15. –С. 248–259.

Изаков М.Н. Влияние турбулентности на тепловой режим планетных термосфер// Космич. исслед. –1978. –Т. 16. –Вып. 3. – С. 403–411.

Изаков М.Н., Маров М.Я. Верхняя атмосфера Венеры.// В Сб.: Планета Венера (под ред. В.Л. Барсукова), –М.: Наука, –1989, – С. 114–132.

Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды. –Л.: Гидрометеоиздат, –1979. –375 с.

Ингерсолл (Ingersoll A.P.). Jupiter and Saturn// In: The New Solar System (eds. J.K. Beatty, B. O'Leary, and A. Chaikin), –1981. Cambridge Univ. Press, Cambridge, – P. 117–128).

Ингерсолл, Поллард (Ingersoll A.P., Pollard D.). Motion in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn: Scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion// Icarus, –1982, –V. 52, –P. 62–80.

Ингерсолл (Ingersoll A.P.). Atmospheric dynamics of the outer planets// Science, –1990, –V. 248, –P. 308–315.

Ингерсолл А., Биб Р., Конрат Б., Хант Г. Структура и динамика атмосферы Сатурна. В Сб.: Система Сатурна (под ред. М.Я. Марова и В.Н. Жаркова), –М. : Мир, –1990, –С. 56–87.

Ингерсолл и др. (Ingersoll A.P., Barnet C.D., Beebe R.F., Flasar,P.M., Hinson D.P., Limaye S.S., Sromovsky LA., Suomi V.E.). Dynamic meteorology of Neptune// In: Neptune and Triton (ed. D. Cruikshank), –1995, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 613–682).

Ингерсолл и др. (Ingersoll A.P., Vasalada A.R. et al). Galileo Imaging Team, Dynamics of Jupiter's atmosphere// In: SPSI: The Galileo Mission to the Jupiter System (eds. M.Ya. Marov and R.W. Carlson), Highlights of Astronomy, –1998 (in press)).

Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. – М.: Мир, –1981. –317 с.

Йелле и др. (Yelle R.V., Herbert F., Sandel B.R., Vervack R.J., Jr., Wentzel T.M.). The distribution of hydrocarbons in Neptune's upper atmosphere// Icarus, – 1993, – V. 104, –P. 38–59.

Кампе де Ферье Ж. Статистическая механика и теоретические модели диффузионных процессов// В Сб. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха (под ред. А.С. Монина). –М.: Изд. иностр. лит., – 1962, – С. 165–174.

Кантуэлл Б.Дж. Организованные движения в турбулентных потоках. –М.: Мир, –1984.

Карлсон и др. (Carlson R.W., Baines K.H., Encrenaz T., Drossart P., Roos–Serote M., Taylor F.M., lrvin P., Weir A., Smith P., Calcutt,S.). Near–IR spectroscopy of the atmosphere of Jupiter. In: SPSI: The Galileo Mission to the Jupiter System (eds. M.Ya. Marov and R.W. Carlson), Highlights of Astronomy, –1998 (in press)).

Кассен (Cassen P.). Utilitarian models of the solar nebula// Icarus, –1994, –V. 112, –P. 405–429.

Келлер, Фридман (Keller L.V., Friedman A.A.). Differentialgleichungen fur die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flussigkeit// In: Proc. I Intern. Congress Appl. Mech., Delft. –1924. –S. 395–405.

Кержанович, Маров (Kerzhanovich V.V., Marov M.Ya.). The atmospheric dynamics of Venus according to Doppler measurements by the Venera entry probes// In: Venus (ed. D.M. Hunten, L. Colin, T.M. Donahue, and V.I. Moroz), –1983, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 766–778).

Клейтон и др. (Clayton D.D., Cox D.P., Michel F.C.). A local recent supernova: Evidence from X rays, 2 AI radioactivity and cosmic rays// In: The Galaxy and the Solar System (eds. R. Smoluchowski, J.N. Bahcall, and M. S. Matthews), –1986, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 129–146).

Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. –М.: Наука, –1982, –608 с.

Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. –М.: Наука, –1990, –317 с.

Колегров и др. (Colegrove F.D., Hanson W.B., Johnson F.S.). Eddy diffusion and oxygentransport in the lower thermosphere// J.Geophys.Res. –1965. –V. 70, –P. 4931–4941.

Колегров и др. (Colegrove F.D.,Johnson F.S.,Hanson W.B.). Atmospheric composition in the lower thermosphere// J.Geophys. Res.–1966. –V. 71. –P. 2227–2236.

Колесниченко А.В., Тирский Г.А. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред// Числ. метод. мех. сплош. среды. –1976, –Т. 7, –№ 4, – С. 106-121.

Колесниченко А.В. Учет кинетической энергии диффузии при термодинамическом моделировании многокомпонентных сплошных сред// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1978. –№ 84. –29 с.

Колесниченко А.В. Основные уравнения гидротермодинамики многофазного многокомпонентного континуума с химическими реакциями (феноменологическая теория) // Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1978. –№ 125. –29 с.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла в высших приближениях коэффициентов переноса для частично ионизованных смесей газов// Препринт ИПМ АН СССР. М., –1979, –№ 66. –23с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Влияние турбулентности на структуру и энергетику нижней термосферы планеты// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1979. –№ 175. –27с.

Колесниченко А.В., Тирский Г.А. Термодинамический анализ течений частично ионизованных смесей неидеальных газов в условиях неполного химического равновесия// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1979. –№ 77. –27с.

Колесниченко А.В. Методы неравновесной термодинамики для описания турбулентных многокомпонентных гидротермодинамических систем с химическими реакциями// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1980, –№ 66. –22 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование турбулентных коэффициентов переноса в задачах аэрономии// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1980. –№ 20. –31с.

Колесниченко А.В. Методы механики сплошной среды для описания турбулентных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло–и массопереноса// Труды V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Краткие тексты докл. –М., Алма–Ата, –1981, –С. 123–126.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла в высших приближениях коэффициентов переноса для многокомпонентных ионизованных смесей газов в магнитном поле// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1982. –№ 14. –16 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. О высших приближениях к коэффициентам диффузии в смеси нейтральных и заряженных частиц в магнитном поле// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1982.– № 142. –24 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование второго порядка коэффициентов турбулентного обмена для сдвиговых течений многокомпонентных сжимаемых сред// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1984. –№ 31. –25 с.

Колесниченко А.В., Васин В.Г. Моделирование коэффициентов переноса для турбулентных течений многокомпонентных газовых смесей верхней атмосферы Земли// Известия АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана. –1984. –Т. 20. –№ 8. –С. 683–692.

Колесниченко А.В.,. Маров М.Я. К проблеме замыкания в теории турбулентных сдвиговых течений многокомпонентных смесей химически активных газов// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1984. –№ 31, –24 с.

Колесниченко, Маров (Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.). Methods of non–equilibrium thermodynamics for description of multicomponent turbulens gas mixtures// Arch. Mech. (Warszawa), –1985. –V. 37. –№ 1–2. –P. 3–19.

Колесниченко А.В. К макроскопической теории процессов диффузионного переноса в газах// Препринт ИПМ РАН. –М., –1994, № 42, –39 с.

Колесниченко А.В. Маров М.Я. К моделированию параметров многокомпонентной турбулентности в свободной атмосфере по оптическим измерениям флуктуаций показателя преломления воздуха// Препринт ИПМ РАН. –М., –1994. –№ 41. –32 с.

Колесниченко А.В., Красицкий О.П. Диффузия в термосфере// Астрономический вестник. –1994. –Т. 28. –№ 2. –С. 125–139.

Колесниченко А.В. Маров М.Я. К моделированию параметров многокомпонентной турбулентности в свободной атмосфере по оптическим измерениям флуктуаций показателя преломления воздуха// Космические исследования. –1996 –Т. № 1, –С. 36–57.

Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентностив несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса// ДАН СССР. –1941. –Т.30. –С.299–303.

Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости// Изв. АН СССР. Сер. физ. –1942. –Т.6. – С.56–68.

Компониец В.З., Полак Л.С., Эпштейн И.Л. Методы математического моделирования турбулентных течений. –В кн.: Плазмохимические реакции и процессы. –М.: Наука, – 1977. – С. 135–162.

Компаниец В.З., Овсянников А.А., Полак Л.С. Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы. –М.: Наука, –1979. –242 с.

Космическое землеведение. Под ред. акад. В.А. Садовничего.–М.: Из–во МГУ, –1998. –571 с.

Коспар (COSPAR) International Reference Atmospheric 1972 (CIRA–72). – Berlin: Acad.–Verl., –1972. –450 p.

Кошелев (Koshelev V.V.). Diurnal and seasonal variationsof oxygen, hydrogen and nitrogen components at heights of mesosphere and lower thermosphere// J. Atmos. and Terr. Phys. –1976. –V. 38. –№ 9./ 10. –P. 991–998.

Кошелев В.В., Климов Н.Н., Сутырин Н.А. Аэрономия мезосферы и нижней термосферы. –М.: Наука, –1983. –183 с.

Краснопольский, Паршев (Krasnopolsky,V.A., Parshev V.A.). Photochemistry of the Venus atmosphere// In: Venus (ed. D.M. Hunten, L. Colin, T.M. Donahue, and V.I. Moroz), –1983, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 431–458.

Куззи и др. (Cuzzi J.N., Dobrovolskis A.R., Champney J.M.). Particle–gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula// Icarus, 1993, –V. 100, –P. 102–134.

Кузнецов В.П. Влияние флуктуаций температур и концентраций на среднюю скорость химической реакции в турбулентном потоке.// В кн.: Второй Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. – М.: ИХФ АН СССР, –1969. –С. 99–103.

Кузьмин А.Д., Маров М.Я. Физика планеты Венера. –М.: Наука, –1974, – 408 с.

Куликов Ю. Н., Павлюков Ю.Б. Моделирование суточных вариаций "нечетного" азота в среднеширотной термосфере Земли// В сб.: Математические задачи прикладной аэрономии (под ред. М.Я. Марова), Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, –М. –1987. – С. 77–96.

Куманцев М.А., Овсянников А.А., Полак Л.С. Исследование процесса смешения плазменной струи с холодным газом при наличии химической реакции// Теоретические основы химической технологии. –1974. –Т. 8. –№ 6. –С. 872–879.

Куртисс (Curtiss C.F.). Symmetric gaseous diffusion coefficients// J. Chem. Phys. –1968. –V. 49. –№ 7. –P. 2917–2923.

Лаборатория реактивного движения. (Jet Propulsion Laboratory.). Chemical kinetics and photochemical data for use in stratospheric modelling// JPL Publ. 87–41, Jet Propul. Lab., Pasadena, California. –1987. –196 p.

Ламли Дж.Л., Пановский Г.А. Структура атмосферной турбулентности. –М.: Мир, –1966. –264 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. –М.: Наука, –1988. –733 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. –М.–Л.: Гостехтеориздат, –1954, – 567 с.

Лапин Ю.В., Стрелец Н.Х., Щур Н.Л. Расчет тепло–и массообмена при течениях вязких неравновесных газовых смесей с учетом эффектов многокомпо-

нентной диффузии// Тепломассообмен, VII. –Минск: Ин–т тепло– и массообмена АН БССР, –1984. –Т. 3. –С. 121–126.

Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. –М.: Наука, –1989, –366 с.

Лаундер, Сполдинг (Launder B.E., Spalding D.B.). Mathematical model of turbulence, – London: Acad. press, –1972. – 169 p.

Лаундер (Launder B.E). On the effects of gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum// J. Fluid Mech., –1975, –V67, –Pt. 3, –p. 569–582.

Лаундер Б.Е., Морс А. Численный расчет осесимметричных свободных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений// В сб. Турбулентные сдвиговые течения –I./ Под ред. Ф. Дурста, Б. Е. Лаундера, Ф. В. Шмидта, Дж. Х. Уайтлоу. – М.: Машиностроение, –1982. –С. 291–310.

Левеллен В. Метод инвариантного моделирования// В кн: Турбулентность, принципы и применения// Под ред. У.Форста, Т. Моулдена. –М.: Мир, –1980. – С. 262–310.

Леттo (Lettau H.). Compendium of meteorology: Diffusion in the upper atmosphere. – In: Compendium of meteorology// Ed. T.F Malone N.Y.: Amer. Meteorol. Soc. –1951. –P. 320–333.

Либби (Libby P.A.) On turbulent flow with fast chemical reactions.// Pt I: The closure problem. – Combus. Sci. and Technol., –1972. –V. 6, –P. 23–28.

Линдзен (Lindzen, R.S.) Turbulence and stress due to gravity wave and tidal breakdown.// J.Geophys.Res. –1981. –V. 86, –P. 9707–9714.

Лиови (Leovy, C.B.). Martian meteorological variability// Adv. Space Res., –1982, –V. 2, –P. 19–44.

Лиссер (Lissauer J.J.). Urey Prize Lecture: On the diversity of plausible planetary systems// Icarus, –1995, –V. 114, –P. 217–236.

Ллойд и др. (Lloyd K.N., Low C.H., McAvaney, Rees D., Roper R.G.). Thermospheric observations combining chemical seedingand ground based thechniques. 1.Winds, turbulence and parameters of the neutral atmosphere// Planet. Space Sci. – 1972. –V. 20. –P. 761.

Ллойд (Lloyd K.H.). Investigations into the nature of the turbopause// Proc. Int. Conf. on Structure, Composition and General Circulation of Upper and Lower Atmospheres and Possible Antropogenimic Perturbation. Melburne, –1974. –V. 2. –P. 653–666.

Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. –1978. – № 3. –С. 13–25.

Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1986. –№ 2. –С. 40–52.

Лыкосов В.Н. О противоградиентном переносе момента в струйном течении низкого уровня// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и окана. –1991. –Т. 27, –№ 8.

Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Структура протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т–Таури: II. Результаты модельных вычислений// Астрономический вестник (Исследования Солнечной системы), –1996, –Т. 30, –

№ 6, –С. 441–455.

Макенфус, Куртис (Muckenfuss C., Curtiss C.F.). Thermal Conductivity of Multicomponent Gas Mixtures// J. Chem. Phys. –1958. –V. 29. –№ 10. –P. 1273–1289.

Макенфус (Muckenfuss C.). Stefan–Maxwell relations for multicomponent diffusion and the Chapmen–Enskog solution of the Boltzmann eguations// J. Chem. Phys. –1973. –V. 59. –№ 4. P. 1747–1752.

Макконнел и др. (McConnell J.C., Hoiberg J.B., Smith G.R., Sandel B.R., Shemansky D.E., Broadfoot A.L.). A new look at the ionosphere of Jupiter in light of the UVS occultation results// Planet. Space Sci., –1982, –V. 30, –P. 151–167.

Максвелл (Maxwell J.C.)// The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, edited by W.D. Niven (Cambridge U.P., Cambridge, England). –1890. –V. 1. –P. 377.

Манк, Андерсон (Munk W.H., Anderson E.R.) Notes on the theory of the thermocline// J. of Marine Research, –1948. – V.1. –P. 276.

Манн и др. (Munn R.J., Smith F.J., Mason E.A.). Transport collision integrals for quantum gases obeying a (12-6) potential// J.Chem. Phys. –1965. –V. 42. –P. 537–548.

Маров М.Я. Планеты Солнечной системы. –М.: Наука, –1986.–319 с.

Маров М.Я., Колесниченко А.В. О моделировании гетеросферы планеты// Геомагнетизм и аэрономия. –1971. –№ 1. –С. 40–50.

Маров М.Я., Колесниченко А.В. О некоторых проблемах теоретического моделирования верхней атмосферы// Семинар по исследованию верхней атмосферы (Интеркосмос, секция № 6, Байя, ВНР). В сб.: Физика верхней атмосферы. –М., –1981. –С. 87–89.

Маров М.Я., Колесниченко А.В. О некоторых проблемах теоретического моделирования верхней атмосферы// Наблюдения искусственных спутников Земли. –М., Будапешт, –1983. –№ 20. –С. 29–54.

Маров, Колесниченко (Marov M,Ya., Kolesnichenko A.V.). Methods of non–equilibrium thermodynamics for discribing turbulent multicomponent gas mixtures with chemical reactions and heat–mass transfer processes// XVI Symposium on advanced problems and methods in fluid mechanics. Abstracts of contributed papers. – Spala, Poland, –1983. –P. 22–24.

Маров М.Я., Колесниченко А.В. Введение в планетную аэрономию. М.: "Наука". –1987, – 456 с.

Маров М.Я., Колесниченко А.В., Красицкий О.П.,Васин В.Г., Павлюков Ю.Б. Сравнительный анализ и графическое обеспечение эмпирических моделей термосферы Земли// Препринт ИПМ АН СССР. –М., –1989. –№ 45. –43 с.

Маров М.Я., Волков В.П., Сурков Ю.А., Рывкин М.Л. Нижняя атмосфера.// В Сб.: Планета Венера (под ред. В.Л. Барсукова), –М.: Наука, –1989, –С. 25–68.

Маров, Красицкий (Marov M.Ya., Krasitsky O.P.). Some comments of the CIRA–86 model// Adv. Space Res. –1990. –V. 10. –№ 6. –P. 117–121.

Маров (Marov M.Ya.). Mars, Atmosphere// In: The Astronomy and Astrophysics (ed. S.P. Maran), –1992. Cambridge University Press, –P. 407–411.

Маров М.Я. Внутренние планеты Солнечной системы.// В сб.: Космическая биология и медицина, Т.1. Космос и его освоение (под ред. В.А. Котельникова, М.В. Иванова и Лж. Д. Раммела). М.: Наука, –1994, –С. 168–247.

Маров и др. (Marov M.Ya., Shematovich V.I., Bisikalo D.V.). Nonequilibrium Aeronomic Processes. A Kinetic Approach to the Mathematical Modeling.// Space Sci. Rev., –1996, –V. 76, –№ 1./ 2. pp. 1–204.

Маров, М.Я. Методы механики в задачах аэрономии// Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, –1997. –№ 18, –46 с.

Маров и др. (Marov M.Ya., Shematovich V.I., Bisikalo, D.V. Gerard J.C.). Nonequilibrium Processes in the Planetary and Cometary Atmospheres: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht./ Boston./ London). –1997.– 292 pp.

Маров , Гринспун (Marov M.Ya., Grinspoon D.)// The Planet Venus, –1998. Yale University Press (in press)).

Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, –1982. –320 с.

Маслов Л.А., Петровская Т.С. Расчет турбулентного пограничного слоя на телах вращения под углом атаки// Тр. ЦАГИ, –1975. –Вып. 1661. –С. 3–14.

Махаффи и др. (Mahaffy P.R., Atreya S.K., Niemann H.B., Owen T.C.). In–situ chemical and isotopic measurements of the atmosphere of Jupiter. In: SPSI: The Galileo Mission to the Jupiter System (eds. M.Ya. Marov and R.W. Carlson), Highlights of Astronomy, –1998 (in press)).

Мейджор и др. (Major M., Queloz D., Udry S.). From brown dwarfs to planets// In: Astronomical and Biochemical Origins and the Search for Life in the Universe (C.B. Cosmovici, S. Bowyer, and D. Werthimer eds.), –1997, Editrice Compositori, Bologna, –P. 313–330).

Мейкснер (Meixner J.). Prosses in simpl thermodynamic materials// Arch. Ration. Mtcy. Anal. –1969. –V. 33. –P. 33.

Мейсон (Mason E.A.). Transport properties of gases obeying a modified Buckingham (exp–6) potential// J.Chem. Phys. –1954. –V.22, –P. 169–191.

Мейсон, Саксена (Mason E.A., Saxena S.C.). Approximate formula for the conductivity of gas mixtures// Phys. Fluids. –1958. –V. 1. –№ 5. –P. 361–369.

Мейсон (Mason E.A). The Onsager reciprocal relations. Experimental evidence// In: Foundations of continuum thermodynamics. –London and Basingstoke: Mac-Millan. –1974.

Меллор (Mellor G.L.). Analitic prediction of the properties of stratified planetary surface layers// J.Atmos.Sci. –1973. –V. 30. –№ 6. –P. 1061–1069.

Меллор Г.Л., Херринг Х.Д. Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения// Ракет. техника и космонавтика. –1973. –Т. 11. –№ 5. –С. 17–30.

Меллор, Ямада (Mellor G.L.,YamadaT.). *A* hierarhy of turbulence closure models for planetary boundary layers// J. Atmos. Sci. –1974. –V. 31. –P. 1791–1806.

Меллор, Ямада (Mellor G.L.,YamadaT.). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems// Rev. of Geoph. and Space Phys. –1982. –V. 20. –P. 851–875.

Метеорология и атомная энергия. – М.: Изд-во иностр. лит., –1959. –259 с.

Метеорология и атомная энергия. – М.: Изд-во иностр. лит., –1971. –648 с.

Миллер (Miller D.G.). The Onsager relations; Experimental evidence// In: Foundations of continuum thermodynamics. –London and Basingstoke: Mac-Millan. – 1974.

Миллионщиков М.Д. К теории однородной изотропной турбулентности// ДАН СССР. –1941. –Т.32. –С.611–614.

Монин А.С. Динамическая турбулентность в атмосфере// Изв. АН СССР. Серия географическая и геофизическая. –1950. –Т. 14, –№ 3. –С. 232–254.

Монин А.С. О спектре турбулентности в температурно–неоднородной среде.// Изв. АН СССР (сер. геофиз). –1962, –№ 3, –С. 397.

Монин А.С. Общий обзор по атмосферной диффузии// В сб. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха (под ред. А.С. Монина). М.: Изд. иностр. лит., – 1962, –С. 44–57.

Монин А.С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха. – Физика атмосферы и океана, –1965, –Т. 1, –№ 1, –С. 45–55.

Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. –М.: Наука, –1969, –183 с.

Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. –Л.: Гидрометеоиздат. –1988, –424 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. –М.: Наука, –Т. 1, 1965. –640 с.; СПб.: Гидрометеоиздат, –1992.

Монин А.С., Полубаринова– Кочина П.Я., Хлебников В.И. Космология, гидродинамика, турбулентность. –М.: Наука, –1989. –325 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, –Т. 2. –М.: Наука. – 1966, – 720 с.; СПб.: Гидрометеоиздат. –1996, –742 с.

Морковин (Morkovin M.V.). Effects of compressibility on turbulent flow// Mechanics of Turbulence, 367 Gordon and Breach. N.Y., –1961.

Морозов С.К., Красицкий О.П. Численный метод решения систем нестационарных пространственно–одномерных нелинейных дифференциальных уравнений. –М., Препринт ИКИ АН СССР –№ 396. –1978. –28 с.

Муртаг и др. (Murtagh D.P., Witt G., Stegman J. et. al.). An assessment of proposed O(^{1}S) and $O_2(b\,^1\Sigma_g^+)$ nightglow excitation parameters// Planet. Space Sci. – 1990. –V. 38. –№ 1. –P. 43–54.

Мясников В.П., Титоренко В.И. Эволюция самогравитирующих газопылевых сгустков с учетом переноса излучения в диффузионном приближении// Астрономический вестник (Исследования Солнечной системы), –1989б, –Т. 23, – № 3, – С. 207–219.

Мясников В.П., Титоренко В.И. Эволюция самогравитирующих сгустков газопылевой туманности, участвующих в аккумуляции планетных тел// Астрономический вестник (Исследования Солнечной системы), –1989а, –Т. 23, № 1, –С. 14–26.

Накамура др. (Nakamura R., Kitada Y., Mukai T.). Gas drag forces on fractal aggregates// Planet. Space Sci., –1994, –V. 42, –№ 9, –P. 721–726.

Намгаладзе А.А., Кореньков Ю.Н., Клименко В.В., Карпов И.В., Бессараб Ф.С., Суроткин В.А., Глущенко Т.А., Наумова Н.М. Глобальная численная модель термосферы, ионосферы и протоносферы Земли// Геомагнетизм и аэрономия. – 1990. –Т. 30.–№ 4. –С. 612–619.

Невзглядов В.Г. К феноменологической теории турбулентности// Докл. АН СССР, –1945, – Т. 47, – № 3, – С. 169–172.

Невзглядов В.Г. К статистической теории турбулентности// Докл. АН СССР, –1945, –Т. 47, – № 7, – С. 482–485.

Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. –М.: Наука, –1987. – 464 с.

Николаевский В.Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности// Вихри и волны. –М.: Мир. –1984. –С. 266–335.

Николе (Nicolet M.). Photodissociation of molecular oxygen in the terrestrial atmosphere: simplified numerical relations for the spectral rangeof the Shuman–Runge bands// J. Geophys. Res. –1984. –V. 89. –№ D2. –P. 2573–2582.

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах, –М.: Мир, –1979, –342 с.

Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах.// Проблемы турбулентности. – М.: ОНТИ, –1936. – С.75–150.

Ниман и др. (Niemann H.B., Kasprzak W.T., Hedin A.E., Hunten D.M. d Spencer, N.W.). Mass spectrometric measurements of the neutral gas composition of the thermosphere and exosphere of Venus// J. Geophys. Res., –1980, –V. 85, –P. 7817–7827.

Нир , Макэлрой (Nier A.O., McElroy M.B.)./ Composition and structure of Mars upper atmosphere: Results from the neutral mass spectrometers on Viking I and 2// J. Geophys. res., –1977, –V. 86, –P. 9945–9952.

О'Брайен Е.Е. Метод функций плотности вероятности (*ФПВ*) в теории турбулентных течений с химическими реакциями.– В кн.: Турбулентные течения реагирующих газов. –М.: Мир, – 1983. – С. 252–296.

Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока// Изв. АН СССР, сер. географ, и геофиз., –1941, –Т. 5, –№ 4–5, –С. 453–466.

Обухов А.М// Изв. АН СССР, сер. географ, и геофиз., –1949, –Т. 13, –№ 4, – С. 281.

Обухов А.М. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света// Изв. АН СССР, сер. геофиз. –1953. –Т.2. –С. 155.

Обухов А.М. О влиянии архимедовых сил на структуру температурного поля в турбулентном потоке// ДАН СССР. –1959, – Т. 125,–№ 6, –С.1246.

Обухов А.М. Описание турбулентности в лагранжевых координатах// В Сб. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха (под ред. А.С. Монина). М.: Изд. иностр. лит., –1962, –С. 138–142.

Озерной Л.М., Чибисов Г.В// Астрон. ж., –1970, –Т. 47, –С. 469.

Озерной Л.М. Вихревая теория проиисхождения галактик и их систем.// В Сб.: Происхождение и эволюция галактик и звезд (под ред. С.Б. Пикельнера), – М.: Наука, –1976, –С. 105–131.

Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих газов –М.: Мир, –1990. –661 с.

Оуэн Т. Внешние планеты Солнечной системы// В Сб.: Космическая биология и медицина, Т.1 Космос и его освоение (под ред В.А. Котельникова, М. В. Иванова и Дж. Д. Раммела), –М.: Наука, – 1994, – С. 247–279.

Петухов Б.С., Дворцов В.Н., Харин Б.Е., Шиков В.К. Квазитрехмерная модель и метод расчета течения и теплообмена на начальном участке канала прямоугольного сечения// Теплофизика высоких температур. –1984. –Т. 22. –№ 1. –С. 74–82.

Пикельнер С.Б., Каплан С.А. Основы теории звездообразования. Происхождение звезд первого поколения// В Сб.: Происхождение и эволюция галактик и звезд (под ред. С.Б. Пикельнера), –М.: Наука, –1976 –С. 190–234.

Пикельнер С.Б., Каплан С.А., Засов А.В. Крупномасштабная динамика межзвездной среды и образование звезд плоской подсистемы// В сб.: Происхождение и эволюция галактик и звезд (под ред. С.Б. Пикельнера), –М.: Наука, –1976 –С. 235–279.

Полак Л.С., Овсянников А.А., Словецкий Д.И., Вурзель Ф.Б. Теоретическая и прикладная плазмохимия. –М.: Наука, –1975. –304 с.

Прандтль (Prandtl L.). Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz//Z. angew. Math. Mech., –1925. –Bd. 5, –S.136–139.

Прандтль (Prandtl L.). Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz// Z. angew. Math. Mech., –1942. –Bd. 22, –№ 5, –S. 241–243

Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. –Новосибирск: Наука, –1966, –509с.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. –М.: Прогресс, –1986, –343 с.

Программа средней атмосферы. Middle Atmosphere Program// Handbook for MAP, –V. 16 (eds. K. Labitzke, J.J. Barnett, and B. Edwards). *SCOSTEP* Publication, July –1985, University of Illinois, Urbana, Illinois.

Прохоров А.М. и др. Распространение лазерного излучения в случайно-неоднородных средах// Усп. физ. наук, –1974, –Т. 114. – Вып. 3.

Рис и др.(Rees D., Roper R.G.,Lloye K.H., Low C.H.). Determination of the structure of the atmosphere between 90 and 250 km by means of contaminant releases at Woomera, May, 1968// Phys. Trans. Roy. Soc. London. –1972. –V. A2 71. –P. 631.

Ричардсон (Richardson L.F.). Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph// Proc. Roy. Soc., –1926, –V. AIIO, –№ 756, –P. 709–737.

Ришбет Г., Гарриот О.К. Введение в физику ионосферы. –Л.: Гидрометеоиздат. –1975. –303 с.

Розенберг (Rosenberg N.). Statistical analysis of ionospheric winds–II// J. Atmos. Terr. Phys. –1968. –V. 30. –№ 5. –P. 907–917.

Ротта (Rotta J.). Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Teil 1.–Physik, –1951, –Bd 129, –S. 547–572.

Ротта (Rotta J.). Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Teil 2.–Physik, –1951, –Bd 131, –S. 51–77.

Роттжер и др. (Rottger L., Czechowsky P., Schmidt G.) First low–power VHF radar observations of tropospheric, stratospheric and mesospheric winds and turbulence at the Arecibo OЬservatory// J. Atmos. Terr. Phys. –1981. –V. 43. –№ 8. – P. 789 – 800.

Роупер (Roper R.G.) Dissipation of wind energy in the height range 80 to 140km// J. Geophys. Res. –1966. – V. 71. –P. 4427.

Роупер (Roper R.G.). The dynamics of the turbopause// Proc. Int. Conf. on Structure, Composition and General Circulation of the Upper and Lower Atmospheres and Possible Anthropogemic Perturbation. – Melburn, 1974. –V. 2. –P. 642–652.

Руден , Поллак (Ruden S.P., Pollack J.B.). The dynamical evolution of the protosolar nebula// Astrophys. J., 1991, –V. 375, –P. 740–760.

Рузмайкина Т.В., Макалкин А.Б. Образование и эволюция протопланетного диска// В сб.: Науки о планетах (Труды сов.–амер. совещания по физике планет, под ред. Р.З. Сагдеева, Л.М. Мухина и Т. Донахью), –1989. Изд. ИКИ АН СССР, С. 43–63.

Рытов С.М. Дифракция света на ультразвуковых волнах// Известия АН СССР, серия физическая. –1937. –№. 2, –С. 223.

Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. –М.: Наука, –1978. – 463 с.

Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука, –1977. –656 с.

Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. –М.: Наука, –1978. –591 с.

Сасси, Висконти (Sassi F., Visconti G.) Validation of parameterization scheme for eddy diffusion from satellite data// J. Atmos. Sci. –1990. –V. 47. –№ 21. –P. 2505–2515.

Сафронов В.С. Эволюция протопланетного облака и образование Земли и планет. –М.: Наука, –1969, –244 с.

Сафронов (Safronov V.S.). Kulper Prize Lecture: Some problems in the formation of planets// Icarus, –1991, –V. 94, –P. 260–271.

Сафронов В.С. Аккумуляция малых тел на внешней границе планетной системы// Астрономический вестник (Исследования Солнечной системы), –1996, –Т. 30, –№ 4, –С. 251–257.

Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. –М.: Наука, –1965, –386 с.

Седов Л.И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. –М.: Наука, –1973. –116 с.

Седов Л.И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред.– В кн.: Размышления о науке и об ученых. –М.: Наука, –1980. –С. 173–197.

Седов Л.И. Механика сплошной среды. т. 2. –М.: "Наука", –1984, –560 с.

Сендел и др. (Sandel B.R., McConnell, Strobel D.F.). Eddy diffusion at Saturn's homopause// Geophys. Res. Letters, –1982, –V. 9, –P. 1077–1080.

Сифф (Seiff A.). Thermal structure of the atmosphere of Venus// In: Venus (ed. D.M. Hunten, L. Colin, T.M. Donahue, and V.I. Moroz), –1983, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 215–279).

Смит и др. (Smith E.J., Strobel, Broadfoot A.L, Sandel,B.R., Shemansky D.E., Holberg J.B.). Titan's upper atmosphere: Composition and temperature from the EUV solar occultation results// J. Geophys. Res., –1982, –V. 87, –P. 1351–1359.

Солнечно–земные исследования (Solar Terrestrial Research for 1980s), –US National Academy, –1981.

Стерзик, Морфилл (Sterzik M.F., Morfill G.E.). Evolution of protoplanetary disks with condensation and coagulation// Icarus, –1994, –V. 111, –P. 536–546.

Стефан (Stefan J.)// Wien Sitzungsber. –1871. –Band 63. –S.63.

Сюняев, Зельдович (Sunyaev R.A., Zeidovich Ya.B.)// Astron. Astrophys., –1972, –V. 20, –P. 189.

Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. –М. : Наука, –1967. –548 с.

Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. –М.: Изд–во иностр. лит., –1959. –400с.

Тирский А.Г. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном пограничном слое// ДАН СССР. –1963. –Т. 155. –№. 6. –С. 1278–1282.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, –1986, – 287 с.

Тобиска (Tobiska W.K.). Revised solar extreme ultraviolet flux model// J. Atmos. Terr. Phys. –1991. –V. 53. –№ 11./ 12. –P. 1005–1018.

Тобиска (Tobiska W.K.). Recent solar extreme ultraviolet irradiance observations and modeling: a review// J. Geophys. Res. –1993. –V. 98. –№ A11. –P. 18,879–18,893.

Тобиска, Варт (Tobiska W.K., Barth C.A.). A solar EUV model// J. Geophys. Res. –1990. –V. 95. –№ A6. –P. 8243–8251.

Торр и др. (Torr M.R., Torr D.G., Ong R.A., Hinteregger H.E.) Ionization frequencies for major thermospheric constituents as a function of solar cycle 21// J. Geophys. Res. Lett. –1979. –V. 6. –№ 10. –P. 771–774.

*Торр М., Торр Д. (*Torr M.R., Torr D.G.) Ionization frequencies for solar cycle 21: revised// J. Geophys. Res. –1985. –V. 90. –№ A7, –P. 6675–6678.

Торриэри, Тейлор (Torrieri D. J., Taylor L. L.)// J. Opt. Soc. Amer., –1972, –V. 62, –№ 1, –P.145–147.

Трусделл (Truesdell C.). Mechanical Basis of Diffusion// J.Chem. Phys. –1962. – –V. 37. –№ 10.

Турбулентность: Принципы и применения/ Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена. –М.: Мир, –1980. –535 с.

Турбулентные сдвиговые течения–I/ Под ред. Ф. Дурста, Б.Е. Лаундера, Ф.В. Шмидта, Дж.Х. Уайтлоу. – М.: Машиностроение, –1982. –432 с.

Турбулентные течения реагирующих газов/ Под ред. П. Либби и Ф. Вильямса. –М.: Мир, –1983. –325 с.

Уильямс (Williams G.P.). Planetary circulations. 1. Barotropic representations of Jovian and terrestrial turbulence// J. Atmos. Sci., –1978, –V. 35, –P. 1399–1426.

Уильямс (Williams G.P.). Planetary circulations. 2. The Jovian quasi–geostrophic.// J. Atmos. Sci., –1979, –V. 36, –P. 932–968.

Уппс (Upps F.B.). Two–dimensional numerical experiments in thermal convection with vertical shear// J. Atmos. Sci., –1971, –V. 28, –P. 3–19.

Фавр (Favre A.). Statistical Equations of Turbulents Gases// In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia, –1969. –P. 231–267.

Фелс, Линдзен (Fels, S.B., Lindzen, R.S.) The interaction of thermally excited gravity waves with mean flows// Geophys. Fluid Dyn., –1974, –V. 6, –P. 149–192.

Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. –М.: "Мир", –1976. – 554 с.

Фесенков В.Г. О вероятном происхождении углистых хондритов// Метеоритика, –1973. – вып. 32, – С. 3–6.

Фон Зан и др. (von Zahn U., Fricke K.H., Hunten D.M., Krankowsky D., Mauersberger K., Nier A.O.). The upper atmosphere of Venus during morning conditions// J. Geophys. Res., –1980, –V. 85, –P. 7829–7840.

Хаббловский атлас галактик (The Hubble Atlas of Galaxies). –Carnegie Institute of Washington, –1961, Publication 618.

Хайнс (Hines C.O.). Dynamical heating of the upper atmosphere// J. Geophys. Res. –1965. –V. 70. –№ 1. –P. 177–183.

Хакен Г. Синергетика. –М.: Мир, –1980, –404 с.

Халтинер Дж., Мартин Ф. Динамическая и физическая метеорология (русск. перевод под ред. А.С. Монина) –М.: Изд-во иностр. лит. , –1960, –435 с.

Хантен (Hunten D.M.). Energet ics of thermospheric eddy transport// J. Geophys. Res. –1974. –V. 79. –№ 16. –P. 2533–2534.

Хантен (Hunten D.M.). Vertical transport in atmospheres// In: Atmospheres of Earth and Planets (ed. B.M. McCormac), –1975, D. Reidel, Dordrecht, –P. 59–72).

Хантен (Hunten D.M.). Thermal and non–thermal escape mechanisms for terrestrial bodies// Planet. Space Sci., –1982, –V. 30, – P. 773–783.

Хантен и др. (Hunten D.M., Pepin R.O., Owen T.C.). Planetary atmospheres// In: Meteorites and the Early Solar System (eds. J.F. Kerridge and M.S. Matthews), – 1988, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, – P. 565–591.

Хантен Д., Томаско М., Флэзер Ф., Сэмюэлсон Р., Стробел Д., Стивенсон Д., Титан. В сб.: Система Сатурна (под ред. М.Я. Марова и В.Н. Жаркова), – 1990. –М.: Мир,. – С. 210–278.

Харрис, Пристер (Harris I., Priester W.) Time dependent structure of the upper atmosphere// J. Atmos. Sci. –1962. –V. 19. –№ 4. –P. 286–301.

Хедин (Hedin A.E.). MSIS–86 thermospheric model// J. Geophys. Res. –1987. – V. 92. –P. 46–49.

Хедин (Hedin A.E.) CIRA 1986, COSPAR International Refrence Atmosphere Part I, Chapter 1: Thermosphere Models// Advances in Space Research.(Ed. D.Ress). – 1988. –V. 8. –№ 5.

Хедин (Hedin A.E.). Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere// J. Geophys. Res.–1991. –V. 96. –№ A2. –P. 1159–1172.

Хокинг (Hocking W.K.) CIRA 1986. Part II, Chapter 5: Turbulence in the region 80–120 km./ Eds. Rees D., Barnett J.J., Labitzke K// Adv. Space Res. –1990. –V. 10. – № 12. –P. 153–161.

Холтон (Holton, J.R.) The role of gravity wave induced drag and diffusion in the momentum budget of the mesosphere// J. Atmos. Sci. – 1982 .–V. 40, –P. 2497–2507.

Чандра, Синха (Chandra S., Sinha A.K.). The role of eddy turbulence in the development of self–consistent models of thelower and upper thermospheres// J. Geoph. Res. –1974. –V. 79. –P. 1916.

Чарни, Стерн (Charney J.G., Stern M.E.). On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere// J. Atmos. Sci., –1962, –V. 19, –P. 159–172.

Чемберлен, Хантен (Chamberlain J.W., Hunten D.M.). Theory of planetary atmospheres. An introduction to their physics and chemistry. –1987, –2nd ed., Academic Press.

Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. –М.: ИЛ, –1960. –510 с.

Чепмен Д.Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития: Драйденовская лекция// Ракетная техника и космонавтика, –1980, –Т. 18, –№ 2, –С. 3–32.

Шакура, Сюняев (Shakura N.I., Sunyaev R.A). Black holes in binary systems: Observational appearance// Astron. Astrophys., –1973, –V. 24, –P. 337–355.

Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Плазменная турбулентность в космосе// В Сб.: Итоги науки и техники. Астрономия (под ред. Р.А. Сюняева), –1987. –Т. 32, –С. 235–319.

Шимазаки (Shimazaki T.). Effective eddy diffusion coefficient and atmosphere composition in the lower thermosphere// J. Atmos. Terr. Phys. –1971. –V. 33. –№ 9. –P. 1383–1401.

Шимазаки (Shimazaki T.). On boundary conditions in theoretical model calculations of the distribution of minor neutral constituents in the upperatmosphere// Radio Sci. –1972, –V. 7, –№ 7, –P. 695–702.

Шмидт О.Ю. Четыре лекции о происхождении Земли, Изд. 3, доп., –М.: Изд–во АН СССР, –1957.

Шринивасан (Srinivasan R., Giddens D.P., Bangret L.H., Wu J.C.). Turbulent Plane Couette Flow Using Probability Distridution Functions// Physics of Fluids. –1977. –V. 20. –P. 557.

Щетинков Е.С. Физика горения газов. –М.: Наука, –1965, –739 с.

Эндрюс и др. (Andrews, D.G., Holton, J.R., Leovy, C.B.) Middle Atmosphere Dynamics. –1987, Orlando, Academic Press.

Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Численное моделирование процесса образования планет из протопланетного облака// М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, –1977.

Энкреназ и др. (Encrenaz, Th., Feuchgruber, H., Atreya, S.K., Bezard, B., Lellouch, E., Bishop, J., Edgington, S., de Graauw, Th., Griffin, M. Kessler., F.). ISO Observations of Uranus: The stratospheric distribution of C2H2 and the eddy diffusion coefficient, Astron Astrophys, –1998, –V. 333, –P. L43–L46.

Эспозито и др. (Esposito L.W., Knollenberg R.G., Marov M.Ya., Toon O.B., Turco R.P.). The clouds and hazes of Venus. In: Venus (ed. D.M. Hunten, L. Colin, T.M. Donahue, and V.I. Moroz), – 1983, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, –P. 484–564.