Б.П. Кондратьев

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

НОВЫЕ МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Издательство «МИР»

Б. П. Кондратьев

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

НОВЫЕ МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

*Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Прикладная математика и информатика»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва «Мир» 2007

УДК 521.1
ББК 22.62
К 64

Рецензенты: директор ГАИШ МГУ, академик Российской Академии Наук, профессор *А.М. Черепащук*; член Национального Комитета Российской Федерации по теоретической и прикладной механике, академик Академии Нелинейных Наук, доктор физико-математических наук, профессор *Е.А. Гребеников* (ВЦ РАН, г. Москва); доктор физико-математических наук, профессор *Ю.А. Рябов* (МАДИ-ГТУ, г. Москва)

Кондратьев Б. П.

К64 Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. — М.: Мир, 2007. — 512 с., ил.

ISBN 978-5-03-003798-1

Книга содержит изложение оригинальных методов в теории потенциала, включая обширный комплекс принципиально новых способов нахождения гравитационной и электростатической энергии тел. В ней восполнен ряд пробелов классической теории притяжения и главное — сделаны шаги по дальнейшему развитию её физических и математических аспектов. Поставлен и решен ряд важных проблем, таких как задача об эквигравитирующих телах в виде стержней и дисков с вещественной, а также мнимой плотностью вещества. Особенность книги — широкое применение разработанных автором новых методов.

Кроме новизны и научной ценности, достоинством монографии является систематическое изложение трудного для усвоения материала. Только на конкретных разработках и интерпретациях можно действительно овладеть новыми методами. Дан подробный вывод формул и приводится много примеров и задач (общим числом 183) с решениями.

Книга будет полезна математикам, астрономам и физикам, а также специалистам смежных дисциплин. Её можно рекомендовать студентам и аспирантам университетов как учебное пособие по прикладной математике и современным углубленным методам теории потенциала.

УДК 521.1
ББК 22.62

Заказное издание
Заказчик:
Автономная некоммерческая организация
«Региональный научно-технический парк «Удмуртия»

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 978-5-03-003798-1

Оглавление

Предисловие 11

Глава 1. **ПРЕДПОСЫЛКИ** 14
§ 1.1. Введение 14
§ 1.2. Элементы классической теории потенциала 16
1.2.1. *Лагранж и Лаплас, Грин и Гаусс вводят понятие потенциала* 16
1.2.2. Но потенциал получает название ньютоновского. Потенциал объёмных тел и его свойства 17
1.2.3. Эквипотенциальные поверхности 19
1.2.4. Ряды Лапласа 20
1.2.5. Ньютоновский потенциал поверхностных распределений массы . . 21
1.2.6. Потенциал одномерных тел 22
1.2.7. Логарифмический потенциал 22
1.2.8. Потенциалы однородных эллипсоидов, сфероидов и шаров 24
1.2.9. Слоисто-неоднородные эллипсоиды с гомотетическими слоями . . 25
1.2.10. О теореме Маклорена – Лапласа 27
1.2.11. Гравитационная энергия тел 27
§ 1.3. Дальнейшие шаги. О содержании этой книги 29
1.3.1. Ещё об однородных эллипсоидах 29
1.3.2. Оболочки и слоисто-неоднородные эллипсоиды 29
1.3.3. Тор 30
1.3.4. Эквигравитирующие тела 31
1.3.5. Гравитационная энергия. Несколько затравочных задач 33
Замечания 36

Глава 2. **ПОТЕНЦИАЛ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ТЕЛ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ** 37
§ 2.1. Новые интегральные формулы 37
§ 2.2. Круглый диск 39
§ 2.3. Сектор круглого диска 44
§ 2.4. Потенциал сектора в точках дуги 48
§ 2.5. Сегмент круглого диска 49
§ 2.6. Пластина треугольной формы 52
§ 2.7. Ромбовидная пластина 54
§ 2.8. Прямоугольная пластина 56
§ 2.9. Эллиптический диск 58
2.9.1. Вводные формулы 58
2.9.2. Потенциал во внешней компланарной точке 60
2.9.3. Потенциал на границе 62
2.9.4. Внутренний потенциал на осях симметрии 63
2.9.5. Потенциал в произвольной внутренней точке 65
§ 2.10. Расслоение дисков и цилиндров 68
§ 2.11. Потенциалы эллиптических колец. Общий метод дифференциации 69

§ 2.12. Элементарный эллиптический плоский гомеоид 70
§ 2.13. Элементарный эллиптический плоский фокалоид 72
Замечания 75

ГЛАВА 3. **ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЛОСКИХ ТЕЛ** 76
§ 3.1. Тонкое круглое кольцо 76
§ 3.2. Потенциалы неоднородных круглых дисков 78
§ 3.3. Широкое круглое кольцо или диск, заполненные розеточной орбитой или множеством кеплеровых эллипсов 85
3.3.1. Введение 85
3.3.2. Постановка задачи 86
3.3.3. Пространственный потенциал кольца 87
3.3.4. Потенциал кольца на оси симметрии 91
Замечания 93

ГЛАВА 4. **ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ** 94
§ 4.1. Однородный эллиптический цилиндр: косвенный метод 94
§ 4.2. Однородный эллиптический цилиндр: прямой метод 96
4.2.1. Внутренний потенциал 96
4.2.2. Внешний потенциал 100
4.2.3. Свойства потенциала эллиптического цилиндра 103
4.2.4. Цилиндр с круглым сечением 104
§ 4.3. Однородный цилиндр с лемнискатным сечением: внутренний потенциал 104
4.3.1. Постановка задачи 105
4.3.2. Нахождение вспомогательных интегралов 106
4.3.3. Внутренний потенциал 110
§ 4.4. Однородный цилиндр с лемнискатным сечением: внешний потенциал . . . 118
§ 4.5. Логарифмические потенциалы оболочек 123
4.5.1. Метод дифференциации для цилиндров 123
4.5.2. Элементарный цилиндрический гомеоид 124
4.5.3. Элементарный цилиндрический фокалоид 126
Замечания 128

ГЛАВА 5. **ПОТЕНЦИАЛЫ СЛОЁВ И ОБОЛОЧЕК** 129
§ 5.1. Эллипсоидальная стратификация тел 129
§ 5.2. Элементарные эллипсоидальные оболочки 131
§ 5.3. Гомеоид 132
§ 5.4. Геометрические места равной толщины в гомеоиде 133
§ 5.5. Фокалоид 134
§ 5.6. Оболочка равной толщины на осях симметрии 137
§ 5.7. Другие типы элементарных эллипсоидальных оболочек 138
§ 5.8. Потенциал однородного элементарного гомеоида и стержня 139
§ 5.9. Оболочка как бесконечно тонкий простой слой 141
§ 5.10. О притяжении гомеоидом конечной толщины 142
§ 5.11. Потенциал однородных элементарных оболочек: общий случай 143
§ 5.12. Потенциал элементарных и толстых однородных фокалоидов 145
§ 5.13. Неэллипсоидальные оболочки — обобщённый гомеоид и фокалоид 148
5.13.1. Обобщённый гомеоид 148
5.13.2. Обобщённый фокалоид 152
§ 5.14. Теорема Арнольда 154

§ 5.15. Потенциал и притяжение трехмерной круговой цилиндрической оболочки 154
Замечания 157

Глава 6. **ПОТЕНЦИАЛЫ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ** 159
§ 6.1. Потенциалы однородного эллипсоида 159
§ 6.2. Другая форма потенциалов однородных эллипсоидов и сфероидов 161
§ 6.3. Потенциалы однородного эллипсоида в пределе большой вытянутости или сжатия 165
6.3.1. Сильно вытянутый (иглообразный) эллипсоид ($a_1 \gg a_2, a_3$) 165
6.3.2. Сильно сжатый эллипсоид ($a_1, a_2 \gg a_3$) 169
§ 6.4. Свойства коэффициентов A_i 169
§ 6.5. Изоповерхности внутри однородного гравитирующего эллипсоида 171
§ 6.6. Дисковый предел однородного эллипсоида 172
§ 6.7. Свойства функций $I(m)$ и $A_i(m)$ 174
§ 6.8. Синтез элементарных оболочек 175
§ 6.9. Потенциалы слоисто-неоднородных эллипсоидов. Общий случай стратификации 176
§ 6.10. О притяжении и уровенных поверхностях в полостях эллипсоидальных оболочек 180
§ 6.11. Свойства потенциалов слоисто-неоднородного эллипсоида 182
§ 6.12. Неоднородные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды с софокусным расслоением слоёв 185
§ 6.13. Потенциалы слоисто-неоднородных эллипсоидов в ином виде 186
Замечания 189

Глава 7. **ПОТЕНЦИАЛЫ ТОРА И КУБОИДА** 191
§ 7.1. Пространственный потенциал однородного кругового тора 191
7.1.1. Потенциал однородного тора на оси симметрии. Прямой метод 192
7.1.2. Пространственный потенциал однородного тора: нахождение через круговые диски 194
7.1.3. Проверка: переход в (7.26) к потенциалу на оси симметрии тора . 196
7.1.4. О переходе к потенциалу тонкого круглого кольца 197
7.1.5. Тор без сквозного отверстия. Потенциал как сумма ряда Лапласа . 198
7.1.6. Представление эллиптического интеграла третьего рода через неполные интегралы первого и второго рода 199
7.1.7. Расчёт пространственного потенциала однородного кругового тора по найденным формулам 200
7.1.8. Обобщённый гомотетический слой на круговом торе 203
§ 7.2. Внешний потенциал однородного кругового тора. Решение первой краевой задачи 204
§ 7.3. Пространственный потенциал оболочки кругового тора 206
§ 7.4. Пространственный потенциал однородного тора с эллиптическим сечением рукава 209
§ 7.5. Потенциал на оси симметрии однородного тора с сечением в виде овала Кассини 210
§ 7.6. Внутренний потенциал однородного кубоида 212
§ 7.7. О потенциале плоских фигур, получаемых при сплющивании однородных объёмных призм и цилиндров 215
Замечания 216

Глава 8. **ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ И ВИРИАЛ** . . . 217
§ 8.1. Первое знакомство . . . 217
§ 8.2. Подсистемы, у которых вириал и потенциальная энергия равны . . . 222
§ 8.3. Гравитационная энергия некоторых эллипсоидальных тел . . . 225
§ 8.4. Замечания об энергии гомеоидов и фокалоидов . . . 231
§ 8.5. Гравитационная энергия и вириал слоисто-неоднородного эллипсоида . . . 232
8.5.1. Тензорный потенциал . . . 232
8.5.2. Гравитационная энергия . . . 233
8.5.3. Тензор гравитационной энергии . . . 234
8.5.4. Тензор вириала подсистемы Z_{ij} . . . 234
8.5.5. Свёртка Z_{ij} . . . 235
§ 8.6. Гравитационная энергия обобщённого гомеоида и фокалоида . . . 236
§ 8.7. Об экстремальности гравитационной энергии однородного сжатого сфероида . . . 237
§ 8.8. Внутренняя и внешняя части гравитационной энергии тел . . . 239
§ 8.9. О внешней и внутренней гравитационной энергии однородного эллипсоида и системы из двух шаров . . . 242
§ 8.10. Усечённые вириалы . . . 249
Замечания . . . 252

Глава 9. **ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ТЕЛА. СТЕРЖНИ И ДИСКИ** . . . 254
§ 9.1. Введение . . . 254
§ 9.2. Переход от вещественного стержня к мнимому: случай сжатых сфероидов 255
§ 9.3. Эквигравитирующие стержни для оболочек: метод дифференциации . . . 256
§ 9.4. Эквигравитирующие стержни для однородного круглого диска и тонкого кольца . . . 260
§ 9.5. Пространственный потенциал однородного круглого диска . . . 263
9.5.1. Через эквигравитирующий стержень . . . 263
9.5.2. Через эквигравитирующий слоисто-неоднородный сфероид . . . 265
§ 9.6. Нахождение эквигравитирующих стержней объёмных тел методом расслоения на диски . . . 268
§ 9.7. Эквигравитирующие стержни для однородного сжатого сфероида и тонкого шарового сегмента . . . 270
§ 9.8. *Нахождение эквигравитирующих стержней осесимметричных тел с помощью интеграла Коши* . . . 273
9.8.1. Применение интеграла Коши для ньютоновского потенциала . . . 273
9.8.2. Редукция контура Г к отрезкам и материальным точкам . . . 273
§ 9.9. Эквигравитирующий «крест» для однородной симметричной линзы, ограниченной двумя параболоидами вращения . . . 277
§ 9.10. Эквигравитирующие мнимые стержни для вещественных неоднородных круглых дисков . . . 281
§ 9.11. Обратный переход от мнимого стержня к эквигравитирующему вещественному диску . . . 283
§ 9.12. Примеры на пары эквигравитирующих тел «вещественные диски — мнимые стержни» . . . 285
§ 9.13. Эквигравитирующие пары «мнимые круглые диски — вещественные стержни» . . . 287
§ 9.14. Эквигравитирующие элементы для шаровых сегментов, бóльших полушара . . . 291

§ 9.15. Эквигравитирующие элементы для однородных торов 293
9.15.1. Тор с сечением в виде овала Кассини 294
9.15.2. Эквигравитирующие элементы для кругового тора 295
Замечания 298

Глава 10. **ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ТЕЛА. СОФОКУСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК И ЭЛЛИПСОИДОВ** 300
§ 10.1. Софокусные преобразования эллипсоидальных оболочек и слоисто-неоднородных эллипсоидов 300
§ 10.2. Эквигравитирующие эллипсоидальные оболочки 302
10.2.1. Софокусные гомеоиды 302
10.2.2. Софокусные фокалоиды 303
10.2.3. Софокусные эллипсоидальные оболочки общего типа 303
§ 10.3. Теорема об эквигравитирующих слоисто-неоднородных эллипсоидах . . . 304
§ 10.4. Дисковый предел софокусных преобразований (10.3) для эллипсоидальных оболочек 305
§ 10.5. И снова метод дифференциации: эквигравитирующие диски и стержни для элементарных сфероидальных оболочек 306
§ 10.6. Эквигравитирующие диски и стержни для сплошных слоисто-неоднородных сфероидов 309
§ 10.7. Восстановление объёмной плотности сфероида по поверхностной плотности эквигравитирующего диска 313
§ 10.8. Нахождение объёмной плотности сфероида по плотности эквигравитирующего стержня 319
§ 10.9. Какой эллиптический диск и слоисто-неоднородный эллипсоид имеют одинаковый внешний потенциал? 320
10.9.1. Задан слоисто-неоднородный эллипсоид. Найти эквигравитирующий эллиптический диск 320
10.9.2. Задан однородный или неоднородный эллиптический диск. Найти эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид . . . 322
§ 10.10. Пространственный потенциал однородного эллиптического диска 322
§ 10.11. Пространственный потенциал неоднородного эллиптического диска 327
§ 10.12. О радиусе сходимости ряда Лапласа для однородных и слоисто-неоднородных оболочек, эллипсоидов и сфероидов 330
§ 10.13. Однородная симметричная линза с острыми краями: эквигравитирующие элементы и пространственный потенциал 332
10.13.1. Эквигравитирующий стержень 332
10.13.2. Эквигравитирующий диск 333
10.13.3. Эквигравитирующий сфероид для линзы 334
10.13.4. Итог: внешний пространственный потенциал симметричной линзы 336
10.13.5. Частные случаи 340
Замечания 343

Глава 11. **НАХОЖДЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА ВНУТРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ** 345
§ 11.1. Представление внешнего потенциала интегралом в комплексной плоскости 345
§ 11.2. Особые точки на контуре C и внутри него на оси симметрии 346
§ 11.3. Сводка правил для отыскания особых точек 348
§ 11.4. Радиус сходимости ряда Лапласа 349
§ 11.5. Примеры 349
11.5.1. Вытянутые и сжатые сфероиды 349

11.5.2. Шаровые линзы . . . 350
11.5.3. Овалы Кассини . . . 350
11.5.4. Круговой тор . . . 352
Замечания . . . 352

Глава 12. **НОВЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛ** . . . 353
§ 12.1. Введение . . . 353
§ 12.2. Первый метод: слоисто-неоднородные эллипсоиды и сфероиды . . . 353
§ 12.3. Вычисление потенциальной энергии однородных тел с помощью объёмного интеграла от дивергенции и поверхностного интеграла . . . 356
§ 12.4. Метод второй: W через двойные интегралы по поверхности . . . 357
§ 12.5. Потенциальная энергия однородного кубоида . . . 358
12.5.1. Вклад в W от противоположных граней кубоида . . . 359
12.5.2. Вклад в энергию кубоида от смежных граней . . . 361
12.5.3. Полная энергия кубоида . . . 362
12.5.4. Предельный случай бесконечно тонкого кубоида (пластина) . . . 363
§ 12.6. Третий метод: нахождение гравитационной энергии объёмных тел с помощью особых рядов . . . 365
12.6.1. Как приходим к особому ряду . . . 365
12.6.2. Другие представления потенциальной энергии в виде особых рядов . . . 367
12.6.3. О сходимости особых рядов для потенциальной энергии . . . 369
§ 12.7. Обобщение третьего метода. Потенциальная энергия тел, не имеющих осевой симметрии . . . 370
§ 12.8. Примеры применения третьего метода. Потенциальная энергия однородной асимметричной линзы . . . 371
§ 12.9. Частные случаи однородной асимметричной линзы: сегменты, шары и лунки . . . 378
12.9.1. Касающиеся шары . . . 378
12.9.2. Предельный переход от однородной асимметричной линзы к шару 379
12.9.3. Однородная симметричная линза . . . 381
12.9.4. Одиночная плосковыпуклая линза (однородный шаровой сегмент) 382
§ 12.10. Маленькое чудо: превращение однородной асимметричной линзы в «лунку» . . . 384
§ 12.11. Резюме третьего метода . . . 385
Замечания . . . 385

Глава 13. **НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ** . . . 387
§ 13.1. Метод четвёртый: гравитационная энергия однородных тел с азимутальной симметрией . . . 387
13.1.1. Две основные формулы четвёртого метода . . . 387
13.1.2. Однородный шар . . . 388
§ 13.2. Энергия однородного шарового сегмента. Нахождение четвёртым методом 389
13.2.1. Постановка задачи . . . 389
13.2.2. Особые точки и деформация контура интегрирования . . . 391
13.2.3. Вычисление W по формуле (13.6) . . . 391
13.2.4. Проверка выражения (13.43) . . . 394
13.2.5. Вариант четвёртого метода с интегралом (13.7) . . . 394
§ 13.3. Гравитационная энергия однородного шарового сектора . . . 395

§ 13.4. Гравитационная энергия однородного прямого кругового конуса 400
§ 13.5. Гравитационная энергия однородного плоского шарового слоя 404
13.5.1. Потенциалы слоя на оси симметрии 404
13.5.2. Гравитационная энергия слоя в виде контурного интеграла и его преобразование 406
13.5.3. Вычисление интегралов, входящих в (13.110) 407
13.5.4. Вычисление интегралов, входящих в (13.111) 407
13.5.5. Квадратура D_1 из (13.115) 408
13.5.6. Квадратура D_2 из (13.121) 411
13.5.7. Нахождение вычета в (13.109) 414
13.5.8. Полная энергия слоя 414
13.5.9. Проверка формулы (13.165) 415
§ 13.6. О гравитационной энергии одномерных стержней 417
13.6.1. Однородные стержни 417
13.6.2. Неоднородные стержни 419
Замечания 420

Глава 14. **НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ, МЕТОДОМ ПРОГОНКИ И ДРУГИМИ** 421
§ 14.1. Обобщение понятия гравитационной энергии для подсистем тел 421
§ 14.2. Метод (пятый) нахождения взаимной потенциальной энергии тел через эквигравитирующие стержни 424
§ 14.3. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец. Кольца в параллельных плоскостях 424
§ 14.4. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец, пересекающихся по диаметру 427
14.4.1. Случай перпендикулярных колец 427
14.4.2. Случай с произвольным наклоном колец 430
§ 14.5. Взаимная гравитационная энергия двух однородных круглых дисков, расположенных в параллельных плоскостях 432
§ 14.6. Метод пятый (продолжение). Энергия изолированных тел 437
§ 14.7. Примеры на применение пятого метода 439
§ 14.8. Метод «прогонки» (шестой) 446
§ 14.9. Гравитационная энергия однородного кругового цилиндра конечной высоты 449
14.9.1. Постановка задачи и решение 449
14.9.2. Представление интеграла (14.194) в конечном виде 452
14.9.3. Энергия цилиндра в дисковом пределе 454
§ 14.10. Замечания о гравитационной энергии однородного кругового тора 454
§ 14.11. Метод седьмой. Нахождение энергии дисков асимптотическим переходом от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов 455
§ 14.12. Восьмой метод. Нахождение гравитационной энергии слоёв во внешнем гравитационном поле методом дифференциации 458
§ 14.13. Девятый метод. Гравитационная энергия однородных плоских тел. Двумерный вариант формул (12.25) и (12.28) 459
§ 14.14. Десятый метод. Гравитационная энергия однородных двумерных тел с логарифмическим потенциалом 461
Замечания 463

Глава 15. **ПРИЛОЖЕНИЯ** 465
§ 15.1. О гравитационной силе от мантии Земли и жидкого ядра на твёрдое внутреннее ядро 465
§ 15.2. Количество тепла при гравитационной дифференциации вещества в недрах Земли 467
§ 15.3. Разложение в ряд внутреннего потенциала широкого кольца, заполненного розеточной орбитой 468
§ 15.4. Потенциал искривлённых дисков 470
15.4.1. Потенциал тонкой галактики, искривлённой в виде части сферы . 470
15.4.2. Потенциал на оси симметрии Ox_3 вогнутого неоднородного диска 471
§ 15.5. Эллипсоид как динамическая модель 472
§ 15.6. Моделирование эллиптических галактик 475
15.6.1. Интересная геометрическая задача 475
15.6.2. Элементы моделирования 477
§ 15.7. Новая формула для угловой скорости фигур равновесия вращающейся гравитирующей жидкости 479
§ 15.8. Обобщённый фокалоид и фигуры относительного равновесия вращающейся гравитирующей жидкости 481
§ 15.9. Неэллипсоидальные фигуры равновесия — двумерный случай 482
§ 15.10. Сводка формул для дисков и эквигравитирующих им тел 492
§ 15.11. Сводка формул для некоторых сферических систем 498
Замечания 500

Заключение 501

Литература 502

Именной указатель 506

Предметный указатель 508

Предисловие

Талант не туман: не мимо идёт.
(из словаря В. Даля)

Галилею принадлежит мысль, что книга Природы написана на языке математики. Никто не знает автора этой книги (это и к лучшему, ибо немедленно объявились бы такие, кто яростно оспаривал бы первенство у самого Всевышнего). Но известно другое — какого труда стоит прочтение в книги Природы отдельных глав и страниц!

Закон обратных квадратов, лежащий в фундаменте динамической астрономии, математически прост, физически глубок и позволяет довольно легко формулировать много интересных задач. Это приятно возбуждает исследователя, но (времена Эйлера прошли!) при решении задач лёгкость почти всегда куда-то испаряются и лопата впустую с визгом скребёт по камню. Лишь изредка Фортуна одарит Вас очаровательной улыбкой и решение задачи удаётся выразить в конечном аналитическом виде. Увы, почтенная дама свои улыбки так просто не расточает! Трудные задачи современной теории потенциала далеко не всегда допускают строгие решения.

И тогда исследователь обращается к компьютеру. Однако нахлёстывание вычислительной лошадки редко приводит к цели. Плохого седока с лошадью объединяет кнут, но в связке «человек-компьютер» порядок партнёров незаметно может и поменяться! На задачу такой исследователь начинает смотреть через амбразуры известных ему алгоритмов. Кругозор его сужается, и от исходной задачи мало что остаётся.

Чрезмерное упование на численные расчёты приводит к снижению уровня критичности и лишает исследователя глубины обобщения, возможной при аналитическом подходе. И возникает актуальная в современной науке ситуация — чем дешевле вычислительная сила, тем в большей цене оказываются новые идеи! С этой точки зрения и следует рассматривать содержание данной книги, где основное внимание уделяется развитию теории. Основное направление в ней — аналитическое.

В науке есть свои храмы, над созданием которых трудились многие поколения исследователей. Со временем некоторые её разделы разрослись и приобрели статус канонических; к ним относится и теория потенциала. Но проводя читателя через строгое здание классической теории, автор старался показать, что там и сейчас есть мастерские, где ведутся поисковые работы.

Направлены они на создание методов, открывающих путь к решению проблем, которые до сих пор оставались недоступными. Достоинство этой книги как раз и заключается в широком разнообразии рассмотренных здесь новых подходов и решённых с их помощью задач.

Теория потенциала прошла долгий путь развития, по ней есть немало книг и пособий (см. список литературы). Но исследования в нашей монографии не повторяют, а расширяют и дополняют известное в этой области. О чём же говорится в этой книге.

Вначале изучаются двумерные тела с ньютоновским и логарифмическим потенциалом. Затем переходим к тщательному рассмотрению гравитирующих или заряженных электрическими зарядами объёмных тел и оболочек, уделяя особое внимание однородным и слоисто-неоднородным эллипсоидам. Для многих тел этих классов впервые найдены *точные выражения потенциалов*. Не оставлены без внимания и потенциалы таких интересных фигур, как однородные круговые торы, кубоиды, различные части шара и т. д.

Заложены основы принципиально нового направления в теории потенциала — *учения об эквигравитирующих телах*. Вводится понятие *эквигравитирующих элементов*: материальных точек, стержней и дисков с вещественной или мнимой плотностью, развивающих в пространстве такие же силовые поля, как и исходные тела более сложной формы. Разработаны *способы нахождения* этих элементов. Дело венчает метод *обобщённых софокусных преобразований*. Всё это позволило, после более чем двухсотлетнего перерыва, шагнуть вперёд и превзойти рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа.

Особое внимание уделяется нахождению *гравитационной* (или *электростатической*) *энергии тел*. Сама постановка вопроса о потенциальной энергии для фигур нестандартной формы сразу приводит нас к тем труднейшим вопросам математической физики, которые не только ещё не решены, но даже ещё не получили ясной математической формулировки. Естественно, такая ситуация потребовала от автора выполнения большого объёма исследовательской работы. Однако работалось с удовольствием, ведь математика — это и союз логики с фантазией, и растянутое колебание в творческом пространстве между символом и смыслом! В итоге, в книге удалось разработать комплекс стыкующихся между собой оригинальных подходов к решению ранее недоступных задач.

Вот краткая информация о содержании глав (см. также § 1.3).

В гл. 2 дополнена классическая теория потенциала для плоских двумерных тел с ньютоновским потенциалом. Выводятся неизвестные ранее *интегральные формулы*, позволяющие находить потенциал в главной плоскости *однородных пластин разной формы*. Исследованы непростые задачи для *круглых* и *эллиптических* дисков, а также плоских оболочек.

В гл. 3 найдены *пространственные потенциалы тонких и широких круговых колец. Среди них кольцо, заполняемое розеточной орбитой*. Отдельно решена задача для *сплошных неоднородных круглых дисков*.

В гл. 4 мы переходим к телам с *логарифмическим потенциалом*. Для них также получены новые *интегральные формулы*. Развит *прямой* метод нахождения потенциалов однородных цилиндров, сечения у которых — не обязательно эллипс. Тем самым устранён явный пробел в классической теории.

Гл. 5 посвящена элементарным слоям. Здесь тщательно разбираются геометрические и гравитационные свойства *эллипсоидальных оболочек*. Вводится понятие и изучаются *обобщённые гомеоиды и фокалоиды*.

В гл. 6 переходим к потенциалам *слоисто-неоднородных эллипсоидов*. Для многих сложных задач получены аналитические решения.

В гл. 7 найдены пространственные гравитационные потенциалы *однородных торов* и *кубоидов*. Эти задачи заслуживают не меньшего внимания, чем классические. Потенциал *однородного кругового тора* в общем случае представлен через интеграл от эллиптических интегралов, а в некоторых специальных случаях — и через сами эллиптические интегралы. Внутренний потенциал *однородного прямоугольного параллелепипеда* выражается через элементарные функции.

В гл. 8 тема монографии расширяется и мы переходим к трудным задачам о гравитационной энергии и вириале тел. Установлена *связь между тензором вириала и тензором гравитационной энергии подсистемы*. Вводится понятие *усечённых вириалов*. При разделении гравитационной энергии тела на *на внешнюю и внутреннюю части* удаётся выявить её новые важные свойства.

В главах 9 и 10 поставлена и решается фундаментальная *проблема эквигравитирующих тел*. Теория развивается в трёх направлениях.

Первое — вводится понятие и тщательно изучаются *эквигравитирующие стержни*. Разработаны методы нахождения таких стержней. *Второе* направление опирается на представлении внешнего гравитационного поля объёмных тел потенциалом *плоских дисков. Третье* направление связано с развитием метода *софокусных преобразований*. Подчеркнём: в этой книге метод софокусных преобразований применяется не только к однородным, (это было и до нас!), эллипсоидам[1], но и к *элементарным или толстым слоисто-неоднородным эллипсоидальным оболочкам*. Метод распространяется и на *сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды и сфероиды*, что также приводит к важным результатам.

Особый интерес представляет выяснение внутренней взаимосвязи между новыми подходами. Так, эквигравитирующие стержни с симметричным распределением плотности позволяют находить эквигравитирующие диски для тел с экваториальной плоскостью симметрии. Через эквигравитирующие элементы можно представлять и силовые поля тел, и вычислять их потенциальную энергию.

В гл. 11 разбирается вопрос о размещении *особых точек* внутри однородных осесимметричных тел. Такие точки — опорные пункты для размещения внутри тел эквигравитирующих скелетов. Даны три алгоритма нахождения особых точек.

В главах 12, 13 и 14 разработаны *десять новых методов для вычисления ньютоновской гравитационной (потенциальной) энергии объёмных тел*, а также несколько методов для двумерных фигур и для тел с логарифмическим потенциалом. Усилия по развитию этих методов были вознаграждены решением ряда принципиально новых задач. Найдена ньютоновская энергия для различных частей однородного шара (сегменты и линзы из них, секторы и шаровые плоские слои), однородного кругового конуса и цилиндра конечной высоты.

В гл. 15 решаются некоторые прикладные задачи.

Предупредим читателя: овладение новыми методами потребует немалых усилий и более глубокого понимания основных принципов математической физики, чем то, что дают большинство курсов по классической теории потенциала. У нас активно применяются функции комплексной переменной и контурные интегралы в комплексной плоскости (всегда требующие к себе творческого подхода). Нередко интегралы оказываются вне любых справочников, и тогда доводка задач до точных формул требует изобретательности, выдержки и упорства. В книге вводится (по необходимости!) немало новых понятий (обобщенные слои, эквигравитирующие стержни и диски, специальные софокусные преобразования, и т.д.). Читателю по ходу работы над книгой необходимо вновь и вновь возвращаться к некоторым её разделам. Иногда делаются ссылки на результаты, которые изложены «вперёд» по тексту.

Эта книга — не стандартный учебник. Но именно в силу отступления от традиционной формы учебника, она будет полезна для курсов повышенной сложности по теории потенциала. Написанная для астрономов, она, несомненно, привлечёт внимание математиков и физиков, а также представителей других точных наук.

Весь материал книги от начала до конца написан автором самостоятельно, поэтому библиографические ссылки служат лишь для дополнительной информации. Выдержать последовательную систему обозначений не оказалось возможным. В книге дана развёрнутая система подзаголовков и предметный указатель, чтобы облегчить работу читателя. Учитывая сложность предмета этой книги, а также условия работы над ней, автор просит читателя снисходительно отнестись к возможным недостаткам. Пусть они послужат стимулом к исследованиям самих читателей! Автор будет рад ответить на замечания и предложения читателей, которые можно направить по E-mail:kond@uni.udm.ru, или по почте: 426033, г. Ижевск, ул. Песочная, д. 2, кв. 12, Кондратьев Б. П.

Приятно выразить благодарность академику РАН А. М. Черепащуку, профессору Е. А. Гребеникову и профессору Ю. А. Рябову за труд по рецензированию книги. Автор признателен также А. С. Дубровскому за помощь в создании электронного макета книги.

[1] Софокусные преобразования применялись Маклореном, Лапласом, Шалем и Айвори для решения лишь частной (хотя и важной) задачи о нахождении внешнего потенциала сплошного однородного эллипсоида по известному его внутреннему потенциалу.

Глава 1

ПРЕДПОСЫЛКИ

Прежде чем затратить время и усилия на овладение нашим предметом, ознакомимся с его истоками и основными положениями.

§ 1.1. Введение

Понятие силы имеет первичный и в значительной мере — интуитивный характер[1]. У древних греков, при всей удивительной ясности их мышления, нет бóльшей путаницы, чем в описании сил Природы. Не случайно Галилей впоследствии подверг полной ревизии учение Аристотеля о динамике.

Сейчас-то мы знаем, что правильное описание сил — это ключ к составлению дифференциальных уравнений движения и надежный способ познания Природы. Но в те далёкие времена господствовали другие представления и несовершенство знаний не позволило Птолемею, а в эпоху Возрождения и самому Копернику, ввести силы для объяснения движения небесных светил. До Кеплера в астрономической картине мира все (со ссылкой на авторитет древних) уповали на равномерное движение по кругам в идеально совершенном божественном Космосе[2]. Но даже формальная замена кругов эллипсами (ведь понятие *экванта* Птолемей уже ввёл!) в кинематической картине геоцентризма фактически мало бы что изменила: только переход к гелиоцентрической картине мира и введение силы, направленной к Солнцу наполняет эллиптические орбиты новым смыслом.

Впотьмах и неразберихе реформаторской эпохи, в отблесках костров инквизиции пробирался на слабый свет истины неутомимый Кеплер. Сверхновая 1604 г. озарила его жизненный путь и Кеплер выбрал достойную цель (судьба даровала ему бесценные наблюдения Тихо Браге): «либо движение этой планеты (Марса) поможет нам проникнуть в тайны астрономии, либо мы навсегда останемся невеждами в ней». Как сотрудник Тихо, он начал с тех же замысловатых узоров из эпициклов и деферентов, которые рисовали до него и многие другие. Но Марс упрямился, его отклонение от предвычисленного положения на небе достигало 5–6°. (И Коперник, и Кеплер в своей работе широко опирались на геометрические разработки Птолемея; в научной биографии Кеплера этот факт мало известен.) И только затратив немало сил, автор *«Новой астрономии», бесконечно веря в гармонию Вселенной,* сумел взглянуть на орбиты планет под таким — истинно кеплеровским!— углом зрения, когда идеальные круги их орбит неожиданно превратились в реальные эллипсы[3]! И хотя орбита Марса отличается от круга очень мало, а выявить крохотную неравномерность неторопливого бега по ней свирепого бородатого «бога войны» было и вовсе нелегко, трон Солнца по воле Кеплера послушно переместился в точку фокуса.

---

[1] Дать точное определение силы нелегко. Замечательный физик-педагог Р. В. Поль говорит: нет понятия более тёмного и загадочного, чем сила.

[2] Николай Коперник всё же смутно предчувствовал, что Солнце каким-то образом удерживает планеты и не даёт им разбегаться.

[3] Тем самым, Кеплер опроверг ходячую мысль, кредо приспособленцев всякой масти, что если бы геометрические аксиомы задевали интересы людей, они бы опровергались. Против эллипсов был даже Галилей, но Кеплер сумел-таки встать на «любимую мозоль» авторитетного мнения!

А пылкое воображение, в сочетании с острым критическим умом, вело Кеплера ещё дальше. Земля и Огненный солнечный шар наделены движущей *душой*, и чем ближе они друг к другу, тем сильнее связь между душами. От Солнца исходит исполинская сила (вслед за Уильямом Гильбертом немецкий ученый полагал, что магнитная, но грезил и о гравитации по закону обратных расстояний), которая и удерживает планеты на эллиптических орбитах. Назревал прорыв в знаниях.

Всходила заря новой, *динамической* астрономии. В эфире (а что такое эфир в те века, как не слияние сознания с бесконечным Космосом) уже витала идея закона всемирного тяготения.

Но только через поколение, Исааку Ньютону блеснула истина, открывшая путь к математическому описанию системы мира: *все, абсолютно все точечные тела притягивают друг друга по закону обратных квадратов*.

Неохотно, под давлением обстоятельств, Ньютон в конце жизни всё же признавал, что «стоял на плечах гигантов». Сейчас-то мы знаем, что без открытия Галилеем закона инерции, Кеплером трёх законов движения планет и настойчивых указаний Гука (обладавшего редкостной интуицией) и Борелли на закон обратных квадратов — не было бы и того самого яблока, наставившего двадцатилетнего, не по летам вдумчивого уроженца Вулсторпа на путь истинный. Однако Ньютон имел право на некоторую скупость в признаниях. До него закон обратных квадратов обсуждался только как эвристическая гипотеза. Но сама по себе эта гипотеза — лишь стрела, а нужны ещё упругая тетива математики и зоркий глаз лучника, чтобы стрела затрепетала в полёте и идея проникла в сознание людей.

Молва, как водится, слегка исказила то волнующее событие в его жизни. На самом деле всё было наоборот: не яблоко попало в Ньютона, а Ньютон отладил лук и поданной ему стрелой попал в самое «яблочко» проблемы!

Лишь волшебное прикосновение математики могло придать гипотезе $F \sim \frac{1}{r^2}$ силу подлинного закона Природы[4]. В математическом же искусстве разность научных (читай — ньютоновских!) потенциалов между самим Ньютоном и большинством современников была такой, что вспыхнула вольтова дуга открытий необычайной яркости. Именно ньютоновские «Начала» побудили математиков и астрономов заняться трудными задачами о притяжении тел[5].

Так, исподволь, в наблюдениях движения небесных светил и математической их обработке, окрылённая идеей закона всемирного тяготения, берёт своё начало теория потенциала. Небесная механика и задачи физики — вот неиссякаемый и сегодня источник интереса к теории потенциала.

Развитие науки сродни передаче, не всегда удачной, эстафетной палочки знаний от одного поколения к другому. Теория потенциала развивалась неуклонно, и палочка не терялась! Здесь работали кузнецы, ковавшие новую науку. И сейчас, в эпоху компьютеров, многие задачи теории потенциала не теряют своей исключительной актуальности. Любой полёт в космос основан на знании гравитационных полей небесных тел и точном расчёте траекторий движения. Аппарат «Вояджер-2» при подлёте к Нептуну отклонился от заданной точки всего на 30 км. Погрешность оказалась равной всего $6 \cdot 10^{-9}$: точность изумительная, ведь задолго до этого станция совершила комплекс сложных пассивных маневров в гравитационных полях гигантов Юпитера и Сатурна!

[4] До Ньютона она не была подтверждена научными доводами.

[5] Разумеется, и сам Ньютон, а вслед за ним Эйлер, Лагранж и Лаплас, сделали шаги вперёд лишь в математическом описании движений небесных тел. Однако в физическом понимании природы гравитации прояснения не произошло. Сам Ньютон то сходился, то расходился со смутной идеей эфира. Отзвуки этой идеи отчетливо слышны и в воззрениях Римана [42], где гравитация объяснялась как следствие движения частиц эфира. С возникновением общей теории относительности гравитацию стали связывать с геометрическими свойствами пространства вокруг тяготеющих масс.

§ 1.2. Элементы классической теории потенциала

1.2.1. Лагранж и Лаплас, Грин и Гаусс вводят понятие потенциала

С открытием закона всемирного тяготения динамическая астрономия пошла в быстрый рост, но важное понятие *потенциала гравитационных сил* возникло как бы исподволь, незаметно. Ясно лишь, что к началу XIX века почва для семян теории потенциала была основательно подготовлена трудами Эйлера, Лагранжа, Лапласа. Но где то самое первое семя? Им стало введение в 1773 г. Лагранжем понятия *силовой функции*, производная по направлению от которой дает ньютоновскую силу притяжения [19]. В 1782 г. Лаплас выводит для этой силовой функции вне массы знаменитое уравнение

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Согласно же Тодхантеру [46, 1789], понятие *силовой функции* впервые встречается у Лежандра, который, в свою очередь, ссылается на Лапласа.

Идея потенциала уже носилась в воздухе, хотя в явном виде термин *потенциал* появился позднее — в трудах Грина (1828) и Гаусса (1840) [59]. Любопытно, но Клейн [19] отмечает: «не вполне ясно, откуда Гаусс заимствовал термин *потенциал*». Само слово *потенциал* от латинского *потенция*, т.е. возможность.

По закону обратных квадратов, сила притяжения точечной массы m на пробную точку единичной массы равна

$$F = G\frac{m}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}. \tag{1.2}$$

Эту силу как вектор удобно записать в виде градиента от функции $\varphi(\boldsymbol{x})$:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{grad}\varphi. \tag{1.3}$$

Функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ и называется *потенциалом* [6]. Размерность потенциала — квадрат скорости.

Потенциал — энергетическая характеристика силового поля и по смыслу потенциал в данной точке поля численно равен работе по выносу пробного тела единичной массы на бесконечность. В этом и залог универсальности данного понятия; например, сила в направлении вектора $\boldsymbol{s}$ равна просто производной по направлению от $\varphi(\boldsymbol{x})$:

$$F_s = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}}\varphi(\boldsymbol{x}). \tag{1.4}$$

В простейшем случае материальной точки потенциал равен

$$\varphi(r) = \frac{mG}{r}, \tag{1.5}$$

$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ — расстояние до испытуемой точки. Потенциал и силовое поле не изменятся, если под генерирующей его материальной точкой m понимать сферически симметричный гравитирующий шар. В сущности, это и был первый плод на древе теории!

В математической физике появляется теорема Остроградского — Гаусса: поток силы через поверхность S изнутри наружу равен [7]

[6] Математический формализм одинаков для ньютоновского гравитационного потенциала и потенциала тел с электрическим зарядом. Указанная аналогия может быть продолжена: гравитационная энергия — электростатическая энергия. Но есть и отличия: только электрический заряд может передвигаться в проводниках, и только для него имеет место закон электростатической индукции.

[7] Теорема была выведена в 1828 г. М. В. Остроградским, причём для для любого векторного поля, а в 1840 г независимо применена К. Гауссом к электрическим зарядам. И есть все основания связывать эту теорему с именами двух выдающихся ученых, а не только с именем Гаусса, как это делается на Западе.

$$\iint\limits_S F_n dS = \iint\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -4\pi G M, \tag{1.6}$$

где M — полная масса внутри поверхности S, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности. Из неё, а также известной математической теоремы Грина вытекает, что

$$\iiint\limits_V \left(\Delta\varphi + 4\pi G\rho\left(\boldsymbol{x}\right)\right) dV = 0. \tag{1.7}$$

Отсюда сразу следует фундаментальное уравнение Пуассона (1813 г.)

$$\Delta\varphi = -4\pi G\rho\left(\boldsymbol{x}\right). \tag{1.8}$$

Введение понятия потенциала стало ценной находкой, позволившей упростить и упорядочить многие громоздкие расчёты. Потенциал быстро вошёл в употребление и большинство задач в теории притяжения стали формулироваться так: *найти потенциал того или иного тела.*

Задача 1.1. *Если сила между точечными массами пропорциональна расстоянию в первой степени, то тело любой формы притягивает так, как если бы всё вещество было сосредоточено в его центре масс. Докажите это.*

Но шары и материальные точки — красивая, полезная, но всё же идеализация. На практике требуется знать *потенциал и силовые поля тел более сложной формы*. Здесь-то и начинаются проблемы! В конечном виде и сейчас мало что известно.

Разумеется, есть различные обходные пути. Если конечное выражение потенциала неизвестно, в таких случаях часто используют представление потенциала в виде специальных рядов. Однако разложение потенциала в ряд — приём хотя и полезный, но всё же требующий теоретического осмысления. Например, сразу встаёт вопрос о сходимости этих рядов. Да и в аналитических исследованиях ряды далеко не всегда выручают и требуется знать потенциал именно в конечном виде.

Правда, есть компьютер, это восьмое чудо Света. С его помощью в современной небесной механике и динамике звёздных систем для расчёта силовых полей в идеализированных (нередко, чересчур) сценариях зачастую прибегают к методу численного моделирования. Страницы многих журналов полны такими работами. Однако повальное увлечение численными расчётами лишает исследователя той глубины обобщения, которая возможна при аналитическом подходе. Сейчас, как и в золотой век небесной механики, любой заинтересованный учёный дорого бы дал за знание потенциалов и гравитационной энергии тел в виде конечных аналитических выражений.

Реалии же таковы, что возможности классической теории потенциала в поиске новых строгих решений оказались весьма ограниченными. Её ресурс, казалось, был исчерпан. Убедимся в этом, продолжив экскурс в классику.

1.2.2. Но потенциал получает название ньютоновского. Потенциал объёмных тел и его свойства

Рассмотрим трёхмерное тело объёмом V с распределением плотности вещества $\rho\left(\boldsymbol{x}\right)$. Потенциал такого тела на точку (внешнюю или внутреннюю) $\boldsymbol{x}$ выражается объёмным интегралом[8]

[8] Как сейчас принято, не проводится различия в знаках между силовой функцией и ньютоновским потенциалом, который в трёхмерном случае определяется интегралом (1.9).

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = G \int\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} dV', \tag{1.9}$$

где $\rho(\boldsymbol{x}')$ — плотность, dV' — элемент объёма, а

$$D = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \tag{1.10}$$

— расстояние от точки интегрирования до испытуемой (пробной) точки.

Формула Гаусса

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{G\rho}{2} \oiint \cos\gamma' dS' \tag{1.11}$$

позволяет представить внутренний и внешний потенциал однородного объёмного тела интегралом по его поверхности. Здесь $\boldsymbol{x}$ — испытуемая точка, γ' — угол между единичной нормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхности в (штрихованной) точке интегрирования и ортом отрезка D. Формула (1.11) применяется, например, при нахождении внутреннего потенциала однородного эллипсоида. Активно использовала её и С. В. Ковалевская при изучении колец Сатурна.

Отметим следующее. Формула (1.11) гласит: потенциал объёмных масс однородного тела равен потенциалу неоднородного простого слоя с поверхностной плотностью

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\rho D \cos\gamma. \tag{1.12}$$

Такой поверхностный слой является *эквигравитирующим самому телу, но только в точке на конце отрезка D*. Это — эквигравитируемость «ad hoc»: слой Гаусса «изготавливается» для единственной пробной точки. Мы же в гл. 9 будем иметь дело с гораздо более универсальными эквигравитирующими телами, когда эквигравитируемость имеет место уже *во всех точках внешнего пространства для того или иного тела.*

Потенциал объёмных масс $\varphi(\boldsymbol{x})$:

1) повсюду однозначен, конечен и непрерывен;

2) его первые производные (силы на единицу массы) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ обладают тем же свойством;

3) вторые производные потенциала всюду конечны;

4) на бесконечности потенциал обращается в малую первого порядка

$$\lim_{D\to\infty} (D\varphi) = M, \tag{1.13}$$

в частности

$$\lim_{D\to\infty} \left(D^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -M\alpha_i,$$

где α_i — направляющий косинус между D и координатной осью Ox_i;

5) повсюду удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = -4\pi G\rho(\boldsymbol{x}), \tag{1.14}$$

причём вне тела, где плотность отсутствует, — уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0. \tag{1.15}$$

Следовательно, вне тела потенциал $\varphi(x)$ есть гармоническая функция координат, не имеющая в свободном пространстве ни максимума, ни минимума. Своё максимальное значение потенциал может принимать или внутри односвязного сплошного тела, или во внутренних его пустотах (каких конкретно — зависит от топологии фигуры). Минимальное значение (нуль) ньютоновский потенциал принимает на бесконечности.

1.2.3. Эквипотенциальные поверхности

Двигаясь, не надо совершать работу

Важное значение имеют *поверхности равного потенциала* (или *уровенные поверхности*, их же называют *эквипотенциальными*)

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_0 = \text{const}.$$

В каждой точке[9] вектор силы гравитации перпендикулярен к уровенной поверхности (и направлен в сторону возрастания потенциала). Работа перемещения материальной точки по уровенной поверхности равна нулю. Уровенные поверхности данного тела с разными $\varphi_0 = \text{const}$ не могут пересекаться и не имеют между собой точек контакта.

Задача 1.2. *Доказать, что расстояние между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями $d\tau$ обратно пропорционально силе тяжести в испытуемой точке*[10].

Решение. Если φ и φ' — гравитационный потенциал на двух близких уровенных поверхностях, то в линейном приближении

$$\varphi' \approx \varphi + \text{grad}\varphi \cdot d\tau = \varphi + g \cdot d\tau.$$

Следовательно, напряжённость поля

$$g = \frac{\varphi' - \varphi}{d\tau} = \frac{\text{const}}{d\tau}, \tag{1.16}$$

что и требовалось доказать. ▼

На достаточно больших расстояниях от гравитирующего тела любой формы и с произвольной концентрацией вещества, когда значение постоянной φ_0 достаточно мало, эквипотенциальные поверхности целиком находятся вне тела, и чем дальше от него, тем сферичнее являются эти поверхности.

Напротив, с увеличением потенциала, начиная с некоторого его значения φ_0, уровенные поверхности целиком лежат внутри сплошного тела и с возрастанием потенциала всё ближе концентрируются вокруг точки его максимального значения[11].

Для промежуточных же значений φ_0 эквипотенциальные поверхности могут быть расположены частично внутри, а частично — вне притягивающего тела.

Задача 1.3. *В каких случаях семейство эквипотенциальных поверхностей подразделяется на внешние или внутренние по отношению к поверхности тела?*

Решение. Задача эта не такая простая. Можно, конечно, сразу сказать, что к таким телам принадлежат:

[9] За исключением особых точек, где направление силы притяжения оказывается неопределённым.

[10] В учебниках эту задачу связывают с именем немецкого астронома и математика Брунса (1848–1919). Но это неточно. Веком раньше него, в замечательном трактате о неоднородных фигурах равновесия, о ней ясно говорил француз Алексис Клод Клеро (1713–1765).

[11] Заметим: точка максимума потенциала не совпадает, вообще говоря, ни с точкой центра масс, ни с точкой центра инерции тела. О совпадении этих точек можно говорить только для тел с определённой симметрией формы и концентрации вещества.

1) материальная точка (для которой все поверхности сферические и, разумеется, внешние);
2) однородный цельный шар и шар со сферически симметричным распределением плотности, а также тонкие или толстые сферические оболочки. Внешние эквиповерхности у них — концентрические сферы, сферы расположены и в пространстве, заполненном веществом толстых оболочек, в полостях же всех сферических оболочек эквипотенциально уже всё пространство и силы там равны нулю;
3) элементарный (тонкий) трёхосный эллипсоидальный гомеоид (гомотетическая оболочка). Сферические и сфероидальные гомеоиды — их частные случаи. Во внешнем пространстве уровенные поверхности у гомеоидов представлены семейством софокусных (внешней) границе эллипсоидов. Внутри и на поверхности таких оболочек в любой точке значение потенциала одинаковое и силы там (как и в полостях сферических оболочек) отсутствуют. В данном случае поверхность тела как сепаратриса разделяет два разных семейства поверхностей равного потенциала;
4) слой Робэна (1887), под которым понимается уровенный слой вещества на заранее заданной поверхности. Проблема отыскания такого уровенного слоя в общем случае приводит к решению сложного интегрального уравнения Робэна; см. §5.14. ▼

Поверхности равного потенциала дают наглядную пространственную картину силового поля и там, где такие поверхности расположены более плотно, сила также будет больше (см. выше задачу Клеро). Эквипотенциальные поверхности следует, конечно, отличать от поверхностей одинаковой силы. Вообще говоря, эти поверхности не будут совпадать. Изучение взаимного пространственного расположения тех и других поверхностей часто представляет немалый интерес.

1.2.4. Ряды Лапласа

Если квадратуры неуловимы

По определению, ньютоновский потенциал $\varphi(\boldsymbol{x})$ гравитирующего тела T в точке $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{x}$ даётся интегралом (1.9). Однако, при аналитических и численных расчётах использовать φ в виде интеграла часто бывает невозможно, главным образом из-за незнания реального распределения плотности вещества в теле. Поэтому для решения многих задач в небесной механике, геофизике и в смежных с ними областях науки ньютоновский потенциал гравитирующих тел представляют рядом по степеням r и по полиномам Лежандра. Для краткости такой ряд часто называют просто *рядом Лапласа.* Здесь мы будем иметь дело, в частности, с важным для приложений случаем, когда однородное гравитирующее тело имеет ось круговой (ротационной) симметрии.

Внешний потенциал осесимметричного тела может быть представлен рядом Лапласа

$$\varphi_{\text{внешн}}(r,\theta) = G\sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \tag{1.17}$$

где

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \tag{1.18}$$

$P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, а коэффициенты D_n

$$D_n = \iiint\limits_T \rho(r',\theta')(r')^n P_n(\cos\theta')\,dV' \tag{1.19}$$

выражают собой, как известно, мультипольные моменты распределения массы.

Представление *внутреннего потенциала осесимметричного тела* рядом Лапласа имеет вид:

$$\varphi_{\text{внутр}}(r,\theta) = G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{1.20}$$

причём коэффициенты здесь равны

$$\widetilde{D}_n = 2\pi \oiint\limits_{\widetilde{S}} \widetilde{\rho}(r',\theta')(r')^{1-n} P_n(\cos\theta')\sin\theta' dr' d\theta'. \tag{1.21}$$

Ряды Лапласа будут использованы в главе 12 при создании третьего метода нахождения гравитационной энергии.

1.2.5. Ньютоновский потенциал поверхностных распределений массы

Если тело имеет форму тонкого диска или, в более общем случае, представляет собой поверхность $S(x_1, x_2, x_3)$ с распределением плотности $\sigma(x_1, x_2, x_3)$, потенциал выражается интегралом

$$\varphi_{\text{слоя}}(\boldsymbol{x}) = G\iint\limits_S \frac{\sigma(\boldsymbol{x}')\,dS'}{D}, \tag{1.22}$$

где D из (1.10). Это — *потенциал простого слоя*. Многие его свойства в основном такие же, как и потенциала объёмных тел. Но важно следующее: хотя сам потенциал слоя и остаётся всюду непрерывной функцией координат испытуемой точки, однако нормальная (но не тангенциальная!) составляющая силы притяжения $\dfrac{\partial\varphi_{\text{слоя}}}{\partial\boldsymbol{n}}$ при переходе через слой терпит разрыв

$$\frac{\partial\varphi_{\text{слоя}}}{\partial n_1} - \frac{\partial\varphi_{\text{слоя}}}{\partial n_2} = -4\pi G\sigma(\boldsymbol{x}), \tag{1.23}$$

где n_1 и n_2 — нормали к притягивающей поверхности с обеих её сторон. В (1.23) представлено уравнение Пуассона для простого слоя.

Например, потенциал на оси симметрии однородного тонкого круглого диска радиусом R равен

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2+x_3^2} - |x_3|\right). \tag{1.24}$$

Так как

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi_{\text{диска}}(x_3)}{\partial x_3}\right)_{x_3>0} &= 2\pi G\sigma\left(\frac{x_3}{\sqrt{R^2+x_3^2}} - 1\right);\\ \left(\frac{\partial\varphi_{\text{диска}}(x_3)}{\partial x_3}\right)_{x_3<0} &= 2\pi G\sigma\left(\frac{x_3}{\sqrt{R^2+x_3^2}} + 1\right),\end{aligned} \tag{1.25}$$

то

$$\left(\frac{\partial\varphi_{\text{диска}}(x_3)}{\partial x_3}\right)_{x_3>0} - \left(\frac{\partial\varphi_{\text{диска}}(x_3)}{\partial x_3}\right)_{x_3<0} = -4\pi G\sigma, \tag{1.26}$$

что и подтверждает общую формулу (1.23).

1.2.6. Потенциал одномерных тел

Проще только материальная точка

Потенциал одномерного тела (прут, тонкое кольцо, завиток произвольной формы) с распределением плотности вещества $\mu(x_1, x_2, x_3)$ определяется интегралом вдоль него

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = G \int\limits_L \frac{\mu(\boldsymbol{x}')\, dL'}{D}. \tag{1.27}$$

Например, потенциал однородного кругового колечка в точке x_3 на оси его симметрии равен

$$\varphi(x_3) = \frac{MG}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} \tag{1.28}$$

(R — радиус круга).

Ньютоновский потенциал одномерных тел существует в любой точке внешнего пространства, но *в точках самого тела обращается в бесконечность*. Конечно, свойством сингулярности обладает и потенциал *отдельной материальной точки* (1.5). Но если к сингулярному поведению потенциала точки мы давно привыкли, то интересно понять, почему-то же самое происходит и с потенциалом при «посадке» испытуемой точки на одномерное тело[12]. Причина, оказывается, в соревновании, которое происходит между коллективными силами с одной стороны, и силой гравитации отдельной материальной точки с её стремлением к сингулярному поведению — с другой. Когда тело объёмно, то в окрестности точки касания находится много других материальных точек, которые в сумме подавляют эффект сингулярности отдельной материальной точки. Размывание индивидуального вклада точки, хотя и в более слабой степени (окружающих точек уже меньше!), происходит и в случае простого слоя. Если же тело одномерное, точку контакта окружает не так уж много соседних частиц: и чем ближе к пробной, тем меньше число соседей, тем слабее влияние коллектива на материальную точку стержня в месте контакта. В итоге, коллектив соседних точек не справляется с сингулярностью отдельной частицы в месте контакта с одномерным телом. Одна частица перебарывает смягчающее влияние коллектива — и гравитационный потенциал неограниченно растёт. Кстати, для производных от потенциала ситуация должна быть ещё острее: ведь силы между частицами убывают быстрее, чем потенциалы (обратно квадрату расстояния).

До сих пор речь шла только о ньютоновском потенциале тел. Однако кроме него, в теории и практике часто рассматривают и логарифмические потенциалы.

1.2.7. Логарифмический потенциал

В силе — закон обратных расстояний

Для неограниченных тел потенциал и притяжение не имеют, вообще говоря, определённого смысла. Тем не менее, для *двумерных* цилиндрических тел сила притяжения существует и имеет физический смысл. Однако ньютонов потенциал (1.9) теперь заменяется логарифмическим потенциалом (1.30).

Покажем это. Пусть гравитирующий цилиндр с произвольным сечением S имеет длину $2H$ вдоль оси симметрии Ox_1, причём H значительно больше размеров сечения. Тогда потенциал (1.9) можно записать в виде

[12] Действительно: при контакте испытуемой точки с поверхностью объёмного или двумерного тела с потенциалом ничего не происходит.

$$\varphi(x_2, x_3) = G \iint \rho(\boldsymbol{x}')\, dx_2' dx_3' \int\limits_{-H}^{+H} \frac{dx_1'}{\sqrt{D^2 + {x_1'}^2}}, \tag{1.29}$$

так что

$$\varphi(x_2, x_3) = 2G \iint\limits_S \rho(\boldsymbol{x}') \ln \frac{2H}{D}\, dx_2' dx_3'. \tag{1.30}$$

Здесь

$$D = \sqrt{(x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \tag{1.31}$$

— расстояние между пробной точкой и точкой интегрирования. Наличие логарифма под интегралом в (1.30) и определяет само название «логарифмический потенциал». Физически логарифм означает здесь, что ньютоновский закон обратных квадратов между материальными точками заменяется для двух материальных линий законом обратных расстояний.

Однако в итоговой формуле для потенциала некоторых конкретных двумерных цилиндрических тел логарифмы при объединении вкладов всех материальных линий формально исчезают[13]. Таков, например, внутренний потенциал однородного эллиптического цилиндра с полуосями сечения a_2 и a_3

$$\varphi_{\text{внутр}}(x_2, x_3) = \pi G \rho \left(I - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2\right), \tag{1.32}$$

где $I \to \infty$ (расходимость логарифмическая). Здесь коэффициенты

$$A_2 = \frac{2a_3}{a_2 + a_3}, \quad A_3 = \frac{2a_2}{a_2 + a_3}. \tag{1.33}$$

Ранее для эллиптического цилиндра был известен только один — *косвенный* (в асимптотическом пределе из потенциала однородного эллипсоида (1.37)) способ вывода выражения (1.32). В этой книге в § 4.2 разработан новый — *прямой* метод нахождения внутреннего и внешнего потенциала однородного эллиптического цилиндра, в котором мы непосредственно опираемся на исходную формулу (1.30).

Задача 1.4. *Прямым методом найти логарифмический потенциал однородного одномерного отрезка.*

Решение. Дан отрезок длиной $2L$ с плотностью σ, расположенный вдоль оси Ox_2. Интеграл (1.30) примет вид:

$$\varphi_{\text{внутр}}(x_2, x_3) = 2G\sigma \int\limits_{-L}^{L} \ln \frac{2H}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + x_3^2}}\, dx =$$

$$= \frac{GM}{2L^2} \left\{ -x_3 \left(\operatorname{arctg} \frac{L - x_2}{x_3} + \operatorname{arctg} \frac{L + x_2}{x_3} \right) + L(2 + \ln 4) + \right.$$

$$\left. + (L - x_2) \ln \frac{H}{\sqrt{(L - x_2)^2 + x_3^2}} + (L + x_2) \ln \frac{H}{\sqrt{(L + x_2)^2 + x_3^2}} \right\}, \tag{1.34}$$

где $M = 2\sigma L$ — масса отрезка. Если отбросить общую логарифмическую расходимость, этот потенциал определён и в точках самого отрезка!

[13] Остаётся, однако, логарифмическая расходимость потенциала в целом.

1.2.8. Потенциалы однородных эллипсоидов, сфероидов и шаров

Плацдарм классической теории

Гравитирующий эллипсоид как объект исследования был известен ещё Ньютону. Проблема оказалась крепким орешком и её решение стало заметной вехой в развитии математической физики XVIII — XIX столетий. Многие выдающиеся математики внесли свою лепту в исследование притяжения эллипсоидов. Исторически первыми основательно были изучены однородные эллипсоиды. На них оттачивалось мастерство Маклорена (1742), Лежандра (1785), Айвори (1809), Гаусса (1813), Родрига (1815), Дирихле (1839), см. [46].

Для однородного шара потенциалы просты:

$$\varphi_{\text{внутр}}(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R^2 - r^2\right), \quad \left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right); \tag{1.35}$$

$$\varphi_{\text{внешн}}(r) = \frac{MG}{r}. \tag{1.36}$$

Внутренний потенциал однородного эллипсоида с плотностью ρ и полуосями a_1, a_2, a_3 есть квадратичная функция координат пробной точки x_i :

$$\varphi_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho\left(I - A_1x_1^2 - A_2x_2^2 - A_3x_3^2\right), \tag{1.37}$$

где коэффициенты

$$A_i = a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty \frac{du}{\left(a_i^2 + u\right)\Delta(u)} \tag{1.38}$$

и величина нормированного потенциала в центре эллипсоида

$$I = a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \tag{1.39}$$

выражаются в общем случае через стандартные неполные эллиптические интегралы (см. формулы (6.16)–(6.20)). Здесь (и ниже)

$$\Delta(u) = \sqrt{\left(a_1^2 + u\right)\left(a_2^2 + u\right)\left(a_3^2 + u\right)}. \tag{1.40}$$

Внешний потенциал однородного эллипсоида уже не является квадратичной функций координат пробной точки x_i :

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho\int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)}\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + u} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + u} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right), \tag{1.41}$$

где λ — эллипсоидальная координата испытуемой точки; эта λ есть положительный (т.е. — наибольший) корень кубического уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{1.42}$$

Для однородного сфероида внутренний потенциал в пробной точке (r, x_3) упрощается

$$\varphi_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho\left(I - A_1r^2 - A_3x_3^2\right), \quad \left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \tag{1.43}$$

так как величины A_i и I выражаются уже через элементарные функции от эксцентриситета сфероида e:

Сжатый сфероид, у которого $a_1 = a_2 \geqslant a_3$ и $e = \sqrt{1 - a_3^2/a_1^2}$:

$$\begin{gathered} A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}, \\ A_3 = \frac{2}{e^2} - 2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e, \quad I = 2a_1^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e. \end{gathered} \tag{1.44}$$

Вытянутый сфероид, у которого $a_1 > a_2 = a_3$ и $e = \sqrt{1 - a_3^2/a_1^2}$:

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{1-e^2}{e^3} \ln \frac{1+e}{1-e} - 2\frac{1-e^2}{e^2}, \\ A_2 = A_3 = \frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad I = a_1^2 \frac{1-e^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}. \end{gathered} \tag{1.45}$$

Внешний потенциал однородного сфероида (причем как сжатого, так и вытянутого) в пробной точке r, x_3 также выглядит просто:

$$\varphi_{\text{внешн}}(r, x_3) = \pi G \rho \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(a_1^2 + u\right)\sqrt{a_3^2 + u}} \left(1 - \frac{r^2}{a_1^2 + u} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right), \tag{1.46}$$

где λ — эллипсоидальная координата испытуемой точки, являющаяся наибольшим (положительным) корнем квадратного уравнения

$$\frac{r^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{1.47}$$

1.2.9. Слоисто-неоднородные эллипсоиды с гомотетическими слоями

Мостик к реальности

Выше говорилось только об однородных эллипсоидах. Но для прикладных целей необходимо исследовать и неоднородные эллипсоиды. Но однородный эллипсоид один, а неоднородных, различающихся степенью концентрации вещества — много. Мы остановимся здесь на самом, пожалуй, важном для астрофизических приложений типе неоднородного эллипсоида, вещество которого стратифицировано и плотность, постоянная на отдельных эллипсоидальных поверхностях, изменяется только от слоя к слою. Это — *слоисто-неоднородный эллипсоид*. До нас были известны потенциалы только таких слоисто-неоднородных эллипсоидов, где эллипсоидальные слои *гомотетичны*, т. е. подобны друг другу. Закон распределения плотности в них имеет вид $\rho = \rho(m)$, где

$$m^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}. \tag{1.48}$$

Эллипсоидами из гомотетичных слоёв занимался ещё Пуассон (1837), а в наше время некоторые методические улучшения внёс Чандрасекхар [47].

Внешний потенциал эллипсоида с гомотетическими слоями в пробной точке x_i даётся двойным интегралом

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta(u)} \int\limits_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right). \tag{1.49}$$

Здесь λ — эллипсоидальная координата пробной точки $\boldsymbol{x}$ относительно поверхности тела (см. выше уравнение (1.42)), а

$$m^2(u) = \frac{x_1^2}{a_1^2+u} + \frac{x_2^2}{a_2^2+u} + \frac{x_3^2}{a_3^2+u}. \tag{1.50}$$

Положив в (1.49) $\lambda = 0$, получим *внутренний потенциал эллипсоида с гомотетическими слоями* в пробной точке x_i :

$$\varphi_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \int\limits_{m^2(u)}^1 \rho(m^2)\, dm^2. \tag{1.51}$$

В частности, для *неоднородного эллипсоида из гомотетических слоёв*, в котором распределение плотности задано формулой

$$\rho(m^2) = \rho_0 (1-m^2)^n, \tag{1.52}$$

потенциал во внешней и внутренней точках x_i даётся, соответственно, выражениями

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G \frac{\rho_0}{n+1} a_1 a_2 a_3 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2+u}\right)^{n+1}; \tag{1.53}$$

$$\varphi_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \pi G \frac{\rho_0}{n+1} a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2+u}\right)^{n+1}. \tag{1.54}$$

Разумеется, при вырождении слоёв трёхосного эллипсоида в сжатые или вытянутые сфероиды происходит упрощение общих формул (1.49) и (1.51).

Задача 1.5. *Записать формулы* (1.49) *и* (1.51) *в случае сжатого* $(a_1 = a_2 \geqslant a_3)$ *и вытянутого* $(a_1 \geqslant a_2 = a_3)$ *неоднородных сфероидов.*

Наконец, в случае *неоднородного шара*, поверхности равной плотности которого есть сферы, все интегралы становятся однократными:

внутри шара радиуса R с распределением плотности $\rho(r')$ потенциал в точке r равен

$$\varphi_{\text{внутр}}(r) = 4\pi G \left(\frac{1}{r}\int\limits_0^r \rho(r')\, r'^2 dr' + \int\limits_r^R \rho(r')\, r' dr'\right); \tag{1.55}$$

внешний потенциал неоднородного шара даётся формулой

$$\varphi_{\text{внешн}}(r) = \frac{4\pi G}{r} \int\limits_0^R \rho(r')\, r'^2 dr'. \tag{1.56}$$

Задача 1.6. *Найти потенциал внутри шара с распределением плотности*

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{1.57}$$

Решение. Масса такого шара равна $M = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$, а потенциал

$$\varphi_{\text{внутр}}(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho_0 \left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R}\right). \tag{1.58}$$

▼

Задача 1.7. *В шаровых звёздных скоплениях распределение плотности неплохо описывается формулой Шустера*

$$\rho(r) = \frac{c}{\left(a^2 + r^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \tag{1.59}$$

Найти массу и внутренний потенциал такого шара. Ответ:

$$\varphi_{\text{внутр}}(r) = \frac{MG}{R^3}\left[\frac{\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2 + r^2}} - a^2\right], \tag{1.60}$$

где полная масса шара

$$M = \frac{4\pi c R^3}{3a^2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.61}$$

▼

1.2.10. О теореме Маклорена — Лапласа

Перевоплощаясь — остаюсь самим собой

Красой и гордостью классической теории потенциала является

Теорема Маклорена — Лапласа.

Первая формулировка:

Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, одинаково направленными, а по величине пропорциональными их массам.

Вторая формулировка:

Потенциалы двух однородных софокусных эллипсоидов на внешнюю точку относятся как массы этих эллипсоидов

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \frac{M}{M'}\varphi'_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}). \tag{1.62}$$

Доказательство этой теоремы[14] хорошо известно (см. любую известную книгу по теории потенциала). Наше доказательство этой важной теоремы другое, и дано в § 5.12.

1.2.11. Гравитационная энергия тел

Расстояния бесконечны — работа конечна

В астрономии для решения многих задач требуется знать гравитационную (потенциальную, она же — ньютоновская) энергию W тел разной формы. Численно это работа по полному распылению гравитирующей массы. Но справедливо и обратное: W есть то количество энергии (например, тепловой), которая выделится (как известно, теплоёмкость гравитирующих систем отрицательна!) при конденсации гравитирующей массы из разреженного облака газа или пыли. Именно такие процессы играют важную роль при образовании галактик и звезд.

[14] В литературе разнобой с её названием. В первой формулировке эта теорема у М. Ф. Субботина [45], §13 носит имя Лапласа, а в известной книге Чандрасекхара ([47], стр. 63) она связана с именем Маклорена. Напротив, Г. Н. Дубошин ([15], гл. 3, §6) оставил за первой формулировкой имя Лапласа, а за второй — Маклорена. Из-за отсутствия единства мнений по этому вопросу и так как содержание обеих формулировок физически эквивалентно, мы считаем возможным связать имена Маклорена и Лапласа в данном контексте вместе.

В физике также часто требуется знать потенциальную энергию распределения электрических зарядов. Как скаляр, эта величина часто нужна при различных оценках энергии по порядку величины. В тензорном виде гравитационная энергия входит в вириальные уравнения при изучении равновесия и устойчивости тел[15].

По определению, гравитационная энергия тела объёмом T, имеющего распределение плотности $\rho(\mathbf{x})$ и потенциал $\varphi_{\text{внутр}}(\mathbf{x})$, даётся интегралом

$$W = -\frac{1}{2}\iiint\limits_T \rho(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,dV. \tag{1.63}$$

В общем случае интеграл здесь шестикратный и не удивительно, что с помощью данной формулы лишь для некоторых тел можно получить результаты в конечном виде. Это, прежде всего, *однородный шар* с массой M и радиусом R:

$$W_{\text{шара}} = -\frac{3}{5}\frac{M^2G}{R} = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5, \tag{1.64}$$

и *однородный трёхосный эллипсоид*

$$W_{\text{эл}}(1) = -\frac{3}{10}I(1)\,\frac{GM_{\text{эл}}^2}{a_1a_2a_3} = -\frac{2}{5}\pi G\rho I(1)\,M_{\text{эл}}, \tag{1.65}$$

где I из (1.39).

В частных случаях из (1.65) следуют выражения гравитационной энергии для *сжатого* $(a_1 = a_2 \geqslant a_3)$ и *вытянутого* $(a_1 \geqslant a_2 = a_3)$ сфероидов:

$$W_{\text{сж}} = -\frac{3M^2G}{5a_1}\frac{\arcsin e}{e}, \quad W_{\text{выт}} = -\frac{3}{10}\frac{M^2G}{a_1e}\ln\frac{1+e}{1-e} \tag{1.66}$$

(e — эксцентриситет).

Далее, в главе 8 в формулах (8.46) и (8.47) указанные выражения гравитационной энергии однородных сфероидов представлены рядами по степеням эксцентриситетов.

Задача 1.8. *Найти гравитационную энергию шара с распределением плотности* (1.57).

Ответ.

$$W_{\text{шара}} = -0.08253\cdot\pi^2 G\rho_0^2 R^5 = -0.74286\frac{M^2G}{R}. \tag{1.67}$$

▼

Задача 1.9. *Найти гравитационную энергию шара с распределением плотности Шустера* (1.59).

Ответ.

$$W_{\text{шара}} = \frac{M^2G}{16p^6}\left[3p + 8p^3 - 3p^5 - 3\left(1+p^2\right)^3 \operatorname{arctg} p\right], \quad \left(p \equiv \frac{R}{a}\right), \tag{1.68}$$

где M — полная масса шара, данная в (1.61). ▼

Итак, шары, гомеоиды и эллипсоиды (однородные или с простыми распределениями плотности) — вот основной багаж точных решений классической теории. Далее верстовые столбы теории или повалены, или вообще отсутствуют. Именно в недостаточном развитии аналитических исследований видится одна из причин отставания теории потенциала от запросов практики[16]. Со временем, однако, рождаются и новые задачи. А одна хорошая задача порождает другие хорошие задачи!

[15] В создание математического аппарата вириальных уравнений заметный вклад внёс Чандрасекхар [47].

[16] В XX веке появился термин «новая теория потенциала». В ней, однако, рассматриваются весьма узкие области функционального анализа (например, теория ёмкостей компактов). Теория же потенциала была и остаётся прежде всего теорией притяжения тел.

§ 1.3. Дальнейшие шаги. О содержании этой книги

Закон обратных квадратов, лежащий в фундаменте динамической астрономии, математически прост (даже элегантен), вместе с тем физически глубок и позволяет довольно легко формулировать много интересных задач в астрономии. Это приятно возбуждает исследователя, однако при решении задач лёгкость почти всегда куда-то испаряется и лопата впустую с визгом скребёт по камню. Лишь изредка Фортуна одарит Вас улыбкой и решение задачи удаётся выразить в конечном аналитическом виде. Увы, почтенная дама свои улыбки так просто не расточает! Трудные задачи теории потенциала далеко не всегда допускают строгие решения.

И тогда исследователь обращается к компьютеру. Но чрезмерное упование на численные расчёты лишает исследователя глубины обобщения, возможной при аналитическом подходе. Сильный перекос в развитии той или иной стороны современного подхода к исследованию Природы невыгоден для развития науки в целом. Тем более, что запросы практики стимулируют развитие не только методов численного моделирования, но и ясно указывают на необходимость создания новых аналитических методов. С этой точки зрения и следует рассматривать содержание данной книги, где основное внимание уделяется развитию теории. Основное направление в ней — аналитическое.

1.3.1. Ещё об однородных эллипсоидах

Прежде всего, даже в методическом плане свойства однородных эллипсоидов удаётся понять лучше, если рассматривать их в контексте широкой панорамы слоисто-неоднородных эллипсоидов. Последним уделяется много внимания в этой книге. Но и для однородных эллипсоидов, досконально, казалось бы изученных классиками, здесь есть кое-что новое. Так, в § 6.3 через элементарные функции найдены потенциалы для иглообразных и сильно сжатых эллипсоидов, а в § 6.5 углубленно рассматриваются свойства различных семейств внутренних изоповерхностей. В § 8.7 выявлено несколько тонких свойств гравитирующих однородных сфероидов. В § 8.7 доказано важное свойство экстремальности гравитационной энергии однородного сжатого сфероида. Список этот можно продолжить и далее.

1.3.2. Оболочки и слоисто-неоднородные эллипсоиды

Неоднородным эллипсоидам не столь «повезло», как однородным — они привлекли значительно меньше внимания исследователей из-за неопределённости в выборе закона плотности. Согласно [46], была небольшая заметка Пуассона. Важной в этом направлении стала работа Ферререса [58]. В ней решалась задача о потенциале эллипсоида, плотность которого представлена в виде

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_0 \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\beta} \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{\gamma}. \tag{1.69}$$

Однако ни сам Ферререс, ни его последователи (среди которых Дайсон, 1891 г. и Раус 1892 г.) далеко не исчерпали всей проблемы.

Здесь нас будут интересовать неоднородные эллипсоиды с более сложной структурой слоёв, чем гомотетические (см. формулы (1.49) и (1.51)). И обобщение для эллипсоидов напрашивается естественное: многие тела в природе с хорошим приближением можно представить состоящими из наложенных друг на друга эллипсоидальных слоёв *с изменяющейся от слоя к слою сплюснутостью*. Ярким примером тел с такой структурой являются эллиптические галактики, а также звёзды, планеты и сгустки плазмы. Таким образом, на практике возникает необходимость изучения потенциалов и других характеристик именно слоисто-неоднородных тел.

Проблема эта трудная, и хотя вклад в потенциал от элементарной гомеоидальной оболочки хорошо известен, в целом слоисто-неоднородные эллипсоиды оставались изученными недостаточно полно. Именно поэтому при расчёте тензора потенциальной энергии для Е-галактик и известные исследователи допускали ошибки.

Поясним это примером. Изучая эллипсоидальную гравитирующую подсистему, представим её внутренний потенциал суммой двух членов

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi^{I}(\boldsymbol{x}) + \varphi^{II}(\boldsymbol{x}), \tag{1.70}$$

где φ^I и φ^{II} — вклады соответственно от самой эллипсоидальной подсистемы и от внешней для неё оболочки. Для вычисления этих членов в книге развит метод стратификации, и в гл. 8 результаты получены в весьма компактной форме.

В данной проблеме немало интересного. Впоследствии выяснится, например, что внешний потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида, состоящего из *софокусных* друг другу слоёв не изменится при любой перестановке этих слоёв (и равен потенциалу, создаваемому во внешней точке однородным эллипсоидом той же массы и конгруэнтной поверхностью).

Явные пробелы остались от классиков и в изучении притяжения самих элементарных оболочек. Прежде всего, классики изучали лишь *эллипсоидальный гомеоид* и, едва ли полно, *фокалоид*. Но это — не слишком надёжный фундамент для решения новых серьёзных задач. Даже у гомеоида и фокалоида не были известны геометрические места точек равной толщины, без знания которых нельзя выявить некоторые тонкие свойства и у гравитирующих эллипсоидов. Кроме того, в этой книге много внимания уделяется изучению свойств и более обширного семейства эллипсоидальных оболочек.

Кроме эллипсоидальных, в этой книге рассматриваются и оболочки более общего типа: *обобщённые гомеоиды* и *фокалоиды*. Последние лишь в частном (простейшем) случае превращаются в эллипсоидальные оболочки. Подчеркнём, что введение оболочек обобщённого типа связано с общим планом наших исследований. Так, *обобщённые гомеоиды* активно используются в гл. 8 при создании нового (третьего) метода нахождения гравитационной энергии тел. Очень интересными свойствами обладает и слой, названный в книге *обобщённым фокалоидом*. Например, именно *обобщённый фокалоид* является эквигравитирующим тому однородному телу, на котором данный слой создан выметанием массы. Обобщённые фокалоиды играют важную роль и в § 8.7 при доказательстве свойства экстремальности гравитационной энергии однородного сжатого сфероида.

1.3.3. Тор

С *круговым тором* мы знакомы на примере бублика, спасательного круга или наполненных воздухом покрышек, на которых в детстве многие купались. Кольцевые и торообразные фигуры часто встречаются в Природе. Кольца есть у планет, звёзд и галактик, кольца — частое явление в гидродинамике и теории электричества.

Тор привлекал, конечно, внимание математиков, но астрономы и физики заинтересовались им сравнительно недавно. Задача о пространственном потенциале гравитирующего тора давно назрела, но с математической точки зрения она весьма трудна. Именно поэтому гравитационные свойства тора до сих пор не изучены. Гениальный Риман посвятил притяжению тора одну из своих незаконченных работ [42], где, к сожалению, не учёл в полном виде граничные условия и не довёл до конца разложение потенциала в ряд Фурье. Тор рассматривается в главе 7.

Прямой подход, использующий общую формулу (1.9), позволяет найти *потенциал тора* только на оси его симметрии (об этом см. монографию [21] или ниже § 7.1.1). Но все попытки найти таким же образом *пространственный* потенциал тора вне оси симметрии приводят к тому жалкому положению, когда перо исследователя упирается в трудно проходимые дебри математических расчётов.

Поэтому в § 7.1.2 был предпринят обходной манёвр. Тор представлен как одномерное многообразие, как «стопка» элементарных широких колец (ещё пример расслоения сплошного тела на слои, только теперь слои плоские!). Потенциал же каждого отдельного кольца нам известен и выражается через полные эллиптические интегралы Лежандра. Интегрируя вклады от широких колец, в итоге и получим искомый *пространственный потенциал однородного кругового тора*, причем в таком виде, когда пробная точка может быть как внутренней по отношению к фигуре тора, так и внешней.

Заслуживает внимания и метод суммирования ряда Лапласа, изложенный в § 7.1.5.

Но оболочками, слоисто-неоднородными эллипсоидами и торами содержание этой книги далеко не исчерпывается. В ней тщательно изучаются двумерные тела и тела с логарифмическим потенциалом, ставятся и решаются новые задачи, такие как *проблема эквигравитирующих тел*.

1.3.4. Эквигравитирующие тела

Ещё Ньютон был приятно удивлен возможностью замены внешнего поля гравитирующего шара полем центральной точечной массы[17]. Но шар — лишь частный случай трёхосного эллипсоида, и следующий шаг на этом увлекательном пути делает Маклорен (а также Лаплас): *однородные софокусные эллипсоиды равной массы создают во внешнем пространстве одинаковые гравитационные поля*.

Удивительно, но после столь замечательного начала теория эквигравитирующих тел на протяжении трёх веков фактически не развивалась. Причин тому нам видится несколько. Прежде всего, пионерские результаты Ньютона и Маклорена не были самоцелью, а представляли собой лишь побочный продукт исследований, которые проводились при штурме главной крепости математической физики той эпохи — задачи о потенциале однородного гравитирующего эллипсоида. Эллипсоид, конечно, уникальная фигура. И когда, после поисков, взору ученых открылось то, что его внутренний потенциал выражается чеканной квадратичной формой от координат пробной точки — то свет от этого изумительного открытия на долгое время затмил другие, более скромные результаты. К тому же, с освоением потенциалов однородного эллипсоида список задач, имеющих точное решение неожиданно оказался почти исчерпанным. Порыв иссяк, пришло время мелких улучшений и поиска новых задач.

Другая причина забвения в том, что сыграв важную роль при изучении однородного эллипсоида, теорема Маклорена — Лапласа на этом себя и исчерпала. Всему своё время! В той ситуации, чтобы двигаться вперёд, нужен был новый взгляд на проблему эквигравитирующих тел. А он, как мы теперь знаем, подразумевает активное применение функций комплексного переменного. Переход к понятию мнимых масс и мнимых распределений плотности вещества — всё это далеко выходило за рамки исследований того времени.

О практической важности проблемы эквигравитирующих тел говорит то, что в известном цикле работ группы Г. Н. Дубошина (Е. А. Гребеников, В. Г. Дёмин, Е. П. Аксёнов, Ю. А. Рябов) (см., например, [1]) изучалась так называемая обобщённая задача двух неподвижных центров. Ещё Эйлер установил интегрируемость уравнений движения третьего тела в задаче двух неподвижных центров. Так вот, задачу о движении искусственных спутников в гравитационном поле Земли (в некотором, правда, приближении) исследователям этой группы удалось загнать в прокрустово ложе обобщённой задачи двух неподвижных центров, моделируя гравитационное поле нашей планеты двумя точечными *мнимыми* массами. Идея интересная, однако в итоге эта задача всё же не послужила сигналом к активному развитию теории эквигравитирующих тел. Затравкой к этому явились другие результаты.

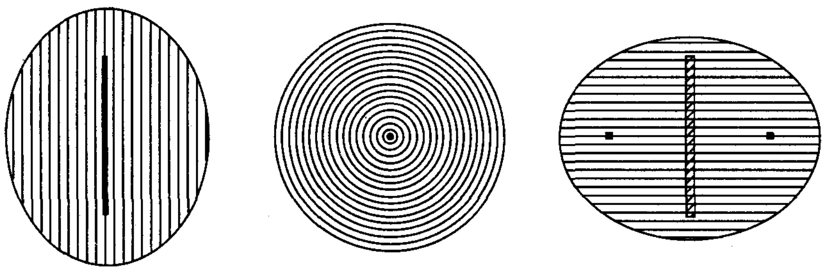
[17] Приятно удивлен — деликатно сказано. На самом же деле, утвердиться в законности замены шара точкой будущему автору «Начал» долгие годы никак не удавалось. Как пишет он [34] в письме Хэлли от 20 июня, ещё в 1685 году, то есть менее чем за год до представления «Начал» Королевскому обществу, сам Ньютон продолжал считать *невозможной замену шара точкой*. Вот так! Поворотный к успеху момент — идея рассматривать не шар в целом, а притяжение отдельных сферических оболочек.

Задача о стержнях

В предельном варианте из теоремы Маклорена — Лапласа следует: внешнее притяжение вытянутого сфероида не изменится при его софокусном преобразовании в одномерный отрезок длиной $2\sqrt{a_3^2 - a_1^2}$ с плотностью

$$\mu(\zeta) = \frac{3M}{4\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right). \tag{1.71}$$

Именно этот стержень, расположенный между точками фокусов, является *эквигравитирующим* вытянутому сфероиду! Взглянем теперь на рис. 1, где изображены сечения трёх одно-



а *б* *в*

Рис. 1. Представление внешних гравитационных полей: *а* — вытянутого однородного сфероида с помощью неоднородного вещественного стержня; *б* — шара через материальную точку; *в* — однородного сжатого сфероида с помощью неоднородного стержня с чисто мнимым распределением плотности

родных тел: вытянутого сфероида ($a_3 \geqslant a_1$), шара ($a_3 = a_1$) и сжатого сфероида ($a_3 \leqslant a_1$). При переходе от вытянутого сфероида к шару эквигравитирующий стержень вырождается в материальную точку. Что же делается с этой эквигравитирующей материальной точкой при деформации данного шара в *сжатый сфероид*? Ответ парадоксален: эта точка преобразуется опять в одномерный стержень, имеющий, однако, *чисто мнимую плотность*. И закон распределения этой мнимой плотности вдоль стержня получается из (1.71) просто перестановкой местами a_3 и a_1:

$$\mu(\zeta) = \frac{3M}{4i\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 - a_3^2}\right). \tag{1.72}$$

Подчеркнём: данный фокальный одномерный отрезок «длиной» $2i\sqrt{a_3^2 - a_1^2}$ обладает той же полной массой и, что главное, развивает в пространстве то же внешнее гравитационное поле, что и однородный сжатый сфероид!

В данной книге установлено следующее: в наборе эквигравитирующих элементов все *осесимметричные тела имеют эквигравитирующие стержни*. Такие стержни (иногда мы будем называть их также *заменяющими отрезками*) позволяют не только в сравнительно более простом виде представить внешние поля гравитирующих (или заряженных электричеством) тел[18], но и открывают новые подходы к задачам о гравитационной энергии осесимметричных конфигураций.

Вопрос заключается в том, как такие стержни отыскивать! Для этого нужны специальные методы, разработке которых и посвящена часть этой книги.

[18] И это уже практически чрезвычайно важно: упрощение в представлении силовых полей необходимо во многих задачах теории потенциала, а также в физике, астрофизике, небесной механике и геофизике.

Проблема эквигравитирующих тел развивается у нас в трёх направлениях.

Первое направление (§§ 9.1-9.10) связано с разработкой теории эквигравитирующих стержней. *Такие стержни могут иметь как реальные, так и мнимые распределения плотности.* Масса и внешний потенциал стержней с мнимыми плотностями остаются вещественными в силу мнимого характера «длины» самого стержня. При двух особых точках[19] эквигравитирующие стержни являются *цельными*, если же особых точек больше, то стержни могут быть или составные, или образовывать *эквигравитирующие «скелеты»*.

Подчеркнём, однако: внешние гравитационные поля некоторых осесимметричных тел не всегда удаётся представить одними только стержнями. И тогда на помощь стержням приходят *изолированные материальные точки*. Например, если шаровой сегмент больше полушара, то его внешнее поле может быть представлено только *совокупностью мнимого стержня и реальной точечной массы*, см. § 9.14.

Второе направление (§ 9.11): представление внешних гравитационных полей объёмных тел с экваториальной плоскостью симметрии с помощью специальными *дисков*. Часто (но не всегда!) такие *эквигравитирующие диски* можно находить по известным *эквигравитирующим стержням*. Обратное же верно всегда: *для любого однородного или неоднородного круглого диска можно найти эквигравитирующий стержень, а значит, и эквигравитирующее объёмное тело*. Таким образом удаётся построить даже цепочки эквигравитирующих тел типа «сфероид (или оболочка) — диск — стержень».

В-третьих, в этой книге значительно расширена, в сравнении с классической теорией, область применения метода *софокусных преобразований* (§ 10.1). Прежде всего, мы модифицируем сам метод *софокусных преобразований* и прилагаем его не только к сплошным *однородным* эллипсоидам (как это делали Маклорен, Айвори и Лаплас), но и к эллипсоидам *слоисто-неоднородным* (причём со стратификацией самого общего вида!) и даже — к *однородным и неоднородным оболочкам*[20]. Это приводит к результатам, значительно расширяющим теорию: оказывается, *любые элементарные эллипсоидальные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды, связанные специальными софокусными преобразованиями, являются эквигравитирующими.*

1.3.5. Гравитационная энергия. Несколько затравочных задач

Задача о гравитационной энергии шарового сегмента (арбузной горбушки).

Шар, восхищавший ещё древних, и сейчас, если иметь в виду его гравитационные свойства, таит в себе много неизвестного. Вот задача, ставшая стимулом к развитию новых методов в теории притяжения.

Как уже отмечалось, выражение гравитационной энергии однородного цельного шара (1.64) давно известно. Но разрежем шар-арбуз и спросим: *какую гравитационную энергию имеет отделенный от него шаровой сегмент*? Задача эта новая и ранее не была (а обычным методом — и не могла быть) решена[21]. Настоящим сюрпризом явилось здесь то, что потенциальная энергия шарового сегмента (и даже составленных из него линз) выражается через элементарные функции!

Из попыток решения подобных задач и берут начало новые методы, разработанные в главах 12, 13 и 14. Подчеркнём — в этой книге само понятие гравитационной (потенциальной) энергии подверглось фундаментальной переработке и расширению. Судите сами.

[19] Особыми точками могут быть точки изломов на поверхности тела, или особые точки аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь тела.

[20] У Маклорена и Лапласа софокусным преобразованиям подвергались только сплошные однородные эллипсоиды и сфероиды. У Шаля также рассматриваются только элементарные софокусные гомеоиды [46].

[21] На международной конференции в Петрозаводске в 1993 г. автором было предложено пари: тому, кто за три месяца найдёт гравитационную энергию однородного сегмента, я отдаю свою (тогдашнюю) месячную зарплату. Пари было принято, но моё материальное благополучие тогда не пострадало!

Классический подход опирается на определение гравитационной энергии в виде *двойной суммы попарных взаимных энергий дискретных точек*:

$$W = -G\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{m_k m_i}{r_{ki}}. \tag{1.73}$$

При непрерывном распределении вещества формула (1.73) эквивалентна ранее упомянутой (1.63). Но общая формула (1.63) требует знания внутреннего потенциала тела и поэтому малопригодна для решения большинства конкретных задач.

Новым методам нахождения гравитационной энергии посвящены главы 12, 13 и 14. В дополнение к указанным общим формулам там выведены новые формулы. Дадим некоторым из них краткую характеристику.

Так, формула (12.28)

$$W = -\frac{1}{5}\rho \oiint\limits_S \varphi(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{S}$$

подразумевает интегрирование потенциала не по объёму, а по поверхности тела S, что часто упрощает решение некоторых задач.

Формула (12.80) также подразумевает интегрирование по поверхности однородного тела, причём даже не самого потенциала, а более элементарных вспомогательных функций.

Третий метод, выраженный формулой (12.91)

$$W = -\frac{G}{2}\sum_{n=0}^{\infty} D_n\widetilde{D}_n + \frac{1}{3}\pi G\rho J,$$

представляет энергию в виде суммы произведений D_n и $\widetilde{D}_n$ коэффициентов в разложениях в ряд Лапласа потенциала тела во внешней (1.19) и внутренней (1.20) точках соответственно. Аналогичная формула получена и для тел, не имеющих осевую симметрию. Число членов суммы зависит от симметрии тела; для однородного шара, сфероида или эллипсоида $n = 0$.

Четвёртый метод (13.6) демонстрирует совершенно иной подход к данной проблеме:

$$W = -\frac{1}{10 i\pi G}\oint \varphi_{\text{внешн}}(\zeta)\left(2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta}\right)d\zeta.$$

Здесь внешний и внутренний потенциал тела берутся на оси симметрии и затем в них x_3 заменяется на ζ; интегрирование в этой формуле производится по контуру фигуры в комплексной плоскости. Таким образом, данный метод нахождения гравитационной энергии тел сводится к вычислению контурных интегралов в комплексной плоскости.

Ещё один оригинальный способ дан в § 14.6: при нахождении W тела мы опираемся на нахождение *взаимной потенциальной энергии точек этого тела с эквигравитирующими ему элементами* (сравните с методом, выраженным формулой (1.73)!). Например, если у тела T есть *единственный эквигравитирующий стержень* (или любой другой эквигравитирующий элемент) с плотностью $\mu(\zeta)$, полная гравитационная энергия такого тела будет равна

$$W = -\frac{1}{2}\int \varphi_{\text{внутр}}(\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{3}\pi G\rho\left(J - \int \zeta^2\mu(\zeta)\,d\zeta\right).$$

Интегрирование в этой формуле распространяется на все точки данного эквигравитирующего элемента.

Подчеркнём, что каждая из указанный выше формул характеризует и принципиально новый подход к нахождению гравитационной энергии. В совокупности, эти методы позволяют решать задачи, которые ранее не ставились, да и не могли быть поставлены. Развивая теорию, мы всё глубже проникаем в суть проблемы! Данная область исследований молода, и как всё, связанное с применением контурных интегралов в комплексной области, содержит в себе немало удивительного.

Как, например, получить *гравитационную энергию однородной лунки*, ограниченной двумя участками сферы (см. рис. 104). Забегая вперёд заметим, что ответ совершенно нетривиален: оказывается, достаточно в выражении ньютоновской энергии W у асимметричной линзы (см. рис. 101) (которое нами также найдено) обратить знаки у радиуса R_1 и высоты h_1 для одной из половин линзы, и — как из под плаща фокусника! — явится требуемый ответ. Этот результат удивителен уже потому, что как таковая, потенциальная энергия тел не является даже аддитивной по массе величиной.

Но и это не всё: анализ задачи с лункой ведёт нас ещё дальше. Легко представить, как из асимметричной линзы при подборе параметров получается слепленная из двух шаров «снежная баба». Если затем мысленно совершить указанный на рис. 2 поворот на 180°

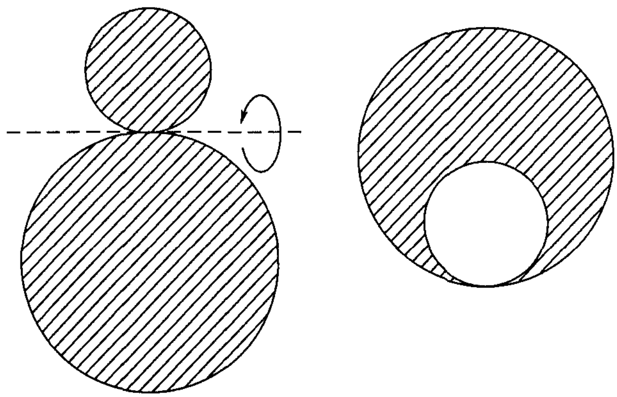


Рис. 2. Поворот малого шара — и из «снеговика» образуется лунка со сходящимися острыми концами

нижнего шара, из снеговика образуется однородная лунка со сведенными вместе острыми концами. Так вот — энергию последней мы получим из выражения всё той же лунки в пределе сходящихся у неё «рогов»!

И здесь у читателя может сложиться обманчивое впечатление о решаемости подряд любых задач по гравитационной энергии. Это не так! Почти все задачи по нахождению точных выражений для гравитационной энергии тел, выходящие за рамки известных результатов для шаров и однородных эллипсоидов, сложны и их решение требует немалых усилий. Уже сама постановка вопроса о гравитационной энергии тел нестандартной формы сразу приводит нас к тем труднейшим вопросам математической физики, которые не только ещё не решены, но даже ещё не получили ясной математической формулировки. Проблема эта требует основательной проработки, и для решения новых задач необходимо и создание принципиально новых, нестандартных подходов. Главное внимание в этой книге и уделяется разработке оригинальных методов нахождения потенциала и гравитационной энергии тел.

В настоящее время назрела необходимость развёрнутого изложения новых методов в теории потенциала. В этой книге даётся более тщательное и строгое доказательство справедливости данных методов, некоторые из них подверглись доработке и, что особенно важно, решается много свежих задач.

Замечания

§ **1.1.** Читателю, интересующемуся историей, рекомендуем книгу Тодхантера [71], написанную с добротностью и пунктуальностью. Русский перевод [46]. Неувядаема и книга Клейна [19].

§ **1.2.** По классической теории потенциала в своё время вышло немало хороших и обстоятельных книг. Вот только некоторые из них: *Вебстер* [11]; *Мультон* [36]; *Аппель* [8]; *М. Ф. Субботин* [45]; *Г. Н. Дубошин* [14], [15].

Со строгой тщательностью математика написана монография *Келлога* [65].

Не устарела и книга *Пицетти* [39].

По форме изложения нам ближе монография *Чандрасекхара* [47], где рассматриваются и эллипсоиды с подобными слоями.

Обстоятельно написана, ставшая редкой, монография *Л. Н. Сретенского* [44].

Из сравнительно недавно вышедших книг отметим: *В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников* [5].

По обобщённой задаче двух неподвижных центров см.:

В. К. Абалакин, Е. П. Аксёнов, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов [1].

Тщательному изучению слоисто-неоднородных эллипсоидов и оболочек посвящена гл. 2 в книге *Б. П. Кондратьева* [20].

Первое подытоживающее изложение новых методов теории потенциала сделано в монографии:

Б. П. Кондратьев [21].

На эту книгу мы часто будем здесь ссылаться.

§ **1.3.** Здесь автор ограничился некоторыми комментариями к содержанию данной книги, ибо предмет её в целом обширен и не прост для популяризации.

Глава 2

ПОТЕНЦИАЛ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ТЕЛ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Притяжение большинства двумерных тел изучено мало и потенциалы их неизвестны. Мы устраняем некоторые пробелы в этой области. Вначале получены новые интегральные формулы, позволяющие находить потенциал в главной плоскости однородных двумерных тел. Затем решаем ряд конкретных задач для пластин разной формы. Среди них однородные круглые и эллиптические диски.

§ 2.1. Новые интегральные формулы

На плоскости Ox_1x_2 дано однородное (плотности σ) двумерное тело, ограниченное контуром L. По определению, ньютоновский потенциал такого тела в пространственной точке (x_1, x_2, x_3) даётся двойным интегралом

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = G\sigma \iint \frac{dx_1' dx_2'}{D}, \tag{2.1}$$

где

$$D = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + x_3^2} \tag{2.2}$$

— расстояние между испытуемой точкой и точкой интегрирования (x_1', x_2').

В этой главе рассматривается случай, когда испытуемая точка находится в *плоскости самого тела* и

$$D = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}. \tag{2.3}$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} \frac{x_1' - x_1}{D} + \frac{\partial}{\partial x_2'} \frac{x_2' - x_2}{D} = \frac{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}{D^3} = \frac{1}{D}, \tag{2.4}$$

заменим $1/D$ в интеграле (2.1). Применяя затем формулу Грина для плоских тел[1], приведём указанный двойной интеграл (2.1) к контурному по границе тела L

$$\varphi(x_1, x_2) = G\sigma \oint \frac{(x_1' - x_1)\, dx_2' - (x_2' - x_2)\, dx_1'}{D}. \tag{2.5}$$

[1] $\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dS = \oint\limits_L P dx_1 + Q dx_2.$

Но как видно из рис. 3,

$$\begin{aligned} &(a) \qquad 2dS = (x_1' - x_1)\,dx_2' - (x_2' - x_2)\,dx_1', \\ &(b) \qquad \quad = dL' \cos\delta \cdot D, \\ &(c) \qquad \quad = D^2 d\theta, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где dS — площадь заштрихованного малого треугольника с основанием $dL' \cdot \cos\delta$, а δ есть угол между нормалью к элементу контура dL' и направлением, задаваемым отрезком D; он отсчитывается от указанной нормали и не может быть тупым. Заметим, что угол δ есть функция от положения точки интегрирования на контуре фигуры и с изменением положения этой точки может изменяться сложным образом. Поэтому δ носит у нас вспомогательный характер, и в качестве переменной интегрирования удобнее выбрать угол θ (см. рис. 3).

С учётом (2.6*a*), формулу (2.5) приводим к виду

$$\varphi\,(x_1, x_2) = G\sigma \oint \cos\delta\, dL'. \tag{2.7}$$

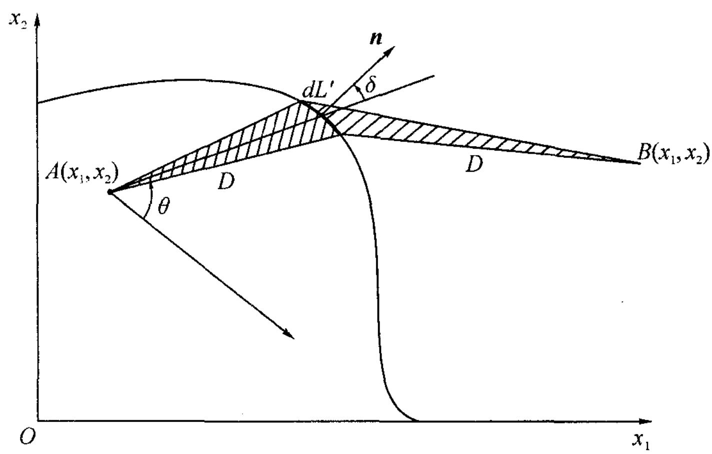


Рис. 3. Часть контура двумерного тела. δ — угол между внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к элементу длины контура dL' и направлением, задаваемым отрезком D. Показаны случаи внутренней и внешней испытуемой точки

З а д а ч а 2.1. *Интегрирование в формуле* (2.7) *проводится по контуру фигуры. В практическом отношении эта формула заметно проще исходной* (2.1), *и возникает вопрос: нельзя ли вывести аналогичную формулу для пространственного потенциала, когда рассматриваются точки и вне главной плоскости тела, т. е. когда D дано* (2.2).

Решение. Увы! При выходе точки из плоскости тела для величины обратного расстояния $\frac{1}{D}$ вместо простого равенства (2.4) получается неудобоваримое кубичное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} \frac{x_1' - x_1}{D} + \frac{\partial}{\partial x_2'} \frac{x_2' - x_2}{D} = \frac{1}{D} + \frac{x_3^2}{D^3}, \tag{2.8}$$

что не позволяет получить простую интегральную формулу для пространственного случая. ▼

На практике основную формулу (2.7) можно видоизменять. Так, с учётом (2.6*c*), потенциал *во внутренней точке тела* даётся определённым интегралом

$$\varphi_{\text{внутр}}(x_1, x_2) = G\sigma \int_0^{2\pi} D\, d\theta. \tag{2.9}$$

Для случая внешней точки формула (2.7) принимает вид

$$\varphi_{\text{внешн}}(x_1, x_2) = G\sigma \int_{\theta_1}^{\theta_2} (D_2 - D_1)\, d\theta, \tag{2.10}$$

где углы θ_1 и θ_2 определяют направление касательных к контуру, проведённых из испытуемой точки. Все обозначения ясны из рис. 4.

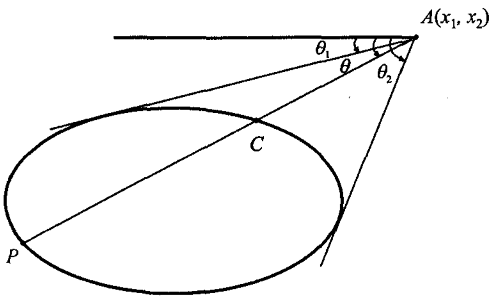


Рис. 4. К нахождению потенциала двумерного тела во внешней точке. $AP = D_2$, $AC = D_1$

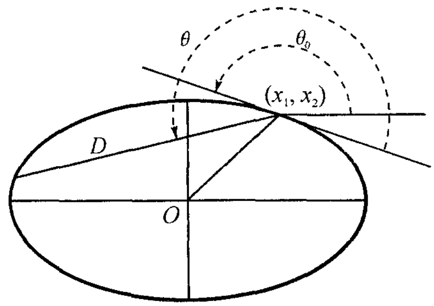


Рис. 5. Геометрическая схема для вычисления потенциала в точке границы плоского тела

Наконец, потенциал *в точке на контуре самого тела* даётся интегралом

$$\varphi_{\text{гран}}(x_1, x_2) = G\sigma \int_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0} D d\theta, \tag{2.11}$$

где угол θ_0 задаёт направление касательной к контуру в пробной точке (рис. 5). Подчеркнём: пробная и переменная точки интегрирования обе находятся теперь на контуре фигуры.

Формула (2.7) была получена в нашей монографии [21]. По виду она хотя и напоминает выражение (1.11), но из него отнюдь не следует. Поэтому (2.7) нельзя считать двумерным аналогом формулы Гаусса. К новым следует отнести и следствия из (2.7) — формулы (2.9), (2.10) и (2.11) [2]. Все они предназначены для нахождения потенциалов однородных плоских тел в точках главной плоскости.

Рассмотрим некоторые задачи на применение данного метода.

§ 2.2. Круглый диск

Для круглого диска радиусом R потенциал на границе, согласно (2.7), равен постоянной

$$\varphi_{\text{диска}}(R) = 4G\sigma R. \tag{2.12}$$

[2] По Тодхантеру ([46], § 1474), Плана вычислял притяжение от колечка и от круглого диска. Однако в отличии от наших исследований, общий подход для двумерных тел Планой не был разработан.

Задача 2.2. *Получить результат* (2.12) *с помощью формулы* (2.7).

Решение. Введём центральный полярный угол θ (см. рис. 131), так что $dL' = R\,d\theta'$. Из этого рисунка очевидно, что $\delta = \pi/2 - \xi$, причём $\xi = (\theta' - \theta)/2$. Интеграл (2.7) приводится к виду

$$\varphi_{\text{диска}}(R) = 2G\sigma R \int\limits_0^\pi \sin\xi\, d\xi = 4G\sigma R, \tag{2.13}$$

откуда и получаем искомый результат. ▼

Задача 2.3. *Проверить результат* (2.12) *с помощью формулы* (2.11).

Решение. Взгляните на рис. 6. В случае круга можно положить $\theta_0 = 0$, и тогда интеграл (2.11) примет вид

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = G\sigma \int\limits_0^\pi D d\theta. \tag{2.14}$$

Вводя новый угол $x = \frac{\pi}{2} - \theta$, имеем для $D = 2R\cos x = 2R\sin\theta$. Тогда (2.14) приводится к уже известному интегралу (2.13), что и доказывает требуемое. ▼

Задача 2.4. *С помощью интегральной формулы* (2.7), *а также её аналогов* (2.9) *и* (2.10) *найти потенциал однородного круглого диска во внутренних и внешних точках его главной плоскости. Результаты сравнить соответственно с* (9.61) *и с* (9.60), *полученных из общей формулы для эллиптического диска.*

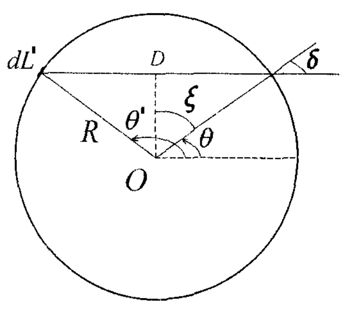


Рис. 6. К задаче 2.3.

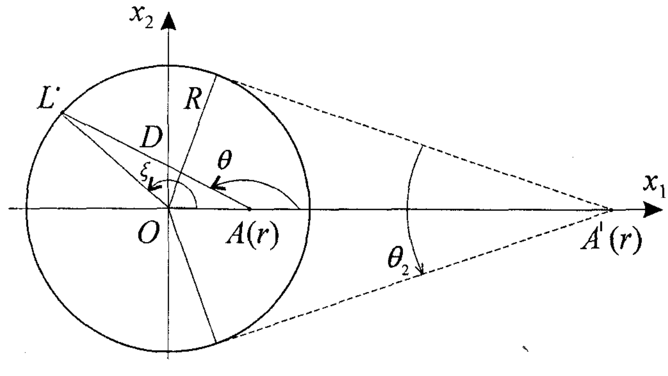


Рис. 7. К расчёту внутреннего (точка A) и внешнего (точка A') потенциала однородного круглого диска

Решение. Получим вначале с помощью (2.9) потенциал во внутренней точке $A\,(r)$, см. рис. 7. В треугольнике OAL введён вспомогательный центральный угол ξ и $AL = D$, причём

$$D = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\xi}.$$

Очевидно,

$$\sin\xi = \frac{D}{R}\sin\theta, \tag{2.15}$$

так что после исключения D формула (2.9) принимает вид

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = G\sigma R \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\xi}{\sin\theta} d\theta. \tag{2.16}$$

С другой стороны, после возведения в квадрат соотношения (2.15) и решения квадратного уравнения имеем

$$\cos\xi = k\sin^2\theta + \cos\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta},\ k = \frac{r}{R} \leqslant 1.$$

Здесь знак «+» оставлен по очевидной причине: угол ξ не может быть меньше угла θ. Следовательно,

$$\sin\xi = \sin\theta\left(k\cos\theta + \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right). \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.16), в итоге получим *потенциал однородного круглого диска во внутренней точке*:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{диска}}(r) &= G\sigma R\int\limits_0^{2\pi}\left(k\cos\theta + \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)d\theta = \\ &= 4G\sigma R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = 4G\sigma R E\left(\frac{r}{R}\right).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь $\mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right)$ — *полный эллиптический интеграл второго рода*[3].

Для *внешней* точки $A'(x_1, x_2)$ воспользуемся формулой (2.7) и рис. 7. Из треугольника $OA'K$ находим

$$\sin\delta = \frac{r}{D}\sin\xi,$$

поэтому

$$\cos\delta = \frac{\cos\xi - k}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\xi}}, \qquad k = \frac{R}{r} \leqslant 1. \tag{2.19}$$

Имеем

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 2G\sigma R\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos\xi - k}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\xi}}\,d\xi. \tag{2.20}$$

На интервале интегрирования числитель меняет знак, но это не мешает вычислить сам интеграл I:

$$I = \left[\frac{1}{k(1+k)}\left\{(1-k^2)\,\Pi\left[\tilde{k}^2, \tilde{k}\right] - (1+k^2)\,\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) + \frac{2k}{1+k}\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)\right\}\right],$$

где

$$\tilde{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \leqslant 1.$$

Но так как полный эллиптический интеграл третьего рода в данном случае равен

$$\Pi\left[\tilde{k}^2, \tilde{k}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(1-\tilde{k}^2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}\left(\tilde{k}\right)}{1-\tilde{k}^2} = (1+k)\left[\frac{2\mathrm{E}(k)}{(1-k)^2} - \mathrm{K}(k)\right], \tag{2.21}$$

[3] Определение полных эллиптических интегралов дано в (7.23).

то с учётом известных формул преобразования эллиптических интегралов

$$\mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)\,\mathrm{K}(k)\ ; \quad \mathrm{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{2\,\mathrm{E}(k) - \left(1-k^2\right)\mathrm{K}(k)}{1+k}, \tag{2.22}$$

в итоге находим *потенциал однородного круглого диска во внешней точке*:

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma r\left\{\mathrm{E}\left(\frac{R}{r}\right) - \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right)\right\}, \quad \frac{r}{R} \geqslant 1, \tag{2.23}$$

где $\mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right)$ — *полный эллиптический интеграл первого рода.*

Выражения (2.18) и (2.23) совпадают соответственно с (9.61) и (9.60). ▼

Отметим, что далее будут получены и более общие выражения потенциала однородного круглого диска: так, в (2.57) или (2.75) приводится формула, справедливая уже во всех точках *главной плоскости*; ещё более общий потенциал круглого диска *во всём пространстве* дан формулами (9.56) и (9.68).

Задача 2.5. *Однородный круглый диск и однородный шар имеют одинаковые массы M и радиусы R. Из центра какого из этих тел удалить пробную точку на край фигуры (в другом варианте задачи — удалить на бесконечность) будет труднее?*

Решение. По определению, работа по удалению точки из центра на край фигуры равна разности соответствующих значений потенциала $\varphi(0) - \varphi(R)$. Потенциалы на краю и в центре диска, согласно формулам (2.12) и (2.18), будут таковы

$$\varphi_{\text{диска}}(R) = 4G\sigma R = \frac{4}{\pi}\frac{MG}{R}, \quad \varphi_{\text{диска}}(0) = 2\pi G\sigma R = \frac{2MG}{R}. \tag{2.24}$$

Для шара же, согласно (6.36), имеем

$$\varphi_{\text{шара}}(R) = \frac{MG}{R}, \quad \varphi_{\text{шара}}(0) = \frac{3}{2}\frac{MG}{R}, \tag{2.25}$$

и работа по перенесению материальной точки из центра на край диска и шара соответственно будет равна

$$\frac{2MG}{R}\left(1-\frac{2}{\pi}\right), \quad \frac{MG}{2R}. \tag{2.26}$$

Отношение этих работ по переносу материальной точки оказывается больше единицы и равно 1.454. Во втором варианте задачи легко видеть, что при удалении точки на бесконечность искомое соотношение работ хотя несколько и уменьшится, но останется при этом всё же больше единицы (конкретно, оно равно 4/3). ▼

В соответствии с общей теорией, у нас потенциал диска *всюду непрерывен*. Но сила притяжения (а в компланарном случае эта сила — центральная) терпит *разрыв* на границе диска. Действительно, дифференцируя выражения (2.18) и (2.23), находим радиальную компоненту силы в точках главной плоскости диска

$$\frac{F_r}{4G\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)}{k}, & k = \dfrac{r}{R} \leqslant 1, \\ \mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)\,, & k = \dfrac{R}{r} \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

Очевидно, на границе диска модуль эллиптического интеграла обращается в единицу $k = 1$, в результате чего сам интеграл $\mathrm{K}(1)$ расходится. Вследствие этого возникает разрыв

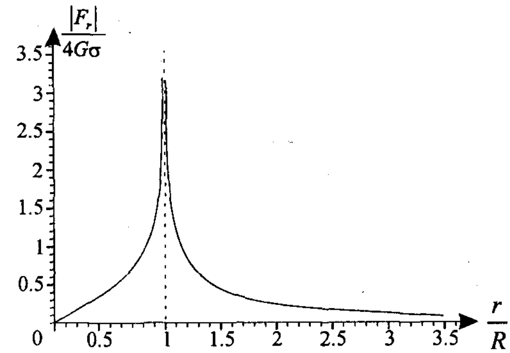


Рис. 8. Зависимость силы притяжения однородного круглого диска от нормированного расстояния до испытуемой точки. На краю диска при $\frac{r}{R} = 1$ для этой силы существует разрыв

градиента потенциала, т. е. радиальной компоненты силы притяжения диска. График силы F_r см. на рис. 8.

Задача 2.6. *Однородный круглый диск радиусом R рассечён по диаметру. Найти силу притяжения половинок диска.*

Решение Пусть ось Ox_2 направлена перпендикулярно линии рассечения. Воспользовавшись выражением потенциала полного диска во внутренней точке (2.18), находим силу на единицу массы ($k = \frac{r}{R} \leqslant 1$)

$$F_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 4G\sigma R\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial k}\frac{x_2}{r} = 4G\sigma R x_2 \frac{\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)}{r^2}. \tag{2.28}$$

Домножая F_2 на σ и интегрируя по верхней половине диска, в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned} F &= 4G\sigma^2R^2\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int\limits_0^1 [\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)]\,dk = \\ &= 8G\sigma^2R^2\int\limits_0^1 [\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)]\,dk. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Так как

$$\int\limits_0^1 \mathrm{E}(k)\,dk = \frac{1}{2} + G_K; \qquad \int\limits_0^1 \mathrm{K}(k)\,dk = 2G_K, \tag{2.30}$$

где

$$G_K \approx 0.915966 \tag{2.31}$$

— известная постоянная Каталана[4], то в итоге искомая сила будет равна

$$F = -4G\sigma^2R^2(2G_K - 1). \tag{2.32}$$

Эту же силу можно записать в виде притяжения двух материальных точек с массой $M_{\text{полудиска}}$

$$F = -\frac{GM^2_{\text{полудиска}}}{d^2}, \tag{2.33}$$

[4] Индекс «K» введён здесь для отличия от гравитационной постоянной.

где $d \approx 0.861R$ — расстояние между точками. Расстояние же между центрами масс полудисков несколько меньше и равно $\frac{8}{3\pi}R \approx 0.849R$. Это и неудивительно, ведь центр масс в общем и не должен совпадать с центром притяжения тел. ▼

Обратим внимание: два концентрических однородных круглых диска с разными радиусами при одинаковой их массе *не будут притягивать внешнюю точку с одинаковой силой*. Другими словами, в отличие от шара, плоский круглый диск уже не притягивает внешнюю точку так, как если бы вся масса была собрана в его центре. В этом факте скрыт глубокий смысл: *чтобы создать тело, эквигравитирующее диску, следует выйти из плоскости этого диска!*, см. § 9.5. То же самое относится, как мы убедимся ниже, и к притяжению тонкого кругового кольца.

Далее рассмотрим примеры другого рода, когда на границе плоских фигур есть особые точки (изломы), в которых угол δ становится неопределённым. Однако сразу заметим, что наличие особых точек на контуре фигуры не влияет на конечный результат и потенциал всё равно находится нами в конечном виде.

§ 2.3. Сектор круглого диска

Дан сектор OBC однородного круглого диска радиуса R (рис. 9). Расстояние OP обозначим через $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а расстояние между пробной точкой P и точкой контура L' , как обычно, через D. Согласно применяемым формулам, полный потенциал сектора даётся теперь вкладами от трёх сторон этого сектора. Уравнение отрезка OB есть $x_2' = \operatorname{tg}\alpha\, x_1'$. Тогда вклад в контурный интеграл, а значит, и в потенциал от отрезка OB, согласно формуле (2.5), будет равен

$$\varphi_{OB} = G\sigma\left(x_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha\right)\int\limits_0^R \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - 2r'l + r^2}}, \tag{2.34}$$

где

$$l = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha. \tag{2.35}$$

Элементарное вычисление даёт

$$\varphi_{OB}\left(x_1, x_2\right) = G\sigma\left(x_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha\right)\ln\frac{\sqrt{R^2 - 2Rl + r^2} + R - l}{r - l}. \tag{2.36}$$

Вклад в потенциал от стороны OC получим из (2.36) изменением общего знака у φ_{OB} и одновременной заменой $\alpha \to \pi - \alpha$:

$$\varphi_{OC}\left(x_1, x_2\right) = G\sigma\left(x_2\cos\alpha + x_1\sin\alpha\right)\ln\frac{\sqrt{R^2 - 2Rl' + r^2} + R - l'}{r - l'}, \tag{2.37}$$

где

$$l' = \underset{\alpha\to\pi-\alpha}{l} = -x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha. \tag{2.38}$$

Рассмотрим, наконец, вклад в контурный интеграл от дуги круга BC. Для точки интегрирования вводим полярные координаты

$$x_1' = R\cos\theta', \quad x_2' = R\sin\theta'. \tag{2.39}$$

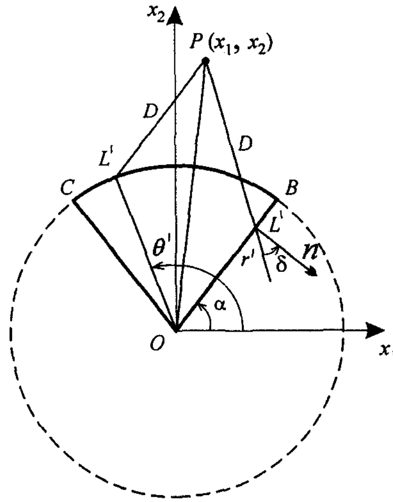


Рис. 9. Сектор круглого диска OBC с углом полураствора $\frac{\pi}{2} - \alpha$, причём $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Испытуемая точка $P(x_1, x_2)$ может быть как внешней, так и внутренней по отношению к сектору. Точка интегрирования на контуре обозначена через L'

Тогда (2.5) даёт

$$\varphi_{BC}(x_1, x_2) = G\sigma R \int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(R\cos\theta' - x_1)\cos\theta' + (R\sin\theta' - x_2)\sin\theta'}{D} d\theta', \tag{2.40}$$

или

$$\varphi_{BC}(x_1, x_2) = G\sigma R \int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(R - x_1\cos\theta' - x_2\sin\theta')\, d\theta'}{\sqrt{R^2 - 2R(R - x_1\cos\theta' + x_2\sin\theta') + r^2}}. \tag{2.41}$$

Вместо θ' вводим другую переменную x

$$x_1\cos\theta' + x_2\sin\theta' = r\cos x, \tag{2.42}$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = \theta' - \theta_0, \quad \sin\theta_0 = \frac{x_2}{r}. \tag{2.43}$$

Тогда интеграл (2.41) запишем в виде

$$\varphi_{BC}(x_1, x_2) = G\sigma I, \tag{2.44}$$

где

$$I = R \int\limits_{\alpha-\theta_0}^{\pi-\alpha-\theta_0} \frac{(R - r\cos x)\, d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos x}}. \tag{2.45}$$

Целесообразно разбить I на несколько интегралов и представить пределы в них так, чтобы интегралы приводились к стандартным эллиптическим (процедура, требующая много внимания[5]):

[5] А именно, необходимо следить за тем, чтобы границы интервалов интегрирования по x не выходили за пределы от 0 до π, а по углу α выполнялось неравенство $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$I = R\int\limits_0^{\pi} \frac{(R - r\cos x)\,dx}{\sqrt{a - b\cos x}} - \mathrm{signum}\,(\alpha + \theta_0)\,R \int\limits_0^{\alpha+\theta_0} \frac{(R + r\cos x)\,dx}{\sqrt{a + b\cos x}} - \\ -\mathrm{signum}\,(\alpha - \theta_0)\,R \int\limits_0^{\alpha-\theta_0} \frac{(R - r\cos x)\,dx}{\sqrt{a - b\cos x}}, \tag{2.46}$$

причём здесь

$$a = R^2 + r^2,\ b = 2Rr, \tag{2.47}$$

а функция

$$\mathrm{signum}\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

Находим

$$\varphi_{BC}\,(x_1, x_2) = G\sigma\frac{R-r}{R+r}\left\{(R+r)\left[\mathrm{K}\,(k) - \mathrm{F}\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}, k\right) - \frac{R+r}{R-r}\mathrm{E}\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}, k\right)\right] + \right. \\ \left. + (R-r)\,\Pi\left[k^2, k\right] - \mathrm{signum}\,(\alpha - \theta_0)\left[(R+r)\,\mathrm{F}\,(\psi, k) + (R-r)\,\Pi\left[\psi, k^2, k\right]\right]\right\}, \tag{2.49}$$

где модуль один и тот же

$$k = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}, \tag{2.50}$$

а

$$\sin\psi = \frac{R+r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha - \theta_0)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta_0)}}. \tag{2.51}$$

Заметим, что в (2.49) от обоих интегралов третьего рода можно избавиться в силу равенства

$$\Pi\left[\psi, k^2, k\right] = \frac{1}{1-k^2}\mathrm{E}\,(\psi, k) - \frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}, \tag{2.52}$$

выполняющегося и при $\psi = \frac{\pi}{2}$.

В целом, *потенциал сектора однородного круглого диска во внешней и во внутренней компланарной точке* этой фигуры оказывается равным

$$\varphi_{\text{сектора}}\,(x_1, x_2) = \varphi_{OB}\,(x_1, x_2) + \varphi_{OC}\,(x_1, x_2) + \varphi_{BC}\,(x_1, x_2)\,, \tag{2.53}$$

причём φ_{OB} дано в (2.36), φ_{OC} — в (2.37), а φ_{BC} из (2.49). На рис. 10 показаны кривые равного потенциала сектора круга.

Подчеркнём, что формула (2.53) должна выполняться при любом угле раствора сектора, в том числе и для секторов с отрицательным α, когда угол полураствора превышает $\pi/2$. Эквипотенциали для одного из таких секторов показаны на рис. 11.

Рассмотрим предельный переход от сектора к полному круглому диску. Для этого в полученных выше формулах полагаем

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = r. \tag{2.54}$$

Тогда

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \theta_0 = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{2.55}$$

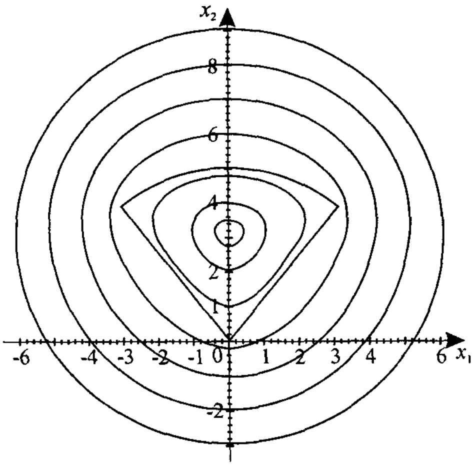


Рис. 10. Семь эквипотенциалей для сектора однородного круга с углом полураствора $\frac{3\pi}{14}$. Нормированный на $G\sigma R$ потенциал сектора убывает по мере удаления кривой от точки его максимума и имеет на них значения: 2.8; 2.728; 2.254; 1.174; 0.868; 0.69; 0.572

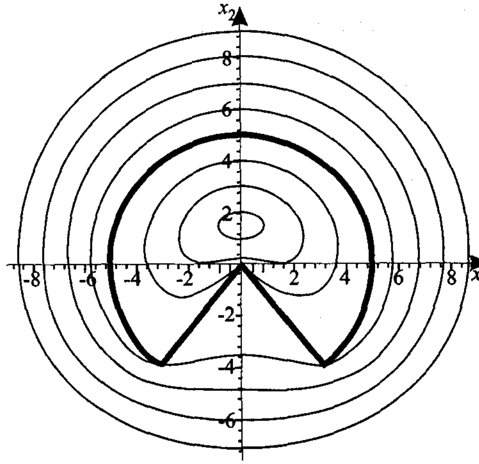


Рис. 11. Кривые равного потенциала для сектора однородного круга с углом полураствора $\frac{11\pi}{14}$. Сектор показан жирной линией. Нормированный на $G\sigma R$ потенциал убывает по мере удаления эквипотенциали от точки максимума потенциала. Кривые соответствуют величине потенциала: 5.34; 5.108; 4.624 (весьма характерная эквипотенциаль!); 2.57; 2.09; 1.772; 1.542

Таким образом, двучлены перед логарифмами в φ_{OB} и φ_{OC} тождественно равны нулю и, следовательно, в данном предельном переходе вклады от сторон сектора исчезают (это ясно и из геометрических соображений, так как сектор подобно вееру раскрывается в полный круглый диск):

$$\varphi_{OB} = \varphi_{OC} = 0. \tag{2.56}$$

Оставшийся член в φ_{BC} из (2.49) и даёт вклад в потенциал всего диска; как можно убедиться, искомое выражение будет таким

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 2\,G\sigma\frac{R-r}{R+r}\left\{(R+r)\,\mathrm{K}\,(k) + \frac{R-r}{1-k^2}\mathrm{E}\,(k)\right\}, \tag{2.57}$$

где модуль k из (2.50). Это и есть *потенциал полного однородного круглого диска в любой (как внешней, так и внутренней) точке главной плоскости этого тела*[6]. Формула (2.57) объединяет выражения (2.18) и (2.23) потенциала круглого диска внутри и вне его.

З а д а ч а 2.7. *Убедиться в том, что из* (2.57) *во внутренних точках диска следует потенциал* (2.18), *а во внешних точках — потенциал* (2.23).

З а д а ч а 2.8. *Из формулы* (2.53), *полагая* $\alpha = 0$, *получить потенциал половинки однородного круглого диска в любой точке его главной плоскости. Результат сравнить с* (2.79).

Обращаясь к формуле для потенциала сектора (2.53), рассмотрим отдельно следующий вариант задачи.

[6] Эквивалентная этой формула для потенциала однородного круглого диска в компланарной точке будет получена также в (2.75).

§ 2.4. Потенциал сектора в точках дуги

Утверждение: потенциал сектора в точках дуги BC равен

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{сектора}}(R,\theta) = G\sigma R\left\{\sin(\theta-\alpha)\ln\frac{1+\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}+\right.\\ \left.+\sin(\theta+\alpha)\ln\frac{1+\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}}+4-2\cos\frac{\theta-\alpha}{2}-2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\right\},\end{gathered} \tag{2.58}$$

где θ — угол полярных координат испытуемой точки

$$x_1 = R\cos\theta,\quad x_2 = R\sin\theta,\quad r = R,\quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi-\alpha. \tag{2.59}$$

Доказательство. Подставляя x_1 и x_2 из (2.59) в l и l' из (2.35) и (2.38), находим

$$l = R\cos(\alpha-\theta),\quad l' = -R\cos(\alpha+\theta'). \tag{2.60}$$

Тогда из (2.36) и (2.37) получим вклады на испытуемую точку от отрезков OB и OC:

$$\begin{gathered}\varphi_{OB} = G\sigma R\sin(\theta-\alpha)\ln\frac{1+\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}};\\ \varphi_{OC} = G\sigma R\sin(\theta+\alpha)\ln\frac{1+\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}}.\end{gathered} \tag{2.61}$$

Однако вклад в потенциал от дуги BC в точку, расположенную на самой этой дуге, найти из выражения (2.49) непросто[7]. Поэтому обратимся прямо к интегралу (2.44). Из (2.43) находим $\theta_0 = \theta$, и тогда

$$\varphi_{BC}(\theta) = \frac{G\sigma R}{\sqrt{2}}\int\limits_{\alpha-\theta}^{\pi-\alpha-\theta}\sqrt{1-\cos x}\,dx,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha. \tag{2.62}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\varphi_{BC}(\theta) = G\sigma R\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\mathrm{E}(\psi,k)-\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]_{\alpha-\theta}^{\pi-\alpha-\theta} =\\ = 2G\sigma R\left\{2-\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sqrt{2[1+\cos(\alpha+\theta)]}}+\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{2[1-\cos(\alpha-\theta)]}}\right\},\end{gathered} \tag{2.63}$$

т. е.

$$\varphi_{BC}(\theta) = 2G\sigma R\left(2-\cos\frac{\theta-\alpha}{2}-\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\right). \tag{2.64}$$

Собирая вместе (2.61) и (2.64), мы и получим искомое выражение (2.58). ■

[7] В точках дуги $k \to 1$, так что эллиптические интегралы $\mathrm{F}(\psi,1) = \infty$ расходятся; вследствие этого в (2.49) имеем неопределённость $0\cdot\infty$, раскрыть которую довольно сложно.

Проверка формулы (2.58): потенциал на границе полного круглого диска, равный (2.12), действительно получается из этой формулы при $\alpha = -\pi/2$ (зависимость от θ исчезает!).

Задача 2.9. *Доказать, что потенциал сектора в точках правого и левого граничных отрезков OB и OC даётся выражением*

$$\varphi_{сектора}(r) = G\sigma \left\{ r \sin 2\alpha \ln \frac{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos 2\alpha + r^2} + R - r\cos 2\alpha}{r(1-\cos 2\alpha)} + \right.$$
$$\left. + \frac{R-r}{R+r}\left[(R+r)\,\mathrm{F}(\psi_1, k) + (R-r)\,\Pi\left[\psi_1, k^2, k\right]\right] \right\}, \tag{2.65}$$

где r — расстояние до испытуемой точки вдоль OB (или OC), модуль k из (2.50), *а угол ψ_1 находится из*

$$\sin\psi_1 = \frac{R+r}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\alpha}}. \tag{2.66}$$

Пояснение к задаче. В точках отрезка OB, где $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\alpha$, вклад (2.36) от самого этого отрезка $\varphi_{OB} = 0$, а $l' = r\cos 2\alpha$. Кроме того, $\psi_2 = 0$, а ψ_1 даётся выражением (2.66). Потенциал (2.65) есть сумма φ_{OC} из (2.37) и φ_{BC} из (2.49).

В частности, потенциал в центральном углу сектора равен

$$\varphi_{сектора}(0) = G\sigma R(\pi - 2\alpha), \tag{2.67}$$

а в левой или правой угловых точках сектора C и B

$$\varphi_{сектора}(C) = \varphi_{сектора}(B) = G\sigma R\left[\sin 2\alpha \ln\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} + 2 - 2\sin\alpha\right]. \tag{2.68}$$

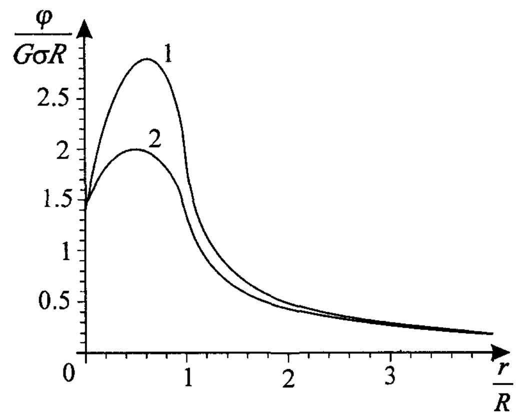


Рис. 12. Нормированный потенциал сектора однородного круглого диска радиуса R с углом полураствора $\frac{3\pi}{14}$ вдоль оси его симметрии (кривая 1) и вдоль граничных полупрямых OB или OC (кривая 2)

Проверка: *потенциал на границе полного круглого диска* (2.12) *действительно получается из формулы* (2.68) при $\alpha = -\pi/2$. ▼

Изменение потенциала вдоль граничных полупрямых сектора показаны на рис. 12.

§ 2.5. Сегмент круглого диска

Дан сегмент однородного круглого диска (рис. 13). Начало системы координат совместим опять с центром образующего круга O. Для нахождения потенциала сегмента в произвольной точке $p\,(x_1, x_2)$ воспользуемся формулами (2.5) и (2.7). Вклад в контурный интеграл от отрезка AB, согласно (2.5), оказывается равным

$$\varphi_{AB} = G\sigma\,(x_2 - R\sin\alpha) \int\limits_{-R\cos\alpha}^{R\cos\alpha} \frac{dx_1'}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - R\sin\alpha)^2}}, \tag{2.69}$$

или же $\left(r^2 = x_1^2 + x_2^2\right)$

$$\varphi_{AB} = G\sigma\,(x_2 - R\sin\alpha)\ln\frac{R\cos\alpha - x_1 + \sqrt{R^2 + r^2 - 2R\,(x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha)}}{-R\cos\alpha - x_1 + \sqrt{R^2 + r^2 + 2R\,(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)}}. \tag{2.70}$$

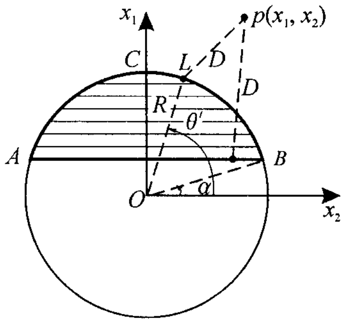


Рис. 13. Сегмент круглого диска (заштрихован). Обозначения те же, что и на рис. 9

Для нахождения же вклада в контурный интеграл от дуги круга воспользуемся формулой (2.7). Этот вклад $\varphi_{\text{дуги}}\,(x_1, x_2)$, как и в случае сектора, оказывается в точности равен выражению (2.49).

Итак, *потенциал сегмента однородного круглого диска во внешней и внутренней компланарной точке* (x_1, x_2) даётся общим выражением

$$\varphi_{\text{сегмента}}\,(x_1, x_2) = \varphi_{AB}\,(x_1, x_2) + \varphi_{\text{дуги}}\,(x_1, x_2)\,, \tag{2.71}$$

причём компонента φ_{AB} дана в (2.70), а $\varphi_{\text{дуги}}$ берётся из формулы (2.49). На рис. 14 показаны эквипотенциали плоского сегмента, рассчитанные по формуле (2.71). Некоторые из этих кривых находятся внутри пластины, другие принадлежат ей лишь частично (контур фигуры не является уровенным) или полностью лежат вне её.

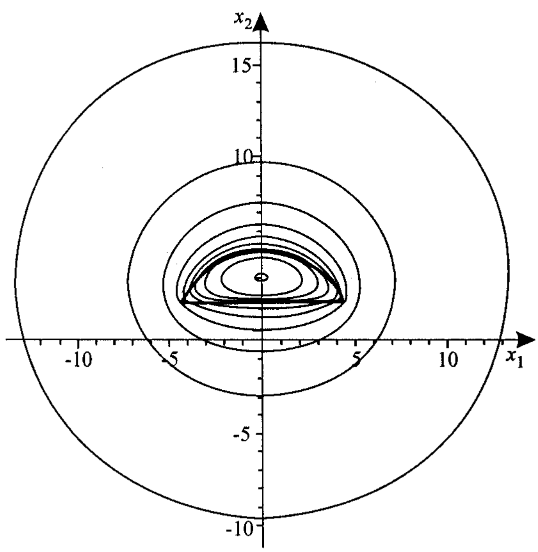


Рис. 14. Кривые равного потенциала сегмента (выделен жирной линией) однородного круга с углом полураствора $\frac{5\pi}{14}$. Потенциал нормирован на $G\sigma R$. Эквипотенциали расположены по мере убывания потенциала от точки максимума потенциала: 2.8; 2.52; 2.24; 1.96; 1.68; 1.4; 1.12; 0.84; 0.56; 0.28

Интересным оказывается и предельный переход от сегмента к полному круглому диску.

Полагаем[8]

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = r. \tag{2.72}$$

Тогда

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{2.73}$$

Для (2.69) имеем поэтому

$$\varphi_{AB} = 0, \tag{2.74}$$

а для (2.49), с учётом (2.72), находим

$$\varphi_{\text{диска}} = 2\,G\sigma\frac{R-r}{R+r}\left\{(R+r)\,\mathrm{K}\,(k) + \frac{(R-r)}{1-k^2}\mathrm{E}\,(k)\right\}, \tag{2.75}$$

причём модуль k дан в (2.50).

Но выражение (2.75), как мы уже знаем (сравните с формулой (2.57)!), и даёт *потенциал однородного круглого диска в любой внешней или же внутренней точках его главной плоскости.*

Задача 2.10. *Найти потенциал половинки однородного круглого диска в любой точке его главной плоскости.*

Решение. Полагая в (2.71) $\alpha = 0$, находим, что вклад в потенциал от диаметрального отрезка, ограничивающего половинку диска, есть

$$\varphi_{AB}\,(x_1, x_2) = G\sigma x_2 \ln\frac{\sqrt{R^2+r^2-2x_1R}+R-x_1}{\sqrt{R^2+r^2+2x_1R}-R-x_1}, \tag{2.76}$$

а вклад от половинки окружности (см. (2.49))

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{дуги}}\,(x_1, x_2) = G\sigma\frac{R-r}{R+r}\left\{(R+r)\left[\mathrm{K}\,(k) - \mathrm{F}\left(\frac{\theta_0}{2}, k\right) - \frac{R+r}{R-r}\mathrm{E}\left(\frac{\theta_0}{2}, k\right)\right] + \right.\\ \left. + (R-r)\,\Pi\left[k^2, k\right] + \left[(R+r)\,\mathrm{F}\,(\psi, k) + (R-r)\,\Pi\left[\psi, k^2, k\right]\right]\right\},\end{gathered} \tag{2.77}$$

где[9] модуль k дан в (2.50), а

$$\sin\theta_0 = \frac{x_2}{r}; \quad \sin\psi = \frac{R+r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\frac{x_1}{r}}{R^2+r^2-2x_1R}}. \tag{2.78}$$

Таким образом, *гравитационный потенциал половинки однородного круглого диска* есть сумма (2.76) и (2.77):

$$\varphi_{\text{половинка диска}}\,(x_1, x_2) = \varphi_{AB}\,(x_1, x_2) + \varphi_{\text{дуги}}\,(x_1, x_2)\,. \tag{2.79}$$

---

[8] Заметим, что следует считать именно $x_1 = 0$, чтобы не нарушать важное неравенство $\alpha + \theta_0 \geqslant 0$, см. примечание 5.

[9] Напомним: определение неполных эллиптических интегралов дано в (6.23).

Интересная проверка последней формулы: переход к *потенциалу половинки однородного круглого диска* на пробную точку, расположенную на диаметре. Конкретно, рассмотрим случай внутреннего потенциала сегмента. Тогда, согласно (2.18),

$$\varphi_{\text{половинка диска}}(0, x_1) = 2G\sigma R\mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right), \quad \frac{r}{R} \leqslant 1. \tag{2.80}$$

Для перехода же от сегмента заметим, что теперь

$$x_2 = 0; \ \varphi_{AB} = 0; \ \theta_0 = 0; \ \psi = 0,$$

так что

$$\varphi_{\text{половинка диска}}(0, x_1) = G\sigma(R - x_1)\left\{\mathrm{K}(k) + \frac{R + x_1}{R - x_1}\frac{\mathrm{E}(k)}{1 - k^2}\right\}. \tag{2.81}$$

С учётом формул преобразования эллиптических интегралов (2.22), в итоге получим из (2.81) верный результат (2.80). ▼

Задача 2.11. *Рассмотреть самостоятельно случай внешней пробной точки на диаметре полудиска.*

§ 2.6. Пластина треугольной формы

Дана однородная (плотности σ) пластина в форме равностороннего треугольника со стороной a (рис. 15). Начало системы координат поместим в главную геометрическую точку треугольника O.

Потенциал пластины в точке $P(x_1, x_2)$ (безразлично, внешней или внутренней по отношению к треугольной границе) находим с помощью основной формулы (2.7). В соответствии с ней, полный потенциал пластины будет состоять из трёх членов (вкладов от каждой из сторон). Из рисунка следует, что

$$\cos\delta = \frac{x_2 + \frac{h}{3}}{D}, \quad D = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \left(x_2 + \frac{h}{3}\right)^2}, \tag{2.82}$$

где $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника. Тогда искомый вклад в потенциал от стороны треугольника AB равен

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} &= G\sigma\left(x_2 + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{dx_1'}{D} = \\ &= G\sigma\left(x_2 + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)\ln\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2} - x_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{a}{2} - x_1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2} + x_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{a}{2} - x_1}.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Вклад в потенциал на пробную точку от двух других сторон однородного равностороннего треугольника можно теперь получить, опираясь на соображения о его геометрической симметрии и на выведенную формулу (2.83). Используем красивый приём, связанный с поворотом исходной системы координат. А именно, чтобы найти вклад в потенциал от стороны BC, сделаем поворот системы координат Ox_1x_2 на угол $\frac{2\pi}{3}$ и перейдём к новым переменным Ou_1u_2

$$x_1 = -\frac{u_1}{2} - \frac{u_2\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{u_1\sqrt{3}}{2} - \frac{u_2}{2}. \tag{2.84}$$

Подставим затем эти формулы в выражение (2.83) и вновь переобозначим $u_1 = x_1$ и $u_2 = x_2$. Тогда из формулы (2.83) получим требуемое выражение

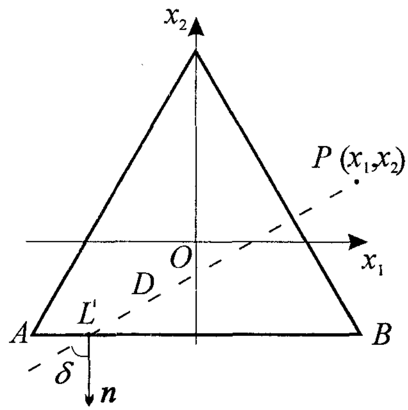


Рис. 15. К нахождению потенциала треугольной пластины

$$\varphi_{BC} = \frac{G\sigma}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x_1\sqrt{3} - x_2\right) \times$$
$$\times \ln \frac{\sqrt{\left(a + x_1 + x_2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x_1\sqrt{3} - x_2\right)^2} + a + x_1 + x_2\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a - x_1 - x_2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x_1\sqrt{3} - x_2\right)^2} - a + x_1 + x_2\sqrt{3}}. \tag{2.85}$$

Аналогичным приёмом находим и вклад в потенциал от стороны CA. Поворот исходной системы координат Ox_1x_2 совершаем теперь на угол $\frac{4\pi}{3}$ и переходим к новым переменным Ou_1u_2

$$x_1 = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{u_1\sqrt{3}}{2} - \frac{u_2}{2}. \tag{2.86}$$

Подставляя затем (2.86) в (2.83), после переобозначений $u_1 = x_1$ и $u_2 = x_2$ находим

$$\varphi_{CA} = \frac{G\sigma}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x_1\sqrt{3} - x_2\right) \times$$
$$\times \ln \frac{\sqrt{\left(a + x_1 - x_2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x_1\sqrt{3} - x_2\right)^2} + a + x_1 - x_2\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a - x_1 + x_2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x_1\sqrt{3} - x_2\right)^2} - a + x_1 - x_2\sqrt{3}}. \tag{2.87}$$

В итоге, *полный внешний или внутренний потенциал однородной треугольной пластины со стороной a в компланарной точке* (x_1, x_2) оказывается равным

$$\varphi_{\blacktriangle} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CA}, \tag{2.88}$$

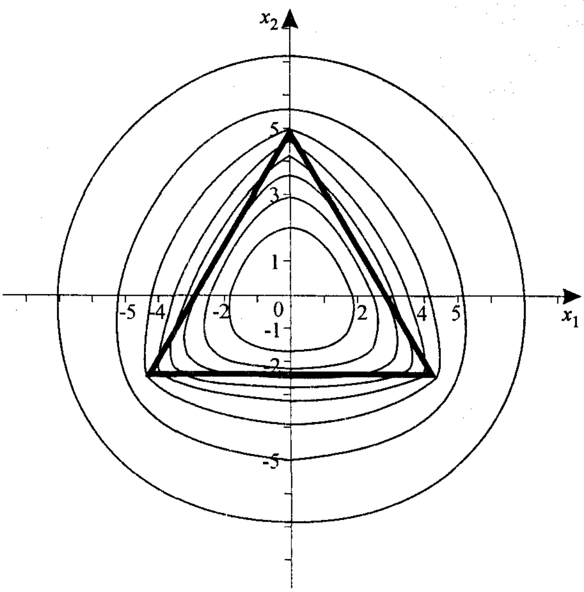


Рис. 16. Эквипотенциали однородной треугольной пластины (выделена жирной линией). Потенциал нормирован на $G\sigma R$, где $R = 5$ – радиус описанной окружности, и убывает от внутренних кривых к внешним: 3.576; 3.202; 2.828; 2.454; 2.08; 1.706; 1.332. Его максимум 3.95 совпадает с точкой O

где отдельные составляющие даны формулами (2.83), (2.85) и (2.87). Выражение (2.88) было проверено численно при расчёте кривых равного потенциала треугольной пластины (см. рис. 16).

Оказывается, потенциал данной однородной пластины имеет максимум в главной геометрической точке O равностороннего треугольника. Этот максимум мы найдём, положив в (2.88) $x_1 = 0, x_2 = 0$:

$$\varphi_\blacktriangle(0) = G\sigma a\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right). \tag{2.89}$$

Потенциал же в любой из вершин однородного равностороннего треугольника оказывается равным

$$\varphi_\blacktriangle(A) = \varphi_\blacktriangle(B) = \varphi_\blacktriangle(C) = G\sigma a\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3. \tag{2.90}$$

Таким образом, отношение потенциала в центре пластины к потенциалу в угловой точке

$$\frac{\varphi_\blacktriangle(0)}{\varphi_\blacktriangle(A)} = \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\ln\sqrt{3}} = 2.3975 \tag{2.91}$$

оказывается больше 2 и не зависит от размеров и плотности треугольной пластины.

§ 2.7. Ромбовидная пластина

Дан ромб $ADBC$, состоящий из двух равносторонних треугольников, как это показано на рис. 17.

Для решения данной задачи применим известное нам выражение потенциала однородной треугольной пластины (2.88). Очевидно, потенциал верхней части ромба ABC и есть (2.88); для нахождения же потенциала от нижнего треугольника на первом этапе начало координат перенесём в центр ромба O, для чего в потенциале треугольника сделаем замену

$x_2 \Rightarrow x_2 - \frac{h}{3}$; на втором этапе преобразований отразим верхний треугольник зеркально относительно оси Ox_2, для чего изменим знак у координаты x_2. В итоге, *потенциал ромба в любой точке его главной плоскости (как вне, так и внутри пластины)* будет равен

$$\varphi_{\diamond}(x_1, x_2) = \varphi_{BC}\left(x_1, x_2 - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) + \varphi_{CA}\left(x_1, x_2 - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) + $$
$$+\varphi_{BC}\left(x_1, -x_2 - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) + \varphi_{CA}\left(x_1, -x_2 - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), \quad (2.92)$$

где сами выражения для составляющих потенциала были получены выше: φ_{BC} в (2.85), а φ_{CA} — в (2.87).

Для проверки формулы (2.92) мы рассчитали семейство кривых равного потенциала ромба.

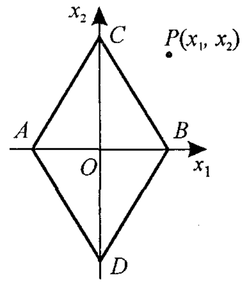


Рис. 17. Фигура ромба. Точка $P(x_1, x_2)$ — испытуемая.

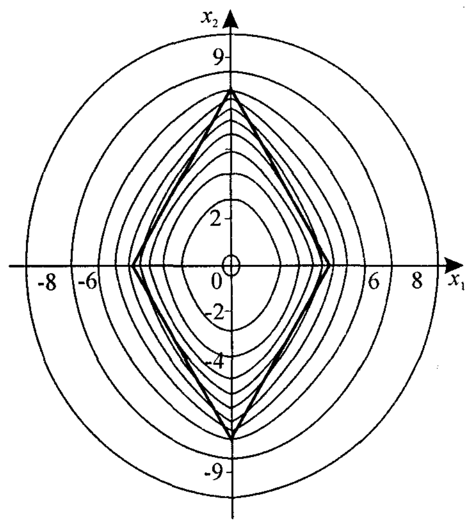


Рис. 18. Эквипотенциали гравитирующего ромба (дан жирной линией), составленного из двух равносторонних треугольников. Потенциал нормирован на $G\sigma\frac{a}{\sqrt{3}}$ (взято $a = 5\sqrt{3}$) и убывает от внутренних кривых к внешним: 5.59; 5.174; 4.758; 4.342; 3.926; 3.51; 3.094; 2.678; 2.262; 1.846; 1.43. Его максимум 5.5988 совпадает с точкой O

Задача 2.12. *Докажите, что потенциал ромба в его центре равен сумме потенциалов в точках тупого и острого углов.*

Решение. Из формулы (2.92) следует, что потенциалы в центре ромба и в точках тупого и острого углов соответственно равны

$$G\sigma a\sqrt{3}\ln\left(2\sqrt{3} + 3\right), \; G\sigma a\sqrt{3}\ln 3, \; G\sigma a\sqrt{3}\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right). \quad (2.93)$$

Отсюда и следует сделанное выше утверждение. ▼

Пример с ромбом показывает, что в теории потенциала с успехом можно использовать геометрическую симметрию фигур и применять перенос начала системы координат[10].

Развивая тему, заметим, что из простых треугольников можно составить не только ромб, но и другие пластинчатые фигуры.

[10] Более подробные сведения по переносу начала координат см. в книге В. А. Антонова, Е. И. Тимошковой и К. В. Холшевникова [6].

Задача 2.13. *Пользуясь формулой* (2.88), *найти потенциал пластины с формой правильного плоского шестиугольника, а также «пропеллера», полученного из шестиугольника вычёркиванием — через один — трёх треугольников.*

§ 2.8. Прямоугольная пластина

Дана однородная прямоугольная пластина со сторонами $AB = 2a_1$ и $CD = 2a_2$.

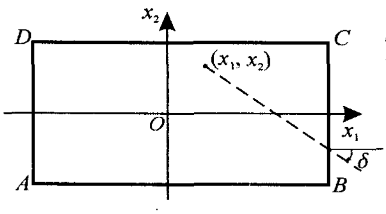


Рис. 19. К вычислению потенциала прямоугольной пластины

Для нахождения её потенциала во *внешней и внутренней компланарной точке* рассмотрим вклад в контурный интеграл (2.7) от всех сторон прямоугольника.

Вклад в потенциал от стороны BC:

$$\cos\delta = \frac{a_1 - x_1}{D}, \quad D = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}, \tag{2.94}$$

так что

$$\varphi_{BC} = (a_1 - x_1)\int\limits_{-a_2}^{a_2} \frac{dx_2'}{D} = (a_1 - x_1)\ln\frac{a_2 - x_2 + \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}}{-a_2 - x_2 + \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2}}. \tag{2.95}$$

Аналогично, вклад в потенциал пластины от стороны DC, где взаимное расстояние и угол δ даны выражениями

$$\cos\delta = \frac{a_2 - x_2}{D}, \quad D = \sqrt{(a_2 - x_2)^2 + (x_1' - x_1)^2}, \tag{2.96}$$

равен

$$\varphi_{DC} = (a_2 - x_2)\int\limits_{-a_1}^{a_1} \frac{dx_1'}{D} = (a_2 - x_2)\ln\frac{a_1 - x_1 + \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}}{-a_1 - x_1 + \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}}. \tag{2.97}$$

Далее, вклад от стороны AD:

$$\cos\delta = \frac{a_1 + x_1}{D}, \quad D = \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}, \tag{2.98}$$

$$\varphi_{AD} = (a_1 + x_1)\ln\frac{a_2 - x_2 + \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}}{-a_2 - x_2 + \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2}}. \tag{2.99}$$

Наконец, вклад в потенциал от стороны AB:

$$\varphi_{AB} = (a_2 + x_2)\ln\frac{a_1 - x_1 + \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2}}{-a_1 - x_1 + \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2}}. \tag{2.100}$$

В итоге, *внешний и внутренний* гравитационный (и, разумеется, электростатический) потенциал прямоугольной пластины будет представлен через элементарные функции

$$\varphi_п(x_1,x_2)=G\sigma\left\{(a_1-x_1)\ln\frac{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2}+a_2-x_2}{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2+x_2)^2}-a_2-x_2}+\right.$$
$$+(a_1+x_1)\ln\frac{\sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2-x_2)^2}+a_2-x_2}{\sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2+x_2)^2}-a_2-x_2}+$$
$$(a_2-x_2)\ln\frac{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2}+a_1-x_1}{\sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2-x_2)^2}-a_1-x_1}+$$
$$\left.+(a_2+x_2)\ln\frac{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2+x_2)^2}+a_1-x_1}{+\sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2+x_2)^2}-a_1-x_1}\right\}, \tag{2.101}$$

или, в сокращённом виде,

$$\varphi_п=G\sigma\left\{I_1(a_1,x_1)+I_1(a_1,-x_1)+I_2(a_2,x_2)+I_2(a_2,-x_2)\right\}, \tag{2.102}$$

где

$$I_1(a_1,x_1)=(a_1-x_1)\ln\frac{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2}+a_2-x_2}{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2+x_2)^2}-a_2-x_2},$$
$$I_2(a_2,x_2)=(a_2-x_2)\ln\frac{\sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2}+a_1-x_1}{\sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2-x_2)^2}-a_1-x_1}. \tag{2.103}$$

В частности, потенциал в центре пластины

$$\varphi_п(0)=2G\sigma\left\{a_1\ln\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}-a_2}+a_2\ln\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}-a_1}\right\}. \tag{2.104}$$

Легко найти и потенциал в угловой точке

$$\varphi_п(x_1=a_1,x_2=a_2)=2G\sigma\left\{a_1\ln\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}-a_2}+a_2\ln\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}-a_1}\right\}. \tag{2.105}$$

Задача 2.14. *Убедитесь, что для любой прямоугольной пластины отношение потенциала в центре $\varphi_п(0)$ к потенциалу в любой из четырёх вершин $\varphi_п(x_1=a_1,x_2=a_2)$ равно 2, т. е.*

$$\varphi_п(0)=2\varphi_п(x_1=a_1,x_2=a_2). \tag{2.106}$$

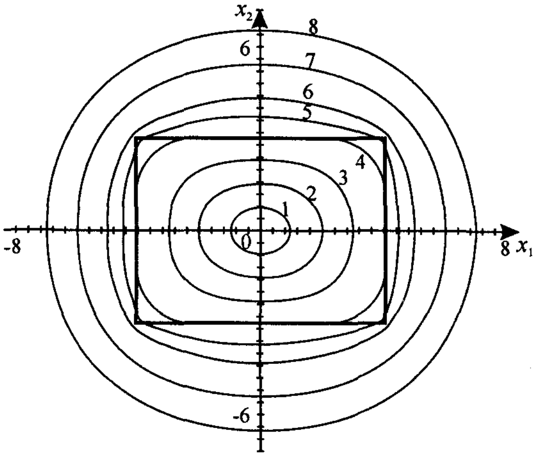


Рис. 20. Внешние и внутренние эквипотенциали однородной прямоугольной пластины. Отношение сторон пластины равно 0.75. Потенциал $\dfrac{\varphi_{\text{п}}}{G\sigma\sqrt{a_1 a_2}}$ убывает с увеличением номера кривой: 1 (6.92), 2 (6.63), 3 (6.04), 4 (4.65), 5 (3.75), 6 (3.23), 7 (2.57), 8 (2.14)

Решение. Этот любопытный результат сразу следует из формул (2.104) и (2.105). ▼

В частности, для квадратной пластины $a_1 = a_2 = a$, и

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{п}}(0) &= 4G\sigma a \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \\ \varphi_{\text{п}}(x_1 = x_2 = a) &= -4G\sigma a \ln\left(\sqrt{2}-1\right). \end{aligned} \tag{2.107}$$

Таким образом, работа по удалению материальной точки из центра любой прямоугольной (или квадратной) однородной гравитирующей пластины на бесконечность в 2 раза больше той работы, которую следует затратить при удалении этой точки из вершины на бесконечность[11]. Для сравнения: указанное отношение работ у однородного круглого плоского диска меньше и равно $\frac{\pi}{2}$ (см. § 2.2), а в случае однородного шара — всего 1.5 (см. § 6.4)[12].

На рис. 20 показаны эквипотенциали прямоугольной пластины, рассчитанные по формуле (2.102).

§ 2.9. Эллиптический диск

Эллиптический диск — крепкий (и отнюдь не пустой!) орешек для исследователя.

2.9.1. Вводные формулы

Дан однородный эллиптический диск с границей

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \tag{2.108}$$

[11] В связи с этим см. (2.91).

[12] Обратим внимание на интересный факт: для любой прямой однородной призмы и цилиндра с самыми разными формами сечения *отношение работы по удалению материальной точки из центра в какую-либо геометрическую точку на их основании к работе по удалению её из центра на бесконечность* будет совпадать с указанным отношением работ для плоских однородных пластин, которые получаются из данных объёмных тел в пределе стремления образующих рёбер к нулю. См. в связи с этим § 7.7.

Вводя полярные координаты с началом в испытуемой точке, запишем уравнение луча AP (см. рис. 4)

$$x_1' = x_1 + D\cos\theta, \quad x_2' = x_2 + D\sin\theta. \tag{2.109}$$

Точки пересечения P и C этого луча лежат на граничном эллипсе, так что выполняется уравнение

$$\frac{(x_1 + D\cos\theta)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 + D\sin\theta)^2}{a_2^2} = 1. \tag{2.110}$$

Для величины D имеем, следовательно, квадратное уравнение

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{a_2^2}\right) D^2 + 2\left(\frac{x_1\cos\theta}{a_1^2} + \frac{x_2\sin\theta}{a_2^2}\right) D + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0, \tag{2.111}$$

корни которого

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{-\left(\dfrac{x_1\cos\theta}{a_1^2} + \dfrac{x_2\sin\theta}{a_2^2}\right) \mp \sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}}, \tag{2.112}$$

а коэффициенты A, B, C зависят от координат (x_1, x_2)

$$A = \frac{1}{a_1^2}\left(1 - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right); \quad B = \frac{x_1 x_2}{a_1^2 a_2^2}; \quad C = \frac{1}{a_2^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}\right). \tag{2.113}$$

В частности, разность отрезков $PC = D_2 - D_1$ *равна*

$$D_2 - D_1 = 2\frac{\sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}} d\theta. \tag{2.114}$$

Подставляя эту разность в интеграл (2.10), получим формулу для *внешнего* потенциала эллиптического диска в его главной плоскости

$$\varphi(x_1, x_2) = 2G\sigma \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}} d\theta. \tag{2.115}$$

Здесь углы θ_1 и θ_2 задают направление касательных к диску, проведенных из испытуемой точки (рис. 4).

Далее, подставляя D_2 в (2.9), получим интегральную формулу для *внутреннего* потенциала эллиптического диска в его главной плоскости [13]

$$\varphi(x_1, x_2) = G\sigma \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}} d\theta. \tag{2.116}$$

Ввиду сложности вычисления этих интегралов, целесообразно начать с рассмотрения частных случаев.

[13] Интегралы от членов, пропорциональных $\sin\theta$ и $\cos\theta$, обращаются, естественно, в нуль.

2.9.2. Потенциал во внешней компланарной точке

Подкоренное выражение в (2.115) представим в форме

$$A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta = N\sin(\theta-\theta_1)\sin(\theta_2-\theta). \tag{2.117}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &N\sin(\theta_1+\theta_2) = 2B, \\ &N\cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{x_1^2-x_2^2}{a_1^2a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} = A - C, \\ &2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta = \sin(\theta_2-\theta), \end{aligned} \tag{2.118}$$

то

$$N(x_1,x_2) = \sqrt{4B^2+(A-C)^2}, \tag{2.119}$$

и формула (2.115) сводится к следующей:

$$\varphi(x_1,x_2) = 2G\sigma\sqrt{N}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\sin(\theta-\theta_1)\sin(\theta_2-\theta)}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}}\,d\theta. \tag{2.120}$$

Однако и здесь ещё предстоит сделать ряд преобразований. Заменой

$$2\psi = 2\theta - (\theta_1+\theta_2), \quad \psi = \theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \tag{2.121}$$

интеграл (2.120) приводится вначале к следующему

$$\varphi(x_1,x_2) = G\sigma\sqrt{2N}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos 2\psi - \cos 2\alpha}}{\dfrac{1}{a_2^2} - \dfrac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2a_2^2}\cos^2\left(\psi+\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\,d\theta, \tag{2.122}$$

а после ещё одной замены

$$x = 2\theta - \theta_1 - \theta_2 \tag{2.123}$$

(2.122) преобразуется к сравнительно более простому виду

$$\varphi(x_1,x_2) = G\sigma\sqrt{2N}\frac{a_1^2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\int\limits_{-2\alpha}^{2\alpha} \frac{\sqrt{\cos x - \cos 2\alpha}}{1-\gamma\cos(x+\theta_1+\theta_2)}\,dx. \tag{2.124}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2}, \tag{2.125}$$

а

$$\alpha = \frac{\theta_1-\theta_2}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{2.126}$$

причём $\alpha = 0$ соответствует точке, удалённой на бесконечность, а $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — точке на границе диска.

Сделаем, наконец, ещё одну замену, вводя тангенс половинного угла $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда (2.124) приводится к виду

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{4G\sigma\sqrt{N}\cos\alpha}{1+\gamma\cos(\theta_1+\theta_2)}\frac{a_1^2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{t^2+C_1t+C_2}, \tag{2.127}$$

где обозначено

$$a = \operatorname{tg}\alpha, \quad C_1 = 2\gamma\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{1+\gamma\cos(\theta_1+\theta_2)}, \quad C_2 = \frac{1-\gamma\cos(\theta_1+\theta_2)}{1+\gamma\cos(\theta_1+\theta_2)}. \tag{2.128}$$

В интеграле

$$I = \int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{t^2+C_1t+C_2} \tag{2.129}$$

делаем тождественные преобразования

$$\frac{1}{t^2+C_1t+C_2} = \frac{t^2+C_2-C_1t}{\left(t^2+C_1\right)^2-C_1^2t^2} \tag{2.130}$$

и замечаем, что член с C_1t ввиду его нечётности исчезает. Тогда

$$\begin{aligned} I &= 2\int\limits_0^a\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\frac{t^2+C_2}{t^4+t^2\left(2C_2-C_1^2\right)+C_2^2}dt = \\ &= 2\int\limits_0^a\frac{\left(a^2-t^2\right)\left(t^2+C_2\right)}{\sqrt{\left(1+t^2\right)\left(a^2-t^2\right)}\left(t^4+t^2\left(2C_2-C_1^2\right)+C_2^2\right)}dt. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Решая биквадратное уравнение в знаменателе

$$t^4+t^2\left(2C_2-C_1^2\right)+C_2^2 = 0, \tag{2.132}$$

находим его комплексные корни

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[-\left(2C_2-C_1^2\right) \pm iC_1\sqrt{4C_2-C_1^2}\right]. \tag{2.133}$$

Далее, часть подынтегрального выражения в (2.131) можно разложить на простые дроби

$$\frac{\left(a^2-t^2\right)\left(t^2+C_2\right)}{\left(t^2-m_1\right)\left(t^2-m_2\right)} = -1+\frac{\left(C_2+m_1\right)\left(m_1-a^2\right)}{\left(m_1-m_2\right)\left(m_1-t^2\right)}-\frac{\left(C_2+m_2\right)\left(m_2-a^2\right)}{\left(m_1-m_2\right)\left(m_2-t^2\right)}, \tag{2.134}$$

что позволяет этот интеграл выразить, наконец, через стандартные полные эллиптические интегралы

$$I = 2\cos\alpha\left\{-\mathrm{K}(k)+\frac{C_2+m_1}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_1}, k\right]-\frac{C_2+m_2}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_2}, k\right]\right\} \tag{2.135}$$

с модулем

$$k = \sin \alpha \leqslant 1. \tag{2.136}$$

В итоге, потенциал однородного эллиптического диска *во внешней* компланарной точке (2.115) оказывается равен

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = \frac{8G\sigma\sqrt{N}\cos^2\alpha}{1+\gamma\cos(\theta_1+\theta_2)} \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2+a_2^2} \left\{ -\mathrm{K}(k) + \right.$$
$$\left. + \frac{C_2+m_1}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_1}, k\right] - \frac{C_2+m_2}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_2}, k\right] \right\}. \tag{2.137}$$

Так как $(m_1 - m_2)$ — чисто мнимая величина, то разность второго и третьего членов в (2.137) фактически есть сумма комплексно-сопряжённых величин. Мнимые части поэтому сокращаются, и в итоге формула (2.137) даёт вещественные значения внешнего потенциала диска. Заметим, что формулы (2.137) и (10.140) для потенциала однородного эллиптического диска по виду хотя и разные, но они эквивалентны друг другу.

Отметим, что здесь получен потенциал *во внешней точке главной плоскости эллиптического диска*. В (10.131) потенциал эллиптического диска будет найден уже *во всём пространстве*, причём методом, совершенно отличным от данного выше. В связи с этим подчеркнём ещё раз важность развития независимых подходов к решению трудных задач теории потенциала.

2.9.3. Потенциал на границе

Граница диска даётся уравнением (2.108) и вспомогательным является рис. 5. Применим формулу (2.11) и $D = D_2 - D_1$ возьмём из (2.114); тогда интеграл примет вид

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma \int\limits_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{\sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}} d\theta. \tag{2.138}$$

Здесь

$$\theta_0(\alpha) = \arcsin\frac{a_2\cos\alpha}{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha + a_1^2\sin^2\alpha}}. \tag{2.139}$$

Вводя параметризацию эллипса (2.108)

$$x_1 = a_1\cos\alpha, \quad x_2 = a_2\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \tag{2.140}$$

приводим коэффициенты A, B, C из (2.113) к виду

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{a_1^2}, \quad B = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a_1 a_2}, \quad C = \frac{\sin^2\alpha}{a_2^2}, \tag{2.141}$$

так что

$$A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = \left(\frac{\cos\alpha}{a_1}\cos\theta + \frac{\sin\alpha}{a_2}\sin\theta\right)^2 \tag{2.142}$$

Тогда (2.138) приводится к сумме двух более простых интегралов

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma \int\limits_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{\dfrac{\cos\alpha}{a_1}\cos\theta + \dfrac{\sin\alpha}{a_2}\sin\theta}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}}\, d\theta. \tag{2.143}$$

Каждый из двух интегралов в (2.143) вычисляется, и в результате получим потенциал *в точках на границе* эллиптического диска через элементарные функции

$$\varphi_{\text{диска}}(\alpha) = \frac{4G\sigma a_2}{e}\left\{\cos\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{e\,a_1\cos\alpha}{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha + a_1^2\sin^2\alpha}} - \right.$$
$$\left. -\frac{\sin\alpha}{2}\ln\frac{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha + a_1^2\sin^2\alpha} - ea_1\sin\alpha}{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha + a_1^2\sin^2\alpha} + ea_1\sin\alpha}\right\}, \text{ где } e = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^1}}. \tag{2.144}$$

Этот красивый результат следует сравнить с (10.150) для потенциала в точках на границе однородного эллиптического диска, полученным из более общего выражения *пространственного потенциала* данного диска.

Задача 2.15. *В формуле* (2.144) *выполнить предельный переход* $e \to 0$ *и получить потенциал на границе однородного круглого диска* из (2.24): $\varphi_{\text{диска}}(R) = 4G\sigma R$.

В частности, на конце большой ($\alpha = 0$) и малой ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) осей симметрии эллиптического диска потенциал, согласно (2.144), оказывается равным

$$\varphi(a_1) = \frac{4G\sigma a_2}{e}\arcsin e; \quad \varphi(a_2) = \frac{2G\sigma a_2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}. \tag{2.145}$$

Для проверки заметим, что из обеих последних формул при $e = 0$ также следует известный нам потенциал на границе однородного круглого диска (2.24).

Нахождение потенциала в *произвольной внутренней* точке эллиптического диска с помощью формулы (2.116) является более сложной задачей. Целесообразно найти внутренний потенциал диска вначале в точках на осях его симметрии.

2.9.4. Внутренний потенциал на осях симметрии

Потенциал в точках большой оси Ox_1

В точках на этой оси

$$x_2 = 0, \quad A = \frac{1}{a_1^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{a_2^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}\right) \tag{2.146}$$

и формула (2.116) заметно упрощается (исчезает «неприятный» смешанный член)

$$\varphi(x_1) = 4G\sigma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}\left(1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2}\right)}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{a_2^2}}\, d\theta. \tag{2.147}$$

Замена $x = \operatorname{tg}\theta$ даёт

$$\varphi(x_1) = 4G\sigma a_2\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}\cdot I, \tag{2.148}$$

где для краткости обозначено

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2}}}{\sqrt{1+x^2}\left(x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2}\right)} dx. \tag{2.149}$$

Умножим и разделим подынтегральное выражение на радикал в числителе; тогда

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^\infty \frac{x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2}}{\sqrt{(1+x^2)\left(x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2}\right)}\left(x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2}\right)} dx = \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\left(x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2}\right)}} \left\{1 + \frac{\dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2} - \dfrac{a_2^2}{a_1^2}}{x^2 + \dfrac{a_2^2}{a_1^2}}\right\}. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Далее следует различать два случая.

Случай 1: пробная точка находится внутри фокального отрезка $0 \leqslant x_1 \leqslant ea_1$. Тогда $\dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2} \leqslant 1$, и

$$I = \mathrm{K}(k_1) + \left(\frac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \frac{1}{1 - \dfrac{a_2^2}{a_1^2}} \left[\Pi\left[e^2, k_1\right] - \mathrm{K}(k_1)\right]; \quad k_1 = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2}} \leqslant 1. \tag{2.151}$$

Случай 2: пробная точка вне фокального отрезка $a_1 e \leqslant x_1 \leqslant a_1$. Тогда $\dfrac{a_2^2}{a_1^2 - x_1^2} \geqslant 1$, и

$$I = \frac{\sqrt{a_1^2 - x_1^2}}{a_2} \mathrm{K}(k_2) + \frac{\sqrt{a_1^2 - x_1^2}}{a_2} \left[\Pi\left[\frac{x_1^2}{a_1^2}, k_2\right] - \mathrm{K}(k_2)\right]; \quad k_2 = \sqrt{1 - \frac{a_1^2 - x_1^2}{a_2^2}} \leqslant 1. \tag{2.152}$$

Итак, в точках *на большой оси* однородного эллиптического диска потенциал равен

$$\varphi(x_1) = 4G\sigma a_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \tag{2.153}$$

где выражение

$$I_1 = \frac{1}{e^2}\left\{k_1^2 \mathrm{K}(k_1) + \left(e^2 - k_1^2\right) \Pi\left[e^2, k_1\right]\right\}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{a_1^2 e^2 - x_1^2}{a_1^2 - x_1^2}}, \tag{2.154}$$

относится к интервалу $0 \leqslant x_1 \leqslant ea_1$, а выражение

$$I_2 = \sqrt{1-k_2^2}\,\Pi\left[\frac{x_1^2}{a_1^2}, k_2\right], \quad k_2 = \frac{\sqrt{x_1^2 - a_1^2 e^2}}{a_2} \tag{2.155}$$

справедливо в интервале $a_1 e \leqslant x_1 \leqslant a_1$. В частности, в точке фокуса эллиптического диска, где $x_1 = ea_1$, потенциал равен

$$\varphi_{\text{диска}} = 2\pi G\sigma a_1. \tag{2.156}$$

Потенциал вдоль малой оси Ox_2

Здесь

$$x_1 = 0, \quad A = \frac{1}{a_1^2}\left(1 - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right) > 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{a_2^2}, \tag{2.157}$$

и та же замена $x = \operatorname{tg}\theta$ преобразует выражение потенциала (2.116) к виду

$$\varphi(x_2) = 4G\sigma a_2 \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a_2^2 A + x^2)}}\left\{1 + \frac{a_2^2 A - \frac{a_2^2}{a_1^2}}{x^2 + \frac{a_2^2}{a_1^2}}\right\}. \tag{2.158}$$

После интегрирования (2.158) находим

$$\varphi_{\text{диска}}(x_2) = 4G\sigma a_2\left\{\left(1 + \frac{x_2^2}{a_1^2 e^2}\right)\mathrm{K}(k) - \frac{x_2^2}{a_1^2 e^2}\Pi\left[e^2, k\right]\right\}, \tag{2.159}$$

где

$$k = \sqrt{e^2 + \frac{x_2^2}{a_1^2}} \leqslant 1, \tag{2.160}$$

а $e = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}}$ — эксцентриситет диска.

В частности, потенциал в центре однородного эллиптического диска

$$\varphi(0) = 4G\sigma a_2 K(e). \tag{2.161}$$

Задача 2.16. *Обе формулы,* (2.153) *и* (2.159), *были проверены численно и дали тот же результат, что и формулы* (2.145). *Упражнение для теоретика: попробуйте выполнить предельные переходы и в аналитической форме получить выражения* (2.145) *из более сложных* (2.153) *и* (2.159).

2.9.5. Потенциал в произвольной внутренней точке

Приступим, наконец, к более общей задаче. Применим формулу (2.116), записав её как

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{a_2^2}}\,d\theta \tag{2.162}$$

с известными коэффициентами A, B, C из (2.113). После замены

$$x = \operatorname{tg}\theta \tag{2.163}$$

и простых тождественных преобразований приведём (2.116) вначале к такому виду

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = N\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\left(x^2+\frac{2B}{C}x+\frac{A}{C}\right)}}\left(1+\frac{\frac{2B}{C}x+\frac{A}{C}-\frac{a_2^2}{a_1^2}}{x^2+\frac{a_2^2}{a_1^2}}\right), \tag{2.164}$$

где для краткости

$$N = 2G\sigma a_2\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}}. \tag{2.165}$$

Представим (2.164) затем в форме

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = N\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{G(x)}}\left(1+\frac{T}{x+i\frac{a_2}{a_1}}+\frac{T^*}{x-i\frac{a_2}{a_1}}\right), \tag{2.166}$$

где[14]

$$G(x) = (x+i)(x-i)(x-r_1)(x-r_2), \tag{2.167}$$

причём коэффициент

$$T = \frac{B}{C}+i\frac{a_1}{2a_2}\left(\frac{A}{C}-\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) = \frac{i}{2a_1a_2C}\left(\frac{x_1}{a_1}-i\frac{x_2}{a_2}\right)^2, \tag{2.168}$$

а корни (комплексные) квадратного уравнения

$$x^2+\frac{2B}{C}x+\frac{A}{C} = 0 \tag{2.169}$$

таковы:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{-B \pm i\sqrt{AC-B^2}}{C} = \frac{-B \pm \frac{i}{a_1a_2}\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}}}{C}. \tag{2.170}$$

Подчеркнём: два корня у полинома четвёртой степени $G(x)$ являются чисто мнимыми, а два (r_1 и r_2) — комплексными (так как для внутренней точки выражение под радикалом в (2.170) имеет положительный знак). Согласно теории эллиптических интегралов, заменим в (2.166) переменную x на новую φ

$$x = \operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right), \tag{2.171}$$

где

[14] Не путать полином $G(x)$ с гравитационной постоянной G.

$$\begin{pmatrix} \operatorname{tg}\theta_3 \\ \operatorname{tg}\theta_4 \end{pmatrix} = \frac{C \pm \frac{1}{a_1 a_2}\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}}}{B}. \tag{2.172}$$

При этом одновременно вводим вспомогательные величины

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta_5}{2} = \frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_4}; \quad k^2 = \sin^2\theta_5; \quad \mu = \sqrt{\frac{a_1 a_2 C \cos\theta_5}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}}}}. \tag{2.173}$$

Замена (2.171) позволяет сделать такой переход

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{G(x)}} = \mu \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{2.174}$$

с пределами по переменной φ

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \mp \frac{\pi}{2}. \tag{2.175}$$

Обозначив для краткости

$$\Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \tag{2.176}$$

согласно (2.166), дело имеем прежде всего с интегралом

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{G(x)}} = \mu \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}. \tag{2.177}$$

Важно заметить, что, согласно (2.175),

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi, \tag{2.178}$$

вследствие чего, по общей теории должно быть

$$\mathrm{F}(\varphi_2, k) - \mathrm{F}(\varphi_1, k) = 2\mathrm{K}(k). \tag{2.179}$$

Это свойство заметно упрощает вид выражений. Таким образом, получим

$$I_1 = 2\mu\mathrm{K}(k). \tag{2.180}$$

Но в (2.166) есть ещё один, более сложный интеграл

$$I_2 = T\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x + i\frac{a_2}{a_1}\right)\sqrt{G(x)}} = T\frac{\mu}{n_1}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{dx}{\Delta(\varphi, k)}\left(-\gamma + \frac{1 + a\gamma}{a + \operatorname{tg}\varphi}\right), \tag{2.181}$$

где

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}; \quad a = \frac{n_2}{n_1}; \quad n_1 = 1 - i\gamma\frac{a_2}{a_1}; \quad n_2 = \gamma + i\frac{a_2}{a_1}. \tag{2.182}$$

Находим

$$I_2 = \frac{T}{n_1}\left[-\gamma I_1 + (1 + a\gamma)\, I_3\right], \tag{2.183}$$

причём I_1 дано в (2.180), а

$$I_3 = \mu \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(a + \operatorname{tg}\varphi)\,\Delta(k, \varphi)}. \tag{2.184}$$

Здесь пределы интегрирования φ_1 и φ_2 также удовлетворяют уравнению (2.178). Мы доказываем тогда важное соотношение[15]

$$\Pi[\varphi_2, n, k] - \Pi[\varphi_1, n, k] = 2\Pi[n, k]. \tag{2.185}$$

В этом случае (2.184) приводится к простому виду

$$I_3 = \frac{1}{1 + a^2}\left\{a I_1 + 2\,\frac{\mu}{a}\,\Pi\left[1 + \frac{1}{a^2}, k\right]\right\}, \tag{2.186}$$

где вновь оказывается несущественным конкретный вид пределов φ_1 и φ_2.

Собирая всё вместе, находим *потенциал однородного эллиптического диска во внутренней точке*

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma a_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}\,(I_1 + I_2 + I_2^*), \tag{2.187}$$

где I_1 и I_2 выражаются через стандартные полные эллиптические интегралы первого и третьего рода и даны в (2.180), (2.183) и (2.186). Хотя I_2 — комплексная величина, сумма $I_2 + I_2^*$ (под I_2^* понимается комплексное сопряжение I_2) уже не содержит мнимых членов. Таким образом, *внутренний потенциал однородного эллиптического диска* оказывается величиной вещественной

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma a_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}\,(I_1 + 2\operatorname{Re} I_2), \tag{2.188}$$

как и должно быть.

Формула (2.188) была проверена численно. Кроме того, следует подчеркнуть, что в (10.136) внутренний потенциал однородного эллиптического диска получен даже в несколько более простой форме, причём сделано это совершенно другим методом, исходя из пространственного потенциала диска.

§ 2.10. Расслоение дисков и цилиндров

Рассмотрим семейство соосных эллипсов $L(m)$ с переменной, вообще говоря, сплюснутостью

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2\alpha_2^2(m)} = m^2, \quad (a_1 \geqslant a_2), \tag{2.189}$$

[15] Отсутствующее, кстати, в справочниках.

где параметр m непрерывно изменяется в интервале

$$0 \leqslant m_{\min} \leqslant m \leqslant 1. \tag{2.190}$$

Геометрия и тип плоской оболочки (или кольца) определяется функцией $\alpha_2(m)$. Очевидно,

$$\alpha_2(1) = 1, \tag{2.191}$$

и, кроме того, предполагаем, что выполняются все необходимые условия на $\alpha_2(m)$, установленные в § 5.1 для случая объёмного расслоения. При $m_{\min} = 0$ расслоение на эллипсы будет полным, в противном случае — неполным[16].

Толщина элементарного эллиптического колечка в общем случае легко находится из общей формулы (5.16) для трёхмерных эллипсоидальных оболочек.

Очевидно, расслоение эллиптического диска на подобные эллиптические колечки происходит при $\alpha_2(m) \equiv 1$, когда полуоси промежуточного эллипса таковы:

$$a_1(m) = a_1 m, \quad a_2(m) = a_2 m. \tag{2.192}$$

Расслоение же на плоские фокалоиды происходит при[17]

$$\alpha_2^2(m) = \frac{a_1^2}{a_2^2} - \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - 1\right)\frac{1}{m^2}; \quad e_{12}(1) \leqslant m \leqslant 1. \tag{2.193}$$

При софокусном расслоении полуоси промежуточного колечка будут таковы:

$$a_1 m, \quad a_1\sqrt{m^2 - e_{12}^2(1)}. \tag{2.194}$$

Уже отмечалось, что расслоение в этом случае будет неполным: вне расслоения остаётся особый (фокальный) отрезок

$$-a_1 e_{12}(1) \leqslant x_1 \leqslant a_1 e_{12}(1). \tag{2.195}$$

Толщина элементарных плоских гомотетических и софокусных эллиптических колец в любом месте кольца получается как частный случай из формул (5.16) и (5.41) для объёмных оболочек.

Кроме указанных двух есть и другие типы элементарных эллиптических колец. Могут существовать, например, и двумерные аналоги оболочек равной толщины на осях симметрии (см. § 5.6). При вырождении эллипсов в круги ситуация становится тривиальной — кольца всех типов превращаются в одинаковые круговые колечки.

§ 2.11. Потенциалы эллиптических колец. Общий метод дифференциации

Задача о потенциалах невырожденных в круг эллиптических колец — новая, и её решение потребует немалых усилий[18]. Что характерно для данной задачи?

Невырожденные плоские эллиптические кольца, как мы уже знаем, могут быть разного типа (например, плоские гомеоиды и фокалоиды и т. д.). И важно сразу подчеркнуть: *потенциалы плоских эллиптических колец обладают совершенно иными свойствами, нежели*

[16] Неполным расслоение может быть по двум причинам: или оно просто прервано «рукой» (таково, например, расслоение широкого гомотетического кольца), или же из-за особых внутренних свойств самого расслоения (ко второму типу относится софокусное расслоение). Расслоение же на подобные эллипсы может быть как полным, так и неполным (неполным — первого типа!).

[17] Подробнее вывод этих формул см. в § 5.5.

[18] Если Вам удастся самостоятельно найти, например, потенциал в полости элементарного фокалоида (см. формулы (2.209) и (2.210)), значит у Вас есть аналитические способности!

потенциалы трёхмерных эллипсоидальных оболочек. Так, потенциал внутри плоского гомеоида, а также внутри круглого кольца уже не будет постоянной величиной. Другими словами, *для плоских колец не выполняется известная теорема Ньютона* (об этой теореме см. § 5.8).

Кроме того, у плоских колец (в отличие от эллипсоидальных оболочек, а также цилиндрических оболочек с логарифмическим потенциалом) нет особой необходимости подразделять потенциалы на внешний и внутренний. *С физической точки зрения, для плоских колец можно говорить о едином пространственном потенциале*[19].

Метод нахождения пространственных потенциалов колец может быть *прямым* или *косвенным*. Поясним это.

При работе *прямым* методом мы исходим из общего выражения для потенциала одномерных тел. Дело сводится, следовательно, к вычислению указанного общего интеграла в том случае, который оговаривается условиями задачи.

Под *косвенным* мы подразумеваем собственно метод *дифференциации.*

Определение 1. *Методом дифференциации (в узком смысле) называется способ получения потенциала простого слоя расслоением исходного тела с известным уже потенциалом на интересующие нас элементарные оболочки. Фактически, это метод дифференцирования потенциала сплошного объёмного или плоского тела по параметру стратификации m. При этом происходит не только расслоение тела, но и определяется потенциал слоя заранее заданного типа.*

Определение 2. *Метод дифференциации в широком смысле — это метод нахождения вклада от элементарной оболочки не только в потенциал, но и в другие аддитивные характеристики тела. Например, это может быть и вклад от оболочки в мнимую плотность от эквигравитирующего стержня* (*см.* § 9.6). *Кроме того, именно таким методом мы будем находить и взаимную гравитационную энергию слоя заданного типа с телом, на котором этот слой лежит* (*см.* § 14.12).

Рассмотрим, как работает данный метод для плоских тел. В качестве исходного может быть взят пространственный потенциал однородного *круглого* диска (см. § 9.5), или же взятый из § 10.10 пространственный потенциал однородного плоского *эллиптического* диска. Суть метода дифференциации (в узком смысле) заключается в следующем. Вначале в исходном выражении потенциала делается такая замена полуосей эллиптического диска

$$a_1 \to a_1 m, \quad a_2 \to a_2 m \cdot \alpha_2(m), \tag{2.196}$$

которая необходима для получения выражения потенциала кольца того или иного геометрического типа. Затем выполняем дифференцирование потенциала по параметру

$$\varphi_{\text{кольца}}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{d}{dm}\varphi_{\text{диска}}(m, \boldsymbol{x})\right]_{m=1} dm, \tag{2.197}$$

что и даёт искомый потенциал кольца.

Рассмотрим примеры на применение метода дифференциации.

§ 2.12. Элементарный эллиптический плоский гомеоид

При его нахождении опираемся на сформулированный выше метод дифференциации.

Потенциал в полости плоского гомеоида

[19] Но в отличие от трёхмерных оболочек, потенциал плоских тонких колец не является всюду непрерывной функцией от координат: *он терпит разрыв на границах этих колец.* Именно по этой причине, а также для подчёркивания способа нахождения потенциала мы и для плоских колец будем подразделять полный потенциал на внешний и внутренний.

Точки внутри граничного эллипса удовлетворяют неравенству

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leqslant 1. \tag{2.198}$$

В формуле внутреннего потенциала эллиптического диска (10.136), где R_1 и R_2 эквивалентны большой и малой полуосям a_1 и a_2, делаем замену (2.192). Действуя методом дифференциации (2.197), после длинной цепочки преобразований в итоге находим следующее изящное решение:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{2\sqrt{2}M_{\text{гом}}G}{\pi}\frac{\mathrm{K}(k_1)}{\sqrt{T_1 + \sqrt{T_2}}}, \tag{2.199}$$

где

$$M_{\text{гом}} = 2\pi a_1 a_2 \sigma\, dm,$$
$$k_1^2 = \frac{2\sqrt{T_2}}{T_1 + \sqrt{T_2}}, \tag{2.200}$$

а

$$T_1 = a_1^2 + a_2^2 - r^2,$$
$$T_2 = r^4 + \left(a_1^2 - a_2^2\right)^2 \left[1 - \frac{2\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{a_1^2 - a_2^2}\right], \tag{2.201}$$

причём

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{2.202}$$

Проверим формулу (2.199), рассмотрев частный случай кругового кольца. При $a_1 = a_2 = R$ будет

$$T_1 = 2R^2 - r^2; \quad T_2 = r^4; \quad k_1^2 = \frac{r^2}{R^2}, \tag{2.203}$$

и внутренний потенциал гомеоида превращается в

$$\varphi(r) = 4G(\sigma dR)\,\mathrm{K}\left(\frac{r}{R}\right). \tag{2.204}$$

Но так как $\mu_0 = \sigma dR$, то (2.204) действительно согласуется с формулой (3.8) для внутреннего потенциала круглого кольца.

Потенциал плоского гомеоида во внешней компланарной точке

Аналогичным методом, используя выражение *внешнего* потенциала эллиптического диска (10.140), мы находим

$$\varphi_{\text{гом}}(x_1, x_2) = 4G\sigma a_1 a_2 \frac{\mathrm{K}(k_2)}{T_2^{\frac{1}{4}}} dm = \frac{2}{\pi} M_{\text{гом}} G \frac{\mathrm{K}(k_2)}{T_2^{\frac{1}{4}}}, \tag{2.205}$$

где

$$k_2^2 = \frac{T_1 + \sqrt{T_2}}{2\sqrt{T_2}}, \tag{2.206}$$

а T_1 и T_2 даны выше в (2.203). Напомним, что формула (2.206) верна только вне эллипса

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \geqslant 1. \tag{2.207}$$

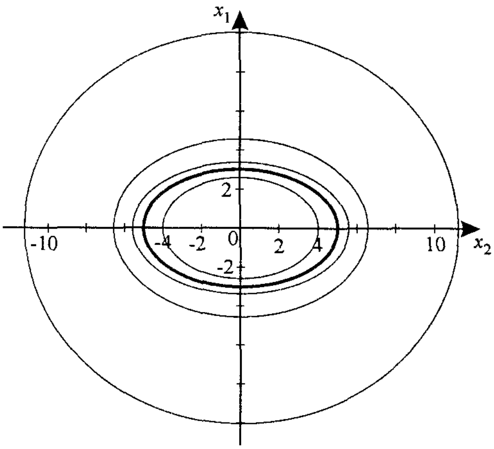


Рис. 21. Линии равного потенциала плоского гомеоида в его главной плоскости (граница оболочки показана жирным эллипсом). Значение потенциала (нормировка на $\frac{G\sigma}{\sqrt{a_1 a_2}}$, $a_1 = 5, a_2 = 3$) на кривых, начиная с внутренних: 1.304; 1.766; 0.842; 0.38

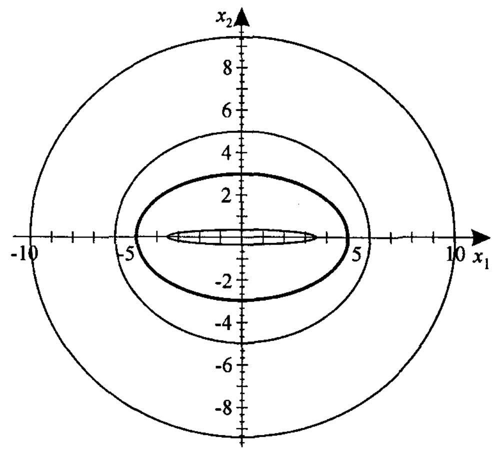


Рис. 22. То же, что и на рис. 21, но для плоского фокалоида Значения потенциала на кривых, начиная с внутренних: 0.505; 0.51; 10.0; 5.0

Потенциал (2.205) растёт вблизи границы гомеоида; поэтому на пробную точку, расположенную как вне, так изнутри (!) кольца будет действовать сила притяжения в направлении самого этого кольца.

В частности, из (2.205) в случае кругового колечка получаем известный нам потенциал (см. вторую формулу в (3.5))

$$\varphi_{\text{внешн}}(r) = 4G\mu_0 \frac{R}{r} \cdot \mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right). \tag{2.208}$$

На рис. 21 показаны кривые равного потенциала, рассчитанные по формуле (2.205).

§ 2.13. Элементарный эллиптический плоский фокалоид

Потенциал фокалоида во внешней компланарной точке

Как мы уже знаем, элементарный фокалоид с границей (2.108) получается при расслоении эллиптического диска с промежуточными полуосями (2.194). Подставляя последние во внешний потенциал однородного эллиптического диска (10.140), методом дифференциации, после многих трудоёмких преобразований, находим

$$\varphi(\lambda,\nu) = \frac{4G\sigma a_1}{a_2\left(a_1^2 - a_2^2\right)\sqrt{\lambda-\nu}} \left\{ a_1^2\left(a_1^2+\lambda\right)\Pi\left[-\frac{\nu+a_1^2}{\lambda-\nu}, k\right] - \right.$$
$$\left. - a_2^2\left(a_2^2+\lambda\right)\Pi\left[-\frac{\nu+a_2^2}{\lambda-\nu}, k\right] - (\lambda-\nu)\left(a_1^2-a_2^2\right)\mathrm{E}(k) \right\}, \tag{2.209}$$

где k из (10.141), а эллипсоидальные координаты внешней точки даны в (10.142).

Потенциал фокалоида во внутренней точке

В формуле внутреннего потенциала эллиптического диска (10.136), где R_1 и R_2 эквивалентны большой и малой полуосям a_1 и a_2, делаем замену (2.194) и вновь методом дифференциации (2.197), после трудоёмких преобразований, находим[20]

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{4GM_{\text{фок}}}{\pi\left(a_1^2 + a_2^2\right)\sqrt{-\nu}} \left\{\nu \mathrm{E}(k) - \mu \mathrm{K}(k) + \left(\mu + a_2^2\right)\Pi\left[n_2, k\right] + J\right\}, \tag{2.210}$$

где

$$J = \frac{1}{e^2}\left[\left(\mu + a_1^2\right)\Pi\left[n_1, k\right] - \left(\mu + a_2^2\right)\Pi\left[n_2, k\right]\right], \tag{2.211}$$

параметры полных интегралов третьего рода

$$n_1 = \frac{\nu + a_1^2}{\nu},\ n_2 = \frac{\nu + a_2^2}{\nu}; \tag{2.212}$$

модуль у всех эллиптических интегралов и квадрат эксцентриситета $k = \sqrt{1 - \frac{\mu}{\nu}} \leqslant 1$, $e^2 = 1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}$, масса плоского фокалоида

$$M_{\text{фок}} = \pi\sigma\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)dm, \tag{2.213}$$

эллипсоидальные координаты (μ, ν) внутренней точки (x_1, x_2) таковы, что

$$\begin{gathered}\mu + \nu = x_1^2 + x_2^2 - a_1^2 - a_2^2,\ \mu\nu = a_1^2 a_2^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right), \\ 0 \geqslant \mu \geqslant -a_2^2,\ -a_2^2 \geqslant \nu \geqslant -a_1^2.\end{gathered} \tag{2.214}$$

Расчёт эквипотенциалей по формуле (2.210) обнаруживает (см. рис. 22) любопытную картину. Внутри фокалоида градиент потенциала хотя и отличен от нуля, но оказывается очень мал. Чтобы прояснить эту ситуацию, рассмотрим поведение потенциала на графиках рис. 23 и 24.

Оказывается, потенциал внутри фокалоида представляет собой своеобразную потенциальную яму с почти плоским дном («корыто»).

Для проверки сложного выражения (2.210) получим из него известный нам потенциал внутри круглого кольца. Этот предельный переход оказывается в данном примере совершенно нетривиальным. Действительно, он совершается при

$$a_1 = a_2 = R,\ e = 0,\ k = \frac{r}{R} \leqslant 1,\ \mu = -\left(R^2 - r^2\right),\ \nu = -R^2,\ n_1 = n_2 = 0. \tag{2.215}$$

И сразу же сталкиваемся с тем, что при $e \to 0$ в выражении J из (2.210) появляется неопределённость $\frac{0}{0}$. При внимательном рассмотрении эту трудность, однако, всё же удаётся преодолеть, и мы находим

[20] Напомним: определение полных эллиптических интегралов дано в (7.23).

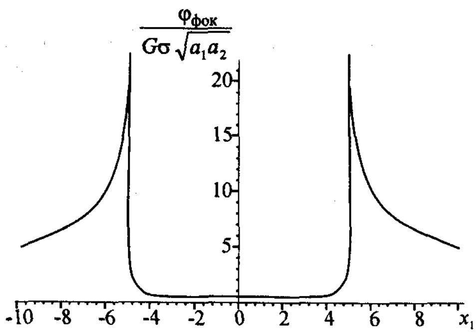


Рис. 23. Сечение поверхности потенциала фокалоида вертикальной плоскостью, содержащей ось Ox_1. Нормировка потенциала и значения полуосей, как и на рис. 22

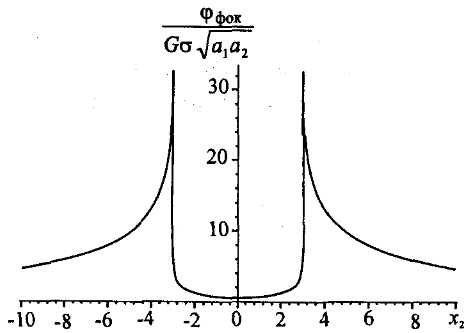


Рис. 24. Сечение поверхности потенциала фокалоида вертикальной плоскостью, содержащей ось Ox_2.Условия те же, что и на рис. 23

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{e^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\left(\frac{\mu+a_1^2}{1-n_1\sin^2\varphi}-\frac{\mu+a_2^2}{1-n_2\sin^2\varphi}\right)= \\
&= a_1^2\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a_1^2\mathrm{E}(k).
\end{aligned}
\tag{2.216}
$$

С учётом этого, из (2.210) действительно получается потенциал внутри круглого кольца

$$
\varphi(r) = \frac{2GM}{\pi R}\mathrm{K}\left(\frac{r}{R}\right). \tag{2.217}
$$

Такой же результат мы имеем и из первой формулы (3.5). Переход к внутреннему потенциалу кольца можно сделать и прямо из пространственного потенциала (2.217). При этом интеграл первого рода в (2.217) приводится к более простому виду с учётом первой из формул (2.22).

В заключение решим следующую задачу.

З а д а ч а 2.17. *Дано однородное с линейной плотностью μ тонкое эллиптическое колечко с полуосями a_1 и a_2. Найти потенциал в центре такого кольца.*

Решение. Параметрическое уравнение эллиптического кольца

$$
x_1 = a_1\cos\theta,\ x_2 = a_2\sin\theta;\ dx_1 = -a_1\sin\theta d\theta,\ dx_2 = a_2\cos\theta d\theta.
$$

Потенциал в центре даётся поэтому интегралом

$$
\varphi_0 = G\mu\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a_1^2\sin^2\theta + a_2^2\cos^2\theta}{a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta}}d\theta. \tag{2.218}
$$

Для нахождения потенциала применим нестандартный и весьма изящный приём. Так как φ_0 не меняется от замены θ на $\theta + \frac{\pi}{2}$, то

$$
\varphi_0 = G\mu\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta}{a_1^2\sin^2\theta + a_2^2\cos^2\theta}}d\theta. \tag{2.219}
$$

Составим полусумму обоих выражений. Дальнейшее просто:

$$\varphi_0 = 4G\mu \cdot \mathrm{K}(k), \quad k = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{2.220}$$

В частном случае круглого кольца $k = 0$, так что $K = \frac{\pi}{2}$ и

$$\varphi_0 = 2\pi G\mu, \tag{2.221}$$

что совпадает, конечно, с результатом из (1.28) при $x_3 = 0$. О круглом кольце см. также § 3.1.

Обратим внимание: *потенциал в центре круглого колечка* (2.221) *при фиксированной одномерной плотности не зависит от радиуса кольца.* ▼

Замечания

Содержание главы разработано автором.

Первоисточник по всей главе: *Б. П. Кондратьев* [21].

§ 2.1. Интегральные формулы (2.7), (2.9), (2.10) и (2.11) для потенциала однородной плоской пластины произвольной формы в точках её плоскости впервые были получены автором в книге [21]. Формулу (2.7) нельзя считать двумерным аналогом формулы Гаусса. Эти прямые методы устраняют явные пробелы в классической теории потенциала.

§ 2.2. Вычисление новым способом потенциала однородного круглого диска в точках его плоскости имеет важное прикладное (и не только методическое) значение.

§§ 2.3–2.5. Рассмотренные задачи о потенциалах сектора и сегмента однородного круглого диска — новые; решения интересны и выражаются через эллиптические интегралы. Заметим, что одной формулой определяется как внешний, так и внутренний потенциалы пластины.

§§ 2.6, 2.7. Потенциалы для пластин треугольной и ромбовидной формы получены через сложные логарифмы. Обратим внимание, что отношение потенциала в центре к потенциалу в угловой точке не зависит от размеров и плотности треугольной пластины.

§ 2.8. Внешний и внутренний потенциал однородной прямоугольной пластины также удаётся представить через элементарные функции.

§ 2.9. Если круглый диск превратить в эллиптический, это приводит к заметному усложнению задачи на потенциал. Найденные решения для эллиптического однородного диска расширяют арсенал точных формул теории потенциала. Заметим, пока мы имеем дело со случаем, когда пробная точка находится в главной плоскости диска. Полный (пространственный!) потенциал однородного эллиптического диска будет получен в § 10.10.

§ 2.10. Рассматривается эллиптическая стратификация дисков и цилиндров.

§§ 2.11–2.13. Задачи о потенциалах невырожденных эллиптических колец — новые по сути и духу и решение их требует немалых усилий. Отметим, что метод дифференциации опирается здесь на полученные в § 2.9 потенциалы однородного плоского эллиптического диска.

Глава 3

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Выход пробной точки из плоскости в трёхмерное пространство ставит перед нами новые задачи.

В общем случае пространственный потенциал плоского тела с поверхностной плотностью $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ даётся интегралом (1.22).

§ 3.1. Тонкое круглое кольцо

Дано гравитирующее одномерное круговое кольцо радиусом R с плотностью μ_0. Действуя вначале прямым методом, заметим, что вклад в потенциал от элемента кольца dL' на точку $P(r, x_3)$ равен

$$d\varphi = G\mu R\frac{d\theta'}{D}. \tag{3.1}$$

Как видно из рис. 25,

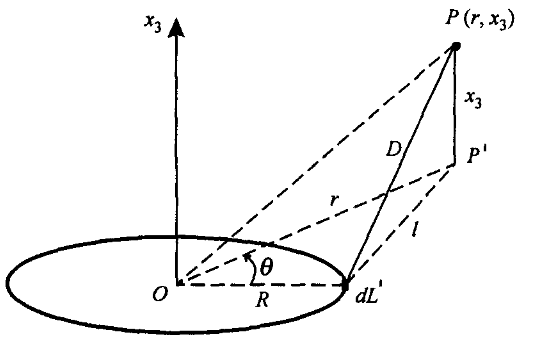


Рис. 25. Круглое одномерное кольцо. Схема к расчёту потенциала в точке $P(r, x_3)$

расстояние между пробной точкой и элементом интегрирования

$$D = \sqrt{R^2 + r^2 + x_3^2 - 2Rr\cos\theta'}. \tag{3.2}$$

Интегрируя по всему кольцу, получим

$$\varphi(r, x_3) = G\mu_0 R\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 + x_3^2 - 2Rr\cos\theta'}}. \tag{3.3}$$

Таким образом, *пространственный потенциал тонкого круглого кольца* равен

$$\varphi_{\text{кольца}}(r, x_3) = \frac{4G\mu_0 R}{\sqrt{(R+r)^2 + x_3^2}} \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + x_3^2}}\right). \tag{3.4}$$

В § 5.15 эта формула будет применена для нахождения потенциала боковой цилиндрической поверхности.

В частности, в точках на оси симметрии $r = 0$, и поэтому потенциал даётся формулой (1.28), где $M = 2\pi R\mu_0$ — масса кольца.

В экваториальной плоскости $x_3 = 0$, и потенциал (3.4) также упрощается

$$\varphi(r) = \frac{4G\mu_0 R}{R+r} \cdot \mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\right) = \begin{cases} 4G\mu_0 \cdot \mathrm{K}\left(\frac{r}{R}\right) & \text{при} \quad r \leqslant R \\ 4G\mu_0 \frac{R}{r} \cdot \mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right) & \text{при} \quad r \geqslant R. \end{cases} \tag{3.5}$$

Эквипотенциали кольца показаны на рис. 26. Абсолютный максимум потенциала достигается в точках самого кольца.

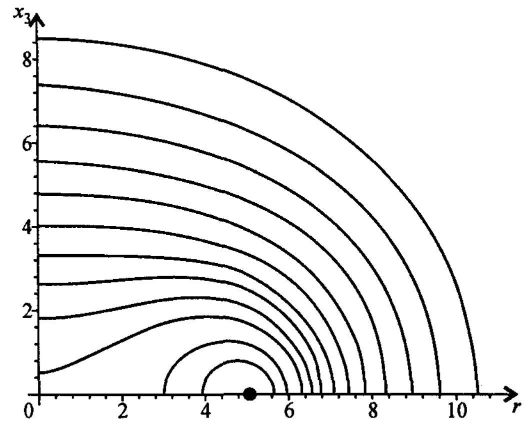


Рис. 26. Меридиональные сечения поверхностей равного пространственного потенциала однородного кругового колечка радиусом $R = 5$. Показана четверть меридиональной плоскости Orx_3. Чёрным кружком отмечено сечение самого кольца. Потенциал кольца, нормированный на $G\mu_0$, убывает по мере перехода от внутренних кривых к внешним и принимает значения: 7.85; 7.0; 6.25; 5.91; 5.57; 5.23; 4.89; 4.55; 4.21; 3.87; 3.53; 3.19

Обратим внимание: потенциал во внешней фиксированной точке кругового кольца заданной массы зависит, в отличие от случая объёмного шара, от радиуса этого кольца[1]. Другими словами, внешний потенциал кольца нельзя заменить потенциалом материальной точки, расположенной в его центре (как можно это было делать для шаров и сферических оболочек в трёхмерном пространстве). Исходя из этого, уже сейчас важно заметить: *чтобы создать тело, эквигравитирующее круглому кольцу, необходимо выйти из плоскости этого кольца*[2].

То же самое методом дифференциации

Этот метод, отличаясь принципиальной простотой (в этом одно из достоинств базовой формулы (2.197)), сталкивается, однако, с трудностями вычислительного характера.

В данном подходе мы опираемся на потенциал однородного круглого диска. Возьмём, например, из (2.18) потенциал диска во внутренней точке. Подставляя его в (2.197) и учи-

[1] Внешний потенциал сплошного круглого диска также зависит от его радиуса.

[2] В гл. 9 мы убедимся, что эквигравитирующие диску и кольцу стержни с мнимым распределением плотности действительно расположены перпендикулярно их главным плоскостям.

тывая, что $\mu_0 = \sigma dR$, находим

$$\varphi_{\text{кольца}}(r) = 4G\mu_0 \left[\mathrm{E}(k) + R\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial R} \right], \quad \left(k = \frac{r}{R} \leqslant 1 \right). \tag{3.6}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)}{k}, \tag{3.7}$$

легко находим потенциал внутри кольца

$$\varphi_{\text{кольца}} = 4G\mu_0 \mathrm{K}\left(\frac{r}{R}\right), \tag{3.8}$$

что совпадает с первой формулой из (3.5).

Аналогично, используя выражение (2.23), можно определить потенциал кольца и во внешней компланарной точке. При этом надо учитывать (3.7) и то, что

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{\mathrm{E}(k)}{k\sqrt{1-k^2}} - \frac{\mathrm{K}(k)}{k}. \tag{3.9}$$

Требуемый потенциал даётся второй формулой из (3.5).

З а д а ч а 3.1. *Найти методом дифференциации внешний потенциал кольца в компланарной точке и доказать, что он совпадает со второй из формул* (3.5).

Наконец, чтобы в целом определить пространственный потенциал круглого кольца, надо воспользоваться уже выражением общего потенциала однородного круглого диска (9.56) и (9.67). Но тогда, как мы уже предупреждали, расчёты с применением формулы (2.197) наталкиваются на немалые трудности. Убедитесь в этом самостоятельно!

З а д а ч а 3.2. *Указанным способом вычислить полный пространственный потенциал кольца и доказать, что результат эквивалентен выражению* (3.4).

§ 3.2. Потенциалы неоднородных круглых дисков

Эта задача имеет важное практическое значение для астрономии. Рассмотрим круглый плоский диск радиусом R с поверхностной плотностью $\sigma(r')$. Выделим в нём элементарное тонкое колечко радиусом r' и толщиной dr'. Одномерная плотность вещества вдоль колечка будет равна $\mu(r') = \sigma(r')\, dr'$. Подставляя теперь $\mu(r')$ в выражение (2.217), получим вклад в потенциал в точке (r, x_3) от выделенного колечка

$$d\varphi = \frac{4G\sigma(r')}{\sqrt{(r+r')^2 + x_3^2}} \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4rr'}{(r+r')^2 + x_3^2}} \right) dr'. \tag{3.10}$$

Интегрируя теперь вклады от всех элементарных колечек диска, находим *полный потенциал неоднородного круглого диска* в точке (r, x_3)

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = 4G \int\limits_0^R \frac{r'\sigma(r')}{\sqrt{(r+r')^2 + x_3^2}} \mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(r+r')^2 + x_3^2}} \right) dr'. \tag{3.11}$$

В частном случае, на оси симметрии Ox_3 (при $r = 0$) формула (3.11) даёт

$$\varphi_{\text{диска}}(0, x_3) = 2\pi G \int_0^R \frac{r'\sigma(r')\,dr'}{\sqrt{r'^2 + x_3^2}}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь потенциал неоднородного диска (3.11) в точках его главной плоскости. Полагая в (3.11) $x_3 = 0$, будем различать случаи внешней и внутренней точек. Имеем:

Случай внешней точки

$(r' \leqslant R \leqslant r)$:

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4Gr \int_0^{R/r} k\,\sigma(k)\,\mathrm{K}(k)\,dk, \quad \left(k = \frac{r'}{r} \leqslant 1\right). \tag{3.13}$$

Случай внутренней точки

$(0 \leqslant r' \leqslant r \leqslant R)$:

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4Gr \left\{ \int_0^1 k\,\sigma(k)\,\mathrm{K}(k)\,dk + \int_{r/R}^1 \frac{\sigma(\tilde{k})}{\tilde{k}^2}\mathrm{K}(\tilde{k})\,d\tilde{k} \right\}. \tag{3.14}$$

В формулах (3.13) и (3.14) модуль k относится к интервалу $0 \leqslant r' \leqslant R \leqslant r$, или $(0 \leqslant r' \leqslant r \leqslant R)$, а модуль $\tilde{k}$ — к интервалу $r \leqslant r' \leqslant R$, причём

$$k = \frac{r'}{r} \leqslant 1; \quad \tilde{k} = \frac{1}{k} = \frac{r}{r'} \leqslant 1. \tag{3.15}$$

Заметим, что при переходе от общей формулы (3.11) к двум (3.13) и (3.14) мы использовали известное равенство

$$\mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)\,\mathrm{K}(k). \tag{3.16}$$

Интересной и нетривиальной является следующая

Задача 3.3. *Найти внутренний потенциал неоднородного круглого диска с распределением плотности*

$$\sigma(r') = \sigma_0\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right)^n, \tag{3.17}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.14).

Сразу заметим: в случае $n = 0$ диск становится однородным, и в (3.14) мы приходим к уже известному результату (2.18).

При других $n = 1, 2, 3, \ldots$, раскладывая выражение для плотности (3.17) по известной формуле бинома

$$\sigma(r') = \sigma_0 \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \left(\frac{r'}{R} \right)^{2\nu} \right] \tag{3.18}$$

и подставляя (3.18) в (3.14), с учётом замен $r' = kr$ и $r' = \frac{r}{k}$, приходим в (3.14) к вычислению интегралов вида

$$I_\alpha = \int k^\alpha \mathrm{K}(k)\, dk. \tag{3.19}$$

Показатель степени α в первом интеграле правой части (3.14) является положительным и нечётным, а во втором интеграле — отрицательным и чётным (пределы интегрирования в том и другом случаях различаются).

Для нечётных α имеем дело с интегралами

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \left[\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\, \mathrm{K}(k) \right], \\ I_3(k) &= \frac{1}{9} \left[(4+k^2)\, \mathrm{E}(k) - (1-k^2)(4+3k^2)\, \mathrm{K}(k) \right], \\ I_5(k) &= \frac{1}{225} \left[(64+16k^2+9k^4)\, \mathrm{E}(k) - (1-k^2)(64+48k^2+45k^4)\, \mathrm{K}(k) \right], \end{aligned} \tag{3.20}$$

а для чётных α:

$$\begin{aligned} I_{-2}(k) &= -\frac{\mathrm{E}(k)}{k}, \\ I_{-4}(k) &= -\frac{1}{9k^3} \left[(1+4k^2)\, \mathrm{E}(k) + 2(1-k^2)\, \mathrm{K}(k) \right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

При подстановке пределов в те и другие интегралы находим, например,

$$\begin{aligned} & I_1(0) = I_3(0) = I_5(0) = \ldots = 0, \\ & I_1(1) = 1, \quad I_3(1) = \frac{5}{9}, \quad I_5(1) = \frac{89}{225}, \ldots \\ & I_{-2}(1) = -1, \quad I_{-4}(1) = -\frac{5}{9}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Так, в самом простом частном случае $n = 1$ *внутренний потенциал неоднородного круглого диска* даётся выражением

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = \frac{8}{9} G\sigma_0 R \left\{ 2\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right) - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathrm{K}\left(\frac{r}{R}\right) \right\}. \tag{3.23}$$

Как видно, это выражение внутреннего потенциала сложнее, чем потенциал однородного диска (2.18) (см. также (3.26)).

При распределении плотности с $n = 2, 3\ldots$ в формуле (3.17) указанный подход также работает, но выражения для потенциала дисков становятся ещё более громоздкими. ▼

В качестве другого примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 3.4. *Найти пространственный потенциал однородного круглого диска радиуса R.*

Решение.

Точка на оси симметрии

Формула (3.12) сразу даёт известное

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + x_3^2} - |x_3| \right). \tag{3.24}$$

Точка внутри диска

По формуле (3.14) получаем

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma r\left\{I_1 + I_2\right\}. \tag{3.25}$$

Здесь

$$I_1 = \int\limits_0^1 k\mathrm{K}(k)\,dk = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{kdk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1,$$

а

$$I_2 = \int\limits_{r/R}^1 \frac{\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)}{\tilde{k}^2}d\tilde{k} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{r/R}^1 \frac{d\tilde{k}}{\tilde{k}^2\sqrt{1-\tilde{k}^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{R}{r}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}\sin^2\varphi} - \cos\varphi\right)d\varphi = \frac{R}{r}\cdot \mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right) - 1.$$

Следовательно, для внутреннего потенциала по формуле (3.25) имеем

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma R\cdot \mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (r \leqslant R). \tag{3.26}$$

Этот результат совпадает с (2.18) и (9.61).

Точка в плоскости диска, но вне его ($\boldsymbol{r \geqslant R}$)

Формула (3.13) даёт

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{диска}}(r) &= 4G\sigma r \int\limits_0^{R/r} k\mathrm{K}(k)\,dk = 4G\sigma r\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R/r} \frac{kdk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \\ &= 4G\sigma r \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}d\varphi.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Беря этот интеграл по частям, находим

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{диска}} &= 4G\sigma\frac{R^2}{r}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}\sin^2\varphi}} = \\ &= \frac{4G\sigma}{r}\left\{r^2\cdot \mathrm{E}\left(\frac{R}{r}\right) - \left(r^2-R^2\right)\cdot \mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right)\right\}, \quad (r \geqslant R).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Выражение (3.28) совпадает с (2.23) и (9.60), полученными другим способом.

Но формулу (3.11) следует, конечно, проверить и в общем случае пространственного потенциала однородного диска, когда $r \neq 0$ и $x_3 \neq 0$.

Общий случай пространственной точки ($r \neq 0$, $x_3 \neq 0$)

В (3.11) имеем дело с двойным интегралом[3]

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{(r+r')^2 + x_3^2 - 4rr' \sin^2 \varphi}}. \tag{3.29}$$

Внутренний интеграл вычисляется просто; после этого имеем

$$I = a \cdot \mathrm{E}\left(\frac{2\sqrt{Rr}}{a}\right) - \frac{\pi}{2}\sqrt{r^2 + x_3^2} - I_1, \tag{3.30}$$

где фигурирует интеграл, который и представляет теперь главные трудности,

$$I_1 = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \ln \frac{R + r\cos 2\varphi + \mathrm{Rad}}{r\cos 2\varphi + \sqrt{r^2 + x_3^2}} d\varphi, \tag{3.31}$$

и для краткости введено обозначение

$$\mathrm{Rad} = \sqrt{R^2 + r^2 + x_3^2 + 2Rr\cos 2\varphi}. \tag{3.32}$$

Далее понадобятся величины

$$a^2 = (R+r)^2 + x_3^2, \quad b^2 = (R-r)^2 + x_3^2. \tag{3.33}$$

Интеграл I_1 из (3.31) берём по частям и приводим его к виду

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4, \tag{3.34}$$

где

$$I_2 = -r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + x_3^2} + r\cos 2\varphi} = -\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r^2 + x_3^2} - |x_3|\right); \tag{3.35}$$

$$I_3 = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{R + r\cos 2\varphi + \mathrm{Rad}}; \tag{3.36}$$

$$I_4 = Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{\mathrm{Rad}\,(R + r\cos 2\varphi + \mathrm{Rad})}. \tag{3.37}$$

Для нахождения I_3 числитель и знаменатель в нём домножим на $R + r\cos 2\varphi - \mathrm{Rad}$ и исключим затем $\sin^2 2\varphi$ из числителя. Часть интегралов тогда берётся, и мы получаем

$$I_3 = -\frac{\pi}{2}R + a \cdot \mathrm{E}(k) + \frac{\pi}{2}\frac{R|x_3|}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} - I_3' x_3^2, \tag{3.38}$$

[3] Далее обозначения интегралов через I_1, I_2 предназначены только для данного подраздела.

где

$$I_3' = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Rad}\, d\varphi}{r^2 \sin^2 2\varphi + x_3^2}, \tag{3.39}$$

а модуль

$$k = \frac{2\sqrt{Rr}}{a}. \tag{3.40}$$

Для взятия I_3' заменим φ на новую переменную x

$$x = \mathrm{Rad} = \sqrt{R^2 + r^2 + x_3^2 + 2Rr\cos 2\varphi}, \tag{3.41}$$

так что

$$\begin{gathered} \cos 2\varphi = \frac{x^2 - R^2 - r^2 - x_3^2}{2Rr}; \quad \sin 2\varphi = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}{2Rr}; \\ d\varphi = -\frac{x dx}{2Rr\sin 2\varphi} = -\frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Приводим I_3' к виду

$$I_3' = 4R^2 \int\limits_b^a \frac{x^2 dx}{\left(\alpha^2 - x^2\right)\left(x^2 - \beta^2\right)\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}, \tag{3.43}$$

где α^2 и β^2 — корни квадратного уравнения

$$x^4 - \left(a^2 + b^2\right)x^2 + a^2 b^2 - 4R^2 x_3^2 = 0, \tag{3.44}$$

вида

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 16R^2 x_3^2}\right] = \left(R \pm \sqrt{r^2 + x_3^2}\right)^2. \tag{3.45}$$

Представляя

$$\frac{x^2}{\left(\alpha^2 - x^2\right)\left(x^2 - \beta^2\right)} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - x^2} - \frac{\beta^2}{\beta^2 - x^2}\right), \tag{3.46}$$

находим

$$I_3' = \frac{4R^2 r^2}{a\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}\left\{\frac{\Pi\left[n_1, k\right]}{\alpha^2 - b^2} - \frac{\Pi\left[n_2, k\right]}{\beta^2 - b^2}\right\}, \tag{3.47}$$

где параметры полных интегралов третьего рода суть

$$n_1 = \frac{\alpha^2\left(a^2 - b^2\right)}{a^2\left(\alpha^2 - b^2\right)}; \quad n_2 = \frac{\beta^2\left(a^2 - b^2\right)}{a^2\left(\beta^2 - b^2\right)}, \tag{3.48}$$

а модуль k, в силу очевидного,

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{Rr}}{a}, \tag{3.49}$$

тот же самый и дан в (3.40).

Подставляя теперь I_3' в (3.38), находим интеграл I_3 (3.36).

Очередь за интегралом I_4 из (3.37). Действуя, как и в случае с I_3, приводим I_4 к виду

$$I_4 = R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x_3^2}{r^2\sin^2\varphi+x_3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{R+r\cos 2\varphi}{\mathrm{Rad}}\right)d\varphi. \tag{3.50}$$

Раскрывая скобки под интегралом, находим

$$\begin{gathered} I_4 = \frac{\pi}{2}R\left(1-\frac{|x_3|}{\sqrt{r^2+x_3^2}}\right)-\frac{R^2}{a}\cdot \mathrm{K}(k)-\frac{a}{2}\cdot \mathrm{E}(k)+ \\ +\frac{R^2+r^2+x_3^2}{2a}\cdot \mathrm{K}(k)+Rx_3^2\left(RI_5+rI_6\right), \end{gathered} \tag{3.51}$$

где интегралы

$$I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(r^2\sin^2 2\varphi+x_3^2\right)\mathrm{Rad}}; \tag{3.52}$$

$$I_6 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\varphi d\varphi}{\left(r^2\sin^2 2\varphi+x_3^2\right)\mathrm{Rad}} \tag{3.53}$$

остаются пока неизвестными.

После замен (3.41) и (3.42) находим

$$I_6 = \frac{1}{2Rr}\left[I_3' - \left(R^2+r^2+x_3^2\right)I_5\right], \tag{3.54}$$

поэтому входящая в (3.51) искомая комбинация двух интегралов

$$Rx_3^2\left(RI_5+rI_6\right) = \frac{x_3^2}{2}\left[I_3' + \left(R^2-r^2-x_3^2\right)I_5\right] \tag{3.55}$$

выражается через уже известный нам I_3' и другой интеграл I_5. Последний имеет вид

$$I_5 = 4R^2\int\limits_b^a\frac{dx}{\left(\alpha^2-x^2\right)\left(x^2-\beta^2\right)\sqrt{\left(a^2-x^2\right)\left(x^2-b^2\right)}}, \tag{3.56}$$

и равен

$$I_5 = \frac{4R^2}{a\left(\alpha^2-\beta^2\right)}\left\{\mathrm{K}(k)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{b^2\Pi\left[n_1,k\right]}{\alpha^2\left(\alpha^2-b^2\right)}-\frac{b^2\Pi\left[n_2,k\right]}{\beta^2\left(\beta^2-b^2\right)}\right\}. \tag{3.57}$$

Собирая известное, находим I_4 из (3.50)

$$I_4 = \frac{\pi}{2}R\left(1-\frac{|x_3|}{\sqrt{r^2+x_3^2}}\right)-\frac{R^2-r^2-x_3^2}{2a}\cdot\mathrm{K}(k)-\frac{a}{2}\cdot\mathrm{E}(k)+\frac{x_3^2}{2}\left[I_3'+\left(R^2-r^2-x_3^2\right)I_5\right]. \tag{3.58}$$

Объединяя I_2, I_3, I_4, находим I_1 из (3.31):

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(|x_3| - \sqrt{r^2 + x_3^2}\right) - \frac{R^2 - r^2 - x_3^2}{2a}\mathrm{K}(k) + \frac{a}{2}\mathrm{E}(k) +$$
$$+\frac{-I_3' + \left(R^2 - r^2 - x_3^2\right) I_5}{2}x_3^2 - x_3^2\frac{2R^2b^2}{a\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}\left\{\frac{\Pi[n_1, k]}{\alpha^2 - b^2} - \frac{\Pi[n_2, k]}{\beta^2 - b^2}\right\} +$$
$$+x_3^2\left(R^2 - r^2 - x_3^2\right)\frac{2R^2}{a\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}\left\{\mathrm{K}(k)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{b^2\Pi[n_1, k]}{\alpha^2\left(\alpha^2 - b^2\right)} - \frac{b^2\Pi[n_2, k]}{\beta^2\left(\beta^2 - b^2\right)}\right\}. \tag{3.59}$$

В итоге, с учётом формулы (3.11), получим *пространственный потенциал однородного круглого диска*

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = 4G\sigma I \tag{3.60}$$

в виде

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = 4G\sigma\left\{-\frac{\pi}{2}x_3 + \frac{R^2 - r^2 - x_3^2}{2a}\left(1 + \frac{4R^2x_3^2}{\alpha^2\beta^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{a}{2}\mathrm{E}(k) +\right.$$
$$\left.+x_3^2\frac{Rb^2}{a}\left(\frac{\Pi[n_1, k]}{\left(\alpha^2 - b^2\right)\left(R + \sqrt{r^2 + x_3^2}\right)} + \frac{\Pi[n_2, k]}{\left(\beta^2 - b^2\right)\left(R - \sqrt{r^2 + x_3^2}\right)}\right)\right\}. \tag{3.61}$$

В частных случаях: на оси симметрии (при $r = 0$) и в плоскости $x_3 = 0$ мы легко приходим в (3.61) к известным нам выражениям потенциала однородного круглого диска. Вообще, в этой книге выражение потенциала однородного круглого диска получено тремя разными способами (применение в этой книге принципиально разных способов — это не самоцель, а важный способ проверки более общих формул!). Здесь тонкий момент: три выражения ((3.61), (9.56) и (9.67)) различаются по форме; тем не менее, все они описывают пространственный потенциал однородного круглого диска и эквивалентны друг другу! ▼

Задача 3.5. *Доказать эквивалентность выражений* (3.61), (9.56) и (9.67).

Разумеется, сказанное выше доказывает также справедливость общей формулы для потенциала неоднородного диска (3.11).

В § 9.10 будет дан метод нахождения эквигравитирующих *мнимых* стержней для неоднородных круглых дисков.

§ 3.3. Широкое кольцо или диск, заполненные розеточной орбитой или множеством кеплеровских эллипсов

3.3.1. Введение

Ещё Гаусс в 1814 г. в теории вековых возмущений предложил применять метод, не требующий разложения пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов и наклонов орбит. Суть метода Гаусса — в остроумном усреднения массы возмущающей планеты. Её орбита заменяется материальным эллиптическим кольцом, линейная плотность которого μ (масса на единицу длины) пропорциональна времени dt прохождения телом данного участка орбиты. Другими словами, линейная плотность колечка обратно пропорциональна скорости тела в данной точке орбиты. Полная масса эллиптического гауссова кольца совпадает с массой самого движущегося тела. Данный метод позволил уверенно вычислять вековые возмущения первого порядка.

Пространственный потенциал отдельного гауссова кольца в точке (r, v, x_3) даётся интегралом

$$\varphi(r, v, x_3) = N \int_0^{2\pi} \frac{dv'}{(1 + e\cos v')\sqrt{\alpha\cos^2 v' + \beta \sin v' \cos v' + \gamma\cos v' + \delta \sin v' + \mu}}, \tag{3.62}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{e^2\left(x_3^2 + r^2\right)}{p^2} - 2\frac{r}{p}e\cos v; \quad \beta = -2\frac{r}{p}e\sin v; \quad \gamma = \frac{2e\left(x_3^2 + r^2\right)}{p^2} - 2\frac{r}{p}\cos v; \\ \delta = -2\frac{r}{p}\sin v; \quad \mu = \frac{x_3^2 + r^2}{p^2} + 1; \quad p = a\left(1 - e^2\right); \quad N = \frac{GM_к}{2\pi a}\sqrt{1 - e^2}. \end{gathered} \tag{3.63}$$

В частном случае кругового кольца всё значительно упрощается: кольцо становится однородным, причём при $e = 0$, $v = 0$, $\alpha = \beta = 0$ интеграл (3.62) легко берётся, см. формулу (3.4). Однако для эллиптического кольца интеграл (3.62) не выражается через какие-либо известные функции[4].

Учитывая сложность задачи с отдельным кольцом Гаусса можно было бы заранее посчитать бесперспективным любое усложнение данной задачи. Однако это не так: как мы сейчас покажем, конфигурация из очень большого числа таких колечек, образующая сплошное неоднородное широкое кольцо, поддается анализу!

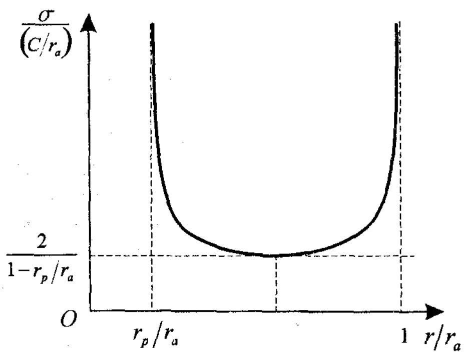


Рис. 27. Плотность в кольце, заполненном розеточной орбитой

Подчеркнём, что сейчас речь идёт о более общей, нежели у Гаусса, задаче.

Дана система из одинаковых компланарных эллиптических орбит, имеющих один и тот же фокус, равномерно распределённых по азимутальному углу оси апсид. Методом, указанным выше, масса каждого из движущихся по эллипсам тел (считаем массы всех тел одинаковыми) «размазывается» по соответствующей ей орбите и получается совокупность *гауссовских* эллиптических колечек. Переходя к пределу большого числа таких колечек, мы получим *материальное неоднородное широкое круговое кольцо*. И здесь важно заметить: именно такое широкое кольцо (или даже сплошной круглый диск) получается также в результате определённого ниже двумерного усреднения массы пробного тела, движущегося по известной в физике и астрономии *розеточной орбите*. Поэтому знание гравитационные свойства таких колец или дисков в небесной механике оказывается столь же важным, как и в случае с одномерным гауссовым колечком.

3.3.2. Постановка задачи

Мы исходим из классического интеграла энергии в задаче двух тел. Если центральная масса M достаточно велика, то интеграл энергии для малого, движущегося по кеплеровскому эллипсу тела имеет вид

[4] Однако частные производные от потенциала кольца Гаусса всё же выражаются через эллиптические интегралы

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{3.64}$$

Так как движение плоское, квадрат полной скорости тела есть сумма двух составляющих

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2, \tag{3.65}$$

причём азимутальная компонента скорости находится из закона сохранения углового момента материальной точки (e — эксцентриситет эллипса)

$$rv_\theta = \sqrt{GM}\sqrt{a\left(1-e^2\right)}. \tag{3.66}$$

Подставляя (3.66) в (3.65), а последнее в (3.64), найдём радиальную компоненту скорости тела как функцию r

$$v_r = \frac{\sqrt{GM}\sqrt{(r_a - r)(r - r_p)}}{r\sqrt{a}}, \quad \begin{cases} r_a = a\,(1+e)\,, \\ r_p = a\,(1-e)\,. \end{cases} \tag{3.67}$$

В кольце на расстоянии $(r, r+dr)$ от притягивающего центра движущееся тело находится в интервале времени

$$dt \sim \mathrm{const}\frac{rdr}{\sqrt{(r_a - r)(r - r_p)}}. \tag{3.68}$$

Составим теперь отношение dt к площади этого элементарного колечка $2\pi rdr$; тогда, имея в виду уже множество указанных эллипсов с равномерно распределёнными по азимутальному углу линиями апсид, будем интерпретировать (в вековом приближении!) это отношение как поверхностную плотность

$$\sigma(r) = \frac{C}{\sqrt{(r_a - r)(r - r_p)}} \tag{3.69}$$

неоднородного материального широкого кольца с внешним r_a и внутренним r_p радиусами. На краях кольца плотность обращается в бесконечность (рис. 27), однако масса данного кольца конечна и легко вычисляется:

$$M_{\text{кольца}} = 2\pi C\int\limits_{r_p}^{r_a}\frac{rdr}{\sqrt{(r_a - r)(r - r_p)}} = \pi^2 C\,(r_a + r_p)\,. \tag{3.70}$$

Это соотношение позволяет выразить постоянную C через массу диска. Подчеркнём, что именно такое кольцо (или даже сплошной круглый диск) будет заполняться со временем и при *движении отдельного тела по розеточной* орбите.

3.3.3. Пространственный потенциал кольца

Итак, рассмотрим «изготовленное» двумя указанными выше способами материальное широкое кольцо с поверхностной плотностью (3.69). Найдём его гравитационный пространственный потенциал. Для этого обратимся к общей формуле для потенциала плоского тела (1.22). Декартовы и цилиндрические координаты пробной точки и точки интегрирования связаны выражениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta, & x_1' &= r'\cos\theta, \\ x_2 &= r\sin\theta, & x_2' &= r'\sin\theta, \\ x_3 &= x_3, & x_3' &= 0. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Применим здесь следующий упрощающий приём: ничего не теряя в общности, в этих формулах можно положить $\theta = 0$, так что расстояние между указанными точками будет равно

$$D = \sqrt{r^2 + x_3^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}. \tag{3.72}$$

Тогда потенциал кольца (1.22) записывается так:

$$\varphi(r, x_3) = G \cdot C \int\limits_{r_p}^{r_a} \frac{r'dr'}{\sqrt{(r_a - r')(r' - r_p)}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 + x_3^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}}. \tag{3.73}$$

Внутренний интеграл здесь равен

$$2\int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{r^2 + x_3^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} = \frac{4}{\sqrt{(r + r')^2 + x_3^2}} \cdot \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4r'r}{(r' + r)^2 + x_3^2}}\right), \tag{3.74}$$

где $\mathrm{K}(...)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода. Следовательно, приводим выражение потенциала кольца к виду

$$\varphi(r, x_3) = 4G \cdot C \int\limits_{r_p}^{r_a} \frac{r'dr'}{\sqrt{(r_a - r')(r' - r_p)}} \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + x_3^2}} \cdot \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4rr'}{(r' + r)^2 + x_3^2}}\right). \tag{3.75}$$

Первая форма потенциала

Делая в (3.75) замену переменной интегрирования

$$r' = \frac{r_a - r_p}{2}\sin\gamma + \frac{r_a + r_p}{2}, \qquad \gamma = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.76}$$

после некоторых упрощений преобразуем (3.75) к виду

$$\varphi(r, x_3) = 4G \cdot C \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{r_a - r_p}{2}\sin\gamma + \frac{r_a + r_p}{2}\right) d\gamma}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} \cdot \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4r\left(\frac{r_a - r_p}{2}\sin\gamma + \frac{r_a + r_p}{2}\right)}{R^2 + x_3^2}}\right), \tag{3.77}$$

где для краткости обозначено

$$R(\gamma, r) = \frac{r_a - r_p}{2}\sin\gamma + \frac{r_a + r_p}{2} + r. \tag{3.78}$$

Такая форма потенциала кольца данного типа весьма компактна и удобна для численных расчётов.

Вместе с тем, для изучения частных случаев выражению пространственного потенциал кольца (3.75) можно придать и другой вид. Но достигается это ценой весьма сложных преобразований.

Вторая форма потенциала

Вернёмся к (3.75) и заменяя $\mathrm{K}(...)$ его стандартным интегральным представлением, приведём выражение для потенциала кольца к виду

$$\varphi(r, x_3) = 4G \cdot C \int\limits_{r_p}^{r_a} \frac{r' dr'}{\sqrt{(r_a - r')(r' - r_p)}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{(r' + r)^2 + x_3^2 - 4r' r \sin^2 \gamma}}. \quad (3.79)$$

Во внутреннем интеграле квадратное алгебраическое уравнение под знаком последнего радикала

$$r'^2 - 2r' r \left(2 \sin^2 \gamma - 1\right) + r^2 + x_3^2 = 0 \quad (3.80)$$

имеет комплексные корни

$$r' = -r \cos 2\gamma \pm i \sqrt{r^2 \sin^2 2\gamma + x_3^2}, \quad (3.81)$$

то выражение (3.79) запишем в требуемом для анализа виде

$$\varphi(r, x_3) = 4G \cdot C \int\limits_0^{\pi/2} d\gamma \int\limits_{r_p}^{r_a} \frac{r' dr'}{\sqrt{(r_a - r')(r' - r_p)[r' - (A + iB)][r' - (A - iB)]}}, \quad (3.82)$$

где

$$A = -r \cos 2\gamma; \quad B = \sqrt{r^2 \sin^2 2\gamma + x_3^2}. \quad (3.83)$$

Далее внутренний интеграл в (3.82) заменой

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \frac{r_a - r_p}{r' - r_p}, \quad (3.84)$$

где

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{r_a - A}{B}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{r_p - A}{B}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 \leqslant \operatorname{tg}\theta_1, \quad \theta_2 \leqslant \theta_1, \quad (3.85)$$

может быть приведён к виду

$$I = \mu \int\limits_\pi^0 \frac{r'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{1 - \widetilde{k}^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\sqrt{\cos \theta_1 \cos \theta_2}}{B} \int\limits_0^\pi \frac{r'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{1 - \widetilde{k}^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.86)$$

причём модуль здесь

$$\widetilde{k}^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (3.87)$$

Кроме того, из (3.84) находим величину r' как функцию от переменной θ:

$$r'(\theta) = \frac{r_a \cos \theta_1 + r_p \cos \theta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.88)$$

Выразив здесь

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta},$$

запишем $r'(\theta)$ в необходимом для интегрирования виде

$$r'(\theta) = b - 2(r_a - r_p)\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2}\frac{1}{a+\cos\theta}, \tag{3.89}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2} < -1, \\ b &= \frac{r_a\cos\theta_1 + r_p\cos\theta_2}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Ввиду очевидного

$$a^2 - 1 = \frac{4\cos\theta_1\cos\theta_2}{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2}, \tag{3.91}$$

вместо (3.89) имеем

$$r'(\theta) = b - \frac{(r_a - r_p)}{2}\frac{a^2-1}{a+\cos\theta}. \tag{3.92}$$

С учётом вида $r'(\theta)$ из (3.92), интеграл (3.86) принимает вид

$$\begin{aligned} I = \frac{\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2}}{B}\Biggl\{2b\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\widetilde{k}^2\sin^2\theta}} - \\ -\frac{r_a - r_p}{2}\left(a^2-1\right)\Biggl(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)\sqrt{1-\widetilde{k}^2\sin^2\theta}} + \\ + \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(a-\cos\theta)\sqrt{1-\widetilde{k}^2\sin^2\theta}}\Biggr)\Biggr\} = \\ = \frac{\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2}}{B}\Biggl\{2b\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\widetilde{k}^2\sin^2\theta}} - \\ -(r_a - r_p)\left(a^2-1\right)a\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(a^2-\cos^2\theta\right)\sqrt{1-\widetilde{k}^2\sin^2\theta}}\Biggr\}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Это I удаётся выразить через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода

$$I = \frac{\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2}}{B}\left\{2b\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right) - (r_a - r_p)\,a\Pi\left[-\frac{1}{a^2-1}, \widetilde{k}\right]\right\}. \tag{3.94}$$

Таким образом, гравитационный пространственный потенциал кольца (3.82) принимает вид

$$\begin{gathered}\varphi(r, x_3)=\frac{4GM_{\text{кольца}}}{\pi^2(r_a+r_p)}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r^2\sin^2 2\gamma+x_3^2}}\times\\ \times\left\{2b\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)-a(r_a-r_p)\,\Pi\left[-\frac{1}{a^2-1},\widetilde{k}\right]\right\}d\gamma,\end{gathered}\tag{3.95}$$

где a и b из (3.90). Есть ещё полезное соотношение между a и b

$$a+\nu=\frac{2b}{r_a-r_p},\qquad \nu=\frac{r_a+r_p}{r_a-r_p}>1.\tag{3.96}$$

С учётом (3.96) исключим величину $2b$ из (3.95), и тогда *гравитационный пространственный потенциал кольца* (3.82) можно представить также в форме

$$\varphi(r, x_3)=\frac{4GM_{\text{кольца}}}{\pi^2\nu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2}}{\sqrt{r^2\sin^2 2\gamma+x_3^2}}\left\{a\left(\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)-\Pi\left[-\frac{1}{a^2-1},\widetilde{k}\right]\right)+\nu\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)\right\}d\gamma.\tag{3.97}$$

В силу соотношений (3.85) углы θ_1 и θ_2 в общем случае зависят от переменной интегрирования γ; то же относится и к модулю $\widetilde{k}$.

Выражение (3.97) (или эквивалентное ему (3.95)) представляет *вторую форму* записи пространственного потенциала кольца. Напомним, что первая форма была дана в (3.77). Хотя вторая форма выглядит даже более громоздкой, чем первая, однако это впечатление обманчиво; те преобразования, которые мы делали над интегралом (3.79) отнюдь не лишние и в некоторых предельных случаях (см. ниже) работать с выражением (3.97) значительно удобнее, чем с (3.77).

На рис.28 показаны кривые равного потенциала, рассчитанные по формуле (3.77).

3.3.4. Потенциал кольца на оси симметрии

Если испытуемая точка находится на оси симметрии кольца Ox_3, то $r=0$ и

$$\begin{gathered}A=0,\quad B=x_3,\quad \cos\theta_1=\frac{x_3}{\sqrt{r_a^2+x_3^2}},\quad \cos\theta_2=\frac{x_3}{\sqrt{r_p^2+x_3^2}},\\ a=\frac{\sqrt{r_a^2+x_3^2}+\sqrt{r_p^2+x_3^2}}{\sqrt{r_p^2+x_3^2}-\sqrt{r_a^2+x_3^2}},\quad \widetilde{k}^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_ar_p+x_3^2}{\sqrt{(r_a^2+x_3^2)(r_p^2+x_3^2)}}\right).\end{gathered}\tag{3.98}$$

Тогда подынтегральная функция в (3.97) от γ вообще не зависит, и мы имеем значительное упрощение

$$\varphi(x_3)=\frac{2GM_{\text{кольца}}}{\pi\nu}\frac{1}{\left((r_a^2+x_3^2)(r_p^2+x_3^2)\right)^{1/4}}\left\{a\left[\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)-\Pi\left[-\frac{1}{a^2-1},\widetilde{k}\right]\right]+\nu\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)\right\}.\tag{3.99}$$

В частности, при больших x_3 асимптотика величин такова:

$$\widetilde{k}\to 0,\quad |a|\to\infty,\quad \mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)\to\frac{\pi}{2},\quad \Pi\to\frac{\pi}{2}.\tag{3.100}$$

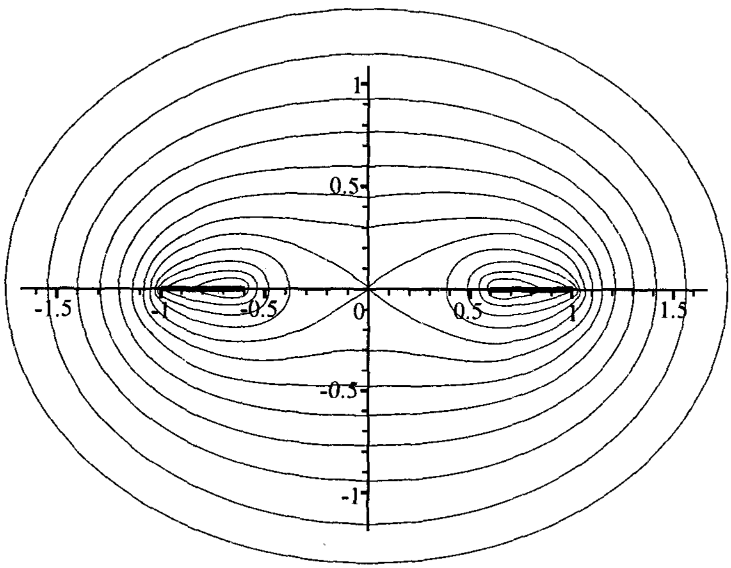


Рис. 28. Линии равного потенциала кольца (сечение кольца — жирной линией), заполняемого розеточной орбитой. Отношение внутреннего радиуса кольца r_p к внешнему r_a равно 3 : 5. Потенциал нормирован на $\frac{4GM_{\text{кольца}}}{\pi^2 \nu r_a}$. Двенадцать изолиний (от внешних к внутренним) рассчитаны для потенциала, начиная со значения 6.127125 и кончая значением 15.8855 с шагом 0.887125

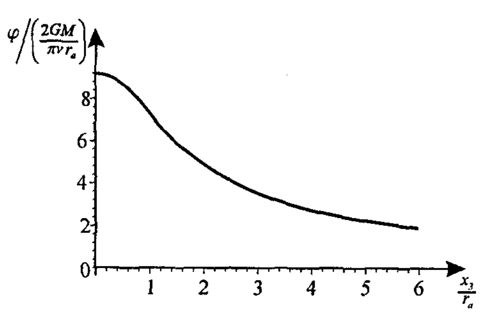


Рис. 29. Потенциал кольца на оси симметрии

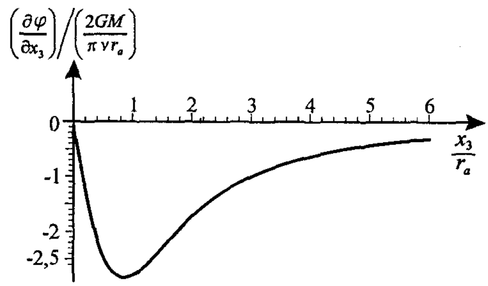


Рис. 30. Сила притяжения на оси симметрии кольца. Модуль имеет максимум при некотором $\frac{x_3}{r_a}$

Член в квадратных скобках в (3.99) исчезает, и тогда

$$\varphi(x_3) \approx \frac{GM_{\text{кольца}}}{x_3}, \tag{3.101}$$

что и подтверждает правильность выражения потенциала (3.99). График функции (3.99) показан на рис. 29.

На рис. 30 показана зависимость силы притяжения кольца на оси симметрии от x_3; характерно здесь наличие точки максимума силы (по модулю).

О разложении в ряд потенциала кольца данного типа см. § 15.3.

З а д а ч а 3.6. *Попытайтесь найти потенциал диска на оси* x_3 *и прямо из выражения* (3.77). *При* $r = 0$ *имеем, казалось бы, значительное упрощение* $\mathrm{K}(0) = \frac{\pi}{2}$ *, но далее путь к цели преграждает интеграл*

$$\varphi(x_3) = 2\pi G \cdot C \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R(\gamma, 0)\, d\gamma}{\sqrt{R^2(\gamma, 0) + x_3^2}}, \tag{3.102}$$

где $R(\gamma, 0)$ следует из (3.78) *при $r = 0$. Взять его — значит выполнить те преобразования, какие мы проделали выше над общим интегралом* (3.79).

Замечания

Материал главы разработан автором.

Первоисточник: *Б. П. Кондратьев* [21].

§ **3.1.** Формула для пространственного потенциала тонкого круглого кольца — сравнительно простая, но полезная для приложений. В следующем параграфе мы применим её для нахождения потенциала неоднородных круглых дисков, а в § 7.3 воспользуемся ею и для нахождения потенциала пустотелого кругового тора.

§ **3.2.** Хотя потенциалы неоднородных круглых дисков необходимы во многих задачах астрономии и физики, в общетеоретическом плане в этой области до сих пор мало что было сделано. Здесь, применяя формулу (3.4), впервые дано общее решение для дисков с произвольным распределением поверхностной плотности $\sigma(r)$.

§ **3.3.** Решение задачи о потенциале материального широкого кольца с плотностью (3.69) ранее не было известно: оно получено в работе автора [67]. На двумерный случай здесь обобщается идея Гаусса об эллиптических кольцах, однако в отличие от одномерной задачи Гаусса, двумерная проблема неожиданно оказывается более доступной для анализа.

Глава 4
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Великолепный аналитик Кирхгоф в классической задаче о логарифмическом потенциале однородного эллиптического цилиндра не дал, однако, ничего нового. Потенциалы таких цилиндров он находил стандартным *косвенным* методом — из потенциалов однородных трёхосных эллипсоидов, устремляя бо́льшую полуось к бесконечности [18]. Другими словами, эллиптические цилиндры рассматривались у него как предельный случай трёхосного эллипсоида. И в этом Кирхгоф не одинок: на этот метод неизменно ссылаются и другие исследователи. Так обстоит дело, например, в современном руководстве [33]. Однако указанный *косвенный* метод весьма ограничен и вообще не работает, если сечение изучаемого цилиндра не эллипс!

Здесь разработан другой, более универсальный метод решения задач для цилиндров с бесконечной образующей. Метод этот — *прямой* в том смысле, что опирается он на исходные формулы (4.10) или (4.13); суть его заключается в интегрировании выражения логарифмического потенциала по области, ограниченной сечением цилиндрической фигуры тела. Но конкретное проведение вычислений требует даже для эллиптического цилиндра применения нестандартных приёмов нахождения интегралов.

Напомним вначале, в чём состоит *косвенный, или асимптотический* метод.

§ 4.1. Однородный эллиптический цилиндр: косвенный метод

Дан неограниченный вдоль оси x_1 эллиптический цилиндр с сечением

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (a_2 \geqslant a_3)\,. \tag{4.1}$$

Полагая этот цилиндр однородным, поставим задачу: исследовать его гравитационные свойства.

Теорема 1. *Уровенные поверхности полной силы притяжения вне однородного эллиптического цилиндра представляются семейством софокусных с ним цилиндрических поверхностей.*

Доказательство.

Выполним предельный переход $a_1 \to \infty$ в формулах (6.10) для компонент притяжения (F_1, F_2, F_3) трёхосного эллипсоида во внешней точке. Вначале убеждаемся, что $F_1 \to 0$ и задача для цилиндра действительно становится двумерной. Сложнее обстоит дело с вычислением двух остальных компонент силы притяжения. Делая предельный переход в интеграле

$$F_2 = -2\pi G\rho a_2 a_3 x_2 \lim_{a_1\to\infty} \left[a_1 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{(a_1^2+v)\,(a_2^2+v)^3\,(a_3^2+v)}} \right], \tag{4.2}$$

в итоге получим выражение

$$F_2 = -4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2^2 - a_3^2} x_2 \left(1 - \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_2^2 + \lambda}}\right). \tag{4.3}$$

Тем же методом находим и компоненту

$$F_3 = -4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2^2 - a_3^2} x_3 \left(\sqrt{\frac{a_2^2 + \lambda}{a_3^2 + \lambda}} - 1\right). \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) и (4.4) представляют собой компоненты силы притяжения однородного цилиндра во внешней точке x_i; здесь λ — эллиптическая координата точки x_i, являющаяся положительным корнем уравнения

$$\frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{4.5}$$

Полная сила притяжения вне цилиндра равна

$$|\boldsymbol{F}_{\text{внешн}}| = 4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2^2 - a_3^2} \left(\sqrt{a_2^2 + \lambda} - \sqrt{a_3^2 + \lambda}\right), \tag{4.6}$$

где мы вновь учли уравнение (4.5). Итак, сила действительно зависит лишь от λ. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На поверхности цилиндра данного типа $\lambda = 0$ и полная сила притяжения всюду имеет одно и то же значение

$$|\boldsymbol{F}_{\text{внешн}}| = 4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3}. \tag{4.7}$$

Теорема 2. *Внутри однородного эллиптического цилиндра уровенные поверхности полной силы притяжения представляются семейством цилиндров, подобных геометрической границе тела.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оно легко следует из того, что внутри цилиндра компоненты силы *линейно* зависят от координат. Действительно, на поверхности и внутри цилиндра выражения (4.3) и (4.4) сводятся (при $\lambda = 0$) к

$$F_2 = -2\pi G\rho A_2 x_2, \quad F_3 = -2\pi G\rho A_3 x_3, \tag{4.8}$$

где коэффициенты даны в (1.33). Тогда

$$|\boldsymbol{F}_{\text{внутр}}| = 4\pi G\rho \sqrt{\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}}, \tag{4.9}$$

что, с учётом (4.3), и требовалось доказать. ■

В согласии с (4.8), гравитационный потенциал внутри однородного эллиптического цилиндра является *квадратичной* функцией от координат пробной точки и даётся известной формулой (1.32).

§ 4.2. Однородный эллиптический цилиндр: прямой метод

Вначале выведем общие формулы, на которые далее будем опираться.

Для однородных тел с логарифмическим потенциалом формула (1.30) даёт

$$\varphi = G\rho \left[2\pi a_2 a_3 \ln(2H) + J\right], \tag{4.10}$$

где $H \to \infty$. Вычислению подлежит здесь только интеграл по площади сечения цилиндра

$$J = -\iint\limits_S \ln\left[(x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2\right] dx_2' dx_3'. \tag{4.11}$$

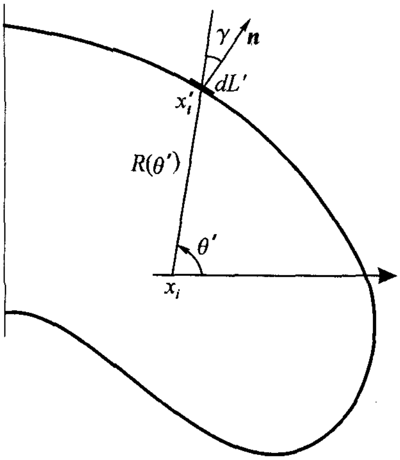


Рис. 31. Схема к нахождению логарифмического потенциала

В случае внутренней точки выражение (4.11) представим контурным интегралом. Вводя полярные координаты с началом в испытуемой точке (см. рис. 31), а именно, $x_1' = x_1 + D\cos\theta'$; $x_2' = x_2 + D\sin\theta'$ и отбрасывая несущественную постоянную, приводим потенциал к виду

$$\varphi = -2G\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta' \int\limits_0^{R(\theta')} D \ln D \, dD = $$

$$= -G\rho \int\limits_0^{2\pi} \left(R^2 \ln R - \frac{R^2}{2}\right) d\theta'. \tag{4.12}$$

Но $R d\theta' = \cos\gamma' \cdot dL'$, так что

$$\varphi(x_2, x_3) = -G\rho \oint \left(R \ln R - \frac{R}{2}\right) \cos\gamma' \, dL', \tag{4.13}$$

где интегрирование проводится по контуру сечения фигуры.

Выражение (4.13) *можно рассматривать как некоторый аналог формулы* (2.7) *для случая логарифмического потенциала.*

Развитый выше прямой подход приложим к широкому классу задач. Например, его можно применять к однородным цилиндрам не только с эллиптическим, но и с более сложными сечениями. И с методической точки зрения он необходим для проверки уже известных результатов.

4.2.1. Внутренний потенциал

Эта задача сводится к вычислению интеграла (4.11) по площади сечения (4.1). Исходим из тождества

$$-2\ln D = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2'}\left[(x_2 - x_2')\ln D\right] + \frac{\partial}{\partial x_3'}\left[(x_3 - x_3')\ln D\right] \tag{4.14}$$

и, подставляя (4.14) в (4.11), находим

$$J = \pi a_2 a_3 + N, \tag{4.15}$$

где обозначено

$$N = \iint\limits_{\frac{x_2'^2}{a_2^2}+\frac{x_3'^2}{a_3^2}\leqslant 1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2'} \left[(x_2 - x_2')\ln D\right] + \frac{\partial}{\partial x_3'} \left[(x_3 - x_3')\ln D\right] \right\} dx_2' dx_3'. \tag{4.16}$$

Применяя формулу Грина (см. гл. 2, примеч. 1), получим контурный интеграл

$$N = \oint\limits_{\frac{x_2'^2}{a_2^2}+\frac{x_3'^2}{a_3^2}=1} \ln D \left[-(x_3 - x_3')\,dx_2' + (x_2 - x_2')\,dx_3'\right]. \tag{4.17}$$

Практическая ценность предлагаемого метода зависит от возможности выполнения интегрирования в последней формуле.

Делая здесь подстановку

$$x_2' = a_2\cos\theta,\ x_3' = a_3\sin\theta\ \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{4.18}$$

получим

$$\begin{gathered} N = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left[a_3\cos\theta\cdot x_2 + a_2\sin\theta\cdot x_3 - a_2a_3\right]\times \\ \times \ln\left[(x_2 - a_2\cos\theta)^2 + (x_3 - a_3\sin\theta)^2\right] d\theta. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Задача сводится к вычислению определённого интеграла (4.19). Но обычным способом такой интеграл не берётся. Эта задача требует творческого подхода.

Чтобы вычислить (4.19) в конечном виде, обратимся к методам функций комплексного переменного. Введём мнимую единицу и представим D в виде

$$D^2 = \left[(x_2 - a_2\cos\theta) + i\,(x_3 - a_3\sin\theta)\right]\cdot\left[(x_2 - a_2\cos\theta) - i\,(x_3 - a_3\sin\theta)\right]. \tag{4.20}$$

Обозначив комплексную координату испытуемой точки через

$$z = x_2 + ix_3, \tag{4.21}$$

запишем

$$\ln D^2 = \ln\left[a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z\right] + \ln\left[a_2\cos\theta - ia_3\sin\theta - z^*\right], \tag{4.22}$$

где * — символ комплексного сопряжения. Интеграл (4.19) принимает форму

$$2N = -a_2a_3\,(R_1 + R_1^*) + a_3x_2\,(R_2 + R_2^*) + a_2x_3\,(R_3 + R_3^*), \tag{4.23}$$

где

$$R_1 = \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z\right) d\theta, \tag{4.24}$$

$$R_2 = \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\ln\left(a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z\right) d\theta, \tag{4.25}$$

$$R_3 = \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\ln\left(a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z\right) d\theta. \tag{4.26}$$

Итак, требуется взять интегралы R_1, R_2 и R_3.

Вычисление интеграла (4.24)

Перед нами стоит непростая задача, и в лоб она не решается[1]. Будем рассматривать этот интеграл как функцию параметра z. Производная от него по z равна

$$\frac{dR_1}{dz} = -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z}. \tag{4.27}$$

С помощью формул

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \; i\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \tag{4.28}$$

приводим (4.27) к виду

$$\frac{dR_1}{dz} = 2i\oint \frac{du}{(a_2 + a_3)\,u^2 - 2zu + (a_2 - a_3)}, \tag{4.29}$$

где $u = e^{i\theta}$ и интеграл берётся по единичной окружности. Корни квадратного уравнения в знаменателе равны

$$u_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - (a_2^2 - a_3^2)}}{a_2 + a_3}. \tag{4.30}$$

При нахождении внутреннего потенциала цилиндра пробная точка z должна находиться внутри исходного эллипса. Легко понять, что корни $u_{1,2}$ лежат тогда внутри единичной окружности. Учитывая это, находим вычеты подынтегрального выражения (4.29); они равны

$$\operatorname*{res}_{u=u_1} f = \frac{1}{2\sqrt{z^2 - a_2^2 + a_3^2}}; \tag{4.31}$$

$$\operatorname*{res}_{u=u_2} f = -\frac{1}{2\sqrt{z^2 - a_2^2 + a_3^2}}. \tag{4.32}$$

Сумма вычетов (4.31) и (4.32) равна нулю, и в итоге получим

$$\frac{dR_1}{dz} = 0. \tag{4.33}$$

Этот результат удивителен: интеграл (4.24), оказывается, вообще не зависит от параметра z, что изначально было вовсе не очевидно.

Ввиду важности результата (4.33), докажем его ещё и другим способом. А именно, с помощью замен (4.28) представим подынтегральную функцию в (4.27) в виде

$$f = \frac{2}{(a_2 + a_3)\,e^{i\theta} + (a_2 - a_3)\,e^{-i\theta} - 2z} \tag{4.34}$$

и разложим её в ряд по степеням $e^{-i\theta}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-in\theta}. \tag{4.35}$$

[1] Найти вычет подынтегральной функции в (4.24) не удаётся.

Подставляя ряд (4.35) под знак интеграла в (4.24) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, ...), \tag{4.36}$$

мы вновь приходим к выводу (4.33).

Таким образом, основываясь на замечательном свойстве (4.33), при вычислении интеграла (4.24) величину z под знаком логарифма можно положить равной нулю. Тогда находим

$$\begin{aligned} R_1(z) = R_1(0) &= \int_0^{2\pi} \ln(a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta)\, d\theta = \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \ln\left(a_2^2\cos^2\theta + a_3^2\sin^2\theta\right) d\theta = 2\pi \ln\frac{a_2 + a_3}{2}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Следовательно,

$$R_1 + R_1^* = 4\pi \ln\frac{a_2 + a_3}{2}. \tag{4.38}$$

Вычисление интеграла (4.25)

Вначале интегрируем его по частям. Проинтегрированный член исчезает, и мы получим

$$R_2(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_2\sin^2\theta - ia_3\sin\theta\cos\theta}{a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z} d\theta. \tag{4.39}$$

Интеграл (4.39) можно представить в таком виде

$$R_2(z) = a_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z} - z\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z}. \tag{4.40}$$

Но первый из интегралов в (4.40), который мы обозначим через P, равен нулю:

$$P = -\frac{dR_1(z)}{dz} = 0, \tag{4.41}$$

поскольку по доказанному выше R_1 из (4.24) не зависит от z. Следовательно, вместо (4.40) останется только интеграл

$$R_2(z) = -z\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta - z}. \tag{4.42}$$

Подынтегральную часть в (4.42) с учётом подстановок (4.28) можно представить в виде

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{(a_2 + a_3)\, e^{i\theta} + (a_2 - a_3)\, e^{-i\theta} - 2z} = \frac{1}{a_2 + a_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-in\theta}. \tag{4.43}$$

Но в силу (4.36) интеграл от ряда в (4.43) тоже равен нулю, так что

$$R_2(z) = -\frac{2\pi}{a_2 + a_3} z. \tag{4.44}$$

Таким образом, находим

$$R_2 + R_2^* = -\frac{4\pi}{a_2 + a_3} x_2. \tag{4.45}$$

Вычисление интеграла (4.26)

Поступая аналогично и с $R_3(z)$ из (4.26), находим

$$R_3 + R_3^* = -\frac{4\pi}{a_2 + a_3} x_3. \tag{4.46}$$

Объединение (4.38), (4.45) и (4.46) даёт величину N из (4.23)

$$N = -2\pi \left\{ a_2 a_3 \ln \frac{a_2 + a_3}{2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} x_2^2 + \frac{a_2}{a_2 + a_3} x_3^2 \right\}. \tag{4.47}$$

Подставляя это N в формулу (4.15), в итоге приходим к выражению для внутреннего потенциала эллиптического цилиндра

$$\widetilde{\varphi}^0_{\text{внутр}}(x_2, x_3) = \pi G \rho \left(2a_2 a_3 \ln \frac{4\sqrt{e}H}{a_2 + a_3} - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2 \right), \tag{4.48}$$

где коэффициенты A_2 и A_3 даны в (1.33).

Формулы для потенциала φ из (4.48) и (1.32) эквивалентны.

4.2.2. Внешний потенциал

Вновь обращаемся к вычислению интеграла (4.11), но действуем теперь иначе. С учётом (4.21), запишем D в виде $D = \sqrt{(z - z')(z^* - z'^*)}$. Тогда

$$J = -\iint\limits_S \left[\ln(z - z') + \ln(z^* - z'^*) \right] dx_2' dx_3' = \operatorname{Re} \widetilde{J}, \tag{4.49}$$

где

$$\widetilde{J} = -2 \iint\limits_S \ln(z - z')\, dx_2' dx_3'. \tag{4.50}$$

Но

$$\ln(z - z') = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z'}{z}\right), \tag{4.51}$$

так что для случая внешней точки, т. е. при условии

$$\left| \frac{z'}{z} \right| < 1 \tag{4.52}$$

логарифм можно разложить в ряд

$$\ln\left(1 - \frac{z'}{z}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{z'}{z}\right)^m, \tag{4.53}$$

и представить (4.50) в виде

$$\widetilde{J} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m} \left[\iint\limits_{S} z'^m dx_2' dx_3' \right]. \tag{4.54}$$

Формула (4.10) примет вид

$$\frac{\varphi}{2\pi G\rho a_2 a_3} - \ln(2H) = -\frac{1}{2}\ln\left(x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{1}{2\pi a_2 a_3}\mathrm{Re}\widetilde{J}. \tag{4.55}$$

Чтобы найти сумму $\widetilde{J}$ из (4.54), рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I = \iint\limits_{S} z'^m dx_2' dx_3'. \tag{4.56}$$

Преобразуем его к контурному

$$I = \iint\limits_{S} \left(x_2' + ix_3'\right)^m dx_2' dx_3' = \oint \left(x_2' + ix_3'\right)^{m+1} dx_3', \tag{4.57}$$

и после параметризации уравнения эллипса (4.18) приводим к такому

$$I = \frac{a_3}{m+1} \int\limits_0^{2\pi} \left(a_2\cos\theta + ia_3\sin\theta\right)^{m+1} \cos\theta d\theta. \tag{4.58}$$

Здесь мы имеем дело с интегралом вида

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left(A\cos\theta + B\sin\theta\right)^N \cos\theta d\theta \quad (N - \text{ нечётное}), \tag{4.59}$$

который берётся смещением начала отсчёта по θ и оказывается равным полиному

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \left(A^2 + B^2\right)^{\frac{N}{2}} \cdot 2\pi \frac{N!!}{(N+1)!!}. \tag{4.60}$$

Следовательно,

$$I = \frac{a_3}{m+1} a_2 \left(a_2^2 - a_3^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot 2\pi \frac{(m+1)!!}{(m+2)!!}, \tag{4.61}$$

и после преобразований этого выражения получим

$$I = \pi a_2 a_3 \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{\nu+1} \alpha^{\nu}, \tag{4.62}$$

где

$$\alpha = \frac{a_2^2 - a_3^2}{4} \geqslant 0, \tag{4.63}$$

причём биномиальный коэффициент равен

$$C_{2\nu}^{\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}. \tag{4.64}$$

Тогда сумма (4.54) записывается в виде

$$\widetilde{J} = \pi a_2 a_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{2\nu}^{\nu}}{\nu(\nu+1)} x^{\nu} \tag{4.65}$$

с комплексным $x = \frac{\alpha}{z^2}$. Очевидно, при условии (4.52) выполняется

$$|x| < \frac{1}{4}. \tag{4.66}$$

Для нахождения суммы $\widetilde{J}$ используем вспомогательный ряд

$$J_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu}^{\nu} x^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \tag{4.67}$$

с помощью которого $\widetilde{J}$ можно представить в виде

$$\widetilde{J} = \pi a_2 a_3 \int_0^x \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x (J_1 - 1)\, dx \right) dx. \tag{4.68}$$

Таким образом, мы находим

$$\widetilde{J} = \pi a_2 a_3 \left[-\frac{1}{2x} - \ln x + \frac{\sqrt{1-4x}}{2x} + \ln \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} \right]_0^x. \tag{4.69}$$

А так как

$$\lim_{x\to 0} \left[-\frac{1}{2x} - \ln x \frac{\sqrt{1-4x}}{2x} + \ln \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} \right] = -1 + \pi i, \tag{4.70}$$

то величина $\widetilde{J}$ оказывается в итоге равной

$$\widetilde{J} = \pi a_2 a_3 \left[1 - \pi i - \ln x + \frac{\sqrt{1-4x} - 1}{2x} + \ln \frac{1-\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} \right]. \tag{4.71}$$

Теперь необходимо подставить найденное выражение $\widetilde{J}$ из (4.71) в (4.55). Делая это, после преобразований получим искомый *внешний* потенциал однородного эллиптического цилиндра

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внешн}}(x_2, x_3) = 2\pi G \rho a_2 a_3 \Bigg\{ \ln \frac{4H\sqrt{e}}{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}} + \\ + \frac{(K-1)\left(x_2^2 - x_3^2\right) - 2L\,|x_2 x_3|}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{(K-1)^2 + L^2}{(K+1)^2 + L^2} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.72}$$

где обозначено

$$K = \sqrt{\frac{R+a}{2}};\ L = \sqrt{\frac{R-a}{2}}, \tag{4.73}$$

а

$$\begin{aligned} &R = \sqrt{a^2+b^2};\\ &a = 1 - 4\alpha\frac{x_2^2 - x_3^2}{r^4};\\ &b = 8\alpha\frac{|x_2x_3|}{r^4}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Здесь $r^2 = x_2^2 + x_3^2$. Кроме того,

$$\sqrt{1-4x} = K + iL, \tag{4.75}$$

и имеют место вспомогательные тождества

$$\begin{aligned} &(K-1)^2 + L^2 = 1 - 2K + R;\\ &(K+1)^2 + L^2 = 1 + 2K + R;\\ &\left[(K-1)^2 + L^2\right]\left[(K+1)^2 + L^2\right] = \frac{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}{r^4}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Формула (4.72) решает поставленную задачу.

Заметим, что *внешний логарифмический потенциал однородного эллиптического цилиндра* (4.72) может быть представлен также в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внешн}}(x_2, x_3) = 2\pi G\rho a_2 a_3 \Bigg\{ &\ln\frac{4H\sqrt{e}}{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}} - \\ &- \frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{K(1-R)r^4}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+R+2K}{1+R-2K} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

4.2.3. Свойства потенциала эллиптического цилиндра

Заметим следующее.

а) Хотя внешний потенциал (4.72) и был получен нами при ограничении (4.52), т. е. при $r > a_2$, тем не менее сам *потенциал не терпит разрыва на круге этого радиуса. Таким образом, потенциал* (4.72), *как и* (4.77) *существует всюду во внешнем пространстве эллиптического цилиндра.*

Далее:

б) На границе цилиндра потенциал не терпит разрыва и внешний потенциал (4.72) сшивается с потенциалом внутренним (4.48).

Задача 4.1. *Доказать утверждение* (б).

в) Во внешней точке потенциал цилиндра (4.72) удовлетворяет уравнению Лапласа; внутренний же потенциал (1.32) удовлетворяет уравнению Пуассона.

Задача 4.2. *Доказать утверждение* (в).

г) Компоненты силы притяжения во внешней точке эллиптического цилиндра, согласно (4.72), оказываются равными

$$F_2 = -4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2^2 - a_3^2} x_2 \left[1 - \delta\right],$$
$$F_3 = -4\pi G\rho \frac{a_2 a_3}{a_2^2 - a_3^2} x_3 \left[\frac{1}{\delta} - 1\right], \tag{4.78}$$

где

$$\delta = K - \frac{x_3}{x_2} L. \tag{4.79}$$

Задача 4.3. *Доказать, что выражения* (4.3), (4.4) и (4.78) *эквивалентны.*

Решение. Для этого сначала надо доказать вспомогательное равенство

$$\delta = \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_2^2 + \lambda}}, \quad \text{т. е. } \lambda = \frac{a_2^2 \delta^2 - a_3^2}{1 - \delta^2}. \tag{4.80}$$

Остальное очевидно. ▼

4.2.4. Цилиндр с круглым сечением

В пределе $a_3 \to a_2$ эллипс сечения превращается в круг с радиусом R. В этом случае внутренний потенциал (4.48) принимает вид

$$\widetilde{\varphi}^0_{\text{внутр}}(r) = \pi G\rho \left(2R^2 \ln \frac{2\sqrt{e}H}{R} - r^2\right). \tag{4.81}$$

Внешний логарифмический потенциал однородного круглого цилиндра следует из выражения (4.77):

$$\widetilde{\varphi}^0_{\text{внешн}}(r) = 2\pi G\rho R^2 \ln \frac{2H}{r}. \tag{4.82}$$

При сохранении массы на единицу длины $M = \pi\rho R^2$ этот потенциал не зависит от радиуса сечения цилиндра R. Следовательно, все такие цилиндры, включая и бесконечно тонкую нить, — *эквигравитирующие.*

§ 4.3. Однородный цилиндр с лемнискатным сечением: внутренний потенциал

На этой задаче, изложенной далее в двух параграфах, покажем, как работает предложенный выше *прямой метод* в тех случаях, когда цилиндр имеет более сложное, чем эллипс, сечение. Перед нами — однородный цилиндр с сечением в форме лемнискаты!

Некоторые формулы для лемнискаты

Лемниската,[2] открытая Якобом Бернулли, является кривой 4-го порядка. В полярных координатах её уравнение

[2] Лемниската Бернулли — кривая, у которой произведение расстояний от каждой её точки до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины фокального расстояния. По форме напоминает восьмёрку на боку. Название восходит к античному Риму, где так называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх.

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \tag{4.83}$$

где для правой и левой петель лемнискаты соответственно

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}. \tag{4.84}$$

Полная площадь лемнискаты равна $S = a^2$. В параметрическом виде форма лемнискаты описывается двумя уравнениями

$$x_1' = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, \; x_2' = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}. \tag{4.85}$$

Для дальнейшего существенно, что интегрирование вдоль левой петли лемнискаты заменой $\theta = \theta - \pi$ сводится к интегрированию по первому интервалу $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ при одновременной замене знака величины a в формуле (4.85), т. е. при

$$x_1' = -a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, \; x_2' = -a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}. \tag{4.86}$$

4.3.1. Постановка задачи

Цилиндр с лемнискатным сечением заполним однородным гравитирующим веществом. Формулу (4.10) запишем сейчас в виде[3]

$$\frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \left(\ln(2H) + \frac{1}{2}\right) = \frac{N}{2a^2}, \tag{4.87}$$

где N из (4.17) с интегрированием по площади лемнискаты. Высота цилиндра $2H \gg a$, и далее эта постоянная рассматривается как величина, удобная для нормировки потенциала φ.

Используя (4.85) и (4.86), после некоторых преобразований получим интеграл для N из (4.17):

$$\frac{2N}{a^2} = -R_0' + \frac{x_1}{a}R_1' + \frac{x_2}{a}R_2', \tag{4.88}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} R_0' &= R_0 + R_0^+, \\ R_1' &= R_1 + R_1^+, \\ R_2' &= R_2 + R_2^+, \end{aligned} \tag{4.89}$$

причём сами вспомогательные интегралы

$$R_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \ln\left(z^2 - a^2 e^{2i\theta}\cos 2\theta\right) d\theta; \tag{4.90}$$

$$R_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\ln z - ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}}{\ln z + ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta; \tag{4.91}$$

$$R_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\ln z - ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}}{\ln z + ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta. \tag{4.92}$$

[3] Для лемнискатного цилиндра оси декартовых координат имеют индексы «1» и «2».

Здесь $z = x_1 + ix_2$ (i — мнимая единица), x_1 и x_2 есть координаты испытуемой точки внутри лемнискаты. Символ $<< + >>$ обозначает комплексное сопряжение. В формуле (4.88) учтён вклад в потенциал в испытуемой точке от обеих (левой и правой) петель лемнискаты.

Таким образом, поставленная задача сводится к вычислению сложных (справочники здесь абсолютно не помогают) определённых интегралов (4.90) — (4.92).

4.3.2. Нахождение вспомогательных интегралов

Преобразование интегралов R_0 и R_0'

Вначале рассмотрим интеграл R_0 из (4.90). Интегрируя его по частям, при замене

$$u = \ln\left(z^2 - a^2 e^{2i\theta}\cos 2\theta\right); \ \nu = \frac{1}{2}\sin 2\theta \tag{4.93}$$

имеем

$$R_0 = 2\ln z + ia^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta e^{4i\theta} d\theta}{z^2 - a^2 e^{2i\theta}\cos 2\theta}. \tag{4.94}$$

Полагая теперь

$$x = \sin 2\theta, \tag{4.95}$$

приводим R_0 к виду

$$R_0 = 2\ln z + \int_{-1}^{+1} \frac{-2x\sqrt{1-x^2} + i\left(1-2x^2\right)}{C+iD}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.96}$$

где введены следующие обозначения:

$$C = b^2 - p^2 - 2\left(1-x^2\right); \ D = 2\left(bp - x\sqrt{1-x^2}\right), \tag{4.97}$$

а нормированные координаты испытуемой точки таковы:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{a}x_1; \ p = \frac{\sqrt{2}}{a}x_2. \tag{4.98}$$

Умножим подынтегральную часть в (4.96) на $C - iD$. Затем, чтобы избавиться от мнимости, найдём комплексно-сопряжённый интеграл R_0^+ и сложим оба выражения; получим

$$\begin{gathered} R_0' = R_0 + R_0^+ = 2\ln\left[\frac{2\left(b^2+p^2\right)}{a^2}\right] + \\ +2\int_{-1}^{+1} \frac{D\left(1-2x^2\right) - 2Cx\sqrt{1-x^2}}{C^2 + Dh2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{gathered} \tag{4.99}$$

Интеграл (4.99) является уже вещественной величиной.

Преобразование интегралов R_1 и R_1'

Делая подстановки

$$u = \ln\frac{z - ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}}{z + ae^{i\theta}\sqrt{\cos 2\theta}}; \ \nu = \int \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} \tag{4.100}$$

и интегрируя по частям интеграл R_1 из (4.91), находим

$$R_1 = 2iaz \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta e^{3i\theta}}{z^2 - a^2 e^{2i\theta}\cos 2\theta} d\theta. \tag{4.101}$$

Вновь делая здесь подстановку (4.95) и принимая во внимание, что

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \tag{4.102}$$

после некоторых преобразований имеем

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{A + iB}{C + iD} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.103}$$

где

$$\begin{aligned} A &= b\left(1 - 2x^2 - \sqrt{1-x^2}\right) - px\left(2\sqrt{1-x^2} - 1\right); \\ B &= bx\left(2\sqrt{1-x^2} - 1\right) + p\left(1 - 2x^2 - \sqrt{1-x^2}\right), \end{aligned} \tag{4.104}$$

причём C и D даны в (4.97). Избавляясь от мнимости в знаменателе (4.103) и складывая с R_1^+, мы вновь получим вещественный интеграл

$$R_1' = R_1 + R_1^+ = \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.105}$$

Преобразование интегралов R_2 и R_2'

После несложных преобразований, для R_2 из (4.92) имеем

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\widetilde{A} + i\widetilde{B}}{C + iD} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.106}$$

так что

$$R_2' = R_2 + R_2^+ = \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\widetilde{A}C + \widetilde{B}D}{C^2 + D^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.107}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= p\left(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2}\right) + bx\left(2\sqrt{1-x^2} + 1\right), \\ \widetilde{B} &= px\left(2\sqrt{1-x^2} + 1\right) - b\left(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2}\right). \end{aligned} \tag{4.108}$$

Преобразование N из (4.88)

Подставляя R_0' из (4.99), R_1' из (4.103) и R_2' из (4.107) в (4.88) и сокращая на общий знаменатель, получим

$$\frac{2N}{a^2} = I - 2\ln\left[\frac{2\left(b^2 + p^2\right)}{a^2}\right], \tag{4.109}$$

где интеграл I имеет вид

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{C \cdot T + DT_1}{\sqrt{1-x^2}\left(C^2+D^2\right)} dx \tag{4.110}$$

с дополнительными обозначениями

$$T = bA + p\widetilde{A} + 4x^2\sqrt{1-x^2};\ T_1 = bB + p\widetilde{B} - 2x\left(1-2x^2\right). \tag{4.111}$$

С учётом известного можно записать:

$$T = -\sqrt{1-x^2}C^2 + CT';\ T_1 = -\sqrt{1-x^2}D^2 + DT_1', \tag{4.112}$$

где

$$\begin{aligned} T' &= \left(p^2+b^2\right)\left(1-2x^2\right) + 2bpx - 2\sqrt{1-x^2}\left(1-3x^2\right); \\ T_1' &= x\left[-2\left(2-3x^2\right) + 2\left(b^2+p^2\right)\sqrt{1-x^2} + p^2 - b^2\right]. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Тогда для I получим

$$I = -2 + \int_{-1}^{+1} \frac{CT' + DT_1'}{\sqrt{1-x^2}\left(C^2+D^2\right)} dx. \tag{4.114}$$

Числитель в подынтегральной части (4.114) допускает дальнейшее упрощение

$$T' = xD + T'';\ T_1' = -x + T'' \tag{4.115}$$

с обозначениями

$$T'' = 2x^2\sqrt{1-x^2} + \left(p^2+b^2\right)\left(1-2x^2\right) - 2\sqrt{1-x^2}\left(1-3x^2\right), \tag{4.116}$$

$$T_1'' = -2x\left(1-x^2\right) + 2x\sqrt{1-x^2}\left(b^2+p^2\right) - 2x\left(2-3x^2\right). \tag{4.117}$$

В результате,

$$I = -2 + \int_{-1}^{+1} \frac{CT'' + DT_1''}{\sqrt{1-x^2}\left(C^2+D^2\right)} dx. \tag{4.118}$$

Числитель в (4.118) равен

$$k = C^2 + D^2 = \mathrm{F}\left(x^2\right) - 8bp \cdot x\sqrt{1-x^2}, \tag{4.119}$$

где

$$\mathrm{F}\left(x^2\right) = \left(b^2+p^2\right)^2 + 4\left(1+p^2-b^2\right)\left(1-x^2\right). \tag{4.120}$$

Необходимо, однако, сделать этот знаменатель чётной функцией от x, для чего умножим подынтегральное выражение в (4.118) на фактор

$$k' = \mathrm{F}\left(x^2\right) + 8bp \cdot x\sqrt{1-x^2}. \tag{4.121}$$

Тогда в (4.118) все интегралы от чётных функций исчезают, и после преобразований мы получим

$$\frac{1}{4}I = -\frac{1}{2} + I_1 + \left(b^2+p^2\right)I_2, \tag{4.122}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(x^2\right) \cdot \left[\left(4x^2 - 1\right)\left(b^2 - p^2\right) + 2\left(1 - 2x^2\right)\right] + 16b^2p^2x^2\left(4x^2 - 3\right)}{F^2\left(x^2\right) - 64b^2p^2x^2\left(1 - x^2\right)} dx; \qquad (4.123)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(x^2\right) \cdot \left[\left(1 + p^2 - b^2\right)x^2 - \left(1 + \frac{p^2 - b^2}{2}\right)\right] + 16b^2p^2x^2\left(1 - x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}\left[F^2\left(x^2\right) - 64b^2p^2x^2\left(1 - x^2\right)\right]} dx. \qquad (4.124)$$

Таким образом, для N из (4.109) мы теперь имеем

$$\frac{N}{2a^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left[\frac{a^2\left(b^2 + p^2\right)}{2}\right] + I_1 + I_2. \qquad (4.125)$$

Нахождение интегралов I_1 и I_2

После многих преобразований подынтегральные части в I_1 из (4.123) и I_2 из (4.124) можно представить в форме

$$I_1' = \frac{x^4 - a_1x^2 + b_1}{x^4 - a_2x^2 + b_2} = 1 + \frac{\left(a_2 - a_1\right)x^2 + b_1 - b_2}{x^4 - a_2x^2 + b_2}, \qquad (4.126)$$

$$I_2' = -\frac{1}{4}\frac{x^4 - \alpha x^2 + \beta}{x^4 - a_2x^2 + b_2} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\left(a_2 - \alpha\right)x^2 + \left(\beta - b_2\right)}{x^4 - a_2x^2 + b_2}\right) \qquad (4.127)$$

со следующими коэффициентами:

$$a_1 = \frac{Q\left(5Q + W + 1\right) + 3E}{4\left(Q^2 + E\right)};\ b_1 = \frac{\left(1 + Q\right)\left(4Q + W\right)}{16\left(Q^2 + E\right)};$$

$$a_2 = \frac{Q\left(4Q + W\right) + 2E}{2\left(Q^2 + E\right)}; \qquad b_2 = \frac{\left(4Q + W\right)^2}{16\left(Q^2 + E\right)} \quad \text{и} \qquad (4.128)$$

$$\alpha = \frac{Q\left(6Q + W + 2\right) + 4E}{4\left(Q^2 + E\right)};\ \beta = \frac{\left(1 + Q\right)\left(4Q + W\right)}{8\left(Q^2 + E\right)} = 2b_1,$$

где для краткости мы переобозначили некоторые функции от нормированных координат b и p испытуемой точки

$$Q = 1 + p^2 - b^2;\ W = \left(b^2 + p^2\right)^2;\ E = 4^2b^2p^2. \qquad (4.129)$$

С учётом вида подынтегральных частей I_1' из (4.126) и I_2' из (4.127) находим выражения интегралов I_1 и I_2:

$$I_1 = 1 + \left(a_2 - a_1\right)\Phi_2 + \left(b_1 - b_2\right)\Phi_1; \qquad (4.130)$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \left(a_2 - \alpha\right)\Phi_2' + \left(\beta - b_2\right)\Phi_1'\right], \qquad (4.131)$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - a_2x^2 + b_2}; \qquad (4.132)$$

$$\Phi_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - a_2 x^2 + b_2} \tag{4.133}$$

и

$$\Phi_1' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(x^4 - a_2 x^2 + b_2\right)}; \tag{4.134}$$

$$\Phi_2' = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}\left(x^4 - a_2 x^2 + b_2\right)}. \tag{4.135}$$

4.3.3. Внутренний потенциал

Подставляя интегралы из (4.130) и (4.131) в (4.125) и затем в (4.88), после громоздких, но элементарных преобразований, получим следующее выражение нормированного потенциала цилиндра:

$$\begin{gathered}\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}} \equiv \frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}eH}{a}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+p^2}{4} + (b_1 - b_2)\,\Phi_1 + \\ + (a_2 - a_1)\,\Phi_2 - \frac{1}{4}\left(b^2+p^2\right)\left[\frac{\pi}{2} + (a_2 - \alpha)\,\Phi_2' + (\beta - b_2)\,\Phi_1'\right].\end{gathered} \tag{4.136}$$

Зависимость $\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}}$ от координат испытуемой точки b и p проявляется двояким образом: в явном виде и неявно, через коэффициенты $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta$. Заметим, что последние величины входят также в интегралы $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$ из (4.132)–(4.135).

Важно отметить, что указанные интегралы $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$ из (4.132)–(4.135) выражаются через элементарные функции.

Нахождение интегралов $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$

Для этого необходимо исследовать биквадратное уравнение

$$x^4 - a_2 x^2 + b_2 = 0, \tag{4.137}$$

имеющее решение

$$x^2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4b_2}}{2}. \tag{4.138}$$

Дискриминант здесь равен

$$d = a_2^2 - 4b_2 = -p^2 b^2 \left[\frac{\left(p^2+b^2\right)^2 + 2\left(p^2 - b^2\right)}{\left(1+p^2-b^2\right)^2 + 4b^2p^2}\right]^2 \leqslant 0. \tag{4.139}$$

На оси симметрии при $p = 0$ и на границе лемнискаты этот определитель оказывается равным нулю:

$$d = 0 \quad \text{для} \quad \left\{\begin{matrix} p = 0 \\ \left(p^2+b^2\right)^2 = 2\left(b^2 - p^2\right) \end{matrix}\right\}. \tag{4.140}$$

Во всех других внутренних точках лемнискаты он оказывается отрицательным. Таким образом, в общем случае уравнение (4.137) имеет внутри лемнискаты комплексные корни, за исключением двух вырожденных случаев (4.140), где корни вещественные. Необходимо рассмотреть эти три случая по отдельности.

Первый вариант вырожденного случая $p = 0$

В этом случае, как мы выяснили, $d = 0$ и поэтому

$$x^4 - a_2 x^2 + b_2 = \left(x^2 - \gamma\right)^2 = 0, \tag{4.141}$$

где

$$\gamma = \frac{a_2}{2} = \frac{\left(2 - b^2\right)^2}{4\left(1 - b^2\right)} \gtrless 0. \tag{4.142}$$

В данном вырожденном варианте

$$T = \frac{2 - b^2}{2\sqrt{1 - b^2}} \geqslant 1; \;\; 0 \leqslant b \leqslant 1, \tag{4.143}$$

и

$$\widetilde{T} = \frac{2 - b^2}{2\sqrt{b^2 - 1}} < 1; \;\; 0 < b \leqslant \sqrt{2}. \tag{4.144}$$

Ясно, что точка $b = 1$ является сингулярной.

Теперь находим интегралы:

$$\Phi_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2 - \gamma\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2T^2\left(T^2 - 1\right)} + \dfrac{1}{4T^3} \ln \dfrac{T+1}{T-1} \\ \dfrac{1}{2\widetilde{T}^2\left(\widetilde{T}^2 + 1\right)} + \dfrac{1}{2\widetilde{T}^3} \arctan \dfrac{1}{\widetilde{T}} \end{array} \right\}; \tag{4.145}$$

$$\Phi_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(x^2 - \gamma\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\left(T^2 - 1\right)} - \dfrac{1}{4T} \ln \dfrac{T+1}{T-1} \\ -\dfrac{1}{2\left(\widetilde{T}^2 + 1\right)} + \dfrac{1}{2\widetilde{T}} \arctan \dfrac{1}{\widetilde{T}} \end{array} \right\}; \tag{4.146}$$

$$\Phi_1' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\left(x^2 - \gamma\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} \dfrac{1 + 2T^2}{T^3\left(T^2 - 1\right)^{3/2}} \\ \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1 - 2\widetilde{T}^2}{\widetilde{T}^3\left(\widetilde{T}^2 + 1\right)^{3/2}} \end{array} \right\}; \tag{4.147}$$

$$\Phi_2' = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}\left(x^2 - \gamma\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{T\sqrt{T^2 - 1}} \left(2 + \dfrac{1 + 2T^2}{T^2 - 1}\right) \\ \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1 - 2\widetilde{T}^2}{\widetilde{T}\sqrt{\widetilde{T}^2 + 1}} \left(2 - \dfrac{1}{\widetilde{T}^2 + 1}\right) \end{array} \right\}. \tag{4.148}$$

Если мы подставим теперь полученные интегралы (4.145)—(4.148) в (4.136) и учтём разности коэффициентов

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= -\frac{\left(2-b^2\right)^3}{16\left(1-b^2\right)}; \quad a_2 - a_1 = -\frac{2-b^2}{4}; \\ a_2 - \alpha &= -\frac{b^2\left(2-b^2\right)}{4\left(1-b^2\right)}; \quad \beta - b_2 = -\frac{b^2\left(2-b^2\right)}{16\left(1-b^2\right)^2}, \end{aligned} \tag{4.149}$$

тогда после преобразований и дальнейших упрощений получим простую формулу

$$\widetilde{\varphi} = \ln\frac{2}{b} + K_1 - \frac{\pi b^2}{16}\left(2 + b^2 K_2\right), \tag{4.150}$$

где

$$K_1 = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\sqrt{1-b^2}}{4}\ln\frac{T+1}{T-1}, \text{ для } b<1 \\ &\frac{\sqrt{b^2-1}}{2}\operatorname{arcctg}\widetilde{T}, \text{ для } b>1 \end{aligned} \right\}, \tag{4.151}$$

$$K_2 = \frac{2}{b^2}\ , b \gtrless 1. \tag{4.152}$$

Второй вариант вырожденного случая в (4.140)

В этом случае испытуемые точки находятся на границе лемнискаты. Тогда коэффициенты (4.128) заметно упрощаются:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}\sin^2 2\theta; \quad a_2 = 2\sin^2 2\theta; \\ b_1 &= \frac{1}{2}\sin^4 2\theta; \quad b_2 = \sin^4 2\theta. \end{aligned} \tag{4.153}$$

Таким образом, действительно $d = a_2^2 - 4b_2 = 0$. Угол θ изменяется в тех же пределах (4.84).

Далее,

$$x^4 - a_2 x^2 + b_2 = \left(x^2 - T^2\right)^2 \tag{4.154}$$

с

$$T^2 = \frac{a_2}{2} = \sin^2 2\theta \leqslant 1, \tag{4.155}$$

так что интегралы (4.132)—(4.135) оказываются такими:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{2}{\sin^2 4\theta} + \frac{1}{4\sin^3 2\theta}\ln\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}; \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{2\cos^2 2\theta} - \frac{1}{4\sin 2\theta}\ln\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}; \\ \Phi_1' &= 0; \ \Phi_2' = 0. \end{aligned} \tag{4.156}$$

Подставляя выражения (4.153) и (4.156) в (4.136), после преобразований мы получаем потенциал на границе цилиндра

$$\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}} = -\frac{\pi}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\ln\frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta \cdot \ln\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}. \tag{4.157}$$

Общий случай $\mathbf{d} < 0$

Рассматривая случай комплексных корней в уравнении (4.137), введём следующие обозначения:

$$q^4 = b_2; \qquad \cos\alpha = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} = \frac{a_2}{2q^2} < 1. \tag{4.158}$$

Ясно, что уравнение

$$x^4 - a_2 x_2 + b^2 = x^4 - 2q^2 x^2 \cos\alpha + q^4 = 0 \tag{4.159}$$

имеет корни

$$\gamma_{1,2} = q^2 e^{\pm i\alpha}. \tag{4.160}$$

Поэтому выражение

$$k = \frac{1}{x^4 - a_2 x_2 + b_2} = \frac{1}{x^4 - 2q^2 x^2 \cos\alpha + q^4} \tag{4.161}$$

мы можем представить в виде

$$k = \frac{1}{\left(x^2 - \gamma_1\right)\left(x^2 - \gamma_2\right)} = \frac{1}{2iq^2 \sin\alpha}\left(\frac{1}{x^2 - q^2 e^{i\alpha}} - \frac{1}{x^2 - q^2 e^{-i\alpha}}\right). \tag{4.162}$$

Дальнейшее разложение на простейшие дроби даёт здесь

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4iq^3 \sin\alpha}\left[\left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{x - qe^{i\frac{\alpha}{2}}} - \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{x - qe^{-i\frac{\alpha}{2}}}\right) - \left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{x + qe^{i\frac{\alpha}{2}}} - \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{x + qe^{-i\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2q^3 \sin\alpha}\left[\frac{q\sin\alpha - x\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(x - q\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{q\sin\alpha + x\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(x + q\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{4.163}$$

Если мы подставим теперь k под знак интеграла (4.132), то получим

$$\Phi_1 = \frac{u + v}{4q^3 \sin\alpha}. \tag{4.164}$$

Тем же самым способом мы находим и выражение для функции

$$k' = \frac{x^2}{x^4 - a_2 x^2 + b_2}.$$

И в конечном итоге получим интеграл (4.133) в виде

$$\Phi_2 = \frac{v - u}{4q \sin\alpha}. \tag{4.165}$$

В формулах (4.164) и (4.165) мы обозначили

$$u = \sin\frac{\alpha}{2} \ln \frac{q^2 + 2q\cos\frac{\alpha}{2} + 1}{q^2 - 2q\cos\frac{\alpha}{2} + 1} \tag{4.166}$$

и

$$v = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\arctan\frac{1-q\cos\frac{\alpha}{2}}{q\sin\frac{\alpha}{2}} + \arctan\frac{1+q\cos\frac{\alpha}{2}}{q\sin\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{4.167}$$

В отличие от Φ_1 и Φ_2, интегралы Φ_1' из (4.134) и Φ_2' из (4.135) содержат в знаменателе радикал $\sqrt{1-x^2}$, вследствие чего эти последние интегралы найти труднее, чем два первых. Тем не менее, и для интегралов Φ_1' и Φ_2' находится способ вычисления.

Нахождение Φ_1'

Вначале вернемся к Φ_1' и представим ее в форме

$$\Phi_1' = \frac{1}{2q^3\sin\alpha}\left(P_1(q) - P_1(-q)\right), \tag{4.168}$$

где

$$P_1(q) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\frac{q\sin\alpha - x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{x^2 - 2qx\cos\frac{\alpha}{2} + q^2}. \tag{4.169}$$

От радикала $\sqrt{1-x^2}$ избавимся подстановкой

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{4.170}$$

После преобразований получим

$$P_1(q) = 2\left[\left(q\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\overline{\Phi}_1 + \left(q\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\overline{\Phi}_2\right], \tag{4.171}$$

где мы ввели обозначения

$$\overline{\Phi}_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\overline{C}_1 t^4 + \overline{C}_2 t^2 + \overline{C}_3}, \tag{4.172}$$

$$\overline{\Phi}_2 = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\overline{C}_1 t^4 + \overline{C}_2 t^2 + \overline{C}_3} \tag{4.173}$$

с коэффициентами

$$\overline{C}_1 = 1 + 2q\cos\frac{\alpha}{2} + q^2;\ \overline{C}_2 = -2\left(1-q^2\right);\ \overline{C}_3 = 1 - 2q\cos\frac{\alpha}{2} + q^2. \tag{4.174}$$

Таким образом, мы сводим интеграл (4.169) к комбинации двух определённых интегралов типа Φ_1 и Φ_2 из (4.132) и (4.133). Конкретно, мы имеем дело со случаем

$$4\overline{C}_1\overline{C}_3 > \overline{C}_2^{\,2}, \tag{4.175}$$

когда уравнение

$$\overline{C}_1 t^4 + \overline{C}_2 t^2 + \overline{C}_3 = 0 \tag{4.176}$$

имеет комплексные корни. Введём обозначения (см. также (4.158))

$$\overline{q}^4 = \frac{\overline{C}_3}{\overline{C}_1} = \frac{1 - 2q\cos\frac{\alpha}{2} + q^2}{1 + 2q\cos\frac{\alpha}{2} + q^2} \tag{4.177}$$

и

$$\cos\overline{\alpha} = -\frac{\overline{C}_2}{2\sqrt{\overline{C}_1\overline{C}_3}} = \frac{1 - q^2}{\sqrt{q^4 - 2q^2\cos\alpha + 1}}, \tag{4.178}$$

после чего с учётом решений (4.164) и (4.165) сразу получаем для интегралов (4.172) и (4.173) следующие выражения:

$$\overline{\Phi}_1 = \frac{\overline{u} + \overline{v}}{4\overline{C}_1\overline{q}^3\sin\overline{\alpha}}; \quad \overline{\Phi}_2 = \frac{\overline{v} - \overline{u}}{4\overline{C}_1\overline{q}\sin\overline{\alpha}}. \tag{4.179}$$

Здесь

$$\overline{u} = \sin\frac{\overline{\alpha}}{2}\ln\frac{\overline{q}^2 + 2\overline{q}\cos\frac{\overline{\alpha}}{2} + 1}{\overline{q}^2 - 2\overline{q}\cos\frac{\overline{\alpha}}{2} + 1} \tag{4.180}$$

и

$$\overline{v} = 2\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}\left[\arctan\frac{1 - \overline{q}\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\overline{q}\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}} + \arctan\frac{1 + \overline{q}\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\overline{q}\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}}\right]. \tag{4.181}$$

Далее, для второго члена в (4.168) сразу имеем

$$P_1(-q) = -\left[\left(q\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{\Phi}_1 + \left(q\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{\Phi}_2\right], \tag{4.182}$$

где интегралы $\widetilde{\Phi}_1$ и $\widetilde{\Phi}_2$ получаются из $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ соответственно изменением знака величины q. Конкретно, при

$$q \to -q \tag{4.183}$$

мы также имеем

$$\overline{q} \to \frac{1}{\overline{q}}; \quad \overline{C}_1 \Leftrightarrow \overline{C}_3, \tag{4.184}$$

причём

$$\widetilde{\alpha} \equiv \overline{\alpha}; \quad \overline{u} = \widetilde{\overline{u}} \tag{4.185}$$

и $\overline{v}$ заменяется на $\widetilde{\overline{v}}$. Следовательно, мы имеем решения

$$\widetilde{\overline{\Phi}}_1 = \frac{\overline{u} + \widetilde{\overline{v}}}{4\overline{C}_1\overline{q}\sin\overline{\alpha}}; \quad \widetilde{\overline{\Phi}}_2 = \frac{\widetilde{\overline{v}} - \overline{u}}{4\overline{C}_1\overline{q}^3\sin\overline{\alpha}}, \tag{4.186}$$

где $\widetilde{\overline{v}}$ получается из $\overline{v}$ заменой $\overline{q} \to \frac{1}{\overline{q}}$, а именно

$$\widetilde{\overline{v}} = 2\cos\frac{\widetilde{\alpha}}{2}\left[\arctan\frac{\overline{q} - \cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}} + \arctan\frac{\overline{q} + \cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}}\right]. \tag{4.187}$$

Если теперь подставить $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\overline{\Phi}}_1$ и $\overline{\overline{\Phi}}_2$ из (4.179) и (4.186) в $P_1(q)$ из (4.171) и $P_1(-q)$ из (4.182), и затем последние в (4.168), тогда имеем

$$\Phi_1' = \frac{1}{q^3 \sin\alpha}\left[q\sin\alpha\left(\overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_2 + \overline{\overline{\Phi}}_1 + \overline{\overline{\Phi}}_2\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\frac{\alpha}{2}\left(-\overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_2 + \overline{\overline{\Phi}}_1 - \overline{\overline{\Phi}}_2\right)\right], \tag{4.188}$$

или, после простых преобразований и упрощений,

$$\Phi_1' = \frac{2q\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\overline{q}^2\right) + \overline{q}^2 - 1}{8\overline{C}_1 q^3 \overline{q}^3 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\overline{\alpha}}\left(\overline{v} + \overline{\overline{v}}\right). \tag{4.189}$$

Следует подчеркнуть, что величины $\overline{u}$ в (4.189) взаимно сократились.

Нахождение Φ_2'

Прежде всего, для Φ_2' из (4.135) мы теперь имеем

$$\Phi_2' = \frac{1}{4q\cos\frac{\alpha}{2}}\left[P_2(q) - P_2(-q)\right]. \tag{4.190}$$

Здесь

$$P_2(q) = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}\left(x^2 - 2qx\cos\frac{\alpha}{2} + q^2\right)}. \tag{4.191}$$

Делая подстановку (4.170), получаем

$$P_2(q) = 2\left(\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2\right) \tag{4.192}$$

с известными уже $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ из (4.179). Таким образом, интеграл

$$P_2(-q) = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}\left(x^2 + 2qx\cos\frac{\alpha}{2} + q^2\right)} \tag{4.193}$$

сводится к

$$P_2(-q) = 2\left(\overline{\overline{\Phi}}_1 - \overline{\overline{\Phi}}_2\right) \tag{4.194}$$

с известными $\overline{\overline{\Phi}}_1$ и $\overline{\overline{\Phi}}_2$ из (4.186). В результате мы находим

$$\Phi_2' = \frac{1}{2q\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2 - \overline{\overline{\Phi}}_1 + \overline{\overline{\Phi}}_2\right), \tag{4.195}$$

или

$$\Phi_2' = \frac{1-\overline{q}^2}{8q\cos\frac{\alpha}{2}\overline{C}_1\overline{q}^3 \sin\overline{\alpha}}\left(\overline{v} + \overline{\overline{v}}\right). \tag{4.196}$$

Здесь взаимно уничтожаются величины $\overline{u}$.

Как нам известно,

$$\overline{q} < 1, \tag{4.197}$$

тогда, как легко видеть, величины $\overline{v}$ из (4.181) и $\overline{\overline{v}}$ из (4.187) определяются следующими равенствами

$$\overline{v} = 2\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}\left(\pm\pi - \arctan\frac{2\overline{q}\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}}{1-\overline{q}^2}\right) \tag{4.198}$$

и

$$\overline{\overline{v}} = 2\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}\cdot\arctan\frac{2\overline{q}\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}}{1-\overline{q}^2}, \tag{4.199}$$

где знак берётся в соответствии с

$$\begin{aligned} &+\pi \text{ для } \sin\frac{\overline{\alpha}}{2} > 0, \\ &-\pi \text{ для } \sin\frac{\overline{\alpha}}{2} < 0. \end{aligned} \tag{4.200}$$

Следовательно,

$$\overline{v} + \overline{\overline{v}} = \pm 2\pi\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}. \tag{4.201}$$

Подставляя здесь $\left(\overline{v} + \overline{\overline{v}}\right)$ из (4.201) в (4.189) и (4.196), после очевидных преобразований имеем

$$\Phi_1' = \frac{\pi}{\left|\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}\right|}\frac{2q\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\overline{q}^2\right)+\overline{q}^2-1}{8\overline{C}_1 q^3\overline{q}^3\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{4.202}$$

$$\Phi_2' = \frac{\pi}{\left|\sin\frac{\overline{\alpha}}{2}\right|}\frac{1-\overline{q}^2}{8\overline{C}_1 q\overline{q}^3\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.203}$$

Таким образом, подставляя найденные интегралы Φ_1, Φ_2 из (4.164), (4.165) и интегралы Φ_1', Φ_2' из (4.202), (4.203) в основную формулу (4.136), мы получим окончательное выражение для *потенциала однородного цилиндра с лемнискатным сечением* в произвольной внутренней точке. Основная формула (4.136) с двумя её специальными вариантами (4.150) и (4.157) и даёт общее решение поставленной задачи в элементарных функциях.

Обсуждение

Из предыдущих формул легко видеть, что найденный потенциал является симметрической функцией по отношению как к оси Ox_1, так и к оси Ox_2. Действительно,

$$\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}} = \widetilde{\varphi}_{\text{внутр}}\left(p^2, b^2\right). \tag{4.204}$$

Это свойство потенциала является прямым следствием геометрической симметрии лемнискаты.

В центральной точке

$$\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}} = 0, \qquad \frac{d\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}}}{db} = 0, \qquad \frac{d\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}}}{dp} = 0, \qquad \text{при} \quad b = p = 0, \tag{4.205}$$

т. е. в центре лемнискаты приведённый потенциал и компоненты силы притяжения равны нулю.

Кривые равного потенциала внутри цилиндра показаны на рис. 32.

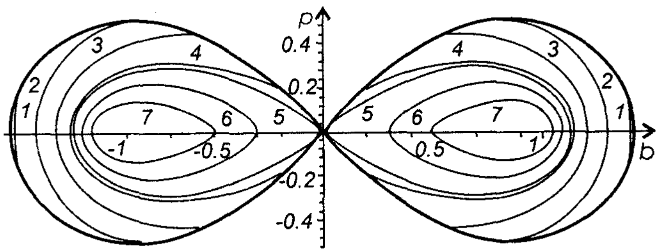


Рис. 32. Кривые равного потенциала $\widetilde{\varphi}_{\text{внутр}} = \text{const}$. Два семейства кривых разделены сепаратрисой 5 : внутри неё изопотенциали замкнутые, а вне — разомкнуты и выходят на контур цилиндра. Потенциал возрастает от внутренних кривых к внешним (цифры от 7 до 1)

§ 4.4. Однородный цилиндр с лемнискатным сечением: внешний потенциал

Дан однородный гравитирующий цилиндр с лемнискатным сечением (4.83). Его потенциал в точке (x_1, x_2) даётся выражением (2.1). Расстояние между испытуемой точкой (x_1, x_2) и точкой интегрирования (x_1', x_2') представим так

$$D = |z - z'| = \sqrt{(z - z')\,(z^* - z'^*)}, \tag{4.206}$$

где

$$z = x_1 + ix_2; \qquad z' = x_1' + ix_2' \tag{4.207}$$

и * — символ комплексного сопряжения. Потенциал (2.1) приводится тогда к виду

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{2G\rho} - a^2 \ln(2H) &= -\frac{1}{2} \iint \{\ln(z - z') + \ln(z^* - z'^*)\}\, dx_1' dx' = \\ &= -\mathrm{Re} \iint \ln(z - z')\, dx_1' dx'. \end{aligned} \tag{4.208}$$

$\ln(z - z')$ запишем в форме

$$\ln(z - z') = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z'}{z}\right), \tag{4.209}$$

и в случае внешней точки

$$\left|\frac{z'}{z}\right| < 1 \tag{4.210}$$

используем разложение в степенной ряд

$$\ln\left(1-\frac{z'}{z}\right)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z'}{z}\right)^m. \tag{4.211}$$

Подставляя (4.211) в (4.209) и (4.208), имеем

$$\frac{\varphi_{\text{внешн}}}{2G\rho}-a^2\ln(2H)=-\mathrm{Re}\left\{a^2\ln z-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}z^{-m}\iint z'^m dx_1' dx_2'\right]\right\}. \tag{4.212}$$

В полярных координатах для интеграла в скобках имеем

$$J=\iint z'^m dx_1' dx_2'=\iint r^m e^{im\theta} r\,dr\,d\theta=\int e^{im\theta}d\theta\int\limits_0^{R(\theta)} r^{m+1}dr, \tag{4.213}$$

или, с учётом (4.83),

$$J=\frac{a^{m+2}}{m+2}\int\cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\,e^{im\theta}d\theta. \tag{4.214}$$

После замены

$$e^{im\theta}=\cos(m\theta)+i\sin(m\theta) \tag{4.215}$$

имеем

$$J=\frac{a^{m+2}}{m+2}\left\{\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\cos(m\theta)\,d\theta+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\cos(m\theta)\,d\theta\right\}, \tag{4.216}$$

так как

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\sin(m\theta)\,d\theta=0. \tag{4.217}$$

Подстановка

$$\tilde{\theta}=\theta-\pi \tag{4.218}$$

приводит последний в (4.216) интеграл к виду

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=(-1)^m\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{\frac{m}{2}+1}\left(2\tilde{\theta}\right)\cos\left(m\tilde{\theta}\right)d\tilde{\theta}. \tag{4.219}$$

Следовательно,

$$J = \frac{a^{m+2}}{m+2}\left[1+(-1)^m\right]\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{m}{2}+1}(2\theta)\cos(m\theta)\,d\theta. \tag{4.220}$$

Полагая здесь

$$m = 2\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, ..., \tag{4.221}$$

получим

$$J = 2\frac{a^{2(\nu+1)}}{\nu+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\nu+1}(2\theta)\cos(2\nu\theta)\,d\theta. \tag{4.222}$$

После новой замены

$$\psi = 2\theta \tag{4.223}$$

имеем

$$J = \frac{a^{2(\nu+1)}}{\nu+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu+1}(\psi)\cos(\nu\psi)\,d\psi. \tag{4.224}$$

Этот интеграл равен

$$J = \frac{a^{2(\nu+1)}}{\nu+1}\frac{(\nu+1)!}{(2\nu+1)!!} = a^{2(\nu+1)}\frac{\nu!^2 2^\nu}{(2\nu+1)!}. \tag{4.225}$$

Подставляя J из (4.225) в (4.212), мы, с учётом (4.221), получим потенциал в виде

$$\frac{\varphi_{\text{внешн}}}{2G\rho a^2} - \ln(2H) = -\mathrm{Re}\left\{\ln z - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!\,(\nu-1)!2^\nu}{(2\nu+1)!}\left(\frac{2a^2}{z^2}\right)^\nu\right\}, \tag{4.226}$$

или же

$$\tilde{\varphi}_{\text{внешн}} = \frac{\varphi_{\text{внешн}}}{2G\rho a^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}eH}{a}\right) = -1 - \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+p^2}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!\,(\nu-1)!}{(2\nu+1)!}s^\nu, \tag{4.227}$$

где

$$s = \frac{2a^2}{z^2} = \frac{4}{(b+ip)^2} \tag{4.228}$$

и

$$b = \sqrt{2}\frac{x_1}{a}; \quad p = \sqrt{2}\frac{x_2}{2}. \tag{4.229}$$

Таким образом, следует просуммировать ряд,

$$N = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!\,(\nu-1)!}{(2\nu+1)!}s^\nu, \tag{4.230}$$

который входит в потенциал (4.227).

Нахождение суммы N

Чтобы просуммировать ряд N из (4.230), обратимся к известному ряду

$$(\arcsin x)^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2\, 2^{2\nu}}{(2\nu+1)!\,(\nu+1)} x^{2\nu+2}, \quad x \leqslant 1. \tag{4.231}$$

Дифференцируя его по x, найдём

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x)^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2\, 2^{2\nu}}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} = 2x\left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu+1)!}\left(4^2\right)^{\nu}\right\}, \tag{4.232}$$

где

$$\frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu+1)!}\left(4x^2\right)^{\nu}. \tag{4.233}$$

Разделив это выражение на $4x^2$:

$$\frac{\arcsin x}{4x^3\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu+1)!}\left(4x^2\right)^{\nu-1} \tag{4.234}$$

и интегрируя по $s = 4x^2$, получим

$$2\int_0^x \left(\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2\,(\nu-1)!}{(2\nu+1)!}\left(4x^2\right)^{\nu}. \tag{4.235}$$

Обратим теперь внимание, что в правой части выражения (4.235) стоит ряд для N из (4.230) при конкретных

$$s = 4x^2 = \frac{4}{(b+ip)^2};\; x = \frac{1}{b+ip}. \tag{4.236}$$

Таким образом, для N имеем уже приемлемую формулу

$$N = 2\int_0^x \left(\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx, \tag{4.237}$$

которая легко интегрируется:

$$\int_0^x \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{\ln x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x\right\}_0^x, \tag{4.238}$$

так что искомая сумма будет равна

$$N = -2\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x\right\}_0^x = -2\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x - 1\right\}. \tag{4.239}$$

Итоговое выражение для потенциала цилиндра

С учётом (4.239), для потенциала $\tilde{\varphi}_{\text{внешн}}$ из (4.227) имеем

$$\tilde{\varphi}_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+p^2}{4} - \operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-x^2}\frac{\arcsin x}{x}\right\}. \tag{4.240}$$

Но так как (см. (4.236))

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{(b+ip)^2-1} = i\sqrt{1-(b+ip)^2}, \tag{4.241}$$

то

$$\arcsin x = \frac{1}{i}\ln\left[\frac{i}{b+ip} + \sqrt{1-\frac{1}{(b+ip)^2}}\right] = \frac{1}{i}\ln\frac{i+i\sqrt{1-(b+ip)^2}}{b+ip}, \tag{4.242}$$

и выражение в фигурных скобках (4.240) равно

$$\sqrt{1-(b+ip)^2}\ln\frac{i+i\sqrt{1-(b+ip)^2}}{b+ip}. \tag{4.243}$$

После очевидных преобразований

$$\sqrt{1-(b+ip)^2} = \sqrt{x-iy} = K - iL, \tag{4.244}$$

где

$$K = \sqrt{\frac{r+x}{2}};\ L = \sqrt{\frac{r-x}{2}} \tag{4.245}$$

и

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad x = 1-b^2+p^2; \quad y = 2bp, \tag{4.246}$$

логарифм запишем в виде

$$\ln\frac{i+i\sqrt{1-(b+ip)^2}}{b+ip} = -\ln(b+ip) + \ln\{L + i(1+K)\}, \tag{4.247}$$

так что

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2}\frac{\arcsin x}{x} = (K-iL)\left[-\frac{1}{2}\ln\left(b^2+p^2\right) - i\arctan\left|\frac{p}{b}\right| + \right.\\ \left. +\frac{1}{2}\ln\left[L^2+(1+K)^2\right] + i\arctan\frac{1+L}{K}\right],\end{aligned} \tag{4.248}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-x^2}\frac{\arcsin x}{x}\right\} = \frac{1}{2}K\ln\frac{L^2+(1+K)^2}{b^2+p^2} + \\ +L\left[\arctan\frac{1+K}{L} - \arctan\left|\frac{p}{b}\right|\right].\end{aligned} \tag{4.249}$$

Окончательно, потенциал $\tilde{\varphi}_{\text{внешн}}$ из (4.240) выражается через элементарные функции

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+p^2}{4} - \frac{1}{2}K\ln\frac{L^2+(1+K)^2}{b^2+p^2} - \\ -L\left(\arctan\frac{1+K}{L} - \arctan\left|\frac{p}{b}\right|\right).\end{aligned} \tag{4.250}$$

Обратим внимание, что величины L из (4.245) и y из (4.246) имеют одинаковые знаки. Именно поэтому в формулах (4.248)–(4.250) при условии $L > 0$ аргумент $\frac{p}{b}$ взят по модулю.

Важно следующее: хотя формула (4.250) и была получена при условии (4.210), т. е. при $b^2 + p^2 \geqslant 2$, но на границе лемнискаты

$$b^2 + p^2 = 2 \tag{4.251}$$

внешний потенциал, как легко видеть, не имеет разрыва. Следовательно, формула (4.250) представляет потенциал однородного лемнискатного цилиндра *во всём внешнем для него пространстве.*

На бесконечности

$$\lim_{b,p\to\infty} \tilde{\varphi}_{\text{внешн}} = -\infty, \tag{4.252}$$

что при используемой нормировке и следовало ожидать.

При «посадке» испытуемой точки на центр лемнискатного сечения, т. е. при $(b, p) \to 0$, выполняются соотношения

$$x \to 1, \quad y \to 0, \quad r \to 1;\ K \to 1, \quad L \to 0, \tag{4.253}$$

и потенциал в центральной точке равен

$$\lim_{b,p\to 0} \tilde{\varphi}_{\text{внешн}} = 0. \tag{4.254}$$

Разумеется, этот результат не противоречит заключению (4.205).

§ 4.5. Логарифмические потенциалы оболочек

4.5.1. Метод дифференциации для цилиндров

Тонкие оболочки возникают, как мы знаем из § 2.10, при эллиптической стратификации сечения цилиндров бесконечной длины. Внешний или внутренний логарифмический потенциал элементарных цилиндрических оболочек плотности ρ и с полуосями эллиптического сечения $a_2 \geqslant a_3$ находим по формуле (ср. с (2.197))

$$\varphi_{\text{об}}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{d}{dm}\varphi_{\text{цил}}(m, \boldsymbol{x})\right]_{m=1} dm, \tag{4.255}$$

где $\varphi_{\text{цил}}(x_2, x_3)$ есть соответственно внешний (4.72) или внутренний (4.48) потенциал однородного эллиптического цилиндра, причём в исходных потенциалах предварительно делается замена

$$a_2 \to a_2 m, \ a_3 \to a_3 m \alpha_3(m). \tag{4.256}$$

4.5.2. Элементарный цилиндрический гомеоид

При произвольном $\alpha_3(m)$ нахождение потенциалов оболочек, и внешнего особенно, являются трудоёмким делом. В некоторых важных частных случаях вычисления всё же удаётся довести до конца. В итоге приходим к следующим результатам.

Теорема 3. *Логарифмический потенциал в полости однородного цилиндрического гомеоида не зависит от координат испытуемой точки.*

Доказательство.

В данном случае $\alpha_3(m) = 1$, так что при гомотетической замене полуосей коэффициенты потенциала

$$A_2 = \frac{2a_3}{a_2 + a_3}, A_3 = \frac{2a_2}{a_2 + a_3}$$

не будут зависеть от параметра m; следовательно, при взятии производной от потенциала (4.48) по m в (4.255) исчезнут оба члена, зависящие от координат (x_2, x_3). ∎

Следствие 1. *В полости двумерного однородного цилиндрического гомеоида (как толстого, так и тонкого) сила притяжения отсутствует. Для цилиндрических гомеоидов, как и для трёхмерных эллипсоидальных, выполняется, следовательно, аналог теоремы Ньютона для трёхмерного случая (§ 5.8).*

Теорема 4. *Логарифмический потенциал однородного элементарного цилиндрического гомеоида с полуосями $a_2 \geqslant a_3$ и массой на единицу длины $M_{гом}$ во внешней точке (x_2, x_3) даётся выражением*

$$\varphi_{гом}(x_2, x_3) = M_{гом} G \left\{ \text{const} + \ln \frac{1-\delta}{1+\delta} \right\}, \tag{4.257}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_2^2 + \lambda}}, \tag{4.258}$$

а λ — эллиптическая координата точки (x_2, x_3), являющаяся положительным корнем квадратного уравнения

$$\frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{4.259}$$

Доказательство.

В правую часть общей формулы (4.255) следует подставить внешний потенциал однородного эллиптического цилиндра из (4.72). Делая в последнем замену полуосей (2.192), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{гом}}(x_2, x_3) = 2\pi G \rho a_2 a_3 dm \left\{ \text{const} + \frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) \frac{dK}{dm} - 2\left|x_2 x_3\right| \frac{dL}{dm}}{a_2^2 - a_3^2} + \right. \\ \left. + \frac{r^4}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2} \left[K \frac{dR}{dm} - (1+R) \frac{dK}{dm} \right] + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R - 2K}{1 + R + 2K} \right\}, \end{aligned} \tag{4.260}$$

где K, L, R даются в (4.73) и (4.74).

Все производные вычисляются в точке $m = 1$. Конкретно, находим

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dm} &= \frac{a_2^2 - a_3^2}{Rr^4}\left[2L\left|x_2x_3\right| - \mathrm{K}\left(x_2^2 - x_3^2\right)\right], \\ \frac{dL}{dm} &= \frac{a_2^2 - a_3^2}{Rr^4}\left[2K\left|x_2x_3\right| + L\left(x_2^2 - x_3^2\right)\right], \end{aligned} \tag{4.261}$$

причём здесь учитывались соотношения

$$\begin{aligned} &b = 2KL, \\ &\frac{da}{dm} = -2\left(a_2^2 - a_3^2\right)\frac{x_2^2 - x_3^2}{r^4}, \\ &\frac{db}{dm} = 4\left(a_2^2 - a_3^2\right)\frac{\left|x_2x_3\right|}{r^4}. \end{aligned} \tag{4.262}$$

Подставляя производные (4.262) в (4.261), после многих преобразований получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{гом}}\left(x_2, x_3\right) = MG\left\{\text{const} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+R-2K}{1+R+2K} + \right. \\ \left. + \frac{K}{R}\left[1 + (R-1)\frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2}\right] - \frac{2L\left|x_2x_3\right|}{a_2^2 - a_3^2}\frac{1+R}{R}\right\}. \end{aligned} \tag{4.263}$$

Разность последних членов в (4.263) можно записать в виде

$$T = \frac{K}{R}\left[1 + (R-1)\frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} - \frac{r^4}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}(R-a)(R-1)\right]. \tag{4.264}$$

Выделяя внутри квадратных скобок члены при R, с учётом тождества

$$1 - a = \left(a_2^2 - a_3^2\right)\frac{x_2^2 - x_3^2}{r^4} \tag{4.265}$$

можно доказать, что эти члены в сумме (которую обозначим через I) исчезают:

$$I = R\left[\frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} - \frac{r^4(1-a)}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}\right] = 0. \tag{4.266}$$

Оставшееся от (4.264) выражение имеет вид

$$T = \frac{K}{R}\left[1 - \frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{r^4 a}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2} - \frac{r^4\left(a^2 + b^2\right)}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}\right]. \tag{4.267}$$

Подставляя сюда a и b из (4.74), после тождественных преобразований доказываем, что

$$T = 0. \tag{4.268}$$

Таким образом, вид потенциала (4.263) значительно упрощается:

$$\varphi_{\text{гом}}(x_2, x_3) = M_{\text{гом}} G \left\{ \text{const} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R - 2K}{1 + R + 2K} \right\}, \tag{4.269}$$

где величины $K = \mathrm{K}(x_2, x_3)$ и $R = R(x_2, x_3)$ даны в (4.73) и (4.74). Остаётся доказать ещё тождество

$$r^2 (1 + R \pm 2K) = \left(\sqrt{\lambda + a_2^2} \pm \sqrt{\lambda + a_3^2} \right)^2, \tag{4.270}$$

после чего потенциал гомеоида приводится к требуемому (4.257). ■

Задача 4.4. *Доказать тождество* (4.270).

Следствие 2. *Поскольку внешний потенциал цилиндрического гомеоида зависит только от λ, геометрическое место точек равного потенциала даётся семейством эллипсов, софокусных границе* (4.1). *В частности, на самой границе $\lambda = 0$ и $\varphi_{гом}$ обращается в постоянную.*

4.5.3. Элементарный цилиндрический фокалоид

Рассмотрим элементарные цилиндрические фокалоиды. При софокусном расслоении полуоси промежуточного эллипса в сечении, согласно § 2.10, таковы:

$$a_2 \to a_2 m, \quad a_3 \to a_2 \sqrt{m^2 - e^2} \quad \left(e^2 = 1 - \frac{a_3^2}{a_2^2} \right), \tag{4.271}$$

а масса тонкого фокалоида при $m = 1$ на единицу длины цилиндра

$$M_{\text{фок}} = \pi \rho \frac{a_2}{a_3} \left(a_2^2 + a_3^2 \right) dm. \tag{4.272}$$

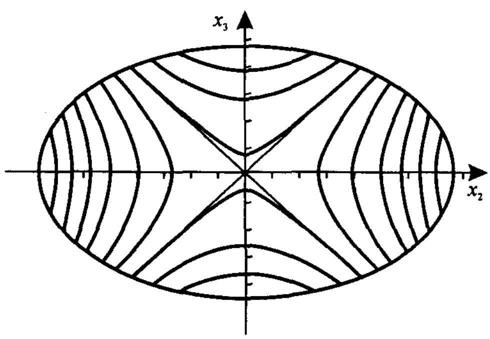


Рис. 33. Кривые равного потенциала внутри элементарного плоского фокалоида. Центр — неустойчивая седловая точка: потенциал возрастает от центра к поверхности в секторах с осью симметрии Ox_2, но убывает в секторах с осью симметрии Ox_3

Теорема 5. *Потенциал однородного элементарного цилиндрического фокалоида с полуосями $a_3 \leqslant a_2$ и массой на единицу длины*[4] *$M_{фок}$ на внутреннюю точку (x_2, x_3) равен*

$$\varphi_{фок}(x_2, x_3) = M_{фок} G \left\{ \text{const} - \frac{2e^2}{\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right)^2} \frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 + a_3^2} \right\}. \tag{4.273}$$

[4] Поэтому с размерностью в формуле (4.273) всё в порядке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Берём внутренний потенциал однородного эллиптического цилиндра (4.48) и делаем в нем замену полуосей (4.271). При этом коэффициенты

$$A_2(m) = \frac{2\sqrt{m^2 - e^2}}{m + \sqrt{m^2 - e^2}}; \quad A_3(m) = \frac{2m}{m + \sqrt{m^2 - e^2}}, \tag{4.274}$$

в отличие от гомеоида, уже зависят от m. Применяя метод дифференциации (4.255), после несложных выкладок с учётом выражения массы $M_{\text{фок}}$ из (4.272), из общей формулы (4.255) получим требуемый результат. ■

Следствие 3. *Согласно* (4.273), *геометрическим местом точек равного потенциала внутри фокалоида будет семейство равносторонних гипербол.*

Следствие 4. *Сила притяжения внутри цилиндрического фокалоида линейно зависит от координат точки*

$$F_2 = -\frac{4M_{\text{фок}}Ge^2}{\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right)^2 \left(a_2^2 + a_3^2\right)} x_2; \quad F_3 = \frac{4M_{\text{фок}}Ge^2}{\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right)^2 \left(a_2^2 + a_3^2\right)} x_3. \tag{4.275}$$

Направление силы гравитации совпадает с вектором градиента потенциала. При $e = 0$ получается оболочка кругового цилиндра, внутри которой силы отсутствуют.

Теорема 6. *Потенциал однородного элементарного цилиндрического фокалоида с полуосями $a_3 \leqslant a_2$ и массой на единицу длины $M_{фок}$ на внешнюю точку (x_2, x_3) равен*

$$\varphi_{фок}(x_2, x_3) = 2GM_{фок}(m) \cdot F(x_2, x_3), \tag{4.276}$$

где

$$F(x_2, x_3) = \ln \frac{4H\sqrt{e}}{\sqrt{a_2^2 - a_3^2}} - \frac{x_2^2 - x_3^2}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{K(1 - R)r^4}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + R + 2K}{1 + R - 2K}. \tag{4.277}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Замена (4.271) приводит внешний потенциал (4.77) к виду

$$\varphi_{\text{внешн}}(m, x_2, x_3) = 2GM(m) \cdot F(x_2, x_3), \tag{4.278}$$

где $M(m) = \pi\rho a_2^2 m\sqrt{m^2 - e^2}$ — масса на единицу высоты цилиндра. Мы не ошиблись написав, что функция $F(x_2, x_3)$ не зависит от параметра m: действительно, входящая в (4.77) комбинация $a_2^2 - a_3^2$ после замены (4.271) не изменяет своего значения. Остальное просто: применяя метод дифференциации (4.255), с учётом выражения массы $M_{\text{фок}}$ из (4.272) сразу получим требуемый результат (4.276). ■

Результат (4.276) примечателен: функция $F(x_2, x_3)$ входит и в выражение внешнего потенциала (4.77) сплошного цилиндра. Следовательно, при одинаковых массах софокусный слой и сплошной цилиндр одинаково притягивают внешние предметы. При разных массах двумерных однородных софокусных тел следует говорить о пропорциональности их внешних потенциалов. Вернёмся к выражению (4.276); интегрируя его от n_i до $m_i > n_i$, получаем соотношения

$$\frac{\varphi(m_1)}{2GM(m_1)} = \frac{\varphi(m_2)}{2GM(m_2)} = \ldots = \frac{\varphi(m_i)}{2GM(m_i)} = F(x_2, x_3) \tag{4.279}$$

($M(m_i)$ есть масса i-той оболочки). Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 7. *Потенциалы произвольных по размерам двумерных соосных однородных софокусных оболочек (как толстых, так и тонких) на фиксированную внешнюю точку относятся как массы этих тел.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В частном случае $n = e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_2^2}}$ при интегрировании в (4.276) по интервалу $e \leqslant m \leqslant m_i$ учитываются все оболочки сплошного цилиндра. Таким образом, понимая под $M\,(m_i)$ массу сплошного однородного эллиптического цилиндра, приходим в (4.279) к двумерному аналогу классической теореме Маклорена — Лапласа[5].

Замечания

Глава разработана автором.

Первоисточник: [20] и [21].

§ 4.1. В литературе сведения о притяжении однородного эллиптического цилиндра неполны и разрознены. Содержание теоремы 7 представляется новым.

§ 4.2. Внимание учёных прошлого в применении *прямого подхода* концентрировалось на эллипсоиде, а цилиндр находился в тени. Возможно, ввиду важности и принципиальности темы попытки делались и для цилиндра, но безрезультатные. Так или иначе, но отсутствие *прямых методов* в исследовании притяжения тел с логарифмическим потенциалом — существенный пробел в теории. Развитый здесь *прямой метод* нахождения потенциалов однородного цилиндра эффективен не только с методической точки зрения. Он применим, например, и к цилиндрам с более сложными, чем эллипсы, сечениями.

§§ 4.3, 4.4. Рассмотрена ещё одна задача на применение прямого метода, развитого выше. Вычисления трудоёмкие, но результат приятен: внешний и внутренний потенциалы для однородного цилиндра с лемнискатным сечением выражаются через элементарные функции.

§ 4.5. Поставлены и решаются новые задачи о потенциалах тонких цилиндрических оболочек. Доказана теорема, являющаяся расширенным вариантом классической теоремы Маклорена — Лапласа для двумерных цилиндрических тел. Интересно сравнить гравитирующие свойства таких оболочек со свойствами плоских гомеоидов и фокалоидов, изученных в гл. 2.

---

[5] См. теорему 6 в главе 5.

Глава 5

ПОТЕНЦИАЛЫ СЛОЁВ И ОБОЛОЧЕК

Вначале мы рассматриваем однородные (плотность объёмная!) эллипсоидальные оболочки. Вводится понятие элементарной эллипсоидальной оболочки[1] и исследуются её геометрические свойства. Затем оболочка наполняется однородным веществом и изучаются её гравитационные свойства.

Как объект исследования тонкие оболочки интересны, конечно, сами по себе. Кроме того, последующий их синтез позволяет получать оболочки конечной толщины и слоисто-неоднородные эллипсоиды в целом. Общие формулы иллюстрируются не только на гомеоидах и фокалоидах, но и на других типах элементарных эллипсоидальных оболочек.

§ 5.1. Эллипсоидальная стратификация тел

Рассмотрим однопараметрическое семейство соосных (и, следовательно, концентрических) эллипсоидальных поверхностей $S\,(m)$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2\alpha_1^2\,(m)} + \frac{x_2^2}{a_2^2\alpha_2^2\,(m)} + \frac{x_3^2}{a_3^2\alpha_3^2\,(m)} = m^2, \tag{5.1}$$

где параметр m непрерывно изменяется в интервале

$$0 \leqslant m_{\min} \leqslant m \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Пусть семейство (5.1) ограничивается сверху эллипсоидом $S\,(1)$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1; \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3. \tag{5.3}$$

Тогда функции $\alpha_i\,(m)$ должны удовлетворять граничному условию

$$\alpha_i\,(1) = 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.4}$$

При любом допустимом m должны выполняться очевидные неравенства

$$\alpha_i\,(m) \geqslant 0, \quad m\,\alpha_i\,(m) \leqslant 1. \tag{5.5}$$

Потребуем теперь, чтобы через каждую внутреннюю точку проходила одна, и только одна поверхность семейства (5.1). В связи с этим:

а) все $\alpha_i\,(m)$ должны быть однозначными функциями от m, не имеющими точек разрыва; допускается лишь конечное число точек разрыва у производных этих функций;

[1] Конечно, гомеоиды и фокалоиды были известны ещё классикам. Но подчеркнём: здесь мы говорим именно о расширенном семействе элементарных эллипсоидальных оболочек, где гомеоиды и фокалоиды — лишь частный случай.

б) все три полуоси $a_i m \alpha_i(m)$ промежуточной поверхности $S(m)$ должны монотонно возрастать с увеличением m и

$$\frac{d}{dm}[m\,\alpha_i(m)] > 0. \tag{5.6}$$

Из трёх функций $\alpha_i(m)$ независимых будет только две (так как из трёх отношений полуосей эллипсоида только два отношения являются независимыми), и далее без ограничения общности положим $\alpha_1 = 1$. Полуоси промежуточного эллипсоида $S(m)$ будут соответственно

$$a_1 m, \quad a_2 m\,\alpha_2(m), \quad a_3 m\,\alpha_3(m). \tag{5.7}$$

Если $m_{\min} = 0$, объём эллипсоида (5.3) расслаивается семейством (5.1) полностью, но если хотя бы одна из функций $\alpha_2(m)$ или $\alpha_3(m)$ обращается в нуль при некотором $m_{\min} > 0$ — расслоение объёма будет неполным. Далее мы встретимся со случаями как полного, так и неполного расслоения.

Геометрическую форму эллипсоида $S(m)$ будем характеризовать сжатиями и эксцентриситетами трёх главных его сечений

$$\varepsilon_{ij}(m) = 1 - \frac{a_j(m)}{a_i(m)}, \quad e_{ij}(m) = \sqrt{1 - \left(\frac{a_j(m)}{a_i(m)}\right)^2}; \tag{5.8}$$
$$(i,j) = (1,2);(2,3);(1,3).$$

По аналогии с отношениями полуосей, независимыми из трёх являются только два сжатия (или два эксцентриситета). Например,

$$\varepsilon_{23}(m) = \frac{\varepsilon_{13}(m) - \varepsilon_{12}(m)}{1 - \varepsilon_{12}(m)}. \tag{5.9}$$

При указанном расслоении форма эллипсоида $S(m)$ может изменяться шестью способами. С двумя из них мы имеем дело, если все три производные от эксцентриситетов промежуточного сечения имеют одинаковые знаки (убедитесь, что это возможно!), т. е.

$$\frac{d}{dm}e_{ij}(m) > 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dm}e_{ij}(m) < 0. \tag{5.10}$$

А именно, в первом случае имеет место тотальное сплющивание поверхности $S(m)$ одновременно по всем трём главным сечениям, а во втором — тотальная сферизация. Фактически одинаковые знаки у производных от $e_{12}(m)$ и $e_{23}(m)$ (только в таком сочетании индексов!) уже гарантируют тот же знак и для $\frac{d}{dm}e_{13}(m)$. Но могут быть и такие случаи эллипсоидальной стратификации, когда вдоль серии оболочек сферизация по одному сечению сопровождается сплющиванием по двум другим (и наоборот). Характерным для этих случаев является то, что производные функций $e_{12}(m)$ и $e_{23}(m)$ должны иметь разные знаки; конкртено, различаем четыре случая неполной сферизации (сплющивания):

$$\frac{d}{dm}e_{12}(m) > 0, \quad \frac{d}{dm}e_{23}(m) < 0, \quad \left.\frac{d}{dm}e_{13}(m)\right\} \begin{matrix} > 0, \\ < 0 \end{matrix} \tag{5.11}$$

и

$$\frac{d}{dm}e_{12}(m) < 0, \quad \frac{d}{dm}e_{23}(m) > 0, \quad \left.\frac{d}{dm}e_{13}(m)\right\} \begin{matrix} > 0, \\ < 0. \end{matrix} \tag{5.12}$$

Все варианты *стратификаций с осевой симметрией (сфероидальных)* следуют из рассмотренных выше.

§ 5.2. Элементарные эллипсоидальные оболочки

Определение 1. Две поверхности семейства (5.1), разделённые бесконечно малым значением параметра dm, образуют элементарную эллипсоидальную оболочку.

Геометрические свойства элементарной оболочки определяются видом функций $\alpha_2(m)$ и $\alpha_3(m)$.

Уравнение нормали к внешней стороне оболочки $S(m)$ в точке $x_i^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\left(x_1^{(0)}-x_1\right)\left(\frac{x_1^{(0)}}{a_1^2m^2}\right)^{-1} &= \left(x_2^{(0)}-x_2\right)\left(\frac{x_2^{(0)}}{a_2^2m^2\alpha_2^2(m)}\right)^{-1} = \\ &= \left(x_3^{(0)}-x_3\right)\left(\frac{x_3^{(0)}}{a_3^2m^2\alpha_3^2(m)}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Толщина элементарной оболочки в месте протыкания её нормалью равна отрезку нормали между граничными поверхностями, т. е.

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{\sum_1^3\left(x_i^{(0)}-x_i\right)^2} = \\ &= \left(x_1^{(0)}-x_1\right)\sqrt{1+\left(\frac{x_2^{(0)}}{x_1^{(0)}}\right)^2\frac{a_1^4}{a_2^4\alpha_2^4(m)}+\left(\frac{x_3^{(0)}}{x_1^{(0)}}\right)^2\frac{a_1^4}{a_3^4\alpha_3^4(m)}},\end{aligned} \tag{5.14}$$

где x_i — точка, в которой нормаль «протыкает» внутреннюю поверхность. Преобразуем (5.14). Подставляя соотношения (5.13) в уравнение внутренней стороны $S(m-dm)$ рассматриваемой оболочки, в линейном по координатам приближении найдём величину

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1^{(0)}-x_1 = \\ &= \frac{x_1^{(0)}}{a_1^2}\,\frac{m+\left(\dfrac{x_2^{(0)}}{a_2\alpha_2(m)}\right)^2\dfrac{d\ln\alpha_2(m)}{dm}+\left(\dfrac{x_3^{(0)}}{a_3\alpha_3(m)}\right)^2\dfrac{d\ln\alpha_3(m)}{dm}}{\left(\dfrac{x_1^{(0)}}{a_1^2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2^{(0)}}{a_2^2\alpha_2^2(m)}\right)^2+\left(\dfrac{x_3^{(0)}}{a_3^2\alpha_3^2(m)}\right)^2}\,dm,\end{aligned} \tag{5.15}$$

с помощью которой искомое выражение записывается в виде

$$d\tau(m,\boldsymbol{x}^0) = \frac{m+\left(\dfrac{x_2^{(0)}}{a_2\alpha_2(m)}\right)^2\dfrac{d}{dm}\ln\alpha_2(m)+\left(\dfrac{x_3^{(0)}}{a_3\alpha_3(m)}\right)^2\dfrac{d}{dm}\ln\alpha_3(m)}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1^{(0)}}{a_1^2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2^{(0)}}{a_2^2\alpha_2^2(m)}\right)^2+\left(\dfrac{x_3^{(0)}}{a_3^2\alpha_3^2(m)}\right)^2}}\,dm. \tag{5.16}$$

Объём элементарной оболочки и её главные моменты инерции

$$dV(m) = \frac{4}{3}\pi a_1a_2a_3\frac{d}{dm}\left[m^3\alpha_2(m)\,\alpha_3(m)\right]dm, \tag{5.17}$$

$$dI_{ii}(m) = \frac{4}{15}\pi\rho a_1 a_2 a_3 a_i^2 \frac{d}{dm}\left[m^5 \alpha_2(m)\,\alpha_3(m)\,\alpha_i^2(m)\right] dm. \tag{5.18}$$

Если заполнить элементарную оболочку однородным веществом с плотностью $\rho(m)$, то масса её будет равна

$$dM(m) = \rho(m)\,dV(m). \tag{5.19}$$

Далее остановимся подробнее на трёх конкретных типах оболочек: *гомеоид*, *фокалоид* и *оболочка равной толщины на осях симметрии*.

§ 5.3. Гомеоид

Гомеоид есть оболочка, ограниченная подобными эллипсоидами. Расслоение объёма эллипсоида (5.3) на элементарные гомеоиды осуществляется при $\alpha_2(m) = \alpha_3(m) = 1$; в этом случае уравнение семейства эллипсоидальных поверхностей (5.1) имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = m^2; \tag{5.20}$$

полуоси промежуточной эллипсоидальной поверхности $S(m)$ при этом просто равны $a_i m$ и эксцентриситеты (5.8)

$$e_{12} = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}}; \quad e_{13} = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \tag{5.21}$$

от m не зависят.

Толщина элементарного гомеоида с поверхностью $S(m)$, как это легко видно из общей формулы (5.16), равна

$$d\tau_{\text{гом}}(m) = l(m)\cdot\frac{dm}{m}, \tag{5.22}$$

где

$$l\left(m, x^0\right) = \left[\left(\frac{x_1^{(0)}}{a_1^2 m^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2^{(0)}}{a_2^2 m^2}\right)^2 + \left(\frac{x_3^{(0)}}{a_3^2 m^2}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.23}$$

есть длина перпендикуляра, опущенного из центра оболочки на плоскость, касательную в точке $x_i^{(0)}$ к эллипсоиду с полуосями $a_i m$. Следовательно, согласно формуле (5.22), *толщина гомеоида пропорциональна длине этого перпендикуляра*[2]; в частности, на осях симметрии $d\tau_i = a_i\,dm$.

Объём и главные моменты инерции гомеоида суть

$$dV_{\text{гом}}(m) = 4\pi a_1 a_2 a_3 m^2 dm, \tag{5.24}$$

$$\left[dI_{ii}(m)\right]_{\text{гом}} = \frac{1}{3} dM_{\text{гом}}(m)\cdot a_i^2 m^2, \tag{5.25}$$

где $dM_{\text{гом}}$ — масса однородной элементарной оболочки, полученной при подстановке (5.24) в (5.19).

[2] Принимая такую пропорциональность за характерное свойство, мы далее распространяем понятие гомотетической оболочки и на тела неэллипсоидальной формы, см. об этом § 8.1.

Задача 5.1. *Доказать, что косинус угла между внешней нормалью* $\boldsymbol{N}\left(\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \frac{x_3}{a_3^2}\right)$ *к поверхности гомеоида* $S(1)$ *в точке* x_i *и радиусом-вектором* $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ *пропорционален толщине оболочки в этой точке и равен*

$$\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dm}\tau_{\text{гом}} = \frac{l}{r}. \tag{5.26}$$

Задача 5.2. *Доказать, что объём элементарного гомеоида с поверхностью* $S(1)$, *вычисленный по формуле*

$$dV(1) = \iint [d\tau_{гом}]\, dS, \tag{5.27}$$

совпадает с величиной $4\pi a_1 a_2 a_3 dm$, *полученной из* (5.24) *при* $m = 1$.

Решение. Заметим, что элемент поверхности равен

$$dS = \frac{r^2 d\omega}{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})}, \tag{5.28}$$

где $d\omega$ — телесный угол бесконечно малого конуса с вершиной в начале координат, а $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})$ даётся формулой (5.26). Вводя сферические координаты, уравнение эллипсоидальной поверхности $S(1)$ запишем в виде

$$r^2\left[\sin^2\theta\left(\frac{\cos^2\varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{a_2^2}\right) + \frac{\cos^2\theta}{a_3^2}\right] = 1. \tag{5.29}$$

Тогда для объёма оболочки получаем выражение

$$dV(1) = dm\iint r^3 d\omega = 8\,dm\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\left[\sin^2\theta\left(\frac{\cos^2\varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{a_2^2}\right) + \frac{\cos^2\theta}{a_3^2}\right]^{-3/2} d\theta\, d\varphi;$$

интегрируя его сначала по θ, а затем по φ, получаем искомый результат. ▼

Расслоение эллипсоида (5.3) на элементарные гомеоиды осуществляется полностью, без появления особых отрезков или площадок.

§ 5.4. Геометрические места равной толщины в гомеоиде

Представляет интерес следующая задача.

Задача 5.3. *Исследовать геометрические места точек равной толщины элементарного гомеоида.*

Решение. Искомые места представляют собой пересечение двух соосных эллипсоидов: эллипсоида, получаемого из формул (5.22), (5.23):

$$\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} = \left[\frac{dm}{d\tau_{\text{гом}}(1, x)}\right]^2 = \text{const}, \tag{5.30}$$

и эллипсоида (5.3), являющегося поверхностью оболочки. Места пересечения этих двух эллипсоидов будут представлены кривыми четвёртого порядка. Для квадрата обратной толщины гомеоида имеют место неравенства

$$\frac{1}{a_1^2} \leqslant c^2 \equiv \left[\frac{dm}{d\tau_{\text{гом}}(1,x)}\right]^2 \leqslant \frac{1}{a_3^2}. \tag{5.31}$$

Умножим теперь (5.3) на c^2 и вычтем из (5.30):

$$\underset{\geqslant 0}{\frac{x_1^2}{a_1^2}\left(c^2-\frac{1}{a_1^2}\right)} + \underset{\gtrless 0}{\frac{x_2^2}{a_2^2}\left(c^2-\frac{1}{a_2^2}\right)} + \underset{\leqslant 0}{\frac{x_3^2}{a_3^2}\left(c^2-\frac{1}{a_3^2}\right)} = 0. \tag{5.32}$$

Это уравнение конической поверхности с вершиной в центре гомеоида. Направляющая кривая такого конуса и есть линия равной толщины оболочки. Знаки коэффициентов в (5.32) определены с учётом неравенств (5.31). Средний коэффициент может иметь разные знаки: конус (5.32) будет охватывать ось Ox_1 (если $c < 1/a_2$) или ось Ox_3 (если $c > 1/a_2$). В промежуточном случае $1/c = a_2$ конус распадается на две плоскости

$$x_3 = \pm x_1 \frac{a_3}{a_1}\sqrt{\left(\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)^{-1}}, \tag{5.33}$$

проходящие через среднюю ось Ox_2; соответствующие кривые равной толщины оболочки вырождаются в два эллипса. Рис. 34 кривых равной толщины гомеоида очень напоминает рисунок полодий на эллипсоиде инерции, хорошо известный в динамике твёрдого тела. Совершенно разные задачи иллюстрируются одним и тем же рисунком!

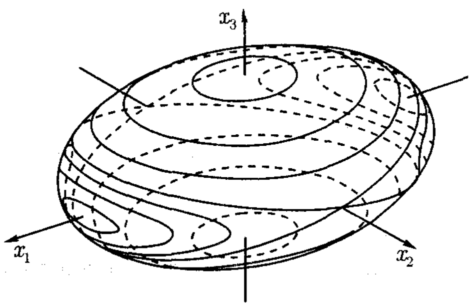


Рис. 34. Семейства замкнутых кривых четвёртого порядка на эллипсоидальной поверхности, разделённых двумя проходящими через среднюю ось x_2 плоскими эллипсами. Расчёты сделаны по формуле (5.32) для семи значений параметра m и полуосях $a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$

С физической точки зрения однородный гравитирующий гомеоид на эллипсоиде замечателен тем, что он представляет поверхностный слой равного потенциала (так называемый уровенный слой, см. § 5.8). Именно по этой причине электрический заряд в проводящем эллипсоиде «всплывает» и распределяется на его границе с поверхностной плотностью, пропорциональной толщине элементарного гомеоида[3]. Очевидно, найденные линии равной толщины гомеоида суть не что иное, как линии равного заряда на поверхности заряженного проводящего эллипсоида. Если же условиться, что каждый элемент гомеоида светится, это будут и кривые равной светимости. ▼

§ 5.5. Фокалоид

Элементарным фокалоидом называется оболочка, ограниченная двумя бесконечно близкими софокусными эллипсоидами. В нашем случае для совпадения фокусов у всех трёх главных

[3] В связи с этим см. пример в § 8.4.

эллипсов промежуточной поверхности $S(m)$ должны выполняться следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
a_1^2\left[(m+dm)^2-m^2\right]=a_2^2\left[(m+dm)^2\left(\alpha_2(m)+\frac{d\alpha_2}{dm}dm\right)^2-m^2\alpha_2^2(m)\right]= \\
=a_3^2\left[(m+dm)^2\left(\alpha_3(m)+\frac{d\alpha_3}{dm}dm\right)^2-m^2\alpha_3^2(m)\right],
\end{gathered}
\tag{5.34}
$$

откуда следуют дифференциальные уравнения для функций $\alpha_2(m)$ и $\alpha_3(m)$

$$
\alpha_i(m)\left[\alpha_i(m)+m\frac{d}{dm}\alpha_i(m)\right]=\frac{a_1^2}{a_i^2}\quad(i=2,3). \tag{5.35}
$$

Решая их, находим

$$
\alpha_2^2(m)=\frac{a_1^2}{a_2^2}-\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}-1\right)\frac{1}{m^2},\quad \alpha_3^2(m)=\frac{a_1^2}{a_3^2}-\left(\frac{a_1^2}{a_3^2}-1\right)\frac{1}{m^2}. \tag{5.36}
$$

Поверхность $S(m)$ при софокусном расслоении имеет полуоси

$$
a_1m,\quad a_1\sqrt{m^2-e_{12}^2(1)},\quad a_1\sqrt{m^2-e_{13}^2(1)}, \tag{5.37}
$$

причём для эксцентриситетов главных сечений граничной поверхности $e_{ij}(1)$ справедливо неравенство $e_{13}(1)>e_{12}(1)$. Очевидно также, что

$$
\frac{e_{23}(1)}{e_{13}(1)}\leqslant\alpha_2(m)\leqslant1,\quad 0\leqslant\alpha_3(m)\leqslant1, \tag{5.38}
$$

где $e_{13}(1)\leqslant m\leqslant1$. Эксцентриситеты промежуточной поверхности таковы:

$$
e_{12}(m)=\frac{e_{12}(1)}{m},\ e_{13}(m)=\frac{e_{13}(1)}{m},\ e_{23}(m)=\sqrt{\frac{e_{13}^2(1)-e_{12}^2(1)}{m^2-e_{12}^2(1)}}. \tag{5.39}
$$

Легко убедиться, что здесь мы имеем дело со вторым в (5.10) случаем, описывающим сферизацию поверхностей $S(m)$ по всем трём сечениям.

При софокусном расслоении эллипсоида (5.3) площадь, ограниченная эллипсом

$$
\frac{x_1^2}{a_1^2e_{13}^2(1)}+\frac{x_2^2}{a_2^2e_{23}^2(1)}=1, \tag{5.40}
$$

остаётся нерасслоенной. В частных случаях вытянутого $(a_1>a_2=a_3)$ или сжатого $(a_1=a_2>a_3)$ сфероидов этот эллиптический диск вырождается в отрезок $x_1=\pm\sqrt{a_1^2-a_3^2}$ или в круг радиусом $\sqrt{a_1^2-a_3^2}$[4].

[4] Уже здесь важно подчеркнуть (подробнее см. в гл. 9), что указанные нерасслоённые геометрические места в виде дисков и отрезков после заполнения их веществом по определённому закону плотности могут представлять собой эквигравитирующие тела для исходных эллипсоидов и сфероидов.

Толщина элементарного фокалоида с внешней поверхностью $S(m)$ согласно формулам (5.16) и (5.36) даётся выражением

$$d\tau_{\text{фок}}\left(m, \boldsymbol{x}^0\right) = \frac{1 + \dfrac{x_2^{(0)2}\left(a_1^2 - a_2^2\right)}{\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2\right)^2} + \dfrac{x_3^{(0)2}\left(a_1^2 - a_3^2\right)}{\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{x_1^{(0)2}}{a_1^4 m^4} + \dfrac{x_2^{(0)2}}{\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2\right)^2} + \dfrac{x_3^{(0)2}}{\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2\right)^2}}} \frac{dm}{m}. \tag{5.41}$$

Толщина на осях симметрии удовлетворяет неравенствам

$$a_1 dm \leqslant \frac{a_1^2 m\, dm}{\sqrt{a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2}} \leqslant \frac{a_1^2 m\, dm}{\sqrt{a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2}}\,. \tag{5.42}$$

Следовательно, у фокалоида наибольшая толщина — на конце короткой оси, а наименьшая — на конце длинной (у гомеоида – наоборот!).

В частном случае для фокалоида с границей $S(1)$ из (5.41) следует

$$d\tau_{\text{фок}}\left(1, \boldsymbol{x}^0\right) = a_1^2 \sqrt{\left(\frac{x_1^{(0)}}{a_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2^{(0)}}{a_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_3^{(0)}}{a_3^2}\right)^2}\, dm. \tag{5.43}$$

Очевидно, что *толщина фокалоида на эллипсоиде обратно пропорциональна длине перпендикуляра* l[5]. Согласно формулам (5.43) и (5.22), для фокалоида и гомеоида с конгруэнтными внешними поверхностями $S(1)$ толщины связаны простым соотношением

$$d\tau_{\text{гом}}(1) \cdot d\tau_{\text{фок}}(1) = \text{const} = \left(a_1 dm\right)^2, \tag{5.44}$$

т. е. обратно пропорциональны друг другу.

Объём элементарного фокалоида с поверхностью $S(m)$:

эллипсоидального

$$dV_{\text{фок}}(m) = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{d}{dm}\left[m\sqrt{\left(m^2 - e_{12}^2\right)\left(m^2 - e_{13}^2\right)}\right] dm; \tag{5.45}$$

с формой сжатого сфероида $(a_1 = a_2 \geqslant a_3, e_{13} \equiv e)$

$$dV_{\text{фок}}(m) = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{d}{dm}\left[m^2\sqrt{m^2 - e^2}\right] dm. \tag{5.46}$$

Объём элементарного эллипсоидального фокалоида с поверхностью $S(1)$

$$dV_{\text{фок}}(1) = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_3^2}\right) dm, \tag{5.47}$$

очевидно, больше объёма гомеоида из (5.24).

---

[5] Забегая вперёд, заметим, что именно по этому признаку в § 5.13 понятие фокалоида удаётся обобщить и на оболочки неэллипсоидальной формы.

Главные моменты инерции однородного элементарного фокалоида

$$[dI_{ii}(1)]_{\text{фок}} = \frac{1}{5} dM_{\text{фок}} \cdot a_i^2 + \frac{2}{5}[dI_{11}(1)]_{\text{гом}}. \tag{5.48}$$

З а д а ч а 5.4. *Вычислить объём элементарного фокалоида другим методом, используя формулу* (5.27) *с подстановкой в неё выражения* (5.43).

З а д а ч а 5.5. *Рассмотреть на поверхности фокалоида изолинии равной толщины этой оболочки.*

Решение. Оно аналогично решению задачи 5.3 для гомеоида. С помощью формул (5.3) и (5.43) найдём уравнение конической поверхности:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \cdot \underbrace{\left(K^2 - \frac{1}{a_1^2}\right)}_{\geqslant 0} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \cdot \underbrace{\left(K^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)}_{\gtrless 0} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \cdot \underbrace{\left(K^2 - \frac{1}{a_3^2}\right)}_{\leqslant 0} = 0. \tag{5.49}$$

где величина K пропорциональна толщине фокалоида и

$$\frac{1}{a_1} \leqslant K \equiv \frac{d\tau_{\text{фок}}(1)}{a_1^2 dm} \leqslant \frac{1}{a_3}. \tag{5.50}$$

Рис. 34 иллюстрирует решение данной задачи. ▼

§ 5.6. Оболочка равной толщины на осях симметрии

Этот тип оболочки является промежуточным между гомеоидом и фокалоидом . Чтобы эллипсоид (5.3) расслаивался на такие оболочки, функции $\alpha_2(m)$ и $\alpha_3(m)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$m\frac{d}{dm}\alpha_i(m) + \alpha_i(m) = \frac{a_1}{a_i} \quad (i = 2, 3), \tag{5.51}$$

решения которых

$$\alpha_2(m) = \frac{a_1}{a_2} - \left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right) \cdot \frac{1}{m}, \quad \alpha_3(m) = \frac{a_1}{a_3} - \left(\frac{a_1}{a_3} - 1\right) \cdot \frac{1}{m}. \tag{5.52}$$

З а д а ч а 5.6. *Вывести уравнения* (5.51).

Поверхность $S(m)$ имеет полуоси

$$a_1 m, \quad a_1(m - \varepsilon_{12}(1)), \quad a_1(m - \varepsilon_{13}(1)). \tag{5.53}$$

Очевидно (ср. с (5.38)),

$$\frac{\varepsilon_{23}(1)}{\varepsilon_{13}(1)} \leqslant \alpha_2(m) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha_3(m) \leqslant 1; \quad \varepsilon_{13}(1) \leqslant m \leqslant 1. \tag{5.54}$$

Профили сжатий слоёв задаются функциями

$$\varepsilon_{12}(m) = \frac{\varepsilon_{12}(1)}{m}, \quad \varepsilon_{13}(m) = \frac{\varepsilon_{13}(1)}{m}, \; \varepsilon_{23}(m) = \frac{\varepsilon_{13}(1) - \varepsilon_{12}(1)}{m - \varepsilon_{12}(1)}, \tag{5.55}$$

демонстрирующими тотальную сферизацию поверхности $S(m)$ с ростом m.

Расслоение на такие оболочки является неполным. Нерасслоенной остаётся площадь, ограниченная эллипсом

$$\frac{x_1^2}{a_1^2\varepsilon_{13}^2(1)}+\frac{x_2^2}{a_2^2\varepsilon_{23}^2(1)}=1. \tag{5.56}$$

В частных случаях сжатого и вытянутого сфероидов этот эллипс вырождается в круг площадью $\pi(a_1-a_3)^2$ или в отрезок на оси Ox_1 длиной $2(a_1-a_3)$.

Толщина оболочки рассматриваемого типа даётся выражением

$$d\tau_{\text{об}}(m,\boldsymbol{x}^0)=\frac{1+\dfrac{a_1-a_2}{(a_1m-a_1+a_2)^3}x_2^{(0)2}+\dfrac{a_1-a_3}{(a_1m-a_1+a_3)^3}x_3^{(0)2}}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1^{(0)}}{a_1^2m^2}\right)^2+\left[\dfrac{x_2^{(0)}}{(a_1m-a_1+a_2)^2}\right]^2+\left[\dfrac{x_3^{(0)}}{(a_1m-a_1+a_3)^2}\right]^2}}\frac{dm}{m}. \tag{5.57}$$

Задача 5.7. *Доказать, что толщина оболочки на осях симметрии действительно одинакова и равна* a_1dm, *а вне осей всюду меньше этого значения. Попробуйте исследовать геометрические места равной толщины.*

Резюмируем: если гомеоид, фокалоид и оболочка заданного типа с конгруэнтными внешними поверхностями имеют одинаковую толщину на конце длинной оси, то для толщин во всех других точках выполняется неравенство

$$d\tau_{\text{гом}}(m)<d\tau_{\text{об}}(m)<d\tau_{\text{фок}}(m). \tag{5.58}$$

При этом объём оболочки, эквидистантной на осях симметрии,

$$dV_{\text{об}}(1)=\frac{4}{3}\pi a_1a_2a_3\left(1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}\right)dm \tag{5.59}$$

будет больше объёма гомеоида (5.24), но меньше объёма фокалоида (5.47).

Задача 5.8. *С помощью формул* (5.18) *и* (5.52) *найти моменты инерции однородной оболочки рассматриваемого типа.*

§ 5.7. Другие типы элементарных эллипсоидальных оболочек

Естественно спросить: нельзя ли оболочку, имеющую одинаковую толщину только на осях симметрии, превратить в оболочку *эквидистантную*, т.е. в такую, толщина которой одинакова повсюду? Сделать это не удастся! *В рамках эллипсоидальной стратификации таких эквидистантных оболочек просто не существует.* Действительно, если внешняя поверхность эквидистантной оболочки есть сжатый, например, сфероид, то внутренняя её сторона есть поверхность восьмого порядка.

Задача 5.9. *Докажите это!*

Есть, однако, много других способов находить новые эллипсоидальные оболочки. Вот один из них. Зададимся вопросом: какой должна быть стратификация сжатого сфероида, чтобы объём оболочек уменьшался к центру по закону $dV\propto km^\gamma$. В этом случае формула (5.17) даёт уравнение

$$\frac{d}{dm}\left[m^3\alpha_3(m)\right]=km^\gamma. \tag{5.60}$$

Интегрируя его, находим функцию

$$\alpha_3(m)=m^{\gamma-2}, \tag{5.61}$$

задающую соответствующую стратификацию слоёв. Полуоси промежуточной сфероидальной поверхности и их отношение будут

$$a_1 m,\ a_3 m^{\gamma-1},\ n = \frac{a_3}{a_1} m^{\gamma-2}. \tag{5.62}$$

Подстановка (5.61) в (5.16) даёт толщину такой оболочки

$$d\tau(m, x) = \frac{1 + (\gamma - 2)\,\dfrac{x_3^2}{a_3^2 m^2}}{\sqrt{\dfrac{r^2}{a_1^4} m^{4(\gamma-2)} + \dfrac{x_3^2}{a_3^4}}}\, m^{2\gamma-3} dm\,. \tag{5.63}$$

В особом случае $\gamma = 2$ эта оболочка превращается в гомеоид. Вообще же, чтобы расслоение сфероида на оболочки данного типа было полным, надо потребовать $\gamma \geqslant 5/2$. Согласно (5.62), при такой стратификации сплюснутость слоёв $\varepsilon\,(m)$ возрастает к центру и, поскольку в асимптотическом пределе $m \to 0$, полуоси промежуточной поверхности имеют разный порядок малости, слои близ центра становятся плоскими лепёшками[6].

Но важно подчеркнуть, что кроме эллипсоидальных, возможны и другие типы оболочек (о важнейших из них см. ниже § 5.13).

§ 5.8. Потенциал однородного элементарного гомеоида и стержня

Известна следующая теорема.

Теорема 1. *Потенциал однородного элементарного гомеоида с полуосями a_i и массой $dM_{гом}$ во внешней точке x_i равен*

$$\varphi_{внешн}(\lambda) = \frac{1}{2} G dM_{гом} \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}}\,. \tag{5.64}$$

Здесь λ — эллипсоидальная координата точки x_i, являющаяся положительным корнем уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{5.65}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В эллипсоидальных координатах поверхность оболочки задаётся условием $\lambda = 0$. Учитывая это, а также уровенный характер поверхности гомеоида, его потенциал во внешней точке надо искать как функцию одной переменной λ. Это упрощает уравнение Лапласа:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\Delta(\lambda)\frac{d\varphi}{d\lambda}\right] = 0, \quad \Delta^2(\lambda) = \left(a_1^2 + \lambda\right)\left(a_2^2 + \lambda\right)\left(a_3^2 + \lambda\right), \tag{5.66}$$

решение которого

$$\varphi(\lambda) = \mathrm{const} \cdot \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\Delta(s)}. \tag{5.67}$$

Верхний предел интеграла выбран из условия, чтобы на бесконечности поле исчезало; постоянная же, как легко видеть, равна ${}^1\!/_2 G\, dM_{гом}$. ■

[6] Такое внутреннее строение имеют, например, некоторые эллиптические галактики.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, когда $a_1 > a_2 = a_3$ и граничные поверхности гомеоида принимают форму вытянутого сфероида, внешний потенциал (5.64) выражается через элементарные функции

$$\varphi_{\text{гом}}(\lambda) = \frac{G \cdot dM_{\text{гом}}}{2\sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 - a_{2\,\text{гом}}^2}} \ln \frac{\sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 + \lambda} + \sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 - a_{2\,\text{гом}}^2}}{\sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 + \lambda} - \sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 - a_{2\,\text{гом}}^2}}. \tag{5.68}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для сжатого $a_1 = a_2 > a_3$ тонкого гомеоида потенциал во всём пространстве даётся выражением

$$\varphi_{\text{сж.гом}}(\lambda) = \frac{dM_{\text{гом}} G}{a_1 e} \operatorname{arctg} \frac{a_1 e}{\sqrt{a_3^2 + \lambda}}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}, \tag{5.69}$$

причём на поверхности и внутри гомеоида $\lambda = 0$ и потенциал обращается в постоянную

$$\varphi_{\text{внутр}} = \frac{1}{2} G \cdot dM_{\text{гом}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(s)}; \tag{5.70}$$

вне же гомеоида цилиндрические координаты точки $(R,\, x_3)$ связаны с эллипсоидальной координатой λ уравнением

$$\frac{R^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{5.71}$$

Теорема 2 (Ньютон). *Сила притяжения внутри эллипсоидального гомеоида равна нулю.*

Задача 5.10. *Найти геометрические места одинаковой силы притяжения на поверхности однородного элементарного гомеоида.*

Решение. С помощью (5.64) находим компоненты и модуль силы

$$F_i = -\frac{G\, dM_{\text{гом}}}{a_1 a_2 a_3} \frac{x_i}{a_i^2} \cdot l^2(1), \quad |\boldsymbol{F}| = \frac{G\, dM_{\text{гом}}}{a_1 a_2 a_3} \cdot l(1), \tag{5.72}$$

где $l(1)$ — из (5.23). Следовательно, искомая сила притяжения пропорциональна толщине оболочки в данной точке (на концах осей гомеоида сила притяжения пропорциональна их длине). *Это означает, что на гомеоиде геометрические места одинаковой силы и одинаковой толщины совпадают* (см. рис. 34). ▼

Уровенные поверхности вне гравитирующего гомеоида суть софокусные с ним эллипсоиды, так как потенциал зависит только от λ. *Но таким же свойством уровенных поверхностей обладает и потенциал однородного одномерного прута (стержня).* В связи с этим важно заметить, что два софокусных гомеоида одинаковой массы будут *эквигравитирующими* во внешнем пространстве (доказательство см. ниже в § 10.2, теорема 1).

Интересен предельный случай, когда из двух эквигравитирующих софокусных гомеоидов внутренний вырождается в эллиптический диск (исходный гомеоид имеет три оси) или — для вытянутого сфероида (две оси) — в однородный стержень. Последнее означает, что *однородный стержень не является чем-то самостоятельным, а представляет собой предельный случай сфероидальной гомотетической оболочки.* Резюмируем это.

Теорема 3. *Внешние потенциалы однородного элементарного гомеоида, имеющего форму вытянутого сфероида, и прямого однородного прута, концы которого совпадают с фокусами поверхности гомеоида, пропорциональны массам этих тел и имеют одинаковые уровенные поверхности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если длина прута $2a_{1\,\text{пр}}$, то

$$a_{1\,\text{пр}} = \sqrt{a_{1\,\text{гом}}^2 - a_{2\,\text{гом}}^2}, \tag{5.73}$$

и потенциал прута стержня даётся выражением (5.68) с учётом (5.73). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При условиях теоремы 3 силы притяжения этих тел пропорциональны их массам и совпадают по направлению.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Силовые поверхности гравитирующего стержня суть двуполостные гиперболоиды вращения, ортогональные уровенным софокусным сфероидам и имеющие общие с ними фокусы.

§ 5.9. Оболочка как бесконечно тонкий простой слой

Однородная элементарная оболочка эквивалентна бесконечно тонкому простому слою с поверхностной плотностью

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \rho\, d\tau(\boldsymbol{x}), \tag{5.74}$$

где $d\tau$ — данная в (5.16) толщина оболочки[7]. Поэтому потенциал оболочки в принципе можно находить и прямо из формулы (1.9), которая с учётом (5.74) принимает вид

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = G\iint \frac{\sigma(\boldsymbol{x}')\,dS'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}. \tag{5.75}$$

Однако решению таким способом поддаются лишь частные типы задач.

Задача 5.11. *С помощью формулы* (5.75) *доказать, что на поверхности и внутри гомеоида потенциал даётся выражением* (5.70).

Решение. Достаточно определить значение потенциала в центре оболочки. С учётом выражений (5.28) и (5.26) интеграл (5.75) приводим к виду

$$\varphi(0) = G\rho dm \iint r^2 d\omega, \tag{5.76}$$

где $r = |\boldsymbol{x}'|$ — радиус-вектор из центра до точки интегрирования на поверхности. Переходя к сферическим координатам (см. задачу 5.2), легко получим искомую формулу. ▼

Задача 5.12. *Исходя из формулы* (5.75) *доказать, что значения потенциалов в центре однородного фокалоида и оболочки равной толщины на осях симметрии соответственно равны*

$$\varphi_{фок}(0) = \frac{3}{4}\frac{G\,dM_{фок}}{a_1a_2a_3}\left(I - \frac{2a_1^2}{1 + \dfrac{a_1^2}{a_2^2} + \dfrac{a_1^2}{a_3^2}}\right), \tag{5.77}$$

$$\varphi_{об}(0) = \frac{3}{4}\frac{G\,dM_{об}}{a_1a_2a_3}\left(I - \frac{A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3}}\right), \tag{5.78}$$

где использованы хорошо известные в теории потенциала обозначения величин A_i из (1.38) и I из (1.39).

[7] И при постоянной объёмной плотности поверхностная плотность элементарной оболочки в общем случае зависит, конечно, от координат.

В связи с отмеченной трудностью нахождения потенциалов оболочек с помощью интеграла (5.75), в § 5.11 разработан другой, более приемлемый метод решения подобных задач.

Потенциал является всюду непрерывной функцией и при переходе через элементарную оболочку разрыва не имеет, в то время как производные от него терпят при этом разрыв (в связи с этим см. задачи 5.16 и 5.17 в § 5.12).

Задача 5.13. *Дан однородный эллиптический диск плотности σ с полуосями $a_1 \geqslant a_2$. Найти потенциал на оси симметрии Ox_3.*

Решение. Согласно (5.75), потенциал на оси Ox_3 даётся интегралом по площади такого диска

$$\varphi(x_3) = G\sigma \iint\limits_S \frac{dx_1' dx_2'}{\sqrt{{x_1'}^2 + {x_2'}^2 + x_3^2}}. \tag{5.79}$$

Введём полярные координаты $x_1' = a_1 r \cos\theta$, $x_2' = a_2 r \sin\theta$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(x_3) &= G\sigma a_1 a_2 \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{x_3^2 + r^2\left(a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta\right)}} = \\ &= 4G\sigma a_1 a_2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x_3^2 + a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta} - |x_3|}{a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta} d\theta.\end{aligned} \tag{5.80}$$

Второй интеграл с радикалом в числителе вычисляется домножением и делением на этот радикал. В итоге, приходим к выражению

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\sigma \left\{ \frac{2\frac{a_2}{a_1}}{\pi\sqrt{x_3^2 + a_1^2}} \left[a_1^2 \mathrm{K}(k) + x_3^2 \Pi\left[e^2, k\right]\right] - |x_3| \right\}, \tag{5.81}$$

где используются стандартные полные эллиптические интегралы первого и третьего рода, e — эксцентриситет диска, $k^2 = \dfrac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + x_3^2}$. В частности, полагая в (5.81) $x_3 = 0$, получим потенциал в центре эллиптического диска, совпадающий с (2.161). ▼

В пределе $a_1 = a_2 = R$ из (5.81) следует выражение потенциала однородного круглого диска на оси его симметрии

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + x_3^2} - |x_3|\right). \tag{5.82}$$

§ 5.10. О притяжении гомеоидом конечной толщины

Вначале обратим внимание: поверхность однородного гомеоида *конечной* толщины, в отличие от гомеоида *тонкого*, уже не является *уровенной*. Рассмотрим гомеоид с переменной внутренней границей $S(m)$; для сил притяжения на концах его осей a_i $(a_1 > a_2 > a_3)$ имеем[8]

[8] Ускорение измеряется в единицах $-4\pi G\rho a_2 a_3/a_1$.

$$
\begin{aligned}
F_1(m) &= \int_m^1 \frac{m^2 dm}{\sqrt{(1-e_{12}^2 m^2)(1-e_{13}^2 m^2)}},\\
F_2(m) &= \int_m^1 \frac{m^2 dm}{\sqrt{[1-e_{12}^2(1-m^2)][1-e_{12}^2-m^2(e_{13}^2-e_{12}^2)]}},\\
F_3(m) &= \int_m^1 \frac{m^2 dm}{\sqrt{[1-e_{13}^2(1-m^2)][1-e_{13}^2+m^2(e_{13}^2-e_{12}^2)]}}.
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

На рис. 35 показаны графики функций $F_i(m)$. Как и следовало ожидать, у достаточно тонкого гомеоида $(0.80 \leqslant m \leqslant 1)$ сила притяжения больше там, где ось длиннее, и возрастание силы почти пропорционально росту толщины оболочки. При ощутимой толщине оболочки видно, что силы — явно нелинейные функции от m; $F_2(m)$ растёт быстрее, чем $F_1(m)$, и при $m \leqslant 0.63$ превосходит последнюю; при $m \approx 0.54$ достигается равенство $F_1(m) = F_3(m)$. Чтобы равны были силы на концах малой и средней осей, оболочка должна быть ещё толще $(m \approx 0.41)$. Заметим, что в интервале $0.54 \leqslant m \leqslant 0.63$ наибольшей будет сила на конце средней оси. При дальнейшем возрастании толщины гомеоида соотношение между силами на концах осей будет таким, как у сплошного эллипсоида (у которого сила тем больше, чем короче полуось)[9].

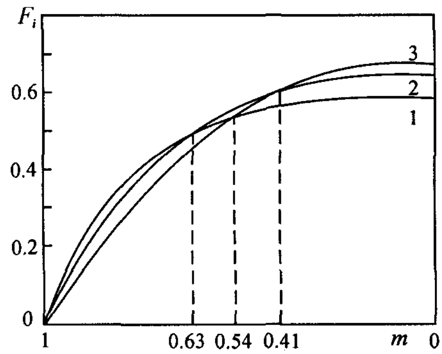


Рис. 35. Притяжение на концах осей симметрии однородного гомеоида как функция его толщины. Эксцентриситеты сечений равны $e_{12}^2 = 0.51$ и $e_{13}^2 = 0.75$. Цифрами (1, 2, 3) отмечен график для соответствующей полуоси

Итак, для каждого из трёх главных сечений существует критическая толщина оболочки, при которой силы притяжения на концах длинной и короткой осей уравниваются. Сила на концах осей является при этом минимумом в сравнении с силой в любой другой точке сечения. Если толщина не сильно отличается от критической, на каждой четверти сечения по-прежнему существуют две точки с равной в них силой притяжения, причём эти две точки не совпадают с концами осей, а сдвинуты навстречу друг другу.

Потенциалы толстых неоднородных оболочек рассматриваются в § 6.10.

§ 5.11. Потенциал однородных элементарных оболочек: общий случай

Пока мы не имели приемлемого способа для нахождения потенциала оболочек разных типов. Действительно, случай с гомеоидом в § 5.8 был особый, а с помощью формулы (5.75) удаётся решать лишь частные задачи. Более эффективен метод, основанный на идее расслоения однородного эллипсоида.

Будем рассматривать однородный эллипсоид с переменной внешней поверхностью $S(m)$ как состоящий из бесконечной серии элементарных оболочек интересующей

[9] Любопытно следующее: если сила притяжения на поверхности элементарного гомеоида больше там, где длиннее ось, то для сплошного однородного эллипсоида (см. ниже) ситуация противоположная.

нас формы. Потенциал эллипсоида во внешней точке получим, заменив в выражении (6.1) полуоси a_i величинами (5.7):

$$\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m) = \frac{3}{4} GM(m) \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv, \tag{5.84}$$

где полная масса эллипсоида равна

$$M(m) = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 m^3 \alpha_2(m)\, \alpha_3(m)\, \rho; \tag{5.85}$$

функция

$$\mathrm{F}\left(m^2, v\right) = \frac{1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2 m^2 + v} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) + v} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) + v}}{\sqrt{\left(a_1^2 m^2 + v\right)\left(a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) + v\right)\left(a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) + v\right)}}; \tag{5.86}$$

$\lambda\left(m^2\right)$ – положительный корень уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 m^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) + \lambda} = 1, \tag{5.87}$$

являющийся эллипсоидальной координатой точки x_i относительно поверхности $S(m)$.

Теперь, чтобы получить потенциал элементарной оболочки с граничной поверхностью $S(m)$*, геометрию которой задают функции* $\alpha_2(m)$ *и* $\alpha_3(m)$*, достаточно применить метод дифференциации,*[10] *для чего следует найти полный дифференциал от выражения* (5.84):

$$d\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m) = \frac{3}{4} G \left\{ dM(m) \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv + M(m) dm \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \left[\frac{d}{dm} \mathrm{F}\left(m^2, v\right)\right] dv \right\}. \tag{5.88}$$

Следует отметить, что при дифференцировании интеграла в (5.84) нижний предел $\lambda\left(m^2\right)$ можно считать постоянным в силу уравнения (5.87). Аналогично, взяв вместо (6.1) выражение (6.11) и заменив в нём a_i на (5.7), мы найдём потенциал элементарной оболочки во внутренней точке:

$$d\varphi^{(0)}_{\text{внутр}}(m) = \frac{3}{4} G \left\{ dM(m) \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv + M(m) dm \int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{d}{dm} \mathrm{F}\left(m^2, v\right)\right] dv \right\}. \tag{5.89}$$

Задача 5.14. *Найти внешний и внутренний потенциалы для однородных оболочек типа* (5.61).

Итак, потенциалы элементарных однородных оболочек в общем виде представляются в виде суммы однократных интегралов[11]. И надо подчеркнуть, что в важных частных случаях выражения (5.88) и (5.89) могут дополнительно упрощаться. Рассмотрим это на примере однородного фокалоида.

---

[10] Определение *метода дифференциации* дано в § 2.11.

[11] К аналогичным результатам приводит и формула (6.124).

§ 5.12. Потенциал элементарных и толстых однородных фокалоидов

Для этой оболочки (см. § 5.5, формулу (5.36))

$$a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) = a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2, \quad a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) = a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2. \tag{5.90}$$

Важно обратить внимание на то что при софокусном расслоении интеграл в (5.84) имеет одно замечательное свойство: этот интеграл вообще не зависит от параметра расслоения m и, следовательно,

$$\frac{d}{dm}\int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv = 0. \tag{5.91}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dm}\int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv = \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \frac{d}{dm}\left[\mathrm{F}\left(m^2, v\right)\right] dv =$$
$$= 2a_1^2 m \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \left[\frac{d}{dv}\mathrm{F}\left(m^2, v\right)\right] dv = 2a_1^2 m \mathrm{F}\left(m^2, v\right)\Big|_{v=\lambda(m^2)}^{v=\infty}, \tag{5.92}$$

и, так как $\mathrm{F}\left(m^2, \infty\right) = 0$ и $\mathrm{F}\left(m^2, \lambda\left(m^2\right)\right) = 0$ (последнее — в силу уравнения (5.87)), мы убеждаемся в справедливости (5.91). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Потенциал во внешней точке x_i однородного элементарного фокалоида с внешней поверхностью $S(m)$ даётся выражением*

$$d\varphi_{\text{фок}}^{(0)}(m) = \frac{3}{4} G dM_{\text{фок}}(m) \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv, \tag{5.93}$$

где $dM_{\text{фок}}(m)$ — масса фокалоида, функция $\mathrm{F}\left(m^2, v\right)$ дана в (5.86) и $\lambda\left(m^2\right)$ удовлетворяет уравнению (5.87).

Замечание 5. В частном случае $m = 1$ из (5.93) следует

$$d\varphi_{\text{фок}}^{(0)}(1) = \frac{3}{4} G dM_{\text{фок}}(1) \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{\Delta(v)}\left(1 - \sum_{1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right), \tag{5.94}$$

где $dM_{\text{фок}}(1) = \rho dV(1)$ (см. (5.47)), а λ удовлетворяет уравнению (5.65).

Замечание 6. Потенциал и притяжение однородного элементарного фокалоида конечной массы во внешней точке будут такими же, как и у однородного эллипсоида с граничной поверхностью, софокусной (или конгруэнтной) поверхности фокалоида (массы оболочки и эллипсоида одинаковы). Это доказывается прямым сравнением выражений (5.93) и (5.84). То же самое относится и к фокалоиду конечной толщины.

Именно поэтому на поверхности как толстого, так и тонкого однородного фокалоида распределение потенциала и силы притяжения будет такое же, как на поверхности сплошного однородного эллипсоида (в связи с чем см. задачу 6.7 и рис. 34).

Задача 5.15. *Показать, что при равномерном распределении вещества однородного фокалоида по внутренней полости оболочки потенциал и сила притяжения во внешней точке не изменяются.*

При разных массах однородных софокусных тел следует говорить о пропорциональности их внешних потенциалов. Вернёмся к выражению (5.93); интегрируя его от n_i до $m_i > n_i$, с учётом (5.91) получаем соотношения

$$\frac{\varphi(m_1)}{\frac{3}{4}GM(m_1)} = \frac{\varphi(m_2)}{\frac{3}{4}GM(m_2)} = \ldots = \frac{\varphi(m_i)}{\frac{3}{4}GM(m_i)} = \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} F(m^2, v)dv = \text{const} \tag{5.95}$$

($M(m_i)$ есть масса i-той оболочки). Тем самым доказана следующая теорема

Теорема 5. *Потенциалы произвольных по размерам соосных однородных софокусных оболочек (как толстых, так и тонких) на фиксированную внешнюю точку относятся как массы этих тел.*

Замечание 7. В частном случае $n = e_{13}$ при интегрировании в (5.93) по интервалу $e_{13} \leqslant m \leqslant m_i$ учитываются все оболочки сплошного эллипсоида. Таким образом, понимая в (5.95) под $M(m_i)$ массу сплошного однородного эллипсоида, мы приходим в (5.95) к классической теореме Маклорена — Лапласа.

Теорема 6 (Маклорен — Лаплас). *Потенциалы однородных софокусных эллипсоидов на внешнюю точку относятся как массы этих эллипсоидов.*

Замечание 8. Как видно, наша теорема 5 несколько шире классической теоремы Маклорена — Лапласа[12].

В частности, потенциал во внешней пробной точке однородного фокалоида, ограниченного внешней и внутренней поверхностями с полуосями (a_1, a_2, a_3) и (a'_1, a'_2, a'_3) такими, что

$$a_1^2 - {a'_1}^2 = a_2^2 - {a'_2}^2 = a_3^2 - {a'_3}^2, \tag{5.96}$$

имеет вид

$$\varphi^{(0)}_{\text{фок}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) \left[1 - \frac{a'_1 a'_2 a'_3}{a_1 a_2 a_3}\right], \tag{5.97}$$

где потенциал внешнего эллипсоида дан в (1.41) или в (5.84). Разумеется, формула (5.97) следует из (1.62).

Свойства потенциалов *слоисто-неоднородных эллипсоидов и оболочек с софокусными слоями* рассматриваются в § 6.12. Для них имеет место важное обобщение формулы (5.95).

Обратимся к нахождению потенциала внутри фокалоида.

Теорема 7. *Потенциал во внутренней точке x_i однородного элементарного фокалоида с поверхностью $S(m)$ даётся выражением*

$$\begin{aligned} d\varphi^{(0)}_{\text{фок}}(m) = {} & \frac{3GdM_{\text{фок}}(m)}{4a_1a_2a_3m^3\alpha_2(m)\alpha_3(m)} \left[I(m) - \sum_1^3 A_i(m)x_i^2\right] - \\ & -2\pi G\rho a_1^2 \left[1 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 m^2 \alpha_i^2(m)}\right] m\,dm, \end{aligned} \tag{5.98}$$

[12] В § 6.12 эти результаты ещё более обобщаются и распространяются и на *неоднородные оболочки и сплошные эллипсоиды* с софокусным преобразованием слоёв.

где $I(m)$ *и* $A_i(m)$ *получены из* (1.39), (1.38) *заменой* a_i *на* (5.7) *и имеют вид*

$$A_i(m) = a_1 a_2 a_3 m^3 \alpha_2(m) \alpha_3(m) \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{dv}{\left(a_i^2 m^2 \alpha_i^2(m) + v\right) \sqrt{\left(a_1^2 m^2 + v\right)\left(a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) + v\right)\left(a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) + v\right)}}, \quad (5.99)$$

$$I(m) = a_1 a_2 a_3 m^3 \alpha_2(m) \alpha_3(m) \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{\left(a_1^2 m^2 + v\right)\left(a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m) + v\right)\left(a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m) + v\right)}}. \quad (5.100)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обратимся к формуле (5.89); интегрирование последнего в ней члена даёт

$$\frac{3}{4} GM(m) \cdot 2 m a_1^2 dm \left[\mathrm{F}\left(m^2, v\right)\right]_{v=0}^{v=\infty} = -2\pi G \rho a_1^2 \left[1 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 m^2 \alpha_i^2(m)}\right] m\, dm. \quad (5.101)$$

С учётом (5.95) и введённых в (5.99), (5.100) величин мы получим отсюда требуемое выражение (5.98). ■

Обратим внимание, что выражение (5.91) для случая внутренней точки уже не равно нулю (см. (5.101)).

В частном случае $m = 1$ выражение (5.98) приводится к виду

$$d\varphi_{\text{фок}}(1) = \frac{3GdM_{\text{фок}}(1)}{4a_1a_2a_3}\left\{I - 2\left(\sum_1^3 a_i^{-2}\right)^{-1} - \sum_1^3\left[A_i - 2\left(a_i^2\sum_1^3 a_i^{-2}\right)^{-1}\right]x_i^2\right\}. \quad (5.102)$$

Но с учётом (6.75) можно доказать, что справедливы следующие неравенства

$$\begin{gathered} A_1 - 2\left(a_1^2 \sum_1^3 a_i^{-2}\right)^{-1} > 0, \\ A_2 - 2\left(a_2^2 \sum_1^3 a_i^{-2}\right)^{-1} \gtrless 0, \quad A_3 - 2\left(a_3^2 \sum_1^3 a_i^{-2}\right)^{-1} < 0, \end{gathered} \quad (5.103)$$

поэтому коэффициенты перед x_i^2 в (5.102) всегда будут иметь знаки в соответствии с (5.103). Таким образом, поверхности равного потенциала внутри элементарного фокалоида представлены семействами однополостных и двуполостных гиперболоидов, разделённых асимптотическим конусом с вершиной в начале координат. Заметим: такими же интересными свойствами обладает потенциал и внутри других оболочек (кроме, конечно, гомеоида!), см. об этом § 6.10.

Задача 5.16. *С помощью формул* (5.94) *и* (5.102) *доказать, что для элементарного фокалоида выполняется условие сшивки потенциала.*

Задача 5.17. *Доказать, что при переходе из внешнего пространства внутрь (в полость!) элементарного фокалоида нормальная компонента силы скачком*

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{dn}\right)_{\text{внеш}} - \left(\frac{\partial\varphi}{dn}\right)_{\text{внутр}}\right]_{\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}=1} = -4\pi G\rho\, d\tau_{\text{фок}} \quad (5.104)$$

уменьшается на величину $4\pi G\sigma$. *Здесь толщина элементарного фокалоида даётся формулой* (5.43). *Разумеется, формула Пуассона* (5.104) *о скачке нормальных производных от потенциала справедлива и для элементарных оболочек произвольного вида.*

О притяжении внутри эллипсоидальных оболочек см. также § 6.10.

§ 5.13. Неэллипсоидальные оболочки — обобщённый гомеоид и фокалоид

Введём два важных класса тонких оболочек нового типа.

5.13.1. Обобщённый гомеоид

Обобщённый гомотетический слой — не обязательно уровенный

Рассмотрим на поверхности однородного тела плотности ρ (форма тела — не обязательно эллипсоид) слой с поверхностной плотностью

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{3}\rho\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right), \tag{5.105}$$

где, напомним, величины α_i — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела. Эту плотность можно рассматривать как *поверхностную* плотность бесконечно тонкого *обобщённого гомотетического слоя* электрического заряда или вещества. Такой слой будет именно гомотетическим, так как его толщина, в согласии с геометрическим определением гомотетической оболочки берётся пропорциональной длине перпендикуляра

$$l = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \tag{5.106}$$

проведённого из центра к касательной плоскости в той точке, где эта толщина измеряется. Численный коэффициент в формуле (5.105) может быть произвольным; здесь взято значение 1/3 с тем расчётом, что тогда масса этого слоя оказывается равной массе исходного тела, на поверхности которого лежит слой[13].

Задача 5.18. *Доказать, что известное преобразование гомотетии, описывающее переход от поверхности* $S(x_1, x_2, x_3) = 0$ *к поверхности*

$$S\left[x_1(1+\beta), x_2(1+\beta), x_3(1+\beta)\right] = 0, \tag{5.107}$$

при малом значении параметра β *даёт элементарный слой такого же типа, как и в случае* (5.105).

Решение. Разложим в ряд Тейлора функцию (5.107). В линейном приближении тогда имеем

$$S\left[x_1(1+\beta), x_2(1+\beta), x_3(1+\beta)\right] \approx S(x_1, x_2, x_3) + \beta\frac{\partial S}{\partial x_i}x_i. \tag{5.108}$$

Следовательно, толщина $d\tau$ создаваемого слоя удовлетворяет равенству

$$|\mathrm{grad} S|\, d\tau = \beta\left(x_1\frac{\partial S}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial S}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial S}{\partial x_3}\right), \tag{5.109}$$

так что в силу определения направляющих косинусов нормали

[13] Такой слой создаётся, следовательно, выметанием всей массы тела на его поверхность. В § 12.6 этот множитель — *уже по другим соображениям* — будет взят равным 1/5.

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial x_i}}{|\mathrm{grad} S|} \tag{5.110}$$

приходим к формуле

$$d\tau = \beta l. \tag{5.111}$$

Итак, здесь мы действительно имеем дело с гомотетическим слоем и при $\beta = \rho/3$ получим выражение (5.105). Доказательство закончено. ▼

З а д а ч а 5.19. *Формулы* (5.23) *и* (5.106) *эквивалентны. Докажите это.*

Решение. Оно получается сразу при подстановке уравнения эллипсоида в выражение (5.110). ▼

Обратимся теперь к вопросу о потенциале гомотетического слоя с поверхностной плотностью (5.105). Формально этот потенциал в точке $\boldsymbol{r}'$ даётся поверхностным интегралом

$$\varphi_{\text{сл}}(\boldsymbol{r}') = G \oiint \frac{\sigma(\boldsymbol{r})\, dS}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}}. \tag{5.112}$$

Подставляя сюда плотность слоя из (5.105) и преобразовывая этот интеграл по формуле Остроградского—Гаусса в объёмный, получим

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{сл}}(\boldsymbol{r}') &= \frac{G\rho}{3} \iiint\limits_T \left[\frac{3}{D} - \frac{x_1(x_1 - x_1') + x_2(x_2 - x_2') + x_3(x_3 - x_3')}{D^3}\right] dV = \\ &= \frac{G\rho}{3} \iiint\limits_T \left[\frac{2}{D} - \frac{x_1'(x_1 - x_1') + x_2'(x_2 - x_2') + x_3'(x_3 - x_3')}{D^3}\right] dV,\end{aligned} \tag{5.113}$$

где D — расстояние между пробной точкой и точкой интегрирования из (1.10). Но так как

$$\varphi_{\text{т}}(\boldsymbol{r}') = G\rho \iiint\limits_T \frac{dV}{D}, \quad x_i' \frac{\partial \varphi_{\text{т}}}{\partial x_i'} = G\rho \iiint\limits_T \frac{x_i'(x_i - x_i')}{D^3} dV, \tag{5.114}$$

искомый потенциал слоя с поверхностной плотностью (5.105) оказывается связанным с потенциалом тела $\varphi_{\text{т}}(\boldsymbol{r})$ формулой

$$\varphi_{\text{сл}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{3}\left(2\varphi_{\text{т}} - \boldsymbol{r}\,\mathrm{grad}\varphi_{\text{т}}\right). \tag{5.115}$$

Формула (5.115) имеет важное значение. Это становится очевидным, ибо: *при заданном потенциале однородного тела $\varphi_{\text{т}}(\boldsymbol{r})$ её можно рассматривать как способ нахождения размещённого на нём потенциала обобщённого гомотетического слоя $\varphi_{\text{сл}}(\boldsymbol{r})$, или же наоборот, рассматривать* (5.115) *как линейное дифференциальное уравнение в частных производных для потенциала тела $\varphi_{\text{т}}(\boldsymbol{r})$, когда задан потенциал такого слоя $\varphi_{\text{сл}}(\boldsymbol{r})$.*

Первый вариант есть прямое применение формулы (5.115). Если задан потенциал тела, то, подставляя его в правую часть (5.115) и совершая указанные там операции, находим потенциал слоя. *Итак, формулой* (5.115) *выражается ещё одно замечательное свойство рассматриваемого обобщённого гомотетического слоя вещества (заряда): если требуется знать внутренний потенциал такого слоя, то в правую часть* (5.115) *следует подставить внутренний потенциал исходного тела; и наоборот, чтобы получить внешний его потенциал, в правую часть* (5.115) *надо подставить соответственно и внешний потенциал тела.*

Второй вариант — это обратное применение (5.115): по заданному из каких-то дополнительных соображений выражению потенциала (внешнего или внутреннего) слоя $\varphi_{\text{сл}}$ можно, решая дифференциальное уравнение (5.115), найти потенциал (внешний или, соответственно, внутренний) исходного тела, на котором находится данный слой. Здесь имеем дело с типичной обратной задачей. И в этом подходе заключается *первое применение обобщенного гомотетического слоя.*

Есть ещё один существенный фактор в пользу введения понятия обобщенного гомотетического слоя. Пусть дано однородное тело произвольной формы. Мысленно вообразим, что на его поверхности лежит слой с поверхностной плотностью

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{5}\rho\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right), \tag{5.116}$$

отличающийся от (5.105) лишь множителем $\frac{1}{5}$ вместо прежнего $\frac{1}{3}$. И здесь мы делаем важное утверждение: *взаимная гравитационная энергия этого воображаемого слоя и лежащего под ним реального однородного тела будет равна гравитационной энергии самого этого тела*! Об этом применении слоя мы будем говорить в § 12.6.

Продемонстрируем сказанное на примерах.

Прямое применение формулы (5.115). Как мы уже знаем из § 5.8, элементарный гомотетический слой на эллипсоиде является уровенным. Сейчас в этом можно убедиться прямо, подставив внутренний потенциал эллипсоида (6.14) в формулу (5.115): тогда, как легко видеть,

$$\varphi_{\text{сл}} = \frac{2}{3}\pi G\rho I, \tag{5.117}$$

т. е. внутри эллипсоидального гомеоида потенциал заведомо от координат не зависит.

А вот задача на обратное применение формулы (5.115).

З а д а ч а 5.20. *Доказать, что обобщённый гомеоидальный слой на эллипсоиде является уровенным.*

Решение. Предполагая слой на однородной фигуре (пока мы не знаем, что это эллипсоид!) уровенным, обозначим потенциал на слое через φ_0. Вводя сферические координаты, запишем дифференциальное уравнение в частных производных (5.115) в виде

$$2\varphi_{\text{т}} - r\frac{\partial\varphi_{\text{т}}}{\partial r} = 3\varphi_0, \tag{5.118}$$

где φ_0 от координат не зависит. Его решение можно записать в виде

$$\varphi_{\text{т}} = \frac{\varphi_0}{2} + r^2 \mathrm{F}(\theta, \lambda), \tag{5.119}$$

где $\mathrm{F}(\theta, \lambda)$ зависит только от углов. Полученное решение означает, что внутренний потенциал исходного тела должен быть квадратичной функцией координат (x_1, x_2, x_3) и, согласно известной (см, например, [44] или [15]) теореме Дива (1931) (дивная теорема!), это тело и есть эллипсоид[14]. Следовательно, мы имеем дело с эллипсоидальным гомеоидом. Доказательство закончено. ▼

Но надо помнить: *неэллипсоидальный обобщённый гомотетический слой не является уровенным* (об уровенных слоях см. § 5.14).

З а д а ч а 5.21. *Найти обобщённый гомотетический слой на однородном шаре, когда центр гомотетии находится на границе сферы.*

Решение. Уравнение сферы радиусом R в цилиндрических координатах (r, x_3) с началом на границе этой сферы (см.рис.(36)) суть

[14] Согласно Тодхантеру [46], п. 1429, Айвори доказал эту теорему веком раньше.

$$r^2 + (x_3 - R)^2 = R^2, \text{ или } r^2 + x_3^2 = 2Rx_3. \tag{5.120}$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности точки (r, x_3) будут равны

$$\alpha_1 = \frac{r}{R}, \ \alpha_3 = \frac{x_3 - R}{R}. \tag{5.121}$$

Следовательно, расстояние l до касательной к шару плоскости

$$l = \frac{r^2}{R} + \left(\frac{x_3}{R} - 1\right) x_3. \tag{5.122}$$

Согласно (5.105) и (5.121, поверхностная плотность обобщенного гомотетического слоя будет

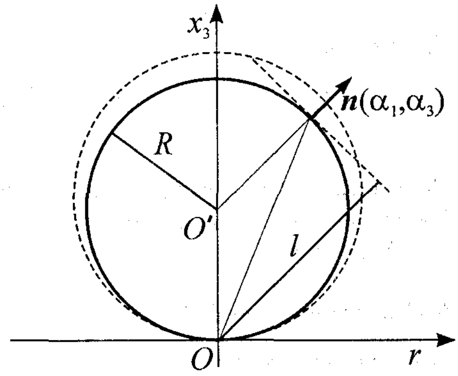


Рис. 36. Обобщенный гомотетический слой на шаре со смещённым центром гомотетии

равна

$$\sigma(r, x_3) = \frac{1}{3}\rho \left[\frac{r^2}{R} + \left(\frac{x_3}{R} - 1\right) x_3\right] = \frac{1}{3}\rho x_3, \tag{5.123}$$

где мы учли уравнение сферы (5.120) и пробная точка лежит на её поверхности.

Для проверки, интегрируя (5.120) по поверхности сферы (5.120) легко находим, что полная масса слоя действительно равна массе исходного шара $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

Найдем теперь внутренний потенциал данного слоя, для чего обратимся к формуле (5.115). Очевидно, внутренний потенциал однородного шара в принятых координатах равен

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{2}{3}\pi G\rho \left[3R^2 - r^2 - (x_3 - R)^2\right]. \tag{5.124}$$

Подставляя (5.124) в правую часть формулы (5.115), легко получим *внутренний потенциал данного слоя*

$$\varphi_{\text{сл.}} = \frac{4}{9}\pi G\rho R (2R + x_3), \tag{5.125}$$

который линейно зависит лишь от x_3. Внутри данного слоя на единичную массу действуют силы

$$\frac{\partial \varphi_{\text{сл.}}}{\partial x_3} = \frac{4}{9}\pi G\rho R; \quad \frac{\partial \varphi_{\text{сл.}}}{\partial r} = 0. \tag{5.126}$$

Следовательно, слой действует как пылесос и все тела, попавшие внутрь полости «залипают» к толстой части слоя. ▼

Используя теперь найденный внутренний потенциал слоя (5.125), вычислим взаимную гравитационную энергию этого слоя с однородным гравитирующим шаром, на котором он лежит. Для этого, согласно формуле (8.2), достаточно проинтегрировать с множителем ρ внутренний потенциал слоя по объему шара. Для удобства перенесем начало отсчета в центр сферы и запишем (5.125) в виде

$$\varphi_{\text{сл.}} = \frac{4}{9}\pi G\rho R (3R + x_3).$$

Тогда *взаимная гравитационная энергия этого слоя с однородным гравитирующим шаром* будет равна

$$W_{1,2} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi (3R + x_3)\sin\theta d\theta = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5. \tag{5.127}$$

Но эта взаимная энергия одновременно есть и гравитационная энергия однородного шара! Наглядная демонстрация замечательных свойств обобщенного гомотетического слоя.

Ещё один пример обобщённого гомотетического слоя на круговом торе см. в § 7.1.

5.13.2. Обобщённый фокалоид

Эквигравитирующий слой на однородном теле

Дано однородное тело плотности ρ и объёмом $V_{\text{т}}$. Оно имеет пространственный потенциал $\varphi_{\text{т}}(\boldsymbol{x})$. Наметим на его поверхности геометрический слой толщиной

$$d\tau_{\text{фок}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_1\frac{\partial s}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial s}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial s}{\partial x_3}\right), \tag{5.128}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности тела, а функция $s(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Delta s = -4\pi & \text{— внутри тела,} \\ s = 0 & \text{— на поверхности и вне тела.} \end{cases} \tag{5.129}$$

Толщина $d\tau$ оказывается обратно пропорциональной длине перпендикуляра l до касательной поверхности, и именно по данному признаку такой слой является обобщённым фокалоидом. Так, если тело — сжатый сфероид, то

$$s(\boldsymbol{x}) = 2\pi\frac{1 - \dfrac{r^2}{a_1^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2}}{\dfrac{2}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_3^2}}, \tag{5.130}$$

и в этом случае слой превращается в обычный фокалоид (см. формулу (5.43)).

Итак, выметание массы исходного тела создаёт материальный слой с поверхностной плотностью в точке $\boldsymbol{x}'$, а именно

$$\sigma_{\text{фок}}(\boldsymbol{x}') = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{n}}, \tag{5.131}$$

так что $M_{\text{фок}} = M_{\text{т}}$.

Теорема 8. *Пространственный потенциал обобщённого фокалоида с поверхностной плотностью* (5.131) *в точке $\boldsymbol{x}$ имеет потенциал*

$$\varphi_{фок}(\boldsymbol{x}) = \varphi_T(\boldsymbol{x}) - G\rho\cdot s(\boldsymbol{x}), \tag{5.132}$$

где

$$\varphi_T(x) = G\rho\iiint\limits_{V_T}\frac{dV'}{D} \tag{5.133}$$

— потенциал однородного тела, на котором лежит данный слой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По второй формуле Грина

$$\iint\limits_S \left[\frac{1}{D}\frac{\partial s}{\partial n} - s\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{D}\right)\right] dS = \iiint\limits_{V_T} \left[\frac{\Delta s}{D} - s\Delta\left(\frac{1}{D}\right)\right] dV \tag{5.134}$$

(производная по внешней нормали) в силу условий (5.129) на функцию $s(x)$ сразу можно записать

$$\iint\limits_S \frac{1}{D}\frac{\partial s}{\partial n} dS = -4\pi \iiint\limits_{V_T} \frac{dV}{D} - I, \tag{5.135}$$

где

$$I = \iiint\limits_{V_T} s\Delta\left(\frac{1}{D}\right) dV'. \tag{5.136}$$

Таким образом,

$$\varphi_{\text{фок}}(x) = \varphi_T(x) + \frac{G\rho}{4\pi} I, \tag{5.137}$$

и нам необходимо найти интеграл I.

Когда пробная точка x находится вне тела T, то, очевидно

$$\Delta\left(\frac{1}{D}\right) = 0 \tag{5.138}$$

и, следовательно, $I = 0$. Поэтому для внешней точки x

$$\varphi_{\text{фок}}(x) = \varphi_T(x). \tag{5.139}$$

Если же пробная точка x находится внутри тела T, то интеграл I оказывается несобственным из-за обращения в нуль D при совпадении пробной точки с точкой интегрирования. Но, как легко видеть, если $s(x')$ – ограниченная функция внутри тела, то интеграл I является всё же конечным. Окружим пробную точку x сферой радиусом ε (ε — бесконечно малая величина). Тогда всюду вне этой сферы по прежнему выполняется уравнение Лапласа (5.138) и остаётся рассмотреть только интеграл I по V_ε. В силу малости её радиуса,

$$I = s(x) \iiint\limits_{V_\varepsilon} \Delta\left(\frac{1}{D}\right) dV' = s(x)\,\Delta \iiint\limits_{V_\varepsilon} \frac{dV}{D} = -4\pi s(x). \tag{5.140}$$

Следовательно, для внутренней точки действительно выполняется уравнение (5.132). ■

Мы обнаружили удивительный результат: если выметанием массы однородного тела на его поверхность создаётся слой с плотностью (5.131), то именно такой слой является эквигравитирующим исходному телу во внешнем пространстве. *Это важное свойство обобщённого фокалоида прямо следует из формулы* (5.139), *а также из формулы* (5.132), *где для внешнего пространства, по определению,* $s = 0$.

З а д а ч а 5.22. *Покажите, что для сжатого сфероида формула* (5.132) *действительно даёт известный нам из* (5.102) *внутренний потенциал фокалоида.*

Физическая интерпретация обобщённого фокалоида даётся в § 15.8.

Вопрос о гравитационной энергии обобщённых гомеоидов и фокалоидов мы рассмотрим в § 8.6.

§ 5.14. Теорема Арнольда

Простой слой, лежащий на замкнутой поверхности называется *уровенным* или *нейтральным*, если он не оказывает притяжения на внутренние точки. Глубокий вопрос о существовании уровенных слоёв на произвольных поверхностях интересовал Гаусса, Вейерштрасса, Шаля, Ламэ, Пуанкаре и других математиков. Проблема создания на заданной поверхности уровенного слоя приводит к интегральному уравнению Робэна (1887)

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\sigma(x') \cos\psi}{|x - x'|^2} dS', \tag{5.141}$$

где ψ есть угол между нормалью к поверхности S в точке x и направлением хорды между этой точкой и точкой интегрирования. Задача Робэна связана с функциями Грина, а само уравнение Робэна решается методом последовательных приближений (см., например, в книге [12], стр. 420, очерк о Стеклове, или Сретенский [44], гл. 4, § 1). Пока не известно ни одного нейтрального слоя — кроме шарового и эллипсоидального — уравнение которого можно было бы выразить в замкнутой форме.

В. И. Арнольд несколько обобщил теорему Ньютона (см. [49]), но не для гравитирующих слоёв, а для заряженных электрическим зарядом. Пусть имеется заряженная поверхность $S(x_1, x_2, x_3) = 0$, заданная полиномом степени n. *Тогда заряженные слои*

$$0 \leqslant S(x_1, x_2, x_3) \leqslant \varepsilon \tag{5.142}$$

с учётом ориентации поверхностей $S(x_1, x_2, x_3) = 0$ *и* $S(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon$ *не оказывают притяжения на внутреннюю точку.* Знак заряда чередуется: положителен на ближайшем к испытуемой точке куске поверхности, отрицателен на следующем, и т. д.

Теорема Арнольда применима к внутренней области не любой, а только такой поверхности степени n, которая распадается на $n/2$ вложенных друг в друга связанных частей. Распадание же поверхности происходит не всегда, и это заметно ограничивает рамки действия данной теоремы. Так, поверхность четвёртого порядка, ограниченная вращающимся овалом Кассини, уже не распадается на две связные части и на ней указанным методом нельзя создать эквипотенциальный слой.

Кстати, легко показать, что толщина слоя между поверхностями (5.142) будет равна

$$d\tau = \frac{\varepsilon}{|\mathrm{grad} S|}. \tag{5.143}$$

На эллипсоиде этот слой становится гомотетическим, а значит и уровенным.

§ 5.15. Потенциал и притяжение трехмерной круговой цилиндрической оболочки

Дана тонкая боковая цилиндрическая поверхность радиусом R и высотой $2H$ (рис. 125) с поверхностной плотностью вещества $\sigma = \mathrm{const}$. Для нахождения гравитационного потенциала этого тела обратимся к потенциалу элементарного колечка, представленного сечением цилиндрической поверхности на высоте x'_3. Согласно (3.4), потенциал такого колечка с плотностью μ_0 будет равен

$$\frac{\varphi_{\text{кольца}}(r, x_3)}{4G\mu_0 R} = \frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{4rR}{(R+r)^2 + (x'_3 - x_3)^2}}\right)}{\sqrt{(R+r)^2 + (x'_3 - x_3)^2}}, \tag{5.144}$$

где K (...) — полный эллиптический интеграл первого рода. Заменяя $\mu_0 = \sigma\, dx'_3$ и интегрируя от $-H$ до H вклады от всех колечек, находим *пространственный потенциал боковой цилиндрической поверхности* в произвольной, как внешней, так и внутренней точках (r, x_3):

$$\frac{\varphi_{\text{цил. пов.}}(r, x_3)}{4G\sigma R} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sqrt{(x_3 - H)^2 + (R + r)^2 - 4rR\sin^2\theta} + H - x_3}{\sqrt{(x_3 + H)^2 + (R + r)^2 - 4rR\sin^2\theta} - H - x_3}\, d\theta. \tag{5.145}$$

Потенциал (5.145) в общем случае выразить в конечном виде не удаётся. Только на оси

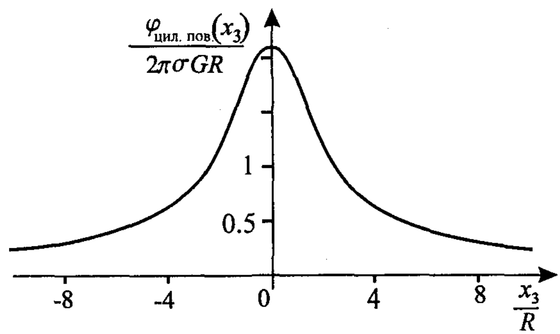


Рис. 37. Зависимость потенциала (5.146) цилиндрической оболочки на оси симметрии от x_3. Отношение $\frac{H}{R} = 1.25$

симметрии цилиндра Ox_3, полагая в (5.145) $r = 0$, получим выражение потенциала через элементарные функции (рис. 37)

$$\varphi_{\text{цил. пов.}}(x_3) = 2\pi G\sigma R \ln \frac{\sqrt{(x_3 - H)^2 + R^2} + H - x_3}{\sqrt{(x_3 + H)^2 + R^2} - H - x_3}. \tag{5.146}$$

Отметим, что в формулах (5.146) и (5.145) функция под знаком логарифма является чётной относительно переменной x_3; этого и следовало ожидать в силу симметрии данной оболочки относительно плоскости $x_3 = 0$.

З а д а ч а 5.23. *Доказать в формулах* (5.146) *и* (5.145) *чётность функции под знаком логарифма от переменной* x_3.

Но в отношении конечных формул решением на оси симметрии всё и исчерпывается; даже в экваториальной плоскости цилиндра, где $x_3 = 0$, потенциал (5.145)

$$\frac{\varphi_{\text{цил. пов.}}(r)}{4G\sigma R} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta} + C}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta} - C} d\theta;\; k^2 = \frac{4rR}{H^2 + (R + r)^2} \leqslant 1;\; C = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R + r)^2}} \tag{5.147}$$

в конечном виде выразить не удаётся.

На рис. 38 показаны кривые равного потенциала, рассчитанные по формуле (5.145). Эти кривые имеют весьма интересный (есть гиперболы и даже асимптоты!) вид.

Тем не менее, *компоненты силы притяжения* однородной боковой цилиндрической поверхности удаётся найти в конечном виде. Дифференцируя выражение (5.145) вначале по x_3, получим

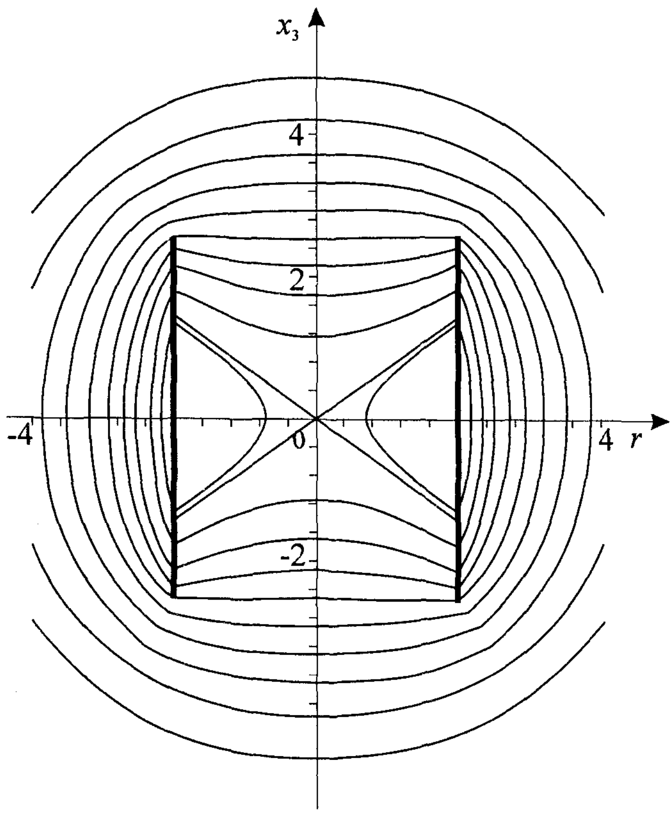


Рис. 38. Кривые равного потенциала круговой цилиндрической оболочки (выделена жирными линиями) с $\frac{H}{R} = 1.25$. Значение потенциала убывает от 3.517 для самой внутренней кривой (ветви гипербол) до 1.46 для округлой внешней

$$\frac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial x_3} = -4G\sigma R \left(\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{4rR}{(x_3 - H)^2 + (R+r)^2}}\right)}{\sqrt{(R+r)^2 + (x_3 - H)^2}} - \frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{4rR}{(x_3 + H)^2 + (R+r)^2}}\right)}{\sqrt{(R+r)^2 + (x_3 + H)^2}} \right). \tag{5.148}$$

Дифференцируя затем потенциал (5.145) по r, после преобразований находим

$$\frac{1}{4G\sigma R}\frac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R + r - 2R\sin^2\theta}{R_1\,(R_1 + H - x_3)}d\theta - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R + r - 2R\sin^2\theta}{R_2\,(R_2 - H - x_3)}d\theta, \tag{5.149}$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(R+r)^2 + (x_2 - H)^2 - 4rR\sin^2\theta}, \\ R_2 &= R_1\,(-H) = \sqrt{(R+r)^2 + (x_2 + H)^2 - 4rR\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{5.150}$$

Умножим и поделим подынтегральные выражения в (5.149) соответственно на $(R_1 - H + x_3)$ и $(R_1 + H + x_3)$. Дальнейшие преобразования дают

$$\frac{1}{4G\sigma R}\frac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial r} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R + r - 2R\sin^2\theta}{(R+r)^2 - 4rR\sin^2\theta}\left(\frac{H - x_3}{R_1} + \frac{H + x_3}{R_2}\right) d\theta. \tag{5.151}$$

Здесь, как легко видеть,

$$\begin{gathered} \frac{R + r - 2R\sin^2\theta}{(R+r)^2 - 4rR\sin^2\theta} = \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{R-r}{R+r}\frac{1}{1 - p^2\sin^2\theta}\right); \\ R_1 = \sqrt{(R+r)^2 + (x_3 - H)^2}\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\theta}; \\ R_2 = \sqrt{(R+r)^2 + (x_3 + H)^2}\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\theta}, \end{gathered} \tag{5.152}$$

где

$$p^2 = \frac{4rR}{(R+r)^2} \leqslant 1; \quad k_1^2 = \frac{4rR}{(R+r)^2 + (x_3 - H)^2} \leqslant 1. \tag{5.153}$$

В итоге находим выражение

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial r} = -\frac{2G\sigma R}{r}\left\{\frac{H - x_3}{\sqrt{(R+r)^2 + (x_3 - H)^2}}\left[\mathrm{K}(k_1) - \frac{R-r}{R+r}\Pi\left[p^2, k_1\right]\right] + \right. \\ \left. + \frac{H + x_3}{\sqrt{(R+r)^2 + (x_3 + H)^2}}\left[\mathrm{K}(k_2) - \frac{R-r}{R+r}\Pi\left[p^2, k_1\right]\right]\right\}. \end{gathered} \tag{5.154}$$

З а д а ч а 5.24. *Изобразить графически:*

а) компоненту силы притяжения $\dfrac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial x_3}$;

б) меридиональные сечения поверхностей $\dfrac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial x_3} = \text{const}$;

в) компоненту $\dfrac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial r}$ *и сечения поверхностей* $\dfrac{\partial \varphi_{\text{цил. пов.}}}{\partial r} = \text{const}$.

Замечания

Глава разработана автором.

§§ 5.1, 5.2. Разработаны элементы общего метода эллипсоидальной стратификации и даны некоторые характеристики элементарных эллипсоидальных оболочек. Метод важен для различных приложений. Следует обратить внимание на некоторые тонкости стратификации в случаях полной сферизации или полного ужатия слоёв в точку.

§§ 5.3, 5.4. Наряду с классическим, здесь имеется и новый материал о гомеоиде. Такова, например, задача о геометрических местах на поверхности слоя точек равной толщины гомеоида, совпадающих, кстати, с линиями равного заряда на поверхности заряженного проводящего эллипсоида!

§§ 5.5, 5.6. Фокалоид обладает важными гравитационными свойствами, однако он известен не столь широко, как гомеоид. Новыми, в частности, являются: дифференциальное уравнение (5.35), выражение для толщины фокалоида (5.41), важное неравенство (5.44), постановка и решение задачи об изолиниях на поверхности фокалоида. Оболочка равной толщины на осях симметрии ранее вообще не рассматривалась.

§ 5.7. Дан метод нахождения новых типов эллипсоидальных оболочек.

§§ 5.8, 5.10. Притяжение гомеоида хорошо изучено. К новым результатам относится теорема 3, а также расчёт притяжения от гомеоида переменной толщины.

§ 5.9. Имеет вспомогательное значение. Все три задачи — новые.

§ 5.11. Разработан общий метод нахождения потенциалов гравитирующих однородных элементарных эллипсоидальных оболочек.

§ 5.12. Новым методом получены как хорошо известные (теорема Маклорена — Лапласа), так и новые (всё остальное) результаты.

§ 5.13. И вновь мы вне рамок классических трактатов. Вводятся понятия обобщённого гомеоида и фокалоида, обладающих интересными гравитационными свойствами. Эти неэллипсоидальные (в общем случае) слои используются далее: обобщённый фокалоид — для доказательства одной важной теоремы (см. § 8.7) и при исследовании фигур равновесия в § 15.8, обобщённый гомеоид — при разработке новых фундаментальных методов нахождении гравитационной энергии тел, в том числе и тел неэллипсоидальной формы (см. § 12.6). Именно обобщённый фокалоид даёт ответ на вопрос: *какой слой, созданный выметанием массы однородного тела на его поверхность, оказывается эквигравитирующим исходному телу во всём внешнем пространстве.*

Отметим, что здесь сделан вывод важной формулы (5.132) для потенциала обобщённого фокалоида.

§ 5.14. Введение в сложную и интересную проблему уровенных неэллипсоидальных слоёв.

§ 5.15. Потенциал и силы притяжения от тонкой боковой поверхности кругового цилиндра ранее не изучались.

Первоисточник по всей главе 5: *Б. П. Кондратьев* [20], [21].

Глава 6

ПОТЕНЦИАЛЫ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Трёхмерные эллипсоидальные тела часто встречаются в природе, и знать их потенциалы необходимо как в астрономии, так и в физике. Но чтобы решать новые задачи для неоднородных эллипсоидов, требуется расширить прежние и создать новые методы. Основными в этой главе являются *методы дифференциации* (о нём см. § 2.11) и *синтеза оболочек*. Именно методом синтеза можно получать потенциалы оболочек конечной толщины и слоисто-неоднородных эллипсоидов в целом.

§ 6.1. Потенциалы однородного эллипсоида

Хотя *однородные* эллипсоиды хорошо изучены, этот параграф включен в книгу с целью логического полного изложения материала (включая многие методические детали), а также с учётом того, что немало нового по этой теме дано у нас во всех последующих параграфах.

Теорема 1. *Потенциал однородного эллипсоида с полуосями a_i во внешней точке x_i равен*

$$\varphi^{(0)}_{внешн}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{\Delta(v)} \left(1 - \sum_{1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right), \tag{6.1}$$

где λ — эллипсоидальная координата рассматриваемой точки относительно граничной поверхности эллипсоида, а Δ дано в (5.66).

Доказательство.

Приводим его в целях иллюстрации метода синтеза элементарных оболочек, широко используемого нами далее.

Однородный эллипсоид можно сконструировать из бесконечной серии элементарных оболочек разного типа. Пусть сейчас это будут гомеоиды. Из (5.64) вытекает, что вклад в потенциал эллипсоида от одного такого гомеоида с полуосями $a_i m$ равен

$$d\varphi^{(0)}_{внешн}(\boldsymbol{x}) = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 m^2 dm \cdot \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a_1^2 m^2 + s)(a_2^2 m^2 + s)(a_3^2 m^2 + s)}}, \tag{6.2}$$

где $\lambda(m^2)$ — эллипсоидальная координата точки x_i относительно выделенного промежуточного гомеоида; она является положительным корнем уравнения

$$\sum_{1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 m^2 + \lambda} = 1. \tag{6.3}$$

Интегрируя по всем оболочкам

$$\varphi_{\text{внешн}}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^1 m^2 dm \int\limits_{\lambda(m^2)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a_1^2 m^2 + s)(a_2^2 m^2 + s)(a_3^2 m^2 + s)}} \tag{6.4}$$

и делая замену

$$s = m^2 v, \quad \lambda(m^2) = m^2 \mu(m^2), \tag{6.5}$$

получим

$$\varphi_{\text{внешн}}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^1 dm^2 \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{(a_1^2 + v)(a_2^2 + v)(a_3^2 + v)}}, \tag{6.6}$$

где $\mu(m^2)$ находится из уравнения

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + \mu} = m^2. \tag{6.7}$$

Меняя порядок интегрирования в (6.6) (см. рис. 39 в § 6.9), находим

$$\varphi_{\text{внешн}}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{\Delta(v)} \int\limits_{m^2(v)}^{1} dm^2, \tag{6.8}$$

где $m^2(v)$ определяется уравнением

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + v} = m^2. \tag{6.9}$$

В итоге (6.8) даёт выражение (6.1). ■

Замечание 1. Компоненты притяжения однородного эллипсоида во внешней точке x_i равны

$$\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}^{(0)}}{\partial x_i} = -2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \cdot x_i \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{(a_i^2 + v)\Delta(v)}. \tag{6.10}$$

Теорема 2. *Потенциал во внутренней точке однородного эллипсоида x_i даётся формулой*

$$\varphi_{\text{внутр}}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^{\infty} \frac{dv}{\Delta(v)} \left(1 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right). \tag{6.11}$$

Доказательство.

Через заданную точку x_i проведём эллипсоид с полуосями $a_i m$. По теореме 4 (из § 6.9) притяжение от внешнего гомеоида равно нулю. Для испытуемой точки формула (6.10) при $\lambda = 0$ даёт

$$\frac{\partial \varphi_{\text{внутр}}^{(0)}}{\partial x_i} = -2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \cdot x_i m^3 \int\limits_0^{\infty} \frac{dv}{(a_i^2 m^2 + v)\sqrt{(a_1^2 m^2 + v)(a_2^2 m^2 + v)(a_3^2 m^2 + v)}}. \tag{6.12}$$

Вводя новую переменную $v = m^2 v'$, приведём выражение (6.12) к виду

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}_{\text{внутр}}}{\partial x_i} = -2\pi G\rho A_i x_i = -2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \cdot x_i \int\limits_0^\infty \frac{dv'}{\left(a_i^2 + v'\right)\Delta\left(v'\right)}. \tag{6.13}$$

Интегрируя (6.13) по x_i и опуская штрих, получим выражение (6.11). ■

С помощью введённых обозначений величин A_i из (1.38) и I из (1.39) *внутренний потенциал эллипсоида* (6.11) записывается в виде

$$\varphi^{(0)}_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho\left(I - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2\right). \tag{6.14}$$

Коэффициенты потенциала A_i в общем случае выражаются через эллиптические интегралы и даны в § 6.2.

§ 6.2. Другая форма потенциалов однородных эллипсоидов и сфероидов

В предыдущем разделе (см. также п.1.2.8) потенциалы однородных эллипсоидов и сфероидов были записаны в интегральной форме. Возможна, однако, и другая их запись. А именно, внешний потенциал однородного трёхосного эллипсоида (6.1) можно представить как функцию от координат пробной точки через неполные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$\varphi^0_{\text{внешн}}(\lambda, \boldsymbol{x}) = \pi G\rho\left[I(\lambda) - \sum_1^3 A_i(\lambda)\, x_i^2\right], \tag{6.15}$$

где

$$I(\lambda) = a_1 a_2 a_3 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)} = \frac{2a_1 a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} F(\varphi, k); \tag{6.16}$$

$$A_i(\lambda) = a_1 a_2 a_3 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\left(a_i^2 + u\right)\Delta(u)}, \tag{6.17}$$

так что

$$A_1(\lambda) = \frac{2a_1 a_2 a_3}{\left(a_1^2 - a_2^2\right)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\left[F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\right]; \tag{6.18}$$

$$\begin{gathered} A_2(\lambda) = \frac{2a_1 a_2 a_3 \sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{\left(a_1^2 - a_2^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)}\left[E(\varphi, k) - \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_1^2 - a_3^2} F(\varphi, k) - \right. \\ \left. - \frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{\left(a_1^2 + \lambda\right)\left(a_2^2 + \lambda\right)}}\right]; \end{gathered} \tag{6.19}$$

$$A_3(\lambda) = \frac{2a_1 a_2 a_3 \sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\left[\sqrt{\frac{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_2^2 + \lambda\right)}{\left(a_1^2 + \lambda\right)\left(a_3^2 + \lambda\right)}} - E(\varphi, k)\right]. \tag{6.20}$$

Здесь $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$; λ — наибольший положительный корень уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{6.21}$$

Кроме того,

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{\lambda + a_1^2}}; \; k = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}} = \frac{e_{12}}{e_{13}}. \tag{6.22}$$

Стандартные *неполные* эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода[1] имеют вид

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}; \\ E(\varphi, k) &= \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi; \\ \Pi[\varphi, n, k] &= \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1 - n \sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Полные эллиптические интегралы следуют из (6.23) при верхнем пределе $\varphi = \frac{\pi}{2}$; обычно их обозначают просто как $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ и $\Pi[n, k]$. Пример см. в (7.23).

Заметим, что коэффициенты A_i могут быть получены и из записанных нами более общих выражений (6.180)—(6.185). Действительно, полагая в них

$$\rho(m) = \text{const}; \; \alpha_i(m) = 1; \; \mu = \begin{cases} 1 \text{ (для внешнего потенциала)} \\ 0 \text{ (для внутреннего потенциала)} \end{cases}, \tag{6.24}$$

также получим искомые выражения A_i и I для потенциалов однородного трёхосного эллипсоида.

Внутренний потенциал эллипсоида получим, положив в этих формулах $\lambda = 0$. Обозначив

$$I(\lambda = 0) = I; \; A_i(\lambda = 0) = A_i, \; i = 1, 2, 3, \tag{6.25}$$

вновь приходим к выражению потенциала (6.14). Этот потенциал — квадратичная функция координат.

Запись внешнего потенциала трёхосного эллипсоида в форме (6.15) удобна тем, что для эллиптических интегралов первого и второго рода существуют подробные таблицы, а также есть удобные схемы расчётов на компьютерах.

Для однородных сфероидов с граничной поверхностью

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \tag{6.26}$$

такая форма записи потенциалов также удобна, так как и внешние потенциалы можно выразить через элементарные функции. Прежде всего, следует различать случаи сжатого $(a_1 = a_2 > a_3)$ и вытянутого $(a_3 > a_1 => a_2)$ сфероидов.

Рассмотрим сначала *внешний потенциал однородного сжатого сфероида*. В принципе, коэффициенты для потенциала сфероида $A_1 = A_2$ и A_3 можно получить и прямо из формул (6.18)—(6.20), но тогда надо дополнительно раскрывать в них неопределённость типа $\frac{0}{0}$. Проще, однако, обратиться прямо к формуле (1.46). Вычисляя в ней соответствующие интегралы, находим

[1] Свойства эллиптического интеграла третьего рода существенно зависят от величины характеристики n. Обратим внимание на знак «-» перед n; в некоторых справочниках по интегралам, например, у Двайта [13], здесь стоит знак «+».

$$\varphi^0_{\text{внешн}}(\lambda, r, x_3) = \frac{3GM}{2\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left\{ I(\lambda) - \frac{r^2}{2\left(a_1^2 - a_3^2\right)} \left[I(\lambda) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\sqrt{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_3^2 + \lambda\right)}}{a_1^2 + \lambda} \right] - \frac{x_3^2}{a_1^2 - a_3^2} \left[\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}} - I(\lambda) \right] \right\}, \tag{6.27}$$

где

$$a_1 = a_2 > a_3,\ M = \frac{4}{3}\pi a_1^2 a_3 \rho,\ I(\lambda) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}}, \tag{6.28}$$

а λ — эллипсоидальная координата пробной точки, являющаяся положительным корнем уравнения

$$\frac{r^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1 \ \left(r^2 = x_1^2 + x_2^2\right). \tag{6.29}$$

Аналогично, в случае *вытянутого сфероида* получим:

$$\varphi^0_{\text{внешн}}(\lambda, r, x_3) = \frac{3GM}{4\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \left\{ I - \frac{r^2}{a_3^2 - a_1^2} \left[\frac{\sqrt{\left(a_3^2 - a_1^2\right)\left(a_3^2 + \lambda\right)}}{a_1^2 + \lambda} - \frac{I}{2} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{x_3^2}{a_3^2 - a_1^2} \left[I - 2\sqrt{\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2 + \lambda}} \right] \right\}, \tag{6.30}$$

где

$$a_3 > a_1 = a_2,\ I = \ln \frac{\sqrt{a_3^2 + \lambda} + \sqrt{a_3^2 - a_1^2}}{\sqrt{a_3^2 + \lambda} - \sqrt{a_3^2 - a_1^2}}. \tag{6.31}$$

Здесь λ — также положительный корень уравнения (6.29).

В частности, на оси симметрии ($r = 0,\ \lambda = x_3^2 - a_3^2$) внешние потенциалы сжатого и вытянутого однородных сфероидов будут соответственно

$$\varphi_{\text{сжат}}(|x_3|) = \frac{3GM}{2\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left\{ -\frac{|x_3|}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} + \left(1 + \frac{x_3^2}{a_1^2 - a_3^2}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{|x_3|} \right\}; \tag{6.32}$$

$$\varphi_{\text{выт}}(|x_3|) = \frac{3}{4} \frac{MG}{\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \left\{ \frac{2|x_3|}{\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} + \left(1 - \frac{x_3^2}{a_3^2 - a_1^2}\right) \ln \frac{|x_3| + \sqrt{a_3^2 - a_1^2}}{|x_3| - \sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \right\}. \tag{6.33}$$

Внутренний потенциал однородного сфероида равен

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \pi G \rho \left(I - A_1 r^2 - A_3 x_3^2\right), \tag{6.34}$$

причём коэффициенты A_1 и A_3 для сжатого сфероида даны в (1.44), а для вытянутого вдоль оси x_3 сфероида $a_3 > a_1 = a_2$ с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - a_1^2/a_3^3}$ они таковы:

$$A_3 = \frac{1 - e^2}{e^3} \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2\frac{1 - e^2}{e^2},$$
$$A_1 = A_2 = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \frac{1 + e}{1 - e}, \quad I = a_3^2 \frac{1 - e^2}{e} \ln \frac{1 + e}{1 - e}. \tag{6.35}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Внутренний потенциал однородного шара с радиусом R имеет вид

$$\varphi_{\text{шара}}(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R^2 - r^2\right). \tag{6.36}$$

Подчеркнём, что внешний и внутренний пространственные потенциалы однородного сжатого и вытянутого сфероидов представлены в (6.27), (6.30) и (6.34) через элементарные функции.

Задача 6.1. *Покажите, что внутренний потенциал однородного полушара в точках своего плоского основания (и только в них!) будет равен*

$$\varphi_{\text{полушара}}(r) = \frac{1}{3}\pi G\rho\left(3R^2 - r^2\right). \tag{6.37}$$

Практически интересна следующая задача.

Задача 6.2. *Найти внутренний потенциал в полости однородной оболочки конечной толщины, представленной разностью двух неконцентрических сфер с радиусами $R_1 > R_2$* (рис. 62 в § 8.3). *Расстояние между центрами сфер равно Δ, причём $0 \leqslant \Delta \leqslant R_1 - R_2$.*

Решение. Внутренний потенциал в точке x от внешнего однородного шара даётся формулой (6.36). При переносе начала координат вдоль оси Ox_3 в центр малой сферы O_1 этот потенциал можно записать в виде

$$\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi G\rho\left[3R_1^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 - \Delta)^2\right]. \tag{6.38}$$

Внутренний потенциал в полости однородной оболочки, ограниченной двумя указанными сферами, даётся тогда разностью внутренних потенциалов обоих шаров. Как легко показать, он будет равен[2]

$$\varphi_{\text{об}} = \frac{2}{3}\pi G\rho\left[3\left(R_1^2 - R_2^2\right) - \Delta^2 + 2\Delta \cdot x_3\right]. \tag{6.39}$$

▼

Задача 6.3. *Найти силу притяжения двух половинок однородного гравитирующего эллипсоида с внутренним потенциалом* (6.14), *рассечённого одной из координатных плоскостей симметрии (например, плоскостью Ox_1x_2).*

Решение. Согласно (6.14), компонента силы притяжения на единицу массы вдоль оси Ox_3 есть

$$F_3 = -2\pi G\rho A_3 x_3. \tag{6.40}$$

Чтобы найти искомую силу притяжения половинок эллипсоида, надо домножить эту компоненту на ρ и проинтегрировать по одной из этих половинок: искомая сила будет равна

$$F = \frac{1}{2}\pi^2 G\rho^2 A_3 a_1 a_2 a_3^2 = \frac{9}{32}\frac{M^2 G A_3}{a_1 a_2}. \tag{6.41}$$

▼

В частности, притяжение двух половинок однородного шара определяется следующим выражением:

$$F = \frac{3}{16}\frac{M^2 G}{R^2}. \tag{6.42}$$

[2] Силовое поле внутри такой оболочки оказывается одномерным и не зависящим от координат:

$$F_1 = F_2 = 0;\ F_3 = \frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \Delta.$$

Задача 6.4. *Найти силу притяжения двух половинок однородной гравитирующей сферической оболочки, рассеченной одной из координатных плоскостей симметрии (например, плоскостью Ox_1x_2).*

Решение. Пусть внешний и внутренний радиусы оболочки есть $R_1 \geqslant R_2$, а полная масса сферической оболочки $M = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R_1^3 - R_2^3\right)$. Тогда внутренний потенциал оболочки есть

$$\varphi_{\text{об}}(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R_1^2 - r^2\right) - \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R_2^3}{r}, \tag{6.43}$$

а компонента силы вдоль оси Ox_3

$$F_3 = \frac{\partial\varphi_o}{\partial x_3} = -\frac{4}{3}\pi G\rho x_3 + \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R_2^3}{r^3}x_3. \tag{6.44}$$

Умножив F_3 на ρ и интегрируя в сферических координатах по верхней, например, половине оболочки, находим

$$F = -\frac{3}{16}M^2G\frac{2R_2^2 + \left(R_1 + R_2\right)^2}{\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)^2}. \tag{6.45}$$

Это и есть искомая *сила притяжения половинок однородной сферической оболочки.* В частности, при $R_2 \to 0$ из этой формулы получим притяжение половинок сплошного шара (6.42). Кроме того, при $R_2 \to R_1$ получим

$$F = \frac{M^2G}{8R_1^2}. \tag{6.46}$$

Это — *сила притяжения половинок однородной тонкой сферической оболочки.* Сравнивая с формулой (6.42) видим: при одинаковой массе и внешнем радиусе R_1, притяжение половинок однородного шара в 1,5 раза больше притяжения половинок тонкой сферической оболочки. ▼

§ 6.3. Потенциалы однородного эллипсоида в пределе большой вытянутости или сжатия

Рассмотрим некоторые предельные случаи, которые могут быть полезными для практических применений. Обратим внимание: хотя исходными являются формулы, написанные выше, поначалу удобнее будет исходить из интегральной формы представления потенциалов однородного эллипсоида.

6.3.1. Сильно вытянутый (иглообразный) эллипсоид ($a_1 \gg a_2, a_3$)

Рассмотрим вначале

Внутренний потенциал

Как известно, общая выражение для внутреннего потенциала однородного эллипсоида даётся формулой

$$\varphi_{\text{внутр}}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty \frac{dv}{\Delta(v)}\left(1 - \sum_1^3\frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right). \tag{6.47}$$

Нормированный потенциал в центре эллипсоида выражен интегралом (для краткости здесь и ниже множитель $a_1a_2a_3$ временно опущен)

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{dv}{\Delta(v)} = \int\limits_{r_0^2}^\infty \ldots + \int\limits_0^{r_0^2} \ldots, \quad r_0 = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}. \tag{6.48}$$

В области $v > r_0^2$ можно пренебречь a_2^2, a_3^2 в сравнении с v. Тогда первое слагаемое

$$\int\limits_{r_0^2}^\infty \frac{dv}{v\sqrt{a_1^2+v}} = \frac{2}{a_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2+r_0^2}}{r_0}. \tag{6.49}$$

Во втором слагаемом в (6.48), наоборот, можно пренебречь v в сравнении с a_1^2, что даёт

$$\frac{1}{a_1} \int\limits_0^{r_0^2} \frac{dv}{\sqrt{(a_2^2+v)(a_3^2+v)}} = \frac{2}{a_1} \ln \frac{\sqrt{a_2^2+v} + \sqrt{a_3^2+v}}{a_2+a_3}. \tag{6.50}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{a_1} \ln \left[\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2+r_0^2}}{r_0} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2+r_0^2} + \sqrt{a_3^2+r_0^2}}{a_2+a_3} \right] = \\ &= \frac{2}{a_1} \ln \left(\frac{2a_1}{r_0} \cdot \frac{2r_0}{a_2+a_3} \right) = \frac{2}{a_1} \ln \frac{4a_1}{a_2+a_3} + O\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right). \end{aligned} \tag{6.51}$$

Аналогично находится и коэффициент

$$A_1 = \int\limits_0^\infty \frac{dv}{(a_1^2+v)^{3/2} \sqrt{(a_2^2+v)(a_3^2+v)}} = \int\limits_{r_0^2}^\infty \ldots + \int\limits_0^{r_0^2} \ldots. \tag{6.52}$$

Здесь первое

$$\int\limits_{r_0^2}^\infty \frac{dv}{v\left(a_1^2+v\right)^{3/2}} = \frac{2}{a_1^3} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2+r_0^2}}{r_0} - \frac{2}{a_1^2\sqrt{a_1^2+r_0^2}} \tag{6.53}$$

и второе слагаемое

$$\frac{1}{a_1^3} \int\limits_0^{r_0^2} \frac{dv}{\sqrt{(a_2^2+v)(a_3^2+v)}} = \frac{2}{a_1^3} \ln \frac{\sqrt{a_2^2+r_0^2} + \sqrt{a_3^2+r_0^2}}{a_2+a_3}; \tag{6.54}$$

вместе дают

$$A_1 \approx \frac{2}{a_1^3} \ln \left(\frac{4a_1}{a_2+a_3} - 1 \right). \tag{6.55}$$

Два других коэффициента оказываются следующими:

$$A_2 = \int\limits_0^\infty \frac{dv}{\left(a_1^2+v\right)^{1/2} \left(a_2^2+v\right)^{3/2} \left(a_3^2+v\right)^{1/2}} \approx \frac{2}{a_1 a_2 (a_2+a_3)}, \tag{6.56}$$

$$A_3 = \int_0^\infty \frac{dv}{\left(a_1^2+v\right)^{1/2}\left(a_2^2+v\right)^{1/2}\left(a_3^2+v\right)^{3/2}} \approx \frac{2}{a_1 a_3 \left(a_2+a_3\right)}. \tag{6.57}$$

Таким образом, в полном виде *внутренний потенциал иглообразного эллипсоида* оказывается равным

$$\varphi^{(0)}_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) \approx \approx 2\pi G\rho a_2 a_3 \left\{ \ln\frac{4a_1}{a_2+a_3} - \frac{x_1^2}{a_1^2}\left(\ln\frac{4a_1}{a_2+a_3}-1\right) - \left(\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\right)\left(a_2+a_3\right)^{-1} \right\}. \tag{6.58}$$

Рассматривая внешний потенциал, следует различать случаи близкой и дальней пробной точки.

Внешний потенциал. Удалённая точка

В этом случае иглообразный эллипсоид можно представить одномерным стержнем с плотностью $\mu = \pi a_2 a_3 \rho\left(1-\frac{l^2}{a_1^2}\right)$. Внешний потенциал

$$\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) \approx \pi G\rho a_2 a_3 \int_{-a_1}^{a_1} \frac{1-\frac{l^2}{a_1^2}}{\sqrt{\left(x_1-l\right)^2+x_2^2+x_3^2}}\,dl. \tag{6.59}$$

Делая здесь замену $l = x_1 - s$, находим *внешний потенциал в удаленной точке*

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) &\approx \\ &\approx \pi G\rho a_2 a_3 \left[\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2+x_3^2}{2a_1^2}\right)\ln\frac{x_1+a_1+\sqrt{\left(x_1+a_1\right)^2+x_2^2+x_3^2}}{x_1-a_1+\sqrt{\left(x_1-a_1\right)^2+x_2^2+x_3^2}} + \right. \\ &\left. + \frac{3x_1-a_1}{2a_1^2}\sqrt{\left(x_1+a_1\right)^2+x_2^2+x_3^2} - \frac{3x_1+a_1}{2a_1^2}\sqrt{\left(x_1-a_1\right)^2+x_2^2+x_3^2}\right].\end{aligned} \tag{6.60}$$

Внешний потенциал. Близкая пробная точка

В этом случае

$$\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{dv}{\Delta(v)}\left(1-\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2+v}\right). \tag{6.61}$$

В заданном приближении

$$\lambda \ll a_1^2, \tag{6.62}$$

и для эллипсоидальной координаты имеем квадратное уравнение

$$1-\frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}, \tag{6.63}$$

или

$$\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)\lambda^2+\left[\left(a_2^2+a_3^2\right)\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)-x_2^2-x_3^2\right]\lambda+a_2^2a_3^2\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)-a_3^2x_2^2-a_2^2x_3^2=0. \tag{6.64}$$

Это уравнение имеет дискриминант

$$D^2=\left[\left(a_2^2-a_3^2\right)\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)-x_2^2\right]^2+2x_3^2\left[\left(a_2^2-a_3^2\right)\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)+x_2^2+x_3^2\right], \tag{6.65}$$

так что

$$\lambda=\frac{x_2^2+x_3^2-\left(a_2^2+a_3^2\right)\left(1-\dfrac{x_1^2}{a_1^2}\right)+D}{2\left(1-\dfrac{x_1^2}{a_1^2}\right)}. \tag{6.66}$$

Знак «+» перед выражением D взят потому, что в качестве λ берётся наибольший корень уравнения.

Отдельные интегралы опять представляем суммой двух членов, и затем каждый из них вычисляем с учётом приближения (6.62). Получим (множитель $a_1a_2a_3$ вновь опущен):

$$\begin{gathered}I=\int\limits_\lambda^\infty\frac{dv}{\Delta(v)}=\int\limits_{r_0^2}^\infty\ldots+\int\limits_\lambda^{r_0^2}\ldots\approx\\ \approx\frac{2}{a_1}\ln\frac{2a_1}{r_0}+\frac{2}{a_1}\ln\frac{\sqrt{a_2^2+r_0^2}+\sqrt{a_3^2+r_0^2}}{\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}}\approx\frac{2}{a_1}\ln\frac{4a_1}{\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}}.\end{gathered} \tag{6.67}$$

Аналогично:

$$A_1=\int\limits_\lambda^\infty\frac{dv}{\left(a_1^2+v\right)^{3/2}\sqrt{\left(a_2^2+v\right)\left(a_3^2+v\right)}}\approx\frac{2}{a_1^3}\left(\ln\frac{4a_1}{\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}}\right); \tag{6.68}$$

$$\begin{gathered}A_2=\int\limits_\lambda^\infty\frac{dv}{\left(a_2^2+v\right)\Delta(v)}\approx\frac{1}{a_1}\int\limits_\lambda^\infty\frac{dv}{\left(a_2^2+v\right)^{3/2}\left(a_3^2+v\right)^{1/2}}=\\ =\frac{2}{a_1\sqrt{a_2^2+\lambda}\left(\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}\right)};\end{gathered} \tag{6.69}$$

$$A_3=\frac{2}{a_1\sqrt{a_3^2+\lambda}\left(\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}\right)}. \tag{6.70}$$

Следовательно, *потенциал вблизи иглообразного эллипсоида* оказывается равным

$$\begin{gathered}\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(x)\approx2\pi G\rho a_2a_3\left\{\ln\frac{4a_1}{\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}}-\frac{x_1^2}{a_1^2}\left(\ln\frac{4a_1}{\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}}-1\right)-\right.\\ \left.-\left(\frac{x_2^2}{\sqrt{a_2^2+\lambda}}+\frac{x_3^2}{\sqrt{a_3^2+\lambda}}\right)\left(\sqrt{a_2^2+\lambda}+\sqrt{a_3^2+\lambda}\right)^{-1}\right\},\end{gathered} \tag{6.71}$$

где эллипсоидальная координата пробной точки дана в (6.66), а D в (6.65).

6.3.2. Сильно сжатый эллипсоид ($a_1, a_2 \gg a_3$)

Потенциалы эллипсоида в этом пределе получаются прямо из формул § 6.2. И хотя тогда при $a_1 \neq a_2$ эти формулы существенно не упрощаются (эллиптические интегралы сохраняются), всё же данный пример вырождения трёхосного эллипсоида практически важен. *Решение этой задачи для внутреннего потенциала дано ниже в* § 6.6.

Дело ещё в том, что сильно сжатый однородный эллипсоид моделируется плоским *неоднородным* эллиптическим диском с распределением поверхностной плотности (6.93). Следовательно, решая задачу для сильно сжатого эллипсоида, мы тем самым находим пространственные потенциалы и для неоднородного эллиптического диска (а ведь последняя, как отдельная задача теории потенциала — весьма непростая задача!).

З а д а ч а 6.5. *Записать в пределе $a_3 \to 0$ формулы* § 6.2 *для внешнего потенциала.*

§ 6.4. Свойства коэффициентов A_i

Потенциал внутри однородного эллипсоида, как мы только что убедились, является положительной квадратичной функцией от координат пробной точки; этот потенциал имеет максимум в центре фигуры. Величина $\pi G\rho I$, по физическому смыслу, есть работа по переносу материальной точки единичной массы из центра эллипсоида на бесконечность, причём *в любом направлении* относительно главных осей эллипсоида.

З а д а ч а 6.6. *Доказать, что эта работа равна сумме работ по переносу материальной точки вдоль трёх главных осей из центра на поверхность эллипсоида.*

Решение. Из (1.38) и (1.39) следует, что

$$I = A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2, \tag{6.72}$$

где каждая величина $A_ia_i^2$, умноженная на $\pi G\rho$, как раз и представляет собой, согласно (6.13), работу по переносу материальной точки вдоль оси a_i. ▼

В частности, работа по переносу из центра на поверхность однородного шара (любого радиуса) так относится к работе переноса с поверхности на бесконечность, как 1:2. С неоднородным шаром дело обстоит иначе: для него такое отношение уже возрастает и при определённой концентрации вещества (см. задачу 6.9 в § 6.9) становится даже равным 1!

Коэффициенты потенциала A_i из (1.38) играют важную роль в дальнейшем; поэтому рассмотрим их подробнее. Прежде всего, эти величины при условии $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ удовлетворяют трём типам неравенств:

$$A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3, \tag{6.73}$$

$$A_1a_1 \leqslant A_2a_2 \leqslant A_3a_3, \tag{6.74}$$

и, в то же время,

$$A_1a_1^2 \geqslant A_2a_2^2 \geqslant A_3a_3^2. \tag{6.75}$$

Доказательство. Оно простое для (6.73) и (6.75), а именно: в силу ($a_i \geqslant a_j$)

$$\frac{1}{a_i^2+v} \leqslant \frac{1}{a_j^2+v}, \tag{6.76}$$

$$\frac{a_i^2}{a_i^2+v} - \frac{a_j^2}{a_j^2+v} = v\frac{a_i^2-a_j^2}{\left(a_i^2+v\right)\left(a_j^2+v\right)} \geqslant 0. \tag{6.77}$$

Для доказательства же неравенства (6.74) рассмотрим выражение

$$\frac{A_ja_j - A_ia_i}{a_i - a_j} = \int\limits_0^\infty \frac{a_ia_j - v}{\left(a_i^2+v\right)\left(a_j^2+v\right)}\frac{dv}{\Delta(v)}. \tag{6.78}$$

Интервал интегрирования разобьём на два: при этом интеграл от нуля до $a_i a_j$ будет положительный, но интеграл от $a_i a_j$ до ∞ — отрицательный. Однако, как легко убедиться, в сумме эти два интеграла дадут положительный результат. Действительно, замена во втором интеграле $s\,v = a_i^2 a_j^2$ и простые преобразования, включающие переобозначение $s = v$, приводят к требуемому.

Очевидно, коэффициенты A_i являются функциями только двух независимых эксцентриситетов трёх главных сечений эллипсоида. Можно считать, например, что A_i зависят от эксцентриситетов именно тех двух главных эллипсов, на пересечении которых находится сама ось a_i:

$$A_1\left(e_{12}, e_{13}\right) = \sqrt{\left(1-e_{12}^2\right)\left(1-e_{13}^2\right)} \int\limits_{1-e_{13}^2}^{\infty} \frac{ds}{\left(e_{13}^2+s\right)^{3/2}\sqrt{s\left(e_{13}^2-e_{12}^2+s\right)}}, \tag{6.79}$$

$$A_2\left(e_{12}, e_{23}\right) = \sqrt{\frac{1-e_{23}^2}{1-e_{12}^2}} \int\limits_{1-e_{23}^2}^{\infty} \frac{ds}{\left(e_{23}^2+s\right)^{3/2}\sqrt{s\left(\dfrac{e_{12}^2}{1-e_{12}^2}+e_{23}^2+s\right)}},$$

$$A_3\left(e_{13}, e_{23}\right) = \left[\left(1-e_{13}^2\right)\left(1-e_{23}^2\right)\right]^{-1/2} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}\sqrt{\left[\dfrac{e_{13}^2}{\left(1-e_{13}^2\right)}+s\right]\left[\dfrac{e_{23}^2}{\left(1-e_{23}^2\right)}+s\right]}}. \tag{6.80}$$

Нетрудно доказать следующие неравенства:

$$\frac{\partial A_1}{\partial e_{12}} < 0 \text{ и } \frac{\partial A_1}{\partial e_{13}} < 0; \quad \frac{\partial A_2}{\partial e_{12}} > 0, \text{ но } \frac{\partial A_2}{\partial e_{23}} < 0; \quad \frac{\partial A_3}{\partial e_{13}} > 0 \text{ и } \frac{\partial A_3}{\partial e_{23}} > 0. \tag{6.81}$$

Поскольку из трёх аргументов у функций A_i только два независимых, то и из трёх A_i лишь две должны быть независимыми. Дополнительное соотношение между A_i имеет вид

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2a_1a_2a_3 \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\Delta^2(v)} \frac{d}{dv}\Delta(v) = -2\left.\frac{a_1a_2a_3}{\Delta(v)}\right|_0^{\infty} = 2. \tag{6.82}$$

Его можно интерпретировать так: если внутри однородного эллипсоида мысленно построить концентрическую с ним сферу, то сумма работ по переносу точки из центра на поверхность данной сферы вдоль трёх осей симметрии будет пропорциональна квадрату радиуса сферы и не должна зависеть от геометрической формы самого эллипсоида.

При вырождении эллипсоида в сжатый или вытянутый сфероиды коэффициенты A_i выражаются, как показано в предыдущем параграфе, через элементарные функции от эксцентриситета сфероида.

В частном случае шара

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{2}{3}, \quad I = 2R^2. \tag{6.83}$$

Внутренний потенциал шара дан в (6.36).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В дальнейшем нам понадобятся разложения коэффициентов потенциала по степеням малых e. Например, для A_1 и A_3 из (1.44) имеем

$$A_1(e) \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad A_3(e) \approx \frac{2}{3} + \frac{4}{15}e^2. \tag{6.84}$$

§ 6.5. Изоповерхности внутри однородного гравитирующего эллипсоида

Для ответа на вопрос, какими должны быть те геометрические места точек, двигаясь по которым мы не совершали бы работы против сил тяготения внутри однородного эллипсоида, следует рассмотреть семейство поверхностей равного потенциала.

Из формулы (6.14) следует, что внутри однородного гравитирующего эллипсоида уровенные поверхности $\varphi^{(0)}_{\text{внутр}}(\boldsymbol{x}) = \text{const}$ образуют семейство гомотетических, т. е. подобных друг другу (но не границе материального эллипсоида (5.3)!), эллипсоидальных поверхностей с эксцентриситетами главных сечений

$$E'_{ij} = \sqrt{1 - \frac{A_i}{A_j}}. \tag{6.85}$$

В силу неравенств (6.73) должно быть $E'_{13} \geqslant E'_{12}$. Как и сама фигура гравитирующего эллипсоида, эти поверхности наиболее вытянуты вдоль оси a_1 и менее всего — вдоль оси a_3. При этом поверхности равного потенциала более сферичны в сравнении с самим эллипсоидом (5.3), ведь согласно неравенству (6.75) $E'_{ij} \leqslant e_{ij}$. Поэтому поверхности данного семейства коснутся границы (5.3) прежде всего на конце малой оси a_3. В итоге распределение потенциала на поверхности однородного эллипсоида таково, что он имеет максимум (минимум) на конце короткой (длинной) оси.

З а д а ч а 6.7. *Исследовать геометрические места точек равного потенциала на поверхности однородного гравитирующего эллипсоида.*

Решение. Искомые места представляют собой пересечения соосных эллипсоидов (5.3) и эллипсоида, получаемого из (6.14) (φ в единицах $\pi G\rho$):

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = I - \varphi^{(0)}_{\text{п}}. \tag{6.86}$$

На поверхности, как мы только что выяснили,

$$A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2 \leqslant \varphi^{(0)}_{\text{п}} \leqslant A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2, \tag{6.87}$$

и это неравенство гарантирует нам пересечение данных эллипсоидов. Итак, мы имеем дело с кривыми четвёртого порядка. Умножим (5.3) на $I - \varphi^{(0)}_{\text{п}}$ и вычтем из (6.86), тогда с учётом (6.72) получим

$$\begin{gathered}
\frac{x_1^2}{a_1^2}\underbrace{\left(\varphi^{(0)}_{\text{п}} - A_2 a_2^2 - A_3 a_3^2\right)}_{\geqslant 0} + \frac{x_2^2}{a_2^2}\underbrace{\left(\varphi^{(0)}_{\text{п}} - A_1 a_1^2 - A_3 a_3^2\right)}_{\gtrless 0} + \\
+\frac{x_3^2}{a_3^2}\underbrace{\left(\varphi^{(0)}_{\text{п}} - A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2\right)}_{\leqslant 0} = 0.
\end{gathered} \tag{6.88}$$

Это уравнение конической поверхности с вершиной в центре эллипсоида, направляющая кривая которой и есть линия равного потенциала; знаки коэффициентов в (6.88) найдены с учётом (6.87) и (6.75). Средний коэффициент может иметь два знака: если $\varphi_{\text{п}}^{(0)} < A_1 a_1^2 + A_3 a_3^2$ — конус охватывает ось x_1, если $\varphi_{\text{п}}^{(0)} > A_1 a_1^2 + A_3 a_3^2$ — конус охватывает ось x_3.

В промежуточном случае $\varphi_{\text{п}}^{(0)} = A_1 a_1^2 + A_3 a_3^2$ конус распадается на две плоскости, проходящие через среднюю ось эллипсоида x_2; уравнения плоскостей

$$x_3 = \pm x_1 \frac{a_3}{a_1} \sqrt{\frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{A_2 a_2^2 - A_3 a_3^2}}. \tag{6.89}$$

Соответствующие кривые равного потенциала вырождаются в два эллипса (см. выше рис. 34). Легко убедиться, что данная задача родственна задачам 5.3, 5.5 и 6.8. ▼

Рассмотрим теперь внутри эллипсоида поверхности равной силы притяжения. Согласно (6.13), они образуют семейство подобных друг другу эллипсоидальных поверхностей, описываемых уравнением

$$A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2 = F^2 \tag{6.90}$$

(F в единицах $2\pi G\rho$). Эксцентриситеты их главных сечений таковы:

$$E_{ij} = \sqrt{1 - \frac{A_i^2}{A_j^2}} \tag{6.91}$$

и, согласно (6.74), $E_{13} > E_{12}$. Следовательно, поверхности равной силы притяжения вытянуты относительно так же, как и сама граничная поверхность (5.3); более того, в силу неравенств (6.73)–(6.75) должно быть

$$E_{ij} \geqslant e_{ij} \geqslant E'_{ij}. \tag{6.92}$$

Поэтому внутри однородного эллипсоида поверхности равной силы притяжения гомотетичны, но сжаты сильнее, чем граничная поверхность материального эллипсоида, и заведомо сильнее, чем поверхности равного потенциала. Сила притяжения имеет максимум (минимум) на конце малой (большой) оси.

Задача 6.8. *На поверхности однородного эллипсоида найти геометрические места точек равной силы притяжения.*

Решение. Оно полностью аналогично решению задач 5.3, 5.5 и 6.7. Конечно, уравнение направляющего конуса будет уже иным, однако в целом картина соответствует рис. 34 из § 5.4. ▼

§ 6.6. Дисковый предел однородного эллипсоида

Следует различать два случая дисковых переходов.

1. В *простом дисковом пределе* $\varepsilon = a_3/a_1 \to 0$ однородный эллипсоид (5.3) превращается в неоднородный эллиптический диск с границей (4.1) и поверхностной плотностью

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}}, \qquad \sigma_0 = 2 \lim_{a_3 \to 0} (\rho a_3). \tag{6.93}$$

Полная масса этого диска

$$M_{\text{диска}} = \frac{2}{3}\pi\sigma_0 a_1 a_2 \,. \tag{6.94}$$

С точки зрения существования потенциала сил притяжения внутри такого диска важно, что интеграл

$$I = \frac{1}{2}\pi G\sigma_0 a_1 a_2 \int\limits_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{v\left(a_1^2+v\right)\left(a_2^2+v\right)}} \tag{6.95}$$

остаётся конечным. Если же диск вырождается при $a_i \to 0$ в иглу, интеграл (6.95) расходится и потенциал как физическая величина перестаёт существовать.

Очевидно, внутри диска потенциал остаётся квадратичным по координатам:

$$\varphi_{\text{диска}}\left(x_1, x_2\right) = I - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2, \tag{6.96}$$

где

$$A_i = \frac{1}{2}\pi G\sigma_0 a_1 a_2 \int\limits_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{v\left(a_i^2+v\right)^3\left(a_j^2+v\right)}} \,. \tag{6.97}$$

При $a_1 \geqslant a_2$

$$\begin{aligned} I &= \gamma \mathrm{K}(e)\,, \\ A_1 &= \gamma \frac{\mathrm{K}(e) - \mathrm{E}(e)}{a_1^2 e^2}, \\ A_2 &= \gamma \frac{\mathrm{E}(e) - \left(1-e^2\right)\mathrm{K}(e)}{a_2^2 e^2}, \end{aligned} \tag{6.98}$$

где для краткости обозначено

$$\gamma = \pi G\sigma_0 a_2 = \frac{3G\,M_{\text{д}}}{2a_1}. \tag{6.99}$$

Здесь $\mathrm{K}(e)$ и $\mathrm{E}(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$\mathrm{K}(e) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}; \quad \mathrm{E}(e) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{6.100}$$

а эксцентриситет диска $e = \sqrt{1 - a_2^2/a_1^2}$. В данном случае $A_2 \geqslant A_1$.

В частности, потенциал внутри круглого диска данного типа равен

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = \frac{3\pi GM}{8R}\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{6.101}$$

Согласно (6.96), линии равного гравитационного потенциала внутри эллиптического диска даются уравнением

$$\frac{x_1^2}{\widetilde{a}_1^2} + \frac{x_2^2}{\widetilde{a}_2^2} = 1 - \frac{\varphi}{I}, \quad \text{где} \quad \widetilde{a}_1^2 = \frac{I}{A_1},\ \widetilde{a}_2^2 = \frac{I}{A_2}, \tag{6.102}$$

и представлены семейством подобных друг другу эллипсов (которые, однако не подобны эллиптической границе материального диска (4.1)!) . Геометрический характер этих уровенных линий в диске, как и эллипсов равной полной силы притяжения в нём, напоминает ситуацию с уровенными поверхностями в трёхмерном эллипсоиде (см. § 6.5).

2. В *софокусном дисковом пределе* однородный эллипсоид с сохранением массы превращается в неоднородный эллиптический диск с границей (5.40) и поверхностной плотностью

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{2a_1a_2a_3\rho}{\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_3^2)}}\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2}}. \tag{6.103}$$

Такой диск является эквигравитирующим во внешнем пространстве исходному эллипсоиду. Распределение плотности в нём такое же, как и в диске (6.93), поэтому он имеет те же самые характеристики, при других, конечно, значениях полуосей и эксцентриситета:

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2},\ R_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2},\ \widetilde{e} = \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}} = \frac{e_{12}}{e_{13}} = q, \tag{6.104}$$

а также центральной плотности. Отношение центральных плотностей у дисков в случаях 1 и 2 равно

$$\frac{\widetilde{\sigma}_0}{\sigma_0} = \frac{a_1a_2}{R_1R_2}. \tag{6.105}$$

§ 6.7. Свойства функций $I(m)$ и $A_i(m)$

Применяя методы расслоения и синтеза гравитирующих эллипсоидальных оболочек, надо знать, как с изменением параметра m ведут себя функции (5.99) и (5.100).

Поскольку, в силу неравенства (5.6),

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{a_i^2(m)}{a_i^2(m) + v}\right) = \frac{v}{\left(a_i^2(m) + v\right)^2}\frac{d}{dm}a_i^2(m) > 0\,, \tag{6.106}$$

то и работа вдоль i-й оси, записываемая в виде

$$A_i(m)\,a_i^2(m) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{a_i^2(m)}{a_i^2(m) + v}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{a_j^2(m)}{a_j^2(m) + v}\cdot\frac{a_k^2(m)}{a_k^2(m) + v}}\,dv \tag{6.107}$$

(суммирование слева отменено, $i \neq j \neq k$), должна удовлетворять неравенству

$$\frac{d}{dm}\left[A_i(m)\,a_i^2(m)\right] > 0. \tag{6.108}$$

Следовательно, независимо от того, как с ростом m изменяется форма граничной поверхности эллипсоида $S(m)$, всегда

$$\frac{d}{dm}I(m) = \frac{d}{dm}\left[\sum_1^3 A_i(m)\,a_i^2(m)\right] > 0. \tag{6.109}$$

Пропорционально $I(m)$ возрастает и потенциал в центре эллипсоида.

Более сложными являются функции $A_i(m)$. Для производных от них имеем выражения

$$
\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dm} &= \frac{\partial A_1}{\partial e_{12}}\frac{de_{12}}{dm} + \frac{\partial A_1}{\partial e_{13}}\frac{de_{13}}{dm}, \\
\frac{dA_2}{dm} &= \frac{\partial A_2}{\partial e_{12}}\frac{de_{12}}{dm} + \frac{\partial A_2}{\partial e_{23}}\frac{de_{23}}{dm}, \\
\frac{dA_3}{dm} &= \frac{\partial A_3}{\partial e_{13}}\frac{de_{13}}{dm} + \frac{\partial A_3}{\partial e_{23}}\frac{de_{23}}{dm},
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

знаки частных производных в которых нам уже известны из (6.81). Прежде всего отметим, что при любом допустимом сочетании знаков у величин $\frac{d}{dm}e_{ij}(m)$ (шесть таких вариантов см. в (5.10)–(5.12)) производные $\frac{d}{dm}A_i(m)$ не могут иметь одинаковые знаки ввиду (6.82). Конкретно: в случае тотального сплющивания трёх главных сечений с ростом m, т. е. когда все производные $\frac{d}{dm}e_{ij}(m) > 0$, выполняются неравенства

$$
\frac{dA_1}{dm} < 0, \quad \frac{dA_2}{dm} \gtrless 0, \quad \frac{dA_3}{dm} > 0; \tag{6.111}
$$

в противоположном этому варианте, когда все $\frac{d}{dm}e_{ij}(m) < 0$, имеем

$$
\frac{dA_1}{dm} > 0, \quad \frac{dA_2}{dm} \gtrless 0, \quad \frac{dA_3}{dm} < 0. \tag{6.112}
$$

Характерно, что из трёх производных неизвестным остаётся знак только у dA_2/dm. Иначе обстоит дело в четырёх оставшихся случаях (5.11) и (5.12), где только две из трёх производных от эксцентриситета имеют одинаковые знаки. Тогда заранее может быть известен знак только у dA_2/dm; в случаях (5.11) имеем $dA_2/dm > 0$, а в (5.12) $dA_2/dm < 0$.

§ 6.8. Синтез элементарных оболочек

Переходим к рассмотрению слоисто-неоднородных эллипсоидальных тел. Для этого нам потребуется математический аппарат первых параграфов главы 5.

В слоисто-неоднородном эллипсоиде плотность распределения массы зависит от одного параметра m, т. е.

$$
\rho \equiv \rho(m).
$$

Будем считать, что при расслоении эллипсоида на оболочки особых геометрических мест в нём не остаётся[3].

Аддитивные по массе величины L (к ним относятся сама масса, моменты инерции и потенциалы) будем находить методом синтеза оболочек. А с ним мы уже знакомы по § 6.1. Внутри данного эллипсоида выделим подсистему с граничной поверхностью $S(m)$ и вычислим для неё искомую величину $L(m)$ в предположении однородности подсистемы. Затем по формуле

$$
dL = dm\, \rho(m) \frac{d}{dm}\left[L(m)\big|_{\rho=1} \right] \tag{6.113}
$$

[3] В противном случае (при софокусном, например, расслоении) нижний предел интегрирования по m будет отличен от нуля.

находим вклад в искомую величину $L(m)$ от отдельной элементарной оболочки заранее заданной плотности. В итоге, интегрируя по всем оболочкам эллипсоида, находим

$$L(m) = \int\limits_{m_{\min}}^{m} dm\,\rho(m)\,\frac{d}{dm}\left[L(m)|_{\rho=1}\right]. \tag{6.114}$$

Для начала вычислим массу и моменты инерции слоисто-неоднородного эллипсоида с поверхностью $S(m)$, определяемые общими формулами

$$M(m) = \int\limits_{m' \leqslant m} \rho(x')\,dV', \quad I_{ij}(m) = \delta_{ij} \int\limits_{m' \leqslant m} \rho(x')\,x_i'^2 dV'. \tag{6.115}$$

Легко находим

$$\begin{aligned} M(m)|_{\rho=1} &= \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 m^3 \prod_1^3 \alpha_i(m), \\ I_{ij}(m)|_{\rho=1} &= \delta_{ij} \cdot \frac{4}{15}\pi a_1 a_2 a_3 a_i a_j m^5 \alpha_i(m)\,\alpha_j(m) \prod_1^3 \alpha_i(m). \end{aligned} \tag{6.116}$$

Подставляя теперь выражения (6.116) в основную формулу (6.114), приходим к

$$M(m) = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \int\limits_{m_{\min}}^{m} dm\,\rho(m)\,\frac{d}{dm}\left[m^3 \prod_1^3 \alpha_i(m)\right], \tag{6.117}$$

$$I_{ij}(m) = \frac{4}{15}\pi a_1 a_2 a_3 a_i^2 \delta_{ij} \int\limits_{m_{\min}}^{m} dm\,\rho(m)\,\frac{d}{dm}\left[m^5 \alpha_i^2(m) \prod_1^3 \alpha_i(m)\right]. \tag{6.118}$$

В частности, масса эллипсоида с подобными слоями, согласно (6.117), равна

$$M = 4\pi a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^1 m^2 \rho(m)\,dm; \tag{6.119}$$

$$I_{ij} = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 a_i^2 \delta_{ij} \int\limits_0^1 m^4 \rho(m)\,dm. \tag{6.120}$$

Таким образом, для определения характеристик слоисто-неоднородного эллипсоида, аддитивных по массе, мы имеем весьма эффективный метод — метод синтеза оболочек. Применяя его, достаточно знать, как вычисляются эти характеристики для однородного эллипсоида; далее всё сводится к одной квадратуре.

§ 6.9. Потенциалы слоисто-неоднородных эллипсоидов. Общий случай стратификации

Эти потенциалы имеют важное теоретическое и практическое значение.

Теорема 3. *Потенциал в точке x_i, внешней по отношению к неоднородному эллипсоиду описанного типа, равен*

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} du \int\limits_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \times$$
$$\times \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u}\right)\right], \qquad (6.121)$$

где функция $m^2(u)$ неявно определяется уравнением

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u} = m^2; \qquad (6.122)$$

λ есть эллипсоидальная координата точки x_i относительно граничной поверхности эллипсоида, являющаяся положительным корнем уравнения (5.65), *а*

$$\Delta^2(m,u) = \prod_1^3\left(a_i^2\alpha_i^2(m)+u\right). \qquad (6.123)$$

Доказательство.

Рассматриваем сплошной эллипсоид как состоящий из бесконечной серии элементарных эллипсоидальных оболочек. Вклад в общий потенциал от одной такой оболочки, ограниченной поверхностями $S(m)$ и $S(m+dm)$, даётся (см. (6.113)) формулой

$$d\varphi_{\text{внешн}}(m) = dm^2\rho\left(m^2\right)\frac{d}{dm^2}\left[\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m)\Big|_{\rho=1}\right], \qquad (6.124)$$

где в качестве $\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m)$ нужно взять потенциал $\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}$ из (6.1), заменив в нём a_i на полуоси промежуточного эллипсоида $a_i m\,\alpha_i(m)$. Тогда λ в формуле (6.1) становится эллипсоидальной координатой пробной точки x_i относительно промежуточной поверхности $S(m)$; её обозначим через $\lambda\left(m^2\right)$.

Последняя определяется как положительный корень уравнения (5.87), Δ — из

$$\Delta^2(m,v) = \prod_1^3\left(a_i^2 m^2\alpha_i^2(m)+v\right). \qquad (6.125)$$

Полагая

$$v = m^2 u, \quad \lambda\left(m^2\right) = m^2\mu\left(m^2\right), \qquad (6.126)$$

где $\mu\left(m^2\right)$ неявно определяется уравнением

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+\mu} = m^2, \qquad (6.127)$$

выражение для $\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m)\Big|_{\rho=1}$ запишем в виде

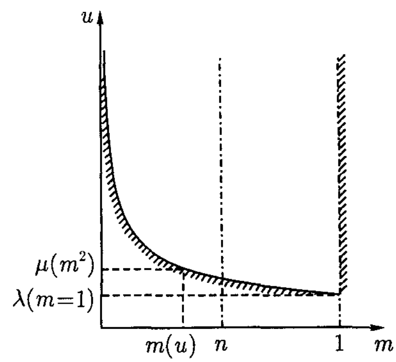


Рис. 39. Область интегрирования в двойном интеграле

$$\varphi^{(0)}_{\text{внешн}}(m) = \pi G a_1 a_2 a_3 \prod_1^3 \alpha_i(m) \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} \frac{du}{\Delta(m,u)}\left(m^2 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u}\right). \qquad (6.128)$$

Подставляя (6.128) в формулу (6.124) и интегрируя от 0 до 1, получим выражение для полного потенциала эллипсоида:

$$\varphi_{\text{внешн}} = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^1 dm^2 \rho\left(m^2\right) \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} du \frac{d}{dm^2} \left[\frac{\prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)} \left(m^2 - \sum\limits_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 \alpha_i^2(m) + u} \right) \right]. \tag{6.129}$$

В двойном интеграле можно изменить порядок интегрирования (рис. 39) и вместо прежних пределов считать, что переменная u изменяется от $\lambda\,(m = 1)$ до ∞, а переменная m — от определяемого уравнением (6.122) значения $m\,(u)$ до 1. Поскольку $\lambda\,(m = 1)$ есть положительный корень уравнения (5.65), то изменение порядка интегрирования в (6.129) и приводит к требуемому результату (6.121). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Потенциал во внешней для эллипсоида точке (6.121) зависит от её координат x_i явно и неявно (неявно — через нижние пределы интегрирования λ и $m^2\,(u)$).

Внешний потенциал эллипсоида с гомотетическими слоями

Когда слои плотности подобны друг другу, то все $\alpha_i\,(m) = 1$. Выражение (6.121) упрощается и принимает вид

$$\varphi_{\text{внешн}}\,(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta\,(u)} \int\limits_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right). \tag{6.130}$$

Теорема 4. *Потенциал во внутренней точке x_i полости неоднородной эллипсоидальной оболочки, ограниченной эллипсоидами $S\,(1)$ и $S\,(n)$, даётся выражением*

$$\varphi_{\text{внутр. об}}\,(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^{\infty} du \int\limits_{n^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \times$$
$$\times \frac{d}{dm^2} \left[\frac{\prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)} \left(m^2 - \sum\limits_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 \alpha_i^2(m) + u} \right) \right]. \tag{6.131}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Вклад в потенциал φ от внешней для x_i элементарной оболочки мы получим, если в формулу (6.124) в качестве $\varphi^{(0)}\,(m)$ подставим данный в (6.11) потенциал однородного эллипсоида $\varphi_{\text{внутр}}$, заменив в нём a_i на $a_i\,(m)$. Полагая $v = m^2 u$, имеем

$$\left.\varphi^{(0)}_{\text{внутр}}\,(m)\right|_{\rho=1} = \pi G a_1 a_2 a_3 \prod_1^3 \alpha_i\,(m) \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{\Delta\,(m,u)} \left(m^2 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 \alpha_i^2\,(m) + u} \right), \tag{6.132}$$

где $\Delta\,(m,u)$ определено в (6.123). Подставляя (6.132) в (6.124) и интегрируя по всем слоям оболочки от n^2 до 1, находим полный потенциал от всей оболочки:

$$\varphi = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{n^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \int\limits_{0}^{\infty} du \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod\limits_{1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2 - \sum\limits_{1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u}\right)\right]. \tag{6.133}$$

Изменив порядок интегрирования (что легко сделать, так как пределы по m не зависят от u), мы получим требуемый результат (6.131). ■

Замечание 5. С помощью выражений (5.99) и (5.100) потенциал (6.131) можно записать компактнее:

$$\varphi_{\text{внутр. об}}(\boldsymbol{x}) = \pi G \int\limits_{n^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[I(m) - \sum\limits_{1}^{3} A_i(m)\, x_i^2\right]. \tag{6.134}$$

Замечание 6. В общем случае, когда сплюснутость слоёв равной плотности зависит от m, потенциал внутри полости оболочки *явно зависит от координат*. Зависимость эта — квадратичная по x_i. Лишь в частном случае расслоения толстой оболочки на гомеоидальные слои (в этом случае коэффициенты A_i от m уже не зависят) потенциал внутри оболочки (6.131) или (6.134) вообще не зависит от координат пробной точки.

Теорема 5. *Потенциал во внутренней точке x_i неоднородного эллипсоида рассмотренного типа даётся выражением*

$$\varphi_{\text{внутр}} = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod\limits_{1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2 - \sum\limits_{1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u}\right)\right]. \tag{6.135}$$

Доказательство.

Полный потенциал во внутренней точке складывается из потенциала от сплошного эллипсоида, для которого рассматриваемая точка не является внутренней, и потенциала от эллипсоидальной оболочки, для которой точка не является внешней. Пусть $a_i n \alpha_i(n)$ суть полуоси поверхности равной плотности, проходящей через точку x_i. Тогда, в силу равенств (6.121) (где положим $\lambda = 0$) и (6.131), эти слагаемые полного потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида будут

$$\varphi^{I} = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{m^2(u)}^{n^2} \Phi\left(m^2, u\right) dm^2$$

и

$$\varphi^{II} = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{n^2}^{1} \Phi\left(m^2, u\right) dm^2,$$

где $\Phi\left(m^2, u\right)$ — интегрируемая функция. Складывая потенциалы φ^{I} и φ^{II}, получим выражение (6.135). ■

Замечание 7. Потенциал во внутренней точке слоисто-неоднородного эллипсоида зависит от координат x_i явно и неявно (в последнем случае — через нижний предел интегрирования).

Внутренний потенциал эллипсоида с гомотетическими слоями

Когда слои равной плотности подобны друг другу, то, как нетрудно показать, выражение (6.135) заметно упрощается и принимает вид (1.51).

Разумеется, в случае слоисто-неоднородного сфероида, а также шара со сферически симметричным распределением вещества (для него см. интегральную формулу (1.55) эти формулы ещё более упрощаются.

Задача 6.9. *Дан неоднородный шар радиусом R с распределением плотности $\rho = \rho_0(1 - r^2/R^2)^n$, n — любое вещественное число. Найти внутренний потенциал такого шара и отношение работы δ по переносу материальной точки из центра на его поверхность к работе переноса с поверхности на бесконечность.*

Ответ.

$$\varphi(x) = 4\pi G\rho_0 R^2 \left\{ \frac{1}{3}x^2 \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, -n, \frac{5}{2}, x^2\right) + \frac{\left(1 - x^2\right)^{n+1}}{2(1+n)} \right\} \left(x \equiv \frac{r}{R}\right), \tag{6.136}$$

где ${}_2F_1(...)$ — гипергеометрическая функция; тогда искомое отношение работ оказывается равным

$$\delta = \frac{2\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)} - 1. \tag{6.137}$$

В частности, отношение этих работ равно единице при $n = 1.38175$ (ср. со случаем однородного шара в § 6.4). ▼

Теорема 6. *Потенциал во внешней точке x_i неоднородной толстой эллипсоидальной оболочки рассматриваемого типа, ограниченной эллипсоидами с полуосями a_i и $a_i n \alpha_i(n)$, даётся выражением*

$$\varphi_{\text{внешн. об}}(\boldsymbol{x}) = \pi G a_1 a_2 a_3 \int\limits_{n^2}^{1} \rho\left(m^2\right) dm^2 \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} du \frac{d}{dm^2} \left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m, u)} \left(m^2 - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 \alpha_i^2(m) + u} \right) \right], \tag{6.138}$$

где $\mu\left(m^2\right)$ неявно определяется уравнением (6.127).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оно проводится известным нам методом. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Чтобы изменить порядок интегрирования в двойном интеграле (6.138), разобьём последний на два; тогда получаем

$$\varphi = \int\limits_{\lambda}^{\mu(n^2)} du \int\limits_{m^2(u)}^{1} \Phi\left(m^2, u\right) dm^2 + \int\limits_{\mu(n^2)}^{\infty} du \int\limits_{n^2}^{1} \Phi\left(m^2, u\right) dm^2, \tag{6.139}$$

где $\Phi\left(m^2, u\right)$ — известная нам интегрируемая функция.

§ 6.10. О притяжении и уровенных поверхностях в полостях эллипсоидальных оболочек

Для исследования поверхностей равного потенциала внутри слоисто-неоднородной оболочки выражение (6.134) представим в виде, напоминающем формулу (6.14) для потенциала однородного эллипсоида во внутренней точке:

$$\varphi_{\text{внутр. об}}(n) = \widetilde{I}(n) - \sum_1^3 \widetilde{A}_i(n) x_i^2, \tag{6.140}$$

где обозначено

$$\widetilde{I}(n) = \pi G \int\limits_{n^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{dI(m)}{dm^2},$$
$$\widetilde{A}_i(n) = \pi G \int\limits_{n^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{dA_i(m)}{dm^2}. \tag{6.141}$$

Отсюда ясно, что искомые уровенные поверхности внутри оболочки, как и в эллипсоиде, являются поверхностями второго порядка. Но важный момент: в отличие от коэффициентов A_i из (1.38), все три величины $\widetilde{A}_i$ не могут иметь одинаковые знаки; как было доказано в § 6.7, только две из трёх производных dA_i/dm могут иметь одинаковые знаки. Следовательно, *поверхности равного потенциала в полости оболочки должны принципиально отличаться от исследованных в* § 6.5 *уровенных поверхностей внутри однородного эллипсоида.* Конкретно, они не могут уже быть эллипсоидальными. Достаточно рассмотреть распределение знаков у величин $\widetilde{A}_i$ в каком-либо частном случае; пусть это будет случай (6.112). Что касается знака у $\widetilde{I}$, то мы уже знаем из § 6.7, что он всегда положительный. Имеем

$$\widetilde{A}_i x_1^2 \pm \left|\widetilde{A}_2\right| x_2^2 - \left|\widetilde{A}_3\right| x_3^2 = \widetilde{I} - \varphi = \text{const}. \tag{6.142}$$

Итак, поверхности равного потенциала в полостях оболочек представляют собой в общем случае сопряжённые семейства однополостных и двуполостных гиперболоидов. Ранее, в § 5.12, это было доказано для частного случая элементарной оболочки с формой фокалоида .

Семейства однополостных и двуполостных гиперболоидов разделены асимптотическим конусом второго порядка (рис. 40)

$$\widetilde{A}_i x_1^2 \pm \left|\widetilde{A}_2\right| x_2^2 - \left|\widetilde{A}_3\right| x_3^2 = 0.$$

На поверхности этого конуса $\widetilde{I} - \varphi = 0$; при переходе от двуполостных к однополостным гиперболоидам мы переходим из области больших φ (где $\widetilde{I} - \varphi < 0$) в область малых φ (где $\widetilde{I} - \varphi > 0$).

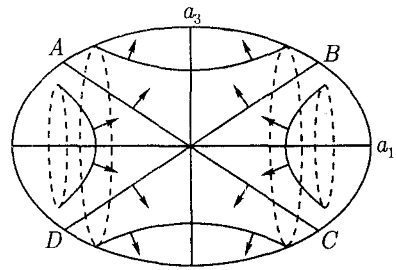


Рис. 40. Семейства однополостных и двуполостных гиперболоидов, разделённые асимптотическим конусом $ABCD$. Это поверхности равного потенциала в полостях произвольных (кроме гомеоида) однородных или слоисто-неоднородных эллипсоидальных оболочек. Стрелками показано направление сил для случаев $\widetilde{A}_1 > 0$, $\widetilde{A}_2 < 0$ и $\widetilde{A}_3 < 0$

Сила притяжения перпендикулярна к уровенным поверхностям, и при переносе материальной точки по любой из них работа не совершается. Поэтому работа по переносу тела из любой точки асимптотического конуса на бесконечность будет одной и той же, равной $\widetilde{I}(n)$.

В области однополостных гиперболоидов сила притяжения направлена к поверхности оболочки (и чем ближе к поверхности, тем больше сила), а в области двуполостных — направлена от неё. *Этот эффект двух направлений сил существует внутри любой слоисто-неоднородной оболочке, кроме гомеоида.* Важно и то, что сами силы внутри эллипсоидальных оболочек из-за квадратичности потенциала (6.140) линейно зависят от координат.

Нет оснований заранее считать силы притяжения в полостях оболочек величинами второго порядка малости. У однородных оболочек величины $\widetilde{A}_i(n) = \pi G\rho\left[A_i(1) - A_i(n)\right]$

(а с ними — и силы) могут заметно отличаться от нуля; влияние же неоднородности оболочек надо учитывать конкретно в каждой задаче.

Одно из приложений данной теории оболочек к Земле см. в § 15.1.

§ 6.11. Свойства потенциалов слоисто-неоднородного эллипсоида

1. Докажем, что потенциал эллипсоида во внешней точке (6.121) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i^2} = 0. \tag{6.143}$$

Вначале из уравнения (6.122) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} m^2(u) = \left[\frac{2x_i}{a_i^2 \alpha_i^2(m) + u}\right] \left[1 + \sum_k\right]^{-1}, \tag{6.144}$$

где для краткости обозначено

$$\sum_k \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2 a_k^2 \frac{d}{dm^2} \alpha_k^2(m)}{\left(a_k^2 \alpha_k^2(m) + u\right)^2}. \tag{6.145}$$

Дифференцируя $\varphi_{\text{внешн}}$ из (6.121) по x_i и учитывая равенство (6.122) и то, что $m(u = \lambda) = 1$ (это даёт возможность считать λ постоянной при взятии производной от интегралов типа $\int\limits_\lambda^\infty du \int\limits_{m^2(u)}^1 \Phi\left(m^2, u\right) dm^2$), получим

$$\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i} = -2\pi G a_1 a_2 a_3 x_i \int\limits_\lambda^\infty du \left\{\rho\left(m^2\right) \prod_1^3 \alpha_i(m) \times \left[\Delta(m,u)\left(a_i^2 \alpha_i^2(m) + u\right)\right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{m^2(u)}^1 dm^2 \rho\left(m^2\right) \times \frac{d}{dm^2}\left[\prod_1^3 \alpha_i(m)\left[\Delta(m,u)\left(a_i^2 \alpha_i^2(m) + u\right)\right]^{-1}\right]\right\}. \tag{6.146}$$

Дифференцируя по x_i выражение (6.146) и учитывая формулу (6.144), а также равенства $\alpha_i(1) = 1$ и $m(u = \lambda) = 1$, находим (опуская элементарные промежуточные преобразования)

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i^2} = -2\pi G a_1 a_2 a_3 \left\{\int\limits_\lambda^\infty du \left(\frac{\rho_0}{\Delta(1,u)\left(a_i^2 + u\right)} - \int\limits_{m^2(u)}^1 \frac{\prod_1^3 \alpha_i(m) \frac{d}{dm^2}\rho\left(m^2\right)}{\Delta(m,u)\left(a_i^2 \alpha_i^2(m) + u\right)} dm^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2x_i \left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m) \frac{d}{dm^2}\rho\left(m^2\right)}{\Delta(m,u)\left(a_i^2 \alpha_i^2(m) + u\right)}\left(1 + \sum_k\right)^{-1}\right]_{m=m(u)} - x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\rho_0}{\Delta(1,\lambda)\left(a_i^2 + \lambda\right)}\right)\right\}, \tag{6.147}$$

где $\rho_п = \rho(m = 1)$. Суммируя вторые производные и учитывая равенства (которые нетрудно доказать)

$$\sum_1^3 \left[\frac{x_i^2}{\left(a_i^2\alpha_i^2(m)+u\right)^2}\right]_{m=m(u)} = -\left[1+\sum_k\right]_{m=m(u)} \frac{d}{du}m^2(u), \tag{6.148}$$

$$\sum_1^3 \frac{1}{a_i^2\alpha_i^2(m)+u} = \frac{2}{\Delta(m,u)}\frac{d}{du}\Delta(m,u) \tag{6.149}$$

и

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} = 2, \tag{6.150}$$

получим

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2\varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i^2} = 4\pi G a_1 a_2 a_3 \left(\frac{\rho_\text{п}}{\Delta(1,\lambda)} - \int_\lambda^\infty du\left\{-\rho_\text{п}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(1,u)}\right) + \right.\right. \tag{6.151}$$

$$\left.\left. + \int_{m^2(u)}^1 \prod_1^3 \alpha_i(m)\frac{d\rho}{dm^2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(m,u)}\right)dm^2 - \left[\frac{\prod_1^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]_{m=m(u)}\frac{d}{du}\rho[m^2(u)]\right\}\right).$$

Легко показать, что

$$\int_{m^2(u)}^1 \prod_1^3 \alpha_i(m)\frac{d\rho}{dm^2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(m,u)}\right)dm^2 =$$

$$= \frac{d}{du}\int_{m^2(u)}^1 \frac{\prod_1^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho}{dm^2}dm^2 + \left[\frac{\prod_1^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho}{dm^2}\right]_{m=m(u)}\frac{dm^2(u)}{du}. \tag{6.152}$$

Поэтому (6.151) можно представить в виде

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2\varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i^2} = 4\pi G a_1 a_2 a_3 \left(\frac{\rho_\text{п}}{\Delta(1,\lambda)} - \int_\lambda^\infty du\left\{-\rho_\text{п}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(1,u)}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{m^2(u)}^1 \frac{\prod_1^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho}{dm^2}dm^2\right\}\right). \tag{6.153}$$

Взяв по частям интеграл в фигурных скобках, получим

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2\varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_i^2} = 4\pi G a_1 a_2 a_3 \left[\frac{\rho_\text{п}}{\Delta(1,\lambda)} + \int_\lambda^\infty du\frac{d}{du}\left\{\left[\frac{\prod_1^3\alpha_i(m)\rho(m^2)}{\Delta(m,u)}\right]_{m=m(u)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{m^2(u)}^1 \rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]dm^2\right\}\right]. \tag{6.154}$$

Обратим теперь внимание на то, что

$$\left[\int_{m^2(u)}^{1} \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right] dm^2\right]_{u=\lambda}^{u=\infty} = 0. \tag{6.155}$$

Действительно, при $u = \infty$ имеем $\Delta^{-1} = 0$, а при $u = \lambda$ будет $m^2(u) = 1$, что и доказывает равенство (6.155). Оставшийся в (6.154) интеграл даёт

$$\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i[m(u)]}{\Delta[m(u),u]}\rho\left[m^2(u)\right]\right]_{u=\lambda}^{u=\infty} = -\frac{\rho_{\text{п}}}{\Delta(1,\lambda)}. \tag{6.156}$$

С учётом (6.155) и (6.156) мы приходим в (6.154) к доказательству теоремы Лапласа.

2. Докажем, что потенциал эллипсоида во внутренней точке (6.135) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_i^2} = -4\pi G\rho. \tag{6.157}$$

Учитывая равенства (6.122) и (6.144), находим первую производную

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_i} = -2\pi G a_1 a_2 a_3\, x_i \int_0^\infty du \Biggl\{ \left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)\rho\left(m^2\right)}{\Delta(m,u)\left(a_i^2\alpha_i^2(m)+u\right)}\right]_{m=m(u)} + \\ + \int_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)\left(a_i^2\alpha_i^2(m)+u\right)}\right]\Biggr\}.\end{aligned} \tag{6.158}$$

Дифференцируя (6.158) по x_i, суммируем полученные производные и, учитывая равенства (6.144), (6.148) и (6.149), так же, как и выше, получаем выражение для лапласиана

$$\begin{aligned}\sum_1^3 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_i^2} = -4\pi G a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty du \frac{d}{du} \Biggl\{ \left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\rho\left(m^2\right)\right]_{m=m(u)} + \\ + \int_{m^2(u)}^{1} \rho\left(m^2\right)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right] dm^2\Biggr\}.\end{aligned} \tag{6.159}$$

Нетрудно видеть, что

$$\left[\int_{m^2(u)}^{1} \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right] dm^2\right]_{u=0}^{u=\infty} = 0. \tag{6.160}$$

Действительно, при $u = \infty$ имеем $\Delta^{-1} = 0$, а при $u = 0$ будет $\Delta = a_1 a_2 a_3 \prod_1^3 \alpha_i(m)$, вследствие чего

$$\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_1^3 \alpha_i(m)}{\Delta(m,0)}\right] = 0,$$

что и доказывает равенство (6.160).

Окончательно получаем

$$\sum_1^3 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_i^2} = 4\pi G a_1 a_2 a_3 \left[\rho\left[m^2(u)\right] \frac{\prod_1^3 \alpha_i\left[m(u)\right]}{\Delta\left[m(u), u\right]} \right]_{u=0}^{u=\infty} = -4\pi G \rho, \tag{6.161}$$

что и доказывает теорему Пуассона.

Замечание 9. Потенциал φ эллипсоида является непрерывной функцией координат x_i во всём пространстве.

Замечание 10. Потенциал φ эллипсоида всюду в пространстве имеет непрерывные первые производные. В частности, величины $\partial\varphi/\partial x_i$ не имеют разрыва на границе эллипсоида, что следует из сравнения выражений (6.146) (где нужно положить $\lambda = 0$) и (6.158).

Замечание 11. Потенциал эллипсоида и его первые производные на бесконечности обращаются в нуль.

Итак, найденные потенциалы слоисто-неоднородного эллипсоида имеют все свойства обычного ньютоновского потенциала.

§ 6.12. Неоднородные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды с софокусным расслоением слоёв

В § 5.12 были рассмотрены однородные фокалоиды. *Но формула (5.93) также выражает замечательные свойства и неоднородного софокусного распределения масс.* Имеет место важная (и неизвестная ранее)

Теорема 7. *При софокусном распределении масс внешние потенциалы соосных слоисто-неоднородных толстых оболочек, а также сплошных эллипсоидов относятся друг к другу как массы этих тел.*

Доказательство.

Исходим из формулы (5.84), записав её для краткости в виде

$$d\varphi^0_{\text{фок}}(m) = \frac{3}{4} G dM_{\text{фок}} \cdot \mathcal{R}, \quad \text{где } \mathcal{R} = \int_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv. \tag{6.162}$$

Подставим это выражение вместо $dL(m)$ под знак интеграла из (6.114) и применим *метод синтеза элементарных оболочек*. Тогда внешний потенциал толстой оболочки ($V_{\text{эл}}$ — объём эллипсоида с поверхностью $S(m)$) находим в виде (ср. с (6.138)):

$$\varphi_{\text{внешн}}(m) = \frac{3}{4} G \int_{m_{\min}}^{m} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[V_{\text{эл}}(m) \cdot \mathcal{R}\right]. \tag{6.163}$$

Полагая теперь стратификацию софокусной и опираясь на доказанное нами ранее важное свойство (5.91) независимости величины R от m, приводим (6.163) к виду

$$\varphi_{\text{внешн}}(m) = \frac{3}{4} G M(m) \cdot \int_{\lambda(m^2)}^{\infty} \mathrm{F}\left(m^2, v\right) dv = \frac{3}{4} G M(m) \cdot R. \tag{6.164}$$

Здесь масса толстой оболочки или сплошного эллипсоида $M(m)$ равна

$$M(m) = \int_{m^2_{\min}}^{m^2} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2}\left[V_{\text{эл}}\right]. \tag{6.165}$$

Тем самым мы доказали, что соотношения (5.95) распространяются и на случай слоисто-неоднородных толстых и тонких фокалоидов , а также (при $m_{\min} = e_{13}(1)$) и на сплошные эллипсоиды с софокусной стратификацией. ■

Формула (6.164) по внешнему виду в точности совпадает с потенциалом однородного эллипсоида (5.84). Следовательно, при софокусной стратификации соосных оболочек и сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов значение потенциала этих тел на фиксированную внешнюю точку x_i зависит только от полной массы тела $M(m)$, но *совершенно не зависит* от самого закона распределения масс $\rho\left(m^2\right)$ в них. Другими словами, гравитационный потенциал *вне* слоисто-неоднородного эллипсоида, состоящего из софокусных слоёв, никак не изменится при любой перестановке этих слоёв и, кроме того, потенциал остаётся неизменным даже при выравнивании плотности вещества в нём до однородного состояния. В этом отношении софокусные эллипсоидальные слои ведут себя совершенно так, как и простые сферические слои.

В частности, когда неоднородная, вообще говоря, эллипсоидальная оболочка с софокусным расслоением (и с граничными значениями параметра $m \geqslant m'$) получается из сплошного эллипсоида с массой M путём выреза из него соосного внутреннего эллипсоида массой M', то имеет место обобщение формулы (5.97):

$$\varphi_{\text{фок}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x})\left[1 - \frac{M'}{M}\right], \tag{6.166}$$

Итак, установленные в § 5.12 *теоремы полностью переносятся и на слоисто-неоднородные оболочки и эллипсоиды с софокусной стратификацией.* Поэтому, например, при равенстве полных масс и конгруэнтных (или софокусных) граничных поверхностях внешние потенциалы однородного эллипсоида и слоисто-неоднородного эллипсоида (при любом распределении масс в последнем, лишь бы он имел софокусную стратификацию!) будут равны.

Теорема 7 значительно расширяет рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа, ведь в последней говорилось лишь о притяжении сплошных однородных софокусных эллипсоидов.

§ 6.13. Потенциалы слоисто-неоднородных эллипсоидов в ином виде

Найденным выше потенциалам слоисто-неоднородного эллипсоида (6.121) и (6.135) можно придать более компактную форму. С этой целью введём следующие обобщения величин (5.99) и (5.100):

$$A_i\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] = a_1 a_2 a_3 \prod_1^3 \alpha_i(m) \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} \frac{du}{\Delta(m,u)\cdot\left(a_i^2\alpha_i^2(m) + u\right)}, \tag{6.167}$$

$$I\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] = a_1 a_2 a_3 \prod_1^3 \alpha_i(m) \int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty} \frac{du}{\Delta(m,u)} = m^2 \sum_1^3 A_i\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] a_i^2\alpha_i^2(m), \tag{6.168}$$

где $\mu\left(m^2\right)$ находится из уравнения (6.127), и составим выражение

$$R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] = I\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] - \sum_1^3 A_i\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] x_i^2. \tag{6.169}$$

Тогда потенциал элементарной эллипсоидальной оболочки (вне и внутри) в общем случае имеет вид

$$d\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x}) = \pi G\, dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right], \tag{6.170}$$

а потенциал во внешней и во внутренней точках слоисто-неоднородного эллипсоида можно записать одной формулой

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \pi G \int\limits_0^1 dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{d}{dm^2} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right]. \tag{6.171}$$

Конкретно, потенциал во внешней точке мы получаем при

$$\mu(m = 1) = \lambda, \tag{6.172}$$

а для случая внутренней точки

$$\mu(m = 1) = 0. \tag{6.173}$$

Легко убедиться, что в силу уравнения (6.127)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] = 0, \tag{6.174}$$

поэтому при дифференцировании функции (6.169) в подынтегральном выражении (6.171) следует принимать во внимание лишь явную зависимость этой функции от параметра m. Взяв по частям интеграл (6.171), получим

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \pi G\left[\rho\left(m^2\right) R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right]\right]_{m=0}^{m=1} - \pi G \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{dm^2} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] dm^2.$$

Но при $m = 0$ величина $\mu(0) = \infty$, поэтому $I(0) = A_i(0) = 0$ и проинтегрированный член будет равен $\rho_{\text{п}}(1) \cdot R[1, \mu(1)]$. Последнее выражение представляет собой хорошо известный потенциал однородного эллипсоида (как во внешней, так и во внутренней точках), конгруэнтного с внешней граничной поверхностью слоисто-неоднородного эллипсоида, причём плотность этого однородного эллипсоида равна плотности на границе неоднородного. Таким образом,

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{x})\Big|_{\rho_{\text{п}}(m=1)} - \pi G \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{dm^2} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] dm^2, \tag{6.175}$$

где для внешней точки в качестве первого члена следует взять потенциал (6.1) и учесть равенство (6.172); для внутренней точки — потенциал (6.11) и нижний предел для μ из (6.173). Это и есть искомая форма записи потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида.

Представление потенциала в виде (6.175) удобно, так как:

а) полный потенциал разбит на две части, из которых первая хорошо известна (потенциал однородного эллипсоида) и даже исчезает при $\rho_{\text{п}}(m = 1) = 0$; в последнем случае

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\pi G \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{dm^2} R\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] dm^2; \tag{6.176}$$

б) второй член в (6.175) содержит производную $d\rho/dm^2$; для однородного эллипсоида член (6.176) исчезает;

в) при нахождении сил, дифференцируя φ, можно сразу проникать во втором члене под знак интеграла; так, для сил внутри эллипсоида

$$\frac{\partial\varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_i} = -2\pi G x_i \left[\rho_{\text{п}}(1)\, A_i\left[1, \mu(1)\right] - \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{dm^2} A_i\left[m, \mu\left(m^2\right)\right] dm^2\right]. \tag{6.177}$$

Подчеркнём, что слагаемые в (6.177) могут иметь как разные, так и одинаковые знаки.

Если плотность в эллипсоиде распределена по закону

$$\rho\left(m^2\right) = \rho_0\left(1 - m^2\right)^n, \quad n \geqslant 0, \tag{6.178}$$

то выражение для потенциала принимает вид

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \pi G \rho_0 n \int\limits_0^1 \left(1 - m^2\right)^{n-1} R\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) dm^2. \tag{6.179}$$

В заключение приведём выражения для величин (6.167) и (6.168), в которые входят неполные эллиптические интегралы[4]:

$$A_1\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3 \prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{q^2\left(a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)\right)^{3/2}} \left[\mathrm{F}(\nu, q) - \mathrm{E}(\nu, q)\right], \tag{6.180}$$

$$A_2\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3 \prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{q^2q'^2\left(a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)\right)^{3/2}} \left[\mathrm{E}(\nu, q) - q'^2\mathrm{F}(\nu, q) - q^2\frac{\sin\nu\cos\nu}{\sqrt{1 - q^2\sin^2\nu}}\right], \tag{6.181}$$

$$A_3\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3 \prod\limits_1^3 \alpha_i(m)}{q'^2\left(a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)\right)^{3/2}} \left[\operatorname{tg}\nu\sqrt{1 - q^2\sin^2\nu} - \mathrm{E}(\nu, q)\right], \tag{6.182}$$

где

$$\nu(m) = \arcsin\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}}, \quad q(m) = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2\alpha_2^2(m)}{a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)}}, \quad q'^2 = 1 - q^2. \tag{6.183}$$

Вспомогательные величины:

$$\cos^2\nu = \frac{\mu\left(m^2\right) + a_3^2\alpha_3^2(m)}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}, \quad 1 - q^2\sin^2\nu = \frac{\mu\left(m^2\right) + a_2^2\alpha_2^2(m)}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}. \tag{6.184}$$

С помощью найденных величин получим также

$$I\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3m^2\alpha_2(m)\,\alpha_3(m)}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2(m)}}\, \mathrm{F}(\nu, q). \tag{6.185}$$

Сами эллиптические интегралы даны в (6.23).

[4] Определение неполных эллиптических интегралов дано в (6.23).

В важном частном случае *эллипсоидов с подобными слоями*[5]

$$\alpha_2(m) = \alpha_3(m) = 1$$

выражения (6.180)–(6.185) хотя и упрощаются, однако зависимость в них от $\mu(m^2)$ *не исчезает*:

$$I\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3m^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \mathrm{F}(\nu, q). \tag{6.186}$$

$$A_1\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3}{q^2\left(a_1^2 - a_3^2\right)^{3/2}} \left[\mathrm{F}(\nu, q) - \mathrm{E}(\nu, q)\right], \tag{6.187}$$

$$A_2\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3}{q^2q'^2\left(a_1^2 - a_3^2\right)^{3/2}} \left[\mathrm{E}(\nu, q) - q'^2\mathrm{F}(\nu, q) - q^2\frac{\sin\nu\cos\nu}{\sqrt{1 - q^2\sin^2\nu}}\right], \tag{6.188}$$

$$A_3\left(m, \mu\left(m^2\right)\right) = \frac{2a_1a_2a_3}{q'^2\left(a_1^2 - a_3^2\right)^{3/2}} \left[\operatorname{tg}\nu\sqrt{1 - q^2\sin^2\nu} - \mathrm{E}(\nu, q)\right], \tag{6.189}$$

где

$$\nu(m) = \arcsin\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}}, \quad q(m) = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}}, \quad q'^2 = 1 - q^2. \tag{6.190}$$

Вспомогательные величины:

$$\cos^2\nu = \frac{\mu\left(m^2\right) + a_3^2}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}, \quad 1 - q^2\sin^2\nu = \frac{\mu\left(m^2\right) + a_2^2}{\mu\left(m^2\right) + a_1^2}. \tag{6.191}$$

Здесь $\mu\left(m^2\right)$ находится из уравнения

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + \mu} = m^2. \tag{6.192}$$

В ещё более частном случае *однородного эллипсоида*, полагая $m = 1$ и $\mu(m) = \lambda$, из (6.180)–(6.185) получим известные проинтегрированные выражения для величин I и A_i из (6.16) и (6.18) – (6.20).

Замечания

Наряду с хорошо известными источниками, отметим замечательную статью Ферререса [58] о потенциалах, малодоступную для читателей. Феррерс расслаивает эллипсоиды на гомеоидальные слои, и поэтому его работа не пересекается с нашей. Обзор некоторых результатов Ферререса можно найти в [37].

§§ 6.1, 6.2, 6.3 и 6.4. Классический материал, но есть и новые результаты. У Чандрасекхара [47], например, отсутствуют формулы для внешнего потенциала однородного сфероида через элементарные функции. У Г. Н. Дубошина [15] эти формулы есть, но даются они в другой, нежели у нас в § 6.2, форме. Новое и в § 6.3, где через элементарные функции получены потенциалы однородных иглообразных эллипсоидов.

[5] Напомним, у нас всюду принято, что $\alpha_1(m) = 1$.

Насколько нам известно, третье из важных неравенств (6.73)–(6.75) ранее в литературе не было доказано. Неравенства (6.81) также будут нужны для приложений метода.

§ 6.5. Поверхности равного потенциала внутри однородного эллипсоида рассматриваются (но менее детально, чем у нас) и в книге Аппеля [8]. Другие результаты параграфа и, в частности, задачи 6.7 и 6.8 о геометрических местах точек равного потенциала и притяжения на поверхности однородного эллипсоида — новые.

Первоисточники: [20] и [21].

§ 6.6. Дисковый предел однородного эллипсоида часто используется в астрофизических приложениях. Диск, получаемый из эллипсоида в софокусном пределе, понадобится нам и далее.

Первоисточник: [21].

§ 6.7. Имеет вспомогательное значение.

Первоисточники: [20] и [21].

§ 6.8. Идея метода синтеза взята из статьи [69].

Некоторые намётки метода синтеза есть и в книге М. Ф. Субботина [45].

§§ 6.9–6.11. Формулы для потенциалов слоисто-неоднородного эллипсоида были выведены автором с целью исследования Е-галактик, но они имеют и общетеоретическое значение.

Одно замечание. Как уже говорилось, рассматриваемые слоисто-неоднородные эллипсоиды отличаются от неоднородных эллипсоидов Ферререса. И хотя, как известно, любую аналитическую функцию можно представить степенным рядом, тем не менее о связи между распределением плотности в слоисто-неоднородном эллипсоиде и в эллипсоиде Ферререса можно говорить только в асимптотическом пределе бесконечных рядов. Поэтому изучение слоисто-неоднородных эллипсоидов — это большая самостоятельная и интересная задача.

Изучение потенциалов в полостях оболочек и тел представляет не только теоретический интерес, но и важно для приложений в физике и планетологии. Так, формула (6.140) применяется в § 15.1 для оценки гравитационного влияния мантии Земли на её внутреннее ядро.

Первоисточники: [21] и [3].

§ 6.12. Один из ключевых моментов нашего подхода. Все результаты параграфа новые. Софокусные слои обладают важными гравитационными свойствами. Теорема 7 значительно расширяет рамки теоремы Маклорена — Лапласа (в последней говорится лишь о притяжении сплошных однородных софокусных эллипсоидов, а у нас — это и элементарные эллипсоидальные оболочки разного (!) типа, однородные и слоисто-неоднородные толстые оболочки, наконец, однородные и слоисто-неоднородные сплошные эллипсоиды). Открывается перспектива для нахождения эквигравитирующих тел не эллипсоидальной формы.

Первоисточник: [21].

§ 6.13. Представление потенциалов слоисто-неоднородных эллипсоидов в новой форме расширяет область приложений теории.

Первоисточники: [20] и [21].

Глава 7
ПОТЕНЦИАЛЫ ТОРА И КУБОИДА

Притяжение этих тел до сих пор оставалось неизученным. Дело не в отсутствии интереса (с тором то как раз наоборот!), а в математической сложности этих задач.

§ 7.1. Пространственный потенциал однородного кругового тора

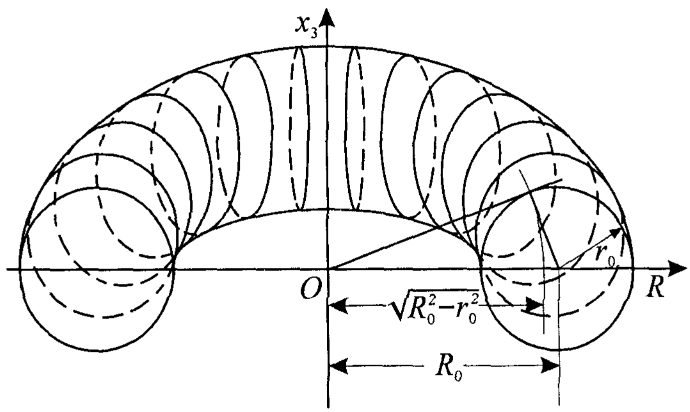


Рис. 41. Изображение половины кругового тора

Круговой тор образуется вращением вспомогательной окружности радиуса r_0 вокруг оси симметрии Ox_3 (рис. 41); *осевая окружность* тора имеет радиус R_0 и подразумевается, что $r_0 \leqslant R_0$. Уравнение его поверхности есть квадратичная функция координат точки

$$(R - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{7.1}$$

так что объём тора

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0. \tag{7.2}$$

Тор — фигура с красивой пространственной симметрией. С точки зрения топологии круговой тор представляет собой произведение двух окружностей. Диаметр вспомогательной окружности, параллельный оси x_3, разделит эту окружность на два полукруга и часть поверхности тора, которая образуется левым полукругом, имеет отрицательную гауссову кривизну, правым — положительную.

Тор обладает интересными, но до сих пор малоизученными *гравитационными свойствами*[1]. В литературе, кроме [21], почти ничего нет на эту тему. Правда, ещё Риман посвятил притяжению тора работу [42], где, однако, не учёл в задаче Дирихле граничные условия и не довёл до конца разложение потенциала тора в ряд Фурье. Züge [72] выразил потенциал

[1] Краевая задача для проводящего тора в электростатике хотя и рассматривалась [32], но в силу уровенного характера слоя электрических зарядов она несравненно проще, чем проблема гравитирующего тора.

тора (и вертикальную компоненту его градиента) через двойные интегралы, но далее не пошел; чёткой и сколько-нибудь полной картины исследования у него нет, эллиптические интегралы (как у нас) Züge не использует, потенциал не изучает и ссылку на Римана не даёт.

Наше исследование начнём с задачи, имеющей точное решение.

7.1.1. Потенциал однородного тора на оси симметрии. Прямой метод

Заполним тор однородным веществом плотности ρ; потенциал на его оси симметрии Ox_3 выражается двойным интегралом

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \int\limits_{-r_0}^{r_0}\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{r' dx_3' dr'}{\sqrt{\left(x_3' - x_3\right)^2 + r'^2}}, \tag{7.3}$$

причём внутренний и наружный радиусы кольцевого сечения тора на высоте x_3' таковы:

$$R_{1,2} = R_0 \pm \sqrt{r_0^2 - {x_3'}^2}. \tag{7.4}$$

Внутренний интеграл в (7.3) легко берётся

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \int\limits_{-r_0}^{r_0} \left[\sqrt{R_2^2 + \left(x_3' - x_3\right)^2} - \sqrt{R_1^2 + \left(x_3' - x_3\right)^2}\,\right] dx_3'. \tag{7.5}$$

Делая замену,

$$x_3' = r_0 \sin\theta, \quad R_{1,2} = R_0 \pm r_0 \cos\theta, \tag{7.6}$$

после простых преобразований приводим (7.5) к виду

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho r_0 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\sqrt{x_3^2 + R_0^2 + r_0^2 + 2r_0\left(R_0\cos\theta - x_3\sin\theta\right)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{x_3^2 + R_0^2 + r_0^2 - 2r_0\left(R_0\cos\theta + x_3\sin\theta\right)}\,\right] \cos\theta\, d\theta.$$

Полагая во втором интеграле $\theta = \pi - \theta_1$ и отбрасывая затем индекс «1», оба интеграла можно объединить и записать выражение $\varphi(x_3)$ более просто

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho r_0 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{x_3^2 + R_0^2 + r_0^2 + 2r_0\left(R_0\cos\theta - x_3\sin\theta\right)} \cos\theta\, d\theta. \tag{7.7}$$

Далее — дело техники. Чтобы взять этот интеграл, сделаем в (7.7) замены

$$\begin{gathered} \sin\widetilde{\theta} = \frac{x_3}{l}; \quad \cos\widetilde{\theta} = \frac{R_0}{l}, \\ R_0\cos\theta - x_3\sin\theta = l\cos\psi; \quad l = \sqrt{R_0^2 + x_3^2}, \end{gathered} \tag{7.8}$$

где $\psi = \theta + \widetilde{\theta}$, а l — расстояние пробной точки от осевой окружности тора. Важно, что $d\psi = d\theta$ и пределы по углу ψ те же самые $(0, 2\pi)$, что и для угла θ. Очевидно,

$$\sin\theta = \frac{R_0\sin\psi - x_3\cos\psi}{l}; \; \cos\theta = \frac{R_0\cos\psi + x_3\sin\psi}{l}, \tag{7.9}$$

и (7.7) принимает вид

$$\varphi(x_3) = \frac{2\pi G\rho r_0}{l}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{l^2 + r_0^2 + 2r_0 l\cos\psi}\,(R_0\cos\psi + x_3\sin\psi)\,d\psi.$$

Отсюда, в силу нечётности $\sin\psi$ (и чётности $\cos\psi$) следует

$$\varphi(x_3) = \frac{4\pi G\rho R_0 r_0}{l}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{l^2 + r_0^2 + 2r_0 l\cos\psi}\cos\psi\,d\psi. \tag{7.10}$$

После элементарных преобразований в (7.10) *потенциал однородного тора на оси симметрии в интегральном виде* записывается так:

$$\varphi(x_3) = 4\pi G\rho R_0 r_0\frac{\sqrt{l^2+r_0^2}}{l}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\lambda\cos\psi}\cos\psi\,d\psi, \quad \left(\lambda = \frac{2r_0 l}{l^2+r_0^2}\right). \tag{7.11}$$

Далее (7.11) можно выразить через полные эллиптические интегралы:

$$\varphi(x_3) = \frac{16}{3}\pi G\rho R_0 r_0\frac{l^2+r_0^2}{l\,(l+r_0)}\frac{1}{k^2}\left\{E(k) - 2\frac{1-k^2}{2-k^2}\mathrm{K}(k)\right\}, \tag{7.12}$$

где квадрат модуля

$$k^2 = \frac{4r_0 l}{(r_0+l)^2} \leqslant 1, \tag{7.13}$$

а $l = \sqrt{R_0^2 + x_3^2}$ — расстояние пробной точки от осевой окружности тора.

График потенциала тора на оси симметрии показан на рис. 42. Его максимум — в геометрическом центре тора ($r = 0, x_3 = 0$). Заметим, что при $r_0 < R_0$ это ещё не абсолютный максимум пространственного потенциала; абсолютный максимум потенциала тора при $r_0 < R_0$ находится, как мы вскоре убедимся, в точках особой окружности, лежащей в экваториальной плоскости и расположенной внутри самого тора. Только в предельном случае, когда $r_0 = R_0$ и тор образуется вращением окружности радиусом r_0 вокруг касающейся её оси Ox_3, этот особый кружок стягивается в точку и абсолютный максимум потенциала совпадает с геометрическим центром тора (см. § 7.1.5).

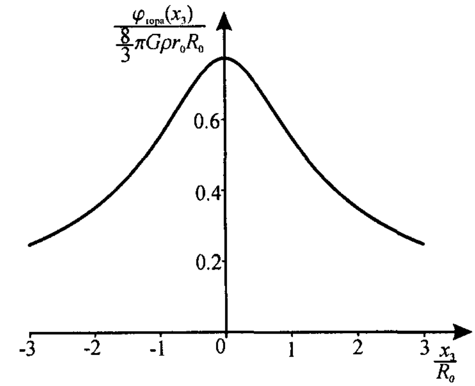


Рис. 42. Нормированный гравитационный потенциал однородного кругового тора на оси симметрии Ox_3. Расчёт по формуле (7.12) при значении параметров $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$. Симметрия графика относительно оси ординат очевидна вследствие симметрии фигуры тора относительно его экваториальной плоскости $x_3 = 0$

Задача 7.1. *Доказать, что на больших от тора расстояниях x_3 обе формулы* (7.12) *и* (7.18) *имеют нужную асимптотику ($M_{тора}$ — масса кругового тора)*:

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) \sim \frac{M_{\text{тора}}G}{x_3}, \quad M_{\text{тора}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0\rho. \tag{7.14}$$

Решение. При больших x_3 величина λ из (7.11) мала и раскладывая радикал под интегралом в ряд и удерживая члены до первого порядка по λ включительно, находим

$$\varphi(x_3) \approx 4\pi G\rho R_0 r_0 \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\psi d\psi = \frac{2\pi^2 G\rho r_0^2 R}{x_3} = \frac{M_{\text{тора}} G}{x_3}, \tag{7.15}$$

что и требовалось доказать. ▼

Задача 7.2. *Доказать, что при $r_0 \to 0$, когда тор вырождается в тонкое кольцо, потенциал* (7.12) *принимает вид*

$$\varphi = \frac{2\mu\pi G R_0}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2}} = \frac{M_{\text{тора}} G}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2}}, \tag{7.16}$$

где $\mu = \pi r_0^2 \rho$ — одномерная плотность колечка.

Этот результат — частный случай известного нам выражения (3.4).

Потенциал тора на оси симметрии (7.12) можно записать и более компактно. Для этого представим квадрат модуля (7.13) в виде

$$k^2 = \frac{4\tilde{k}}{\left(1+\tilde{k}\right)^2}, \quad \left(\tilde{k} = \frac{r_0}{l} = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2}}\right), \tag{7.17}$$

и тогда, с учётом известных формул преобразования эллиптических интегралов (2.22), потенциал (7.12) примет более удобный вид

$$\frac{\varphi_{\text{тора}}(x_3)}{\frac{8}{3}\pi G\rho r_0 R_0} = \left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k}\right) \mathrm{E}\left(\tilde{k}\right) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k}\right) \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right), \tag{7.18}$$

где модуль $\tilde{k}$ дан в (7.17). При заданной массе тора формулу (7.18) можно записать и так:

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{тора}} G}{\pi r_0} \left\{\left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k}\right) \mathrm{E}\left(\tilde{k}\right) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k}\right) \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)\right\}, \quad \tilde{k} = \frac{r_0}{l}. \tag{7.19}$$

7.1.2. Пространственный потенциал однородного тора: нахождение через круговые диски

Напомним, что фигура кругового тора образуется вращением окружности радиусом r_0 вокруг оси симметрии Ox_3. Радиус его внутренней осевой линии равен $R_0 \geqslant r_0$ (см. рис. 41). В сечении тора плоскостью $x_3' = \text{const} \leqslant r_0$ образуется широкое круговое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого даны в (7.4). Через вспомогательный угол θ, такой, что $x_3' = r_0 \sin\theta$, имеем

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = R_0 \pm r_0 \cos\theta. \tag{7.20}$$

Толщина выделенного элементарного кольца равна $dx_3' = r_0 \cos\theta d\theta$.

Заполним тор однородным гравитирующим веществом плотности ρ, тогда поверхностная плотность выделенного элементарного плоского кольца будет равна $\sigma = \rho r_0 \cos\theta d\theta$. Вклад в потенциал тора на пробную точку (r, x_3) — причём, подчеркнём, пробная точка по отношению к тору может быть как внешней, так и внутренней! — от такого широкого кольца даётся разностью потенциалов от однородных круговых дисков с радиусами $R_1(\theta)$ и $R_2(\theta)$. Таким образом, развиваемый здесь подход к потенциалу тора опирается на знание пространственного потенциала однородного круглого диска радиусом $R_1(\theta)$, расположенного на высоте x_3'. Согласно (9.56), потенциал такого диска в точке (r, x_3) выражается через стандартные полные эллиптические интегралы:

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = \frac{2\sqrt{2}G\sigma}{\sqrt{a-c}}\left\{\left[c + 2\left(R_1^2 - r^2\right)\right]\mathrm{K}(k_1) + \right. \\ \left. + (a-c)\,\mathrm{E}(k_1) - 2\left(x_3 - r_0\sin\theta\right)^2 \Pi\left[\frac{a-b}{2r^2}, k_1\right]\right\},\end{gathered} \tag{7.21}$$

где величины a, b, c таковы:

$$\begin{gathered}a = 2\left(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2\right); \\ \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2 - R_1^2 \pm \\ \pm\sqrt{\left(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2 - R_1^2\right)^2 + 4R_1^2(x_3 - r_0\sin\theta)^2},\end{gathered} \tag{7.22}$$

причём $a \geqslant b \geqslant c$. Стандартные *полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода* имеют вид:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}; \quad \mathrm{E}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi; \\ \Pi[n, k] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 - n\,\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.\end{gathered} \tag{7.23}$$

Модуль у всех эллиптических интегралов в этом выражении один и тот же:

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \leqslant 1, \quad k' = \sqrt{\frac{(r - R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}{(r + R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}} \leqslant 1. \tag{7.24}$$

Итак, мы рассматриваем тор состоящим из «стопки» элементарных широких круглых колец с поверхностной плотностью $\sigma = \rho r_0 \cos\theta d\theta$ и со специально подобранными для каждого кольца внешним и внутренним радиусами (7.20). Важно подчеркнуть, что для нахождения гравитационного потенциала тора на пробную точку (r, x_3) достаточно использовать только потенциал внешнего элементарного диска с радиусом $R_1(\theta)$ и интегрировать выражение этого потенциала по углу θ в пределах

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,. \tag{7.25}$$

При таком способе нахождения потенциала очевидно, что в интервале

$$-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$$

вклад (со знаком «+») в потенциал тора даёт внешний диск, а при

$$\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$$

— уже внутренний диск, вклад которого в потенциал тора входит со знаком «−» из-за отрицательного знака $\cos\theta$. Фактически, интегрируя по второму интервалу мы вырезаем из сплошного диска внутренний кружок радиусом $R_2(\theta)$.

Подставляя в (7.21) выражение для $R_1(\theta)$ из (7.20) и интегрируя вклад от диска по интервалу (7.25), получаем искомый *пространственный потенциал тора* на пробную точку (r, x_3) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{\text{тора}}(r, x_3)}{2\sqrt{2}G\rho R_0 r_0} = \int\limits_0^{2\pi} \Bigg\{ \left[c + 2\left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right] \mathrm{K}(k_1) + \\ + (a - c)\,\mathrm{E}(k_1) - 2\frac{(x_3 - r_0 \sin\theta)^2}{R_0^2} \Pi[n, k_1] \Bigg\} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{a - c}}.\end{aligned} \tag{7.26}$$

Здесь, после нормировки на R_0,

$$\begin{gathered} R_1 = 1 + \frac{r_0}{R_0}\cos\theta; \quad a = \frac{2\left(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2\right)}{R_0^2}; \quad n = \frac{a - b}{2\frac{r^2}{R_0^2}}; \\ \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - R_1^2\right)^2 + 4R_1^2 \frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}}, \end{gathered} \tag{7.27}$$

а модуль k_1 дан в (7.24). Таким образом, потенциал тора даётся интегралами от стандартных полных эллиптических интегралов[2]. Подчеркнём — *пробная точка для найденного потенциала тора* (7.26) *может быть как внешней, так и внутренней.* Причиной столь нестандартной ситуации [3] является то, что вклад в полный потенциал тора дают круглые диски, потенциал которых существует всюду в пространстве.

7.1.3. Проверка: переход в (7.26) к потенциалу на оси симметрии тора

Для проверки полученного в (7.26) пространственного потенциала полезно рассмотреть известный нам случай, когда испытуемая точка находится на оси симметрии тора Ox_3. Полагая во всех формулах $r = 0$, находим

$$\begin{gathered} a = b = \frac{2(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}; \quad c = -2R_1^2; \\ k' = 1, \; k_1 = 0; \; \mathrm{K}(0) = \mathrm{E}(0) = \frac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{7.28}$$

С интегралом же третьего рода $\Pi[n, 0]$ дело обстоит сложнее, так как в пределе $r = 0$ для параметра n возникает неопределённость $n = \frac{0}{0}$. Ситуация требует отдельного рассмотрения. Прежде всего, при $k_1 = 0$

[2] Следует указать на относительную простоту развитого здесь метода, основанного на представлении тора «стопкой» плоских широких колец. Попытки применить другие подходы, например, метод расслоения тора на торообразные оболочки, приводят к ещё большим усложнениям.

[3] Действительно, прямой метод, основанный на формуле (1.9), естественно разделяет потенциал на внешний и внутренний.

$$\Pi\,[n,0] = \frac{\pi}{2\sqrt{1-n}}\,, \tag{7.29}$$

причём в данном случае, как легко видеть,

$$\lim_{r\to 0} n = \frac{R_1^2}{R_1^2 + \dfrac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}}\,. \tag{7.30}$$

В целом, для рассматриваемого случая потенциала тора на оси x_3 имеем

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = 2\pi G\rho r_0 R_0 \int\limits_0^{2\pi} \left(\sqrt{R_1^2 + \frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}} - \frac{x_3 - r_0\sin\theta}{R_0} \right) \cos\theta d\theta. \tag{7.31}$$

Последний член при интегрировании исчезает, а оставшийся интеграл приводится к виду

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = 4\pi G\rho r_0 R_0 \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{R_0^2 + x_3^2}} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \lambda\cos\psi}\,\cos\psi\, d\psi, \tag{7.32}$$

где введён новый угол ψ и параметр λ:

$$\cos\theta - \frac{x_3}{R_0}\sin\theta = \sqrt{1 + \frac{x_3^2}{R_0^2}}\cos\psi;\quad \cos\theta = \frac{\cos\psi + \frac{x_3}{R_0}\sin\psi}{\sqrt{1 + \frac{x_3^2}{R_0^2}}};\quad \lambda = \frac{2\frac{r_0}{R_0}\sqrt{1 + \frac{x_3^2}{R_0^2}}}{1 + \frac{r_0^2}{R_0^2} + \frac{x_3^2}{R_0^2}}. \tag{7.33}$$

Интеграл (7.32) уже легко выражается через стандартные эллиптические интегралы, и для потенциала тора на оси симметрии получим выражение

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = \frac{8}{3}\pi G\rho r_0 R_0 \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2}}{k^2} \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{R_0^2 + x_3^2}} \left\{ \mathrm{E}(k) - 2\frac{1-k^2}{2-k^2}\mathrm{K}(k) \right\}, \tag{7.34}$$

где модуль эллиптических интегралов

$$k^2 = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \leqslant 1. \tag{7.35}$$

Таким образом, на оси симметрии тора из общего выражения потенциала (7.26) мы действительно получили формулу (7.34), совпадающую с выражением (7.12), найденным выше *прямым* методом. График потенциала тора на оси симметрии показан на рис. 42.

7.1.4. О переходе к потенциалу тонкого круглого кольца

Серьёзной проверкой формулы (7.26) является и предельный переход от объемного тора к тонкому круговому обручу при $r_0 \to 0$. В этом пределе объёмная плотность ρ обращается в бесконечность, но одномерная плотность кольца будет конечной величиной: для этого, очевидно, следует потребовать $\pi r_0^2 \rho \to \mu_0$, где — μ_0 плотность обруча.

Задача 7.3. (Поисковая.) *Представить потенциал* (7.26) *однородного кругового тора, близкого по форме к тонкому круглому кольцу в виде ряда по степеням малого параметра* $\nu = \dfrac{r_0}{R_0}$. *Получить хотя бы два отличных от нуля члена такого ряда. Затем выполнить предельный переход* $\nu \to 0$ *к потенциалу* (3.4) *тонкого кольца.*

7.1.5. Тор без сквозного отверстия. Потенциал как сумма ряда Лапласа

В предельном случае

$$r_0 = R_0 \tag{7.36}$$

тор образуется вращением окружности радиусом r_0 вокруг касающейся её оси Ox_3. Сквозное отверстие у такого тора отсутствует («муха не пролезет!») и для этой фигуры продемонстрируем два метода нахождения потенциала.

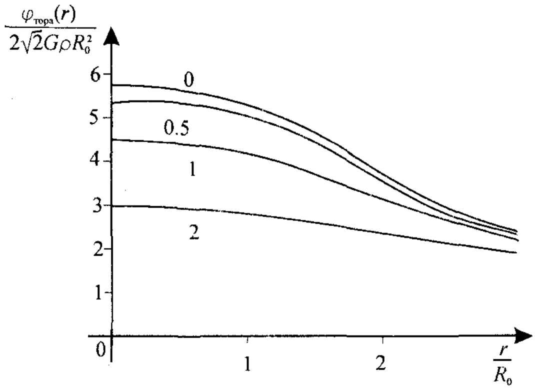


Рис. 43. Зависимость гравитационного потенциала однородного кругового тора от $\frac{r}{R_0}$ на разных высотах $\frac{x_3}{R_0}$ от экваториальной плоскости симметрии. Фигура тора имеет отношение $\frac{r_0}{R_0} = 1$. Цифрами отмечены значения $\frac{x_3}{R_0}$. При $\frac{x_3}{R_0} = 0.5$ максимум заметно смещен с оси симметрии

Прежде всего, потенциал однородного тора и в этом случае дается известными нам выражениями: на оси симметрии эквивалентными формулами (7.12), (7.18) или (7.19), а в общем пространственном случае — формулой (7.26). Заметных упрощений в этих формулах в случае (7.36) нет. Но одна особенность у такого тора всё же есть: *окружность, на которой потенциал имеет абсолютный максимум, стягивается у него в точку геометрического центра*. Абсолютный максимум потенциала (см. рис. 43) находится в геометрическом центре такого тора (при $r_0 < R_0$ центр являлся точкой *относительного* максимума потенциала на оси симметрии тора) и сам потенциал в экваториальной плоскости монотонно убывает от центра.

Величина абсолютного максимума легко находится из (7.19): при условии (7.36), а также $x_3 = 0, \tilde{k} = 1, E(1) = 1$, хотя $K(1) \to \infty$ и расходится, в целом выражение в фигурных скобках равно 2; следовательно,

$$\varphi_{\text{тора макс.}}(0,0) = \frac{8}{3}\frac{M_{\text{тора}}G}{\pi r_0}. \tag{7.37}$$

Найдём в явном виде *ряд Лапласа* (1.17) для внешнего потенциала такого тора. Вначале определим коэффициенты D_{2n}. Согласно (1.19), в *цилиндрических координатах* (r, x_3)

$$\begin{gathered} D_{2n} = 4\pi\rho \int\limits_0^{R_0} dx_3 \left\{ \int\limits_0^{r_1} F(r, x_3)\, dr - \int\limits_0^{r_2} F(r, x_3)\, dr \right\}; \\ F = r \cdot l^{2n} P_{2n}\left(\frac{x_3}{l}\right); \quad r_{1,2} = R_0 \pm \sqrt{R_0^2 - x_3^2}; \quad l = \sqrt{r^2 + x_3^2}. \end{gathered} \tag{7.38}$$

Действуя методом индукции и обобщая на произвольное n результаты расчётов для начальных значений $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$, получим:

$$D_{2n} = \frac{4}{3}\pi^2 \rho R_0^{2n+3} (-1)^n \frac{(2n)!\,(2n+3)!}{4^{2n+1} n!^2 (n+1)!^2}. \tag{7.39}$$

Тогда потенциал в *сферических координатах* (r, θ) представляется рядом

$$\varphi_{\text{тора}}(r,\theta) = \frac{2}{3}\frac{M_{\text{тора}}G}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!\,(2n+3)!}{4^{2n+1}n!^2\,(n+1)!^2}P_{2n}(\cos\theta)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{2n}. \tag{7.40}$$

Важно, что в частных случаях этот ряд можно просуммировать.

На оси симметрии $\theta = 0$, $P_{2n}(1) = 1$, так что

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{тора}}(x_3) &= \frac{M_{\text{тора}}G}{x_3}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2};2;-\left(\frac{R_0}{x_3}\right)^2\right) = \\ &= \frac{4M_{\text{тора}}\,G\,x_3}{3\pi\left(R_0^2+x_3^2\right)}\left[\mathrm{K}\left(i\frac{R_0}{x_3}\right)+\left(1+2\frac{R_0^2}{x_3^2}\right)\mathrm{D}\left(i\frac{R_0}{x_3}\right)\right].\end{aligned} \tag{7.41}$$

Эта формула действует на всей оси x_3 (а не только вне сферы, объемлющей тор) и *эквивалентна выражению потенциала* (7.18) (взятому при $r_0 = R_0$) через эллиптические интегралы от вещественного модуля. На больших x_3 для потенциала тора (7.41) действует асимптотика

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = \frac{M_{\text{тора}}G}{x_3}\left(1-\frac{5}{8}\left(\frac{R_0}{x_3}\right)^2+\ldots\right). \tag{7.42}$$

В экваториальной плоскости, когда $\theta = \frac{\pi}{2}$ и

$$P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

ряд (7.40) даёт

$$\varphi_{\text{тора}}(r) = \frac{M_{\text{тора}}G}{r}\cdot {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1;1,2;\frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right) \tag{7.43}$$

с асимптотикой на больших расстояниях

$$\varphi_{\text{тора}}(r) = \frac{M_{\text{тора}}G}{r}\left(1+\frac{5}{32}\left(\frac{R_0}{r}\right)^2+\ldots\right). \tag{7.44}$$

Формула (7.43) работает только *вне объемлющей данный тор сфер.*

З а д а ч а 7.4. *Выразить в* (7.41) *потенциал тора через полные эллиптические интегралы от вещественного модуля.*

З а д а ч а 7.5. *(Поисковая.) Рассмотреть методом разложения в ряд внутренний потенциал тора.*

7.1.6. Представление эллиптического интеграла третьего рода через неполные интегралы первого и второго рода

При численных расчётах потенциала тора по формуле (7.23) полный эллиптический интеграл третьего рода представляет некоторые неудобства. Но его можно выразить через неполные интегралы первого и второго рода из (7.23). В зависимости интервала, в который попадает параметр n, третьего интеграла возникают три варианта замены.

Первый вариант:

$$1 \leqslant n < \infty. \tag{7.45}$$

Делаем замену

$$\sin^2\theta = \frac{1}{n}\,; \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}\,; \quad \theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\,; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \tag{7.46}$$

и в итоге

$$\Pi\left[n,k_1\right] = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\left(1-\frac{k_1^2}{n}\right)}}\left\{\mathrm{E}\left(k_1\right)F\left(\theta,k_1\right) - \mathrm{K}\left(k_1\right)E\left(\theta,k_1\right)\right\}. \tag{7.47}$$

Второй вариант:

$$k_1^2 \leqslant n \leqslant 1. \tag{7.48}$$

Здесь

$$n = 1 - {k_1}'^2\sin^2\theta\,; \quad {k_1}'^2 = 1 - \tilde{k}^2/n = 1 - \left(1-{k_1}^2\right)\sin^2\theta;\ \sin^2\theta = \frac{1-n}{1-{k_1}^2}. \tag{7.49}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{(1-n)\left(1-k_1^2\right)}{n\left(1-k_1^2\right)}}\left[\Pi\left[n,k_1\right] - \mathrm{K}\left(k_1\right)\right] = \frac{\pi}{2} - \left[\mathrm{E}\left(k_1\right) - \mathrm{K}\left(k_1\right)\right]F\left(\theta,k_1'\right) - \mathrm{K}\left(k_1\right)E\left(\theta,k_1'\right). \tag{7.50}$$

Третий вариант:

$$0 \leqslant n \leqslant {k_1}^2. \tag{7.51}$$

Заменой

$$n = {k_1}^2\sin^2\theta\,; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{n}}{k_1}\,; \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{n}{k_1^2 - n}} \tag{7.52}$$

получаем

$$\Pi\left[n,k_1\right] = \mathrm{K}\left(k_1\right) + \sqrt{\frac{n}{(1-n)\left(k_1^2-n\right)}}\left\{\mathrm{K}\left(k_1\right)E\left(\theta,k_1\right) - \mathrm{E}\left(k_1\right)F\left(\theta,k_1\right)\right\}. \tag{7.53}$$

7.1.7. Расчёт пространственного потенциала однородного кругового тора по найденным формулам

Как ведет себя потенциал однородного кругового тора на оси симметрии, нам уже известно. Сейчас, опираясь на формулу (7.26), выясним поведение потенциала тора в пространстве *вне оси симметрии*.

В экваториальной плоскости тора численный расчёт по формуле (7.26) приводит к результату, показанному на рис. 44. Немонотонный характер зависимости потенциала от радиального расстояния можно, конечно, было ожидать, если вспомнить поведение потенциала для тонкого круглого кольца из рис. 26, когда потенциал в его геометрическом центре был значительно меньше, чем вблизи обруча. *Однако для потенциала тора характерно отсутствие той сингулярности, которая существует на одиночном тонком кольце*!

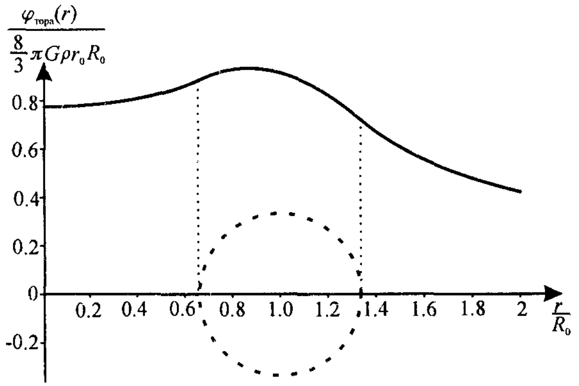


Рис. 44. Зависимость от переменной $\frac{r}{R_0}$ внешнего $\left(\frac{r}{R_0} \leqslant \frac{2}{3};\ \ \frac{r}{R_0} \geqslant \frac{4}{3}\right)$ и внутреннего $\left(\frac{2}{3} \leqslant \frac{r}{R_0} \leqslant \frac{4}{3}\right)$ гравитационных потенциалов однородного кругового тора в его экваториальной плоскости. Расчёт выполнен по формуле (7.26) при $x_3 = 0$ и $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$. Кружком показано сечение рукава тора. Вертикальным пунктиром отмечены места входа пробной точки внутрь тора и выхода из него

Из рис. 44 видно, что в экваториальной плоскости тора при движении пробной точки по радиусу от центра $(x_3 = 0, r = 0)$ потенциал сначала монотонно возрастает до некоторого максимального значения (*абсолютный максимум*!). Заметим, возрастание потенциала (при $r_0 < R_0$, в случае же $r_0 = R_0$ — тор особый, см. ниже!) начинается ещё вне тора и продолжается на первых порах и при входе в него, причем точка этого максимума находится внутри тора. Затем, пройдя свой максимум, потенциал ещё внутри тора начинает убывать, и при выходе за пределы фигуры продолжает уменьшаться до нуля на бесконечности. Так как *сила притяжения направлена всегда в сторону роста гравитационного потенциала*, то очевидно, на интервале, где потенциал тора растёт, эта сила направлена от центра к осевой круговой линии тора; там же, где потенциал убывает (на рис. 44 — правее точки максимума), сила притяжения направлена в обратную сторону — к оси симметрии тора Ox_3. В точке внутри тора, где потенциал достигает своего максимума, сила притяжения тора в экваториальной плоскости обращается в нуль (точка невесомости!).

Дополнительные сведения о потенциале тора находим на рис. 45, где представлены результаты расчётов по формуле (7.26) вдоль нескольких горизонтальных срезов. Понятно, что все эти кривые лежат ниже графика потенциала, вычисленного в точках экваториальной плоскости тора.

Для более полной картины, весьма интересно рассмотреть меридиональные сечения некоторых эквипотенциальных поверхностей однородного кругового тора. Рассчитываем их также по общей формуле (7.26).

Отметим те вычислительные трудности, которые можно встретить при расчётах потенциала тора из-за присутствия в (7.26) полного эллиптического интеграла третьего рода. Действительно, как можно показать, структура параметра n из (7.27) у этого интеграла такова, что при нахождении пробной точки внутри *объемлющей* данный тор сферы радиусом $R_0 + r_0$ для некоторых значений ϑ данный параметр интеграла $n = \dfrac{a-b}{2\frac{r^2}{R_0^2}}$ обращается в единицу, и тогда сам интеграл $\Pi\,[n, k_1]$ расходится. Вне данной объемлющей сферы расходимостей не возникает.

Задача 7.6. (Поисковая.) *Выяснить более тщательно ситуацию с расходимостью интеграла третьего рода в формуле для потенциала тора* (7.26), Конкретно, надо найти те геометрические места, где $n(\theta) = 1$. Как зависит число случаев $n = 1$ *от расположения пробной точки внутри объемлющей сферы? Как такие сингулярные точки соотносятся с эквигравитирующими элементами однородного кругового тора, найденными в* § 7?

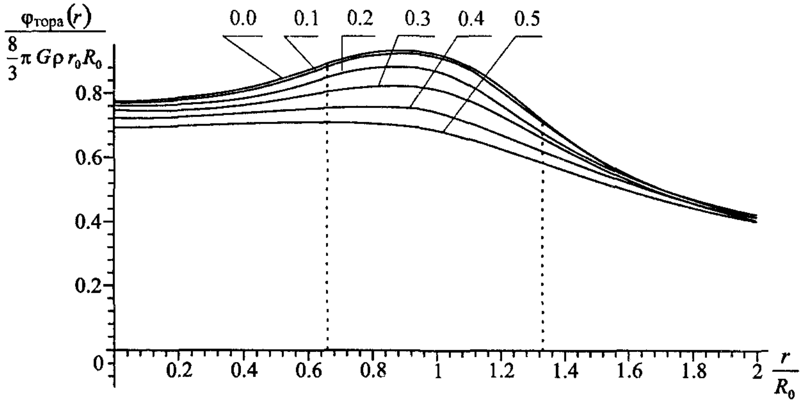


Рис. 45. Зависимость гравитационного потенциала однородного кругового тора от расстояния до оси $\frac{r}{R_0}$ на разных высотах от его экваториальной плоскости симметрии. Цифрами на кривых отмечены значения $\frac{x_3}{R_0}$. Фигура тора имеет отношение $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$. Вертикальными штриховыми линиями отмечены места входа пробной точки внутрь тора и выхода из него в экваториальной плоскости. Четыре верхние кривые представляют поведение потенциала как вне, так и внутри тора. Точка максимума попадает на них внутрь фигуры. Две нижние кривые представляют потенциал исключительно вне тора

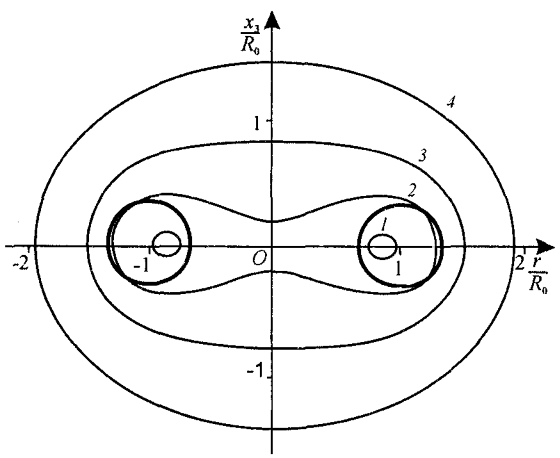


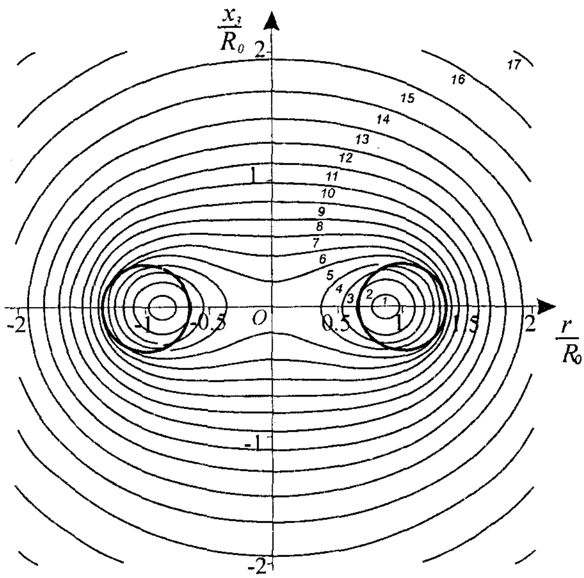
Рис. 46. Меридиональные сечения эквипотенциальных поверхностей однородного кругового тора $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$. Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены кривые, соответствующие значениям нормированного потенциала $\frac{\varphi}{\frac{8}{3}\pi G\rho R_0 r_0} = 0.92,\ 0.76,\ 0.6,\ 0.44$. Кружки жирной линией — сечения плоскостью рисунка самого тора. Внутрь тора попадают из рассчитанных только эквипотенциаль 1 (полностью), и часть эквипотенциали под номером 2

Эту трудность с расходимостью интеграла третьего рода можно обойти, не включая в расчёт указанные точки (кроме того, интеграл третьего рода можно, как показано выше, исключить из выражения потенциала тора, выразив его через неполные интегралы первого и второго рода). В итоге расчётов, получаются кривые равного потенциала, показанные на рис. 46.

Более подробную информацию об эквипотенциалях тора можно получить из рис. 47. Вблизи тора они имеют сложную форму. Но чем дальше расположена эквипотенциальная поверхность, тем сильнее округляется её меридиональное сечение.

На рис. 48 показано изменение потенциала вдоль «ободка» сечения рукава кругового тора. На этом ободке потенциал имеет максимум в точке, ближайшей к оси симметрии тора.

Рис. 47. Меридиональные сечения эквипотенциальных поверхностей однородного кругового тора. Как и на рис. 46, бралось отношение $\frac{r_0}{R_0} = \frac{1}{3}$. Цифрами от 1 до 17 обозначены кривые, соответствующие значениям нормированного потенциала $\frac{\varphi}{\frac{8}{3}\pi G\rho R_0 r_0} = 0.92$, 0.88, 0.84, 0.80, 0.76, 0.72, 0.68, 0.64, 0.60, 0.56, 0.52, 0.48, 0.44, 0.40, 0.36, 0.32, 0.28. Жирные кружки — меридиональные сечения самого тора. Внутрь тора попадают (полностью) эквипотенциали 1 и (почти полностью) 2. Разомкнутость внешних кривых на рисунке — кажущаяся



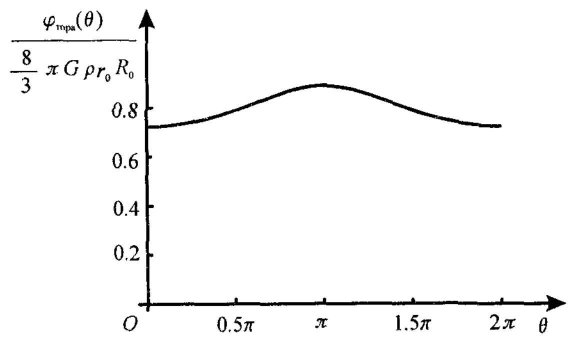


Рис. 48. Зависимость потенциала на поверхности меридионального сечения однородного тора от угла θ

7.1.8. Обобщённый гомотетический слой на круговом торе

Интересен вопрос об обобщённом гомотетическом слое на круговом торе. В § 5.13.1 мы рассматривали обобщённые слои, но в конкретных примерах ограничились лишь выпуклыми телами. С тором, как известно, ситуация иная: одна половина его поверхности имеет всюду положительную гауссову кривизну, а другая — отрицательную.

Пусть центр гомотетии совпадает с точкой симметрии тора (рис. 49). К поверхности тора (7.1) проведём касательную в точке (r', x_3'). Уравнение этой касательной

$$(r' - R_0)\, r + x_3' x_3 - R_0 r' + R_0^2 - r_0^2 = 0, \tag{7.54}$$

а её расстояние от начала координат

$$l = r_0 + R_0 \cos\theta. \tag{7.55}$$

Следовательно, плотность обобщенного гомотетического слоя на круговом торе будет равна

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{3}\rho\,(r_0 + R_0\cos\theta)\,. \tag{7.56}$$

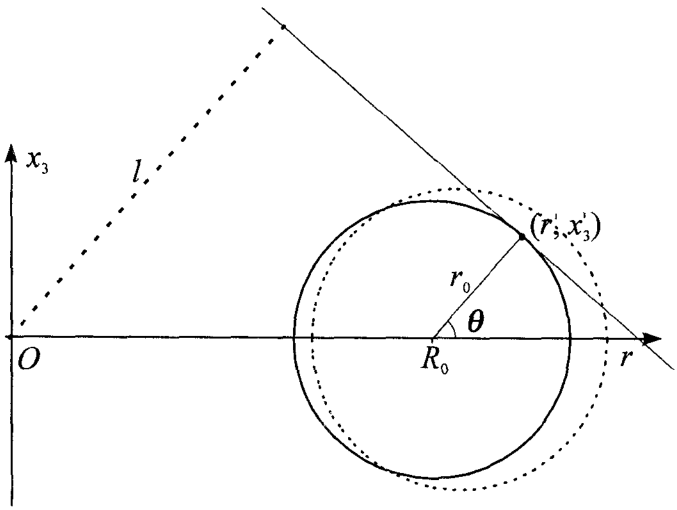


Рис. 49. Меридиональное сечение обобщённого гомотетического слоя на круговом торе (показано пунктиром). В правой «лунке» толщина слоя положительная, в левой — отрицательная

Обратим внимание на то, что толщина слоя в одних точках поверхности положительная, в других же — отрицательная. Для проверки, интегрируя по всей поверхности тора плотность (7.56) и учитывая, что кольцевой элемент площади есть также функция угла θ

$$dS = 2\pi r_0 \left(R_0 + r_0 \cos\theta\right) d\theta, \tag{7.57}$$

находим, что масса $M_{\text{сл.}}$ данного слоя оказывается равной, как и следовало ожидать, массе исходного однородного тора $M_{\text{тора}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0 \rho$. Форма этого слоя показана на рис. 49.

Задача 7.7. *(Поисковая). Найти гравитационный потенциал обобщенного гомотетического слоя на круговом торе.*

Указание. Первый способ. Потенциал однородного тора (7.26) следует подставить в правую часть уравнения (5.115). Но потенциал слоя можно искать и вторым методом, подставляя его поверхностную плотность (7.56) в интеграл (1.22). Второй способ труднее первого.

§ 7.2. Внешний потенциал однородного кругового тора. Решение первой краевой задачи

Тороидальные координаты (σ, τ, θ) связаны с цилиндрическими формулами

$$r = a\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad x_3 = a\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \tag{7.58}$$

где $a = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$ — масштабный множитель, $0 \leqslant \tau < \infty$, $-\pi \leqslant \sigma \leqslant \pi$. Семейство торов задаётся уравнением

$$(r - a\operatorname{cth}\tau)^2 + x_3^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2\tau}. \tag{7.59}$$

С учётом азимутальной симметрии фигуры уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right] = 0. \tag{7.60}$$

Переменные σ и τ здесь разделяются с помощью замены

$$\varphi = \Phi_1(\sigma)\Phi_1(\tau)\sqrt{2\mathrm{ch}\tau - 2\cos\sigma}. \tag{7.61}$$

После разделения переменных и решения дифференциальных уравнений выясняется [32], что уравнение Лапласа допускает бесконечное множество решений вида

$$\varphi_n = \sqrt{2\mathrm{ch}\tau - 2\cos\sigma}\,[M_n\cos n\sigma + N_n\sin n\sigma]\,P_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\tau), \tag{7.62}$$

где M_n и N_n — постоянные, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $P_{n-\frac{1}{2}}$ — сферические функции Лежандра первого рода. M_n и N_n находим из граничных условий задачи, в качестве которых берём значение потенциала тора (7.18) на оси симметрии. Очевидно, на оси симметрии тора

$$\tau = 0, \quad \mathrm{ch}\tau = 1, \quad P_{n-\frac{1}{2}}(1) = 1. \tag{7.63}$$

Тор имеет экваториальную плоскость симметрии $x_3 = 0$ и поэтому далее следует положить $N_n = 0$, так что внешний потенциал однородного кругового тора будет равен

$$\varphi_{\text{тора}}(\sigma,\tau) = \frac{8}{3}\pi G\rho r_0 R_0 \cdot \sqrt{2\mathrm{ch}\tau - 2\cos\sigma} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} M_n\cos n\sigma \cdot P_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\tau). \tag{7.64}$$

Коэффициенты M_n в (7.64) выражаются интегралами

$$\begin{gathered} M_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k}\right)E\left(\tilde{k}\right) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k}\right)K\left(\tilde{k}\right)\right\}\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\sigma}{2}}; \\ M_l = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\left(\frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{k}\right)E\left(\tilde{k}\right) - \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \tilde{k}\right)K\left(\tilde{k}\right)\right\}\frac{\cos l\sigma}{2\sin\frac{\sigma}{2}}d\sigma; \\ \tilde{k} = \nu\sin\frac{\sigma}{2}\cdot\left[1 - \nu^2\cos^2\frac{\sigma}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}; \quad \nu = \frac{r_0}{R_o}; \quad l = 1,2,3\ldots. \end{gathered} \tag{7.65}$$

Эти коэффициенты можно представить и в виде ряда. Для этого разложим подынтегральную функцию в M_0 в ряд по степеням ν и затем проинтегрируем по σ. Получим

$$M_0 = \pi\left\{\frac{3}{2^3}\nu + \frac{3^2}{2^7}\nu^3 + \frac{3^2\cdot 19}{2^{12}}\nu^5 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 37}{2^{17}}\nu^7 + \frac{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 1223}{2^{24}}\nu^9 + \ldots\right\}. \tag{7.66}$$

Интересно, что M_0 можно представить ещё и в виде такого ряда

$$M_0 = \frac{3\pi}{8}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2s)!^2}{2^{4s}s!^4}\cdot {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-s\,;2,\frac{1}{2}-s\,;1\right)\cdot\nu^{2s+1}. \tag{7.67}$$

Остальные коэффициенты из (7.65) будут представлены рядами вида

$$M_1 = \pi\left\{\frac{15}{128}\nu^3 + \frac{75}{1024}\nu^5 + \frac{14025}{262144}\nu^7 + \ldots\right\}, \tag{7.68}$$

$$M_2 = \pi\left\{\frac{105}{4096}\nu^5 + \frac{3675}{131972}\nu^7 + \frac{110985}{4194304}\nu^9 + \ldots\right\}, \tag{7.69}$$

и т. д., но и их можно выразить в совершенно другом виде

$$M_l = \sum_{s=0}^{\infty}\nu^{2s+1}\sum_{n=0}^{s}\frac{(2n)!^2\,(2s)!\,(2s+2l-2n)!\cdot {}_3F_2\left(-l,n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-l\,;\frac{1}{2},n-l-s+\frac{1}{2};1\right)}{n!^4 2^{4s+2l+2n}\,(1-2n)\,(n+1)\,(s+l-n)!\,(s+l)!s!\,(s-n)!}. \tag{7.70}$$

Формула (7.64) и даёт решение поставленной задачи.

§ 7.3. Потенциал оболочки кругового тора

Дан пустотелый тор, имеющий поверхность (7.1) с постоянной на ней плотностью σ, см. рис. 41. Обозначения § 7.1 сохраняем.

Для нахождения пространственного потенциала пустотелого тора тела применим метод синтеза, сходный с тем, который применялся в § 7.1.2. В сечении фигуры плоскостью $x_3' = \text{const} \leqslant r_0$ (см. рис. 50) образуются два тонких круглых кольца с радиусами (7.4). Но обратим внимание, что в отличие от случая сплошного тора, сейчас внутреннее кольцо — самостоятельный элемент, который не входит в состав внешнего кольца; следовательно, вклад в потенциал всего тела от внутреннего колечка не будет иметь отрицательного знака, как это было ранее с вкладом внутреннего диска в потенциал сплошного тора.

Вновь удобно ввести вспомогательный угол θ такой, что $x_3' = r_0 \sin\theta$; радиусы внешнего и внутреннего кольца нам известны и даны в (7.20).

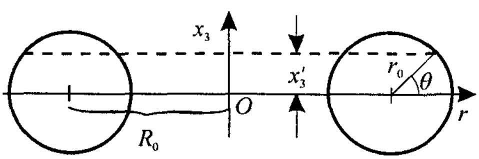


Рис. 50. Сечение кругового тора плоскостью $x_3' = \text{const} \leqslant r_0$

Будем рассматривать пустотелый тор состоящим из множества элементарных круглых колец, имеющих радиусы (7.20) и постоянную на них одномерную плотность

$$\mu_0 = \sigma r_0 d\theta. \tag{7.71}$$

Вклад в полный потенциал на точку (r, x_3) от одного из таких элементарных колец, расположенного на высоте $r_0 \sin\theta$ и имеющего радиус $R_1(\theta)$, согласно формуле (3.4), будет равен

$$d\varphi_{\text{кольца}}(r, x_3) = \frac{4G\sigma r_0 R_1(\theta)\, d\theta}{\sqrt{[R_1(\theta) + r]^2 + [x_3 - r_0 \sin\theta]^2}} \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4rR_1(\theta)}{[R_1(\theta) + r]^2 + [x_3 - r_0 \sin\theta]^2}}\right). \tag{7.72}$$

Интегрируя по всем таким колечкам, в итоге получим *пространственный потенциал пустотелого тора* в точке (r, x_3) в виде

$$\varphi_{\text{пуст. тора}}(r, x_3) = 4G\sigma r_0 \int_0^{2\pi} \frac{R_1(\theta) \cdot \mathrm{K}(k)}{\sqrt{[R_1(\theta) + r]^2 + \tilde{x}_3^2(\theta)}}\, d\theta, \tag{7.73}$$

где вводятся обозначения

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= R_0 + r_0 \cos\theta, \\ \tilde{x}_3(\theta) &= x_3 - r_0 \sin\theta, \\ k &= \sqrt{\frac{4rR_1(\theta)}{[R_1(\theta) + r]^2 + \tilde{x}_3^2(\theta)}}. \end{aligned} \tag{7.74}$$

Подчеркнём, что в применяемом методе — вследствие использования уже готовых выражений для элементарных колец — испытуемая точка в формуле (7.73) может быть как внешней, так и внутренней по отношению к поверхности тора.

Задача 7.8. *Опираясь на формулу (7.73), изучить численно меридиональные сечения эквипотенциальных поверхностей $\varphi(r, x_3) = const.$ гравитирующего пустотелого тора и сравнить их с теми, которые имеет сплошной однородный тор.*

Далее формулу (7.73) полезно преобразовать. Для этого представим эллиптический интеграл K через интеграл по переменной x и запишем (7.73) в форме

$$\varphi_{\text{пуст. тора}}(r, x_3) = 4G\sigma r_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R_0 + r_0\cos\theta)\, d\theta}{\sqrt{A^2 + 2r_0\left[(R_0 + r\cos 2x)\cos\theta - x_3\sin\theta\right]}}, \tag{7.75}$$

где

$$A^2 = (R_2 + r)^2 + x_3^2 + r_0^2 - 4R_0 r\sin^2 x; \tag{7.76}$$

Сделаем теперь замену

$$(R_0 + r\cos 2x)\cos\theta - x_3\sin\theta = l\cos\psi, \tag{7.77}$$

где

$$\psi = \theta + \tilde{\theta};\ l = \sqrt{(R_0 + r\cos 2x)^2 + x_3^2}. \tag{7.78}$$

При этом

$$\cos\theta = \frac{(R_0 + r\cos 2x)\cos\psi + x_3\sin\psi}{l}, \quad d\theta = d\psi. \tag{7.79}$$

Тогда

$$\varphi(r, x_3) = 4G\sigma r_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(R_0 + \dfrac{r_0(R_0 + r\cos 2x)\cos\psi + r_0 x_3\sin\psi}{l}\right) d\psi}{\sqrt{A^2 + 2r_0 l\cos\psi}}. \tag{7.80}$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos\psi, \sin\psi)\, d\psi = \int\limits_0^{\pi} \left[f(\cos\psi, \sin\psi) + f(\cos\psi, -\sin\psi)\right] d\psi, \tag{7.81}$$

то вместо (7.81) имеем

$$\varphi(r, x_3) = 8G\sigma r_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(R_0 + \dfrac{r_0(R_0 + r\cos 2x)}{l}\cos\psi\right) d\psi}{\sqrt{A^2 + 2r_0 l\cos\psi}}. \tag{7.82}$$

Заменой $\psi = 2t$ внутренний интеграл может быть вычислен, и в итоге получим *потенциал пустотелого тора* во всём пространстве

$$\varphi_{\text{пуст. тора}}(r, x_3) = 16G\sigma r_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{K}\left(\tilde{k}\right)}{\sqrt{A^2 + 2r_0 l}} \left\{R_0 + \frac{r_0(R_0 + r\cos 2x)}{l}\right\} dx, \tag{7.83}$$

где

$$\tilde{k}^2 = \frac{4r_0 l}{A^2 + 2r_0 l}, \tag{7.84}$$

а функции $A(x)$ и $l(x)$ даны в (7.76) и (7.77).

В (7.73) и (7.83) получен *потенциал пустотелого тора* во всём пространстве, т. е. как внутри оболочки тора, так и вне её. Несмотря на разный вид, обе формулы эквивалентны друг другу. Но вторая форма потенциала удобна для рассмотрения частных случаев.

Рассмотрим в (7.83) два частных случая:

а). *предельный переход к тонкому обручу*

При

$$r_0 \to 0$$

будет

$$\tilde{k} \to 0, \quad \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) = \mathrm{E}\left(\tilde{k}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Интересно заметить, что в этом пределе

$$\lim_{r_0 \to 0} 2\pi r_0 \sigma = \mu_0, \tag{7.85}$$

и формула (7.83) действительно возвращает нас к исходному потенциалу обруча (3.4);

б). *потенциал на оси симметрии*

$$r = 0.$$

В величинах

$$l = \sqrt{R_0^2 + x_3^2}, \quad A^2 = r_0^2 + l^2, \quad \tilde{k} = \frac{2\sqrt{r_0 l}}{r_0 + l} \tag{7.86}$$

исчезает зависимость от x и после некоторых преобразований *потенциал пустотелого тора на оси симметрии* выражается более простой, нежели (7.83), формулой:

$$\varphi_{\text{пуст. тора}}(x_3) = \frac{8\pi G \sigma r_0}{\sqrt{1 + \dfrac{x_3^2}{R_0^2}}} \mathrm{E}\left(\frac{\dfrac{r_0}{R_0}}{\sqrt{1 + \dfrac{x_3^2}{R_0^2}}}\right). \tag{7.87}$$

Задача 7.9. *Произведя в потенциале* (7.87) *замену* $\sigma \to \rho\, dr_0$ *и интегрируя его по параметру* r_0 *в интервале* $(0, r_0)$, *получить потенциал сплошного однородного тора на оси симметрии в форме* (7.18).

Решение. Делая указанную замену и обозначая

$$k = \frac{r_0}{l}, \quad r_0 = l \cdot k, \quad dr_0 = l \cdot dk,$$

действительно получим искомый *потенциал сплошного тора на оси симметрии* (7.18):

$$\varphi_{\text{тора}}(x_3) = 8\pi G \rho R_0 l \cdot \int_0^k k \mathrm{E}(k)\, dk = \frac{8}{3}\pi G \rho R_0 l \left\{\left(1 + k^2\right)\mathrm{E}(k) - \left(1 - k^2\right)\mathrm{K}(k)\right\}. \tag{7.88}$$

▼

Задача 7.10. *Действуя обратным способом: дифференцируя выражение* (7.18) *по параметру* r_0, *получить потенциал пустотелого тора на оси симметрии* x_3 (7.87).

Задача 7.11. *Рассмотреть, опираясь на* (7.83), *потенциал пустотелого тора в экваториальной плоскости*

$$x_3 = 0,$$

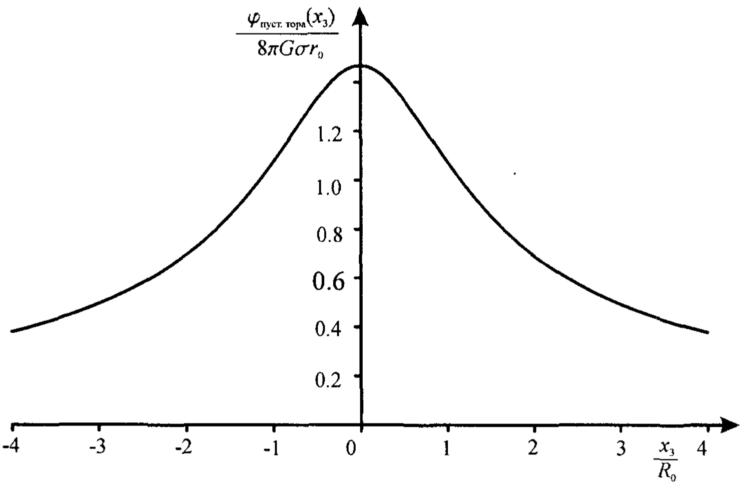


Рис. 51. Зависимость потенциала пустотелого тора на оси симметрии от x_3. Расчёт по формуле (7.87)

когда

$$l = |R_0 + r\cos 2x|\,; \qquad A^2 = (R_0 + r)^2 + r_0^2 - 4R_0 r \sin^2 x. \tag{7.89}$$

Важно также определить то геометрическое место точек, где потенциал пустотелого тора имеет свой абсолютный максимум. Из того, что мы уже знаем о потенциале сплошного однородного тора (см. предыдущий параграф) становится очевидным: это будет некоторая окружность, лежащая в экваториальной плоскости тора. Радиус $r_{\text{макс.}}$ этой окружности будет зависеть от геометрии тора. Фактически, нас интересует зависимость $r_{\text{макс.}}$ от величины отношения $\nu = \frac{r_0}{R_0}$. В частности, расчеты показывают: при

$$\nu = \frac{r_0}{R_0} \approx 0.408184 \tag{7.90}$$

выполняется соотношение $r_{\text{макс.}} = R_0 - r_0$, т. е. окружность, проходящая через точку максимума, совпадает с внутренней границей тора. Если тор «разбухает» по сравнению с данным и $\nu > 0.408184$, то $r_{\text{макс.}} > R_0 - r_0$ — тогда точки максимума потенциала попадают внутрь поверхности тора. В противном случае, когда тор «худеет» по сравнению с вышеуказанным критическим, точки максимума потенциала смещаются к геометрическому центру фигуры и находятся уже вне поверхности тора.

§ 7.4. Пространственный потенциал однородного тора с эллиптическим сечением рукава

Рассмотрим обобщённый вариант задачи о торе, когда в меридиональном сечении рукава тора уже эллипс

$$\frac{r'^2}{a_1^2} + \frac{x_3'^2}{a_3^2} = 1, \qquad a_1 \geqslant a_3.$$

Параметризуем уравнение эллипса, вводя вспомогательный угол θ:

$$r' = a_1\cos\theta, \quad x_3' = a_3\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Далее, как и в разделе 7.1.2, выделяем в сечении тора плоскостью $x_3' = \text{const}$ широкое круглое кольцо с внешним радиусом $R_1 = 1 + a_1 \cos\theta$ и полагаем его толщину равной $dx_3' = a_3 \cos\theta d\theta$. Тор, заполненный веществом плотностью ρ, и сейчас состоит из «стопки» таких широких колец. Интегрируя вклад в потенциал от них, в итоге получим *потенциал всего тора данного типа* в виде

$$\frac{\varphi_{\text{тора}}(r, x_3)}{2\sqrt{2}G\rho a_3 R_0} = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[c + 2\left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)\right] \mathrm{K}\left(\tilde{k}\right) + (a-c)\,\mathrm{E}\left(\tilde{k}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(a - \frac{2r^2}{R_0^2}\right) \Pi\left[n, \tilde{k}\right] \right\} \frac{\cos\theta}{\sqrt{a-c}} d\theta, \tag{7.91}$$

где

$$R_1 = 1 + \frac{a_1}{R_0}\cos\theta, \quad a = 2\frac{r^2 + (x_3 - a_3\sin\theta)^2}{R_0^2},$$
$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} + R_1^2\right)^2 - 4R_1^2\frac{r^2}{R_0^2}}, \tag{7.92}$$
$$\tilde{k} = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k' = \sqrt{\frac{\frac{a}{2} + R_1^2 - 2R_1\frac{r}{R_0}}{\frac{a}{2} + R_1^2 + 2R_1\frac{r}{R_0}}}, \quad n = \frac{a-b}{2\frac{r^2}{R_0^2}}.$$

З а д а ч а 7.12. *Доказать, что на оси симметрии потенциал данного тора выражается интегралом*

$$\frac{\varphi_{\text{тора}}(x_3)}{2\pi G\rho a_3 R_0} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R_1^2 + \frac{(x_3 - a_3\sin\theta)^2}{R_0^2}} \cos\theta d\theta. \tag{7.93}$$

§ 7.5. Потенциал на оси симметрии однородного тора с сечением в виде овала Кассини

Вращая овал Кассини вокруг оси x_3, получим торообразную фигуру с поверхностью четвёртого порядка

$$\left(R^2 + x_3^2\right)^2 - 2c^2\left(R^2 - x_3^2\right) = a^4 - c^4. \tag{7.94}$$

В зависимости от соотношения между параметрами a и c различают три типа форм овалов Кассини (в данном случае — осесимметричных объёмных фигур):

$c > a$ — фигура чисто тороидального типа;

$c = a$ — торообразная фигура с сечением в виде лемнискаты Бернулли;

$c < a$ — односвязные фигуры сфероидального вида, имеющие «вмятины» на полюсах.

Далее рассмотрим только первый и второй варианты (см. рис. 52).

Полагая фигуры однородными и применяя формулу (7.3), представим потенциал на оси симметрии в виде однократного интеграла

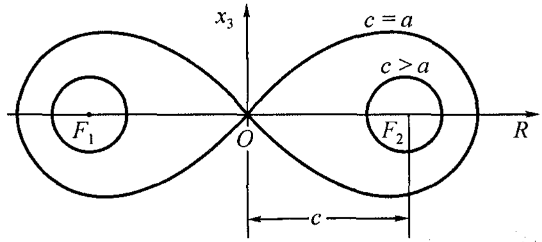


Рис. 52. Сечения торов в виде двух частных форм овалов Кассини: $c = a$ — лемниската Бернулли, $c > a$ — два разомкнутых овала

$$\varphi(x_3) = 2GpG\rho \int\limits_{-x_3^0}^{x_3^0} \left(\sqrt{(x_3 - x_3')^2 + R_2^2} - \sqrt{(x_3 - x_3')^2 + R_1^2}\right) dx_3', \tag{7.95}$$

где наименьший и наибольший радиусы кольца на высоте x'_3 таковы:

$$R_{1,2} = c^2 - {x_3'}^2 \mp \sqrt{a^4 - 4c^2 {x_3'}^2}, \tag{7.96}$$

а предел интегрирования

$$x_3^0 = \frac{a^2}{2c}. \tag{7.97}$$

Подставляя R_1, R_2 и x_3^0 в (7.95) и делая замену

$$x_3' = x_3^0 \cdot \cos\theta, \tag{7.98}$$

после преобразований, сходных с использованными выше для кругового тора, имеем $(r = \sqrt{c^2 + x_3^2})$

$$\varphi(x_3) = \pi G\rho \frac{a^2}{c} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{c}(x_3\cos\theta - c\sin\theta)}\,\sin\theta\, d\theta. \tag{7.99}$$

С помощью подстановки

$$\begin{gathered} x_3\cos\theta - c\sin\theta = r\cos\theta, \quad \theta_1 = \theta - \psi, \\ \cos\psi = \frac{x_3}{r}, \quad \sin\psi = -\frac{c}{r}, \end{gathered} \tag{7.100}$$

так что $\sin\theta = \frac{x_3}{r}\sin\theta_1 - \frac{c}{r}\cos\theta_1$, интеграл (7.99) приводится к

$$\varphi(x_3) = -2\pi G\rho a^2 \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \lambda\cos\theta}\,\cos\theta\, d\theta, \tag{7.101}$$

причём

$$\lambda = \frac{a^2}{c\sqrt{c^2 + x_3^2}} \leqslant 1. \tag{7.102}$$

После ещё одной замены $\theta \to \pi - \theta$ (7.101) записывается так:

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho a^2 \int\limits_0^\pi \sqrt{1+\lambda\cos\theta}\,\cos\theta\,d\theta, \tag{7.103}$$

как это имело место и для кругового тора (7.11).

На больших расстояниях x_3 величина $\lambda \sim \frac{a^2}{cx_3}$ мала, так что (7.103) имеет нужную асимптотику

$$\varphi(x_3) \approx \frac{\pi^2 G\rho a^4}{2cx_3} = \frac{MG}{x_3}, \tag{7.104}$$

где M — масса тела; действительно, объём заданного тора равен

$$V = 2\pi \int\limits_0^{x_3^0} \left(R_2^2 - R_1^2\right) dx_3' = 4\pi \int\limits_0^{x_3^0} \sqrt{a^4 - 4c^2 {x_3'}^2} dx_3' = \frac{\pi^2 a^4}{2c}. \tag{7.105}$$

Как и в случае с круговым тором (7.12), потенциал (7.103) также выражается через полные эллиптические интегралы

$$\varphi(x_3) = \frac{4\sqrt{2}\pi G\rho a^2}{3k^2\sqrt{2-k^2}} \left\{\left(2-k^2\right)\mathrm{E}(k) - 2\left(1-k^2\right)\mathrm{K}(k)\right\} \tag{7.106}$$

с модулем

$$k^2 = \frac{2a^2}{a^2 + c\sqrt{c^2 + {x_3}^2}}. \tag{7.107}$$

§ 7.6. Внутренний потенциал однородного кубоида

Дан прямоугольный однородный параллелепипед (кубоид) с началом системы координат в его центре (рис. 53).

Для нахождения внутреннего потенциала кубоида применим к нему формулу Гаусса (1.11), где модуль радиуса-вектора r между двумя точками равен

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \tag{7.108}$$

и введены обозначения

$$\xi = x_1 - x_1',\ \eta = x_2 - x_2',\ \zeta = x_3 - x_3'. \tag{7.109}$$

Пределы интегрирования для введённых переменных суть

$$\begin{aligned} &\xi_1 = x_1 - \frac{a_1}{2} \leqslant 0, \quad \eta_1 = x_2 - \frac{a_2}{2} \leqslant 0, \quad \zeta_1 = x_3 - \frac{a_3}{2} \leqslant 0, \\ &\xi_2 = x_1 + \frac{a_1}{2} \geqslant 0, \quad \eta_2 = x_2 + \frac{a_2}{2} \geqslant 0, \quad \zeta_2 = x_3 + \frac{a_3}{2} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{7.110}$$

Вклад в полный потенциал кубоида от грани $ABCD$, когда $x_3' = -a_3/2$ и $\cos\varphi' = \frac{\zeta_2}{r}$, даётся двойным интегралом

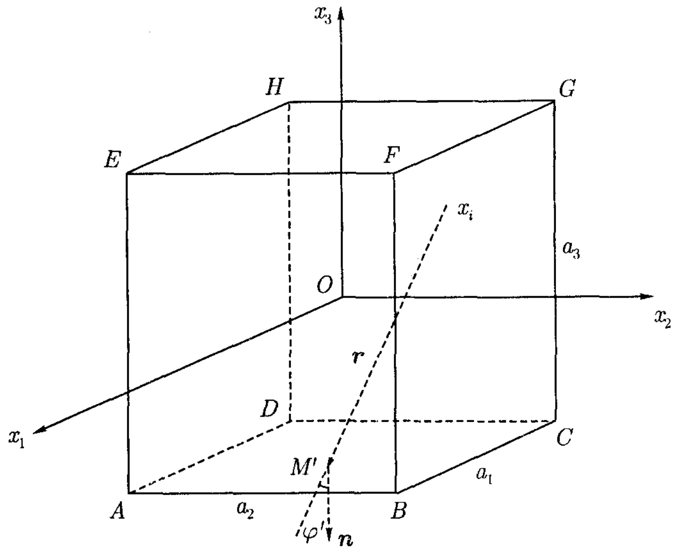


Рис. 53. Прямоугольный параллелепипед (кубоид). Обозначения см. в тексте

$$\varphi_{ABCD} = \int\limits_{\xi_2}^{\xi_1}\int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\zeta_2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta_2^2}}\, d\xi d\eta\,. \tag{7.111}$$

Интеграл (7.111) выражается в элементарных функциях

$$\begin{aligned}
\varphi_{ABCD} = \zeta_2 \Bigg\{ & \xi_1 \ln \frac{\eta_1 + r_B}{\eta_2 + r_A} - \xi_2 \ln \frac{\eta_1 + r_C}{\eta_2 + r_D} - \\
& -\eta_1 \ln \frac{(r_B - \xi_1)(r_C + \xi_2)}{\eta_1^2 + \zeta_2^2} + \eta_2 \ln \frac{(r_A - \xi_1)(r_D + \xi_2)}{\eta_2^2 + \zeta_2^2} + hfill \\
& +\zeta_2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi_1 \zeta_2}{\eta_1^2 + \eta_1 r_B + \zeta_2^2} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 \zeta_2}{\eta_1^2 + \eta_1 r_C + \zeta_2^2} \right) - \\
& -\zeta_2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi_1 \zeta_2}{\eta_2^2 + \eta_2 r_A + \zeta_2^2} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 \zeta_2}{\eta_2^2 + \eta_2 r_D + \zeta_2^2} \right) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{7.112}$$

где фигурируют расстояния от внутренней пробной точки до всех восьми вершин кубоида:

$$\begin{aligned}
r_A &= \sqrt{\xi_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}, & r_E &= \sqrt{\xi_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_1^2}, \\
r_B &= \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_2^2}, & r_F &= \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}, \\
r_C &= \sqrt{\xi_2^2 + \eta_1^2 + \zeta_2^2}, & r_G &= \sqrt{\xi_2^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}, \\
r_D &= \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}, & r_H &= \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_1^2}.
\end{aligned} \tag{7.113}$$

Исходя из (7.111), вклады от остальных пяти граней кубоида получаются цепочкой следующих перестановок:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{EFGH} = \varphi_{ABCD} \ \ (\zeta_2 \to -\zeta_1)\,,\\
&\varphi_{BCGF} = \varphi_{EFGH} \ \ (\zeta_i \rightleftarrows \eta_i)\,,\\
&\varphi_{ABFE} = \varphi_{EFGH} \ \ (\zeta_i \rightleftarrows \xi_i)\,,\\
&\varphi_{ADHE} = \varphi_{BCGF} \ \ (-\eta_1 \to \eta_2)\,,\\
&\varphi_{DCGH} = \varphi_{ABFE} \ \ (-\xi_1 \to \xi_2)\,.
\end{aligned} \tag{7.114}$$

В итоге, искомый *внутренний потенциал однородного кубоида* будет равен сумме всех найденных выше выражений

$$\varphi_{\text{куб}} = \frac{G\rho}{2}\left\{\varphi_{ABCD} + \varphi_{EFGH} + \varphi_{ABFE} + \varphi_{DCGH} + \varphi_{BCGF} + \varphi_{ADHE}\right\}. \tag{7.115}$$

Таким образом, полный внутренний потенциал однородного кубоида выражается через элементарные функции: сложные логарифмы и арктангенсы. Отметим, что рассчитывая потенциал по найденной формуле (7.115), следует, конечно, учитывать многозначность функции $\operatorname{arctg}(\ldots)$.

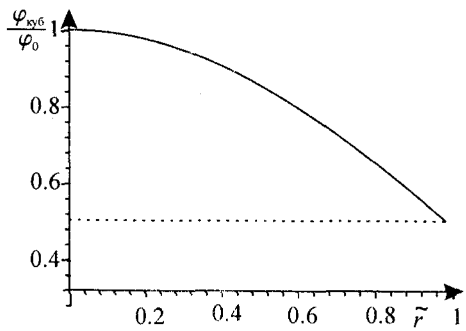


Рис. 54. Зависимость потенциала в однородном кубоиде (нормирован на φ_0) от расстояния вдоль главной диагонали $\varkappa = 2r/L$. Штрихами отмечено значение потенциала в вершине кубоида

На рис. 54 приводится график потенциала кубоида (7.115) вдоль одной из главных его диагоналей. Отметим универсальность этого графика, так как в принятых переменных его форма не зависит от отношения длин рёбер и плотности тела и характеризует любой однородный кубоид или куб.

Как и следовало ожидать, данный потенциал имеет max в центре. Его величина, рассчитанная по формуле (7.115), оказывается равной

$$\varphi_0 = G\rho \sum \left[a_2 a_3 \ln \frac{L + a_1}{L - a_1} + \frac{a_3^2}{2}\,(Q - P)\right],$$

$$\left\{\begin{matrix} Q \\ P \end{matrix}\right\} = \operatorname{arctg} \frac{a_1 a_3}{a_2^2 + a_3^2 \pm a_2 L}, \tag{7.116}$$

причём все остальные члены суммы получаются из данного путём круговой перестановки индексов у рёбер. В любой же из вершин кубоида потенциал равен

$$\varphi_{\text{верш}} == G\rho \sum \left[a_2 a_3 \ln \frac{L + a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \frac{a_3^2}{2}\left(\operatorname{arctg} \frac{a_1 a_3}{a_2^2 + a_2 L + a_3^2} - \operatorname{arctg} \frac{a_1}{a_3}\right)\right], \tag{7.117}$$

где для получения остальных членов суммы также используется круговая перестановка индексов и $L = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ — длина главной диагонали кубоида. Таким образом: *значение потенциала в центре однородного кубоида всегда в два раза больше значения потенциала в каждой из его вершин:*

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_{\text{верш}}} = 2. \tag{7.118}$$

Таким свойством обладает всякий однородный кубоид, при любой массе и произвольном у него отношении длин рёбер (и куб в частности).

На рис. 55 показано сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью $x_3 = 0$. Расчёты проводились по формуле (7.115). Характерно — чем дальше кривая от центра, тем заметней её отклонение от эллипса.

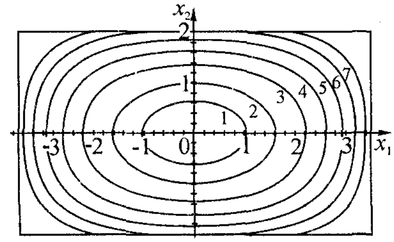


Рис. 55. Семейство сечений эквипотенциальных поверхностей плоскостью $x_3 = 0$ в кубоиде с относительными длинами рёбер 7:4:2. Цифрами $1, 2, \ldots, 7$ обозначены кривые для нормированного значения потенциала $\varphi/\varphi_{\text{центр}} = 0.98;\ 0.95;\ 0.90;\ 0.85;\ 0.80;\ 0.75;\ 0.70$

Заметим, что в формулу (7.115) входит, согласно (7.112), 24 члена с логарифмами и 24 члена с арктангенсами. Члены с логарифмами после многих преобразований приводятся к изящному виду вкладов в эту часть потенциала от каждого из двенадцати рёбер:

$$\widetilde{\varphi} = G\rho \sum \left[\eta_1\zeta_1 \ln\frac{\xi_2 + r_G}{\xi_1 + r_F} - \eta_1\zeta_2 \ln\frac{\xi_2 + r_C}{\xi_1 + r_B} - \right. \\ \left. - \eta_2\zeta_1 \ln\frac{\xi_2 + r_H}{\xi_1 + r_E} + \eta_2\zeta_2 \ln\frac{\xi_2 + r_D}{\xi_1 + r_A} \right], \tag{7.119}$$

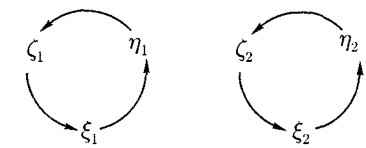


Рис. 56. Схема круговой перестановки

где восемь остальных членов суммы получаются из данных круговой перестановкой по правилам рис. 56.

§ 7.7. О потенциале плоских фигур,получаемых при сплющивании однородных объёмных призм и цилиндров

Неожиданная и полезная проверка соотношения (7.118) для кубоида получается на основе проведённых в § 2.8 исследований для потенциала однородной прямоугольной пластины. Вспомним, что, согласно формуле (2.106), у пластины также $\dfrac{\varphi_0}{\varphi_{\text{верш}}} = 2$. Что это — случайное совпадение? Нет! Вдумаемся: *такая пластина как раз и получается из кубоида в пределе бесконечно малой длины четырёх его рёбер.*

По аналогии с кубоидом, для каждой пары тел «прямая однородная объёмная призма (или цилиндр с любым сечением) — плоская пластина с той же формой основания» есть конкретное, присущее только этой паре отношение указанных потенциалов. Следует лишь следить за тем, чтобы вершины у сравниваемых пластины и призмы соответствовали друг другу.

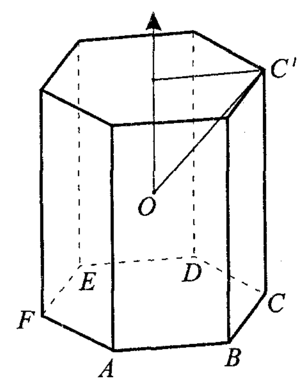


Рис. 57. Пояснение к теореме 1

Теорема 1. *В любой прямой однородной призме с основаниями в виде произвольных многоугольников (рис. 57) отношение потенциалов в центре и в угловой точке, равное*

$$\gamma_{\text{призмы}} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{\text{верш}}} = 2, \tag{7.120}$$

равно и аналогичному отношению потенциалов

$$\gamma_{\text{плоской фигуры}} = \frac{\varphi_0}{\varphi_{\text{верш}}} = 2 \tag{7.121}$$

у соответствующей однородной плоской пластины, имеющей форму оснований призмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оно наглядно: уменьшаем длину вертикальных рёбер, и в пределе бесконечно малого их значения получаем однородную плоскую пластину с постоянной поверхностной плотностью σ. Тогда рассматриваемое соотношение потенциалов «вершина — центр» для призмы *переходит* в соотношение потенциалов «угол — центр» у пластины. Это соотношение остаётся тем же независимо от того, сохраняется или нет постоянной в указанном предельном переходе масса каждого элементарного столбика $H\rho = \sigma = \text{const}$. ■

Примеры. По доказанному ранее, для треугольной призмы и треугольной пластины отношение $\gamma = 2.3975$; для кубоида и прямоугольной пластины $\gamma = 2$; для прямого однородного кругового цилиндра и соответствующего ему однородного диска $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и т. д.

Таким образом, теорема выражает красивый общий результат.

Замечания

Материал главы полностью разработан автором.

§ 7.1. Пространственный (внутренний и внешний) потенциал однородного кругового тора — цель заманчивая, но трудная для исследования. Знание этого потенциала имеет важное теоретическое и прикладное значение в гидродинамике, астрономии и физике.

Потенциал тора на оси симметрии в конечном виде (7.12) — т. е. через полные эллиптические интегралы первого и второго рода — впервые получен в [21]. Важное применение формула (7.12) найдёт в § 9.15, где основываясь на знании потенциала на оси симметрии, будет найдена *полная система эквигравитирующих элементов тора*. Их использование открывает ещё один перспективный (в дополнение к изложенным в данном параграфе) подход к решению задачи о потенциале тора в пространстве.

Подчеркнём, что найденное здесь общее выражение (7.26) гравитационного потенциала кругового тора пригодно для описания силового поля *как внутри тора, так и вне его*. Ситуация не стандартная, так как, к примеру, потенциалы *эллипсоида* для случаев внешней и внутренней точек строго различаются.

Исследование обобщенного гомотетического слоя на торе — новая задача. Через потенциал такого слоя в принципе можно найти и гравитационную энергию тора.

В разделе 7.1.5 найдены выражения потенциала тора через суммирование ряда Лапласа.

§ 7.2. Краевая задача решается посредством разложения потенциала в ряд по тороидальным функциям. Своеобразие её в том , что здесь в качестве граничного условия для определения коэффициентов ряда берётся значение потенциала не на границе фигуры (как обычно), а на оси симметрии тора. Данный подход открывает новый путь к изучению силовых полей гравитирующих или заряженных электрическим зарядом торообразных тел.

§ 7.3. Потенциал пустотелого тора получен методом синтеза вкладов от элементарных колец. Но его можно найти и методом дифференцирования по параметру r_0 выражения потенциала сплошного тора (7.26)! Интересно выяснить при разных $\nu = \dfrac{r_0}{R_0}$ *взаимное расположение точек максимума потенциала для сплошного и полого кругового тора.*

§ 7.5. Потенциал однородного лемнискатного тора получен здесь только на оси симметрии.

§ 7.6. Новинка: внутренний потенциал однородного кубоида выражается через элементарные функции! Ранее Плейфер (как отмечает Тодхантер [46, 1591]) решил лишь совершенно частную задачу о притяжении кубоида на точку, расположенную на его грани. Наше решение имеет значительно более общий характер.

Первоисточник: [21].

§ 7.7. Полезная проверка основного результата предыдущего параграфа. Здесь также установлено и одно нетривиальное соответствие между потенциалами прямых однородных призм и потенциалами пластин, получаемых при сплющивании этих призм.

Глава 8

ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ И ВИРИАЛ

§ 8.1. Первое знакомство

Важное значение в теории потенциала имеет задача о вычислении гравитационной (потенциальной, она же ньютоновская) энергии тел (см. п. 1.2.11).

Говоря о потенциальной энергии, напомним, что силовое взаимодействие между элементами массы подчиняется закону обратных квадратов. Поэтому здесь мы говорим не только о телах, гравитирующих по закону Ньютона, но и о телах с электрическим зарядом, элементы которого притягиваются или отталкиваются по закону Кулона[1].

Даны две массы M_1 и M_2, распределённые в объёмах T_1 и T_2 с плотностями $\rho_1(\boldsymbol{x})$ и $\rho_2(\boldsymbol{x})$ соответственно. Любая из масс является источником гравитационного поля с потенциалом

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = G \iiint\limits_{T_i} \frac{\rho_i(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} dV', \; i = 1, 2, \tag{8.1}$$

и, находясь в поле притяжения партнёра, имеет гравитационную энергию

$$W_{i,j} = -\iiint\limits_{T_i} \rho_i \varphi_j \, dV, \; i, j = 1, 2. \tag{8.2}$$

Так, $W_{1,2}$ есть энергия первой массы в силовом гравитационном поле второй. Как отмечено в (8.22), $W_{1,2} = W_{2,1}$, т. е. *взаимные потенциальные энергии тел равны*. Это важное равенство следует рассматривать как проявление фундаментального принципа механики: «действие равно по величине противодействию».

Но рассматриваемые тела вовсе не обязательно должны быть разделёнными в пространстве, — они могут частично или полностью проникать друг в друга[2]. Теперь мы подготовлены к важному качественному переходу: в частном случае, когда оба тела одинаковы и тождественно совпадают, мы имеем право рассматривать их уже как одно тело, все элементы массы которого воздействуют друг на друга (такое тело называют изолированным). Ньютоновская энергия изолированной гравитирующей массы в собственном поле дается интегралом[3]

$$W = W_{i,i} = -\frac{1}{2} \iiint\limits_{T} \rho \varphi \, dV. \tag{8.3}$$

---

[1] Далее для краткости говорится только о гравитирующих телах, но все выводы будут верны и для электрического поля неподвижных зарядов при условии $G = 1$: тогда под ρdV понимается заряд в объёме dV, а знак потенциальной энергии меняется на обратный.

[2] Такое взаимное проникновение нередко демонстрируют, например, звёздные системы и галактики. Не исключено ведь, что некоторые эллиптические галактики образовались при слиянии двух спиральных. Но независимо от конкретного физического содержания, рассуждая абстрактно, всегда можно полагать, что некая среда (тело) состоит из смеси частиц двух (или нескольких) сортов.

[3] Множитель $1/2$ в формуле (8.3) появился потому, что при вычислении потенциальной энергии тела на самого себя все его элементы массы учитывались дважды: вначале как источник потенциала, затем просто как массы в силовом поле соседей.

Эта величина и есть *гравитационная энергия* данного тела. Подчеркнём следующее: при такой форме записи неявно предполагается, что эта энергия *локализована внутри тела* (ср. с формулой (8.5)).

С физической точки зрения гравитационная энергия массы есть та работа, которую надо совершить, чтобы удалить все мельчайшие частицы «распылённой» массы на бесконечность друг от друга (фактически, на расстояние, когда взаимодействием частиц можно полностью пренебречь).

Выражение (8.3), после замены в нём ρ с помощью уравнения Пуассона и применения формулы Грина, приводится, как известно, к виду

$$W=-\frac{1}{8\pi G}\int\limits_T\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right]dV+\frac{1}{8\pi G}\iint\limits_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS, \tag{8.4}$$

где $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали n к граничной поверхности S. Распространяя интегрирование на всё пространство, получим

$$W=-\frac{1}{8\pi G}\int\limits_{R_E}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right]dV. \tag{8.5}$$

Подчеркнём: это — другая форма представления гравитационной энергии тела, использующая понятие гравитационного поля массы, *распространённого на всё пространство.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Общие формулы (8.3) и (8.5) оказываются малопригодными для решения большинства конкретных задач. Развитию новых методов посвящены главы 12, 13 и 14. В дополнение к указанным общим формулам там выведены новые специальные формулы. С некоторыми из них мы познакомились в п. § 1.3.5.

Заметим, что для логарифмического потенциала (1.30) аналогичные преобразования не дают столь простого результата. Действительно, в двумерном случае

$$W=-\frac{1}{4\pi G}\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right]dS+\frac{1}{4\pi G}\int\limits_L\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dL, \tag{8.6}$$

и при $r\to\infty$ силовой поток через линейную границу L логарифмически расходится:

$$\frac{1}{4\pi G}\lim_{r\to\infty}\left\{\int\limits_L\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dL\right\}=-\frac{M^2G}{2}\lim_{r\to\infty}\ln\frac{r}{r_0}. \tag{8.7}$$

Следовательно, второй член в (8.6) теперь не исчезает.

Кроме сплошных, нас будут интересовать тела с полостями. Рассмотрим элементарные оболочки с поверхностной плотностью $\sigma(x)$ и внешней поверхностью S. Для них энергия вычисляется (вместо (8.3)) по формуле

$$W_{\text{сл}}=-\frac{1}{2}\iint\limits_S\sigma\varphi\,dS. \tag{8.8}$$

Потенциал на поверхности оболочки находится или прямо по формуле (5.75), или же способом, указанным в § 5.11.

Формула (8.8) применима и к плоским телам.

Задача 8.1. *Дано широкое однородное круговое кольцо* (рис. 58). *Найти его гравитационную энергию.*

Решение. Обратимся к формуле (8.8), которая имеет теперь вид

$$W_{\text{шир. кольца}} = -\frac{\sigma}{2}\iint\limits_S \varphi_{\text{K}} dS = -\pi\sigma \int\limits_{R_1}^{R_2} r\varphi_{\text{K}}\, dr. \tag{8.9}$$

Внутренний потенциал кольца равен

$$\varphi_{\text{K}} = \varphi_{R_2} - \varphi_{R_1}, \tag{8.10}$$

причём здесь, согласно (2.23) и (2.18),

$$\begin{aligned} \varphi_{R_1} &= \frac{4G\sigma}{r}\left\{r^2 \mathrm{E}\left(\frac{R_1}{r}\right) - \left(r^2 - R_1^2\right) \mathrm{K}\left(\frac{R_1}{r}\right)\right\}, \\ \varphi_{R_2} &= 4G\sigma R_2 \mathrm{E}\left(\frac{r}{R_2}\right). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Таким образом, согласно (8.9) имеем:

$$W_{\text{шир. кольца}} = W_2 - W_1. \tag{8.12}$$

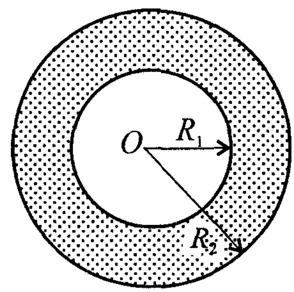


Рис. 58. Широкое круговое кольцо

Находим, прежде всего, интеграл

$$W_2 = -\pi\sigma \int\limits_{R_1}^{R_2} r\varphi_{R_2} dr. \tag{8.13}$$

Записав в φ_{R_2} полный эллиптический интеграл второго рода в тригонометрической форме и меняя затем в (8.13) порядок интегрирования, получим[4]

$$W_2 = -\frac{4}{3}\pi G\sigma^2 R_2^3 \left\{2 + \left(1 - k^2\right) \mathrm{K}\,(k) - \left(1 + k^2\right) \mathrm{K}\,(k)\right\}, \tag{8.14}$$

причём модуль здесь равен

$$k = \frac{R_1}{R_2} \leqslant 1. \tag{8.15}$$

Затем вычисляем W_1:

$$W_1 = -\pi\sigma \int\limits_{R_1}^{R_2} r\varphi_{R_1} dr. \tag{8.16}$$

Вновь представляя в φ_{R_1} полные эллиптические интегралы в тригонометрической форме и меняя порядок интегрирования, получим

$$W_1 = -\frac{4}{3}\pi G\sigma^2 R_2^3 \left[\left(1 + k^2\right) \mathrm{E}\,(k) - \left(1 - k^2\right) \mathrm{K}\,(k) - 2k^3\right] \tag{8.17}$$

с тем же самым модулем k.

---

[4] При вычислении этого интеграла появляются расходимости типа $\frac{1}{0}$, которые, однако, гасят друг друга.

Подставляя найденные компоненты W_1 и W_2 в формулу (8.12), в итоге находим *гравитационную энергию широкого кругового кольца*

$$W_{\text{шир. кольца}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R_2^3 \left\{1 + k^3 + \left(1 - k^2\right) \mathrm{K}(k) - \left(1 + k^2\right) \mathrm{E}(k)\right\}. \tag{8.18}$$

▼

В пределе $R_1 \to 0$ (т. е. при $k \to 0$) из (8.18) следует выражение для *энергии полного однородного кругового диска*

$$W_{\text{диска}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R^3, \tag{8.19}$$

где R — радиус этого диска. На рис. 59 показан график формулы (8.18).

Другой предельный случай для формулы (8.18) — это переход от широкого кольца (когда масса его $M = \pi\sigma\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ сохраняется) к бесконечно тонкому круглому колечку при $R_2 \to R_1$. Однако, исключая в данном случае в (8.18) поверхностную плотность σ и делая предельный переход к колечку, мы наталкиваемся на неопределённость $\frac{0}{0}$. Раскрывая эту неопределённость, убеждаемся в следующем:

$$\lim_{k\to 1} \frac{1 + k^3 + \left(1 - k^2\right) \mathrm{K}(k) - \left(1 + k^2\right) \mathrm{E}(k)}{\left(1 - k^2\right)^2} = \infty,$$

и гравитационная энергия тонкого колечка оказывается бесконечно большой. И это не случайно — как мы увидим в главе 13, *потенциальная энергия любых одномерных тел имеет логарифмическую расходимость*. В связи с этим заметим, что обращение в нуль энергии кольца в пределе $k \to 1$ на рис. 59 происходит лишь из-за отсутствия там дополнительного условия сохранения массы кольца.

Задача 8.2. *Доказать расходимость последнего выражения.*

Но независимо от математической формы представления гравитационной энергии, с физической точки зрения эта энергия есть *работа, которую необходимо совершить для удаления всех элементов массы на бесконечное расстояние друг от друга* (состояние полной распылённости массы принимается за нуль — пункт отсчёта энергии). Справедливо и обратное: W есть *энергия, выделяемая при образовании тела из первоначально распылённой материи*[5].

Взаимную же потенциальную энергию $W_{1,2}$ двух тел следует понимать как работу по их разнесению на бесконечность (или энергию, выделяющуюся при сближении данных тел из бесконечности до финального положения). Так, образование двойных звёзд на позднем этапе эволюции шаровых звёздных скоплений приводит к разогреву и расширению этих

[5] Гравитационная энергия тела зависит от формы, размеров, степени концентрации в нём массы. В конце XIX века, т. е. до открытия ядерной энергии, крупные учёные Г. Гельмгольц и У. Томсон (Кельвин) полагали, что Солнце светит за счёт собственного постепенного сжатия и высвобождающейся при этом гравитационной энергии. Расчёты показали: в современную эпоху расход энергии Солнца на излучение ($3.8 \cdot 10^{26}$ Дж/с) можно компенсировать уменьшением его радиуса на $\delta R \approx 50$ метров в год. Это позволило бы ему светить на нынешнем уровне с момента зарождения

$$T \approx \frac{W}{\Delta W} = \frac{R_\odot}{\delta R} \approx 1.4 \cdot 10^7 \text{ лет} \tag{8.20}$$

около пятнадцати миллионов лет, считая Солнце однородным шаром. Но даже с учётом неоднородности Солнца (плотность в его центре по крайне мере в 54 раза больше средней плотности) время траты гравитационной энергии хотя и возрастает примерно до $\approx 5 \cdot 10^7$ лет, но и тогда оно оказывается чрезвычайно коротким: ведь возраст некоторых пород на Земле — около 4 миллиардов лет. В тридцатых годах двадцатого века стало ясно, что без термояда здесь не обойтись. Однако на ранних и финальных стадиях эволюции звёзд — при сжатии газового облака и при коллапсе ядра звезды — высвобождение гравитационной энергии действительно играет важную роль.

звёздных систем за счёт превращения части гравитационной энергии в кинетическую энергию хаотического движения других звёзд.

Гравитационная энергия не относится к величинам, аддитивным по массе. Поэтому если какое-либо гравитирующее тело состоит из двух, например, частей, то его полная энергия может быть представлена в виде

$$W_{\text{полн}} = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{T_1} \rho_1\varphi_1 dV + \int\limits_{T_2} \rho_2\varphi_2 dV + \int\limits_{T_1} \rho_1\varphi_2 dV + \int\limits_{T_2} \rho_2\varphi_1 dV\right\}, \tag{8.21}$$

где индексами отмечены величины, относящиеся соответственно к первой и ко второй частям тела. *В сумме два последних интеграла дают взаимную гравитационную энергию двух частей тела.* Известно, что имеет место замечательное свойство равенства друг другу этих интегралов

$$-W_{\text{вз}} = \int\limits_{T_1} \rho_1\varphi_2 dV = \int\limits_{T_2} \rho_2\varphi_1 dV. \tag{8.22}$$

Два первых же интеграла в (8.21) *дают гравитационную энергию частей тела, взятых отдельно друг от друга.* В краткой записи, следовательно,

$$W_{\text{полн}} = W_1 + W_2 + W_{\text{вз}}. \tag{8.23}$$

Итак, зная энергию W_1 и W_2 отдельных частей тела, а также их взаимную энергию $W_{\text{вз}}$, по формуле (8.23) можно найти полную гравитационную энергию тела. Если разделить тело на несколько частей, то полная работа по их удалению друг от друга и будет равна взаимной энергии [6].

В качестве примера приведём выражение полной энергии двух однородных, раздельно расположенных на расстоянии $2D$ шаров:

$$W_{\text{полн}} = -\frac{3}{5}\frac{M_1^2 G}{R_1} - \frac{3}{5}\frac{M_2^2 G}{R_2} - \frac{M_2 M_2 G}{2D}. \tag{8.24}$$

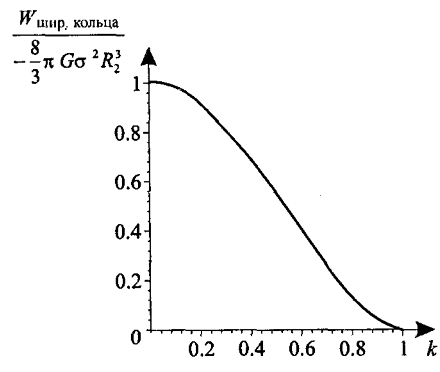


Рис. 59. Зависимость нормированной потенциальной энергии кольца от его относительной ширины $k = \dfrac{R_1}{R_2}$

Перейдём теперь к *вириалу гравитационных сил.*[7] По определению, вириал равен

$$Z = \iiint\limits_T \rho\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) dV. \tag{8.25}$$

Заметим, что здесь φ — *полный* потенциал, действующий на элементы рассматриваемой массы. Важно, что *в изолированном теле вклад в потенциал φ вносят элементы массы только*

[6] К слову, в программе «Астероидная опасность» есть проекты по уничтожению потенциально опасных для Земли астероидов с помощью доставленных к ним ядерных бомб. Проблема эта комплексная, и без точного расчёта гравитационной энергии у астероида она не может быть решена. Что, если взрыв окажется недостаточно мощным, тогда рой осколков, двигающихся по близким орбитам, окажется не менее (если не более!) опасным для нашей планеты.

[7] Термин «вириал» (от латинского *viris* — «энергия») в теории газов ввёл в 1870 г. Клаузиус, понимая под ним сумму скалярных произведений векторов положений молекул на действующие на эти молекулы векторы сил [9].

этого тела. А именно, для изолированного тела, как доказал Чандрасекхар, выполняется замечательное равенство $Z = W$:

$$\int\limits_T \rho x_i \frac{d\varphi}{dx_i} dV = -\frac{1}{2} \int\limits_T \rho\varphi dV. \tag{8.26}$$

Обратим внимание — потенциальная энергия W изолированного от внешнего влияния тела равна вириалу сил притяжения внутри него. И это — совершенно нетривиальное обстоятельство!

В другом, альтернативном случае, когда область T не совпадает с областью интегрирования для потенциала φ, тело не является изолированным и мы имеем дело с *подсистемой.* Вычисление вириала подсистемы, как и вычисление гравитационной энергии часто представляет собой весьма сложную задачу. И важно подчеркнуть — для подсистемы связь между вириалом и гравитационной энергией не будет, как правило, уже столь простой, как в (8.26). Конкретно, для эллипсоидальной подсистемы такая связь будет установлена ниже в § 8.5, см. там формулу (8.97).

§ 8.2. Подсистемы, у которых вириал и потенциальная энергия равны

Дано сферически-симметричное гравитирующее тело, радиус-вектор r у которого удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant R_1 \leqslant r \leqslant R_2 < \infty. \tag{8.27}$$

Выделим в этом теле подсистему с промежуточным r и по данным выше формулам запишем для неё в сферически симметричном случае вириал и гравитационную энергию:

$$Z(r) = 4\pi \int\limits_{R_1}^{r} r^3 \rho(r) \frac{d\varphi}{dr} dr, \quad W(r) = -2\pi \int\limits_{R_1}^{r} r^2 \rho(r)\varphi(r)\, dr. \tag{8.28}$$

Здесь $\varphi(r)$ — полный потенциал на элементы подсистемы: так как подсистема не изолирована, то потенциал внутри неё создаётся как массой самой подсистемы, так и внешней оболочкой рассматриваемого тела. Интересуясь теперь разностью величин

$$\Phi(r) \equiv Z(r) - W(r) = 4\pi \int\limits_{R_1}^{r} r^2 \rho(r) \left(r\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2}\varphi(r) \right) dr, \tag{8.29}$$

заменим здесь подынтегральное $\rho(r)$ через $\varphi(r)$ с помощью уравнения Пуассона:

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right). \tag{8.30}$$

Тогда получим соотношение

$$2G\Phi(r) + \int\limits_{R_1}^{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \left[\varphi + 2r\frac{d\varphi}{dr} \right] dr = 0. \tag{8.31}$$

Рассмотрим его физический смысл.

Как нам уже известно, величина $W(r)$ представляет собой работу по рассеянию на бесконечность вещества рассматриваемой подсистемы, причём учитывается гравитационное поле не только подсистемы, но и поле от внешней к ней оболочки. Величина же вириала $Z(r)$ по смыслу есть та работа, которую надо затратить, чтобы рассеять элементы подсистемы, находящиеся под действием только сил взаимного притяжения (сферическая оболочка силового воздействия на элементы подсистемы, конечно, не оказывает). Во всех физически разумных случаях функция $\Phi(r)$ неотрицательна. Интуитивно её можно рассматривать как величину, которая характеризует интенсивность перемешивания вещества между подсистемой и внешней оболочкой (ядром и периферией в звёздных системах, галактиках и скоплениях галактик). Конкретный физический механизм перемешивания нас сейчас не интересует, так как мы говорим только об энергетических оценках. При *малых* $\Phi(r)$ потенциальный барьер для возможного перемешивания будет также *мал*, и тогда существует благоприятный энергетический режим для перемешивания вещества по всей системе в целом. Наоборот, большие значения $\Phi(r)$ говорят о высоком потенциальном барьере, который препятствует интенсивному перемешиванию вещества в системе.

Из этих соображений, уравнение (8.31) может быть применено для исследования динамики галактик. В частности, по известному из наблюдений распределению плотности $\rho(r)$ с помощью (8.31) можно оценить возможность существования сверхплотных ядер у некоторых сферических галактик, а также их предрасположенность к гравитермической катастрофе. Рассмотрим, например, сферическую галактику, погружённую в корону с распределением плотности $\rho(r) \propto r^{-2}$. Такой короне соответствует логарифмический потенциал

$$\varphi(r) = \alpha\left(1 + \ln\frac{R_2}{r}\right), \tag{8.32}$$

где R_2 — характерный пространственный масштаб системы, а α — некоторая постоянная. В этом случае уравнение (8.31) даёт

$$\Phi(r) = \frac{\alpha^2 r}{2G}\ln\frac{R_2}{r} \quad (0 \leqslant r \leqslant R_2). \tag{8.33}$$

Отсюда следует (см. также рис. 60), что радиус плотных ядер в такой короне должен удовлетворять неравенству $r \leqslant R_2/e$.

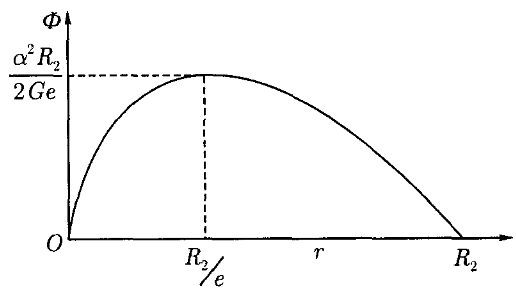


Рис. 60. Зависимость от радиуса сферической подсистемы r величины энергетического «зазора» Φ между её вириалом и гравитационной энергией. Расчёт сделан для закона плотности $\rho(r) \propto r^{-2}$

Но из уравнения (8.31) можно извлечь ещё и другую важную информацию. Дифференцируя (8.31) по r, получим выражение

$$2G\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)\left[\varphi + 2r\frac{d\varphi}{dr}\right] = 0, \tag{8.34}$$

которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение для потенциала $\varphi(r)$, если функция $\Phi(r)$ задана из каких-то дополнительных соображений. Если положить, например,

$$\Phi = \text{const} \quad (\equiv 0), \tag{8.35}$$

то возможны такие варианты:

$$r^2\frac{d\varphi}{dr} = \text{const}; \qquad \varphi + 2r\frac{d\varphi}{dr} = 0. \tag{8.36}$$

В первом из них, согласно (8.30), $\rho(r) = 0$, и мы приходим к известному случаю Чандрасекхара (8.26); во втором же варианте (8.36), который ранее не был известен, уравнению (8.34) удовлетворяют следующие простые, но интересные решения:

$$\varphi(r) \propto r^{-1/2}, \quad \rho(r) \propto r^{-5/2}, \tag{8.37}$$

где для нахождения $\rho(r)$ мы вновь использовали уравнение Пуассона. Для проверки найденного решения (8.37) заметим, что оно действительно обращает функцию $\Phi(r)$ на данном интервале в некоторую постоянную (или величину, равную нулю).

Итак, распределение плотности в гравитирующей системе по закону $\rho(r) \propto r^{-5/2}$ замечательно в том отношении, что при нём для любой внутренней сферической подсистемы вириал и гравитационная энергия равны друг другу.

Подчеркнём, что *это единственный случай, когда такое равенство имеет место для неизолированной гравитирующей конфигурации*; *ведь Чандрасекхар установил равенство* (8.26) только в тривиальном случае — *для изолированных тел.* У нас же *подсистема не изолирована* и имеет верхнюю оболочку.

Из свойств решения (8.37) заметим ещё, что при нём масса внутри шара радиусом r оказывается

$$M(r) \sim \sqrt{r} \tag{8.38}$$

(заметим, что в изотермическом газовом шаре $M(r) \sim r$, т. е. в нашем случае плотность падает с расстоянием от центра быстрее). Поэтому в случае (8.37) имеет место замечательное равенство

$$M(r) \cdot \varphi(r) = \text{const}. \tag{8.39}$$

Квадрат эпициклической частоты в данной модели

$$\kappa^2(r) = \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} > 0, \tag{8.40}$$

и круговые орбиты, следовательно, оказываются устойчивыми. Ещё один фактор в пользу приемлемости закона (8.37) — в умеренном падении квадрата угловой скорости в такой звёздной системе:

$$\Omega^2(r) \sim \kappa^2(r) \sim \rho(r) \sim r^{-\frac{5}{2}}. \tag{8.41}$$

Легко видеть, скорость вращения будет падать по закону $v_{rot} \sim r^{-\frac{1}{4}}$, т. е. довольно медленно.

Но самое интересное, и это уже подчеркивалось: в модели с (8.37) тензор вириала подсистемы любой формы (не обязательно сферической!) оказывается равен гравитационной энергии этой подсистемы. Интерпретируя равенство $\Phi = 0$ как отсутствие потенциального барьера для перемешивания вещества в пределах всей конфигурации, интересно отметить, что, по данным наблюдений реальных галактик и шаровых звёздных скоплений, распределение плотности в них оказывается довольно близким[8] к указанному здесь закону «$-5/2$». Следовательно, у большинства галактик потенциальный барьер для перемешивания вещества оказывается очень низким. Отсутствие же потенциального барьера может быть простым следствием так называемой бурной релаксации по Линден-Беллу [68]. Если это так, то именно бурная релаксация и является главной причиной образования тех радиальных профилей распределения вещества в звёздных системах, которые повсюду наблюдаются.

[8] Сравните с распределением плотности по астрофизическому закону (15.67).

С физической точки зрения заметим также, что распределение плотности по закону «$-\,5/2$» близко к таковому в политропном газовом шаре с индексом $n = 5$, когда радиус шара стремится к бесконечному и внешняя часть гравитационной энергии обращается в нуль (см. ниже формулу (8.146)).

§ 8.3. Гравитационная энергия некоторых эллипсоидальных тел

Нахождению гравитационной энергии тел в этой книге целиком посвящены главы 12, 13 и 14. Однако отдельные результаты в этой большой и сложной проблеме мы изложим уже сейчас.

1. *Элементарный гомеоид и фокалоид*

Среди оболочек простейшей будет элементарный гомеоид, на поверхности и внутри которого потенциал равен постоянной (5.70); для него с помощью формулы (8.8) получим[9]

$$dW_{\text{гом}} = -\frac{1}{4} I\,(1)\,\frac{G\,(dM_{\text{гом}})^2}{a_1 a_2 a_3}\,, \tag{8.42}$$

где $I\,(1)$ дано в (1.39); для сжатого и вытянутого сфероидальных гомеоидов величина I дана в (1.44) и (1.45).

Энергия элементарного фокалоида, потенциал на поверхности которого даётся формулой (5.94) при $\lambda = 0$, будет равна

$$dW_{\text{фок}} = -\frac{3}{10}\frac{G\,(dM_{\text{фок}})^2}{a_1 a_2 a_3}\left(I(1) - \frac{1}{\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \dfrac{1}{a_3^2}}\right). \tag{8.43}$$

Поскольку масса оболочек не равна нулю, то и гравитационная энергия их также будет конечной величиной.

З а д а ч а 8.3. *Доказать, что в общем случае гравитационная энергия однородной элементарной эллипсоидальной оболочки с поверхностью $S\,(m)$ равна*

$$dW_{\text{об}}\,(m) = -\frac{\pi G \rho}{2}\left(dI\,(m)\,dM_{\text{об}}\,(m) - \sum_{i=1}^{3} dA_i\,(m)\,dI_{ii}\,(m)\right), \tag{8.44}$$

где используются выражения (5.17), (5.18) *и* (5.99), (5.100).

2. *Однородный эллипсоид, шар и сфероид*

Для сплошного однородного эллипсоида с внутренним потенциалом (6.11) результат известен: прямое применение формулы (8.3) даёт выражение (1.65).

Из (1.65), с учётом конкретного значения I из формул (1.44) или (1.45), следуют выражения гравитационной энергии сразу для трёх однородных тел: шара $(R = a_1 = a_2 = a_3)$, см. формулу (1.64), а также сжатого $(a_1 = a_2 \geqslant a_3)$ и вытянутого $(a_1 \geqslant a_2 = a_3)$ сфероидов, см. формулу (1.66).

---

[9] Заметим, что в точках самого гомеоида $\varphi = \text{const}$ и вычисление W по формуле (8.25) даёт нуль. Но этот результат не соответствует истине. Действительно, постоянство потенциала на поверхности вовсе не означает равенство нулю на ней его производных, и для правильного применения данной формулы следует найти на поверхности оболочки градиент потенциала.

Представляет интерес разложить в ряд по степеням e выражения для гравитационной энергии сжатого и вытянутого однородных сфероидов. Для этого необходимо учесть то тонкое обстоятельство, что у сжатого и вытянутого сфероидов (соответственно) большая полуось a_1 следующим образом выражается через эксцентриситет e и радиус эквивалентной сферы R_0:

$$a_1 = R_0\left(1-e^2\right)^{-\frac{1}{6}}; \quad a_1 = R_0\left(1-e^2\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{8.45}$$

Подставляя эти выражения a_1 в формулы (1.66), получим

$$W_{\text{сжат}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0}\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{6}}\frac{\arcsin e}{e} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0}\left(1-\frac{1}{45}e^4-\frac{62}{2835}e^6-\frac{11}{567}e^8-\ldots\right); \tag{8.46}$$

$$W_{\text{выт}} = -\frac{3}{10}\frac{GM^2}{R_0}\frac{\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{3}}}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0}\left(1-\frac{1}{45}e^4-\frac{64}{2835}e^6-\frac{58}{2835}e^8-\ldots\right). \tag{8.47}$$

Задача 8.4. *Получить разложения* (8.46) *и* (8.47).

Важно обратить внимание на следующее. Согласно формуле (1.65), *эллипсоиды, имеющие одинаковую массу и одинаковый центральный потенциал $\pi G\rho I$, хотя и обладающие при этом разной геометрической формой, будут иметь, тем не менее, равные гравитационные энергии*. Подчеркнём: указанное равенство гравитационных энергий выполняется для однородных эллипсоидальных тел разной формы! Ранее это интересное свойство однородных гравитирующих эллипсоидов не было известно.

Выясним, какие конкретно геометрические места на плоскости $(a_2/a_1, a_3/a_1)$ занимают эллипсоиды с одинаковой ньютоновской энергией. Для ответа на поставленный вопрос составим, используя формулы (1.65) и (1.64), отношение энергий

$$\gamma = \frac{W_{\text{эл}}}{W_{\text{шара}}} = (x\cdot y)^{1/3}\,\frac{\mathrm{F}\left(\arccos y, \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}\right)}{\sqrt{1-y^2}}, \tag{8.48}$$

где $\mathrm{F}(\ldots)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, и для краткости обозначено $x = a_2/a_1$, $y = a_3/a_1$. Очевидно, по смыслу здесь $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Геометрические места точек $W_{\text{эл}} = \text{const}$ мы ищем, таким образом, на плоскости отношений полуосей трёхосного эллипсоида. В частности, при $x = y$ и $x = 1$ (т. е., соответственно, для вытянутого и сжатого сфероидов)

$$\gamma = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}; \quad \gamma = \frac{y^{\frac{1}{3}}\arccos y}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{8.49}$$

Вид семейства кривых $y = y(x)$ одинаковой гравитационной энергии однородного трёхосного эллипсоида (объём и масса которого фиксированы), рассчитанных из неявного уравнения (8.48) при некоторых значениях γ, показан на рис. 61. Любопытно отметить, что для любого $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ существует как вытянутый, так и сжатый сфероид. Переход от объёмных тел к дискам на этой диаграмме невозможен.

3. *Дисковый предел однородных эллипсоидов*

Совершая предельный переход $\frac{a_3}{a_1} \to 0$ в выражении (1.65) и учитывая (6.16), получим

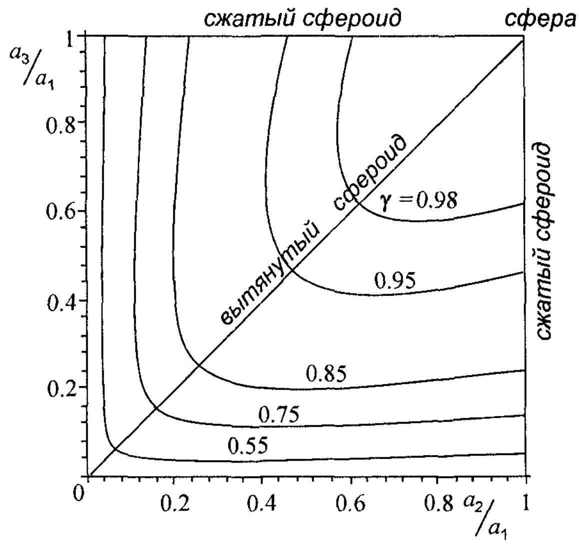


Рис. 61. Семейство кривых одинаковой гравитационной энергии однородного трёхосного эллипсоида (его объём и масса фиксированы). Цифры над кривыми дают величину отношения $\gamma = \dfrac{W_{\text{эл}}}{W_{\text{шара}}}$ нормированной энергии эллипсоида. Вытянутые сфероиды находятся на главной диагонали, сжатые — на правой и верхней сторонах квадрата. Шар, в согласии с теоремой Ляпунова [35], имеет наибольшее (по модулю) значение потенциальной энергии

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{5}\frac{M_{\text{д}}^2 G}{a_1}\mathrm{K}\,(e)\,, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}}, \tag{8.50}$$

где $\mathrm{K}\,(e)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, *энергию неоднородного эллиптического диска с плотностью* (6.93) (см. § 6.6, случай 1).

При софокусном дисковом переходе от однородного эллипсоида (см. § 6.6, случай 2) гравитационную энергию такого диска можно прямо получить из (8.50) заменой там $a_1 \to \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ и e на $\widetilde{e}$ из (6.104)

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{5}\frac{M_{\text{д}}^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\mathrm{K}\,(\widetilde{e})\,, \quad \widetilde{e} = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}}. \tag{8.51}$$

Любопытно заметить: вследствие бóльшего ужатия эллипсоида в диск в софокусном случае (очевидно, софокусный кружок имеет мéньший радиус в сравнении со случаем диска при переходе $\frac{a_3}{a_1} \to 0$), эта величина энергии превышает энергию (8.50).

4. *Политропный шар*

Для неоднородных газовых шаров, а иногда и для сферических звёздных систем в астрофизике применяется формула Риттера и Бетти [48]

$$W_{\text{шара}} = -\frac{3}{5-n}\frac{M^2 G}{R}, \tag{8.52}$$

где n — показатель политропы. В частности, при $n = 0$ возвращаемся к энергии однородного шара (1.64). Для Солнца и для газовых звёзд конкретно принимают $n = 3$. При $n = 5$ расходимость величины гравитационной энергии в (8.52) лишь кажущаяся: на самом деле радиус R конфигурации при этом стремится к бесконечности, так что произведение $\lim\limits_{n\to 5}\left[(n-5)\,R\right]$ является конечным (заметим, что политропа с $n = 5$ описывает так называемый шар Пламмера, о нём см. таблицу 3 в конце книги). О политропных шарах см. также § 8.8.

5. *Оболочки конечной толщины*

а) *Гомеоид*

Задача 8.5. *Дан однородный гомеоид конечной толщины, ограниченный поверхностями $S(1)$ и $S(m)$. Вычислить его гравитационную энергию.*

Решение. Мысленно заполним внутреннюю полость рассматриваемого гомеоида однородным веществом той же плотности и применим ко всему эллипсоиду формулу (8.21). Имеем

$$W_{\text{эл}}(1) = W_{\text{эл}}(m) + W_{\text{гом}}(m) - \rho \int\limits_{T_1} \varphi_2 dV. \tag{8.53}$$

Обратим внимание, что взаимную энергию частей системы — толстого гомеоида и внутреннего эллипсоида с поверхностью $S(m)$ — удобно вычислять именно по указанному в (8.53) последнему выражению; все расчёты тогда упрощаются, так как потенциал в полости гомеоида

$$\varphi_2 \equiv (\varphi_{\text{гом}})_{\text{внутр}} = \pi G\rho\left(1 - m^2\right) I(1) \tag{8.54}$$

не зависит от координат и выносится за знак объёмного интеграла. С учётом сказанного, а также выражения (1.65) и очевидного соотношения

$$M_{\text{гом}}(m) = \left(1 - m^3\right) M(1), \tag{8.55}$$

получаем в итоге требуемый результат:

$$W_{\text{гом}}(m) = -\frac{3}{10} I(1) \frac{GM^2_{\text{гом}}(m)}{a_1a_2a_3} \cdot \frac{1 - \frac{5}{2}m^3 + \frac{3}{2}m^5}{\left(1 - m^3\right)^2}. \tag{8.56}$$

▼

Из формулы (8.56) в пределе $m \to 0$ следует выражение гравитационной энергии (1.65) для сплошного однородного эллипсоида, а в пределе $m \to 1$ — выражение (8.42) для элементарного тонкого гомеоида.

б) *Фокалоид*

Задача 8.6. *Найти гравитационную энергию однородной фокалоидной оболочки конечной толщины.*

Решение.

Уравнение граничных поверхностей толстой фокалоидной оболочки имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2m^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2m^2 - a_1^2 + a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_1^2m^2 - a_1^2 + a_3^2} = 1, \tag{8.57}$$

где для внешней поверхности $m = 1$, для внутренней $\sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} < m < 1$. При однородной плотности оболочки потенциал в ее полости равен

$$\varphi_{\text{внутр}}(m, \mathrm{x}) = \pi G\rho\left(I' - A_1'x_1^2 - A_2'x_2^2 - A_3'x_3^2\right), \tag{8.58}$$

где

$$I' = I(1) - I_1(m); \quad A_i' = A_i(1) - A_i(m), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{8.59}$$

Искомая величина $W_{\text{фок.об.}}$ входит в уравнение типа (8.53) и мы находим

$$W_{\text{фок. об.}}(m) = -\frac{1}{5}\pi G\rho^2 \left\{\frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 I(1) - V(m) I(m) + \right.$$
$$\left. + V(m)\left[5I' - a_1^2 m^2 A_1' - \left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2\right) A_2' - \left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2\right) A_3'\right]\right\}, \qquad (8.60)$$

где

$$V(m) = \frac{4}{3}\pi a_1 m \sqrt{\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2\right)\left(a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2\right)} \qquad (8.61)$$

— объем полости оболочки. Здесь величины $I_1(1)$, $A_1(1)$, $A_2(1)$ и $A_3(1)$) берутся из формул (6.16), (6.18), (6.19), (6.20) соответственно, а $I_1(m)$ и все $A_i(m)$) получаются из данных заменой полуосей

$$a_1 \to a_1 m\,;\ a_2 \to \sqrt{a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_2^2};\ a_3 \to \sqrt{a_1^2 m^2 - a_1^2 + a_3^2}. \qquad (8.62)$$

▼

в) *Оболочки со сферическими поверхностями.*

Простой и интересной является следующая задача.

Задача 8.7. *Найти энергию однородной оболочки конечной толщины, представленной разностью двух не концентрических сфер с радиусами* $R_1 > R_2$ (рис. 62). *Расстояние между центрами сфер равно* Δ, *причём* $0 \leqslant \Delta \leqslant R_1 - R_2$.

Решение. Внутренний потенциал внешней сферы даётся формулой (6.36). При переносе начала координат вдоль оси Ox_3 в центр малой сферы O_1 этот потенциал можно записать в виде (6.38). Внутренний потенциал в полости однородной оболочки, ограниченной двумя сферами, равный разности внутренних потенциалов обоих шаров, даётся тогда формулой (6.39).

Таким образом, взаимная энергия однородного внутреннего шара с оболочкой оказывается равной

$$W_{\text{вз}} = -\rho \iiint\limits_{T_2} \varphi_{\text{об}} dV = -\frac{8}{9}\pi^2 G\rho^2 R_2^3\left[3\left(R_1^2 - R_2^2\right) - \Delta^2\right]. \qquad (8.63)$$

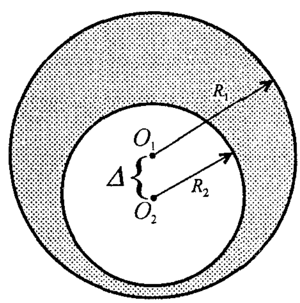


Рис. 62. Однородный шар со сферической каверной. Центры внешней и внутренней поверхностей оболочки в общем случае не совпадают

Представим теперь внешний шар состоящим из внутреннего шара и указанной однородной оболочки; применяя к этой системе двух тел формулу (8.23), находим гравитационную энергию самой оболочки

$$W_{\text{об}} = -\frac{8}{45}\pi^2 G\rho^2\left[6R_1^5 + 9R_2^5 - 15R_1^2 R_2^3 + 5\Delta^2 R_2^3\right]. \qquad (8.64)$$

▼ Важнейшие частные случаи формулы (8.64): при $\Delta = \Delta_{\min} = 0$, когда сферы становятся концентрическими, оболочка становится эквидистантной и

$$W_{\text{об}} = -\frac{8}{15}\pi^2 G\rho^2\left[2R_1^5 + 3R_2^5 - 5R_1^2 R_2^3\right]; \qquad (8.65)$$

если же $\Delta = \Delta_{\max} = R_1 - R_2$, то одна сфера касается изнутри другой и при этом образуется предельная фигура «лунки» со сведёнными «рожками», потенциальная энергия которой будет равна

$$W_{\text{об}} = -\frac{16}{45}\pi^2 G\rho^2 \left[3R_1^5 + 7R_2^5 - 5R_1 R_2^3 (R_1 + R_2)\right]. \tag{8.66}$$

В дальнейшем (см. § 12.10) этот пример окажет неоценимую помощь для проверки в предельном случае одной новой интересной формулы.

Кроме того, при $R_2 = 0$ внутренняя полость заполняется и мы имеем в (8.64) энергию однородного шара (1.64).

6. *Эллиптический цилиндр*

Обратимся к нахождению гравитационной энергии на единицу длины для бесконечного однородного эллиптического цилиндра. Подчеркнём, что для решения этой задачи в литературе обычно делается предельный переход в выражении для энергии однородного эллипсоида, устремляя одну из полуосей к бесконечности. Однако энергии эллипсоида и цилиндра принципиально не могут быть сравнимы между собой, так как при указанном переходе потенциал (см. § 1.2) и энергия расходятся. Требуется перенормировка (исключение бесконечностей) энергии, после которой цилиндры можно сравнивать между собой по этой величине.

Здесь мы получим выражение гравитационной энергии цилиндра иным, прямым способом, для чего обратимся к формуле (8.6). Ясно, что последний член в ней надо сразу отбросить из-за его расходимости. Оставшийся интеграл берётся по всей плоскости. Интегрируя сначала по площади сечения цилиндра (4.1) и используя при этом компоненты силы (4.8), получим

$$W_1 = -2M^2 G \frac{a_2 a_3}{(a_2 + a_3)^2}. \tag{8.67}$$

Интеграл по остальной площади вычисляется с учётом компонент силы (4.3), (4.4); выглядит этот интеграл следующим образом:

$$W_2 = -4\pi G\rho^2 \frac{a_2^2 a_3^2}{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2} \iint\limits_{\lambda \geqslant 0} \left(\sqrt{a_2^2 + \lambda} - \sqrt{a_3^2 + \lambda}\right) dS. \tag{8.68}$$

После перехода к специальным координатам эллиптического цилиндра

$$\begin{gathered} x_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}\,\operatorname{ch} v \sin u, \quad x_3 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}\,\operatorname{sh} v \cos u, \\ dS = \left(a_2^2 - a_3^2\right)\left(\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u\right) du dv; \\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi; \quad \operatorname{arth}(a_3/a_2) \leqslant v < \infty, \end{gathered} \tag{8.69}$$

находим

$$W_2 = -4M^2 G \int\limits_{\operatorname{arth}(a_3/a_2)}^{\infty} (\operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v)^2 \left(\operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v\right) dv. \tag{8.70}$$

Этот интеграл вычисляется с помощью подстановки $\operatorname{th} v = t$:

$$W_2 = M^2 G \left[2\frac{a_2 a_3}{(a_2 + a_3)^2} + \ln\frac{a_2 + a_3}{a_2 - a_3} - \lim_{x \to 1}\left(\ln\frac{2}{1 - x}\right) - \frac{1}{2}\right]. \tag{8.71}$$

Постоянная $-\frac{1}{2}$ роли не играет, так что

$$W_1 + W_2 = M^2 G \left[\ln\frac{a_2 + a_3}{a_2 - a_3} + \lim_{x \to 1} \ln(1 - x)\right]. \tag{8.72}$$

От расходимости в последнем выражении корректно избавляемся, поскольку расходимость первого члена в пределе $a_2 \to a_3$ кругового цилиндра компенсируется расходимостью во втором члене: $\ln \dfrac{1-x}{1-x} = 0$. В итоге гравитационная энергия цилиндра на единицу длины равна

$$W_{\text{цил}} = M^2 G \ln (a_2 + a_3) . \tag{8.73}$$

§ 8.4. Замечания об энергии гомеоидов и фокалоидов

Согласно формулам (1.65) и (8.56), отношение энергии однородного толстого гомеоида к энергии однородного эллипсоида при конгруэнтных внешних поверхностях не зависит от размеров и формы этих тел и равно

$$\frac{W_{\text{гом}}(m)}{W_{\text{эл}}(1)} = \left(\frac{M_{\text{гом}}(m)}{M_{\text{эл}}(1)}\right)^2 \frac{1 - \frac{5}{2}m^3 + \frac{3}{2}m^5}{\left(1 - m^3\right)^2} . \tag{8.74}$$

В частности, если берём тела одинаковой массы, отношение энергий изменяется от $\frac{5}{6}$ (гомеоид бесконечно тонкий) до 1 (гомеоид превращается в сплошной эллипсоид). Отсюда ясно: при равномерном распылении части вещества внутри полости однородного гравитирующего гомеоида произвольной толщины выделяется некоторая часть энергии, которую легко найти с помощью формулы (8.74). Если вещество (например, жидкость) может проникать внутрь эквиповерхности, то это обязательно и произойдёт, т. е. эквипотенциальный слой в этом случае будет неустойчивым. И наоборот: *образование каверн в гравитирующем теле является энергетически не выгодным.* Любопытно обращение этой задачи.

Как известно, закон Кулона подобен закону тяготения Ньютона, и поэтому формулы для гравитационной энергии с точностью до знака и единиц измерения пригодны для нахождения электростатической энергии заряженных тел. Представим теперь, что эллипсоид из диэлектрика с однородным распределением зарядов одного знака по какой-либо внешней причине становится проводящим. Произойдёт передвижение зарядов к поверхности эллипсоида с образованием на нём уровенного слоя в виде элементарного гомеоида с однородным объёмным распределением источников поля. При этом, ввиду сохранения заряда, итоговое отношение электростатических энергий будет равно $\frac{5}{6}$. Очевидно, энергия $\frac{1}{6}W_{\text{эл}}$ в точности равна той работе, которую совершает электрическое поле в данном примере. Очевидно, *уровенное распределение электрических зарядов устойчиво и образование электрически нейтральных каверн энергетически выгодно.*

Задача 8.8. *Вычислить энергию, необходимую для выметания вещества сплошного однородного гравитирующего эллипсоида в элементарный фокалоид на его поверхности, и показать, что*

$$\frac{dW_{\text{фок}}}{W_{\text{эл}}} = 1 - \frac{1}{I\left(\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \dfrac{1}{a_3^2}\right)} . \tag{8.75}$$

Из последней формулы видно, что работа по выметанию зависит от формы эллипсоида. Так, в частном случае сжатого сфероида формула (8.75) принимает вид

$$\frac{dW_{\text{фок}}}{W_{\text{эл}}} = 1 - \frac{1-e^2}{2\frac{\arcsin e}{e}\left(3-2e^2\right)}. \tag{8.76}$$

Из (8.76) легко видеть, что для сфероидов с разным сжатием работа по выметанию вещества в элементарную фокалоидную оболочку на их поверхность оказывается различной: в самом деле, по мере перехода от шара через сфероиды к диску слева направо пробегается неравенство

$$\frac{5}{6} \leqslant \frac{dW_{\text{фок}}}{W_{\text{эл}}} \leqslant 1. \tag{8.77}$$

§ 8.5. Гравитационная энергия и вириал слоисто-неоднородного эллипсоида

В §§ 6.9–6.11 были получены выражения и изучены свойства потенциалов слоисто-неоднородных эллипсоидов. Однако для теоретических и практических исследований надо знать не только потенциалы, но и другие величины, характеризующие слоисто-неоднородный эллипсоид. Ранее, заметим, масса и тензор моментов инерции уже были получены в (6.117) и (6.118). Более сложные свойства эллипсоида характеризует его тензор гравитационной энергии.

8.5.1. Тензорный потенциал

Прежде всего нам понадобятся индексные символы Чандрасекхара

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty \frac{dv}{\left(a_i^2+v\right)\left(a_j^2+v\right)\left(a_k^2+v\right)\Delta(v)}, \\ B_{ijk} &= a_1a_2a_3\int\limits_0^\infty \frac{v\,dv}{\left(a_i^2+v\right)\left(a_j^2+v\right)\left(a_k^2+v\right)\Delta(v)}, \end{aligned} \tag{8.78}$$

обобщающие величины A_i из (1.38); для них, например,

$$A_{ij} = \frac{A_i - A_j}{a_j^2 - a_i^2}, \quad B_{ij} = \frac{A_ia_i^2 - A_ja_j^2}{a_i^2 - a_j^2}; \tag{8.79}$$

и тензорное обобщение потенциала (1.9)

$$\varphi_{ij} = G\int\limits_V \rho(x')\frac{\left(x_i - x_i'\right)\left(x_j - x_j'\right)}{\left|x - x'\right|^3}dV', \tag{8.80}$$

причём полный потенциал равен свертке

$$\varphi = \varphi_{ii}. \tag{8.81}$$

Заменой a_i на $a_i(m)$ мы получим теперь обобщения этих символов A_{ij} на $A_{ij}(m)$. Тогда внутри однородного эллипсоида тензорный потенциал принимает вид (запишем это выражение сразу для эллипсоида с границей $S(m)$)

$$\varphi_{ij}^{(0)}(m) = \pi G \rho \left[2\left(A_j(m) - a_i^2(m) A_{ij}(m)\right) x_i x_j + \right.$$
$$\left. + a_i^2(m)\delta_{ij}\left(A_i(m) - \sum_{l=1}^{3} A_{il}(m) x_l^2\right)\right]. \quad (8.82)$$

8.5.2. Гравитационная энергия

Переходим к главному. Исходя из физического смысла понятия ньютоновской энергии (работа по рассеянию!) полезно заметить, что выражение для гравитационной энергии будет иметь самый простой вид, когда конфигурация собирается переносом из бесконечности *слоёв равной плотности, начиная с наружного.* Символическая формула, выражающая этот подход, выглядит так [69]:

$$W = \int_m \left[\int_{m'<m} dV' \rho(\boldsymbol{x}')\, d\varphi(\boldsymbol{x}') \right], \quad (8.83)$$

где $d\varphi(\boldsymbol{x}')$ берётся из (6.124), причём $\varphi^{(0)}(m)$ дано в (6.132). Проведённые нами вычисления дают

$$W(m) = -\pi G \int_0^1 dm^2 \rho(m^2) \left[M(m)\frac{dI(m)}{dm^2} - N_{1;\,2}(m)\frac{dA_1}{dm^2} + N_{2;\,3}(m)\frac{dA_3}{dm^2} \right]. \quad (8.84)$$

Это — *гравитационная энергия слоисто-неоднородного эллипсоида с геометрической границей $S(m)$ при общем законе стратификации поверхностей равной плотности.* Формула (6.118) состоит из трёх членов; здесь все величины нам уже известны, а разности моментов инерции $N_{k;\,l}(m)$ равны

$$N_{k;\,l}(m) = I_{kk}(m) - I_{ll}(m), \quad \text{где } k, l = 1, 2, 3. \quad (8.85)$$

При гомотетических слоях формула (8.84) заметно упрощается

$$W(m) = -\pi G \cdot I \cdot \int_0^{m^2} \rho(m^2)\, M(m)\, dm^2, \quad (8.86)$$

где I дано в (1.39), а масса промежуточного эллипсоида вычисляется по простой формуле (вместо (6.117))

$$M(m) = 4\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^m m^2 \rho(m)\, dm\,. \quad (8.87)$$

В частности, при $\rho = \text{const}$ и $m = 1$ из формулы (8.86) сразу следует известное выражение (1.65) гравитационной энергии для однородного эллипсоида.

8.5.3. Тензор гравитационной энергии

Действуя аналогично и используя вместо $\varphi^{(0)}(m)$ тензорное обобщение (8.82), находим теперь *тензор гравитационной энергии* [69] для слоисто-неоднородного эллипсоида:

$$W_{ij}(m) = -\pi G\delta_{ij}\int\limits_0^{m^2} dm^2\rho\left(m^2\right)\left[2I_{ii}(m)\frac{d}{dm^2}\left(A_i(m) - \right.\right.$$
$$\left. -m^2\alpha_i^2(m)\,a_i^2A_{ii}(m)\right) + M(m)\frac{d}{dm^2}\left(m^2\alpha_i^2(m)\,a_i^2A_i(m)\right) -$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{3}I_{ll}(m)\frac{d}{dm^2}\left(m^2\alpha_i^2(m)\,a_i^2A_{il}(m)\right)\right]. \quad (8.88)$$

Свёртка $(= W_{ii})$ даёт полную энергию W эллипсоида из (8.84).

Задача 8.9. *Покажите, что для подобных слоёв выражение* (8.88) *становится таким:*

$$W_{ij}(m) = -\pi G\delta_{ij}a_i^2\int\limits_0^{m^2} dm^2\rho\left(m^2\right)\left[-m^2A_{ii}(m) + A_iM(m) - \sum_{l=1}^{3}A_{il}(m)I_{ll}(m)\right]. \quad (8.89)$$

Свёртка этого тензора даёт известное нам выражение (8.86).

Например, для однородного эллипсоида при $m = 1$ из (8.89) следует хорошо известное

$$W_{ij} = -2A_iI_{ij}, \text{ где } I_{ij} = \frac{1}{5}Ma_i^2\delta_{ij}. \quad (8.90)$$

8.5.4. Тензор вириала подсистемы Z_{ij}

Тензорным обобщением вириала гравитационных сил (8.25) будет

$$Z_{ij}(m) = \int\limits_{V\in S(m)} \rho(\boldsymbol{x})\,x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dV. \quad (8.91)$$

Когда сила притяжения в точке x_i создаётся гравитирующим веществом из того же объёма, на которое распространено интегрирование и в (8.91), имеет место равенство Чандрасекхара (ср. его с (8.26))

$$Z_{ij}(m) = W_{ij}(m). \quad (8.92)$$

Найдём теперь *тензор вириала для эллипсоидальной подсистемы*, ограниченной поверхностью $S(m)$. Важно ещё раз подчеркнуть, что равенство (8.92) уже не будет, вообще говоря, выполняться[10], ведь φ в подынтегральном выражении (8.91) будет создаваться массой всего эллипсоида с границей $S(m = 1)$, в то время как интегрирование в (8.91) проводится только по объёму выделенной подсистемы. Представим полный потенциал суммой

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi^I(\boldsymbol{x}) + \varphi^{II}(\boldsymbol{x}), \quad (8.93)$$

[10] Смотрите, однако, обнаруженный автором особый случай в § 8.2, являющийся исключением из этого общего правила.

где φ^I и φ^{II} — вклады соответственно от самой эллипсоидальной подсистемы с границей $S(m)$ и от внешней для неё оболочки, ограниченной поверхностями $S(m)$ и $S(m=1)$. Величина $Z_{ij}(m)$ будет состоять также из двух членов. Первый член равен тензору гравитационной энергии эллипсоида с границей $S(m)$, рассматриваемого без оболочки; этот тензор

$$Z_{ij}^I(m) = W_{ij}(m) \tag{8.94}$$

находится по формуле (8.88).

Второй член тензора вириала равен

$$Z_{ij}^{II}(m) = \int\limits_{V\in S(m)} \rho(\boldsymbol{x})\, x_i \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial x_j} dV, \tag{8.95}$$

где в качестве φ^{II} нужно взять потенциал в полости оболочки (6.134). Находим его:

$$Z_{ij}^{II}(m) = -2\pi G\delta_{ij} I_{ii}(m) \int\limits_{m^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{dA_i}{dm^2}. \tag{8.96}$$

Объединяя (8.94) и (8.96), получим

$$Z_{ij}(m) = W_{ij}(m) - 2\pi G\delta_{ij} I_{ii}(m) \int\limits_{m^2}^{1} dm^2 \rho\left(m^2\right) \frac{dA_i}{dm^2}. \tag{8.97}$$

Итак, *тензор вириала эллипсоидальной подсистемы в общем случае, когда сплюснутость слоёв изменяется с расстоянием от центра, состоит из двух членов*[11]. Причина, конечно, в том, что в общем случае потенциал в полости от оболочки $\varphi^{II}(\boldsymbol{x})$ из (8.93) — величина не постоянная, а является функцией от координат. *И только в частном случае, когда слои оболочки гомотетичны, все $dA_i/dm^2 = 0$, и тензор вириала в точности равен тензору гравитационной энергии этой подсистемы, рассматриваемой отдельно от оболочки.*

8.5.5. Свёртка Z_{ij}

Свертывая (8.97), находим *полный вириал подсистемы*

$$Z(m) = W(m) + 2\left[-\widetilde{A}_1(m) N_{1;2}(m) + \widetilde{A}_3(m) N_{2;3}(m)\right], \tag{8.98}$$

где $W(m)$ — гравитационная энергия подсистемы, рассматриваемой без оболочки; этот член находится по формуле (8.84) при замене верхнего предела 1 на m^2. При выводе (8.98) мы учли, что для данных в (6.141) величин $\widetilde{A}_i(m)$ выполняется соотношение

$$\widetilde{A}_1(m) + \widetilde{A}_2(m) + \widetilde{A}_3(m) = 0. \tag{8.99}$$

Запись вириала в форме (8.98) удобна тем, что из полученных выше неравенств (6.111) и (6.112) можно определённо сказать: если с удалением от центра слои увеличивают сплюснутость во всех трёх главных сечениях, то для подсистемы разность[12] $Z(m) - W(m)$ будет больше нуля; если же слои с удалением от центра сферизуются, то эта разность меньше нуля; равна нулю — если слои гомотетичны.

[11] Таким образом, в рассматриваемом случае нельзя отождествлять тензор вириала подсистемы $Z_{ij}(m)$ с её тензором гравитационной энергии $W_{ij}(m)$, как это сделано в статье Дж. Дж. Бинни [55] (см. Замечания в конце главы 15 к § 15.6).

[12] Обратите внимание: эта разность не эквивалентна введённой в (8.29), поскольку $W(r)$ в последней находилась при учёте притяжения вышележащих слоёв.

§ 8.6. Гравитационная энергия обобщённого гомеоида и фокалоида

Оболочки нового типа — обобщённый гомеоид и фокалоид, были введены в § 5.13. Гравитационная энергия обобщённого гомеоида оказывается связанной с энергией того однородного тела, на котором лежит этот слой. Действительно, подставляя выражения (5.105) и (5.115) в формулу (8.8), с учётом (11.11) имеем

$$W_{\text{сл}} = \frac{1}{18}\left\{10\,W_{\text{тела}} + \rho \oiint\limits_S \boldsymbol{x}\,\mathrm{grad}\varphi_{\text{т}}\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\,dS\right\}. \tag{8.100}$$

Применяя к последнему интегралу формулу Остроградского — Гаусса, после некоторых преобразований получим *гравитационную энергию обобщённого гомеоида*

$$W_{\text{сл}} = \frac{7}{9}W_{\text{тела}} + \frac{1}{18}\rho\iiint\limits_V (\boldsymbol{x}\nabla)^2\,\varphi_{\text{т}}\,dV. \tag{8.101}$$

Здесь $W_{\text{тела}}$ и $\varphi_{\text{т}}$ — гравитационная энергия и внутренний потенциал исходного однородного тела, на поверхности которого создан слой; а

$$(\boldsymbol{x}\nabla)^2\,\varphi_{\text{т}} = x_i x_j \frac{\partial^2\varphi_{\text{т}}}{\partial x_i \partial x_j} = r^2\frac{\partial^2\varphi_{\text{т}}}{\partial r^2} \tag{8.102}$$

— производная второго порядка от $\varphi_{\text{т}}$ по направлению единичного вектора $\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$.

Работа по выметанию вещества тела в слой будет равна

$$A = W_{\text{тела}} - W_{\text{сл}}, \tag{8.103}$$

или, в рассматриваемом случае,

$$A = \frac{2}{9}W_{\text{тела}} - \frac{1}{18}\rho\iiint\limits_V (\boldsymbol{x}\nabla)^2\,\varphi_{\text{т}}\,dV. \tag{8.104}$$

Для проверки формулы (8.101) возьмём потенциал однородного эллипсоида (6.14). В этом случае обобщённый гомеоид превращается в обычный гомеоид. Как легко убедиться, для потенциала эллипсоида

$$(\boldsymbol{x}\nabla)^2\,\varphi_{\text{т}} = 2\,(\varphi_{\text{т}} - \pi G\rho I) \leqslant 0. \tag{8.105}$$

Подставляя эту вторую производную в интеграл в правой части (8.101) и интегрируя, находим

$$\rho\iiint\limits_V (\boldsymbol{x}\nabla)^2\,\varphi_{\text{т}} = W_{\text{эл}}. \tag{8.106}$$

Здесь $W_{\text{эл}}$ — гравитационная энергия однородного эллипсоида, данная в (1.65). Поэтому гравитационная энергия элементарного гомеоида будет равна

$$W_{\text{гом}} = \frac{5}{6}W_{\text{эл}}, \tag{8.107}$$

и этот результат полностью согласуется со сказанным в § 8.4.

По-видимому, для *неэллипсоидальных гомеоидальных оболочек* выполняется неравенство

$$W_{\text{гом}} < \frac{5}{6} W_{\text{тела}}, \tag{8.108}$$

однако строгого доказательства этого важного результата у нас пока нет.

Гравитационная энергия обобщённого фокалоида равна

$$W_{\text{фок}} = W_{\text{тела}} + \frac{1}{2} G\rho^2 Q, \tag{8.109}$$

где

$$Q = \iiint\limits_{V_{\text{т}}} s dV = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{V_{\text{т}}} (\operatorname{grad} s)^2 \, dV. \tag{8.110}$$

Работа по выметанию вещества тела в обобщённый фокалоид, согласно (8.103) и (8.109), равна

$$A = -\frac{1}{2} G\rho^2 Q. \tag{8.111}$$

Знак «минус» здесь означает, что работа затрачивается против сил гравитационного поля.

§ 8.7. Об экстремальности гравитационной энергии однородного сжатого сфероида

Шар передаёт королевские полномочия сжатому сфероиду

Функционал Q из (8.110) имеет несколько важных экстремальных свойств [50]:

1) среди однородных тел одинаковой массы и плотности величина Q имеет абсолютный максимум только для шара;

2) функционал Q не имеет локального максимума;

3) среди всех тел с одинаковыми ρ, M и моментом инерции по отношению к плоскости $x_3 = 0$

$$I = \rho \iiint\limits_{V} x_3^2 \, dV, \tag{8.112}$$

величина Q достигает своего максимума только для сжатого сфероида.

Поэтому имеет место следующая теорема Антонова и Кондратьева [50]

Теорема 1. *Среди всех однородных тел, имеющих одинаковую массу M и момент инерции I относительно плоскости, проходящей через центр масс, однородный сжатый сфероид обладает максимальной (по модулю) гравитационной энергией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Применим метод доказательства от противного. Согласно этому методу предположим, что существует тело с заданными ρ, M и I, гравитационная энергия[13] W которого больше, чем энергия W^0 соответствующего сжатого сфероида, для которого также $Q = Q^0$:

$$W^0 < W. \tag{8.113}$$

Будем покрывать эту фигуру и сжатый сфероид слоями (5.128) один за другим. Такие слои, покрывающие фигуру, представляют собой *обобщённые* фокалоиды; на сфероид же наслаиваются обычные тонкие фокалоиды. Процесс покрытия слоями продолжается до тех пор, пока неравенство (8.113) не превратится в точное равенство. Это возможно в двух случаях: когда оба тела превращаются в сферу, или когда первое тело превратится в сжатый сфероид.

[13] При доказательстве этой теоремы под W понимается модуль этой величины.

Далее мы рассматриваем нормированные величины

$$I' = I \cdot M^{-5/3}, \quad W' = W \cdot M^{-5/3}, \quad Q' = Q \cdot M^{-5/3}, \tag{8.114}$$

а также эффективный эксцентриситет e как функции от переменной I'.

Как можно показать, в данной задаче мы имеем следующее линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dW'}{dI'} = \frac{\delta W'}{\delta I'} = \frac{W' - 3G\rho^2 Q'}{\dfrac{2\rho Q'}{2\pi} - 2I'}. \tag{8.115}$$

Для анализа данного уравнения представим его решение в форме

$$W' = \Psi\left(I'\right) H\left(M\right), \tag{8.116}$$

где

$$\frac{d\Psi}{dI'} = \frac{\Psi}{\dfrac{3\rho Q^0}{2\pi} - 2I'}. \tag{8.117}$$

Решение последнего уравнения легко находится

$$\Psi = \frac{\left(1 - e^2\right)^{1/6}}{e}. \tag{8.118}$$

Для функции H мы получаем уравнение

$$\frac{d\left(H - H^0\right)}{dM} = \frac{\rho}{2\pi M}\frac{W' - 4\pi G\rho I'}{Q'^0 - 2I'}, \tag{8.119}$$

где H^0 относится к сжатому сфероиду.

Отсюда находим, что

$$\frac{d\left(H - H^0\right)}{dH} \geqslant 0, \tag{8.120}$$

т. е.

$$\frac{dW'}{dM} \geqslant \frac{dW^0}{dM}. \tag{8.121}$$

Дальнейший ход доказательства теоремы является простым. Вспомним, что по доказательству от противного $W' > W^0$. Поэтому, в соответствии с неравенством (8.121), при покрытии слоями тела сжатого сфероида неравенство $W' > W^0$ должно всегда выполняться с запасом. Однако, это заключение «А» находится в очевидном противоречии с заключением «В», следующего из экстремальных свойств (1—3), изложенных выше: при покрытии слоями (5.128) как тело, так и сжатый сфероид неизбежно приближаются к сфере. Действительно, сфера может иметь только одно значение потенциальной энергии

$$W_0' = \frac{3G}{5\sqrt{5I'}}. \tag{8.122}$$

Для того, чтобы избежать указанного противоречия между заключениями «А» и «В», необходимо аннулировать неравенство (8.113) и считать, что

$$W_0 \geqslant W, \tag{8.123}$$

что и следовало доказать. ■

Этот результат обобщает замечательную теорему А. М. Ляпунова [35] об экстремальности потенциальной энергии однородного шара.

§ 8.8. Внутренняя и внешняя части гравитационной энергии тел

Физическим соображениям о работе, затрачиваемой на образование или заполнение каверн, можно придать более строгое математическое обоснование. Возвращаясь к формуле (8.4), заметим, что в ней первый член (*интегрирование по объёму тела*)

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{1}{8\pi G} \int\limits_{T} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV \tag{8.124}$$

можно рассматривать как *внутреннюю* часть гравитационной энергии тела, тогда второй член (*интегрирование по внешнему для тела пространству*)

$$W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{8\pi G} \int\limits_{R_e - T} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV = \frac{1}{8\pi G} \oint\limits_{S} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \tag{8.125}$$

(производная по внешней нормали) будет представлять её *внешнюю* часть. Очевидно, *полная гравитационная энергия тела есть сумма внутренней её части и внешней:*

$$W_{\text{полн}} = W_{\text{внутр}} + W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2} \int\limits_{T} \rho\,\varphi\, dV. \tag{8.126}$$

Задача 8.10. *Найти величины $W_{внешн}$ и $W_{внутр}$ для однородного (сжатого или вытянутого) сфероида с эксцентриситетом e.*

Решение.

Уравнение поверхности сфероида имеет вид

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \tag{8.127}$$

или в параметрической форме

$$r = a_1 \sin\theta, \quad x_3 = a_3 \cos\theta. \tag{8.128}$$

Для вычисления внешней части гравитационной энергии сфероида воспользуемся второй формулой в (8.125). В нашем случае элемент поверхности, как легко видеть, будет равен

$$ds = a_1 \sqrt{a_1^2 \cos^2\theta + a_3^2 \sin\theta} \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\lambda, \tag{8.129}$$

где θ и λ — полярный и азимутальный углы в сферической системе координат. Производную по нормали будем находить от внутреннего потенциала сфероида (1.43). С учетом (8.128) эта производная вычисляется уже на границе сфероида и имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{2\pi G \rho a_1 a_3}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\theta + a_3^2 \sin\theta}} \left(A_1 \sin^2\theta + A_3 \cos^2\theta\right). \tag{8.130}$$

Таким образом, имеем следующий интеграл для внешней части гравитационной энергии:

$$W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2}\pi^2 G\rho^2 a_1^2 a_3 \int\limits_0^\pi \left(A_1 \sin^2\theta + A_3\cos^2\theta\right)\left(I - A_1 a_1^2 \sin^2\theta - A_3 a_3^2 \cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta \tag{8.131}$$

(предварительно выполнено интегрирование по λ). После замены $x = \cos\theta$ этот интеграл легко берется и в итоге мы получим *внешнюю часть гравитационной энергии для произвольного однородного сфероида*:

$$W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{5}\pi G\rho M\left[I\left(1 + A_1\right) + A_1\left(A_3 - A_1\right)a_1^2\right], \tag{8.132}$$

где M — полная масса сфероида, а I — нормированный центральный потенциал.

Внутренняя же энергия сфероида находится по первой из формул (8.125) и оказывается равной

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{1}{10}\pi G\rho M\left(2A_1^2 a_1^2 + A_3^2 a_3^2\right) = -\frac{1}{5}\pi G\rho M\left[I\left(1 - A_1\right) + A_1 a_1^2\left(3A_1 - 2\right)\right]. \tag{8.133}$$

Конкретно, подставляя в найденные формулы выражения (1.44), после некоторых преобразований для сжатого сфероида, имеем

$$\begin{aligned} W_{\text{внешн}} = -\frac{3}{20}\frac{M^2G}{a_1}\Bigg\{ & -\sqrt{1-e^2}\,\frac{3-2e^2}{e^4}\left(\frac{\arcsin e}{e}\right)^2 + \\ & +2\left(2 + 3\frac{1-e^2}{e^4}\right)\frac{\arcsin e}{e} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{3-e^2}{e^4}\Bigg\}; \end{aligned} \tag{8.134}$$

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{3}{20}\frac{M^2G}{a_1}\left[\frac{A_1^2(e)}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{A_3^2(e)}{2}\sqrt{1-e^2}\right], \tag{8.135}$$

где коэффициенты $A_1(e)$ и $A_3(e)$ опять-таки из (1.44). Изменение отношения найденных величин с эксцентриситетом сфероида e показано на рис. 63.

Аналогично, для *вытянутого вдоль оси x_1 однородного сфероида* с учётом выражений (1.45) получим

$$\begin{aligned} W_{\text{внешн}} &= -\frac{3}{80}\frac{GM^2}{a_1 e^6}\Bigg[4e^2\left(-3 + 2e^2\right) + 4\mathrm{E}\left(3 - 3e^2 + 2e^4\right)\ln\frac{1+e}{1-e} - \\ &\qquad\qquad - \left(3 - 4e^2 + e^4\right)\ln^2\frac{1+e}{1-e}\Bigg]; \\ W_{\text{внутр}} &= -\frac{3}{80}\frac{GM^2}{a_1 e^6}\left[12e^2 - 8e^4 - 12\mathrm{E}\left(1 - e^2\right)\ln\frac{1+e}{1-e} + \left(3 - 4e^2 + e^4\right)\ln^2\frac{1+e}{1-e}\right]. \end{aligned} \tag{8.136}$$

▼

Замечание 2. В частном случае однородного шара $e = 0$ формулы (8.134) и (8.135) упрощаются и дают следующие величины (которые можно получить, конечно, и прямо из формул (8.124) и (8.125)):

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{1}{10}\frac{M^2G}{R}, \quad W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2}\frac{M^2G}{R}, \tag{8.137}$$

откуда следует интересный результат:

$$\mu = \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} = 5. \tag{8.138}$$

Замечание 3. Среди всех однородных тел результат для шара (8.138) представляет абсолютный минимум. Так, для самого́ сжатого сфероида указанное отношение медленно возрастает от 5 до 6 (рис. 63) при увеличении его эксцентриситета e от 0 до $e \approx 0.9$, и для бо́льших сжатий растёт уже очень быстро.

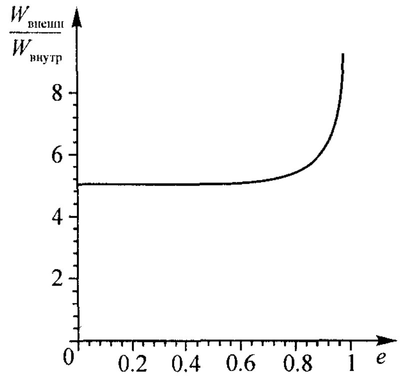


Рис. 63. Отношение внешней части гравитационной энергии к внутренней для однородного сжатого сфероида как функция его эксцентриситета e. Для шара это отношение равно 5

Замечание 4. Как мы уже знаем из § 5.13, при выметании массы однородного тела в обобщённый фокалоид гравитационный потенциал во внешнем пространстве остаётся неизменным. *Поэтому величина $W_{\text{внешн}}$ для обобщённого фокалоида и исходного тела также будет одной и той же.*

Рассмотрим *неоднородные* шары. Прежде всего, заметим: в то время как для неоднородного шара $W_{\text{внутр}}$ зависит от распределения плотности, компонента

$$W_{\text{внешн}} = -\frac{1}{2}\frac{M^2G}{R} \tag{8.139}$$

определяется только размерами и полной массой шара, а от вида закона плотности вообще не зависит.

Среди неоднородных шаров в астрофизике особенно часто применяют политропные. В политропном газе давление связано с плотностью законом

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \tag{8.140}$$

где n — показатель политропы. Потенциал такого шара во внутренней точке r связан с давлением простой формулой (Чандрасекхар [48])

$$\varphi(r) = (n+1)\,\frac{p\,[\rho(r)]}{\rho(r)} + \frac{GM}{R}. \tag{8.141}$$

Подставляя это φ в формулу

$$W_{\text{полн}} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^R \varphi\, dM(r) \tag{8.142}$$

и интегрируя, получим

$$W_{\text{полн}} = -\frac{1}{2}(n+1)\int\limits_0^R p\, dV + W_{\text{внешн}}. \tag{8.143}$$

Последний член в правой части (8.143) записан с учётом формулы (8.139). Ясно, что первый член здесь есть не что иное, как $W_{\text{внутр}}$. Таким образом, в силу известной формулы

$$W_{\text{полн}} = -3\int\limits_0^R p\, dV, \tag{8.144}$$

для политропного гравитирующего шара находим:

$$\begin{aligned} W_{\text{полн}} &= -\frac{3}{5-n}\frac{M^2G}{R}; \\ W_{\text{внутр}} &= \frac{n+1}{6}W_{\text{полн}}; \\ W_{\text{внешн}} &= -\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R} = \frac{5-n}{6}W_{\text{полн}}. \end{aligned} \tag{8.145}$$

Вторая и третья формула в (8.145) получены Кондратьевым. Для такого шара

$$\mu = \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} = \frac{5-n}{1+n}. \tag{8.146}$$

Отсюда ясно, что для политропов вообще $n > -1$. В частности,

$$\begin{aligned} &\mu = 5, \quad (n = 0,\ \text{однородный случай}\ ), \\ &\mu > 1, \quad (0 \leqslant n < 2), \\ &\mu = 1, \quad (n = 2)\ , \\ &\mu < 1, \quad (2 < n \leqslant 5). \end{aligned} \tag{8.147}$$

Возвращаясь к общей теме подчеркнём: *разделение полной потенциальной энергии на внутреннюю и внешнюю части является новым и полезным приёмом для анализа свойств гравитирующих тел.* Так, опираясь на него, в § 15.7 будет получена неизвестная ранее важная формула для угловой скорости вращения однородной жидкой фигуры равновесия.

Задача 8.11. *(Поисковая.) В какой элементарный слой надо вымести вещество однородного тела на его поверхность, чтобы энергия этого слоя была равна $W_{внешн}$? Иначе: каким должен быть элементарный слой на поверхности однородного тела, чтобы работа выметания вещества в него была равна $W_{внутр}$?*

Замечание к задаче 8.11: для шара — это просто элементарный сферический слой. Но уже для сжатого сфероида вопрос неясен.

§ 8.9. О внешней и внутренней гравитационной энергии однородного эллипсоида и системы из двух шаров

Два однородных шара с массами M_1 и M_2 разнесены на расстояние $2D$. Найдём для них внешнюю и внутреннюю энергии. Выражение (8.125) имеет теперь вид

$$W_{\text{внешн}} = \frac{1}{8\pi G} \oint\limits_{S_1+S_2} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{8.148}$$

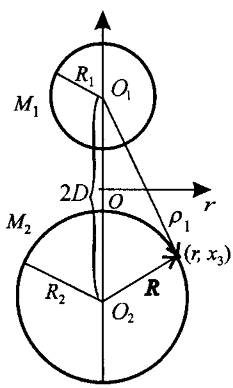


Рис. 64. Геометрическая схема в задаче о двух шарах

Интегрирование проводим по поверхностям S_1 и S_2 шаров. Вначале интегрируем по S_1, для чего начало системы отсчёта совместим с центром первого шара. Радиус-вектор точки интегрирования $\boldsymbol{R}(r, x_3)$ касается первой сферы. Очевидно, $|\boldsymbol{R}| = R_1$. Тогда суммарный внешний потенциал обоих шаров имеет вид

$$\varphi_{\text{внеш}}(r, x_3) = \frac{M_1G}{R} + \frac{M_2G}{\sqrt{r^2 + (x_3 - 2D)^2}}, \tag{8.149}$$

где для краткости обозначено

$$R = \sqrt{r^2 + x_3^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{8.150}$$

1. *Вычисление внешней гравитационной энергии системы из двух шаров*

Найдём производную по нормали $\dfrac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial n}$. Компоненты нормали к сфере S_1 суть

$$\frac{x_1}{R_1}; \quad \frac{x_2}{R_1}; \quad \frac{x_3}{R_1}, \tag{8.151}$$

а компоненты $\operatorname{grad} \varphi_{\text{внешн}}$ в точках первой сферы таковы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_1} &= -M_1 G \frac{x_1}{R_1^3} - M_2 G \frac{x_1}{\rho_1^3}, \\
\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_2} &= -M_1 G \frac{x_2}{R_1^3} - M_2 G \frac{x_2}{\rho_1^3}, \\
\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial x_3} &= -M_1 G \frac{x_3}{R_1^3} - M_2 G \frac{x_3 - 2D}{\rho_1^3},
\end{aligned} \tag{8.152}$$

где[14]

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 + (x_3 - 2D)^2} = \sqrt{R_1^2 - 4Dx_3 + 4D^2} \tag{8.153}$$

есть расстояние между точкой интегрирования на первом шаре и центром второго шара.

Комбинируя (8.152) и (8.153), находим производную по нормали

$$\frac{\partial \varphi_{\text{внешн}}}{\partial n} = -\frac{M_1 G}{R_1^2} - \frac{M_2 G}{R_1} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3 (x_3 - 2D)}{\rho_1^3} = -\frac{M_1 G}{R_1^2} - \frac{M_2 G}{R_1} \frac{R_1^2 - 2Dx_3}{\rho_1^3}. \tag{8.154}$$

Интеграл по S_1 из (8.148) принимает тогда вид

$$I_1 = -\frac{G}{8\pi} \oint\limits_{S_1} \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{\rho_1} \right) \left[\frac{M_1}{R_1^2} + \frac{M_2}{R_1} \frac{R_1^2 - 2Dx_3}{\rho_1^3} \right] dS,$$

или, в сферических координатах,

$$\begin{aligned}
I_1 = -\frac{G}{4} R_1^2 \int\limits_0^\pi \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{\sqrt{R_1^2 + 4D^2 - 4DR_1 \cos\theta}} \right) \times \\
\times \left[\frac{M_1}{R_1^2} + \frac{M_2}{R_1} \frac{R_1^2 - 2DR_1 \cos\theta}{\left(R_1^2 + 4D^2 - 4DR_1 \cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \sin\theta d\theta.
\end{aligned} \tag{8.155}$$

Обозначив

[14] Не путать это ρ_1 с плотностью шара.

$$\kappa = \frac{D}{R_1}, \quad \gamma = \frac{M_2}{M_1}, \quad \beta = \frac{D}{R_2}, \tag{8.156}$$

приведём (8.155) к виду

$$I_1 = -\frac{GM_1^2}{4R_1} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{1+4\kappa^2-4\kappa y}}\right) \left[1 + \frac{\gamma\,(1-2\kappa y)}{\left(1+4\kappa^2-4\kappa y\right)^{\frac{3}{2}}}\right] dy. \tag{8.157}$$

Подынтегральное выражение приводится к виду

$$1 + \frac{3}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{1+4\kappa^2-4\kappa y}} + \frac{\gamma^2}{2\left[1+4\kappa^2-4\kappa y\right]} + \frac{\gamma\left(1-4\kappa^2\right)}{2\left[1+4\kappa^2-4\kappa y\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma^2\left(1-4\kappa^2\right)}{2\left[1+4\kappa^2-4\kappa y\right]^2}, \tag{8.158}$$

и после интегрирования получим

$$I_1 = -\frac{M_1^2 G}{2R_1}\left\{1 + \frac{\gamma\left(1-4\kappa^2\right)}{8\kappa}\left(\frac{1}{|1-2\kappa|} - \frac{1}{1+2\kappa}\right) - \frac{3\gamma}{8\kappa}\left(|1-2\kappa| - (1+2\kappa)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^2}{2\left(1-4\kappa^2\right)} - \frac{\gamma^2}{8\kappa}\ln\frac{|1-2\kappa|}{1+2\kappa}\right\}. \tag{8.159}$$

Далее достаточно рассмотреть случай

$$2\kappa > 1; \tag{8.160}$$

выражение (8.159) тогда несколько упрощается

$$I_1 = -\frac{M_1^2 G}{2R_1} - \frac{M_1 M_2 G}{4D} + \frac{M_2^2 G}{16D}\left(\frac{4\kappa}{4\kappa^2-1} - \ln\frac{2\kappa+1}{2\kappa-1}\right). \tag{8.161}$$

Найдём теперь вклад в $W_{\text{внешн}}$ от того интеграла в (8.148), который вычисляется по сфере S_2

$$I_2 = \frac{1}{8\pi G}\iint\limits_{S_2} \varphi_{\text{внешн}}\frac{\partial\varphi_{\text{внешн}}}{\partial n}dS. \tag{8.162}$$

Начало системы отсчёта переносим в центр этой второй сферы; внешний потенциал теперь

$$\varphi_{\text{внешн}}(r, x_3) = \frac{M_1 G}{\sqrt{r^2 + (x_3+2D)^2}} + \frac{M_2 G}{R}. \tag{8.163}$$

Тогда расчёты, аналогичные проведённым выше, дают

$$I_2 = -\frac{M_2^2 G}{2R_2}\left\{1 + \frac{3}{8\gamma\beta}\left(1+2\beta-|1-2\beta|\right) - \frac{1-4\beta^2}{8\gamma\beta}\left(\frac{1}{1+2\beta} - \frac{1}{|1-2\beta|}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\gamma^2\left(1-4\beta^2\right)} + \frac{1}{8\gamma^2\beta}\ln\frac{1+2\beta}{|1-2\beta|}\right\}. \tag{8.164}$$

При

$$2\beta > 1 \tag{8.165}$$

выражение (8.164) также упрощается

$$I_2 = -\frac{M_2^2 G}{2R_2} - \frac{M_1 M_2 G}{4D} - \frac{M_1^2 G}{16D}\left(\ln\frac{1+2\beta}{2\beta-1} - \frac{4\beta}{4\beta^2-1}\right). \tag{8.166}$$

Итак, при условиях (8.160) и (8.165), складывая (8.161) и (8.166), находим внешнюю часть гравитационной энергии системы из двух шаров:

$$\begin{gathered} W_{\text{внешн}} = I_1 + I_2 = -\frac{M_1^2 G}{2R_1} - \frac{M_2^2 G}{2R_2} - \frac{M_1 M_2 G}{2D} - \\ -\frac{M_1^2 G}{16D}\left(\ln\frac{1+2\beta}{2\beta-1} - \frac{4\beta}{4\beta^2-1}\right) - \frac{M_2^2 G}{16D}\left(\ln\frac{1+2\kappa}{2\kappa-1} - \frac{4\kappa}{4\kappa^2-1}\right). \end{gathered} \tag{8.167}$$

2. *Вычисление внутренней гравитационной энергии системы из двух шаров*

Находим теперь для системы двух шаров $W_{\text{внутр}}$ из (8.124). Здесь это выражение разбивается на интегралы по объёмам шаров V_1 и V_2. В первом случае начало системы отсчёта опять разместим в центре первого шара. Теперь ($|\boldsymbol{R}| \leqslant R_1$) и полный потенциал внутри первого шара

$$\varphi_{\text{внутр}} = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R_1^2 - R^2\right) + \frac{GM_2}{\rho_1}, \tag{8.168}$$

а компоненты $\operatorname{grad}\varphi_{\text{внутр}}$ суть

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_1} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho x_1 - M_2 G\frac{x_1}{\rho_1^3}, \\ \frac{\partial\varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_2} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho x_2 - M_2 G\frac{x_2}{\rho_1^3}, \\ \frac{\partial\varphi_{\text{внутр}}}{\partial x_3} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho x_3 - M_2 G\frac{x_3 - 2D}{\rho_1^3}, \end{aligned} \tag{8.169}$$

где ρ_1 опять из (8.153). Следовательно,

$$\left(\operatorname{grad}\varphi_{\text{внутр}}\right)^2 = \frac{16}{9}\pi^2 G^2\rho^2 R^2 + \frac{M_2^2 G^2}{\rho_1^4} + \frac{8}{3}\pi\, G^2\rho\cdot M_2\,\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3\left(x_3 - 2D\right)}{\rho_1^3}. \tag{8.170}$$

Интегрирование (напомним, по объёму шара V_1) первого члена из (8.170) даёт

$$-\frac{8}{45}\pi^2 G\rho^2 R_1^5. \tag{8.171}$$

Интегрирование второго члена из (8.170)

$$-\frac{M_2^2 G}{8\pi G}\iiint\limits_{V_1}\frac{dV}{\left[R^2 + 4D^2 - 4Dx_3\right]^2} \tag{8.172}$$

сводится к вычислению интеграла

$$2\pi\int\limits_0^{R_1}\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,dR}{\left(R^2+4D^2-4DR\cos\theta\right)^2}. \tag{8.173}$$

Находим его

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left[R^2+4D^2-4DRx\right]^2}=\frac{1}{4DR}\left(\frac{1}{(R-2D)^2}-\frac{1}{(R+2D)^2}\right), \tag{8.174}$$

так что (8.172) будет равно

$$-\frac{M_2^2G}{16D}\left\{\ln\frac{2\kappa-1}{2\kappa+1}+\frac{4\kappa}{4\kappa^2-1}\right\}. \tag{8.175}$$

Интегрирование третьего члена в (8.170) приводит к вычислению двойного интеграла

$$-\frac{2}{3}\pi G\rho M_2\int\limits_0^{R_1}R^2\,dR\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(R^2-2DRx\right)dx}{\left[R^2+4D^2-4DRx\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.176}$$

Внутренний интеграл здесь равен

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(R^2-2DRx\right)dx}{\left[R^2+4D^2-4DRx\right]^{\frac{3}{2}}}&=\left.\frac{Rx-2D}{R\sqrt{R^2+4D^2-4DRx}}\right|_{-1}^{1}=\\&=\frac{R-2D}{R\,(2D-R)}+\frac{R+2D}{R\,(2D+R)}=-\frac{1}{R}+\frac{1}{R}=0,\end{aligned} \tag{8.177}$$

где вновь учтено неравенство (8.160). Таким образом, интегрирование третьего члена (8.176) даёт нуль.

Вместе,

$$I_3=-\frac{1}{8\pi G}\iiint\limits_{V_1}\left(\operatorname{grad}\varphi_{\text{внутр}}\right)^2dV=-\frac{M_1^2G}{10R_1}-\frac{M_2^2G}{16D}\left\{\ln\frac{2\kappa-1}{2\kappa+1}+\frac{4\kappa}{4\kappa^2-1}\right\}. \tag{8.178}$$

Аналогично, интегрирование внутреннего потенциала

$$\varphi_{\text{внутр}}\left(R,x_3\right)=\frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R_2^2-R^2\right)+\frac{M_1G}{\sqrt{R_2^2+4D^2+4Dx_3}} \tag{8.179}$$

по объёму V_2 даёт

$$I_4=-\frac{1}{8\pi G}\iiint\limits_{T_2}\left(\operatorname{grad}\varphi_{\text{внутр}}\right)^2dV=-\frac{M_2^2G}{10R_2}-\frac{M_1^2G}{16D}\left\{\ln\frac{2\beta-1}{2\beta+1}+\frac{4\beta}{4\beta^2-1}\right\}. \tag{8.180}$$

Следовательно, в целом

$$\begin{aligned} W_{\text{внутр}} = I_3 + I_4 = -\frac{M_1^2 G}{10R_1} - \frac{M_2^2 G}{10R_2} - \frac{M_1^2 G}{16D}\left\{\ln\frac{2\beta-1}{2\beta+1} + \frac{4\beta}{4\beta^2-1}\right\} - \\ -\frac{M_2^2 G}{16D}\left\{\ln\frac{2\kappa-1}{2\kappa+1} + \frac{4\kappa}{4\kappa^2-1}\right\}. \end{aligned} \tag{8.181}$$

Сделаем проверку выражений (8.167) и (8.181): в сумме они должны давать полную гравитационную энергию двух однородных шаров (см. (8.24)). Складывая (8.167) и (8.181), видим, что логарифмы взаимно сокращаются, и в результате действительно получается полная энергия $W_{\text{полн}}$ из (8.24).

3. *Отношение* $\frac{W_{внешн}}{W_{внутр}}$ *для двух шаров*

Теперь для отношения найденных величин (8.167) и (8.181) докажем важное неравенство

$$\mu = \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} \geqslant 5. \tag{8.182}$$

Вначале (8.167) и (8.181) запишем в приведённом виде

$$\frac{W_{\text{внешн}}}{\left(-\dfrac{M_1^2 G}{2R_1}\right)} = 1 + \frac{\gamma^2\beta}{\kappa} - K_1 - K_2, \tag{8.183}$$

$$\frac{W_{\text{внутр}}}{\left(-\dfrac{M_1^2 G}{2R_1}\right)} = \frac{1}{5} + \frac{\gamma^2\beta}{5\kappa} + K_1 + K_2, \tag{8.184}$$

где мы использовали отношение масс γ из (8.150) и для краткости обозначили

$$K_1 = \frac{1}{8\kappa}\left\{\ln\frac{2\beta-1}{2\beta+1} + \frac{4\beta}{4\beta^2-1}\right\}, \qquad K_2 = \frac{\gamma^2}{8\kappa}\left\{\ln\frac{2\kappa-1}{2\kappa+1} + \frac{4\kappa}{4\kappa^2-1}\right\}. \tag{8.185}$$

Таким образом, следует рассмотреть функцию от параметров κ и β, имеющую вид

$$\mu = \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} = \frac{1 + \dfrac{\gamma^2\beta}{\kappa} - K_1 - K_2}{\dfrac{1}{5} + \dfrac{\gamma^2\beta}{5\kappa} + K_1 + K_2}. \tag{8.186}$$

Прежде всего, легко видеть, что при небольших κ и β отношение (8.186) может только расти. Поэтому надо проверить неравенство (8.186) для больших κ и β. Достаточно доказать, что

$$\frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} - 5 > 0, \tag{8.187}$$

или, что эквивалентно,

$$4\gamma + 3\ln\frac{1+\dfrac{1}{2\beta}}{1-\dfrac{1}{2\beta}} - \frac{12\beta}{4\beta^2-1} + 3\gamma^2\ln\frac{1+\dfrac{1}{2\kappa}}{1-\dfrac{1}{2\kappa}} - \frac{12\kappa\gamma^2}{4\kappa^2-1} \geqslant 0. \tag{8.188}$$

Но при достаточно больших κ и β, как можно убедиться,

$$\ln\frac{1+\frac{1}{2\beta}}{1-\frac{1}{2\beta}}\approx\frac{1}{\beta};\quad \ln\frac{1+\frac{1}{2\kappa}}{1-\frac{1}{2\kappa}}\approx\frac{1}{\kappa};\quad \frac{12\beta}{4\beta^2-1}\approx\frac{3}{\beta};\quad \frac{12\kappa\gamma^2}{4\kappa^2-1}\approx\frac{3\gamma^2}{\kappa},\tag{8.189}$$

так что (8.188) даёт очевидное неравенство

$$\gamma=\frac{M_2}{M_1}\geqslant 0.\tag{8.190}$$

Таким образом, *для двух однородных шаров всегда будут выполняться следующие важные неравенства:*

$$\mu=\frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}}\geqslant 5;\qquad \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{полная}}}\geqslant\frac{5}{6},\tag{8.191}$$

причём точное равенство будет иметь место только при $\gamma=0$, т. е. для однородного одиночного шар.

4. *Отношение* $\frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}}$ *для одиночного эллипсоида*

Для однородного эллипсоида с полуосями $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$ выполняются, как это следует из § 6.4, неравенства (6.73)–(6.75). Известен, разумеется, его внутренний потенциал (1.37) и (см. (1.65)), полная гравитационная энергия

$$\begin{aligned}&\varphi=\pi G\rho\left(I-A_1x_1^2-A_2x_2^2-A_3x_3^2\right);\\&W=-\frac{2}{5}\pi G\rho IM.\end{aligned}\tag{8.192}$$

Нетрудно найти отдельно внутреннюю часть гравитационной энергии однородного эллипсоида

$$\begin{aligned}W_{\text{внутр}}&=-\frac{(2\pi G\rho)^2}{8\pi G}\iiint\limits_V\left[(A_1x_1)^2+(A_2x_2)^2+(A_3x_3)^2\right]dV=\\&=-\frac{1}{10}\pi G\rho M\left[A_1^2a_1^2+A_2^2a_2^2+A_3^2a_3^2\right],\end{aligned}\tag{8.193}$$

а также внешнюю её часть

$$\begin{aligned}&W_{\text{внешн}}=-\frac{2}{5}\pi G\rho M\left(A_1a_1^2+A_2a_2^2+A_3a_3^2\right)+\\&+\frac{1}{10}\pi G\rho M\left(A_1^2a_1^2+A_2^2a_2^2+A_3^2a_3^2\right)=\\&=-\frac{1}{10}\pi G\rho M\left[A_1a_1^2(4-A_1)+A_2a_2^2(4-A_2)+A_3a_3^2(4-A_3)\right].\end{aligned}\tag{8.194}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}}=\frac{A_1a_1^2(4-A_1)+A_2a_2^2(4-A_2)+A_3a_3^2(4-A_3)}{A_1^2a_1^2+A_2^2a_2^2+A_3^2a_3^2}=\\&=4\frac{A_1a_1^2+A_2a_2^2+A_3a_3^2}{A_1^2a_1^2+A_2^2a_2^2+A_3^2a_3^2}-1\geqslant 5,\end{aligned}\tag{8.195}$$

так как, в силу доказанных нами ранее неравенств (6.73)–(6.75),

$$\frac{A_1a_1^2 + A_2a_2^2 + A_3a_3^2}{A_1^2a_1^2 + A_2^2a_2^2 + A_3^2a_3^2} \geqslant \frac{3}{2} \tag{8.196}$$

и

$$A_1a_1^2\left(\frac{2}{3} - A_1\right) + A_2a_2^2\left(\frac{2}{3} - A_2\right) + A_3a_3^2\left(\frac{2}{3} - A_3\right) \geqslant 0. \tag{8.197}$$

Итак, для внутренней и внешней частей гравитационной энергии однородного эллипсоида выполняется важное неравенство

$$\mu = \frac{W_{\text{внешн}}}{W_{\text{внутр}}} \geqslant 5, \tag{8.198}$$

которое справедливо, как мы убедились выше, и в случае двух однородных шаров. Подчеркнём: и здесь случай точного равенства в (8.198) выполняется только при вырождении эллипсоида в шар.

5. *Заключение*

Неравенства (8.191) для двух однородных гравитирующих шаров интересны сами по себе и, кроме того, важны для некоторых приложений теории потенциала. Однако в общем виде (для тел другой формы или систем тел) доказательство подобных неравенств провести пока не удаётся. Тем более ценную информацию дают решения тех задач для однородных тел (для неоднородных, заметим, ситуация может быть совершенно другой!), где внешнюю и внутреннюю части гравитационной энергии можно найти в явном виде. С этой точки зрения, точное решение задачи для двух однородных шаров, как и задачи для одиночного эллипсоида, проливают свет на общетеоретический характер найденных неравенств (8.191). Во всяком случае, контрпримеров им пока не найдено.

§ 8.10. Усечённые вириалы

По определению, полный вириал гравитирующего тела даётся формулой (8.25). Но сейчас важно заметить, что, опираясь на тензорное представление вириала (8.91), можно ввести и специальные *усечённые вириалы*, которые будут состоять из суммы двух членов главной диагонали матрицы тензора вириала:

$$\begin{aligned} Z_{11} + Z_{22} &= \iiint\limits_T \rho\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)dV, \\ Z_{22} + Z_{33} &= \iiint\limits_T \rho\left(x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)dV, \\ Z_{33} + Z_{11} &= \iiint\limits_T \rho\left(x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dV. \end{aligned} \tag{8.199}$$

Оправданием для введения новых величин — *усечённых вириалов* — является, прежде всего то, что для них имеют место следующие важные равенства:

$$
\begin{aligned}
Z_{11} + Z_{22} &= -\frac{1}{4\pi G}\iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 dV, \\
Z_{22} + Z_{33} &= -\frac{1}{4\pi G}\iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 dV, \\
Z_{33} + Z_{11} &= -\frac{1}{4\pi G}\iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 dV.
\end{aligned}
\tag{8.200}
$$

Здесь в левой части при вычислении величин Z_{ij} интегрирование проводится по объёму тела, а в правой части интегралы от $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2$ распространяются на всё пространство.

Докажем, например, первое из равенств (8.200).

Для этого, прежде всего, в первой из формул (8.199) к выражению в круглых скобках под знаком правого интеграла добавим и вычтем член $x_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}$; с учётом (8.25) приводим рассматриваемое равенство к виду

$$
4\pi GW = 4\pi G\iiint\limits_{T} \rho\, x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV - \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 dV. \tag{8.201}
$$

В интеграле по объёму заменим плотность с помощью уравнения Пуассона $4\pi G\rho = -\Delta\varphi$. Тогда задача сводится к доказательству равенства

$$
4\pi GW = -\iiint\limits_{T} \Delta\varphi\, x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV - \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 dV. \tag{8.202}
$$

Применим к этому выражению первую формулу Грина для лапласиана

$$
\iiint\limits_{V} \psi\Delta p\, dV = \iint\limits_{S} \psi\frac{\partial p}{\partial n}dS - \iiint\limits_{V} (\nabla\psi)\,(\nabla p)\, dV. \tag{8.203}
$$

Тогда

$$
-\iiint\limits_{T} \Delta\varphi\, x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV = \iiint\limits_{T} \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\left(x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)dV - \iint\limits_{S} x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \tag{8.204}
$$

Распространим здесь интегрирование на всё пространство. Тогда левая часть, поскольку вне тела $\Delta\phi = 0$, не изменяет своего значения. В правой же части при $R \to \infty$ интеграл по поверхности имеет порядок $\sim \dfrac{1}{R}$, и поэтому исчезает на бесконечности. Остаётся равенство

$$
-\iiint\limits_{T} \Delta\varphi\, x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV = \iiint\limits_{R_E} \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\left(x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)dV. \tag{8.205}
$$

Раскрывая в правой части скалярное произведение, приводим (8.205) к виду

$$
-\iiint\limits_{T} \Delta\varphi x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_{R_E} x_3\frac{\partial}{\partial x_3}(\operatorname{grad}\varphi)^2 dV + \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 dV. \tag{8.206}
$$

Подставляя теперь (8.206) в правую часть (8.202) и сокращая два члена, получим

$$8\pi G W = \iiint\limits_{R_E} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dV.. \tag{8.207}$$

Выполняя здесь интегрирование по частям и учитывая, что проинтегрированный член исчезает, приходим к равенству

$$8\pi G W = -\iiint\limits_{R_E} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dV, \tag{8.208}$$

которое тождественно известному (8.5). Доказательство закончено. ■

Об усечённых вириалах можно добавить также следующее. Каждое из выражений (8.200) представляет часть энергии тела. Сумма же выражений (8.200) даёт известную нам формулу (8.5) полной гравитационной энергии. Далее, складывая в (8.200) первое и третье выражения и вычитая второе, имеем полную энергию тела в другом виде:

$$W = Z_{11} - \frac{1}{4\pi G} \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 dV. \tag{8.209}$$

Аналогично, круговая перестановка индексов даёт

$$\begin{aligned} W &= Z_{22} - \frac{1}{4\pi G} \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 dV, \\ W &= Z_{33} - \frac{1}{4\pi G} \iiint\limits_{R_E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2 dV. \end{aligned} \tag{8.210}$$

Из полученных формул можно получить ещё одно полезное неравенство. Составим из (8.200) выражение

$$\begin{aligned} &4\pi G \left[(Z_{11} + Z_{22}) - (Z_{22} + Z_{33}) - (Z_{33} + Z_{11}) \right] = \\ &= \iiint\limits_{R_E} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV. \end{aligned} \tag{8.211}$$

Здесь, по доказанному выше,

$$\begin{aligned} Z_{33} &= \iiint\limits_{T} \rho x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \iiint\limits_{T} \iiint\limits_{T} x_3 \frac{(x_3 - x_3') \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_1' dx_2' dx_3'}{\left[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{8.212}$$

Заметим теперь, что в последнем интеграле можно менять ролями наборы штрихованных и нештрихованных x_i:

$$Z_{33} = \iiint\limits_{T} \iiint\limits_{T} \frac{x_3' (x_3' - x_3) \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_1' dx_2' dx_3'}{\left[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.213}$$

Полусумма двух выражений для Z_{33} тогда даёт

$$Z_{33} = -\iiint\limits_T \iiint\limits_T \frac{(x_3' - x_3)^2 \, dx_i dx_i'}{\left[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2\right]^{\frac{3}{2}}} < 0. \tag{8.214}$$

Следовательно, будет выполняться неравенство

$$\iiint\limits_{R_E} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2\right] dx_1 dx_2 dx_3 > 0. \tag{8.215}$$

Ранее это неравенство не было известно.

Задача 8.12. *Проверить первую из формул* (8.200) *в случае однородного сжатого сфероида, воспользовавшись для расчётов сфероидальными координатами.*

Следует подчеркнуть: *все формулы для усеченных вириалов в случае изолированного тела выполняются и при замене величин Z_{ii} на компоненты W_{ii}. Другими словами, таким образом вводятся величины усеченной гравитационной энергии.*

Замечания

§ 8.1. К понятию гравитационной энергии однородного тела мы подходим, рассматривая вначале взаимную энергию двух тел. Широкие кольца — распространенное явление во Вселенной, и задача 8.1 о потенциальной энергии широкого кольца имеет, разумеется, не только методическое значение.

Первоисточник: [21].

§ 8.2. На эту интересную задачу автор наткнулся, будучи ещё аспирантом теоротдела в ФИАНе. Разумеется, данные в (8.37) частные решения уравнения (8.36) можно рассматривать только как первое приближение к объяснению структуры реальных звёздных систем. Любопытно однако то, что при распределении плотности по закону «$-5/2$» (и только при нём!) вириал и гравитационная энергия неизолированной подсистемы оказываются равны друг другу.

Первоисточник: [20] и [21].

§ 8.3. Все результаты (кроме формулы Риттера и Бетти) получены автором. Геометрические места равной потенциальной энергии однородного эллипсоида ранее также не изучались.

Первоисточник: [21].

§ 8.4. Содержит интересные физические приложения метода. Образование каверн в гравитирующем теле является энергетически не выгодным. Справедливо и обратное — заполнение пустот веществом самого тела уменьшает его энергию.

Первоисточник: [20] и [21].

§ 8.5. Известное отмечено по ходу изложения, другие результаты — самостоятельные. Выражение для тензора вириала эллипсоидальной подсистемы имеет важное значение для исследования динамики Е-галактик. Обратим внимание на то, что нельзя игнорировать притяжение внешних эллипсоидальных слоёв *переменной* сплюснутости на элементы внутренней подсистемы.

Первоисточник: [20],[21] и [26].

§ 8.6. Решается важная и свежая задача о гравитационной энергии неэллипсоидальных слоёв (обобщённых гомеоидов и фокалоидов). Само понятие обобщённого софокусного слоя впервые появилось в статье Антонова и Кондратьева [50].

§ 8.7. Мы присутствуем на торжественной церемонии, когда однородная сфера передаёт свои королевские полномочия, вручённые ей А. М. Ляпуновым [35] , сжатому сфероиду.

Первоисточник: [50].

§ 8.8. Разбиение полной гравитационной энергии на внешнюю и внутреннюю части естественно появляется при разделении области интегрирования. В § 15.7 данным приёмом будет выведена новая формула для угловой скорости жидких фигур равновесия.

Первоисточник: [23].

Здесь добавлены формулы (8.145) для политропного шара.

§ 8.9. Новый материал. Задача для двух шаров решается кропотливым образом и служит для доказательства в частном случае важных неравенств (8.191).

§ 8.10. Введение усечённых вириалов делает метод вириала более гибким, что позволяет решать новые задачи.

Первоисточник: [21].

Глава 9

ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ТЕЛА. СТЕРЖНИ И ДИСКИ

Напомним ещё раз классическую теорему Маклорена — Лапласа (которую мы обобщили в § 5.12, а также впервые строго доказали в аналогичном обобщённом виде для тел с логарифмическим потенциалом, см. теорему 7 в п. 4.5.3): *однородные софокусные эллипсоиды равной массы создают во внешнем пространстве одинаковые гравитационные поля*, которая была давно доказана и применялась только к сплошным однородным эллипсоидам. В этом смысле теорема Маклорена — Лапласа себя исчерпала. Для поиска других семейств эквигравитирующих тел требуется новый взгляд на всю проблему. Здесь разработан новый подход к задачам об эквигравитирующих телах, который позволяет выйти за рамки исследований классиков теории потенциала.

Проблема эквигравитирующих тел развивается у нас в трёх направлениях.

Во-первых, вводится понятие отдельного *эквигравитирующего стержня* и их совокупностей. Такие стержни могут иметь как реальные, так и мнимые распределения плотности. Но если внутри осесимметричных тел существуют изолированные особые точки, тогда внешние гравитационные поля можно представить *совокупностью стержней и точечных масс.* В этом отношении интересна задача о шаровом сегменте (бóльшим полушара) из § 9.14.

Во-вторых, представление внешних гравитационных полей у многих тел с экваториальной плоскостью симметрии возможно и с помощью плоских дисков[1] (см. § 9.11). Для тел с азимутальной симметрией такие *эквигравитирующие диски* с вещественной плотностью можно, в частности, находить по известным для тел мнимым стержням. В результате удаётся открыть и изучить цепочки эквигравитирующих тел типа «сфероид (оболочка) — диск — стержень».

В-третьих, у нас для поиска новых эквигравитирующих тел активно используются *специальные софокусные преобразования* (см. главу 10).

§ 9.1. Введение

Напомним (см. выше), что отправным пунктом при постановке всей проблемы эквигравитирующих тел для нас послужили те предельные варианты теоремы Маклорена — Лапласа, когда при софокусном «ужатии» вещества однородный эллипсоид вырождается в вещественный плоский неоднородный эллиптический диск или — в частном случае вытянутого сфероида — в одномерный неоднородный вещественный стержень. В литературе эти предельные варианты в деталях обычно не рассматриваются, поэтому вначале напомним их и кое-что уточним.

Из теоремы Маклорена — Лапласа следует, что эллипсоид плотности ρ с поверхностью

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \qquad a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3, \tag{9.1}$$

при равенстве масс оказывается эквигравитирующим эллиптическому диску с границей

[1] Эти диски могут быть и неоднородными, а форма их не обязательно должна быть только круговой.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \qquad x_3 = 0, \tag{9.2}$$

и поверхностной плотностью

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{2a_1 a_2 a_3 \rho}{\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_3^2)}} \sqrt{Q\,(1)}, \tag{9.3}$$

где

$$Q\,(m) = m^2 - \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2}. \tag{9.4}$$

Например, для сжатого сфероида ($a_1 = a_2 > a_3$) формула (9.3) даёт круглый диск с радиусом $R = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ и плотностью

$$\sigma(r) = \frac{3M}{2\pi(a_1^2 - a_3^2)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a_1^2 - a_3^2}}, \tag{9.5}$$

исчезающей на границе.

Далее, для вытянутого однородного сфероида ($a_3 \geqslant a_1 = a_2$) эквигравитирующим во внешнем пространстве оказывается фокальный отрезок на оси Ox_3 длиной $L = 2\sqrt{a_3^2 - a_1^2}$ с одномерным вещественным распределением плотности

$$\mu(\zeta) = \frac{3M}{4\sqrt{a_3^2 - a_1^2}} \left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right), \quad -\sqrt{a_3^2 - a_1^2} \leqslant \zeta \leqslant \sqrt{a_3^2 - a_1^2}. \tag{9.6}$$

В связи с введением такого стержня интересно заметить, что радиус сходимости ряда Лапласа для вытянутого сфероида равен половине его длины $L/2$.

Обратим внимание на то, что в приведённых примерах происходит понижение пространственной размерности тел: однородный эллипсоид заменяется эквигравитирующим ему диском, вытянутый однородный сфероид — одномерным стержнем, шар — материальной точкой. Эти примеры демонстрируют одно из важнейших понятий в теории потенциала: *существование эквигравитирующих тел*. Однако тремя указанными случаями в *классической теории* всё и исчерпывается: *бóльшего теорема Маклорена — Лапласа дать и не может*. В данной книге понятие *эквигравитирующих тел может быть распространено на многие другие конфигурации*. Однако такое обобщение связано с введением *новых понятий*.

§ 9.2. Переход от вещественного стержня к мнимому: случай сжатых сфероидов

Итак, однородный сжатый сфероид моделируется неоднородным круглым диском с вещественной поверхностной плотностью (9.5). Этот классический результат допускает важное и нетривиальное обобщение.

Теорема 1 (Э – 1).[2] *Внешний потенциал однородного сжатого сфероида может быть представлен одномерным гравитирующим стержнем с мнимым распределением плотности*

$$\mu(\zeta) = \frac{3M}{4i\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 - a_3^2}\right), \quad -\sqrt{a_1^2 - a_3^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant \sqrt{a_1^2 - a_3^2}, \tag{9.7}$$

где ζ — чисто мнимая переменная, изменяющаяся в указанных пределах.

[2] Здесь и ниже обозначения вида Э – 1 ... Э – 6 введены для ссылки на эти теоремы в предметном указателе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Воспользуемся изумительно простым приёмом: от вытянутого сфероида $a_3 > a_1$ путём непрерывной деформации перейдём через сферу к сжатому сфероиду с $a_3 < a_1$. Очевидно, при этом $\sqrt{a_3^2 - a_1^2} \to i\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$, так что из (9.6) сразу получим выражение (9.7).

Проверка формулы (9.7) по массе элементарна:

$$M = \int \mu(\zeta)d\zeta = \frac{3M}{2i\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \int\limits_0^{i\sqrt{a_1^2-a_3^2}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 - a_3^2}\right) d\zeta = \frac{4}{3}\pi a_1^2 a_3 \rho. \tag{9.8}$$

По внешнему же потенциалу формулу (9.7) достаточно проверить лишь в точках на оси симметрии фигуры. Как известно, *внешний потенциал на оси однородного сжатого сфероида* имеет вид (6.32). С другой стороны, потенциал мнимого стержня на оси Ox_3 даётся интегралом по стержню

$$\varphi_{\text{ст}}(x_3) = G \int \frac{\mu(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta\,. \tag{9.9}$$

Этот интеграл с учётом (9.7) записывается так:

$$\varphi_{\text{ст}}(x_3) = -\frac{3MG}{4i\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \int\limits_{-i\sqrt{a_1^2-a_3^2}}^{i\sqrt{a_1^2-a_3^2}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 - a_3^2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta - x_3}. \tag{9.10}$$

Заменой $\zeta = is$ интеграл (9.10) легко берётся, и мы действительно приходим к выражению (6.32). Поскольку внешний потенциал — функция гармоническая, то по известным теоремам анализа о единственности представления этих функций, и по только что доказанному равенству потенциалов сжатого сфероида и мнимого стержня на оси Ox_3, мы утверждаем: и во всех других точках пространства их силовые поля будут равны.

Итак, *одномерный мнимый стержень* (9.7) *действительно будет эквигравитирующим телом для однородного сжатого сфероида.* ∎

§ 9.3. Эквигравитирующие стержни для оболочек: метод дифференциации

Следуя § 5.1, рассмотрим семейство соосных сфероидальных поверхностей $S(m)$:

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2 \alpha_3^2(m)} = m^2, \tag{9.11}$$

где параметр m непрерывно изменяется в интервале $0 \leqslant m_{\min} \leqslant m \leqslant 1$. Этой формулой задана внутренняя стратификация вытянутого сфероида с граничными полуосями $a_1 \leqslant a_3$. Две поверхности семейства (9.11), разделённые бесконечно малым значением параметра dm, образуют, как мы знаем, элементарную сфероидальную оболочку. Находя методами гл. 5 единственную в данном случае функцию $\alpha_3(m)$, можно задавать разные типы сфероидальных слоёв.

Остановимся здесь на гомотетических и софокусных оболочках, и рассмотрим вначале задачу об эквигравитирующих стержнях для однородных гомеоидов. Применим *метод дифференциации* (его определение дано в § 2.11). В данном случае $\alpha_3(m) = 1$ и масса оболочки с полуосями ma_1 и ma_3 равна

$$M_{\text{гом}} = 4\pi a_1^2 a_3 \rho\,(m)\; m^2 dm. \tag{9.12}$$

Теорема 2. *Для тонкого гомеоида с поверхностью вытянутого сфероида, имеющего массу $M_{гом}$ и полуоси $ma_1 \leqslant ma_3$, эквигравитирующим во внешней точке является однородный фокальный стержень длиной $L = 2ma_3e$ с вещественным распределением плотности*

$$d_m\mu = \frac{3}{2}\frac{M_{гом}}{a_3e}mdm = 2\pi\rho\frac{a_1^2}{e}mdm. \tag{9.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Подстановка указанных полуосей промежуточного сфероида $S(m)$ в выражение (9.6) даёт

$$\mu(m,\zeta) = \frac{3M}{4a_3e}\left(m^2 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right), \quad e = \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{a_3^2}}. \tag{9.14}$$

Дифференцируя (9.14) по параметру m, находим требуемый вклад (9.13) в плотность полного эквигравитирующего стержня (9.6) от промежуточного тонкого гомеоида[3].

Проверка. Интегрирование выражения (9.13) по всему стержню

$$\int\limits_{-ma_3e}^{ma_3e} [d_m\mu]d\zeta \tag{9.15}$$

с учётом его однородности $d_m\mu = \dfrac{M}{L}$ даёт, как и следовало ожидать, массу моделируемой оболочки (9.12). Для подтверждения же свойства эквигравитируемости найденного стержня и гомеоида достаточно опять убедиться в этом лишь для точек на оси симметрии оси Ox_3. Действительно, потенциал стержня в точке $(0, x_3)$

$$\varphi(x_3) = G\int \frac{[d_m\mu]}{x_3 - \zeta}d\zeta = \frac{GM}{L}\ln\frac{x_3 + \frac{L}{2}}{x_3 - \frac{L}{2}} \tag{9.16}$$

совпадает с *внешним потенциалом гомеоида* (5.68). Поэтому элементарный гравитирующий гомеоидальный слой на вытянутом сфероиде с полуосями ma_1, ma_3, имеющий массу (9.12), действительно моделируется однородным вещественным стержнем указанного типа. ■

Следствие 1. Рассмотрим теперь гравитирующую оболочку конечной толщины, ограниченную подобными друг другу вытянутыми сфероидами (рис. 65), у которой внешняя поверхность $S(m)$ с $m = 1$ имеет фокусы в точках A и D, а у внутренней с $m = m_0 < 1$ фокусы совпадают с точками B и C. Очевидно, $AD = 2a_3e$ и $BC = 2m_0a_3e$. Эквигравитирующий стержень для такой оболочки, заполненной веществом однородной плотности ρ, имеет общую длину AD и состоит уже *из трёх частей*. Если переменная координата ζ вдоль этого стержня попадает на отрезки AB и CD, то интегрирование по m вдоль любого из них даёт плотность

$$\mu^{\mathrm{I}}(\zeta) = \int\limits_{\frac{\zeta}{a_3e}}^{1} d_m\mu = \pi\rho\frac{a_1^2}{e}\left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right); \tag{9.17}$$

[3] Заметим: и здесь работает весьма эффективный метод дифференциации из гл. 5.

на отрезке же BC плотность оказывается постоянной и равной

$$\mu^{\mathrm{II}}(\zeta) = 2\pi\rho\frac{a_1^2}{e}\int\limits_{m_0}^{1} m dm = \pi\rho\frac{a_1^2}{e}\left(1 - m_0^2\right) = \text{const}. \tag{9.18}$$

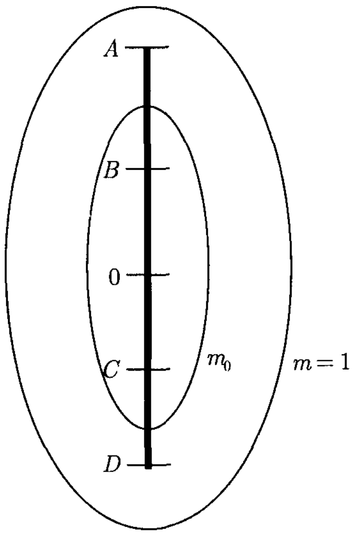


Рис. 65. Однородная гравитирующая оболочка конечной толщины, ограниченная подобными друг другу вытянутыми сфероидами. Через A и D (B и C) обозначены фокусы внешней (внутренней) поверхности этой оболочки. Эти точки служат концами составных частей эквигравитирующего стержня оболочки

Проверка распределений (9.17) и (9.18) по массе элементарна:

$$M_{\text{об}} = \frac{4}{3}\pi\rho a_1^2 a_3\left(1 - m_0^3\right) = \int\limits_{-a_3 e}^{-m_0 a_3 e} \mu^{\mathrm{I}} d\zeta + \int\limits_{m_0 a_3 e}^{a_3 e} \mu^{\mathrm{I}} d\zeta + \int\limits_{-m_0 a_3 e}^{m_0 a_3 e} \mu^{\mathrm{II}} d\zeta. \tag{9.19}$$

Проверка распределений (9.17) и (9.18) по потенциалу также не сложна, и мы оставляем её читателю.

Следствие 2. Результаты для однородных *вытянутых* сфероидальных гомотетических оболочек легко переносятся и на *сжатые* $a_1 = a_2 > a_3$ сфероидальные оболочки. Отличие заключается лишь в том, что величина L и распределение одномерной плотности у соответствующих им стержней будут уже чисто *мнимыми*. Например, вместо (9.13) теперь имеем стержень «длиной»[4] $L = 2im\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ с плотностью

$$d_m\mu = -\frac{2i\pi\rho a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} m\, dm. \tag{9.20}$$

Вместо (9.17) и (9.18) теперь соответственно имеем

$$\begin{aligned} \mu^{\mathrm{I}}(\zeta) &= -i\pi\rho\frac{a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\left(1 + \frac{\zeta^2}{a_3^2 - a_1^2}\right), \\ \mu^{\mathrm{II}}(\zeta) &= -i\pi\rho\frac{a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}(1 - m_0^2) = \text{const}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

[4] Для краткости формулировок под «длиной» L здесь подразумевается разность комплексных чисел для точек на концах отрезка.

З а д а ч а 9.1. *Проверьте формулы* (9.20) *и* (9.21) *по массе и потенциалу.*

Перейдём к нахождению эквигравитирующих стержней для фокалоидов . При софокусном расслоении вытянутого сфероида полуоси промежуточной поверхности в (9.12), согласно (5.37), таковы:

$$a_1(m) = a_3\sqrt{m^2 - e^2}, \quad a_3(m) = a_3 m. \tag{9.22}$$

Теорема 3. *Для вытянутого тонкого сфероидального фокалоида, ограниченного поверхностями $S(m)$ и $S(m + dm)$ и массой*

$$M_{фок}(m) = \frac{4}{3}\pi\rho a_3^3(3m^2 - e^2)\,dm, \tag{9.23}$$

эквигравитирующим во внешнем пространстве является стержень длины $L = 2ea_3$ с вещественным распределением плотности

$$d_m\mu(m,\zeta) = \pi\rho a_3^2\frac{3m^2 - e^2}{e}\left(1 - \frac{\zeta^2}{a_3^2e^2}\right)dm, \quad -ea_3 \leqslant \zeta \leqslant ea_3. \tag{9.24}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Вновь проводим его методом дифференциации. Замена полуосей a_i в (9.6) на (9.22) даёт

$$\mu(m,\zeta) = \pi\rho a_3^2\frac{m(m^2 - e^2)}{e}\left(1 - \frac{\zeta^2}{e^2a_3^2}\right). \tag{9.25}$$

Дифференцируя (9.25) по m легко установить, что вклад в плотность стержня от элементарного гравитирующего фокалоида рассматриваемого типа действительно равен (9.24). ■

Следствие 3. Однородный вытянутый фокалоид конечной толщины, ограниченный поверхностями $S(1)$ и $S(m_0)$, даёт стержень с распределением плотности

$$\mu(m_0,\zeta) = \frac{\pi\rho}{e}(1 - m_0)\left(1 - e^2 + m_0 + m_0^2\right)\left(a_3^2 - \frac{\zeta^2}{e^2}\right). \tag{9.26}$$

Это соотношение получается интегрированием (9.24) по m от m_0 до 1. В частности, при ${m_0}^2 = m_{\min}^2 = e^2(1) = 1 - \dfrac{a_1^2}{a_3^2}$ фокалоид превращается в сплошной сфероид, у которого внутренняя полость оболочки вырождается в бесконечно тонкий геометрический вырез в виде фокального отрезка. В этом случае мы возвращаемся от (9.26) к формуле (9.6).

Следствие 4. При расслоении сфероида на сжатые фокалоиды вместо (9.22) теперь имеем

$$a_1 m; \; a_1 m; \; a_1\sqrt{m^2 - e^2}; \; e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}, \tag{9.27}$$

так что выражение (9.25) заменяется на

$$\mu(m,\zeta) = -\frac{i\pi\rho}{e}m^2\sqrt{m^2 - e^2}\left(a_1^2 + \frac{\zeta^2}{e^2}\right). \tag{9.28}$$

Тем же методом, что и выше, находим распределение плотности в эквигравитирущих стержнях для тонкого, а также с конечной толщиной, *сжатых фокалоидов* (ср. с (9.24) и (9.26):

$$d_m\mu(m,\zeta) = -i\pi\rho\frac{m(3m^2-2e^2)}{e\sqrt{m^2-e^2}}\left(a_1^2+\frac{\zeta^2}{e^2}\right)dm,$$

$$\mu(m_0,\zeta) = -\frac{i\pi\rho}{\mathrm{E}}\left(\frac{a_3}{a_1}-m_0\sqrt{m_0^2-e^2}\right)\cdot\left(a_1^2+\frac{\zeta^2}{e^2}\right), \qquad (9.29)$$

$$-a_1e \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant a_1e.$$

З а д а ч а 9.2. *Проверить найденные эквигравитирующие стержни для тонкого и толстого фокалоидов* (9.29) *по массе и потенциалу.*

Углубление темы об эквигравитирущих стержнях (а также дисках) для сфероидальных оболочек см. далее в § 10.5.

§ 9.4. Эквигравитирующие стержни для однородного круглого диска и тонкого кольца

Дан однородный плоский круглый диск радиусом R (рис. 66, *а*), имеющий поверхностную плотность σ.

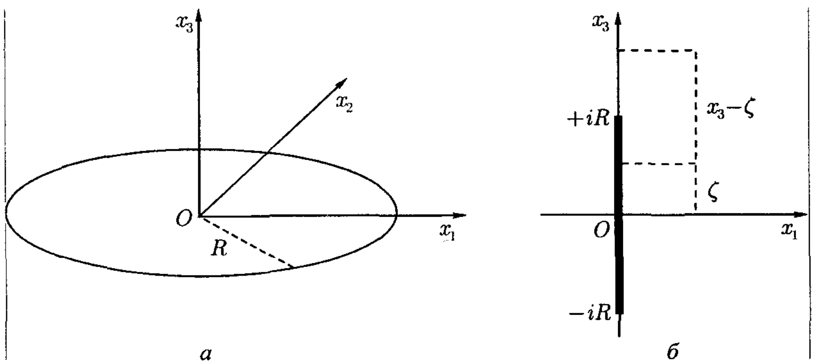


Рис. 66. Плоский круглый диск (а) и эквигравитирующий стержень для него (б). Пунктиром показано расположение испытуемой и текущей точек

Теорема 4 (Э – 2). *Потенциал во внешней точке* (r, x_3) *диска данного вида можно представить потенциалом стержня «длиной»* $L = 2iR$ *с мнимой плотностью*

$$\mu(\zeta) = -2i\sigma\sqrt{R^2+\zeta^2}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \qquad (9.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Спроецируем массу диска на диаметр вдоль оси Ox_1. Это даёт одномерный вещественный стержень длиной $2R$ с массой $dM = \mu(x_1)dx_1$ в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$ и одномерной плотностью

$$\mu(x_1) = 2\sigma\sqrt{R^2-x_1^2}. \qquad (9.31)$$

Сделаем в (9.31) замену

$$\zeta = ix_1, \tag{9.32}$$

приписывающую всем точкам стержня чисто мнимые значения[5]. Тогда, с учётом $dM = \mu(\zeta)d\zeta$, получим закон мнимой плотности (9.30). «Длина» стержня тоже оказывается чисто мнимой $L = 2iR$. Но его масса

$$M = \int_{-iR}^{iR} \mu(\zeta)d\zeta = 4\sigma \int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - s^2}ds = \pi\sigma R^2 \tag{9.33}$$

вещественна и равна массе исходного диска. Далее, потенциал такого мнимого стержня на оси симметрии в точке $(0, x_3)$ даётся, по определению, интегралом

$$\varphi_{\text{ст}}(x_3) = -2i\sigma G \int_{-iR}^{iR} \frac{\sqrt{R^2 + \zeta^2}}{x_3 - \zeta} d\zeta. \tag{9.34}$$

Делая замену $\zeta = is$ и избавляясь от мнимости в знаменателе, после очевидных преобразований найдём

$$\varphi_{\text{ст}}(x_3) = 2\sigma G|x_3| \int_{-R}^{+R} \frac{\sqrt{R^2 - s^2}}{x_3^2 + s^2} ds = 2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + x_3^2} - |x_3|\right). \tag{9.35}$$

С другой стороны, прямое вычисление потенциала диска на оси симметрии по формуле

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G \int_{0}^{R} \sigma(r) \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \tag{9.36}$$

при постоянной поверхностной плотности σ приводит, как легко видеть, к тому же результату (см. формулу (5.82)). Но поскольку внешний потенциал — гармоническая функция, то по известным теоремам анализа указанное выше совпадение потенциалов диска и стержня на оси Ox_3 гарантирует равенство этих потенциалов и в любой другой точке пространства. Найденный диск действительно является эквигравитирующим. ■

Следствие 5. Для одномерного кольца радиусом R и постоянной плотностью μ_0 эквигравитирующим является мнимый стержень

$$\mu(\zeta) = -\frac{2iR\mu_0}{\sqrt{R^2 + \zeta^2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R, \tag{9.37}$$

с бесконечной плотностью на концах.

Доказательство.

Дифференцируя функцию (9.30) по R и учитывая, что $\mu_0 = \sigma dR$, сразу получим формулу (9.37).

Потенциал стержня данного типа в точке (r, x_3) равен

[5] Обратим внимание, что замена переменной (9.32), относящаяся только к точкам стержня, разворачивает его из плоскости Ox_1x_2 на 90° (рис. 66, *b*).

$$\varphi(r,x_3) = G\int\limits_{-iR}^{iR} \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\sqrt{r^2+(x_3-\zeta)^2}} = \frac{4GR\mu_0}{\sqrt{(R+r)^2+x_3^2}}\,\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2+x_3^2}}\right) \tag{9.38}$$

(K — полный эллиптический интеграл первого рода) и, как легко видеть, в самом деле эквивалентен потенциалу тонкого круглого колечка (3.4), вычисленному прямым методом.

■

З а д а ч а 9.3. *Найти эквигравитирующий стержень для плоского широкого кольца с постоянной поверхностной плотностью σ, ограниченного кругами с радиусами $R_2 \geqslant R_1$.*

Решение. Рассматриваем широкое кольцо как разность двух круглых однородных дисков с радиусами R_1 и R_2. Далее, действуя тем же методом, что и при доказательстве теоремы 4, в проекции на ось Ox_1 находим (см. рис. 67) одномерные распределения плотности:

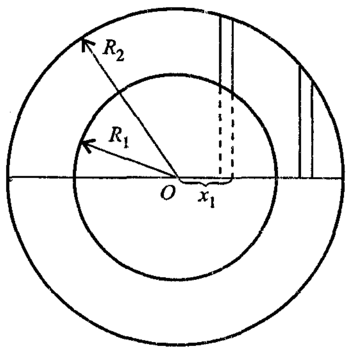


Рис. 67. Широкое кольцо

в полости

$$\mu(x_1) = 2\sigma\left(\sqrt{R_2^2-x_1^2}-\sqrt{R_1^2-x_1^2}\right), \quad -R_1 \leqslant x_1 \leqslant R_1;$$

в точках самого кольца

$$\mu(x_1) = 2\sigma\sqrt{R_2^2-x_1^2}, \quad R_1 \leqslant |x_1| \leqslant R_2.$$

Делая в них замену (9.32), получим

$$\begin{gathered}\mu(\zeta) = -2i\sigma\left(\sqrt{R_2^2+\zeta^2}-\sqrt{R_1^2+\zeta^2}\right), \\ -R_1 \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R_1, \\ \mu(\zeta) = -2i\sigma\sqrt{R_2^2+\zeta^2}, \quad \begin{cases} R_1 \leqslant \dfrac{\zeta}{i} \leqslant R_2, \\ -R_2 \leqslant \dfrac{\zeta}{i} \leqslant -R_1. \end{cases}\end{gathered} \tag{9.39}$$

Это и есть искомый составной эквигравитирующий стержень для широкого кольца. В частности, при $R_1 = 0$ из него получается стержень для сплошного однородного диска (9.30). Проверка по массе и потенциалу для найденного стержня является несложной. ▼

Неоднородные круглые диски и широкие кольца (а также стержни для них) рассматриваются в § 9.10.

З а д а ч а 9.4. *Даны два концентрических и соосных (по диаметрам) тонких круглых кольца, плоскости которых наклонены под углом α*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \tag{9.40}$$

Радиусы и линейные плотности у колец могут быть одинаковыми или разными, равными соответственно $R^{(1)}, \mu^{(1)}$ и $R^{(2)}, \mu^{(2)}$. Найти суммарный пространственный потенциал колец.

Решение. Система отсчёта расположена так, что вклад в потенциал от первого диска даётся, согласно (9.38), формулой

$$\varphi^{(1)}(r,x_3) = \frac{4GR^{(1)}\mu^{(1)}}{\sqrt{(R^{(1)}+r)^2+x_3^2}}\,\mathrm{K}\left(k^{(1)}\right). \tag{9.41}$$

Поворотом осей системы координат на угол α выразим новые координаты пробной точки r', x_3' через старые r, x_3:

$$\begin{aligned} r' &= r\cos\alpha + x_3\sin\alpha, \\ x_3' &= x_3\cos\alpha - r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Вклад в потенциал от второго кольца в пробной точке (r, x_3) тогда равен

$$\varphi^{(2)}(r, x_3) = \frac{4GR^{(2)}\mu^{(2)}}{\sqrt{(R^{(2)} + r')^2 + {x_3'}^2}}\,\mathrm{K}\left(k^{(2)}\right), \tag{9.43}$$

где штрихованные координаты выражаются через прежние с помощью формул (9.42). Кроме того, модули эллиптических интегралов имеют вид

$$k^{(1)} = \sqrt{\frac{4R^{(1)}r}{\left(R^{(1)} + r\right)^2 + x_3^2}} \leqslant 1\,; \quad k^{(2)} = \sqrt{\frac{4R^{(2)}r'}{\left(R^{(2)} + r'\right)^2 + {x_3'}^2}} \leqslant 1\,. \tag{9.44}$$

Таким образом, суммарный потенциал двух колец оказывается равным

$$\varphi\,(r, x_3) = \varphi^{(1)}\,(r, x_3) + \varphi^{(2)}\,(r, x_3)\,. \tag{9.45}$$

В частности, при $\alpha = 0$ получим отсюда потенциал двух компланарных, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — перпендикулярных друг другу колец.

Если испытуемая точка (r, x_3) расположена далеко от системы колец, то удобно перейти к сферическим координатам с полярным углом θ:

$$r = R\sin\theta,\ x_3 = R\cos\theta.$$

Раскладывая выражение (9.45) в ряд по обратным степеням R, находим

$$\varphi\,(R) \approx \frac{c_1}{R} + \frac{c_3}{R^3} + \ldots, \tag{9.46}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= G\,(M_1 + M_2)\,, \\ c_2 &= -\frac{G}{2}\left[R_1^2 M_1\,(1 + 3\cos 2\theta) + R_2^2 M_2\,(1 + 3\cos\left[2\,(\alpha + \theta)\right])\right]. \end{aligned} \tag{9.47}$$

§ 9.5. Пространственный потенциал однородного круглого диска

В конкретном виде потенциал однородного круглого диска *в любой точке пространства* можно получить несколькими способами. Два из них мы укажем в этом параграфе[6].

9.5.1. Через эквигравитирующий стержень

Применим формулу (9.34). Особенность метода в том, что надо найти внешний потенциал и однородного круглого диска, и (одновременно!) стержня с указанным распределением плотности. Рассмотрим интеграл

[6] Ещё один, третий, способ нахождения потенциала однородного диска из более общей формулы для потенциала *неоднородного* круглого диска дан в (3.61).

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = -2G\sigma i \int\limits_{-iR}^{iR} \frac{\sqrt{R^2+\zeta^2}\, d\zeta}{\sqrt{r^2+(x_3-\zeta)^2}}. \tag{9.48}$$

Делая здесь замену $s = -i\zeta$ и избавляясь от мнимости в знаменателе, приводим интеграл (9.48) к виду

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = 2G\sigma \int\limits_0^R \frac{\sqrt{R^2-s^2}ds}{|\rho|} \left\{\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho^*}\right\}, \tag{9.49}$$

где мы обозначили

$$\rho = r^2+x_3^2-s^2-2ix_3s, \quad \rho^* = r^2+x_3^2-s^2+2ix_3s. \tag{9.50}$$

Извлекая корень из комплексных выражений, находим

$$\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho^*} = 2\sqrt{\frac{r^2+x_3^2-s^2+\sqrt{(r^2+x_3^2-s^2)^2+4x_3^2s^2}}{2}}. \tag{9.51}$$

Тогда интеграл в правой части (9.49)

$$I = \int\limits_0^R \frac{\sqrt{R^2-s^2}\sqrt{r^2+x_3^2-s^2+\sqrt{(r^2+x_3^2-s^2)^2+4x_3^2s^2}}}{\sqrt{(r^2+x_3^2-s^2)^2+4x_3^2s^2}} ds \tag{9.52}$$

становится вещественным. Делая в нём замену

$$x = r^2+x_3^2-s^2+\sqrt{(r^2+x_3^2-s^2)^2+4x_3^2s^2},$$

после многих преобразований приводим искомый потенциал к виду

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = \sqrt{2}G\sigma \int\limits_b^a \sqrt{\frac{(x-b)(x-c)}{a-x}} \frac{dx}{x-p}, \tag{9.53}$$

где

$$a \geqslant x \geqslant b > c, \tag{9.54}$$

причём

$$\begin{aligned} &a = 2\left(r^2+x_3^2\right); \quad p = 2x_3^2; \\ &b = r^2+x_3^2-R^2+\sqrt{(r^2+x_3^2-R^2)^2+4R^2x_3^2} > 0; \\ &c = r^2+x_3^2-R^2-\sqrt{(r^2+x_3^2-R^2)^2+4R^2x_3^2} < 0. \end{aligned} \tag{9.55}$$

Отметим, что величины b и c представляют собой (с точностью до множителя 2) эллипсоидальные координаты λ и μ пробной точки (см. ниже выражение (9.64)).

В итоге, после многих преобразований искомый *пространственный потенциал однородного круглого диска* принимает вид

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = \frac{2\sqrt{2}G\sigma}{\sqrt{a-c}}\left\{\left[c + 2\left(R^2 - r^2\right)\right] \mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right) + \right. \\ \left. + (a-c)\,\mathrm{E}\left(\widetilde{k}\right) - 2x_3^2\,\Pi\left[\frac{a-b}{2r^2}, \widetilde{k}\right]\right\}.\end{gathered} \tag{9.56}$$

Здесь $\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right)$, $\mathrm{E}\left(\widetilde{k}\right)$ и $\Pi\left[\frac{a-b}{2r^2}, \widetilde{k}\right]$ — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно (см. формулы (7.23)), причём

$$\widetilde{k} = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k' = \sqrt{\frac{(r-R)^2 + x_3^2}{(r+R)^2 + x_3^2}}. \tag{9.57}$$

Подчеркнём: в (9.56) получен интеграл однородного круглого диска во всём пространстве (включая и внутренние точки самого диска).

Для упрощения выражения потенциала диска (здесь и далее) нам могут понадобиться формулы

$$\mathrm{K}\left(\widetilde{k}\right) = \frac{1+k'}{2}\mathrm{K}(k)\,; \ \mathrm{E}\left(\widetilde{k}\right) = \frac{\mathrm{E}(k) + k'\mathrm{K}(k)}{1+k'} \tag{9.58}$$

с модулем

$$k = \frac{2\sqrt{Rr}}{\sqrt{(r+R)^2 + x_3^2}}. \tag{9.59}$$

Как легко показать, в частном случае при $r = 0$ из (9.56) следует известное нам выражение (9.35) потенциала круглого диска на оси симметрии Ox_3.

Задача 9.5. *Докажите последнее утверждение.*

Далее, *в главной плоскости диска* его *внешний* потенциал, согласно общей формуле (9.56) при $x_3 = 0$, будет равен

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = \frac{4G\sigma}{r}\left\{r^2\mathrm{E}\left(\frac{R}{r}\right) - \left(r^2 - R^2\right)\mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right)\right\} \quad (r \geqslant R)\,; \tag{9.60}$$

во внутренних точках диска потенциал

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma R\,\mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right) \qquad (r \leqslant R)\,. \tag{9.61}$$

Разрыва потенциала при переходе через границу диска, как и следовало ожидать, нет.

9.5.2. Через эквигравитирующий слоисто-неоднородный сфероид

Весьма поучителен и второй метод нахождения потенциала круглого диска, совершенно не зависящий от первого. *Метод опирается на доказанный нами в* § 10.6 *замечательный факт эквивалентности внешнего потенциала однородного круглого диска и внешнего потенциала* *слоисто-неоднородного сфероида из гомотетических слоёв с распределением плотности* (10.58). Подставляя этот закон плотности в выражение потенциала слоисто-неоднородного сфероида (1.49), легко приводим интеграл в дисковом пределе к виду

$$\varphi_{\text{диска}} = 2G\sigma R^2 \int_\lambda^\infty \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2+u} - \frac{x_3^2}{u}} \cdot \frac{du}{\left(R^2+u\right)\sqrt{u}}, \tag{9.62}$$

где σ — поверхностная плотность диска, R — его радиус, λ (и μ, см. ниже) — корни квадратного уравнения

$$\frac{r^2}{R^2+u} + \frac{x_3^2}{u} = 1, \tag{9.63}$$

имеющие вид

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \frac{r^2 + x_3^2 - R^2 \pm \sqrt{\left(r^2+x_3^2-R^2\right)^2 + 4R^2x_3^2}}{2}. \tag{9.64}$$

Третья эллипсоидальная координата в данном случае вырождается в постоянную $\nu = -R^2$. Таким образом,

$$\infty > \lambda \geqslant 0; \quad 0 \geqslant \mu \geqslant -R^2; \quad \nu = -R^2. \tag{9.65}$$

Домножим теперь и поделим подынтегральное выражение в (9.62) на корень, стоящий в числителе. Тогда (9.62) приводится к виду

$$\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = 2G\sigma R^2 \int_\lambda^\infty \frac{1 - \dfrac{r^2}{R^2+u} - \dfrac{x_3^2}{u}}{\sqrt{\left(R^2+u\right)(u-\lambda)(u-\mu)}} du. \tag{9.66}$$

В итоге, *потенциал однородного круглого диска* (9.66) выражается через стандартные эллиптические интегралы

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = \frac{4G\sigma R^2}{\sqrt{\lambda+R^2}} \Bigg\{ \left(1 + \frac{x_3^2}{R^2}\right) \mathrm{K}(k) - r^2 \frac{\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)}{\mu + R^2} - \\ - \frac{x_3^2}{R^2} \Pi\left[\frac{R^2}{\lambda+R^2}, k\right] \Bigg\},\end{aligned} \tag{9.67}$$

где модуль

$$k = \sqrt{\frac{\mu + R^2}{\lambda + R^2}} \leqslant 1. \tag{9.68}$$

Полезно и здесь рассмотреть некоторые частные случаи.

Потенциал в точках на оси симметрии диска Ox_3

При $r = 0$ эллиптические интегралы упрощаются

$$\lambda = x_3^2, \ \mu = -R^2, \ K = E = \pi/2, \tag{9.69}$$

поэтому

$$\frac{r^2}{\mu + R^2}\left[\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)\right] = -\frac{r^2}{\mu + R^2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{k^2 \sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} =$$

$$= -\frac{r^2}{\lambda + R^2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = 0; \qquad (9.70)$$

$$\Pi\left[\frac{R^2}{R^2 + x_3^2}, 0\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - \dfrac{R^2}{R^2 + x_3^2}\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{R^2 + x_3^2}}{|x_3|}.$$

Тогда из (9.67) действительно получим хорошо проверенное выражение (9.35).

Потенциал в главной плоскости диска $x_3 = 0$

Случай внешней точки

$$r \geqslant R,\ \lambda = r^2 - R^2,\ \mu = 0,\ k = \frac{R}{r}. \qquad (9.71)$$

При этом (9.67) принимает вид (9.60).

Случай внутренней точки

$$r \leqslant R,\ \lambda = 0,\ \mu = -\left(R^2 - r^2\right),\ k = \frac{r}{R}. \qquad (9.72)$$

Выражение (9.61) также получается из (9.67)[7].

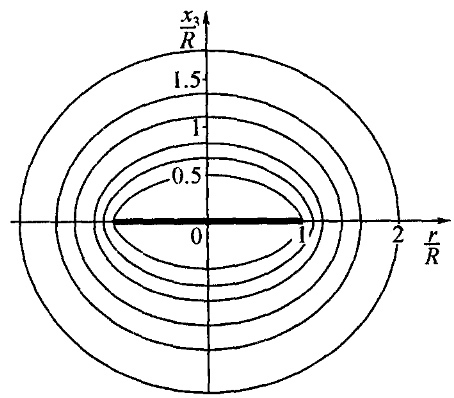


Рис. 68. Меридиональные сечения поверхностей равного потенциала однородного круглого диска. Расчёт по формуле (9.56). Радиус диска $R = 1$, по осям отложены x_3/R и r/R. Потенциал убывает от значения $\frac{\varphi}{\pi G\sigma} = 0.972$ для внутренней кривой до $\frac{\varphi}{\pi G\sigma} = 0.406$ на внешней

Таким образом, выражения (9.56) *и* (9.67), *полученные независимыми друг от друга методами, хотя и различаются по форме, на самом деле описывают один и тот же пространственный потенциал однородного круглого диска.*

На рис. 68 показаны кривые равного потенциала во внешних точках однородного круглого диска.

Задача 9.6. *Даны два концентрических и соосных (по диаметрам) однородных*

[7] Важно заметить: хотя в данном методе мы делали переход от потенциала сфероида *во внешней его точке*, в итоге нами был получен потенциал (9.67) однородного диска в точках *всего пространства*.

круглых диска, плоскости которых наклонены под углом θ. Радиусы и поверхностные плотности $R^{(1)}, \sigma^{(1)}$ и $R^{(2)}, \sigma^{(2)}$ у этих дисков могут различаться между собой. Найти суммарный пространственный потенциал таких дисков.

Решение. Оно находится совершенно аналогично решению предыдущей задачи (9.4) для колец, лишь вместо (9.38) надо взять, естественно, потенциал круглого диска в форме (9.56) или же в форме (9.67). ▼

§ 9.6. Нахождение эквигравитирующих стержней для объёмных тел методом расслоения на диски

Из дисков и колец можно сконструировать самые разные объёмные осесимметричные тела. Полагая далее круговой диск или кольцо теми элементами, для которых известны эквигравитирующие стержни, сводим далее задачу к объединению таких элементарных стержней для всего тела. Объединение эквигравитирующих стержней для объёмного тела будем выполнять методом синтеза. Но следует сразу подчеркнуть, что отнюдь не все диски или кольца могут делать вклад в полный заменяющий стержень. Этот вопрос надлежит решать конкретно в каждой задаче.

Дано однородное осесимметричное тело (рис. 69, *а*), меридиональное сечение которого описывается (полностью или частично) функцией $R = R(h)$ и R — радиус диска, расположенного на высоте h. При этом на поверхности и внутри фигуры допускается существование конечного числа особых точек[8] (на поверхности это точки излома контура, внутри — особые точки аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь тела).

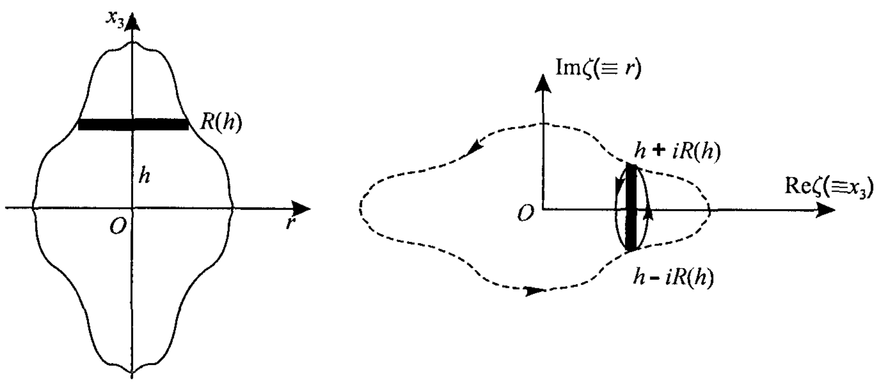


Рис. 69. Меридиональный контур осесимметричного тела с сечением элементарного диска радиусом $R(h)$ (выделен жирным); *а* — до поворота; *б* — наклоненное на 90° вправо изображение этого тела на комплексной плоскости. Стрелками показано направление обхода контуров интегрирования

Эти особые точки тела будут служить концами одномерных заменяющих отрезков (одного или нескольких, обоснование см. в § 9.8). Чтобы такие отрезки действительно являлись эквигравитирующими для объёмного осесимметричного тела, должна выполняться следующая теорема.

[8] Вопрос о существовании и числе особых точек в каждом конкретном случае сводится к исследованию функции комплексного переменного $\mu(\zeta)$ из (9.73) или, что эквивалентно, к исследованию потенциала $\varphi(\zeta)$. Об этом подробнее см. в гл. 11.

Теорема 5 (Э – 3). *Для однородного осесимметричного тела плотность распределения гравитирующего вещества в точке ζ на одномерных замещающих отрезках даётся интегралом*

$$\mu(\zeta) = -2i\rho \int\limits_{h_1}^{h_2} \sqrt{R^2(h) + (\zeta - h)^2} dh. \tag{9.73}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представим тело состоящим из круговых плоских дисков толщиной dh и поверхностной плотностью $\rho\, dh$. Тогда, согласно (9.30), потенциал любого из промежуточных дисков может быть представлен элементарным гравитирующим отрезком (рис. 69, *б*) с распределением плотности

$$d\mu(\zeta) = -2i\rho\sqrt{R^2(h) + (\zeta - h)^2} dh, \tag{9.74}$$

причём сам потенциал имеет вид

$$d\varphi(x_3) = -2iG\rho dh \int \frac{\sqrt{R^2(h) + (\zeta - h)^2}}{x_3 - \zeta} d\zeta. \tag{9.75}$$

Полный потенциал находится интегрированием вкладов от всех элементарных отрезков

$$\varphi(x_3) = -2iG\rho \iint \frac{\sqrt{R^2(h) + (\zeta - h)^2}}{x_3 - \zeta}\, dh\, d\zeta. \tag{9.76}$$

Любой интеграл по элементарному отрезку можно заменить половиной интеграла по контуру, плотно охватывающему этот отрезок (см. рис. 69, *б*). Расширяя теперь этот контур до меридионального сечения фигуры (а это можно сделать, так как никаких особых точек при раздувании контура мы не встретим) и поступая так с контурами вокруг всех других элементарных отрезков, в итоге потенциал (9.76) всего тела заменяем контурным интегралом

$$\varphi(x_3) = -iG\rho \oint\limits_C \frac{d\zeta}{x_3 - \zeta} \left(\int\limits_{h_1}^{h_2} \sqrt{R^2(h) + (\zeta - h)^2} dh \right). \tag{9.77}$$

Подчеркнём, что переход от (9.76) *к* (9.77) *стал возможен вследствие замены интегрирования по любому из промежуточных стержней интегрированием по одному и тому же контуру C — сечению тела комплексной плоскостью $\zeta = x_3 + ir$. Как известно, сумма таких контурных интегралов может быть заменена единственным контурным интегралом от суммы подынтегральных выражений. Поскольку сам контурный интеграл* (9.77) *сводится, в свою очередь, к одному или нескольким интегралам по одномерным стержням (подробнее о редукции контура интегрирования см.* § 9.8.2), *то полная плотность на каждом итоговом стержне действительно даётся выражением* (9.73). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь рассматривается только случай, когда потенциал $\varphi(\zeta)$ имеет лишь две особые точки и тело имеет, следовательно, один заменяющий стержень. Относительно выбора пределов интегрирования в (9.73) должно быть следующее. Если порядок алгебраического уравнения для неизвестной h

$$R^2(h) + (\zeta - h)^2 = 0 \tag{9.78}$$

больше или равен двум, то оба предела интегрирования h_1 и h_2 должны быть среди корней этого уравнения. Если же уравнение (9.78) первого порядка, то его решение даст только один корень h_2, а нижний предел для переменной h подбирается тогда из дополнительных условий задачи.

Однако в некоторых случаях ситуация со стержнями может быть более сложной. Если особых точек у функции потенциала $\varphi(\zeta)$ больше, чем две, то стержень может быть либо составным (в § 9.15 приводятся примеры), либо стержни образуют целые конструкции (или «скелеты», примеры см. в § 9.8).

§ 9.7. Эквигравитирующие стержни для однородного сжатого сфероида и тонкого шарового сегмента

Для этих тел стержни являются цельными.

Задача 9.7. *Найти данным выше методом стержень для сжатого сфероида.*

Решение. В этом случае

$$R^2(h) = a_1^2\left(1 - \frac{h^2}{a_3^2}\right), \tag{9.79}$$

и выражение (9.73) для плотности записывается в виде:

$$\mu(\zeta) = -2i\rho\int\limits_{h_1}^{h_2}\sqrt{-\left(\frac{a_1^2}{a_3^2} - 1\right)h^2 - 2\zeta h + \zeta^2 + a_1^2}\,dh\,. \tag{9.80}$$

Здесь h_1 и h_2 — корни квадратного уравнения

$$h^2 + \frac{2a_3^2\zeta}{a_1^2 - a_3^2}h - \frac{a_3^2(\zeta^2 + a_1^2)}{a_1^2 - a_3^2} = 0, \tag{9.81}$$

решения которого

$$h_{1,2} = \frac{a_1a_3\left(-\zeta\frac{a_3}{a_1} \pm \sqrt{\zeta^2 + a_1^2 - a_3^2}\right)}{a_1^2 - a_3^2}. \tag{9.82}$$

Особых точек здесь две, так что заменяющий стержень в данном примере только один. Поэтому выражение (9.80), представленное в виде

$$\mu(\zeta) = -2i\rho\frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{a_3}\int\limits_{h_1}^{h_2}\sqrt{(h_2 - h)(h - h_1)}\,dh\,, \tag{9.83}$$

после интегрирования с учётом пределов (9.82) даст

$$\mu(\zeta) = -i\pi\rho\frac{a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 - a_3^2}\right). \tag{9.84}$$

Этот результат для сфероида совпадает с (9.7), найденным там другим способом. ▼

Задача 9.8. *Найти эквигравитирующий стержень для шарового сегмента, не превосходящего полушар.*

Решение. Выделим сечением в нём круглый диск на высоте h (рис. 70) с радиусом

$$r_m(h) = \sqrt{a^2 - 2h(R - H) - h^2} \tag{9.85}$$

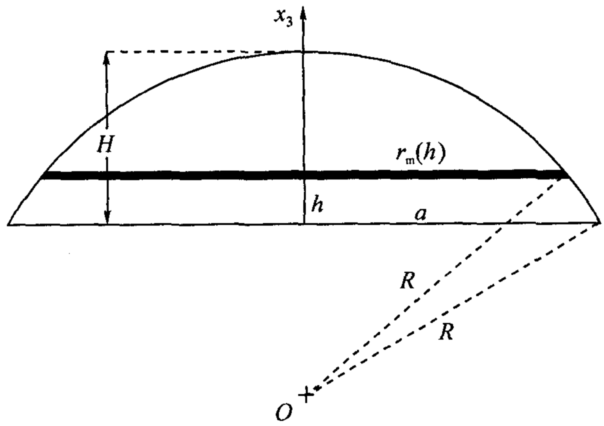


Рис. 70. Сечение гравитирующего шарового сегмента с острыми краями, имеющего высоту H. На промежуточной высоте h расположен элементарный круглый диск толщиной dh. R — радиус образующего шара

и толщиной dh. Тогда для шарового сегмента, согласно (9.73) и (9.74), получим

$$\mu(\zeta) = -2i\rho \int\limits_{h_1(\zeta)}^{h_2(\zeta)} \sqrt{a^2 + \zeta^2 - 2h(\zeta + R - H)}\, dh. \tag{9.86}$$

Под интегралом в (9.86) находится полином первого порядка относительно неизвестной h. Из него следует, что верхний предел равен

$$h_2(\zeta) = \frac{a^2 + \zeta^2}{2(\zeta + R - H)}. \tag{9.87}$$

Что касается нижнего предела, то легко видеть, что в данном примере следует взять $h_1 = 0$. С учётом указанных пределов интеграл (9.86) равен

$$\mu(\zeta) = -\frac{2}{3} i\rho \frac{\left(a^2 + \zeta^2\right)^{3/2}}{\zeta + R - H}; \quad -a \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant a. \tag{9.88}$$

Обратим внимание, что распределение плотности в найденном стержне *асимметрично* относительно его геометрического центра. Наличие такой асимметрии в стержне скажется, в частности, в том, что для сегмента не существует *эквигравитирующего диска.*

Проверка формулы (9.88) интегрированием по ζ подтверждает, что масса найденного стержня

$$M = \pi\rho H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) \tag{9.89}$$

действительно равна массе сегмента. Потенциал же стержня с плотностью (9.88) во внешней точке $(0, x_3)$, как можно показать, равен

$$\varphi_{\text{сегм}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho \left[-\frac{R^3 + (a^2 + x_3^2)^{3/2}}{H - R - x_3} - x_3^2 + (R - H)x_3 - R^2 - RH + \frac{H^2}{2}\right], \tag{9.90}$$

и действительно совпадает с внешним потенциалом сегмента, вычисленным на оси Ox_3 прямым способом. ▼

З а д а ч а 9.9. *Доказать* (9.90).

Решение. Это сделано в (12.151). ▼

Таким образом, стержень с чисто мнимой плотностью (9.88) является эквигравитирующим данному сегменту[9].

Задача 9.10. *Найти внешний потенциал однородного шарового сегмента.*

Решение. Рассмотрим шаровой сегмент, не превосходящий полушар ($H \leqslant R$). Его внешний потенциал находим с помощью эквигравитирующего стержня (9.88):

$$\varphi_{\text{сегм}}(r,\, x_3) = -\frac{2}{3} iG\rho \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{\left(a^2+\zeta^2\right)^{3/2}}{R-H+\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{r^2+(x_3-\zeta)^2}}. \tag{9.91}$$

Заменой $\zeta = is$ и преобразованиями приводим (9.91) к виду

$$\varphi_{\text{сегм}}(r,\, x_3) = \frac{2\sqrt{2}}{3} G\rho \int\limits_0^a \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{L} \left(\frac{R^2}{(R-H)^2+s^2} - 1\right) \left[(R-H)\sqrt{L+x} + s\sqrt{L-x}\right] ds, \tag{9.92}$$

где

$$x = r^2 + x_3^2 - s^2; \quad y = 2x_3 s; \quad L = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Анализ показывает, что в произвольной внешней точке $(r,\, x_3)$ интегралы в (9.92) *гиперэллиптические*. В связи с этим любопытно отметить, что у линзы, образованной двумя — «подошва к подошве» — сегментами, внешний потенциал всё же выражается через *полные эллиптические интегралы*, см. раздел 10.13.4!

Однако на оси симметрии $r = 0$ потенциал сегмента, как показано в (9.90), выражается через элементарные функции. Кроме того, в плоскости «подошвы» сегмента, когда $x_3 = 0$, $y = 0$, $L = x = r^2 - s^2$, внешний потенциал сегмента принимает вид

$$\varphi_{\text{сегм}}(r, 0) = \frac{4}{3} G\rho (R-H) \int\limits_0^a \sqrt{\frac{a^2-s^2}{r^2-s^2}} \left(\frac{R^2}{(R-H)^2+s^2} - 1\right) ds, \tag{9.93}$$

и выражается через полные эллиптические интегралы:

$$\varphi_{\text{сегм}}(r, 0) = \frac{4}{3} G\rho (R-H)\, r \left\{\frac{r^2-a^2-R^2}{r^2} \mathrm{K}(k) + \frac{R^4}{r^2 (R-H)^2} \Pi[n, k] - \mathrm{E}(k)\right\}, \tag{9.94}$$

причём

$$k = \frac{a}{r} < 1; \quad n = -\frac{a^2}{(R-H)^2}.$$

Подчеркнём: формула (9.94) эквивалентна (10.219), полученной, кстати, совершенно другим методом.

Переход к полушару

Для потенциала на оси симметрии:

$$\varphi_{\text{полушара}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho \left[\frac{R^3 + (R^2+x_3^2)^{3/2}}{x_3} - x_3^2 - \frac{3}{2}R^2\right]; \tag{9.95}$$

[9] Подчеркнём, что стержень с плотностью (9.88) описывает сегмент, не превосходящий полушар ($H \leqslant R$). Случай сегмента, бо́льшего, чем полушар, исследован в § 9.14.

в пространстве

$$\varphi_{\text{полушара}}(r, x_3) = \frac{2\sqrt{2}}{3} G\rho \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - s^2}}{L} s\sqrt{L - x} ds \tag{9.96}$$

(гиперэллиптические интегралы); в плоскости подошвы

$$\varphi_{\text{полушара}}(r, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi G\rho \frac{R^3}{r^3}. \tag{9.97}$$

Заметим, что при переходе к полушару ($\kappa = R - H \to 0$) в (9.94) требуется найти любопытный предел

$$\lim_{\kappa \to 0} \frac{\Pi[n(\kappa), k]}{\kappa} = \frac{\pi}{2R}. \tag{9.98}$$

▼

§ 9.8. Нахождение эквигравитирующих стержней осесимметричных тел с помощью интеграла Коши

Теория функций комплексного переменного позволит нам сейчас доказать и обосновать само существование эквигравитирующих отрезков у тел с азимутальной симметрией и, более того, независимым от прежнего методом находить мнимые или вещественные одномерные распределения плотности вещества на них.

9.8.1. Применение интеграла Коши для ньютоновского потенциала

Используя фактическую двумерность объёмного осесимметричного тела, для задания формы которого достаточно координат x_3 и $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, введём изображающую комплексную плоскость $\zeta = x_3 + ir$. На этой плоскости тело T окружим двумя контурами Γ и Γ_1, такими, что пробная точка $P(0, x_3)$ на полярной оси находится между ними (рис. 71).

Тогда, согласно теории *интеграла Коши* (см., например, [40]), потенциал тела в точке P можно записать в виде разности двух контурных интегралов:

$$\varphi(x_3) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - x_3} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - x_3} d\zeta. \tag{9.99}$$

Будем теперь неограниченно расширять внешний контур Γ_1; тогда первый контурный интеграл в (9.99) исчезнет (поскольку потенциал тела на бесконечности обращается в нуль), и у нас останется только модифицированный (испытуемая точка — вне контура!) интеграл Коши

$$\varphi(x_3) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta. \tag{9.100}$$

Им в дальнейшем мы и будем пользоваться.

9.8.2. Редукция контура Г к отрезкам и материальным точкам

Оставшийся интеграл (9.100) будет отличен от нуля, поскольку внутри контура Γ обязательно есть особые точки $A, B, \ldots$ функции $\varphi(\zeta)$. Сама же функция $\varphi(\zeta)$ получается простой заменой x_3 на $\zeta = x_3 + ir$ в потенциале $\varphi(x_3)$ тела на оси симметрии во внешней точке $(0, x_3)$. Строго говоря, данная функция $\varphi(x_3)$ может быть многозначной и следует выбрать

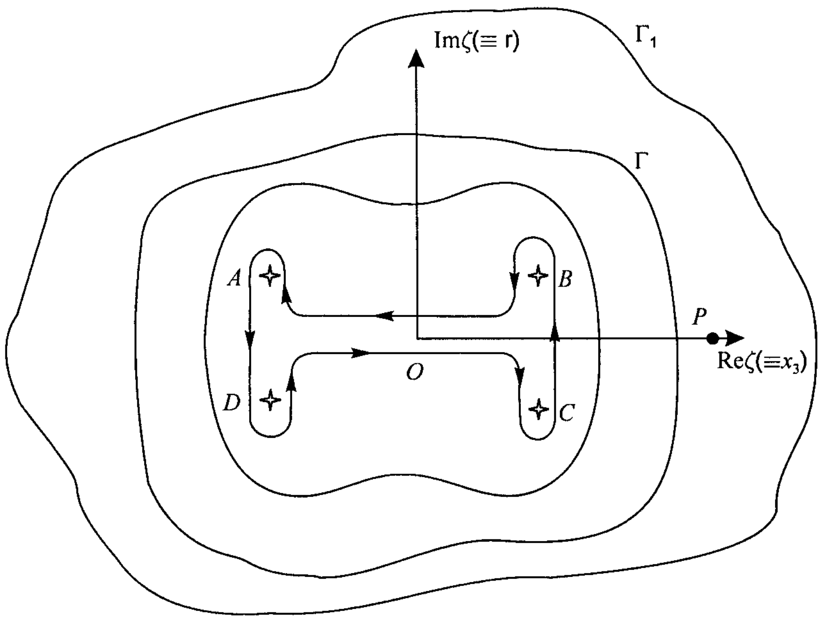


Рис. 71. Сечение осесимметричного тела в комплексной плоскости $z = x_3 + ir$. A, B, C и D — особые точки функции $\varphi(\zeta)$ внутри контура. Испытуемая точка P расположена между внутренним Γ и внешним Γ_1 контурами. Стрелками показано направление обхода по редуцированному контуру интегрирования

именно ту её ветвь, которая при очень больших ζ ведет себя как $\varphi(\zeta) \propto \zeta^{-1}$. Не изменяя значения интеграла (9.100), начнём стягивать контур Γ от самых удалённых окрестностей внутрь к телу и, деформируя этот контур, натянем его на указанные особые точки. Получится стержень (если особых точек только две), или некий многоугольник (если особых точек больше двух).

Подчеркнём, что стягивание контура представляет собой процесс аналитического продолжения для выбранной нами ветви функции $\varphi(\zeta)$.

На заключительном этапе мы деформируем контурный многоугольник и превращаем его, в зависимости от числа особых точек, в один стержень или систему стержней, образующих эквигравитирующий каркас исходного тела. В итоге, именно таким образом в пределе мы получим один — если особых точек две — или несколько (если особых точек больше) эквигравитирующих отрезков[10] (рис. 71). Но необходимо подчеркнуть, что если число особых точек нечётное, то кроме стержней, в наборе эквигравитирующих элементов какого-либо тела появятся и *изолированные материальные точки.*

Рассмотрим один из полученных таким образом стержней, например BC (см. рис. 72). Одномерная плотность $\mu(\zeta)$ на выбранном стержне даётся, согласно (9.100) и с учётом обычного правила изменения знака $d\zeta$, разностью значений рассматриваемой функции на двух ветвях:

[10] Необходимо отметить: поскольку на последнем этапе деформация контурного многоугольника может производиться разными путями, то получаемые при этом системы стержней для одного и того же тела также могут несколько различаться между собой. Но не смотря на это, такие контуры должны описывать гравитационное поле одного и того же тела! Кроме того, если в результате редукции контура выделяются *изолированные* особые точки для аналитического продолжения внешнего потенциала, то кроме стержней в комплект эквигравитирующих элементов будут входить и изолированные материальные точки. Примеры комбинаций стержней и материальных точек нам встретятся ниже в § 9.14 и § 9.15.

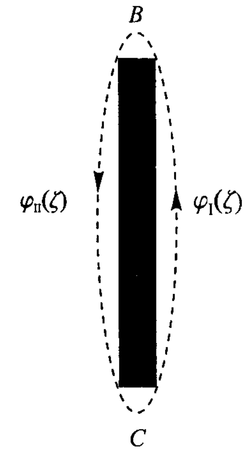


Рис. 72. Одномерный эквигравитирующий стержень крупным планом. Через $\varphi_{II}(\zeta)$ и $\varphi_{I}(\zeta)$ обозначены значения потенциала на разных ветвях

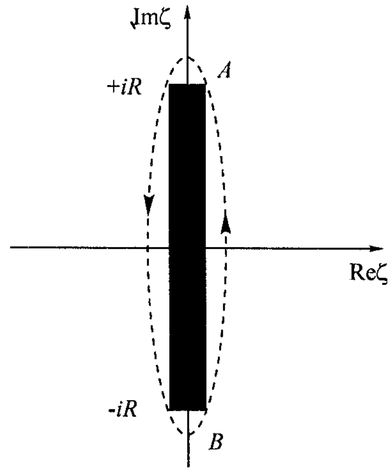


Рис. 73. Эквигравитирующий стержень в комплексной плоскости z, ограниченный особыми точками A и B. Штрихами изображён контур интегрирования, огибающий данный стержень

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i G}\left[\varphi_{I}(\zeta) - \varphi_{II}(\zeta)\right]. \tag{9.101}$$

Пример 3. Дан однородный круглый диск (см. рис. 66, *а*) с потенциалом на оси симметрии $\varphi(x_3)$ из (9.35). Сделаем в этом выражении указанную выше замену $x_3 \to \zeta = x_3 + ir$. Изображение диска поворачивается тогда на 90^0 (рис. 66, *б*), а потенциал принимает вид

$$\varphi(\zeta) = 2\pi G\sigma(\sqrt{R^2+\zeta^2} - \zeta) \tag{9.102}$$

и имеет требуемую асимптотику $\varphi \propto \zeta^{-1}$ при $|\zeta| \gg R$.

Особые точки (точки ветвления!) здесь $\zeta = \pm iR$, так что контур Γ даст в пределе именно один отрезок BA (рис. 73). При огибании особых точек A и B радикал $\sqrt{R^2+\zeta^2}$ изменяет свой знак, так что

$$\begin{aligned} \varphi_{I}(\zeta) &= 2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2+\zeta^2} - \zeta\right), \\ \varphi_{II}(\zeta) &= -2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2+\zeta^2} + \zeta\right) \end{aligned} \tag{9.103}$$

и, согласно (9.100), в целом для стержня BA мнимая плотность в точке ζ будет равна

$$\mu(\zeta) = -2i\sigma\sqrt{R^2+\zeta^2}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R, \tag{9.104}$$

что совпадает с выражением (9.30), найденным там другим путём.

Задача 9.11. *Найти эквигравитирующие стержни для однородного, ограниченного по высоте прямого кругового цилиндра* (рис. 74, *а*).

Решение. Внешний потенциал такого тела на оси Ox_3 после замены $x_3 \to \zeta$ даётся выражением

$$\varphi(\zeta) = \pi G\rho \left[\begin{array}{l} (\zeta+H)\sqrt{R^2+(\zeta+H)^2} - (\zeta-H)\sqrt{R^2+(\zeta-H)^2} + \\ +R^2 \ln \dfrac{\zeta+H+\sqrt{R^2+(\zeta+H)^2}}{\zeta-H+\sqrt{R^2+(\zeta-H)^2}} \mp 4H\zeta \end{array} \right], \qquad (9.105)$$

причём при последнем члене знак «−» следует брать при $x_3 \geqslant H$, а «+» при $x_3 \leqslant -H$.

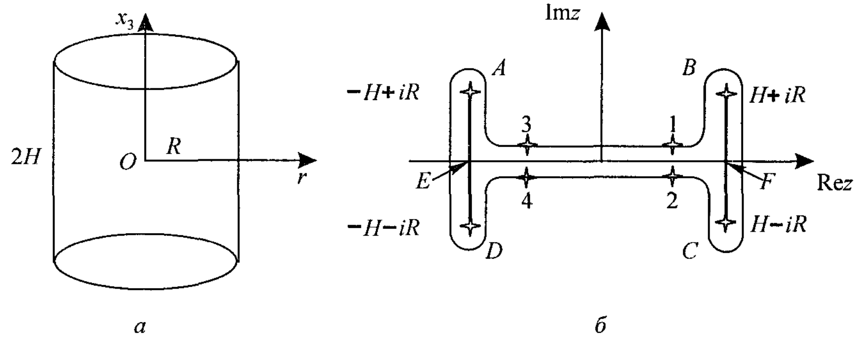


Рис. 74. Круговой цилиндр высотой $2H$ (*а*) и конструкция для него из трёх эквигравитирующих стержней (*б*)

При нахождении эквигравитирующих отрезков для такого тела последний член в (9.105) можно опять вычеркнуть (см. пример с диском), так как он не даст никакого вклада в контурный интеграл (9.100). Особые точки подынтегральной функции $\varphi(\zeta)$ здесь $\zeta = -H \pm iR$; $\zeta = H \pm iR$. Контур Γ после редукции сводится к трём отрезкам (см. рис. 74, *б*). Имеем: отрезок CB с концами $H - iR, H + iR$ и плотностью на нём

$$\mu_1(\zeta) = -\frac{1}{2}i\rho \left[\begin{array}{l} -2(\zeta-H)\sqrt{R^2+(\zeta-H)^2} + \\ +R^2 \ln \dfrac{\zeta-H-\sqrt{R^2+(\zeta-H)^2}}{\zeta-H+\sqrt{R^2+(\zeta-H)^2}} \end{array} \right]; \qquad (9.106)$$

отрезок DA с концами $-H - iR, -H + iR$ и с плотностью

$$\mu_2(\zeta) = -\frac{1}{2}i\rho \left[\begin{array}{l} 2(\zeta+H)\sqrt{R^2+(\zeta+H)^2} + \\ +R^2 \ln \dfrac{\zeta+H+\sqrt{R^2+(\zeta+H)^2}}{\zeta+H-\sqrt{R^2+(\zeta+H)^2}} \end{array} \right]. \qquad (9.107)$$

Далее, поскольку в точках 1 и 2 на рис. 74, *б* значение $\ln\left[\zeta - H + \sqrt{R^2+(\zeta-H)^2}\right]$ различается на $2\pi i$, то возникает ещё и третий отрезок EF длиной $-H \leqslant \zeta \leqslant H$ с постоянной вещественной плотностью

$$\mu_3(\zeta) = \pi\rho R^2 = \text{const}. \qquad (9.108)$$

Вклады в массу от отрезков CB и DA,

$$M_1 = -i\pi\rho R^3; \; M_2 = i\pi\rho R^3, \qquad (9.109)$$

оказываются чисто мнимыми и, кроме того, сопряжёнными друг другу. Следовательно, при сложении эти вклады взаимно сокращаются. Таким образом, вклад в массу цилиндра даёт только вещественный отрезок EF:

$$M = 2\pi\rho R^2 H. \qquad (9.110)$$

Но вклад во внешний потенциал цилиндра дают все три найденных отрезка. Таким образом, потенциал цилиндра данного типа оказывается равен сумме трёх интегралов:

$$\varphi_{\text{цил}} = G\left(I_1 + I_2 + I_3\right), \tag{9.111}$$

где

$$\begin{gathered}
I_1 = \int\limits_{H-iR}^{H+iR} \frac{\mu_1(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta; \\
I_2 = \int\limits_{-H-iR}^{-H+iR} \frac{\mu_2(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta; \\
I_3 = \pi\rho R^2 \ln \frac{\sqrt{r^2 + (H - x_3)^2} + H - x_3}{\sqrt{r^2 + (H + x_3)^2} - H - x_3}.
\end{gathered} \tag{9.112}$$

Эти аналитические результаты были проверены численно. ▼

Задача 9.12. *Найти эквигравитирующий стержень для тонкой «шапочки» на сфере.*

Решение. Пусть «шапочка» ACB на сфере радиусом R имеет угол раствора 2α и поверхностную плотность σ (рис. 75). Начало отсчёта выберем в центре сферы и ось Ox_3 сделаем осью симметрии «шапочки». Тогда потенциал для неё в точке $(0, x_3)$ после замены $x_3 \to \zeta$ даётся при $z > R$ выражением

$$\varphi(\zeta) = 2\pi G\sigma R \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2R\zeta\cos\alpha + R^2} - R + \zeta}{\zeta}. \tag{9.113}$$

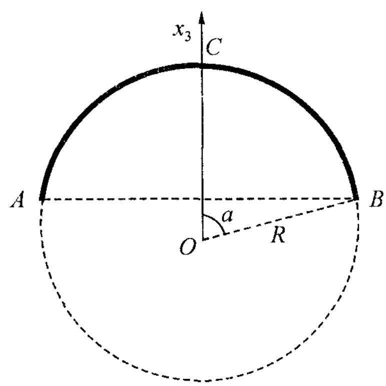


Рис. 75. Тонкая гравитирующая «шапочка» на сфере радиусом R

Здесь есть две особые точки $\zeta = Re^{\pm i\alpha}$, так что «длина» искомого отрезка равна $L = 2iR\sin\alpha$. В числителе (9.113) вклад в контурный интеграл (а значит, и в плотность стержня) даст только радикал. Следовательно, эквигравитирующий стержень имеет распределение плотности

$$\mu(\zeta) = -2iR\sigma \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2R\zeta\cos\alpha + R^2}}{\zeta}, \quad L = R(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}). \tag{9.114}$$

Очевидно, и здесь радиус сходимости ряда Лапласа равен $\frac{L}{2}$. ▼

§ 9.9. Эквигравитирующий «крест» для однородной симметричной линзы, ограниченной двумя параболоидами вращения

Найдём эквигравитирующие стержни для однородного тела в виде линзы, ограниченной двумя параболоидами вращения.

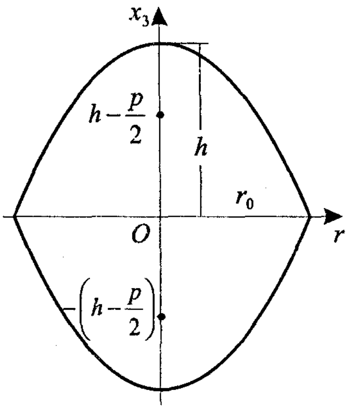


Рис. 76. Симметричная линза, ограниченная сверху и снизу параболоидами вращения вокруг оси Ox_3. Точками отмечены фокусы.

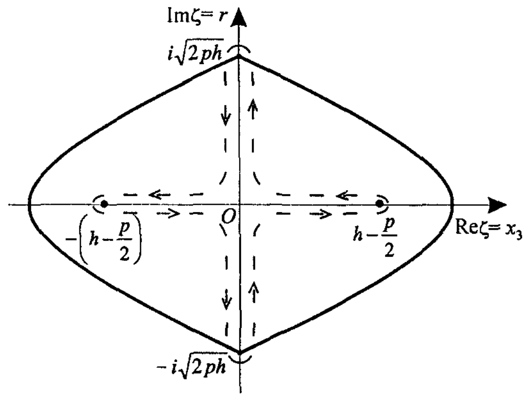


Рис. 77. Стягивание контура интегрирования у параболоидной линзы в «крест»

Дано однородное (плотности ρ) тело, ограниченное сверху и снизу параболоидами вращения (рис. 76). Выбрав начало цилиндрической системы координат в точке O, запишем уравнение верхней

$$2p(h - x_3) = r^2 \tag{9.115}$$

и нижней

$$2p(h + x_3) = r^2 \tag{9.116}$$

парабол линзы. Здесь h — полутолщина линзы, $\frac{p}{2}$ — расстояние между вершиной параболы и точкой её фокуса.

Объём линзы равен

$$V = 4\pi p \int\limits_0^h (h - x_3')\, dx_3' = 2\pi p h^2 = \pi r_0^2 h\,; \text{ где } r_0 = \sqrt{2ph}\,, \tag{9.117}$$

так что её масса $M = \pi \rho r_0^2 h$.

Потенциал на оси симметрии Ox_3

$$\varphi(x_3) = 2\pi \mathrm{G} \rho \left\{ \int\limits_0^{\mathrm{h}} dx_3' \int\limits_0^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + (x_3 - x_3')^2}} + \int\limits_{-\mathrm{h}}^0 dx_3' \int\limits_0^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + (x_3 - x_3')^2}} \right\} \tag{9.118}$$

после проведения интегрирования и преобразований можно записать в виде

$$\varphi(x_3) = \frac{MG}{h^2} \left\{ \sqrt{x_3^2 + 2ph} - x_3 + \left[\frac{p}{2} + x_3 - h\right] \ln \frac{x_3 + p - \sqrt{x_3^2 + 2ph}}{p} + \right. \\ \left. + \left[x_3 + h - \frac{p}{2}\right] \ln \frac{\sqrt{x_3^2 + 2ph} - x_3 + p}{p} \right\}. \tag{9.119}$$

В частности, при больших x_3 потенциал $\varphi(x_3)$ имеет нужную асимптотику

$$\varphi(x_3) \sim \frac{MG}{x_3}. \tag{9.120}$$

Особые точки в формуле (9.119) появляются:

а) при обращении в нуль радикала $\sqrt{x_3^2 + 2ph}$, т. е. при

$$x_3 = \pm i\sqrt{2ph}; \tag{9.121}$$

б) *в точках фокусов обоих парабол*, поскольку в них обращаются в нуль аргументы у логарифмов. Расстояния до фокусов от центра линзы

$$x_3 = \pm(h - \tfrac{p}{2}). \tag{9.122}$$

На плоскости $\zeta = x_3 + ir$ линза повернута на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 77). Внешний контур в интеграле Коши (9.100) при стягивании образует «крест»: вдоль оси симметрии фигуры между точками фокусов парабол расположен фокальный вещественный стержень длиной $2h - p$, поперек ему — мнимый стержень.

Найдем плотность на вещественном отрезке. При огибании точки $h - \frac{p}{2}$ радикал $\sqrt{x_3^2 + 2ph}$ и логарифм $\ln \frac{\sqrt{x_3^2 + 2ph} - x_3 + p}{p}$ остаются непрерывными функциями и разрыва не претерпевают. Однако другой логарифм

$$\ln \frac{x_3 + p - \sqrt{x_3^2 + 2ph}}{p}$$

терпит здесь разрыв на $2\pi i$. В итоге, на вещественном одномерном отрезке распределение плотности оказывается равным (M — полная масса линзы)

$$\mu_1(\zeta) = \frac{M}{h^2}\left(h - \frac{p}{2} - |\zeta|\right), \quad -\left(h - \frac{p}{2}\right) \leqslant \zeta \leqslant h - \frac{p}{2}. \tag{9.123}$$

На краях реального стержня ($|\zeta| = h - \frac{p}{2}$) плотность исчезает $\mu_1 = 0$. С этим стержнем связана масса

$$M_1 = \int\limits_{-\left(h-\frac{p}{2}\right)}^{h-\frac{p}{2}} \mu_1(\zeta)\, d\zeta = \frac{M}{h^2}\left(h - \frac{p}{2}\right)^2. \tag{9.124}$$

Сложнее ситуация на втором, мнимом отрезке. Здесь при обходе точки ветвления ir_0 (напомним, что $r_0 = \sqrt{2ph}$) радикал $\sqrt{r_0^2 + \zeta^2}$, естественно, изменяет свой знак. Учитывая это, после многих преобразований находим плотность на втором отрезке:

$$\begin{aligned}\mu_2(\zeta) = -i\frac{M}{\pi h^2}\Bigg\{&\sqrt{r_0^2 + \zeta^2} - \frac{1}{2}\left(h - \frac{p}{2}\right)\ln\frac{h + \frac{p}{2} - \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}}{h + \frac{p}{2} + \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}} + \\ &+ i\zeta\left(\operatorname{arctg}\frac{p - \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}}{i\zeta} - \operatorname{arctg}\frac{p + \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}}{i\zeta}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{9.125}$$

где

$$-r_0 \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant r_0 \,. \tag{9.126}$$

Масса мнимой перекладины «креста», как нетрудно показать, равна

$$M_2 = \int\limits_{-r_0}^{r_0} \mu_2(\zeta)\, d\zeta = M\frac{2r_0^2 - p^2}{4h^2}. \tag{9.127}$$

Складывая найденные массы (9.124) и (9.127), получим полную массу «креста» (а значит, и исходной линзы)

$$M_1 + M_2 = \pi\rho r_0^2 h = M, \tag{9.128}$$

что и служит проверкой найденных стержней по массе.

Таким образом, однородная параболоидная линза имеет эквигравитирующую систему стержней в виде «креста»: его основание состоит из вещественного неоднородного фокального стержня длиной $2h - p$, а перекладина «креста» есть стержень с чисто мнимым распределением плотности.

Задача 9.13. *Аналитическим методом проверить найденные эквигравитирующие стержни для параболоидной линзы по массе и, численно, по потенциалу.*

Пояснение к задаче 9.13. Нахождение интегралов (9.124) и (9.127) затруднений не представляет. При проверке же по потенциалу вклад в пробную точку (r, x_3) в конечном виде удаётся найти только от вещественного отрезка:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, x_3) &= G \int\limits_{-\left(h-\frac{p}{2}\right)}^{h-\frac{p}{2}} \frac{\mu_1(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} = \\ &= \frac{MG}{h^2}\left\{ z_1 I_1 + z_2 I_2 + 2\sqrt{r^2 + x_3^2} - \sqrt{r^2 + z_1^2} - \sqrt{r^2 + z_2^2} \right\}, \end{aligned} \tag{9.129}$$

где

$$\begin{aligned} &I_1 = \ln\frac{z_1 + \sqrt{r^2 + z_1^2}}{\sqrt{r^2 + x_3^2} - x_3}\,, \quad I_1 = \ln\frac{z_2 + \sqrt{r^2 + z_2^2}}{\sqrt{r^2 + x_3^2} + x_3}\;; \\ &z_1 = h - \frac{p}{2} - x_3\,, \quad z_2 = h - \frac{p}{2} + x_3\,. \end{aligned} \tag{9.130}$$

Вклад же в потенциал от мнимого отрезка

$$\varphi_2(r, x_3) = G \int\limits_{-ir_0}^{ir_0} \frac{\mu_2(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} \tag{9.131}$$

на пробную точку вне оси симметрии (и вне экваториальной плоскости линзы) не выражается полностью и через эллиптические интегралы. Поэтому в общем, не вырожденном случае член (9.131) допускает только численную проверку.

Задача 9.14. *Вычислить интеграл* (9.131) *в точках экваториальной плоскости линзы, предварительно положив в нём* $x_3 = 0$.

Интересный результат мы получим при софокусном «стягивании» массы параболоидной линзы[11]. Зафиксировав у неё точки фокусов, устремим $p \to 0$; тогда и $r_0 \to 0$. В этом пределе, как следует из уравнений обеих парабол (9.115) и (9.116) и того, что $\pi p r^2 \to \mu$, параболоидная линза при сохранении массы превращается *в одномерный стержень с распределением вещественной плотности как раз вида* (9.123). Действительно, при $p \to 0$ масса линзы M также стремится к массе стержня M_1 (см. (9.124)). При софокусном предельном переходе *мнимый стержень исчезает*. Потенциал же получающегося вещественного стержня выражается через элементарные функции, как это видно из (9.129) при $p \to 0$.

Подчеркнём существенное отличие параболоидной линзы от классического однородного вытянутого сфероида. С одной стороны, как мы убедились, в обоих случаях в пределе софокусного «уминания» массы получаются вещественные стержни (с разными, конечно, распределениями плотности, ср. формулы (9.123) и (9.6)). Но важнее другое: если стержень сфероида является эквигравитирующим телом для исходной конфигурации (а значит, и всем промежуточным софокусным сфероидам), то вещественный стержень параболоидной линзы не является эквигравитирующим ни самой линзе в исходном её состоянии, ни одному из её промежуточных состояний. В самом деле, у параболоидной линзы эквигравитирующим является «крест», состоящий не только из вещественного, но и мнимого отрезка.

Дисковый предел для параболоидной линзы не существует, так как при $h \to 0$ надо потребовать и $p \to 0$; тогда $r_0 \sim h$ и радиус диска исчезает вместе с его толщиной.

§ 9.10. Эквигравитирующие мнимые стержни для вещественных неоднородных круглых дисков

Для многих задач физики, небесной механики и звёздной динамики необходимо знать электростатические и гравитационные поля неоднородных дисков.

Рассмотрим здесь *вещественные неоднородные* круглые диски, в которых существует круговая симметрия в распределении массы.

Дан неоднородный плоский круглый диск радиуса R и плотностью $\sigma(r)$.

Теорема 6. *Одномерным эквигравитирующим телом для такого диска является стержень «длиной» $L = 2iR$ с мнимой плотностью*

$$\mu(\zeta) = -2i \int\limits_{-i\zeta}^{R} \sigma(r) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{9.132}$$

Доказательство.

Спроецируем массу диска на диаметр вдоль оси Ox_1. Это даёт одномерный вещественный стержень длиной $2R$ с массой $dM = \mu(x_1)\,dx_1$ в интервале от x_1 до $x_1 + dx_1$ и вещественной плотностью

$$\mu(x_1) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \sigma\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) dx_2 = \int\limits_{x_1}^{R} \sigma(r) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-{x_1}^2}}. \tag{9.133}$$

[11] Ранее в теории потенциала (теорема Маклорена — Лапласа) рассматривали только софокусные однородные гравитирующие эллипсоиды.

Нижний предел интегрирования здесь указывает на то, что вклад в плотность на данном интервале дают только те элементарные колечки, радиус которых больше или равен x_1. Теперь замена (9.32) сразу приводит от (9.133) к формуле (9.132).

Проверка выражения (9.132) *по массе*

Вычисляем

$$M_{\text{ст}} = \int_{-iR}^{iR} \mu(\zeta)\, d\zeta. \tag{9.134}$$

Подставляя сюда (9.132) и делая замену

$$\zeta = iy, \tag{9.135}$$

получим $x = r^2$, а также

$$M_{\text{ст}} = 2\int_0^R dy \int_{y^2}^{R^2} \sigma(x) \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}}. \tag{9.136}$$

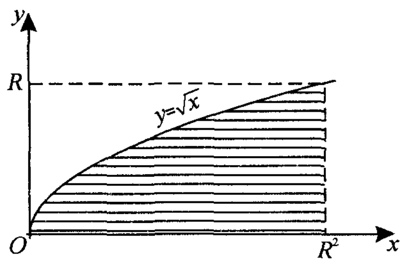


Рис. 78. Область интегрирования (заштрихована) в двойном интеграле (9.136)

Меняя порядок интегрирования в (9.136) (рис. 78), имеем

$$M = 2\int_0^{R^2} \sigma(x)\, dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{x-y^2}}. \tag{9.137}$$

Внутренний интеграл здесь, как легко видеть, равен $\pi/2$ и, следовательно,

$$M_{\text{ст}} = 2\pi \int_0^R \sigma(r)\, r dr, \tag{9.138}$$

что действительно совпадает с массой исходного диска.

Проверка формулы (9.132) *по потенциалу*

Достаточно выполнить её только для точек на оси симметрии Ox_3. Прежде всего, потенциал исходного диска вычисляется по формуле (9.36) и заменой в ней $x = r^2$ приводится к виду

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = \pi G \int_0^{R^2} \sigma(x) \frac{dx}{\sqrt{x_3^2 + x}}. \tag{9.139}$$

Потенциал же стержня (9.9) с учётом плотности (9.132) и замены (9.135) даётся выражением

$$\varphi_{\text{ст}} = 2Gx_3 \int_0^R dy \int_{y^2}^{R^2} \sigma(x) \frac{dx}{\left(x_3^2 + y^2\right)\sqrt{x - y^2}}. \tag{9.140}$$

Меняя порядок интегрирования в этом двойном интеграле, получим

$$\varphi_{\text{ст}}(x_3) = 2Gx_3 \int_0^{R^2} \sigma(x)\, dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\left(x_3^2 + y^2\right)\sqrt{x - y^2}}. \tag{9.141}$$

Внутренний интеграл, как легко видеть, равен $\dfrac{\pi}{2x_3\sqrt{x+x_3^2}}$, и в итоге приходим к требуемому потенциалу (9.139). Совпадение же гармонических функций (а внешние потенциалы тел — именно таковы) на оси Ox_3 означает и их совпадение во всём пространстве.

В частном случае однородного диска (9.132) сразу даёт известный результат (9.30). ■

Замечание 2. Обратим внимание на то, что формулы (9.132) и (9.36) весьма схожи (интегралы различаются только нижним пределом). Это обстоятельство поможет запомнить первую из них.

При нахождении плотности по формуле (9.132) необходимо следить за тем, чтобы функция $\mu(\zeta)$ была *чисто мнимой* и (в силу симметрии диска) *чётной* функцией от аргумента ζ.

Задача 9.15. *Найти эквигравитирующий стержень для неоднородного ($\sigma = \sigma(r)$) широкого кругового кольца.*

Решение. Применяя метод задачи 9.3, находим:

$$\begin{aligned} &\mu(\zeta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} \sigma(r)\frac{r dr}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}, \quad -R_1 \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R_1, \\ &\mu(\zeta) = \int\limits_{-i\zeta}^{R_2} \sigma(r)\frac{r dr}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}, \quad \begin{cases} -R_2 \leqslant \dfrac{\zeta}{i} \leqslant -R_1, \\ R_1 \leqslant \dfrac{\zeta}{i} \leqslant R_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.142}$$

Эквигравитирующий стержень, следовательно, является составным (как и для однородного кольца, см. задачу 9.3). В частном случае $R_1 = 0$ первый интеграл в (9.142) исчезает, и тогда получается решение (9.132) для сплошного неоднородного диска. ▼

§ 9.11. Обратный переход от мнимого стержня к эквигравитирующему вещественному диску

Такой переход от стержня к эквигравитирующему круглому диску является важным элементом развиваемой здесь теории. По сути, это есть обратная задача той, которая решалась выше.

Для решения поставленной задачи обратимся к интегралу (9.132) и заменой в нём

$$r^2 = -p \tag{9.143}$$

преобразуем этот интеграл в интегральное уравнение Абеля для неизвестной функции $\sigma(p)$

$$\mu(\zeta) = -i\int\limits_{-R^2}^{\zeta^2} \sigma(p)\frac{dp}{\sqrt{\zeta^2-p}}. \tag{9.144}$$

Это уравнение имеет решение

$$\sigma_{\text{диска}}(p) = \frac{i}{\pi}\frac{d}{dp}\int\limits_{-R^2}^{p} \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}\, d\zeta^2. \tag{9.145}$$

Однако данное решение можно записать и в более простой форме [12]. Дифференцируя по p интеграл в (9.145), получим

$$\frac{d}{dp}\int\limits_{-R^2}^{p}\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}d\zeta^2=\lim_{\zeta^2\to p}\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}-\frac{1}{2}\int\limits_{-R^2}^{p}\frac{\mu(\zeta)}{\left(p-\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\zeta^2. \qquad (9.146)$$

Последний интеграл после замен

$$u=\mu(\zeta)\ ;\quad V=\frac{2}{\sqrt{p-\zeta^2}}$$

берётся по частям и приводится к виду

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-R^2}^{p}\frac{\mu(\zeta)}{\left(p-\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\zeta^2=\left[\frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}\right]_{\zeta^2=p}^{\zeta^2=-R^2}+\int\limits_{-R^2}^{p}\frac{\frac{d}{\zeta^2}\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}d\zeta^2\,. \qquad (9.147)$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (9.146), убеждаемся, что расходимости взаимно сокращаются, и в итоге мы имеем

$$\sigma(p)=\frac{i}{\pi}\left\{\frac{\mu(\zeta=iR)}{\sqrt{p+R^2}}+\int\limits_{-R^2}^{p}\frac{\frac{d}{\zeta^2}\mu(\zeta)}{\sqrt{p-\zeta^2}}d\zeta^2\right\}. \qquad (9.148)$$

В частности, когда плотность на краях стержня равна нулю, то первый член в (9.148) пропадает.

Формулы (9.132) *и* (9.145) (или (9.148)) *решают прямую и обратную задачи: по вещественному круглому диску с заданной* $\sigma(r)$ *находим мнимый стержень с* $\mu(\zeta)$, *и обратно — по известной плотности мнимого стержня* $\mu(\zeta)$ *находится заменяющий его вещественный диск.*

Для многих объёмных тел важно знать как заменяющий диск, так и заменяющий стержень (конечно, если они существуют). Образно говоря, вначале объёмное тело с круговой симметрией мы «схлопываем» в эквигравитирующий диск, а затем, по желанию, этот диск «вытягиваем» в эквигравитирующий стержень. Мы говорим, что такие диски и стержни образуют *эквигравитирующую пару.*

Из формул (9.132) и (9.145) (или (9.148)) следует важный качественный вывод: в паре «диск — стержень» *вещественному диску отвечает стержень с мнимой плотностью*[13].

Далее: *диски могут существовать только для тел с экваториальной плоскостью симметрии, и значит — только для стержней с симметричным относительно их центра распределением массы.* Другими словами, функция $\mu(\zeta)$ должна быть *чётной* функцией от аргумента ζ. Так, у шарового сегмента и соответствующего ему стержня (9.88) указанная симметрия отсутствует и заменяющего диска для такого сегмента просто нет.

З а д а ч а 9.16. *Докажите последнее утверждение прямым расчётом!*

[12] Аналогичные преобразования см. для формулы (9.177).

[13] И наоборот: мнимому диску соответствует вещественный эквигравитирующий стержень, как это показано в § 9.13.

Задача 9.17. *Доказать, что для «шапочки»* (9.114) *также нет эквигравитирующего диска.*

Решение. Пусть «шапочка» с поверхностной плотностью σ_0 имеет вид пустотелой полусферы. Полагая $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в формуле (9.114), согласно (9.145), после замены там $\zeta = is$, имеем формально для плотности искомого диска выражение

$$\sigma_{\text{диска}}(r) = i\frac{4R\sigma_0}{\pi}\frac{d}{dr^2}\int_r^R \sqrt{\frac{R^2-s^2}{s^2-r^2}}ds. \tag{9.149}$$

Поскольку данный интеграл расходится, то диск, заменяющий «шапочку», *не существует.* ▼

§ 9.12. Примеры на пары эквигравитирующих тел «вещественные диски — мнимые стержни»

1. *Диск, получаемый в асимптотическом пределе из конуса*

Дан диск с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \sigma_0\left(1-\frac{r}{R}\right). \tag{9.150}$$

Именно такой диск (тем и важен этот пример!) получается в асимптотическом плоском пределе из однородного конуса, когда угол при вершине конуса стремится к $\pi/2$ и длина образующей фиксирована (см. (13.94)). Подставляя (9.150) в формулу (9.132) и интегрируя, в итоге находим, что эквигравитирующий стержень для данного диска имеет плотность

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0\left(\sqrt{R^2+\zeta^2}+\frac{\zeta^2}{2R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2+\zeta^2}}{R-\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right), \; -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{9.151}$$

Масса стержня (а значит, и диска)

$$M = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2. \tag{9.152}$$

В частности, потенциал на оси симметрии Ox_3 для диска данного типа имеет вид

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = \pi G\sigma_0\left\{\sqrt{R^2+x_3^2}-2|x_3|+\frac{x_3^2}{R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2+x_3^2}}{|x_3|}\right\}. \tag{9.153}$$

В § 10.7 (задача 10.7) будет найден *эквигравитирующий сфероид* для данного диска, а также получен внешний пространственный потенциал обоих этих тел.

Задача 9.18. *С помощью формулы* (9.9) *найти потенциал стержня с плотностью* (9.151) *на оси* Ox_3 *и подтвердить результат* (9.153).

2. *Однородный сжатый сфероид*

Как мы знаем из § 9.1, это тело имеет эквигравитирующий круглый диск с поверхностной плотностью (9.5). Чтобы найти для этого диска (а значит, и для исходного сфероида) эквигравитирующий стержень, подставим (9.5) в (9.132). Тогда получим

$$\mu(\zeta) = -\frac{3iM}{2\pi\left(a_1^2 - a_3^2\right)^{3/2}} \int\limits_{-\zeta^2}^{R^2} \sqrt{\frac{R^2 - x}{x + \zeta^2}}\, dx\,, \; R^2 = a_1^2 - a_3^2. \tag{9.154}$$

Интегрирование в (9.154) сразу даёт

$$\mu(\zeta) = -\frac{3iM}{4\left(a_1^2 - a_3^2\right)^{3/2}} \left(a_1^2 - a_3^2 + \zeta^2\right), \tag{9.155}$$

что тождественно с (9.7). Итак, однородный сжатый сфероид — это первое объёмное тело, для которого мы знаем и заменяющий стержень (с мнимой плотностью), и заменяющий диск (с вещественной плотностью). Между прочим, пока сфероид сжат не слишком сильно и эксцентриситет у него $e < 0.707$ — заменяющий стержень расположен внутри сфероида, а при $e > 0.707$ — стержень уже «торчит» из него. Критическое значение $e = 0.707$ отвечает равенству $a_1^2 - a_3^3 = a_3^2$, когда стержень касается поверхности сфероида. Это — наглядная геометрическая интерпретация того, когда радиус сходимости ряда Лапласа (равный «полудлине» заменяющего стержня $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$), уже не будет находиться целиком внутри однородного сжатого сфероида.

3. *Дан диск с плотностью*

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n, \quad n \text{ — любое вещественное число}, \tag{9.156}$$

имеющий, как нетрудно убедиться, массу

$$M = \frac{\pi \sigma_0 R^2}{n+1}. \tag{9.157}$$

Согласно формуле (9.132), гравитационное поле этого диска заменяет стержень с мнимой плотностью

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0 R \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \left(1 + \frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}; \tag{9.158}$$

в частном случае, при $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, (9.158) имеет вид

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0 R \frac{n!\, 2^{n+1}}{(2n+1)!!} \left(1 + \frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{9.159}$$

Задача 9.19. *Найти заменяющий стержень для экспоненциального диска*

$$\sigma(r) = \sigma_0 e^{-\frac{r}{r_s}}, \; \textit{где } 0 < r < \infty, \tag{9.160}$$

масса которого равна

$$M = 2\pi \sigma_0 r_s^2 \tag{9.161}$$

(r_s — эффективный радиус диска).

Другие примеры на *эквигравитирующие* (или, как можно также говорить: на *замещающие*) диски и стержни будут даны ниже.

§ 9.13. Эквигравитирующие пары «мнимые круглые диски — вещественные стержни»

Выше мы доказали существование эквигравитирующих пар «*вещественные диски — мнимые стержни*». Назовём их парами первого типа. Но, оказывается, существуют и пары второго типа: зеркально отраженные вышеуказанным эквигравитирующие пары «*мнимый диск — вещественный стержень*». Изучение таких пар столь же нетривиальная и важная задача, как и пар первого типа. Попробуйте вообразить, например, каким должен быть плоский круглый диск, чтобы он имел в пространстве тот же потенциал, что и *вытянутый нормально к плоскости диска однородный сфероид?* Но такое оказывается возможным, если сам исходный круглый диск (при реальной у него массе и реальном гравитационном поле) будет *мнимым*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Внешний потенциал однородного вытянутого сфероида с полуосями* $a_3 \geqslant a_1$ *может быть представлен как одномерным гравитирующим стержнем с вещественным распределением плотности* (9.6), *так и неоднородным мнимым круглым диском с распределением поверхностной плотности*

$$\sigma(r) = -\frac{3M}{2\pi\left(a_3^2 - a_1^2\right)}\sqrt{1 + \frac{r^2}{a_3^2 - a_1^2}}, \quad 0 \leqslant \frac{r}{i} \leqslant \sqrt{a_3^2 - a_1^2}. \tag{9.162}$$

Доказательство.

То, что для сфероида данного типа существует эквигравитирующий вещественный стержень, было установлено в § 9.1, см. формулу (9.6). Поэтому переходим сразу к доказательству существования мнимого диска. Воспользуемся для этого изумительно простым, но очень эффективным приёмом[14]: от сжатого сфероида $a_1 > a_3$, имеющего эквигравитирующий вещественный диск (9.5), путём непрерывной деформации перейдём через шар к вытянутому сфероиду с $a_3 > a_1$. При этом $a_1^2 - a_3^2 \to -\left(a_3^2 - a_1^2\right)$, так что из (9.5) сразу получим выражение (9.162). Обратим внимание на то, что диск является мнимым (его радиус $i\sqrt{a_3^2 - a_1^2}$) и на границе его плотность обращается в нуль.

Проверка формулы (9.162) по массе элементарна:

$$\begin{aligned} M = 2\pi \int\limits_0^{i\sqrt{a_3^2-a_1^2}} \sigma(r)\, r\, dr = -\frac{3M}{a_3^2 - a_1^2} \int\limits_0^{i\sqrt{a_3^2-a_1^2}} \sqrt{1 + \frac{r^2}{a_3^2 - a_1^2}}\, r\, dr = \\ = \frac{3M}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = M. \end{aligned} \tag{9.163}$$

По внешнему же потенциалу формулу (9.162) достаточно проверить только в точках на оси симметрии фигуры. Как известно, *внешний потенциал на оси однородного вытянутого сфероида* имеет вид (6.33). С другой стороны, потенциал мнимого диска на оси Ox_3 даётся интегралом по стержню

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G \int\limits_0^{i\sqrt{a_3^2-a_1^2}} \frac{\sigma(r)\, r}{\sqrt{r^2 + x_3^2}}\, dr. \tag{9.164}$$

[14] Этот приём применён и ранее при доказательстве теоремы 1.

Этот интеграл с учётом (9.162) записывается так:

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = -\frac{3MG}{a_3^2 - a_1^2} \int\limits_0^{i\sqrt{a_3^2-a_1^2}} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{r^2}{a_3^2 - a_1^2}}{r^2 + x_3^2}}\, r\, dr. \tag{9.165}$$

Заменой $x = r \Big/ \left(i\sqrt{a_3^2 - a_1^2}\right)$ интеграл (9.165) легко берётся, и мы приходим к выражению (6.33). Поскольку же внешний потенциал — функция гармоническая, то по известным теоремам анализа о единственности представления этих функций и по только что доказанному равенству потенциалов вытянутого сфероида и мнимого диска на оси Ox_3 мы утверждаем: и во всех других точках пространства внешние силовые поля этих тел будут равны.

Мнимый диск (9.162) *действительно является эквигравитирующим телом для однородного вытянутого сфероида, а также для вещественного одномерного стержня* (9.6). Итак, существование пары *вещественный стержень — мнимый диск*

$$\begin{gathered} \mu(\zeta) = \frac{3M}{4R}\left(1 - \frac{\zeta^2}{R^2}\right), \quad -R \leqslant \zeta \leqslant R; \\ \sigma(r) = -\frac{3M}{2\pi R}\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}}, \quad 0 \leqslant \frac{r}{i} \leqslant R, \end{gathered} \tag{9.166}$$

где для краткости обозначено

$$R = \sqrt{a_3^2 - a_1^2}, \tag{9.167}$$

в данном примере доказано. ■

Легко видеть, в частности, что заменяющий диск находится полностью внутри сфероида, пока

$$\frac{a_3}{a_1} \leqslant \sqrt{2}, \text{ т. е. } \varepsilon \leqslant 0.2924. \tag{9.168}$$

Таким образом, радиус сходимости ряда Лапласа здесь равен R, что согласуется с классическим результатом.

Заменяющие стержни и диски дают наглядную геометрическую интерпретацию для радиуса сходимости ряда Лапласа.

По заданной мнимой плотности диска вещественная плотность эквигравитирующего стержня определяется теперь интегралом (ср. с формулой (9.132))

$$\mu(\zeta) = 2i \int\limits_{-i\zeta}^{iR} \sigma(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}}. \tag{9.169}$$

Проверим эту формулу на паре «диск — стержень» для однородного вытянутого сфероида. Подставив под знак интеграла $\sigma(r)$ из (9.166) и делая в нём замену

$$r^2 = -R^2 x,$$

получим

$$\mu(y) = i\frac{3M}{2\pi R} \int\limits_y^1 \sqrt{\frac{1 - x}{y - x}}\, dx, \quad y = \frac{\zeta^2}{R^2}, \tag{9.170}$$

или же

$$\mu(y) = \frac{3M}{2\pi R} \int\limits_y^1 \sqrt{\frac{1-x}{x-y}}\,dx = \frac{3M}{4R}\left(1 - \frac{\zeta^2}{R^2}\right), \tag{9.171}$$

что действительно совпадает с $\mu(\zeta)$ из (9.166).

Но не менее важно знать и общий способ нахождения мнимого эквигравитирующего диска по вещественному стержню. Рассмотрим этот вопрос, для чего обратимся к интегралу (9.169) и сделаем в нём замены

$$r = ip\,;\ \zeta^2 = x\,;$$

тогда имеем

$$\mu\left(\sqrt{x}\right) = i \int\limits_{R^2}^{x} \sigma\left(i\sqrt{p}\right) \frac{dp}{\sqrt{x-p}}\,. \tag{9.172}$$

Для решения этого уравнения умножим левую и правую части на $\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$ и проинтегрируем по переменной x от R^2 до y. Имеем

$$\int\limits_{R^2}^{y} \frac{\mu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{y-x}}dx = i \int\limits_{R^2}^{y} \frac{dx}{\sqrt{y-x}} \int\limits_{R^2}^{x} \sigma\left(i\sqrt{p}\right) \frac{dp}{\sqrt{x-p}}. \tag{9.173}$$

Интегрирование в двойном интеграле проводится в плоскости (x, p) по треугольной области (рис. 79).

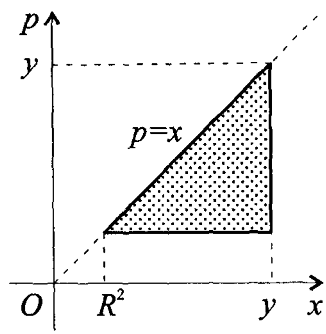


Рис. 79. Область интегрирования (заштрихована) в двойном интеграле (9.173)

Целесообразно изменить здесь порядок интегрирования. Тогда

$$\int\limits_{R^2}^{y} \frac{\mu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{y-x}}dx = i \int\limits_{R^2}^{y} \sigma\left(i\sqrt{p}\right) dp \int\limits_{p}^{y} \frac{dx}{\sqrt{(y-x)(x-p)}}\,, \tag{9.174}$$

и в силу очевидного

$$\int\limits_{p}^{y} \frac{dx}{\sqrt{(y-x)(x-p)}} = \pi \tag{9.175}$$

имеем

$$\int\limits_{R^2}^{y} \frac{\mu(\sqrt{x})}{\sqrt{y-x}} dx = i\pi \int\limits_{R^2}^{y} \sigma(i\sqrt{p})\, dp\,. \tag{9.176}$$

Дифференцируя обе части полученного равенства по y, находим

$$i\pi\sigma(i\sqrt{y}) = \frac{d}{dy} \int\limits_{R^2}^{y} \frac{\mu(\sqrt{x})}{\sqrt{y-x}} dx\,. \tag{9.177}$$

Но

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{R^2}^{y} \frac{\mu(\sqrt{x})}{\sqrt{y-x}} dx = \lim_{x\to y} \frac{\mu(\sqrt{x})}{\sqrt{y-x}} - \frac{1}{2} \int\limits_{R^2}^{y} \mu(\sqrt{x}) \frac{dx}{(y-x)^{3/2}}\,. \tag{9.178}$$

Заменой

$$u = \mu(\sqrt{x})\,; \quad V = \int \frac{dx}{(y-x)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{y-x}} \tag{9.179}$$

интеграл в правой части (9.178) берётся по частям

$$\frac{1}{2} \int\limits_{R^2}^{y} \mu(\sqrt{x}) \frac{dx}{(y-x)^{3/2}} = \lim_{x\to y} \frac{\mu(\sqrt{x})}{\sqrt{y-x}} - \frac{\mu(R)}{\sqrt{y-R^2}} - \int\limits_{R^2}^{y} \frac{d\mu(\sqrt{x})}{dx} \frac{dx}{\sqrt{y-x}}\,. \tag{9.180}$$

Подставляя этот интеграл в правую часть (9.178), видим, что расходимости взаимно сокращаются, и в итоге получим

$$\sigma(i\sqrt{y}) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\mu(R)}{\sqrt{R^2-y}} + \int\limits_{R^2}^{y} \frac{d\mu(\sqrt{x})}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} \right\}. \tag{9.181}$$

Это и есть требуемый результат. Формула (9.181) позволяет *по плотности* $\mu(x)$ *вещественного стержня найти поверхностную плотность* σ *эквигравитирующего диска с мнимым радиусом.*

Например, для $\mu(\zeta)$ из пары (9.166)

$$\mu(x) = \frac{3M}{4R}\left(1 - \frac{x}{R^2}\right), \tag{9.182}$$

так что

$$\mu(R^2) = 0; \quad \frac{d\mu}{dx} = -\frac{3M}{4R^3}\,. \tag{9.183}$$

Тогда формула (9.181) даёт

$$\sigma(i\sqrt{y}) = -\frac{3M}{2R^3}\sqrt{R^2-y}\bigg|_{\zeta=i\sqrt{y}} = -\frac{3M}{2R^2}\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{R^2}}\,, \tag{9.184}$$

что совпадает с плотностью соответствующего диска из (9.166).

§ 9.14. Эквигравитирующие элементы для шаровых сегментов, бóльших полушара

Рассмотрим однородный шаровой сегмент (рис. 80), бóльший полушара. В отличие от задачи 9.8, этот сегмент имеет «тупые края», так как $H \geqslant R$.

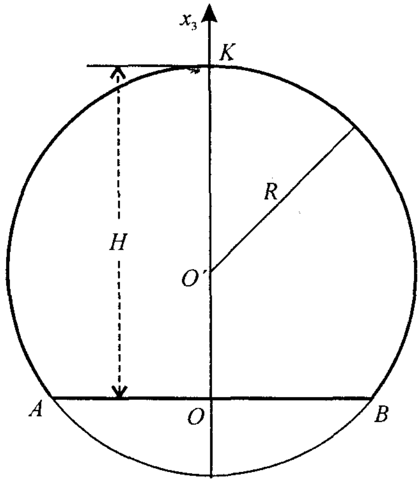


Рис. 80. Шаровой сегмент ABK с «тупыми» краями

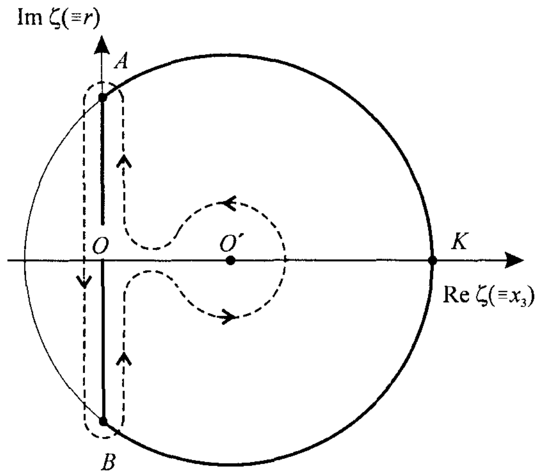


Рис. 81. Контур интегрирования в шаровом сегменте с «тупыми» краями

На комплексной плоскости $\zeta = x_3 + ir$ сегмент поворачивается по часовой стрелке на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 81).

Внешний потенциал сегмента на оси симметрии в точке x_3 дан формулой (9.90). Согласно (9.100), потенциал в точке x_3 может быть представлен также модифицированным интегралом Коши, где контур интегрирования в исходном положении совпадает с контуром самой фигуры.

При аналитическом продолжении внешнего потенциала внутрь толстого сегмента находим *три особые точки*. Две из них, как и в случае сегмента с острыми краями из задачи 9.8, — это точки A и B излома контура сегмента с координатами $\zeta_A = -ia$ и $\zeta_B = ia$. Но есть, как мы узнаем впоследствии из § 11.5.2, *ещё одна особая точка* $\zeta_3 = H - R$, совпадающая с центром шара O', частью которого является данный сегмент. Поэтому редукция контура интегрирования Γ даёт теперь не только мнимый стержень с плотностью (см. формулу (9.88))

$$\mu_1(\zeta) = \frac{2}{3} i\rho \frac{\left(a^2+\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{H-R-\zeta} \quad \left(-a \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant a\right), \tag{9.185}$$

но, кроме того, ещё и изолированный кружок вокруг точки O' (см. рис. 81). Этой особой точке $\zeta = x_3 + ir$ соответствует точечная масса M_2:

$$M_2 = \oint\limits_{\Gamma_1} \mu_2(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i G} \mathop{\mathrm{res}}_{\zeta=\zeta_3} \left\{ \frac{2}{3}\pi G\rho \left[R + \left(a^2+\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \tag{9.186}$$

где Γ_1 — контур вокруг точки $\zeta_3 = H - R$. С учётом геометрического соотношения на параметры сегмента

$$a^2 + (R - H)^2 = R^2 \tag{9.187}$$

находим

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = M_{\text{шара}}\,. \tag{9.188}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8. *Для сегмента при $H - R > 0$ (сегмент с «тупыми» изломами) эквигравитирующими элементами будут мнимый стержень AB с $\mu_1(\zeta)$ из (9.185) и точечная масса образующего шара, помещённая в его центре O'.*

Контрольная проверка утверждений теоремы 8 по массе

Вклад в массу сегмента от мнимого стержня даётся интегралом

$$M_1 = \int\limits_{-ia}^{ia} \mu_1(\zeta)\, d\zeta = \frac{2}{3}i \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{\left(a^2 + \zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{H - R - \zeta} d\zeta \tag{9.189}$$

заменой $\zeta = ix$ легко берётся и приводится к виду

$$M_1 = \pi\rho H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) - M_2, \tag{9.190}$$

где M_2 из (9.188). Отметим, что полушара $M_1 = 0$. Складывая M_1 и M_2, в итоге находим

$$M = M_1 + M_2 = \pi\rho H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right). \tag{9.191}$$

Это и есть полная масса однородного шарового сегмента.

Проверка утверждений теоремы 8 по потенциалу

Следствие 6. *Внешний гравитационный потенциал сегмента с $H > R$ на оси Ox_3 в представлении через эквигравитирующие элементы равен*

$$\varphi(x_3) = G \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{\mu_1(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \frac{M_{шара} G}{x_3 - (H - R)}, \tag{9.192}$$

причём x_3 отсчитывается от точки O на основании сегмента.

Рассмотрим отдельно первый член в (9.192), представляющий вклад в потенциал однородного сегмента от мнимого стержня; после подстановки плотности $\mu_1(\zeta)$ этот член приводится к виду:

$$\varphi_1(x_3) = G \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{\mu_1(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta = \frac{2}{3} iG\rho \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{\left(a^2 + \zeta^2\right)^{\frac{3}{2}} d\zeta}{(H - R - \zeta)(x_3 - \zeta)}. \tag{9.193}$$

Но очевидно, что знаменатель подынтегрального выражения здесь можно представить в следующем виде

$$\frac{1}{(H-R-\zeta)(x_3-\zeta)} = \frac{1}{x_3-(H-R)}\left(\frac{1}{H-R-\zeta} - \frac{1}{x_3-\zeta}\right).$$

Тогда

$$\varphi_1(x_3) = \frac{\frac{2}{3}iG\rho}{x_3-(H-R)}(I_1 - I_2), \tag{9.194}$$

где мы обозначили

$$I_1 = \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{(a^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{H-R-\zeta}d\zeta = -\frac{3}{2}i\left[\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right) - \frac{4}{3}\pi R^3\right]; \tag{9.195}$$

$$I_2 = \int\limits_{-ia}^{ia} \frac{(a^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{(x_3-\zeta)}d\zeta = 2ix_3\int\limits_0^a \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x_3^2+x^2}dx = i\pi\left[(a^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}a^2x_3 - x_3^2\right]. \tag{9.196}$$

Поэтому

$$\varphi_1(x_3) = \frac{\frac{2}{3}G\rho}{x_3-(H-R)}\left\{(a^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}a^2x_3 - x_3^2 + \frac{3}{2}H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)\right\} - \\ - \frac{M_{\text{шара}}G}{x_3-(H-R)}. \tag{9.197}$$

Полный внешний потенциал сегмента есть сумма вкладов в него от мнимого стержня и точечной массы $M_{\text{шара}}$ в точке O'

$$\varphi(x_3) = \varphi_1(x_3) + \varphi_2(x_3),$$

причём

$$\varphi_2(x_3) = \frac{M_{\text{шара}}G}{x_3-(H-R)}. \tag{9.198}$$

Таким образом, полный внешний потенциал будет равен

$$\varphi(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho\frac{(a^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}a^2x_3 - x_3^2 + \frac{3}{2}H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)}{x_3-(H-R)}. \tag{9.199}$$

С учётом равенства (9.187) легко убедиться в тождественности выражений (9.199) и (9.90). ■

§ 9.15. Эквигравитирующие элементы для однородных торов

Потенциал на оси симметрии однородного кругового тора из § 7.1 и потенциал тора с сечением в виде овалов Кассини, найденный в § 7.5, используем теперь для нахождения систем заменяющих стержней и материальных точек для этих тел.

Рассмотрим сначала торы с сечениями в виде овалов Кассини.

9.15.1. Тор с сечением в виде овала Кассини

Прежде всего обратим внимание на то, что потенциал (7.103) этого тора имеет четыре особые точки. Две из них

$$\zeta_{1,2} = \pm i\frac{\sqrt{c^4 - a^4}}{c} \tag{9.200}$$

соответствуют случаю $k = 1$, ещё две точки (точки ветвления второго порядка) даёт радикал в λ из (7.102)

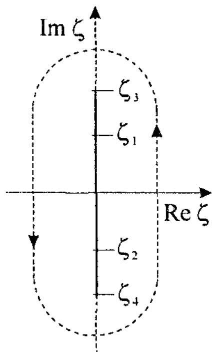


Рис. 82. Составной эквигравитирующий стержень для однородного тора с сечением в виде овала Кассини. Показаны контур интегрирования и направление его обхода

$$\zeta_{3,4} = \pm ic. \tag{9.201}$$

Эквигравитирующий стержень такого тора оказывается составным (рис. 82): к внутреннему $\zeta_1\zeta_2$ примыкают два одинаковых внешних отрезка $\zeta_1\zeta_3$ и $\zeta_2\zeta_4$. На внутреннем отрезке $\zeta_1\zeta_2$ справа от него $\lambda = \dfrac{a^2}{c\sqrt{c^2 - \zeta^2}}$, а слева $\lambda = -\dfrac{a^2}{c\sqrt{c^2 - \zeta^2}}$. Смена знака λ означает

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\pi \sqrt{1 - \lambda\cos\theta}\,\cos\theta\,d\theta \xrightarrow{\theta\to\pi-\theta} \int\limits_\pi^0 \sqrt{1 + \lambda\cos\theta}\cos\theta d\theta = \\ &= -\int\limits_0^\pi \sqrt{1 + \lambda\cos\theta}\,\cos\theta\,d\theta, \end{aligned} \tag{9.202}$$

так что в итоге, согласно формуле (9.101), на внутреннем отрезке $\zeta_1\zeta_2$ происходит удвоение потенциала и плотность заменяющего отрезка здесь будет равна

$$\begin{aligned} &\mu(\zeta) = -2i\rho a^2 \int\limits_0^\pi \sqrt{1 + \lambda\cos\theta}\cos\theta d\theta, \\ &-\frac{\sqrt{c^4 - a^4}}{c} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant \frac{\sqrt{c^4 - a^4}}{c}. \end{aligned} \tag{9.203}$$

На обоих же крайних отрезках $\zeta_1\zeta_3$ и $\zeta_2\zeta_4$ аналогичные рассуждения дают выражение для плотности

$$\mu(\zeta) = 2i\rho a^2 \int\limits_0^{\pi-\theta_0} \sqrt{1+\lambda\cos\theta}\cos\theta d\theta, \tag{9.204}$$

где интервалы интегрирования такие:

$$-c \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant -\frac{\sqrt{c^4-a^4}}{c}; \quad \frac{\sqrt{c^4-a^4}}{c} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant c. \tag{9.205}$$

Угол θ_0 находится из условия обращения в нуль выражения под радикалом $1+\lambda\cos\theta$ при $\theta = \pi - \theta_0$, так что

$$\theta_0 = \arccos\frac{1}{|\lambda|} = \arccos\frac{c\sqrt{c^2-\zeta^2}}{a^2}. \tag{9.206}$$

9.15.2. Эквигравитирующие элементы для кругового тора

Эта задача непростая. Исходим из формулы (7.32)

$$\varphi(x_3) = 4\pi G\rho r_0 R_0 \frac{\sqrt{l^2+r_0^2}}{l} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\lambda\cos\psi}\cos\psi d\psi, \tag{9.207}$$

где

$$l = \sqrt{R_0^2+x_3^2}, \quad \lambda = \frac{2r_0 l}{l^2+r_0^2}. \tag{9.208}$$

Интеграл (9.207) можно представить в более простом виде

$$\varphi(x_3) = 4\pi G\rho R_0 \frac{r_0^2}{l} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-\frac{r_0^2}{l^2}\sin^2 x}\cos^2 x dx. \tag{9.209}$$

Далее (9.209) запишем в общей форме

$$\varphi(x_3) = 4\pi G\rho R_0 r_0^2 \int\limits_0^{\pi} \mathrm{F}(x_3,x)\cos^2 x\, dx, \tag{9.210}$$

где

$$\mathrm{F}(x_3,x) = \frac{1}{l}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{l^2}\sin^2 x} = \frac{\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2 x}}{R_0^2+x_3^2}. \tag{9.211}$$

Подынтегральная функция $\mathrm{F}(x_3,x)$ имеет два полюса при $x_3 = \pm iR_0$, а также две точки ветвления при $x_3 = \pm i\sqrt{R_0^2 - r_0^2\sin^2 x}$. Согласно формуле Коши, мы можем представить функцию $\mathrm{F}(x_3,x)$ в виде контурного интеграла

$$\mathrm{F}(x_3,x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\mathrm{F}(\zeta,x)}{x_3-\zeta}, \tag{9.212}$$

где контур интегрирования охватывает отрезок $(-iR_0, iR_0)$ в положительном направлении (рис. 83).

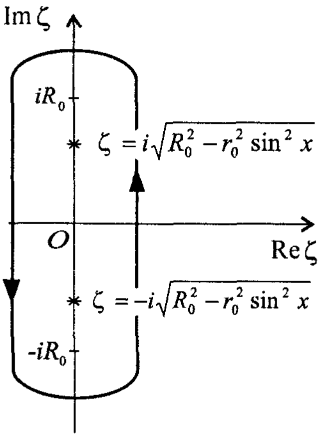


Рис. 83. Промежуточный контур интегрирования для однородного кругового тора

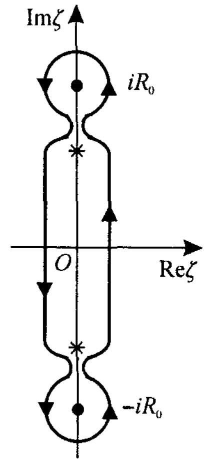


Рис. 84. Конечный этап деформирования контура интегрирования для однородного кругового тора

Стискивая и деформируя общий контур, получим три более простых контура (рис. 84). А именно, один контур вокруг точек ветвления $\pm i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}$, и два кружочка вокруг мнимых точек $\pm iR_0$. Последние дают вычеты, которые нетрудно найти. Так как

$$\frac{1}{\zeta^2 + R_0^2} = \frac{1}{2iR_0}\left(\frac{1}{\zeta - iR_0} - \frac{1}{\zeta + iR_0}\right), \tag{9.213}$$

то

$$\operatorname*{res}_{\zeta = \pm iR_0} \mathrm{F}(\zeta, x) = 2\pi i \cdot (r_0 \sin x). \tag{9.214}$$

Следовательно, вместо (9.212) имеем

$$\mathrm{F}(x_3, x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}} \frac{\mathrm{F}(\zeta, x)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \frac{r_0 \sin x}{2iR_0(x_3 - iR_0)} - \frac{r_0 \sin x}{2iR_0(x_3 + iR_0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}} \frac{\mathrm{F}(\zeta, x)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \frac{r_0 \sin x}{x_3^2 + R_0^2}. \tag{9.215}$$

Потенциал тора на оси симметрии (9.210) можно записать теперь так

$$\varphi(x_3) = 4\pi G\rho R_0 r_0^2 \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}} \frac{\mathrm{F}(\zeta, x)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \frac{r_0 \sin x}{x_3^2 + R_0^2} \right] dx. \tag{9.216}$$

Последний член в (9.216) интегрируется сразу

$$I_2 = 4\pi G\rho r_0^2 R_0 \frac{2}{3} \frac{r_0}{R_0^2 + x_3^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho \frac{R_0}{R_0^2 + x_3^2}. \tag{9.217}$$

В (9.216) остаётся двойной интеграл

$$I_1 = \frac{2}{\pi i} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \left\{ \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2 x}} \frac{\mathrm{F}(\zeta, x)}{x_3 - \zeta} d\zeta \right\} dx. \tag{9.218}$$

Область интегрирования для него показана на рис. 85. Для упрощения интеграла поменяем в нём порядок интегрирования. Тогда, интегрируя сначала по x, а затем по ζ, приводим I_1 к виду

$$I_1 = \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2-r_0^2}}^{i\sqrt{R_0^2-r_0^2}} \frac{\widetilde{\mu}_1(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \int\limits_{-iR_0}^{-i\sqrt{R_0^2-r_0^2}} \frac{\widetilde{\mu}_2(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta + \int\limits_{i\sqrt{R_0^2-r_0^2}}^{iR_0} \frac{\widetilde{\mu}_3(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta, \tag{9.219}$$

где, поскольку $\mu_i(\zeta) = 4\pi\rho\, r_0^2 R_0 \cdot \widetilde{\mu}_i(\zeta)$, функции

$$\mu_1(\zeta) = -\frac{8i\rho r_0^2 R_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx;$$

$$\mu_2(\zeta) = \mu_3(\zeta) =$$

$$= -\frac{8i\rho r_0^2 R_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \int\limits_0^{\arcsin \frac{1}{k}} \cos^2 x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx;$$

$$k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \tag{9.220}$$

и представляют плотность на соответствующих трёх участках мнимых стержней тора.

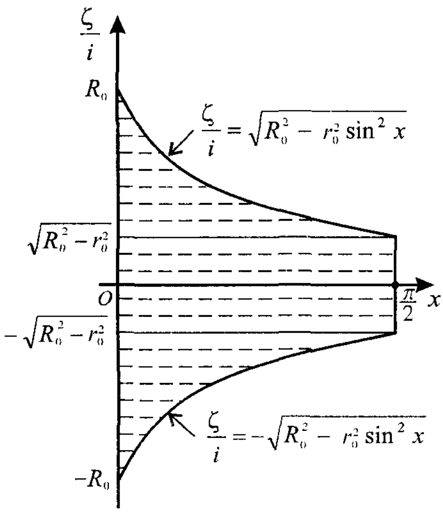


Рис. 85. Область интегрирования в интеграле (9.218)

Плотности на искомых заменяющих отрезках тора можно выразить через полные эллиптические интегралы:

$$\mu_1(\zeta) = -\frac{8}{3} i\rho\, r_0 R_0 \left[\left(\frac{1}{k} + k\right) \mathrm{E}(k) - \left(\frac{1}{k} - k\right) \mathrm{K}(k) \right]; \quad k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \leqslant 1; \tag{9.221}$$

$$\begin{gathered} \mu_2(\zeta) = \mu_3(\zeta) = -\frac{8i\rho r_0^2 R_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}\, dt = \\ = -\frac{8}{3} i\rho\, r_0 R_0 \left[(1 + k^2)\, \mathrm{E}\left(\frac{1}{k}\right) - (1 - k^2)\, \mathrm{K}\left(\frac{1}{k}\right) \right]; \quad k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + \zeta^2}} \geqslant 1. \end{gathered} \tag{9.222}$$

Таким образом, гравитационное поле однородного кругового тора может быть заменено полем более простой системы тел. В эту систему входят:

1. Составной (из трёх звеньев) мнимый стержень с плотностями:

$$
\begin{aligned}
&\mu_1(\zeta) \quad \text{из (9.220) на отрезке} \quad -\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant \sqrt{R_0^2 - r_0^2};\\
&\mu_2(\zeta) \quad \text{из (9.221) на отрезке} \quad -R_0 \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant -\sqrt{R_0^2 - r_0^2};\\
&\mu_2(\zeta) \quad \text{из (9.221) на отрезке} \quad \sqrt{R_0^2 - r_0^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R_0.
\end{aligned}
\tag{9.223}
$$

2. Две одинаковые точечные массы

$$
M_4 = M_5 = \frac{4}{3}\pi\rho r_0^3, \tag{9.224}
$$

расположенные в точках на оси симметрии

$$
\zeta_{4,5} = \pm iR_0\,. \tag{9.225}
$$

Проверка эквигравитирующей системы для тора по массе

Полная масса тора

$$
M_{\text{тора}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0 \rho\,. \tag{9.226}
$$

Вклад в массу от первого заменяющего отрезка с плотностью (9.221)

$$
M_1 = \int\limits_{-i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}} \mu_1(\zeta)\,d\zeta\,, \tag{9.227}
$$

а от второго и третьего отрезков с плотностью из (9.222)

$$
M_2 = \int\limits_{-iR_0}^{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}} \mu_2(\zeta)\,d\zeta, \quad M_3 = \int\limits_{i\sqrt{R_0^2 - r_0^2}}^{iR_0} \mu_2(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{9.228}
$$

Эти формулы были проверены численно и сумма отдельных членов совпала с полной массой тора (9.226).

Задача 9.20. *(Поисковая!) Проверить систему эквигравитирущих элементов для однородного кругового тора по потенциалу.*

Замечания

Аннотация к главе поясняет её содержание.

Материал параграфов §§ 9.1–9.8 основан на статье [24]. Здесь добавлен § 9.5 о пространственном потенциале круглого диска.

§ 9.1. Классика! Ссылка на Сретенского [44].

§ 9.2. Эквигравитирующий стержень для сжатого сфероида имеет мнимую плотность. Это не торговля мертвыми душами (вспомним у Н. В. Гоголя бессмертную сцену между Чичиковым и Маниловым!) — масса и потенциал такого отрезка оказываются реальными. Преобразование же от вытянутого сфероида (имеющего вещественный эквигравитирующий стержень) к сжатому можно представить себе как некоторый аналог аналитического продолжения!

Первоисточник: [21].

§ 9.3. Одна ласточка весны ещё не делает (но и весны без первой ласточки не бывает): стержень для сжатого сфероида — начало большой новой темы.

Первоисточник: [21].

§§ 9.4, 9.5. Диск (или широкое кольцо) важны не только как отдельные объекты, но они и составной элемент многих осесимметричных тел. Далее без изучения плоского круглого диска и кольца нам не обойтись. Ранее (см. (см. [14], стр. 117)) потенциал круглого диска находился только громоздким прямым способом через интеграл (1.22). У нас этот потенциал получен более компактно, причем двумя принципиально новыми методами. У нас впервые для диска рассчитаны кривые равного потенциала. К [21] добавлен ряд новых задач.

§ 9.6. Показано, как надо комбинировать стержни элементарных дисков, чтобы получить эквигравитирующий стержень для объёмного тела в целом.

Первоисточник: [21].

§ 9.7. Рассматриваются интересные примеры приложения теории. Заметим, что формула (9.88) годится только для тонкого шарового сегмента, а «толстый» сегмент имеет не только эквигравитирующий стержень, но ещё и материальную точку, см. § 9.14.

Первоисточник: [21].

§ 9.8. Интеграл Коши мог, конечно, понадобиться нам и ранее, при нахождении стержня диска. Сейчас же без него и вовсе не обойтись: именно с его помощью создаётся и обосновывается общий метод развиваемой здесь теории.

Первоисточник: [21].

§ 9.9. Оригинальный эквигравитирующий скелет («крест», вертикаль которого состоит из вещественного стержня, а перекладина — стержень с чисто мнимым распределением плотности) делает параболоидную линзу интересным примером.

Первоисточник: [21].

§ 9.10. Метод нахождения эквигравитирующих стержней для *неоднородных* круглых дисков существенно дополняет теорию и расширяет область её применения.

Первоисточник: [21].

§§ 9.11, 9.12. Переходы от *мнимого стержня* к *вещественному неоднородному диску*, и обратно, позволяют решать принципиально новые задачи. Примеры здесь важнее правил!

Первоисточник: [21].

§ 9.13. Рассмотрен общий способ нахождения *мнимого эквигравитирующего диска* по *вещественному стержню*. Получены формулы для обратного перехода. Это делает теорию эквигравитирующих тел более полной.

Первоисточник: [21].

§ 9.14. Новая грань проблемы. Сочетание мнимых стержней с вещественными точечными массами позволяет создать эквигравитирующую систему элементов для шаровых сегментов, бóльших полушара.

§ 9.15. Нахождение эквигравитирующих стержней для торов — сложная математическая задача и одновременно хорошая проверка для развитых методов. Итог весьма любопытен: у однородного кругового тора полная система эквигравитирующих элементов состоит из составного мнимого стержня и двух вещественных точечных масс. Этот результат был проверен нами численно. (В [21], § 3.11.2 задача была рассмотрена неполно.)

Глава 10

ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИЕ ТЕЛА. СОФОКУСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК И ЭЛЛИПСОИДОВ

Для поиска новых эквигравитирующих тел мы разрабатываем ещё один метод, активно используя *специальные софокусные преобразования*. Такие преобразования применяются у нас не только к однородным сплошным эллипсоидам, как это делали классики, но и к отдельным элементарным эллипсоидальным оболочкам *общего* типа (а не только к гомеоидам, как это делал Шаль, см. Вебстер [11], стр. 449), а также к *эллипсоидальным толстым оболочкам* и к *слоисто-неоднородным* эллипсоидам в целом. Изюминка здесь в том, что *любые* (*в смысле произвольных функций $\alpha_i(m)$, задающих тип стратификации и форму оболочки, см.* § 5.1) элементарные (или конечной толщины) эллипсоидальные оболочки и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды, связанные указанными софокусными преобразованиями, являются *эквигравитирующими*. Данный подход позволяет получить новые интересные результаты.

§ 10.1. Софокусные преобразования эллипсоидальных оболочек и слоисто-неоднородных эллипсоидов

Здесь излагаются элементы нового подхода к изучению притяжения большого класса тел. Дан эллипсоид с внутренней стратификацией (см. § 5.1)

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 m^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m)} + \frac{x_3^2}{a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m)} = 1 \quad (0 \leqslant m_{\min} \leqslant m \leqslant 1). \tag{10.1}$$

Промежуточная поверхность $S(m)$ имеет квадраты полуосей

$$a_1^2 m^2, \ a_2^2 m^2 \alpha_2^2(m), \ a_3^2 m^2 \alpha_3^2(m). \tag{10.2}$$

Выполним теперь такое преобразование этой промежуточной поверхности в другую эллипсоидальную поверхность, при котором *новые* квадраты полуосей будут равны

$$m^2\left(a_1^2+\mu\right), \ m^2\left(a_2^2\alpha_2^2(m)+\mu\right), \ m^2\left(a_3^2\alpha_3^2(m)+\mu\right). \tag{10.3}$$

Очевидно, что при данных преобразованиях фокусы поверхности $S(m)$ совпадут с фокусами новой поверхности $S(m,\mu)$. *Преобразования* (10.3) *для краткости будем называть софокусными.* Подчеркнём, что здесь мы расширяем понятие софокусных преобразований и применяем их не только к гомеоидам и фокалоидам, но и к эллипсоидальным оболочкам, а затем и к слоисто-неоднородным эллипсоидам *самого общего вида*[1]. Но пока мы

[1] В классической литературе софокусные преобразования применялись только к сплошным эллипсоидам (см. [14]), или, как это делал Шаль, к тонким гомеоидам [11].

говорим только об отдельных эллипсоидальных оболочках. Для них имеет место важное утверждение.

1. *Когда две эллипсоидальные оболочки, толстые или тонкие, связаны преобразованием* (10.3), *то их внешние поверхности E и E', а также внутренние I и I'* (рис. 86), *оказываются софокусными. Назовём такие оболочки софокусными друг другу*[2].

2. Кроме софокусности, *важным свойством преобразований* (10.3) *является и то, что они сохраняют геометрический тип исходной оболочки.* Так, гомеоид с полуосями $a_i m_E$ $(i = 1, 2, 3)$ для внешней поверхности E, и $a_i m_I$ для внутренней поверхности I, переходит в гомеоид с полуосями $m_E\sqrt{a_i^2+\mu}$ и $m_I\sqrt{a_i^2+\mu}$. Оба гомеоида будут софокусными друг другу (в указанном выше смысле), хотя и имеют разные, конечно, сжатия главных сечений, например, $\varepsilon_{12} = 1 - \frac{a_2}{a_1}$ и $\varepsilon_{12}' = 1 - \sqrt{\frac{a_2^2+\mu}{a_1^2+\mu}}$. Далее, фокалоиды преобразуются таким способом также в фокалоиды, и т. д.

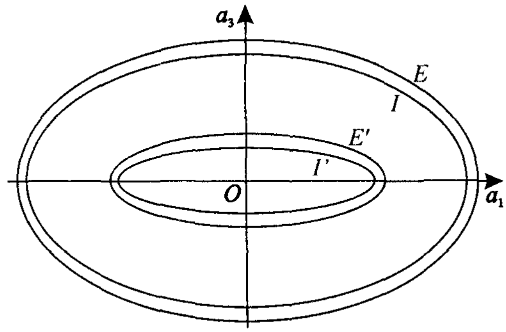


Рис. 86. Две эллипсоидальные оболочки (сечение одной из трёх главных плоскостей) оказываются софокусными, если их полуоси связаны преобразованием (10.3)

3. Однако преобразования (10.3) изменяют, вообще говоря, объём оболочек. *Для сохранения объёма необходимо ввести дополнительное требование.* А именно, если две элементарные софокусные оболочки заполнить однородным по плотности веществом, то условием сохранения их массы будет

$$\begin{gathered} \rho(m)\, a_1 a_2 a_3 \frac{d}{dm}\left[m^3 \alpha_2(m)\, \alpha_3(m)\right] = \\ = \rho'(m)\frac{d}{dm}\left[m^3\sqrt{\left[a_1^2+\mu\right]\left[a_2^2\alpha_2^2(m)+\mu\right]\left[a_3^2\alpha_3^2(m)+\mu\right]}\right], \end{gathered} \tag{10.4}$$

где $\rho(m)$ и $\rho'(m)$ — плотности исходной и преобразованной оболочек.

4. *Будучи применёнными к слоям сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов, преобразования* (10.3) *в целом не изменяют структуру этих объектов.* Так, эллипсоид из гомеоидов опять переходит в эллипсоид из гомотетичных слоёв (но уже софокусных исходным); эллипсоид из фокалоидов — в новый эллипсоид из фокалоидов, и т. д. Такие софокусные слоисто-неоднородные эллипсоиды будут иметь одинаковую массу, если выполняется условие (10.4) для отдельных соответствующих слоёв.

Пусть дан фокалоид (причём не обязательно тонкий), который описывается граничными поверхностями (внешней E и внутренней I) с квадратами полуосей (см. формулы (5.37))

$$a_1^2 m_E^2;\; a_1^2\left(m_E^2 - e_{12}^2\right);\; a_1^2\left(m_E^2 - e_{13}^2\right)$$

и

$$a_1^2 m_I^2;\; a_1^2\left(m_I^2 - e_{12}^2\right);\; a_1^2\left(m_I^2 - e_{13}^2\right).$$

Применив теперь к граничным поверхностям этого исходного фокалоида преобразование (10.3), получим квадраты полуосей поверхности E'

$$m_E^2\left(a_1^2+\mu\right);\; a_1^2\left(m_E^2 - e_{12}^2\right) + m_E^2\mu;\; a_1^2\left(m_E^2 - e_{13}^2\right) + m_E^2\mu$$

[2] Подчеркнём, что введенное здесь понятие софокусных оболочек самого общего вида в таком виде (см. предыдущую сноску) ранее не использовалось.

и I'

$$m_I^2\left(a_1^2+\mu\right);\ a_1^2\left(m_I^2-e_{12}^2\right)+m_I^2\mu;\ a_1^2\left(m_I^2-e_{13}^2\right)+m_I^2\mu$$

соответственно (см. рис. 86). Тогда разность квадратов второй и первой, например, полуосей у оболочки E оказывается той же $\left(=a_1^2e_{12}^2\right)$, как и у оболочки E', и т. д. Аналогично обстоит дело и для поверхностей I и I'. Следовательно, поверхность E будет софокусна поверхности E', а поверхность I — софокусна поверхности I', что и требовалось доказать. Поэтому в случае с двумя фокалоидами при указанных преобразованиях софокусными оказываются уже все четыре поверхности E, E', I и I'! В общем же случае софокусность была, кратко говоря, лишь попарной.

Пока говорилось только о геометрических свойствах преобразований (10.3). Далее рассмотрим гравитационные свойства софокусных оболочек и сконструированных из них сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов.

§ 10.2. Эквигравитирующие эллипсоидальные оболочки

Важнейшим свойством двух элементарных оболочек, связанных преобразованиями (10.3), *является то, что при одинаковой массе они имеют во внешнем пространстве один и тот же ньютоновский потенциал, т. е. такие софокусные оболочки являются эквигравитирующими.*

10.2.1. Софокусные гомеоиды

Дан элементарный гравитирующий гомеоид однородной плотности и массой M, имеющий граничную поверхность с полуосями a_i:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}=1. \tag{10.5}$$

Рассмотрим другой элементарный гомеоид той же массы, имеющий полуоси $\sqrt{a_i^2+\lambda_0}$ и софокусный первому. Поверхность этого гомеоида

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda_0}=1. \tag{10.6}$$

Теорема 1 (Шаль[3]). *Два элементарных софокусных гомеоида данного типа создают одинаковый потенциал во внешней для них точке* $(\widetilde{x}_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим внешние потенциалы этих софокусных оболочек. Согласно (5.64), потенциалы для первого и второго гомеоидов (их массы одинаковы) соответственно равны

$$\varphi_1\left(\widetilde{x}_i\right)=\frac{GM}{2}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(a_1^2+s\right)\left(a_2^2+s\right)\left(a_3^2+s\right)}}\ . \tag{10.7}$$

[3] Согласно Вебстеру [11], данный результат был получен Шалем в работе [57]. Из-за недоступности источника, мы даём этой теореме своё доказательство.

и

$$\varphi_2\left(\widetilde{x}_i\right)=\frac{GM}{2}\int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(a_1^2+\lambda_0+s\right)\left(a_2^2+\lambda_0+s\right)\left(a_3^2+\lambda_0+s\right)}},\tag{10.8}$$

причём эллипсоидальные координаты испытуемой точки суть наибольшие решения кубических уравнений

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\widetilde{x}_i^2}{a_i^2+\lambda_1}=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\widetilde{x}_i^2}{a_i^2+\lambda_1-\lambda_0}=1.\tag{10.9}$$

Тогда заменой

$$\lambda_0+s=s'\tag{10.10}$$

потенциал (10.8) очевидно сводится к потенциалу (10.7). Итак, $\varphi_1=\varphi_2$. ■

10.2.2. Софокусные фокалоиды

Фактически, этот случай был уже рассмотрен нами выше в § 5.12, см. теорему 5. *Эквигравитируемость фокалоидов*, тем самым, полностью доказана.

10.2.3. Софокусные эллипсоидальные оболочки общего типа

Выделим из семейства (10.1) при фиксированном малом значении параметра dm какую-то элементарную эллипсоидальную оболочку. Тогда другая элементарная оболочка, полученная из данной заменой полуосей (10.3), оказывается, как мы знаем, софокусной. Массы обеих оболочек здесь вновь полагаем равными друг другу.

Теорема 2 (Э – 4). *Две софокусные элементарные эллипсоидальные однородные оболочки данного типа имеют во внешнем пространстве одинаковые гравитационные потенциалы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно формуле (5.88), потенциалы обеих оболочек во внешней точке $\widetilde{x}_i$ даются выражениями

$$\begin{aligned}d\varphi_1^0\left(\widetilde{x}_i,m\right)=\frac{3}{4}G\Bigg\{&dM\left(m\right)\int\limits_{\lambda_1(m^2)}^{\infty}\mathrm{F}_1\left(m^2,v\right)dv+\\&+M\left(m\right)dm\int\limits_{\lambda_1(m^2)}^{\infty}\frac{d}{dm}\left[\mathrm{F}_1\left(m^2,v\right)\right]dv\Bigg\};\end{aligned}\tag{10.11}$$

$$\begin{aligned}d\varphi_2^0\left(\widetilde{x}_i,m\right)=\frac{3}{4}G\Bigg\{&dM\left(m\right)\int\limits_{\lambda_2(m^2)}^{\infty}\mathrm{F}_2\left(m^2,v\right)dv+\\&+M\left(m\right)dm\int\limits_{\lambda_2(m^2)}^{\infty}\frac{d}{dm}\left[\mathrm{F}_2\left(m^2,v\right)\right]dv\Bigg\},\end{aligned}\tag{10.12}$$

где эллипсоидальные координаты испытуемой точки $(\widetilde{x}_i)$ суть наибольшие корни кубических уравнений

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\widetilde{x}_i^2}{a_i^2 m^2 \alpha_i^2(m) + \lambda_1(m^2)} = 1; \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\widetilde{x}_i^2}{a_i^2 m^2 \alpha_i^2(m) + m^2\mu + \lambda_2(m^2)} = 1. \tag{10.13}$$

Здесь интегрируемая функция $\mathrm{F}_1(m^2, v)$ дано в (5.86), а функция $\mathrm{F}_2(m^2, v, \mu)$ получается из указанного известным нам преобразованием (10.3). Далее, заменой $v' = m^2\mu + v$ выражение F_2 превращается обратно в F_1, а нижний предел в интеграле (10.12) становится равным $\lambda_2(m^2) + m^2\mu$. Но так как имеет место равенство

$$\lambda_2(m^2) + m^2\mu = \lambda_1(m^2), \tag{10.14}$$

то очевидно, что потенциал (10.12) сводится к исходному потенциалу (10.11). ■

Поскольку внешние потенциалы пропорциональны массам тел, то справедливо простое обобщение.

Теорема 3 (Э – 5). *Внешние потенциалы элементарных софокусных (в смысле введённых выше преобразований* (10.3)) *гомеоидов, фокалоидов и вообще любых эллипсоидальных оболочек пропорциональны массам этих тел*

$$\frac{\varphi_1}{\mu_1} = \frac{\varphi_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{\varphi_i}{\mu_i}. \tag{10.15}$$

Важно заметить, что теорема 3 распространяется не только на тонкие, но и на толстые эллипсоидальные оболочки, а также на сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды с распределением плотности $\rho = \rho(m^2)$. Таким образом, формулируя эту теорему, мы выходим далеко за рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа (см. теорему 6 в гл. 5) и теоремы Шаля 1.

§ 10.3. Теорема об эквигравитирующих слоисто-неоднородных эллипсоидах

Рассмотрим гравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид. Его внешний потенциал даётся формулой (6.121). Создадим теперь из него другой эллипсоид, преобразуя по формулам (10.3) каждую из промежуточных элементарных оболочек первого в софокусную оболочку. Массы исходных и преобразованных слоёв полагаем равными. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4 (Э – 6). *Два слоисто-неоднородных эллипсоида данного типа, слои у которых связаны софокусными преобразованиями* (10.3), *являются эквигравитирующими во внешней точке* $\widetilde{x}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно теореме 3, две софокусные элементарные оболочки, связанные преобразованием (10.3), при условии сохранения массы являются эквигравитирующими. Поскольку же потенциал — аддитивная функция по массе, эквигравитирующими во внешнем пространстве будут, следовательно, и сплошные слоисто-неоднородные эллипсоиды, состоящие из множества таких слоёв. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты теоремы 4 распространяются и на оболочки конечной толщины.

Доказанное в §§ 10.2 и 10.3 свойство эквигравитируемости слоисто-неоднородных эллипсоидов с софокусными слоями, как и свойство эквигравитируемости отдельных оболочек, значительно расширяют рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа, сформулированной в XVIII веке только для однородных эллипсоидов. Действительно, результат Маклорена и Лапласа оказывается лишь сугубо частным случаем теорем, доказанных здесь.

§ 10.4. Дисковый предел софокусных преобразований (10.3) для эллипсоидальных оболочек

Чтобы расширить область применения развиваемой здесь теории, заметим, что при нижнем пределе для μ из (10.3)

$$\mu = -a_3^2\alpha_3^2\,(m) \tag{10.16}$$

любая эллипсоидальная оболочка с поверхностью $S\,(m)$ преобразуется в эллиптический[4], вообще говоря, диск с границей

$$\frac{x_1^2}{m^2\widetilde{a}_1^2\,(m)} + \frac{x_2^2}{m^2\widetilde{a}_2^2\,(m)} = 1 \tag{10.17}$$

и с поверхностной плотностью

$$\sigma\,(x_1, x_2) = 2a_1a_2a_3\rho\frac{d}{dm}\left[\frac{\alpha_2\,(m)\,\alpha_3\,(m)}{\widetilde{a}_1\,(m)\,\widetilde{a}_2\,(m)}\sqrt{\widetilde{Q}\,(m)}\right]dm, \tag{10.18}$$

где для краткости обозначено

$$\widetilde{Q}\,(m) = m^2 - \frac{x_1^2}{\widetilde{a}_1^2\,(m)} - \frac{x_2^2}{\widetilde{a}_2^2\,(m)}, \tag{10.19}$$

причём квадраты полуосей данного диска таковы:

$$\widetilde{a}_1^2\,(m) \equiv a_1^2 - a_3^2\alpha_3^2\,(m)\,, \quad \widetilde{a}_2^2\,(m) \equiv a_2^2\alpha_2^2\,(m) - a_3^2\alpha_3^2\,(m)\,. \tag{10.20}$$

Легко видеть, что такой диск и исходная оболочка имеют одинаковую массу (см. (5.17) и (5.19)). *Главное же, по доказанному выше в* § 10.2 *то, что такие диски тоже являются эквигравитирующими во внешнем пространстве исходным оболочкам* (*если, конечно, массы оболочек и дисков равны*).

Этот результат мы и будем развивать далее.

Прежде всего заметим, что в соответствии с (10.18), *элементарные гомеоид и фокалоид заменяются дисками*, имеющими поверхностные плотности:

$$\sigma_{\text{гом}}\,(x_1, x_2) = \frac{M_{\text{гом}}\,(m)}{2\pi\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)\,(a_2^2 - a_3^2)}} \cdot \frac{1}{m\sqrt{Q\,(m)}}; \tag{10.21}$$

$$\sigma_{\text{фок}}\,(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\frac{M_{\text{фок}}\,(m)}{\pi\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)\,(a_2^2 - a_3^2)}}\sqrt{Q\,(1)}, \tag{10.22}$$

[4] В круглый диск — в случае сфероидальных оболочек.

где $Q(m)$ из (9.4), а полные массы оболочек (а значит, и дисков) даются соответственно в (9.12) и

$$M_{\text{фок}} = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \rho(m) \frac{d}{dm}\left[m\sqrt{(m^2 - e_{12}^2)(m^2 - e_{13}^2)}\right] dm. \tag{10.23}$$

Далее сфероидальные оболочки следует рассматривать отдельно.

§ 10.5. И снова метод дифференциации: эквигравитирующие диски и стержни для элементарных сфероидальных оболочек

Однородный сжатый сфероид с поверхностью

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \qquad (a_1 \geqslant a_3) \tag{10.24}$$

имеет, согласно (9.5), эквигравитирующий диск радиусом

$$R = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$$

с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \frac{2\rho a_1^2 a_3}{R^2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \tag{10.25}$$

Кроме того, согласно (9.7), этот сфероид (а значит, и диск (10.25)), имеют эквигравитирующий стержень с чисто мнимым распределением плотности

$$\mu(\zeta) = \frac{\pi\rho a_1^2 a_3}{iR}\left(1 + \frac{\zeta^2}{R^2}\right), \qquad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{10.26}$$

Опираясь на разработанный в гл. 5 *метод дифференциации*, найдём теперь заменяющие диски и стержни для элементарных оболочек. Для этого в формулах (10.25) и (10.26) сделаем замену

$$a_1 \to a_1 m, \;\; a_3 \to a_3 m\alpha_3(m)\,; \;\; R = m\widetilde{a}_1(m). \tag{10.27}$$

Вклад в диск и стержень от элементарной оболочки с полуосями $a_1 m$ и $a_3 m\alpha_3(m)$ даётся тогда выражениями

$$\sigma_{\text{об}}(r) = 2\rho a_1^2 a_3 \frac{d}{dm}\left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1^2(m)}\sqrt{m^2 - \frac{r^2}{\widetilde{a}_1^2(m)}}\right] dm\,, \tag{10.28}$$

$$\mu_{\text{об}}(\zeta) = -i\pi\rho a_1^2 a_3 \frac{d}{dm}\left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1(m)}\left(m^2 + \frac{\zeta^2}{\widetilde{a}_1^2(m)}\right)\right]. \tag{10.29}$$

Это и есть требуемый результат: найдена эквигравитирующая пара:
вещественный круглый диск — мнимый стержень для элементарных сжатых сфероидальных оболочек произвольного вида.

Проверка. Как мы уже знаем, плотность мнимого стержня $\mu(\zeta)$ и поверхностная плотность вещественного диска $\sigma(r)$ связаны между собой формулами (9.132) и (9.145). И в данном случае аналогично

$$\mu_{об}(\zeta) = -iR \int\limits_{-\zeta^2}^{R^2} \sigma_{об}(x) \frac{dx}{\sqrt{\zeta^2 + x}} \quad (x = r^2). \tag{10.30}$$

Подставляя сюда $\sigma_{об}(x = r^2)$ из (10.28), имеем

$$\mu_{об}(\zeta) = -2i\rho a_1^2 a_3 \int\limits_{-\zeta^2}^{R^2} \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1^2(m)} \sqrt{m^2 - \frac{x}{\widetilde{a}_1^2(m)}} \right] \frac{dx}{\sqrt{\zeta^2 + x}}. \tag{10.31}$$

Здесь верхний предел можно считать постоянным, поскольку при $x = R^2$ подынтегральное выражение исчезает. Поэтому

$$\mu_{об}(\zeta) = -2i\rho a_1^2 a_3 \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_3(m)\, m}{\widetilde{a}_1^2(m)} \int\limits_{-\zeta^2}^{R^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{R^2}}{\zeta^2 + x}} dx \right] dm, \tag{10.32}$$

или, после интегрирования,

$$\mu_{об}(\zeta) = -i\pi\rho a_1^2 a_3 \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1(m)} \left(m^2 + \frac{\zeta^2}{\widetilde{a}_1^2(m)} \right) \right] dm, \tag{10.33}$$

что совпадает с (10.29).

Частные случаи

1) *Гомеоид* $\alpha_3(m) = 1$

В этом случае формулы (10.28) и (10.29) упрощаются и дают

$$\sigma_{гом}(r) = \frac{M_{гом}}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}, \quad R^2 = m^2 \left(a_1^2 - a_3^2\right), \tag{10.34}$$

$$\mu_{гом}(\zeta) = -\frac{2i\pi\rho a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} m\, dm. \tag{10.35}$$

Формула (10.35) совпадает с полученной ранее (9.20).

З а д а ч а 10.1. *Прямым методом доказать эквигравитируемость сфероидального гомеоида и диска с плотностью* (10.34).

Решение. Достаточно рассмотреть и доказать равенство потенциалов гомеоида и диска на оси симметрии Ox_3. Потенциал гомеоида даётся интегралом (5.64), только сейчас $a_1 = a_2$ и нижний предел равен $\lambda = x_3^2 - a_3^2$. Заменой $t^2 = a_3^2 + s$ получим

$$\varphi(x_3) = \frac{GM}{\widetilde{a}_1} F\left(\operatorname{arctg} \frac{\widetilde{a}_1}{x_3}, k\right), \quad k = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}}, \tag{10.36}$$

где $F(\theta, k)$ есть неполный эллиптический интеграл первого рода.

С другой стороны, потенциал диска с поверхностной плотностью (10.34) даётся интегралом

$$\varphi(x_3) = \sigma_0 \widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2 \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{x_3^2 + r^2\left(\widetilde{a}_1^2 \cos^2\theta + \widetilde{a}_2^2 \sin^2\theta\right)}}. \tag{10.37}$$

Вначале выполним здесь интегрирование по r. Получим

$$\varphi(x_3) = 4\sigma_0 G \widetilde{a}_2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\widetilde{a}_1}{x_3}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta. \tag{10.38}$$

Последний интеграл довольно сложен, но его, оказывается, всё же можно представить суммой двух табличных интегралов, правда, с дополнительными подынтегральными множителями (см. справочник Градштейн и Рыжик, 1951, с. 239–240). В итоге (10.38) приводим к виду

$$\varphi(x_3) = \frac{GM}{\widetilde{a}_1} \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{a}_1}{x_3}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \tag{10.39}$$

совпадающему с выражением (10.36). Следовательно, при одинаковых массах, гомеоид и диск данного типа действительно являются эквигравитирующими друг другу телами во всём внешнем (фактически, для оболочки) пространстве. ▼ 2) *Фокалоид*

Согласно (5.37), для этой оболочки

$$\alpha_3(m) = \frac{a_1}{a_3}\sqrt{1-\frac{e^2}{m^2}}, \; R^2 = a_1^2 - a_3^2, \tag{10.40}$$

и из (10.28) для неё следует

$$\sigma_{\text{фок}}(r) = \frac{2\rho a_1}{e^2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\frac{d}{dm}\left[m^2\sqrt{m^2-e^2}\right] dm = \frac{3M_{\text{фок}}}{2\pi R^2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}. \tag{10.41}$$

Стержень для элементарного сжатого фокалоида имеет плотность

$$\mu_{\text{фок}}(\zeta) = -i\pi\rho\frac{m(3m^2-2e^2)}{e\sqrt{m^2-e^2}}\left(a_1^2 + \frac{\zeta^2}{e^2}\right) = -\frac{3iM_{\text{фок}}}{4R}\left[1+\frac{\zeta^2}{R^2}\right], \tag{10.42}$$

что, с учётом (5.46), совпадает с первой из формул (9.29). 3) *Сфероидальная оболочка равной толщины на осях симметрии*

Согласно (5.53), полуоси этой оболочки $a_1 m$, $a_1(m-\varepsilon)$ $(\varepsilon \leqslant m \leqslant 1)$ и

$$\alpha_3(m) = \frac{a_1}{a_3}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right), \; \widetilde{a}_1^2(m) = a_1^2\varepsilon\frac{2m-\varepsilon}{m^2} \quad \left(\varepsilon = 1-\frac{a_3}{a_1}\right). \tag{10.43}$$

Для неё эквигравитирующими будут диск и стержень с распределениями плотностей

$$\sigma_{\text{eq}}(r) = \frac{2\rho a_1}{\varepsilon}\frac{d}{dm}\left[\frac{m^2(m-\varepsilon)}{2m-\varepsilon}\sqrt{1-\frac{r^2}{a_1^2\varepsilon(2m-\varepsilon)}}\right] dm, \tag{10.44}$$

$$\mu_{\text{eq}}(\zeta) = \frac{-i\pi\rho a_1^2}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{dm} \left[\frac{m^2 (m-\varepsilon)}{\sqrt{2m-\varepsilon}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{a_1^2 \varepsilon (2m-\varepsilon)} \right) \right] dm. \tag{10.45}$$

Задача 10.2. *Получить аналоги формул* (10.28) *и* (10.29) *для элементарных оболочек вытянутого сфероида.*

Указание. Для решения этой задачи применить результаты § 9.13.

§ 10.6. Эквигравитирующие диски и стержни для сплошных слоисто-неоднородных сфероидов

От оболочек естественно теперь перейти к сплошным телам.

Рассмотрим неоднородный сжатый сфероид, в котором слои равной плотности описываются семейством сфероидальных поверхностей (9.11) с переменной, вообще говоря, сплюснутостью. Плотность в таком сфероиде, как мы знаем, описывается функцией $\rho = \rho(m)$.

Поставим задачу найти диски и стержни, которые дают тот же внешний потенциал, что и целый сфероид. Для этого выделим (рис. 87) элементарную оболочку с поверхностью $S(m)$, имеющую полуоси $a_1(m)$ и $a_3 m \alpha_3(m)$.

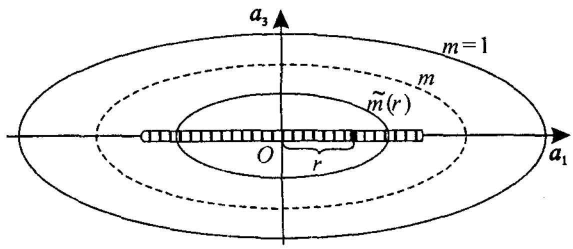


Рис. 87. Вклад в плотность в точке r эквигравитирующего диска (заштрихован) дают только те сфероидальные оболочки, которые расположены между граничными сфероидами $m = 1$ и $\widetilde{m}(r)$

Как мы уже знаем из § 10.5, каждая такая оболочка имеет свой заменяющий диск и стержень. Но сейчас следует уже несколько иначе интерпретировать формулы (10.28) и (10.29), считая их теми вкладами, которые даёт выделенная элементарная оболочка в плотность в точке r и ζ *суммарных заменяющих дисков и стержней.* При этом необходимо уяснить, *какие же именно* оболочки сфероида дают вклад в точке r и ζ суммарных дисков и стержней. Анализ показывает, что в случае диска вклад в точку r дают только те оболочки, для которых параметр m удовлетворяет неравенству

$$\widetilde{m}(r) \leqslant m \leqslant 1, \tag{10.46}$$

причём нижний предел этого неравенства следует находить из условия обращения в нуль вклада от оболочки с критическим $\widetilde{m} = m$. Согласно (10.28), последнее условие выполняется, когда либо

$$m^2 - \frac{r^2}{\widetilde{a}_1^2(m)} = 0, \tag{10.47}$$

либо, если уравнение (10.47) вырождается и не позволяет найти m (при софокусных слоях!), когда

$$\alpha_3(m) = 0. \tag{10.48}$$

Аналогично обстоит дело и в случае стержня. Здесь надо учитывать оболочки с

$$\widehat{m} \leqslant m \leqslant 1, \tag{10.49}$$

причём, согласно (10.29), $\widehat{m}$ должно находиться либо из уравнения

$$m^2 + \frac{\zeta^2}{\widetilde{a}_1^2(m)} = 0, \tag{10.50}$$

либо, если по указанной выше причине этого сделать нельзя, из того же уравнения (10.48).

Интегрируя в указанных пределах вклады (10.28) и (10.29) от элементарных оболочек с весовым множителем $\rho(m)$ в суммарные диски и стержни, в итоге получим квадратуры

$$\sigma_{\text{диска}}(r) = 2a_1^2 a_3 \int\limits_{\widetilde{m}}^{1} \rho(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1^2(m)} \sqrt{m^2 - \frac{r^2}{\widetilde{a}_1^2(m)}} \right] dm, \tag{10.51}$$

$$\mu(\zeta) = -i\pi a_1^2 a_3 \int\limits_{\widehat{m}}^{1} \rho(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1(m)} \left(m^2 + \frac{\zeta^2}{\widetilde{a}_1^2(m)} \right) \right] dm. \tag{10.52}$$

Это и есть требуемый результат: через софокусные преобразования отдельных оболочек найдена эквигравитирующая пара *вещественный диск — мнимый стержень для сплошных слоисто-неоднородных сжатых сфероидов произвольной плотности и с произвольным в этих сфероидах профилем сжатия слоёв*. Сразу заметим, что как и для отдельных оболочек, найденные выше $\sigma(r)$ и $\mu(\zeta)$ из (10.51) и (10.52) связаны между собой формулами (9.132) и (9.145). То, что это так, можно убедиться тем же способом, который мы применяли и выше в случае оболочек.

Подчеркнём, что радиус замещающего диска R и «длина» стержня L для слоисто-неоднородных сфероидов соответственно будут равны

$$R = \widetilde{a}_1(m = 1) = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}; \; L = 2iR. \tag{10.53}$$

Очевидно, их «размеры» определяются граничной поверхностью сфероида и не зависят от распределения вещества в нём.

Итак, мы приходим к важному результату:

Теорема 5. *Слоисто-неоднородному сфероиду с законом плотности $\rho = \rho(m)$ эквигравитирующими во внешнем пространстве будет как вещественный круглый диск с поверхностной плотностью* (10.51), *так и мнимый стержень с плотностью* (10.52).

Именно эти результаты и расширяют рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа.[5] Рассмотрим примеры.

1. *Однородный сфероид*

В этом простом случае $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $\alpha_3(m) \equiv 1$,

$$\widetilde{m} = \frac{r}{R}, \quad \widehat{m} = \frac{i\zeta}{R}, \tag{10.54}$$

и легко видеть, что (10.51) и (10.52) дают выражения, совпадающие с уже известными нам (9.5) и (9.7).

[5] Напомним, что в рамках теоремы Маклорена — Лапласа среди сфероидов рассматривается только однородный и утверждается, что этому сфероиду соответствует один только круглый диск с конкретной плотностью (9.5).

2. *Неоднородный сфероид с гомотетическими слоями*

Здесь также $\alpha_3(m) = 1$, и уравнения (10.47) и (10.48) дают

$$\widetilde{m} = \frac{r}{R}\,;\ \widehat{m} = \frac{i\zeta}{R}\,;\ \widetilde{a}_1(m) = R. \tag{10.55}$$

Формулы (10.51) и (10.52) заметно упрощаются (обозначено $x = m^2$):

$$\sigma_{\text{диска}}(\alpha) = \frac{a_3}{e^2}\int\limits_{\alpha^2}^{1}\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{x-\alpha^2}},\ \text{где } \alpha^2 = \frac{r^2}{R^2} \leqslant 1; \tag{10.56}$$

$$\mu(\zeta) = -i\pi\frac{a_1^2 a_3}{R}\int\limits_{-\frac{\zeta^2}{R^2}}^{1}\rho(x)\,dx. \tag{10.57}$$

2а) В случае с подобными слоями замечателен сфероид с законом распределения плотности

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-m^2}}. \tag{10.58}$$

А именно: *внешний потенциал такого слоисто-неоднородного сфероида заменяется, согласно* (10.56), *потенциалом однородного круглого диска с плотностью*

$$\sigma_{\text{диска}} = \pi\rho_0\frac{a_3}{e^2} = \text{const}. \tag{10.59}$$

В частности, в дисковом пределе ($e = 1$) от исходного сфероида получим однородный диск с плотностью

$$\sigma_{\text{диска}} = \pi\rho_0 a_3. \tag{10.60}$$

Свойство эквигравитируемости такого сфероида и однородного круглого диска мы уже использовали выше в § 9.5.2 при нахождении *пространственного потенциала* диска.

2б) В согласии с формулой (10.57), для слоисто-неоднородного сфероида из гомотетических слоёв с распределением объёмной плотности (10.58) эквигравитирующий стержень имеет одномерную плотность

$$\mu(\zeta) = -2i\pi\rho_0\frac{a_3}{e^2}\sqrt{R^2+\zeta^2}. \tag{10.61}$$

В другом варианте неоднородного сфероида с гомотетическими слоями, когда распределение плотности суть

$$\rho(m) = \rho_0\left(1-m^2\right)^n,\ (n \geqslant 0), \tag{10.62}$$

из (10.51) получим решение

$$\sigma_{\text{диска}}(r) = \frac{a_3}{e^2}\rho_0 \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n+1\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+1/2}, \tag{10.63}$$

где $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n+1\right)$ — бета-функция. В частности, если n — целое и положительное, то бета-функция равна

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{n!2^{n+1}}{(2n+1)!!}. \tag{10.64}$$

Суть дела в том, что для сфероида с распределением вещества по закону (10.62) эквигравитирующий стержень имеет плотность

$$\mu(\zeta) = -i\pi\rho_0 \frac{a_1^2 a_3}{R(n+1)} \left(1 + \frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+1}. \tag{10.65}$$

2в) Наконец, для сфероида из гомотетических слоёв с законом объёмной плотности

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \beta m^2\right)^{3/2}}, \tag{10.66}$$

хорошо моделирующего (см. (15.67)) при специально подобранных значениях параметра β распределение поверхностной яркости в реальных эллиптических галактиках[6], эквигравитирующими оказываются диск и стержень, имеющие соответственно распределения плотности

$$\sigma_{\text{диска}}(r) = \frac{2a_3\rho_0}{e^2\sqrt{1+\beta}} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R^2}}}{1 + \beta\dfrac{r^2}{R^2}}, \tag{10.67}$$

$$\mu(\zeta) = -2i\pi\rho_0 \frac{a_1^2 a_3}{\beta R} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta\dfrac{\zeta^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\right). \tag{10.68}$$

3. *Неоднородный сфероид с софокусными слоями*

При софокусном расслоении, согласно (5.37) и (10.40),

$$\widetilde{a}_1^2(m) = \frac{R^2}{m^2}; \; R^2 = a_1^2 - a_3^2. \tag{10.69}$$

В этом случае нижний предел в интегралах (10.51) и (10.52) уже нельзя найти из уравнений (10.47) и (10.50) в силу их вырождения, и теперь надо использовать уравнение (10.48). Из него следует, что

$$\widetilde{m} = \widehat{m} = e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}. \tag{10.70}$$

Поэтому из выражений (10.51) и (10.52) имеем:

[6] Часто для подгонки наблюдаемого распределения поверхностной яркости для какой-то конкретной E-галактики требуется подбирать даже несколько значений β.

$$\sigma_{\text{диска}}(r) = \frac{3M_{\text{сф}}}{2\pi R^2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}, \tag{10.71}$$

$$\mu(\zeta) = -i\frac{3M_{\text{сф}}}{4R}\left[1+\frac{\zeta^2}{R^2}\right], \tag{10.72}$$

так как при софокусном расслоении полная масса сфероида[7], согласно (6.117) и (5.46), равна

$$M_{\text{сф}} = \frac{4}{3}\pi a_1^3\int\limits_e^1 \rho(m)\,\frac{d}{dm}\left[m^2\sqrt{m^2-e^2}\right]. \tag{10.73}$$

Но формулы (10.71) и (10.72) полностью совпадают с (9.5) и (9.7), полученными ранее для однородного сжатого сфероида! Мы приходим к замечательному результату. *При софокусном расслоении сфероида структура эквигравитирующих для него дисков и стержней вообще не зависит от закона плотности $\rho = \rho(m)$ в моделируемом сфероиде. Поэтому сфероид однородный и сфероид слоисто-неоднородный (при любом распределении плотности вещества во втором!), состоящий из фокалоидов, при одинаковых массах и конгруэнтных граничных поверхностях имеют совершенно одинаковые эквигравитирующие диски и стержни.* Этот вывод полностью согласуется с результатами § 6.12 (см. в этом параграфе последний абзац).

Задача 10.3. *Получить аналоги формул* (10.51) *и* (10.52) *для слоисто-неоднородных вытянутых сфероидов.*

Указание. При решении этой задачи следует опираться на формулы, полученные в задаче 10.2.

Задача 10.4. *Записать результаты* (10.71) *и* (10.72) *для случая вытянутого сфероида.*

§ 10.7. Восстановление объёмной плотности сфероида по поверхностной плотности эквигравитирующего диска

Интересной для практических приложений является следующая обратная задача. Поставим вопрос о том, как по известному закону поверхностной плотности плоского круглого диска $\sigma(r)$ найти объёмную плотность слоисто-неоднородного сфероида, эквигравитирующего этому диску. Оставляя в стороне сфероиды с переменной сплюснутостью слоёв покажем, как в принципе это можно сделать для сфероида, состоящего только из гомотетических слоёв.

С этой целью обратимся к выражению (10.56) и будем рассматривать эту формулу как интегральное уравнение для неизвестной плотности сфероида $\rho(x)$. С этой целью, поменяв знак под радикалом, перепишем (10.56) в виде

$$i\frac{e^2}{a_3}\sigma(\alpha) = \int\limits_{\alpha^2}^1 \rho(x)\,\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x}}. \tag{10.74}$$

[7] А в контексте данных формул $M_{\text{сф}}$ — это и полная масса диска, и стержня, заменяющих потенциал данного сфероида.

Но ведь (10.74) можно интерпретировать как уравнение Абеля для неизвестной величины $\rho_{\text{сф}}(x)$. Оно имеет решение

$$\rho_{\text{сф}}\left(\alpha^2\right) = \frac{e^2}{\pi a_3}\left[\frac{\sigma(1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \int\limits_{\alpha^2}^{1}\frac{\sigma'(x)\,dx}{\sqrt{\alpha^2 - x}}\right]. \tag{10.75}$$

Здесь штрих означает производную, а под α^2 надо понимать параметр m^2. Делая указанную замену, получим

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{e^2}{\pi a_3}\left[\frac{\sigma(1)}{\sqrt{1-m^2}} - \int\limits_{m^2}^{1}\frac{\sigma'(y)\,dy}{\sqrt{y-m^2}}\right], \quad y = r^2/R^2, \tag{10.76}$$

где e — эксцентриситет меридионального сечения сфероида, а R — радиус диска.

Очевидно, в паре эквигравитирующих тел *диск — сфероид* первый с геометрической точки зрения представляет собой фокальный кружок с радиусом $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$, расположенный в экваториальной плоскости рассматриваемого сфероида.

Для проверки основной формулы (10.76) рассмотрим несколько характерных примеров.

а) *Дан однородный круглый диск:* $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$; в этом случае $\sigma_y' = 0$ и из (10.76) сразу следует известный нам результат для закона распределения объёмной плотности в сфероиде (10.58) со значением центральной плотности $\rho_0 = \dfrac{e^2\sigma_0}{\pi a_3}$.

б) *Дан круглый диск с распределением поверхностной плотности по закону*

$$\sigma(y) = \frac{3M}{2\pi R^2}\sqrt{1-y}, \tag{10.77}$$

который, как мы уже знаем, входит в эквигравитирующую пару с однородным сжатым сфероидом. Действительно, в этом случае из (10.76) легко получим

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{3e^2 M}{4\pi a_3 R^2} = \rho_0 = \text{const}, \tag{10.78}$$

что согласуется с примером (9.5) для однородного сфероида.

Задача 10.5. *Задан круглый диск с поверхностной плотностью*

$$\sigma(r) = \sigma_0\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \tag{10.79}$$

Найти его пространственный потенциал.

Решение. Такой диск, как мы уже знаем, является эквигравитирующим однородному сжатому сфероиду массой M и полуосями $a_1 \geqslant a_3$. Для полной эквивалентности фигур следует в (10.79) положить

$$\sigma_0 = \frac{3M}{2\pi\left(a_1^2 - a_3^2\right)}, \quad R^2 = a_1^2 - a_3^2.$$

Следуя разработанному выше методу, потенциал такого диска мы получим из выражения внешнего потенциала однородного сфероида (который следует из (6.1) при $a_1 = a_2$) в софокусном дисковом пределе $a_1^2 \to a_1^2 - a_3^2$ и $a_3 \to 0$. Выполняя указанный предельный переход, имеем

$$\varphi_{\text{диска}} = \frac{3}{4}GM \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{dv}{\left(a_1^2 - a_3^2 + v\right)\sqrt{v}} \left(1 - \frac{r^2}{a_1^2 - a_3^2 + v} - \frac{x_3^2}{v}\right), \tag{10.80}$$

где λ — эллипсоидальная координата испытуемой точки; она является наибольшим корнем квадратного уравнения

$$\frac{r^2}{a_1^2 - a_3^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{\lambda} = 1. \tag{10.81}$$

Беря возникающие здесь интегралы, в итоге получим искомый потенциал диска, выраженный через элементарные функции[8]

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{диска}}(r, x_3) = \frac{3GM}{4\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} &\left\{\left(2 - \frac{r^2 - 2x_3^2}{a_1^2 - a_3^2}\right) \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{\lambda}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left(\frac{r^2\sqrt{\lambda}}{a_1^2 - a_3^2 + \lambda} - \frac{2x_3^2}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{10.82}$$

Этот потенциал эквивалентен, разумеется, найденному нами ранее выражению внешнего потенциала однородного сжатого сфероида (6.27). ▼

в) Рассмотрим *диск с плотностью* (10.63). Очевидно, на границе $\sigma(y = 1) = 0$, так что (10.76) приводим теперь к виду

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{\rho_0}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n + 1\right) \int\limits_{m^2}^{1} \frac{(1 - y)^{n - 1/2}}{\sqrt{y - m^2}} dy. \tag{10.83}$$

Здесь $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета-функция Эйлера. Беря интеграл в (10.83), получим

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{\rho_0}{\pi}\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n + 1\right) \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)\right\}\left(1 - m^2\right)^n. \tag{10.84}$$

Но выражение в фигурных скобках равно π, и мы получаем искомый верный результат (10.62).

З а д а ч а 10.6. *Подтвердить, что диск с плотностью* (10.67) *соответствует сжатому сфероиду с распределением плотности* $\rho(m)$ *из* (10.66).

Решение. Подставив функцию (10.67) в выражение (10.76), после преобразований имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\text{сф}}(m) = -\frac{\rho_0}{\pi\sqrt{1 + \beta}} &\left(\int\limits_{m^2}^{1} \frac{dy}{(1 + \beta y)\sqrt{(1 - y)(y - m^2)}} - \right. \\ &\left. -2(1 + \beta) \int\limits_{m^2}^{1} \frac{dy}{(1 + \beta y)^2 \sqrt{(1 - y)(y - m^2)}}\right). \end{aligned} \tag{10.85}$$

[8] Вычисление же потенциала такого диска обычным методом оказывается весьма громоздким делом.

Вычисляя эти интегралы, получим

$$\rho_{\text{сф}}(m) = -\frac{\rho_0}{\pi(1+\beta)\sqrt{1+\beta m^2}}\left\{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left. -2(1+\beta)\left[\frac{1}{1+\beta m^2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{1+\beta}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \tag{10.86}$$

Подставляя значения бета-функций в последнее выражение, получаем требуемый результат (10.66). ▼

З а д а ч а 10.7. *Показать, что для диска с распределением плотности* (9.150) *эквигравитирующим является неоднородный сжатый сфероид с объёмной плотностью*

$$\rho_{сф}(m) = \frac{3M_{сф}}{\pi^2 a_1^2 a_3}\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}, \tag{10.87}$$

где $M_{сф}$ — полная масса сфероида. Найти внешний пространственный потенциал такого диска и сфероида.

Решение. Эквигравитирующий сфероид, как мы знаем, может быть найден двумя способами: *по диску и по стержню.* Сейчас мы найдём его по диску[9]. Записывая (9.150) в виде $\sigma = \sigma_0\left(1-\sqrt{y}\right)$, из формулы (10.76) получаем

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{e^2\sigma_0}{2\pi a_3}\int\limits_{m^2}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y\left(y-m^2\right)}}, \tag{10.88}$$

что сразу даёт (10.87). Для проверки по массе подставим (10.87) под знак интеграла (6.119), и поскольку

$$\int\limits_0^1 m^2\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}dm = \frac{\pi}{12}, \tag{10.89}$$

то вновь приходим к формуле (см. (9.152))

$$M_{\text{сф}} = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 a_1^2 e^2 = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2, \text{ причём } R = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}.$$

Найдём теперь внешний потенциал во всём пространстве для такого диска и сфероида (а значит, и для соответствующего им эквигравитирующего стержня). Подставляя (10.87) в (1.49), получим

$$\varphi_{\text{сф}}(r, x_3) = G\sigma_0 a_1^2 a e^2\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\sqrt{1-m^2(u)} - \dfrac{m^2(u)}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-m^2(u)}}{1-\sqrt{1-m^2(u)}}}{\left(a_1^2+u\right)\sqrt{a_3^2+u}}du, \tag{10.90}$$

где $m^2(u)$ из (10.183).

[9] О нахождении сфероида с плотностью (10.87) по эквигравитирующему стержню см. ниже задачу 10.11.

Вводя эллипсоидальные координаты $\lambda > \mu$ *для сжатого сфероида* (см. § 10.13.4), с помощью тождества (10.188) интеграл (10.90) приводится к виду

$$\varphi_{\text{сф}}(r, x_3) = G\sigma_0 R^2 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{(a_1^2+u)(u-\lambda)(u-\mu)}} \left\{1 - \frac{r^2}{a_1^2+u} - \frac{x_3^2}{a_3^2+u} - \right. \\ \left. -m^2(u)\sqrt{1-m^2(u)}\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2(u)}}{m(u)}\right\}, \tag{10.91}$$

где, напомним, $m^2(u)$ дано ниже в (10.183), и частично выражается через эллиптические интегралы

$$\varphi_{\text{сф}}(r, x_3) = \\ = G\sigma_0 R^2 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\lambda+a_1^2}} \left[\mathrm{K}(k) - \frac{r^2(\mathrm{K}(k)-\mathrm{E}(k))}{\mu+a_1^2} - \frac{x_3^2}{R^2}\left(\Pi\left[\frac{R^2}{\lambda+a_1^2}, k\right] - \mathrm{K}(k)\right)\right] - \right. \\ \left. - \int\limits_\lambda^\infty \frac{m^2(u)\sqrt{1-m^2(u)}}{\sqrt{(a_1^2+u)(u-\lambda)(u-\mu)}} \ln\frac{1+\sqrt{1-m^2(u)}}{m(u)}du \right\}, \tag{10.92}$$

причём k дано в (10.203).

Найдём, в частности, внешний потенциал сфероида с распределением объёмной плотности (10.87) на его оси симметрии Ox_3. При $r=0$, согласно (10.186), координата $\mu = -a_1^2$ и модуль $k=0$. Следовательно, имеем

$$\mathrm{K}(k) = \mathrm{E}(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \Pi\left[\frac{R^2}{\lambda+a_1^2}, 0\right] = \frac{\pi\sqrt{R^2+x_3^2}}{2x_3}.$$

Тогда (10.92) упрощается и приводится к виду ($y = x_3/R$)

$$\varphi_{\text{сф}}(x_3) = \frac{3GM_{\text{сф}}}{R^2}\left\{\sqrt{R^2+x_3^2} - 2x_3 + \frac{2x_3}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{\frac{1}{y^2}+t^2}dt\right\}. \tag{10.93}$$

Сравнивая это выражение с потенциалом диска (9.153) (причём $R \equiv L$), найденного ранее прямым способом, видим, что эквивалентность обоих выражений будет установлена, если сейчас убедимся в справедливости равенства

$$y\ln\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{\frac{1}{y^2}+t^2}dt. \tag{10.94}$$

Интеграл в (10.94) в справочниках отсутствует. Он весьма любопытен. Доказать равенство (10.94) можно, во-первых, следующим способом. Разлагая подынтегральную функцию в правой части равенства (10.94) в ряд по степеням $\frac{1}{y^2}$ и затем интегрируя его, получим для всей правой части следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{y^{2n-2}}. \tag{10.95}$$

Но легко видеть, что выражение (10.95) и представляет собой разложение в ряд по степеням $\frac{1}{y}$ левой части равенства (10.94).

З а д а ч а 10.8. *Дайте прямое доказательство равенству* (10.94).

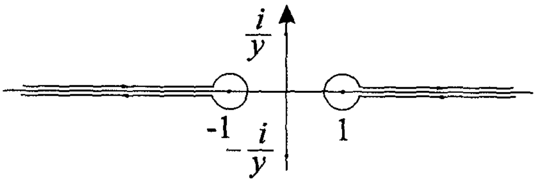


Рис. 88. Разрез в комплексной плоскости к задаче 10.8

Решение. Применим теорию вычетов. Очевидно, в комплексной плоскости подынтегральная функция имеет две точки ветвления ± 1. Для выделения однозначной ветви проведём разрез, соединяющий эти точки через бесконечность см. рис. 88. В результате, число интегралов увеличивается до четырёх и мы имеем

$$I = 4 \int\limits_1^\infty \frac{\ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)}{\frac{1}{y^2} + t^2} dt. \tag{10.96}$$

Согласно общей теории, эта величина должна быть равна сумме вычетов в особых точках $t = \pm \frac{i}{y}$ от функции

$$\mathrm{F}(t) = \frac{\ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)}{\frac{1}{y^2} + t^2},$$

умноженной на $2\pi i$. В силу тождества

$$\frac{1}{\frac{1}{y^2} + t^2} = \frac{y}{2i}\left(\frac{1}{t - \frac{i}{y}} - \frac{1}{t + \frac{i}{y}}\right),$$

сумма всех вычетов в указанных особых точках, как легко видеть, будет равна

$$\frac{y}{2i}\left[\ln\left(\frac{i}{y} + i\sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}\right) - \ln\left(-\frac{i}{y} + i\sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}\right)\right] = -iy \ln \frac{1 + \sqrt{y^2 + 1}}{y}. \tag{10.97}$$

Умножая результат (10.97) на $2\pi i$ и приравнивая результат полученному выше выражению (10.96), мы и приходим к требуемому равенству (10.94). Доказательство закончено. ▼

З а д а ч а 10.9. *Найти эквигравитирующий сфероид и внешний потенциал для диска с распределением плотности* (9.156).

Решение. Запишем (9.156) в требуемом виде $\sigma(y) = \sigma_0 (1 - y)^n$ $\left(y = \frac{r^2}{R^2}\right)$. Тогда метод даёт

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{e^2}{\pi a_3} n \sigma_0 \int\limits_{m^2}^1 \frac{(1 - y)^{n-1}}{\sqrt{y - m^2}} dy, \tag{10.98}$$

или, легко интегрируя,

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{e^2\sigma_0}{\pi a_3} n \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n\right)\left(1 - m^2\right)^{n-1/2}. \tag{10.99}$$

Подставляя это распределение плотности в (1.49), находим внешний потенциал данного диска, а значит, и сфероида (n — любое вещественное число)

$$\varphi_{\text{внешн}}(r, x_3) = 4G\sigma_0 \frac{e^2 a_1^2 n}{n + \frac{1}{2}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n\right) \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(a_1^2 + u\right)\sqrt{a_3^2 + u}} \left[1 - \frac{r^2}{a_1^2 + u} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right]^{n+1/2}. \tag{10.100}$$

▼

З а д а ч а 10.10. *Среди астрофизических дисков широкое применение находят диски с гауссовским распределением плотности*

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(-a\frac{r^2}{R^2}\right) \equiv \sigma_0 \exp(-ay), \tag{10.101}$$

где a — безразмерный параметр. С помощью формулы (10.76) *доказать, что соответствующий такому диску сфероид имеет распределение плотности*

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{e^2\sigma_0}{\pi a_3}\left[\frac{\exp(-a)}{\sqrt{1 - m^2}} + \sqrt{\pi a}\exp\left(-am^2\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{a\left(1 - m^2\right)}\right)\right], \tag{10.102}$$

где $\operatorname{erf}\left(\sqrt{a\left(1 - m^2\right)}\right)$ *— функция ошибок.*

§ 10.8. Нахождение объёмной плотности сфероида по плотности эквигравитирующего стержня

Формула (10.76) позволяет решать обратную задачу и находить объёмную плотность сфероида по известной поверхностной плотности $\sigma(r)$ заменяющего его диска. *Но обратную задачу можно поставить и для пары «стержень — сфероид»*. Переход от стержня к сфероиду может быть выполнен так (для иллюстрации метода рассмотрим переход к сфероиду, состоящему из гомотетических слоёв). Обратимся к формуле (10.57). Дифференцируя обе её части по ζ^2 и делая затем замену $\dfrac{\zeta^2}{R^2} = -m^2$, получим требуемый результат

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{iR^3}{\pi a_1^2 a_3}\left[\frac{d\mu}{d\zeta^2}\right]_{\frac{\zeta^2}{R^2} = -m^2}. \tag{10.103}$$

Пример 1. Возьмём $\mu(\zeta)$ из формулы (10.68); для неё по формуле (10.103) легко находим соответствующую плотность сфероида (10.66).

Пример 2. Проверка формулы (10.103) в случае стержня с плотностью (9.7) для однородного сжатого сфероида также элементарная и не затруднит читателя.

З а д а ч а 10.11. *Показать, что для стержня с распределением плотности* (9.151) (*а этот стержень — эквигравитирующий для диска* (9.150)) *эквигравитирующим будет сфероид с объёмной плотностью* (10.87).

Решение. Подставляя $\mu(\zeta)$ из (9.151) в общую формулу метода (10.103) и дифференцируя, легко находим

$$\rho_{\text{сф}}(m) = \frac{R^2\sigma_0}{2\pi a_1^2 a_3} \ln \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{1-\sqrt{1-m^2}}. \tag{10.104}$$

Эта формула эквивалентна (10.87).

§ 10.9. Какой эллиптический диск и слоисто-неоднородный эллипсоид имеют одинаковый внешний потенциал?

10.9.1. Задан слоисто-неоднородный эллипсоид. Найти эквигравитирующий эллиптический диск

В общем случае *трёхосного эллипсоида* с граничной поверхностью (9.1) формула (10.51), предназначенная для сфероидов, уже не годится. Решаем поставленную задачу, вновь интегрируя выражение (10.18). В итоге, для слоисто-неоднородного эллипсоида находим эквигравитирующий эллиптический диск с вещественной поверхностной плотностью

$$\sigma_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2a_1a_2a_3 \int\limits_{\widetilde{m}}^{1} \rho(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{\alpha_2(m)\,\alpha_3(m)}{\widetilde{a}_1(m)\,\widetilde{a}_2(m)} \sqrt{\widetilde{Q}(m)} \right] dm. \tag{10.105}$$

Нижний предел $\widetilde{m}$ должен быть решением уравнения

$$\tilde{Q}(m) = 0, \tag{10.106}$$

обобщающего (10.47), или, в случае вырождения этого уравнения, решением уравнения (10.48).

Заметим, что *эллиптический диск* с распределением плотности (10.105):

а) в общем случае является *неоднородным* и имеет границу (9.2); эта граница образована эллипсом, софокусным главному сечению эллипсоида плоскостью, перпендикулярной наименьшей оси исходного эллипсоида. В данном случае наименьшей является полуось a_3, поэтому эквигравитирующий диск лежит в плоскости Ox_1x_2;

б) имеет массу исходного эллипсоида M;

в) *является эквигравитирующим исходному слоисто-неоднородному эллипсоиду*[10].

Таким образом, в (10.105) *обобщён результат* (9.3) *для эквигравитирующего диска однородного эллипсоида*. При расслоении исходного эллипсоида на *гомеоиды*, когда обе вспомогательные функции $\alpha_2(m)$ и $\alpha_3(m)$ от m не зависят и $m^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}$, выражение (10.105) упрощается и принимает вид

$$\sigma_{\text{диска}}(x_1, x_2) = \frac{2a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1^2-a_3^2)(a_2^2-a_3^2)}} \int\limits_{\widetilde{m}}^{1} \frac{\rho(m)\,m\,dm}{\sqrt{m^2-\widetilde{m}^2}}, \tag{10.107}$$

где

$$\widetilde{m} = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2-a_3^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2-a_3^2}}. \tag{10.108}$$

[10] Заметим, что для тел без круговой симметрии заменяющих стержней уже не существует.

Формула (10.107) позволяет по заданному эллипсоиду находить эквигравитирующий эллиптический диск.

1. В частном случае эллипсоида с простым (с аналитической точки зрения) законом плотности

$$\rho(m) = \rho_0 \left(1 - m^2\right)^n, \ (n \geqslant 0), \tag{10.109}$$

формула (10.107) даёт эллиптический диск с плотностью

$$\sigma_{\text{диска}}(x_1, x_2) = \frac{M(2n+3)}{2\pi\sqrt{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)}} [Q(1)]^{n+1/2}, \tag{10.110}$$

где $Q(1)$ из (9.4), а полная масса эллипсоида (а значит, и диска) равна

$$M = \pi^{3/2} a_1 a_2 a_3 \rho_0 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)}. \tag{10.111}$$

Задача 10.12. *Выполнить проверку найденного диска* (10.110) *по массе и внешнему потенциалу.*

В частности, при $n = 0$, когда исходный эллипсоид имеет однородную плотность, формула (10.110) легко приводит к известному уже нам выражению (9.3) для плотности эллиптического диска.

2. Другой важный частный случай, когда слоисто-неоднородный эллипсоид имеет гомотетические слои вещества и закон объёмной плотности (10.58). Соответствующий такому эллипсоиду эквигравитирующий во всём внешнем пространстве эллиптический диск имеет *однородную* поверхностную плотность

$$\sigma_{\text{диска}} = \frac{\pi \rho_0 a_1 a_2 a_3}{\sqrt{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)}}. \tag{10.112}$$

Как видим, этот результат согласуется со случаем $n = 0$ предыдущего пункта.

3. Для астрофизических приложений важен слоисто-неоднородный эллипсоид с законом плотности

$$\rho(m) = \frac{\rho_0}{\left(1 + m^2\right)^n}. \tag{10.113}$$

Рассмотрим следующие случаи.

При $n = 1$ подстановка (10.113) в формулу (10.107) дает

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{2 a_1 a_2 a_3 \rho_0}{\sqrt{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \widetilde{m}^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \widetilde{m}^2}{1 + \widetilde{m}^2}}. \tag{10.114}$$

При $n = 2$ имеем эквигравитирующий эллиптический диск с плотностью

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{a_1 a_2 a_3 \rho_0}{\sqrt{\left(a_1^2 - a_3^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)}} \frac{1}{1 + \widetilde{m}^2} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{1 - \widetilde{m}^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \widetilde{m}^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \widetilde{m}^2}{1 + \widetilde{m}^2}} \right\}. \tag{10.115}$$

Здесь $\widetilde{m}$ дано в (10.108).

10.9.2. Задан однородный или неоднородный эллиптический диск. Найти эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид

Важным в теории является следующий класс задач: задана $\sigma(\widetilde{m})$,требуется найти $\rho(m)$. Но прямое нахождение потенциалов однородных и неоднородных эллиптических дисков — дело не только трудоёмкое, но и в общем пространственном случае для аналитика фактически неприступное. Поэтому здесь мы применяем другой метод, оказавшийся весьма эффективным: сводим задачу для потенциала диска к более простой задаче нахождения потенциала эквигравитирующего слоисто-неоднородного эллипсоида. Дело в том, что для эллипсоидов с гомотетическими слоями выражения потенциалов даются уже известными двойными интегралами типа (10.108).

Для нахождения плотности эквигравитирующего эллипсоида обратимся к ранее полученному выражению (10.107). Представляя стоящий там радикал в виде $\sqrt{m^2-\widetilde{m}^2} = i\sqrt{\widetilde{m}^2-m^2}$, далее рассматриваем (10.107) как *интегральное уравнение* Абеля для неизвестной функции $\rho(m)$. Решая это уравнение, в итоге получим требуемый результат

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{(a_1^2-a_3^2)(a_2^2-a_3^2)}}{\pi a_1 a_2 a_3}\left[\frac{\sigma(1)}{\sqrt{1-m^2}} - \int\limits_{m^2}^{1} \frac{d\sigma}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x-m^2}}\right], \quad (x \equiv \widetilde{m}^2). \tag{10.116}$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Задан *однородный эллиптический диск* $\sigma = \text{const}$. Формула (10.116) тогда сразу даёт

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{(a_1^2-a_3^2)(a_2^2-a_3^2)}}{\pi a_1 a_2 a_3}\frac{\sigma}{\sqrt{1-m^2}}. \tag{10.117}$$

Этот результат совпадает с (10.58). Заметим, что сам пространственный потенциал однородного эллиптического диска и слоисто-неоднородного эллипсоида с плотностью (10.117) вскоре будет получен в § 10.10.

2. Задан *эллиптический диск с законом поверхностной плотности*

$$\sigma\left(\widetilde{m}^2\right) = \sigma_0\left(1-\widetilde{m}^2\right)^n, (n \geqslant 1). \tag{10.118}$$

И в этом случае интегрирование в (10.116) трудностей не представляет

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{(a_1^2-a_3^2)(a_2^2-a_3^2)}}{\sqrt{\pi} a_1 a_2 a_3}\sigma_0\left(1-m^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\frac{n\cdot\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \tag{10.119}$$

§ 10.10. Пространственный потенциал однородного эллиптического диска

В § 2.9 в результате весьма трудоемких расчётов был найден потенциал однородного эллиптического диска во всех точках его главной плоскости. Естественно возникает важная и ещё более трудная задача найти *пространственный потенциал однородного эллиптического диска*. Задача о потенциале однородного эллиптического диска является новой, узловой и представляет собой настоящий экзамен для развитых методов. Прямой способ нахождения потенциала диска сталкивается с огромными трудностями. Наиболее эффективным и красивым для её решения является разработанный выше в §10.9 тот вариант метода эквигравитирующих тел, который связывает потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида с потенциалом заменяющего его плоского эллиптического диска.

Рассмотрим однородный эллиптический диск плотности σ с границей и эксцентриситетом

$$\frac{x_1^2}{R_1^2} + \frac{x_2^2}{R_2^2} = 1,\ R_1 \geqslant R_2,\ e = \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^1}}. \tag{10.120}$$

Как мы уже выяснили, именно такой однородный эллиптический диск получается в софокусном дисковом пределе из слоисто-неоднородного эллипсоида *с законом плотности* (10.58), причём плотность диска оказывается связанной с центральной плотностью эллипсоида формулой (10.112). Очевидно, квадраты полуосей данного диска выражаются через полуоси исходного эллипсоида:

$$R_1^2 = a_1^2 - a_3^2,\ R_2^2 = a_2^2 - a_3^2. \tag{10.121}$$

Используя формулу (1.49), запишем внешний потенциал исходного эллипсоида в виде интеграла:

$$\varphi_{\text{эл}}(\boldsymbol{x}) = 2\pi G\rho_0 a_1 a_2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2+u} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2+u} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2+u}}}{\sqrt{(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)}}\,du. \tag{10.122}$$

Действуя согласно развитому выше методу, выполним в данном выражении предельный дисковый переход $a_3 \to 0$, $a_1 \to R_1$, $a_2 \to R_2$; имеем

$$\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x}) = 2G\sigma R_1 R_2 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{R_1^2+u} - \dfrac{x_2^2}{R_2^2+u} - \dfrac{x_3^2}{u}}}{\sqrt{u(R_1^2+u)(R_2^2+u)}}\,du. \tag{10.123}$$

Этот интеграл выглядит весьма грозно, и, тем не менее, все вычисления в общем виде оказываются здесь на удивление простыми и изящными. Домножая и деля подынтегральное выражение на корень, стоящий в числителе, приводим потенциал эллиптического диска к виду:

$$\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x}) = 2G\sigma R_1 R_2 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{x_1^2}{R_1^2+u} - \dfrac{x_2^2}{R_2^2+u} - \dfrac{x_3^2}{u}}{\sqrt{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}}\,du. \tag{10.124}$$

Здесь λ, μ, ν — корни кубического уравнения

$$1 - \frac{x_1^2}{R_1^2+u} - \frac{x_2^2}{R_2^2+u} - \frac{x_3^2}{u} = 0, \tag{10.125}$$

представляющие эллипсоидальные координаты пробной точки x. Они удовлетворяют неравенствам

$$\infty > \lambda \geqslant 0;\ 0 \geqslant \mu \geqslant -R_2^2;\ -R_2^2 \geqslant \nu \geqslant -R_1^2. \tag{10.126}$$

Поэтому $\lambda \geqslant \mu \geqslant \nu$. Полезно также иметь в виду соотношения

$$\begin{aligned}
&\lambda+\mu+\nu = x_1^2+x_2^2+x_3^2-R_1^2-R_2^2,\\
&\mu\nu+\mu\lambda+\lambda\nu = R_1^2R_2^2\left(1-\frac{x_1^2}{R_1^2}-\frac{x_2^2}{R_2^2}\right)-x_3^2\left(R_1^2+R_2^2\right),\\
&\lambda\mu\nu = x_3^2R_1^2R_2^2.
\end{aligned} \tag{10.127}$$

В итоге из (10.124) находим, что *пространственный (внешний и внутренний) потенциал однородного эллиптического диска* в пробной точке (x_1, x_2, x_3) выражается через стандартные эллиптические интегралы и имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x}) = \frac{4G\sigma R_1R_2}{\sqrt{\lambda-\nu}}&\left\{\left(1-\frac{x_1^2}{R_1^2+\nu}-\frac{x_2^2}{R_2^2+\nu}-\frac{x_3^2}{\nu}\right)\mathrm{K}(k)+\right.\\
&+\frac{x_1^2}{R_1^2+\nu}\Pi\left[-\frac{R_1^2+\nu}{\lambda-\nu},k\right]+\frac{x_2^2}{R_2^2+\nu}\Pi\left[-\frac{R_2^2+\nu}{\lambda-\nu},k\right]+\\
&\left.+\frac{x_3^2}{\nu}\Pi\left[-\frac{\nu}{\lambda-\nu},k\right]\right\},
\end{aligned} \tag{10.128}$$

где модуль

$$k=\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu}}\leqslant 1. \tag{10.129}$$

Формула (10.128) решает поставленную задачу. Следует подчеркнуть: потенциал однородного эллиптического диска был получен здесь через потенциал эквигравитирующего ему слоисто-неоднородного эллипсоида.

Обратим внимание, что комбинация членов при $K(k)$ в этой формуле формально хотя и равна нулю (в силу (10.125) и того, что ν — один из корней этого кубического уравнения), но исключать данную группу членов из выражения потенциала всё же не следует, так как это нарушило бы симметрию всего выражения и сделало бы затруднительным его анализ в различных предельных случаях. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Предельный случай круглого диска*

При $R_1 = R_2 \equiv R$ эллиптический диск превращается в круглый. В этом случае третья эллипсоидальная координата превращается в постоянную $\nu = -R^2$, а выражение потенциала (10.128) трансформируется в потенциал круглого диска. Действительно, возникающие при этом предельном переходе расходимости уничтожают друг друга, поскольку вместо четырёх критических членов в (10.128) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2}{R^2+\nu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\left(\frac{-\dfrac{R^2+\nu}{R^2+\lambda}\sin^2\theta}{1+\dfrac{R^2+\nu}{R^2+\lambda}\sin^2\theta}\right)=\\
&=-\frac{r^2}{R^2+\lambda}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=-\frac{r^2}{R^2+\lambda}\frac{\mathrm{K}(k)-\mathrm{E}(k)}{k^2}.
\end{aligned} \tag{10.130}$$

Выполняя указанный выше предельный переход, с учётом сказанного получаем выражение, совпадающее с (9.67).

2. *Потенциал эллиптического диска на оси Ox_3*

В этом случае $x_1 = x_2 = 0$; сейчас важно обратить внимание на то, какие значения приобретают эллипсоидальные координаты испытуемой точки. А именно, эти координаты будут теперь:

$$\lambda = x_3^2, \ \mu = -R_2^2, \ \nu = -R_1^2. \tag{10.131}$$

Искомый потенциал однородного эллиптического диска на оси симметрии оказывается равным

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = \frac{4G\sigma R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + x_3^2}} \left\{ \left(1 + \frac{x_3^2}{R_1^2}\right) \mathrm{K}(k) - \frac{x_3^2}{R_1^2} \Pi\left[\frac{R_1^2}{R_1^2 + x_3^2}, k\right] \right\}, \tag{10.132}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + x_3^2}} \leqslant 1. \tag{10.133}$$

Легко убедиться, в частности, что в случае круглого диска, когда

$$k = 0, \ \mathrm{K}(0) = \pi/2, \ \Pi[n, 0] = \pi/\left(2\sqrt{1-n}\right),$$

формула (10.132) даёт известное (5.82).

3. *Внутренний потенциал эллиптического диска*

Это случай, когда

$$x_3 = 0, \quad \lambda = 0, \quad \frac{x_1^2}{R_1^2} + \frac{x_2^2}{R_2^2} \leqslant 1, \quad k = \sqrt{1 - \frac{\mu}{\nu}} \leqslant 1. \tag{10.134}$$

Потенциал во внутренней точке диска (x_1, x_2), характеризуемой эллиптическими координатами

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 - R_1^2 - R_2^2 \pm \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 - R_1^2 - R_2^2\right)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right)}\,\right], \tag{10.135}$$

причем $\nu < \mu \leqslant 0$, равен

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) = \frac{4G\sigma R_1 R_2}{\sqrt{-\nu}} &\left\{ \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} - \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu}\right) \mathrm{K}(k) + \right. \\ &\left. + \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} \Pi\left[1 + \frac{R_1^2}{\nu}, k\right] + \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} \Pi\left[1 + \frac{R_2^2}{\nu}, k\right] \right\}. \end{aligned} \tag{10.136}$$

В частности, нетрудно теперь найти величину потенциала в центре однородного эллиптического диска: при

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = -R_2^2, \quad \nu = -R_1^2, \\ &\varphi(0) = 4G\sigma R_2 \mathrm{K}(e). \end{aligned} \tag{10.137}$$

4. *Потенциал эллиптического диска в компланарной внешней точке*

Здесь

$$x_3 = 0, \quad \frac{x_1^2}{R_1^2} + \frac{x_2^2}{R_2^2} \geqslant 1. \tag{10.138}$$

Существенно, что в данном случае обращается в нуль средняя координата μ:

$$\lambda\,(x_1, x_2) \geqslant 0, \quad \mu = 0, \quad -R_2^2 \geqslant \nu\,(x_1, x_2) \geqslant -R_1^2, \tag{10.139}$$

так что потенциал становится равным

$$\begin{gathered}\varphi\,(x_1, x_2) = \frac{4G\sigma R_1 R_2}{\sqrt{\lambda - \nu}} \left\{ \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} - \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu}\right) \mathrm{K}\,(k) + \right.\\ \left. + \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} \Pi \left[-\frac{R_1^2}{\lambda - \nu}, k \right] + \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} \Pi \left[-\frac{R_2^2}{\lambda - \nu}, k \right] \right\},\end{gathered} \tag{10.140}$$

где

$$k = \sqrt{-\frac{\nu}{\lambda - \nu}}, \tag{10.141}$$

а эллиптические координаты (не путать с формулой (10.135))

$$\binom{\lambda}{\nu} = \frac{1}{2} \left[x_1^2 + x_2^2 - R_1^2 - R_2^2 \pm \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 + 4R_1^2 R_2^2 \left(\frac{x_1^2}{R_1^2} + \frac{x_2^2}{R_2^2} - 1 \right)} \right]. \tag{10.142}$$

5. *Потенциал эллиптического диска на его границе*

Вопрос о потенциале на границе эллиптического диска совсем нетривиален. И дело здесь вот в чём. Прямой переход от внешнего (10.140) или от внутреннего потенциала (10.136), когда испытуемая точка садится на эллипс

$$\frac{x_1^2}{R_1^2} + \frac{x_2^2}{R_2^2} = 1, \tag{10.143}$$

сталкивается со значительными трудностями. Действительно, в данном случае

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = x_1^2 + x_2^2 - R_1^2 - R_2^2 \quad \text{и} \quad k = 1. \tag{10.144}$$

Однако, при $k = 1$ эллиптические интегралы первого и третьего рода расходятся:

$$\mathrm{K}\,(1) \to \infty, \quad \Pi\,[n, 1] \to \infty. \tag{10.145}$$

Есть, однако, другой, более надёжный способ решить эту задачу. Обратимся к исходному интегралу (10.128), который теперь имеет вид

$$\varphi_{\text{диска}}\,(x_1, x_2) = 2G\sigma R_1 R_2 \int\limits_0^\infty \frac{1 - \dfrac{x_1^2}{R_1^2 + u} - \dfrac{x_2^2}{R_2^2 + u}}{u\sqrt{u - \nu}}\,du. \tag{10.146}$$

Приводим его к форме

$$I = \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right) \int\limits_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{u-\nu}} du + \frac{x_1^2}{R_1^2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{\left(R_1^2 + u\right)\sqrt{u-\nu}} + \frac{x_2^2}{R_2^2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{\left(R_2^2 + u\right)\sqrt{u-\nu}}. \tag{10.147}$$

Интеграл в первом слагаемом хотя и расходится, но расходимость эта логарифмическая, поэтому в силу соотношения (10.143) первый член в (10.147) исчезает сразу. Остаётся два интеграла, которые легко берутся, и мы приходим к результату:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 4G\sigma R_1 R_2 \left\{ \frac{x_1^2}{R_1^2\sqrt{R_1^2+\nu}} \operatorname{arctg} \sqrt{-1 - \frac{R_1^2}{\nu}} - \right. \\ \left. - \frac{x_2^2}{2R_2^2\sqrt{-\nu - R_2^2}} \ln \frac{\sqrt{-\nu} - \sqrt{-\nu - R_2^2}}{\sqrt{-\nu} + \sqrt{-\nu - R_2^2}} \right\}. \end{aligned} \tag{10.148}$$

Найденный потенциал можно упростить, введя параметризацию эллипса:

$$x_1 = R_1 \cos\theta, \quad x_2 = R_2 \sin\theta, \quad \nu = -\left(R_1^2 \sin^2\theta + R_2^2 \cos^2\theta\right), \tag{10.149}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Тогда (10.148) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{диска}}(\theta) = \frac{4G\sigma R_2}{e} \left\{ \cos\theta \cdot \operatorname{arctg} \frac{e R_1 \cos\theta}{\sqrt{R_2^2 \cos^2\theta + R_1^2 \sin^2\theta}} - \right. \\ \left. - \frac{\sin\theta}{2} \ln \frac{\sqrt{R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta} - eR_1 \sin\theta}{\sqrt{R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta} + eR_1\sin\theta} \right\}, \text{ где } e = \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^1}}. \end{aligned} \tag{10.150}$$

В частности, для круглого диска $R_1 = R_2 = R$ из (10.150) получаем

$$\varphi_{\text{диска}}(R) = 4G\sigma R\left\{\cos^2\theta + \sin^2\theta\right\} = 4G\sigma R, \tag{10.151}$$

что является правильным (см. формулу (9.61)).

Итак, потенциал на границе эллиптического диска (10.150) найден, и он выражается через элементарные функции. Напомним, этот результат после замены θ на α совпадает с (2.144), найденным ранее другим способом.

§ 10.11. Пространственный потенциал неоднородного эллиптического диска

Разработанный в § 10.9 метод распространяется и на *неоднородные* эллиптические диски. В качестве примера рассмотрим диск с поверхностной плотностью

$$\sigma\left(\widetilde{m}^2\right) = \sigma_0\left(1 - \widetilde{m}^2\right) = \sigma_0\left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right), \tag{10.152}$$

где полуоси диска связаны с полуосями соответствующего эллипсоида равенствами $R_1 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$, $R_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}$. Такой эллиптический диск, по видимому, самый простой после однородного.

Согласно формуле (10.119) при $n = 1$, диску с плотностью (10.152) соответствует эквигравитирующий эллипсоид из гомотетических слоёв с

$$\rho(m) = \frac{2R_1R_2}{\pi a_1 a_2 a_3}\sigma_0\sqrt{1-m^2}. \tag{10.153}$$

Подстановка закона плотности (10.153) в формулу для внешнего потенциала слоисто–неоднородного эллипсоида (6.130) и переход в этом эллипсоиде к дисковому пределу $(a_3 \to 0, a_1 \to R_1, a_2 \to R_2)$ даёт

$$\varphi_{\text{диска}}(x) = \frac{4}{3}G\sigma_0 R_1 R_2 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\left[1 - \dfrac{x_1^2}{R_1^2+u} - \dfrac{x_2^2}{R_2^2+u} - \dfrac{x_3^2}{u}\right]^{3/2}}{\sqrt{u\left(R_1^2+u\right)\left(R_2^2+u\right)}}du. \tag{10.154}$$

Домножая и деля числитель на

$$\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R_1^2+u} - \frac{x_2^2}{R_2^2+u} - \frac{x_3^2}{u}},$$

получим

$$\varphi_{\text{диска}}(x) = \frac{4}{3}G\sigma_0 R_1 R_2 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\left[1 - \dfrac{x_1^2}{R_1^2+u} - \dfrac{x_2^2}{R_2^2+u} - \dfrac{x_3^2}{u}\right]^{2}}{\sqrt{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}}du, \tag{10.155}$$

где, как и в случае однородного диска, вводятся эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν) пробной точки. И сейчас, разумеется, выполняются неравенства (10.126) и соотношения (10.127).

Раскрывая квадрат выражения в числителе (10.155), вычисляем вспомогательные интегралы (ниже для краткости обозначено $Q(u) = \sqrt{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}$):

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\nu}}\mathrm{K}(k);\\
I_1 &= \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(R_1^2+u\right)Q(u)} = \frac{2}{\left(R_1^2+\nu\right)\sqrt{\lambda-\nu}}\left\{\mathrm{K}(k) - \Pi\left[-\frac{R_1^2+\nu}{\lambda-\nu}, k\right]\right\};\\
I_2 &\equiv I_1\left(R_1^2 \to R_2^2\right) = \frac{2}{\left(R_2^2+\nu\right)\sqrt{\lambda-\nu}}\left\{\mathrm{K}(k) - \Pi\left[-\frac{R_2^2+\nu}{\lambda-\nu}, k\right]\right\};\\
I_3 &\equiv I_1\left(R_1^2 \to 0\right) = \frac{2}{\nu\sqrt{\lambda-\nu}}\left\{\mathrm{K}(k) - \Pi\left[-\frac{\nu}{\lambda-\nu}, k\right]\right\}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\nu}} \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{10.156}$$

Но есть и более сложные интегралы:

$$I_{11} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(R_1^2 + u\right)^2 Q(u)},$$
$$I_{22} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(R_2^2 + u\right)^2 Q(u)}, \tag{10.157}$$
$$I_{33} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{u^2 Q(u)},$$

а также интегралы смешанного вида

$$I_{12} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(R_1^2 + u\right)\left(R_2^2 + u\right) Q(u)} = \frac{I_2 - I_1}{R_1^2 - R_2^2};$$
$$I_{13} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{u\left(R_1^2 + u\right) Q(u)} = \frac{I_3 - I_1}{R_1^2}; \tag{10.158}$$
$$I_{23} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{u\left(R_2^2 + u\right) Q(u)} = \frac{I_3 - I_2}{R_2^2},$$

которые выражены через известные уже I_i $(i = 1, 2, 3)$.

Наибольшую трудность представляют интегралы I_{11} , I_{22} и I_{33}. Будем рассматривать, например, I_{11} как

$$I_{11} = \lim_{R_2^2 \to R_1^2} I_{12} = \lim_{R_2^2 \to R_1^2} \frac{I_2 - I_1}{R_1^2 - R_2^2}. \tag{10.159}$$

Формально здесь встречается неопределённость типа $\frac{0}{0}$, однако на самом деле это затруднение можно избежать. Подставляя величины I_1 и I_2 из (10.156), после ряда преобразований находим

$$I_{11} = \frac{2}{\sqrt{\lambda - \nu}} \left\{ \frac{\mathrm{K}(k)}{\left(R_1^2 + \nu\right)^2} + \lim_{R_2^2 \to R_1^2} \frac{\frac{1}{R_1^2 + \nu} \Pi\left[-\frac{R_1^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k\right] - \frac{1}{R_2^2 + \nu} \Pi\left[-\frac{R_2^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k\right]}{R_1^2 - R_2^2} \right\}. \tag{10.160}$$

Представляя полные эллиптические интегралы третьего рода $\Pi[...]$ их интегральными выражениями, получим

$$\frac{1}{R_1^2 + \nu} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\left(1 + \frac{R_1^2 + \nu}{\lambda - \nu} \sin^2 x\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} -$$

$$-\frac{1}{R_2^2+\nu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\left(1+\dfrac{R_2^2+\nu}{\lambda-\nu}\sin^2 x\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=$$

$$=-\frac{R_1^2-R_2^2}{\left(R_1^2+\nu\right)\left(R_2^2+\nu\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\dfrac{R_1^2+R_2^2+2\nu}{\lambda-\nu}\sin^2 x}{\left(1+\dfrac{R_1^2+\nu}{\lambda-\nu}\sin^2 x\right)\left(1+\dfrac{R_2^2+\nu}{\lambda-\nu}\sin^2 x\right)}dx.$$

Таким образом, в выражении, стоящем в (10.160) под знаком предельного перехода, $\left(R_1^2-R_2^2\right)$ в числителе и знаменателе сокращаются; в итоге, после многих преобразований и вычислений находим

$$I_{11}=\frac{\sqrt{\lambda-\nu}}{\left(R_1^2+\lambda\right)\left(R_1^2+\mu\right)\left(R_1^2+\nu\right)^2}\left\{\frac{\left(R_1^2+\mu\right)\left(\lambda+\nu+2R_1^2\right)}{\lambda-\nu}\mathrm{K}(k)+\left(R_1^2+\nu\right)\mathrm{E}(k)-\right.$$
$$\left.-\left[\mu-\nu+2\left(1+k^2\right)\left(R_1^2+\nu\right)+3\frac{\left(R_1^2+\nu\right)^2}{\lambda-\nu}\right]\Pi\left[-\frac{R_1^2+\nu}{\lambda-\nu},k\right]\right\};$$
$$I_{22}=\frac{\sqrt{\lambda-\nu}}{\left(R_2^2+\lambda\right)\left(R_2^2+\mu\right)\left(R_2^2+\nu\right)^2}\left\{\frac{\left(R_2^2+\mu\right)\left(\lambda+\nu+2R_2^2\right)}{\lambda-\nu}\mathrm{K}(k)+\left(R_2^2+\nu\right)\mathrm{E}(k)-\right.$$
$$\left.-\left[\mu-\nu+2\left(1+k^2\right)\left(R_2^2+\nu\right)+3\frac{\left(R_2^2+\nu\right)^2}{\lambda-\nu}\right]\Pi\left[-\frac{R_2^2+\nu}{\lambda-\nu},k\right]\right\};$$
$$I_{33}=\frac{\sqrt{\lambda-\nu}}{\lambda\mu\nu^2}\left\{\frac{\mu(\lambda+\nu)}{\lambda-\nu}\mathrm{K}(k)+\nu\mathrm{E}(k)-\left[\mu-\nu+2\nu\left(1+k^2\right)+\frac{3\nu^2}{\lambda-\nu}\right]\Pi\left[\frac{-\nu}{\lambda-\nu},k\right]\right\}. \tag{10.161}$$

В итоге, *пространственный потенциал неоднородного эллиптического диска* с законом плотности (10.153) выражается формулой

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x})=\frac{4}{3}G\sigma_0R_1R_2\left\{I_0-2\left(I_1x_1^2+I_2x_2^2+I_3x_3^2\right)+\right.\\ \left.+I_{11}x_1^4+I_{22}x_2^4+I_{33}x_3^4+2\left(I_{12}x_1^2x_2^2+I_{13}x_1^2x_3^2+I_{23}x_2^2x_3^2\right)\right\}.\end{gathered} \tag{10.162}$$

Все входящие сюда выражения нам уже известны. Подчеркнём, что этот потенциал выражается через стандартные полные эллиптические интегралы.

§ 10.12. О радиусе сходимости ряда Лапласа для однородных и слоисто-неоднородных эллипсоидов или сфероидов

В небесной механике часто гравитационный потенциал тела во внешней точке представляют рядом Лапласа [45] (см. также формулу (12.84))

$$\varphi_{\text{внешн}}(\boldsymbol{x})=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{MR^n}{r^{n+1}}Y_n(\theta,\varphi). \tag{10.163}$$

Здесь M — масса тела; r — расстояние пробной точки от начала координат; R — радиус объемлющей сферы; Y_n — безразмерная сферическая функция Лапласа.

Но представление внешнего потенциала (10.163) годится, если ряд сходится. Поэтому возникает вопрос о радиусе сходимости данного ряда. Вообще, для тел сложной формы вопрос о радиусе сходимости ряда Лапласа вблизи гравитирующего тела остаётся, несмотря на значительные усилия, до сих пор неразрешенным. Однако для *сфероидов*, однородных и неоднородных (состоящих из *софокусных или гомотетических* слоёв), радиус сходимости ряда Лапласа известен и равен *фокальному расстоянию граничной сфероидальной поверхности* этого тела (см. учебник М. Ф. Субботина [45] и статью К. В. Холшевникова [66]).

Естественно возникает вопрос о радиусе сходимости ряда для сфероидов с более общей (чем гомеоиды и фокалоиды) стратификацией слоёв равной плотности. Наконец, есть и аналогичная, но более общая задача о радиусе сходимости ряда для *трёхосных слоисто-неоднородных эллипсоидов*. Чтобы решить обе задачи, докажем следующую теорему

Теорема 6. *Радиус сходимости ряда Лапласа для внешнего потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида с произвольным распределением плотности $\rho(m)$ равен наибольшему фокальному расстоянию его граничной эллипсоидальной поверхности.*

Доказательство.

Примем, как всегда $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$. Рассмотрим внешний потенциал $\varphi_{\text{внешн}}(x)$ слоисто-неоднородного эллипсоида с произвольной эллипсоидальной стратификацией. Соответствующий этому эллипсоиду другой слоисто-неоднородный эллипсоид, образованный из данного софокусным преобразованием каждого слоя, является, как доказано в § 10.3, эквигравитирующим исходному. Поэтому потенциалы исходного (первого) эллипсоида $\varphi_{\text{внешн}}(x)$ и полученного из него второго $\varphi'_{\text{внешн}}(x)$ будут равны

$$\varphi_{\text{внешн}}(x) = \varphi'_{\text{внешн}}(x). \tag{10.164}$$

Процесс софокусного преобразования слоёв равной плотности первого эллипсоида можно продолжить до получения в плоскости Ox_1x_2 эквигравитирующего *эллиптического диска* (см. рис. 89) с известной нам поверхностной плотностью (10.105). Потенциал такого диска и потенциал исходного эллипсоида, если только точка x является внешней по отношению к эллипсоиду, также будут равны. В таком случае для вычисления $\varphi'_{\text{внешн}}(x)$ можно применять ряд (10.163), если только внешняя пробная точка не попадает внутрь сферы, имеющей радиус большой полуоси эллиптического диска. Но этот радиус диска, равный (a_1e_{13}), и есть *наибольшее фокальное расстояние* в исходном эллипсоиде. ■

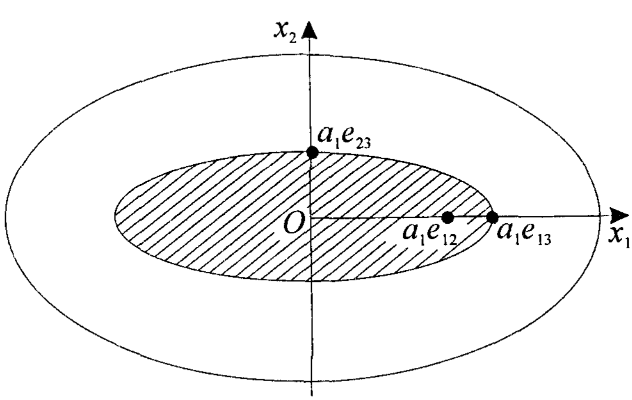


Рис. 89. Одно из главных сечений слоисто-неоднородного эллипсоида, перпендикулярное его малой оси Ox_3, и эквигравитирующий эллиптический диск (заштрихован). Отмечены фокальные расстояния граничной поверхности эллипсоида

Заметим, что теорема 10.164 о радиусе сходимости верна:

а) для любых элементарных (тонких) и толстых слоисто-неоднородных эллипсоидальных оболочек;

б) для однородных эллипсоидов и сфероидов (сжатых и вытянутых);

в) для слоисто-неоднородных сфероидов, состоящих не только из гомеоидов и фокалоидов, но имеющих любую другую сфероидальную стратификацию слоёв. Заметим: для сфероидов радиус сходимости ряда (10.163) совпадает с половиной «длины» эквигравитирующего стержня[11];

г) для неоднородных трёхосных эллипсоидов с любой эллипсоидальной стратификацией вещества в них.

Однако наш метод не сводится только к эллипсоидальным телам. Например, для однородной тонкой симметричной линзы, имеющей острые углы и рассмотренной в § 10.13, радиус сходимости ряда (10.163) также будет равен радиусу эквигравитирующего диска (или половине «длины» заменяющего стержня).

Сложнее обстоит дело с определением радиуса сходимости ряда (10.163) в тех случаях, когда тело имеет не один, а несколько заменяющих стержней, или когда система эквигравитирующих элементов тела состоит не только из стержней и дисков, но в неё входят ещё и точечные массы. Так обстоит дело, например, с цилиндром конечной длины (см. § 9.8.2), параболоидной линзы § 9.9 или для «толстого» шарового сегмента из § 9.14.

Задача 10.13. (Поисковая.) *Предложите способ отыскания радиуса сходимости для ряда* (10.163) *в тех случаях, когда система эквигравитирующих элементов состоит из нескольких стержней, или когда кроме стержня есть ещё и точечные массы?*

§ 10.13. Однородная симметричная линза с острыми краями: эквигравитирующие элементы и пространственный потенциал

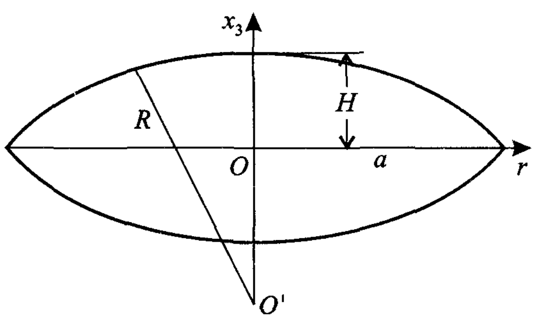


Рис. 90. Симметричная линза с «острыми» краями

Серьёзной проверкой методов, разработанных в этой книге является и задача об *однородной тонкой симметричной линзе.* Покажем, что такая линза, напоминающая известную галактику «Сомбреро» (или здание цирка в Казани), имеет три (!) эквигравитирующих тела.

10.13.1. Эквигравитирующий стержень

Первым в перечне эквигравитирующих тел для однородной тонкой линзы является одномерный стержень с мнимым распределением плотности. Этот стержень составной и складывается из стержней для верхнего и нижнего сегментов, образующих линзу (см. рис. 90). Чтобы найти распределение мнимой плотности $\mu(\zeta)$ для линзы с острыми углами, надо к (9.88) (или к (9.185)) прибавить аналогичное выражение для нижнего сегмента, предварительно заменив там $\zeta \to -\zeta$:

$$\mu(\zeta) = -\frac{2}{3} i\rho \left(a^2 + \zeta^2\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{H - R + \zeta} + \frac{1}{H - R - \zeta}\right), \tag{10.165}$$

т. е.

$$\mu_{\text{линзы}}(\zeta) = -\frac{4}{3} i\rho (R - H) \frac{\left(a^2 + \zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(H - R)^2 - \zeta^2}. \tag{10.166}$$

[11] Тем самым, результат К. В. Холшевникова для сфероидов из статьи [66] здесь обобщён.

Задача 10.14. *Доказать, что стержень с распределением плотности* (10.166) *имеет ту же массу* (10.172) *и потенциал на оси симметрии* (10.174) (*см. также первое из выражений в* (12.147)), *что и исходная симметричная линза.*

10.13.2. Эквигравитирующий диск

Вторым телом, имеющим то же внешнее гравитационное поле, что и однородная тонкая линза, является *плоский неоднородный круглый диск*. Чтобы найти его, обратимся к формуле (9.145); подставляя в-неё распределение $\mu_{\text{линзы}}(\zeta)$ из (10.166), имеем

$$\sigma(p) = \frac{4\rho}{3\pi}(R-H)\frac{d}{dp}\int\limits_{-R^2_{\text{диска}}}^{p} \frac{\left(a^2+\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left((R-H)^2-\zeta^2\right)}\frac{d\zeta^2}{\sqrt{p-\zeta^2}}. \tag{10.167}$$

Здесь надо положить $R_{\text{диска}} = a = \sqrt{H(2H-R)}$, поскольку радиус искомого диска равен половине «длины» стержня:

$$\sigma(p) = -\frac{4\rho}{3\pi}(R-H)\frac{d}{dp}\int\limits_{-a^2}^{p} \frac{\left(a^2+x\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(x-(R-H)^2\right)}\frac{dx}{\sqrt{p-x}}. \tag{10.168}$$

Выражение под интегралом приводим к виду

$$\sqrt{\frac{x+a^2}{p-x}} + \frac{R^2}{\sqrt{(x+a^2)(p-x)}} + \frac{R^4}{\left[x-(R-H)^2\right]\sqrt{(x+a^2)(p-x)}};$$

тогда интеграл в (10.168), который мы обозначим через $I(p)$, как можно показать, выражается элементарной функцией

$$I(p) = \frac{\pi}{2}\left[p + a^2 + 2R^2 - \frac{2R^3}{\sqrt{(R-H)^2-p}}\right]. \tag{10.169}$$

Поэтому

$$\frac{dI}{dp} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{R^3}{\left[(R-H)^2-p\right]^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{10.170}$$

и в итоге находим, что симметричная однородная линза имеет вещественный эквигравитирующий круглый диск с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \frac{2}{3}\rho(R-H)\left[\frac{R^3}{\left[(R-H)^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}} - 1\right], \quad 0 \leqslant r \leqslant a. \tag{10.171}$$

Этот диск неоднородный: в центре у него плотность максимальная

$$\sigma(0) = \frac{2}{3}\rho(R-H)\left[\frac{R^3}{(R-H)^3} - 1\right],$$

а на краю, с учётом соотношения (9.187), обращается в нуль, т. е. $\sigma(a) = 0$.

Проверка диска (10.171) *по массе:*

$$M_{\text{диска}} = \frac{4}{3}\pi\rho(R-H)\int\limits_0^a\left(\left[\frac{R^3}{\left[(R-H)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}} - 1\right]\right) r\,dr = 2\pi\rho H^2\left(R - \frac{H}{3}\right). \tag{10.172}$$

Верно!

Проверка диска (10.171) *по потенциалу:*

Потенциал такого диска на оси симметрии Ox_3

$$\varphi(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho(R-H)\int\limits_0^{a^2}\frac{\left[\dfrac{R^3}{[(R-H)^2 + x]^{\frac{3}{2}}} - 1\right]}{\sqrt{x + x_3^2}}\,dx, \tag{10.173}$$

как нетрудно видеть, равен

$$\varphi(x_3) = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-H)\left\{\frac{R^2\sqrt{a^2 + x_3^2}}{(R-H)^2 - x_3^2} - \frac{R^3 x_3}{(R-H)\left[(R-H)^2 - x_3^2\right]}\right\}. \tag{10.174}$$

Теперь легко доказать эквивалентность выражения потенциала (10.174) и потенциала линзы в первой из формул (12.147). Проверка закончена.

10.13.3. Эквигравитирующий сфероид для линзы

Но для тонкой симметричной линзы существует ещё и третье эквигравитирующее тело. Им является слоисто-неоднородный сфероид с *гомотетическими слоями* и произвольным эксцентриситетом меридионального сечения e (причём вырождение сфероида в шар пока не допускается!). Пикантность ситуации в том, что линза имеет острые края, а сфероид — фигура сглаженная! Но если учесть, что диск радиусом a, найденный в предыдущем разделе, — это фокальный кружок в эквигравитирующем сфероиде, и что этот диск как раз и есть экваториальное сечение линзы (т. е. *линза тоже находится внутри сфероида*, см. рис. 91), то становится ясным, что *внешний* потенциал сфероида нигде не будет иметь особых точек.

Для нахождения распределения плотности в эквигравитирующем сфероиде с граничными полуосями $a_1 > a_3$ обратимся к формуле (10.76). В данном случае

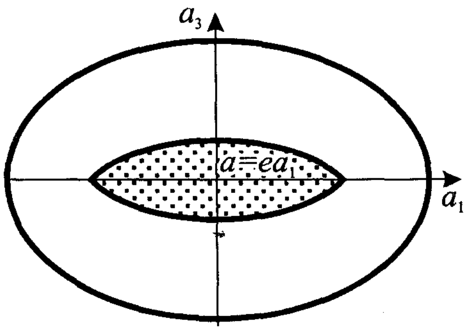


Рис. 91. Линза внутри эквигравитирующего для неё сфероида

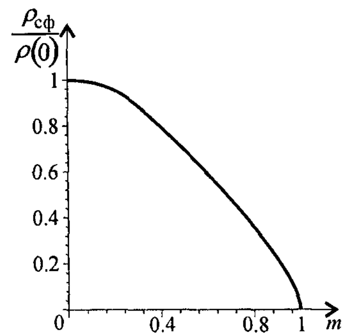


Рис. 92. Распределение плотности в сфероиде, эквигравитирующего однородной симметричной линзе

$$\sigma(y) = \frac{2}{3}\rho(R-H)\left[\frac{R^3}{\left[(R-H)^2+a^2y^2\right]^{\frac{3}{2}}}-1\right], \tag{10.175}$$

так что

$$\sigma'(y) = -\frac{2}{3}\rho(R-H)\frac{R^3a^2}{\left[(R-H)^2+a^2y^2\right]^{\frac{5}{2}}}. \tag{10.176}$$

Следовательно,

$$\rho_{сф}(m) = \frac{e^2}{\pi a_3}\rho(R-H)a^2R^3\int\limits_{m^2}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y-m^2}\left[(R-H)^2+a^2y^2\right]^{\frac{5}{2}}}. \tag{10.177}$$

Вычисляя этот интеграл, в итоге находим

$$\rho_{сф}(m) = \frac{2e^2a^2}{3\pi a_3}\rho(R-H)\sqrt{1-m^2}\frac{3R^2-a^2+a^2m^2}{\left[R^2-a^2+a^2m^2\right]^2}. \tag{10.178}$$

Это распределение плотности показано на рис. 92.

Для проверки формулы (10.178) вычислим массу данного сфероида. Подставляя (10.178) в формулу (6.119), получим (напомним, что квадрат радиуса диска $a^2 = a_1^2e^2$):

$$M_{сф} = \frac{8}{3}a^4\rho(R-H)\int\limits_0^1 m^2\sqrt{1-m^2}\frac{3R^2-a^2+a^2m^2}{\left[R^2-a^2+a^2m^2\right]^2}dm. \tag{10.179}$$

Интеграл в (10.179) равен

$$\pi\frac{2R^3-\sqrt{R^2-a^2}\left(a^2+2R^2\right)}{4a^4\sqrt{R^2-a^2}}, \tag{10.180}$$

так что в итоге

$$M_{\text{сф}} = 2\pi\rho H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right). \tag{10.181}$$

Сравнивая это с (10.172), убеждаемся, что найденный сфероид действительно имеет массу исходной симметричной линзы.

10.13.4. Итог: внешний пространственный потенциал симметричной линзы

Подробный вывод закона распределения плотности в эквигравитирующем сфероиде был сделан потому, что сейчас мы используем его для нахождения *пространственного потенциала исходной однородной симметричной линзы.*

Внешний потенциал слоисто-неоднородного сфероида, согласно (1.49), даётся двойным интегралом

$$\varphi_{\text{сф}}(r, x_3) = \pi G a_1^2 a_3 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\left(a_1^2 + u\right)\sqrt{a_3^2 + u}} \int\limits_{m^2(u)}^{1} \rho_{\text{сф}}(m)\, dm^2, \tag{10.182}$$

где, напомним,

$$\frac{r^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1; \quad m^2(u) = \frac{r^2}{a_1^2 + u} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}. \tag{10.183}$$

Подставляя сюда $\rho_{\text{сф}}\left(m^2\right)$ из (10.178), находим вначале внутренний интеграл

$$\int\limits_{m^2(u)}^{1} \rho_{\text{сф}}(m)\, dm^2 = \frac{4e^2}{3\pi a_3}\rho a^2 (R - H) \frac{\left(1 - m^2(u)\right)^{\frac{3}{2}}}{(R - H)^2 + a^2 m^2(u)}. \tag{10.184}$$

Целесообразно ввести эллипсоидальные координаты пробной точки; в случае сжатого сфероида их будет только две: λ и μ, причём $\lambda > \mu$, и обе координаты удовлетворяют квадратному уравнению

$$\frac{r^2}{a_1^2 + \nu} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \nu} = 1 \quad (a_1 > a_3). \tag{10.185}$$

Цилиндрические координаты пробной точки можно тогда выразить через эллипсоидальные:

$$r^2 = \frac{\left(a_1^2 + \lambda\right)\left(a_1^2 + \mu\right)}{a_1^2 - a_3^2}; \quad x_3^2 = \frac{\left(a_3^2 + \lambda\right)\left(a_3^2 + \mu\right)}{a_3^2 - a_1^2}. \tag{10.186}$$

Обратим внимание,

$$\lambda > -a_3^2 \geqslant \mu \geqslant -a_1^2, \tag{10.187}$$

и x_3^2, разумеется, остаётся положительной величиной.

Пользуясь тождеством

$$\left(a_1^2 + u\right)\left(a_3^2 + u\right)\left(1 - \frac{r^2}{a_1^2 + u} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right) = (u - \lambda)(u - \mu), \tag{10.188}$$

которое нетрудно доказать, представим интеграл (10.182) с учётом (10.184) в виде

$$\varphi_{\text{сф}}(r, x_3) = \frac{4}{3} G\rho a^2 (R - H) \cdot I, \tag{10.189}$$

где мы обозначили

$$I = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{r^2}{a_1^2 + u} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right)^2 du}{\left[\dfrac{(R - H)^2}{a^2} + \dfrac{r^2}{a_1^2 + u} + \dfrac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right] \sqrt{(a_1^2 + u)(u - \lambda)(u - \mu)}}. \tag{10.190}$$

Используя $m^2(u)$ из (10.183), целесообразно в (10.190) подынтегральное выражение (без радикала) с учётом тождества (9.187) представить в виде

$$\frac{\left(m^2(u) + \dfrac{(R - H)^2}{a^2} - \dfrac{R^2}{a^2}\right)^2}{N + \dfrac{(R - H)^2}{a^2}} = m^2(u) + \frac{(R - H)^2}{a^2} - \frac{2R^2}{a^2} + \frac{\dfrac{R^4}{a^4}}{\left(m^2(u) + \dfrac{(R - H)^2}{a^2}\right)}, \tag{10.191}$$

после чего интеграл приводится к следующему:

$$I = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u)(u - \lambda)(u - \mu)}} \left\{\frac{r^2}{a_1^2 + u} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + u} - 1 - \right.$$
$$\left. - \frac{R^2}{a^2} + \frac{\dfrac{R^4}{a^4}}{\dfrac{r^2}{a_1^2 + u} + \dfrac{x_3^2}{a_3^2 + u} + \dfrac{(R - H)^2}{a^2}}\right\}. \tag{10.192}$$

Последний член в фигурных скобках (10.192) преобразуем, в свою очередь, к виду

$$\frac{\dfrac{R^4}{a^4}}{\dfrac{r^2}{a_1^2 + u} + \dfrac{x_3^2}{a_3^2 + u} + \dfrac{(R - H)^2}{a^2}} = \frac{R^4}{a^2 (R - H)^2} \frac{(a_1^2 + u)(a_3^2 + u)}{(u - u_1)(u - u_2)}, \tag{10.193}$$

где u_1 и u_2 — корни квадратного уравнения

$$u^2 + u\left[a_1^2 + a_3^2 + \frac{a^2}{(R - H)^2}(r^2 + x_3^2)\right] + a_1^2 a_3^2 + \frac{a^2}{(R - H)^2}(r^2 a_3^2 + x_3^2 a_1^2) = 0, \tag{10.194}$$

равные

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left[a_1^2 + a_3^2 + \frac{a^2(r^2 + x_3^2)}{(R - H)^2}\right] \pm \frac{a^2}{2}\sqrt{1 + \frac{2(r^2 - x_3^2)}{(R - H)^2} + \frac{(r^2 + x_3^2)^2}{(R - H)^4}}. \tag{10.195}$$

Заметим: даже в критическом случае $r = 0$, т. е. на оси симметрии сфероида, выражение под радикалом будет равно

$$\left(1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right)^2 \tag{10.196}$$

и, следовательно, остаётся заведомо положительным. Вне же оси подкоренное выражение ещё только возрастёт. Следовательно, корни u_1 и u_2 в любой точке r, x_3 остаются вещественными, и при том *отрицательными:*

$$u_2 < u_1 < 0\,. \tag{10.197}$$

Далее, в силу тождества

$$\frac{\left(a_1^2+u\right)\left(a_3^2+u\right)}{\left(u-u_1\right)\left(u-u_2\right)} = 1 + \frac{T_1}{u-u_1} - \frac{T_2}{u-u_2}, \tag{10.198}$$

где введены обозначения для величин

$$T_1 = \frac{\left(a_1^2+u_1\right)\left(a_3^2+u_1\right)}{u_1-u_2}, \quad T_2 = \frac{\left(a_1^2+u_2\right)\left(a_3^2+u_2\right)}{u_1-u_2}, \tag{10.199}$$

для интеграла I из (10.190) имеем

$$\begin{gathered} I = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(a_1^2+u\right)\left(u-\lambda\right)\left(u-\mu\right)}} \left\{\frac{r^2}{a_1^2+u} + \frac{x_3^2}{a_3^2+u} + \frac{a^2}{(R-H)^2} + \right. \\ \left. + \frac{R^4}{a^2\,(R-H)^2}\left(\frac{T_1}{u-u_1} - \frac{T_2}{u-u_2}\right)\right\}. \end{gathered} \tag{10.200}$$

Из анализа выражения (10.200) становится ясно, что все интегралы, с которыми мы имеем здесь дело, сводятся к стандартным эллиптическим. Конкретно, с учётом неравенств

$$\infty > u \geqslant \lambda > \mu > -a_1^2\,, \tag{10.201}$$

находим:

$$\begin{gathered} I = r^2 \frac{2}{\left(\mu+a_1^2\right)\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left(\mathrm{K}\,(k) - \mathrm{E}\,(k)\right) + \\ + x_3^2 \frac{2}{\left(a_1^2-a_3^2\right)\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left(\Pi\left[\frac{a_1^2-a_3^2}{\lambda+a_1^2}, k\right] - \mathrm{K}\,(k)\right) + \frac{a^2}{(R-H)^2}\frac{2}{\sqrt{\lambda+a_1^2}}\mathrm{K}\,(k) + \\ + \frac{R^4 T_1}{a^2\,(R-H)^2}\frac{2}{\left(u_1+a_1^2\right)\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left(\Pi\left[\frac{u_1+a_1^2}{\lambda+a_1^2}, k\right] - \mathrm{K}\,(k)\right) - \\ - \frac{R^4 T_2}{a^2\,(R-H)^2}\frac{2}{\left(u_2+a_1^2\right)\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left(\Pi\left[\frac{u_2+a_1^2}{\lambda+a_1^2}, k\right] - \mathrm{K}\,(k)\right). \end{gathered} \tag{10.202}$$

Все эллиптические интегралы здесь полные и имеют один и тот же модуль

$$k = \sqrt{\frac{\mu+a_1^2}{\lambda+a_1^2}} < 1\,. \tag{10.203}$$

Собирая в выражении (10.202) члены при $\mathrm{K}(k)$, после несложных преобразований с учётом ранее определенных нами выражений T_1 и T_2 из (10.199), эту группу членов удаётся упростить до такого вида

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left(\frac{r^2}{\mu+a_1^2}-\frac{x_3^2}{a_1^2-a_3^2}-1-\frac{R^2}{a^2}\right)\mathrm{K}(k)\,. \tag{10.204}$$

Таким образом, для выражения полного *внешнего потенциала слоисто-неоднородного сфероида* заданного типа из (10.189) получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{сф}}(r,x_3)&=\frac{8}{3}G\rho(R-H)\frac{a^2}{\sqrt{\lambda+a_1^2}}\left\{\frac{r^2}{\mu+a_1^2}(\mathrm{K}(k)-\mathrm{E}(k))+\right.\\&+\frac{x_3^2}{a^2}\left(\Pi\left[\frac{a^2}{\lambda+a_1^2},k\right]-\mathrm{K}(k)\right)-\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)\mathrm{K}(k)+\\&\left.+\frac{R^4}{a^2(R-H)^2(u_1-u_2)}\left(\left(u_1+a_3^2\right)\Pi\left[\frac{u_1+a_1^2}{\lambda+a_1^2},k\right]-\left(u_2+a_3^2\right)\Pi\left[\frac{u_2+a_1^2}{\lambda+a_1^2},k\right]\right)\right\},\end{aligned} \tag{10.205}$$

где мы использовали известное равенство $a^2=a_1^2-a_3^2$, а k дано в (10.203).

Итак, *потенциал сфероида рассматриваемого типа*, как и *потенциал тонкой однородной симметричной линзы* выражается, согласно (10.205), через стандартные полные эллиптические интегралы. Это нетривиально. Сама линза состоит из двух, сложенных «подошва к подошве» сегментов, а внешний потенциал отдельного сегмента в общем случае через эллиптические интегралы не выражается, см. задачу 9.10!

Кроме того, линзу можно представить состоящей из системы однородных элементарных круглых дисков, и её полный потенциал находится интегрированием вкладов

$$\varphi_{\text{линзы}}(r,x_3)=\int\limits_{-H}^{H}\varphi_{\text{диска}}\left[r,x_3;R(x_3'),x_3'\right]dx_3' \tag{10.206}$$

от потенциалов этих дисков. Но пространственный потенциал однородного круглого диска сам по себе сложен и выражается через эллиптические интегралы (см. формулы (9.56) или (9.66)), так что в (10.206) приходится интегрировать эллиптические интегралы. Удивительно здесь то, что методом эквигравитирующих тел потенциал сфероида и линзы удаётся получить через те же эллиптические интегралы. А ведь далеко не в каждом примере интегралы от эллиптических интегралов удаётся снова выразить через эллиптические интегралы!

Но главное в том, что выражение (10.205) представляет внешний потенциал любого из четырёх перечисленных ниже тел:

> *«однородная тонкая симметричная линза — стержень с мнимой плотностью* (10.166) — *круглый диск с плотностью* (10.171) — *слоисто-неоднородный сфероид с плотностью* (10.178)».

Подчеркнём, что крайние звенья этой цепочки — однородная симметричная линза и слоисто-неоднородный сфероид — объёмные тела *совершенно разной формы* и с разной, притом, концентрацией вещества в них. И тем не менее, как мы здесь доказали, однородная линза и неоднородный сфероид оказываются эквигравитирующими во внешнем пространстве. Факт удивительный!

10.13.5. Частные случаи

Рассмотрим более подробно гравитационный потенциал (10.205).

Потенциал (10.205) *на оси симметрии*

В этом случае

$$r = 0, \quad \mu = -a_1^2, \quad \lambda = x_3^2 - a_3^2, \quad u_1 - u_2 = a^2 \left|1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|, \quad k = 0 \tag{10.207}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}(k) = \mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}; \\
\Pi\left[\frac{a^2}{\lambda + a_1^2}, 0\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \dfrac{a^2}{\lambda + a_1^2}\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{x_3^2 + a^2}}{x_3}; \\
\Pi\left[\frac{u_1 + a_1^2}{\lambda + a_1^2}, 0\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \dfrac{u_1 + a_1^2}{\lambda + a_1^2}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_3^2 + a^2}{\lambda - u_1}}; \\
\Pi\left[\frac{u_2 + a_1^2}{\lambda + a_1^2}, 0\right] = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_3^2 + a^2}{\lambda - u_2}}.
\end{gathered} \tag{10.208}$$

Далее:

$$\begin{cases}
u_1 = -\dfrac{a_1^2 + a_3^2 + \dfrac{a^2 x_3^2}{(R-H)^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\left|1 - \dfrac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|, \\
u_2 = -\dfrac{a_1^2 + a_3^2 + \dfrac{a^2 x_3^2}{(R-H)^2}}{2} - \dfrac{a^2}{2}\left|1 - \dfrac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|.
\end{cases} \tag{10.209}$$

$$\begin{gathered}
u_1 + a_3^2 = \frac{a^2}{2}\left[-1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2} + \left|1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|\right], \\
u_2 + a_3^2 = \frac{a^2}{2}\left[-1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2} - \left|1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|\right], \\
u_1 - u_2 = a^2\left|1 - \frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right|.
\end{gathered} \tag{10.210}$$

Выражение (10.205) упрощается:

$$\varphi(x_3) = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-H)\frac{1}{\sqrt{a^2+x_3^2}}\left\{x_3^2\left(\frac{\sqrt{a^2+x_3^2}}{x_3}-1\right)-\left(a^2+R^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{R^4}{(R-H)^2(u_1-u_2)}\left(\sqrt{\frac{a^2+x_3^2}{\lambda-u_1}}\left(u_1+a_3^2\right)-\sqrt{\frac{a^2+x_3^2}{\lambda-u_2}}\left(u_2+a_3^2\right)\right)\right\} \tag{10.211}$$

и, после указанных подстановок и простых преобразований с учётом неравенства

$$\frac{x_3^2}{(R-H)^2}-1>0, \tag{10.212}$$

принимает вид

$$\varphi_{\text{внешн}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left\{2(R-H)x_3-2(R-H)\frac{R^4\left(a^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x_3^2-(R-H)^2}+\frac{2R^3x_3}{x_3^2-(R-H)^2}\right\}. \tag{10.213}$$

Но это, как нам будет известно, и есть внешний потенциал линзы на оси Ox_3 (см. первую из формул (12.147)).

З а д а ч а 10.15. *Преобразовать первую из формул* (12.147) к виду (10.213).

Если же в (10.211) вместо (10.212) положить

$$\frac{x_3^2}{(R-H)^2}-1<0, \tag{10.214}$$

что соответствует точке внутри линзы, то

$$u_1+a_3^2=-\frac{a^2x_3^2}{(R-H)^2},\quad u_2+a_3^2=-a^2,$$
$$u_1-u_2=a^2\left(1-\frac{x_3^2}{(R-H)^2}\right)>0,$$

и тогда

$$\varphi_{\text{сф}}(x_3) = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-H)\left[x_3-\frac{x_3^2+a^2+2R^2}{\sqrt{a^2+x^3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{R^4}{(R-H)^2-x_3^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^3}}-\frac{x_3}{R(R-H)}\right)\right]=$$
$$=\frac{2}{3}\pi G\rho\left[2(R-H)x_3+2(R-H)\frac{\left(a^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(R-H)^2-x_3^2}-\frac{2R^3x_3}{(R-H)^2-x_3^2}\right]. \tag{10.215}$$

А это — действительно внутренний потенциал линзы на оси симметрии (см. вторую из формул (12.147))!

Рассмотрим другой важный частный случай:

Потенциал четырёх эквигравитирующих тел: тонкой однородной линзы, стержня, диска и сфероида в экваториальной плоскости $x_3 = 0$

При $x_3 \to 0$ все формулы несколько упрощаются, хотя и не так заметно, как в случае на оси Ox_3. Прежде всего,

$$\mu = -a_3^2, \quad \lambda = r^2 - a_1^2. \tag{10.216}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&k = \frac{a}{r},\\
&u_{1,2} = -\frac{a_1^2 + a_3^2 + \dfrac{a^2 r^2}{(R-H)^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{r^2}{(R-H)^2}\right),\\
&u_1 - u_2 = a^2\left(1 + \frac{r^2}{(R-H)^2}\right),\\
&u_1 + a_1^2 = a^2, \quad u_1 + a_3^2 = 0,\\
&u_2 + a_1^2 = -\frac{a^2 r^2}{(R-H)^2}, \quad u_2 + a_3^2 = -a^2\left(1 + \frac{r^2}{(R-H)^2}\right).
\end{aligned} \tag{10.217}$$

Тогда имеем из (10.205)

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{сф}}(r) = \frac{8}{3} G\rho a (R-H)\frac{a}{r}\Bigg\{&\frac{r^2}{a^2}\left[\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)\right] -\\
&-\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{R^4}{a^2 (R-H)^2}\Pi\left[-\frac{a^2}{(R-H)^2}, k\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{10.218}$$

Эта формула верна при $a \leqslant r < \infty$.

В частности, можно найти и *внешний потенциал однородного шарового сегмента* с радиусом основания a и с высотой H *в плоскости* $x_3 = 0$: он будет равен просто половине потенциала симметричной линзы (10.218):

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{сегм. вн.}}(r) = \frac{4}{3} G\rho a (R-H)\frac{a}{r}\Bigg\{&\frac{r^2}{a^2}\left[\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)\right] -\\
&-\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{R^4}{a^2 (R-H)^2}\Pi\left[-\frac{a^2}{(R-H)^2}, k\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{10.219}$$

Формула (10.219) была проверена прямым численным расчётом потенциала шарового сегмента в плоскости $x_3 = 0$, заданного тройным интегралом:

$$\varphi_{\text{сегм. вн.}}(r) = G\rho \int_0^H dx_3' \int_0^{r_m} r' dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(r'\cos\theta - r)^2 + (r'\sin\theta)^2 + x_3'^2}}, \tag{10.220}$$

где θ — угол между направлениями на пробную точку и проекцией точки интегрирования на плоскость $x_3 = 0$, а $r_m^2 = R^2 - (R - H + x_3')^2$.

Ещё одна весомая проверка формулы (10.219): *внешний потенциал сегмента* (10.219) в плоскости $x_3 = 0$, выраженный через полные эллиптические интегралы, оказывается эквивалентным потенциалу сегмента (9.94), найденному в девятой главе другим способом — с помощью эквигравитирующего стержня сегмента (9.88).

Задача 10.16. *(Поисковая.) Исследовать предельный переход от линзы с острыми краями к шару. Как такой переход отразится на трёх других эквигравитирующих телах и полученных выше основных формулах?*

Указание. Это тонкая задача требует большой осторожности при её решении.

Задача 10.17. *(Поисковая.) Найти внешний потенциал обобщённого гомотетического слоя, размещённого на поверхности однородной симметричной линзы с острыми краями.*

Указание. Подставить потенциал линзы (10.205) в правую часть выражения (5.115).

Замечания

§ 10.1. Вводятся и далее активно применяются особые софокусные преобразования. Они не только преобразуют любые эллипсоидальные оболочки в софокусные им, но и превращают их (а также сплошные эллипсоиды) в плоские диски. Именно таким методом в данной книге удаётся решить ряд очень трудных задач!

Первоисточник: [21].

§§ 10.2 — 10.4. Метод софокусных преобразований применяется здесь к любым эллипсоидальным оболочкам. С его помощью мы находим эквигравитирующие тела как среди оболочек, так и в классе сплошных слоисто-неоднородных эллипсоидов. Эти результаты значительно расширяют рамки классической теоремы Маклорена — Лапласа и теоремы Шаля. В прекрасных книгах Вебстера [11], стр. 449 и Пицетти [39] об этой теме сказано очень мало (всего несколько строк) и формально.

Дисковый предел для оболочек и сплошных сфероидов представляет для нас особый интерес.

Первоисточник: [21].

§ 10.5. Метод дифференциации — универсальный метод и в этом разделе он применяется для нахождения эквигравитирующих круглых дисков, а также стержней для элементарных сфероидальных оболочек с любым профилем толщины.

Первоисточник: [21].

Другой алгоритм нахождения только круглых эквигравитирующих дисков был разработан в совместной работе [2].

§ 10.6. Методы § 10.5 применяются к сплошным слоисто-неоднородным сфероидам.

Первоисточник: [21].

§§ 10.7, 10.8. Разработанные теоретические методы применяются к новым задачам. Методы восстановления объёмной плотности в сфероидах как по заданному эквигравитирующему диску, так и по заменяющему стержню необходимы, например, при изучении гравитационных полей галактик.

Первоисточник: [21].

§ 10.9. Важный момент: для слоисто-неоднородных трёхосных эллипсоидов заменяющие плоские диски (но только эллиптические!) также существуют. Решаются прямая и обратная задачи. Обратим внимание — *эквигравитирующих стержней для тел без азимутальной симметрии не существует.*

Первоисточник: [21].

§ 10.10. Задача о пространственном потенциале *однородного* эллиптического диска — новая. Эта вершина ранее никем не была покорена. В общем виде данная задача решается через отыскание эквигравитирующего этому диску трёхосного эллипсоида.

Первоисточник: [21].

§ 10.11. Новый материал. И задача о пространственном потенциале *неоднородного* эллиптического диска решается через отыскание эквигравитирующего этому диску трёхосного эллипсоида.

§ 10.12. Исходя из развитых в этой книге представлений об эквигравитирующих дисках и заменяющих стержнях здесь получен важный результат для радиуса сходимости ряда Лапласа, представляющего внешний потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида.

§ 10.13. Решена узловая задача о пространственном потенциале однородной тонкой симметричной линзы. Для этого потребовалась мобилизация возможностей всех методов, разработанных в этой главе. Результат интересен и важен: однородная тонкая симметричная линза в качестве эквигравитирующих имеет и стержень с мнимой плотностью (10.166), и вещественный круглый диск с плотностью (10.171), и, наконец, слоисто-неоднородный сфероид с плотностью (10.178).

Глава 11

НАХОЖДЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА ВНУТРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Как мы уже знаем из гл. 9, для нахождения эквигравитирующих стержней и «скелетов» тел требуется знать расположение особых точек. Эти точки могут быть как на поверхности гравитирующего тела, так и внутри него (и тогда это будут особые точки аналитического продолжения внешнего потенциала на внутреннюю область фигуры). Знание особых точек позволяет определять и радиус сходимости рядов Лапласа для внешнего потенциала у обширного класса гравитирующих тел. Однако далеко не просто указать, где внутри тела находятся сами особые точки. В данной главе разрабатываются строгие алгоритмы для выявления особых точек у однородных осесимметричных тел. Метод основан на применении контурных интегралов в комплексной плоскости. Выявлены три случая нахождения таких точек. Приводятся примеры, иллюстрирующие метод.

§ 11.1. Представление внешнего потенциала интегралом в комплексной плоскости

Рассмотрим однородное (плотности ρ) гравитирующее тело T, имеющее ось симметрии Oz. Начало цилиндрической системы координат также находится на этой оси.

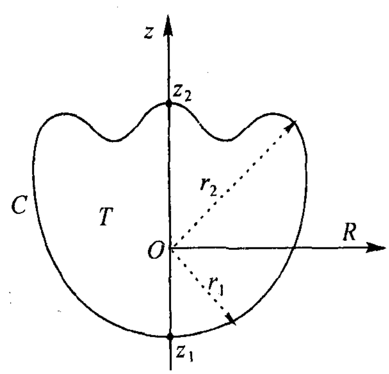


Рис. 93. Меридиональный контур тела T с осью симметрии Oz. Через r_1 и r_2 обозначены расстояния до ближайшей и наиболее удалённой точек поверхности этого тела, z_1 и z_2 — точки пересечения контура с осью симметрии

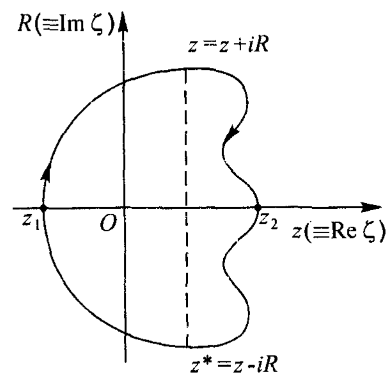


Рис. 94. Меридиональный контур тела C на комплексной плоскости ζ. Стрелками показано направление обхода половины этого контура при интегрировании

Мысленно рассечём тело T на элементарные круглые диски (или кольца) с поверхностной плотностью $\sigma = \rho\, dz$ (рис. 93). Тогда вклад в потенциал на испытуемую точку $(z', 0)$

от одного из таких дисков, расположенного на высоте z и имеющего радиус $R(z)$, даётся выражением (см. (9.35))

$$d\varphi = 2\pi G\rho\left[\sqrt{R^2(z) + (z'-z)^2} - (z'-z)\right]dz. \tag{11.1}$$

Без ограничения общности полагаем $z' > z_2$. Интегрирование по всем элементарным дискам даёт полный потенциал тела

$$\varphi(z') = 2\pi G\rho\left[\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{R^2(z) + (z'-z)^2}dz + z'(z_2 - z_1) + \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}\right]. \tag{11.2}$$

В общем случае функция $R(z)$, представляющая здесь уравнение контура тела C, может быть и многозначной (при тех z, где диски уступают место кольцам). Тогда интеграл в (11.2) надо рассматривать как криволинейный, взятый вдоль контура тела C.

Интегралу из (11.2) мы и будем уделять далее основное внимание, рассматривая его как функцию от переменной z'. Целесообразно вначале представить этот интеграл как контурный в комплексной плоскости переменной $\zeta = z + iR$. Так как

$$\zeta = z + iR,\ \ \zeta^* = z - iR;\ \ dz = \frac{1}{2}(d\zeta + d\zeta^*), \tag{11.3}$$

указанный интеграл принимает вид

$$\mathrm{F}(z') = \pi G\rho\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{(z'-\zeta)(z'-\zeta^*)}\,(d\zeta + d\zeta^*). \tag{11.4}$$

Очевидно также, что в результате такой замены контур тела C на комплексной плоскости ζ оказывается повёрнут по часовой стрелке на угол $90°$ (рис. 94). Подчеркнём, что при такой ориентации контура C интеграл (11.4) берётся по его верхней половине слева направо от точки z_1 до точки z_2.

Подчеркнём, что в целом потенциал $\varphi(z')$ из (11.2) имеет вид

$$\varphi(z') = \mathrm{F}(z') + \psi(z'),$$

где $\mathrm{F}(z')$ дана в (11.4), а $\psi(z')$ — полином первой степени (исчезающий, например, для тора).

§ 11.2. Особые точки на контуре C и внутри него на оси симметрии

Обратимся теперь к вопросу об особых точках на контуре фигуры и для аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь тела T.

1. *Особые точки на контуре*

Начнём с самого простого. Прежде всего, такие особые точки могут находиться на самóм контуре C. В этих точках касательная к контуру фигуры не определена и происходит потеря гладкости. Особые точки на контуре фигуры соответствуют различным изломам, заострениям или резким перегибам кривой меридионального сечения тела T. Например, особые точки такого типа на контуре будут иметь круговые конусы, цилиндры конечной длины, сегменты шара и т. д.

2. ***Внутренние особые точки на оси симметрии***

В отсутствие особых точек на контуре C величина ζ^* оказывается однозначно зависящей от ζ и на нём функция

$$\zeta^* = \eta(\zeta) \tag{11.5}$$

особых точек уже не имеет. Однако внутри контура C функция (11.5) всё же должна иметь особые точки. Действительно, при $z_1 < z_0 < z_2$ мы находим

$$\int\limits_C \frac{\frac{d\eta}{d\zeta}}{\eta(\zeta) - z_0} d\zeta = \int\limits_C \frac{d\zeta^*}{\zeta^* - z_0} = \left(\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right)^* = (2\pi i)^* = -2\pi i, \tag{11.6}$$

в то время как в случае регулярности интеграл в левой части (11.6) обязан был бы иметь значение $2\pi i K$, где K — число корней уравнения $\eta(\zeta) = z_0$.

Укажем теперь метод отыскания внутренних точек на оси симметрии однородного тела, для чего интеграл (11.4) представим, с учётом обозначения (11.5), в удобном для дальнейших исследований виде

$$\mathrm{F}(z') = \int\limits_{z_1}^{z_2} \sqrt{(z' - \zeta)[z' - \eta(\zeta)]} \left(1 + \frac{d\eta}{d\zeta}\right) d\zeta. \tag{11.7}$$

Пока сингулярности не встречаются, путь интегрирования в (11.7) можно как угодно смещать с сохранением концевых точек z_1 и z_2 и следить только за тем, чтобы ζ и $\eta(\zeta)$ не совпадали с заданной постоянной z'. В остальном же деформация контура может быть какой угодно. Существенно здесь то, что при деформации контура значения ζ и $\eta(\zeta)$ уже не останутся взаимно-сопряжёнными друг другу. Есть ещё одно важное свойство функции $\eta(\zeta)$: поскольку уравнение меридионального сечения тела T в силу осевой симметрии инвариантно по отношению к перестановке местами ζ и ζ^* и имеют место очевидные соотношения

$$z = \frac{\zeta + \zeta^*}{2}, \quad R^2 = -\frac{(\zeta - \zeta^*)^2}{4}, \tag{11.8}$$

то, следовательно, для точек контура C наряду с (11.5) имеет место и следующее соотношение

$$\zeta = \eta(\zeta^*). \tag{11.9}$$

Следовательно, по принципу аналитического продолжения, указанная инвариантность к сопряжению сохраняется и для точек всей комплексной плоскости. Например, значение $\eta(\zeta^*)$ при аналитическом продолжении этой функции вдоль вещественной оси z от z_1 до z_2 также останется вещественным.

Установив это необходимое обстоятельство, изучим аналитическое продолжение функции $F(z')$ из (11.7), перемещая точку z' из внешней области тела T к некоторой точке отрезка $[z_1, z_2]$. Как мы уже знаем, при этом точка z' не должна пересекать деформируемый контур интегрирования. Другими словами, контур должен отступать перед надвигающейся точкой z'. Возможное изменение контура интегрирования, удовлетворяющее данному правилу, показано на рис. 95. Очевидно, вклады в интеграл (11.7) от каждого из двух вновь образованных отрезков не равны нулю и вещественны. Действительно, по указанному выше, на отрезке $[z_1, z_2]$ величины ζ и $\eta(\zeta)$ вещественны, что влечёт вещественность и всего подынтегрального выражения (11.7). Поскольку же при обходе вокруг точки z' радикал $\sqrt{z' - \zeta}$

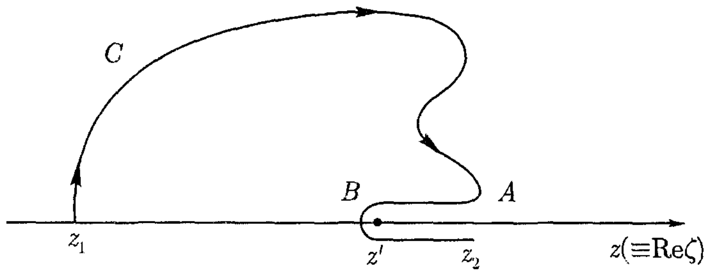


Рис. 95. Изменённый контур интегрирования при аналитическом продолжении функции $F(z')$ внутрь тела T. AB — верхний прямолинейный отрезок деформированного участка контура

меняет свой знак, сумма вкладов от этих двух отрезков есть просто удвоение вещественного вклада от одного из них, например, от отрезка AB. Разумеется, вещественным в целом остаётся и интеграл (11.7).

Привлекая теперь известный принцип аналитического продолжения, принцип симметрии Римана–Шварца (см. книгу Привалова [40]), распространяем однозначным и регулярным образом функцию $F(z')$ и на точки, расположенные несколько выше и ниже оси Oz. В результате, функция $F(z')$ при её продолжении влево от точки $z' = z_2$ (и вправо от точки $z' = z_1$) оказывается *аналитической функцией.*

Так будет продолжаться до тех пор, пока сдвиг точки z' вправо от z_2 и влево от z_1 не встретит препятствие в виде особой точки функции $\eta(\zeta)$. Эта сингулярность функции $\eta(\zeta)$ будет являться одновременно особой точкой и для $F(z')$. *Таким образом, всё сводится к нахождению функции $\eta(\zeta)$ и к отысканию у этой функции особых точек по стандартным правилам.*

3. *Внутренние особые точки вне оси симметрии*

Обратимся теперь к определению функции $F(z')$ и её особых точек, когда аргументу z' формально придаётся комплексное значение. Пусть, конкретно, $\operatorname{Im} z' > 0$. В этом случае отступание пути интегрирования перед надвигающейся точкой $\zeta = z'$ возможно только до тех пор, пока либо путь интегрирования не будет зажат между двумя точками, обращающими в нуль оба сомножителя выражения под радикалом в (11.7), либо второй сомножитель не потеряет регулярность. В первом случае, очевидно, $\eta(z') = z'$, а во втором функция $\eta(\zeta)$ должна иметь в точке $\zeta = z'$ какую-то особенность. Рассматривать случай $\operatorname{Im} z' < 0$ в силу очевидной симметрии нет необходимости.

§ 11.3. Сводка правил для отыскания особых точек

Резюмируя, получаем следующие основные правила для отыскания особых точек функции $F(z')$ и, значит, для аналитического продолжения внешнего потенциала тела внутрь него.

1. *Особые точки могут задаваться явно уравнением поверхности осесимметричного гравитирующего тела. В таких особых точках касательная к меридиональному контуру неопределена (это могут быть различные заострения, изломы контура фигуры и т. д.).*

2. *Особые точки могут находиться и внутри тела на оси его симметрии. Эти точки совпадают с особыми точками функции $\zeta^* = \eta(\zeta)$. Для их отыскания по заданному уравнению меридионального сечения тела $F(R, z) = 0$ сначала надо найти саму функцию $\eta(\zeta)$, а затем, пользуясь стандартными приёмами, определить её особые точки на оси симметрии фигуры.*

3. *Для комплексных z надо ещё добавить точки с $\eta(z) = z$.*

§ 11.4. Радиус сходимости ряда Лапласа

Обратимся к важной задаче о радиусе сходимости $R_{\text{сх}}$ ряда (1.17). *Для пояснения, взглянем* на рис. 93, где изображено гравитирующее тело T. Хорошо известно, что при расположении испытуемой точки за объемлющей тело сферой радиусом $r = r_2$ ряд Лапласа (1.17) сходится абсолютно и равномерно. Иногда, как известно, этот ряд остаётся сходящимся и в области $0 < r < r_1$. Проблема сходимости ряда Лапласа не раз обсуждалась в специальной литературе (см., например, работы Антонова и Холшевникова [7] и [5] (последняя совместно с Тимошковой), а также Петровской [38].), однако, за исключением давно известных случаев с шаром или однородным сжатым или вытянутым сфероидом[1], вопрос о точном значении радиуса сходимости $R_{\text{сх}}$ до сих пор остаётся малоизученным[2].

В нашем случае, за $R_{\text{сх}}$ следует брать расстояние до той внутренней (или находящейся на поверхности тела) особой точки, которая является наиболее удалённой от выбранного начала координат

$$R_{\text{сх}} = \max\sqrt{R_i^2 + z_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.10}$$

Поясним, что поиск особых точек мы ведём, исходя из первоначального сечения тела, постепенным отрезанием его внешних слоев окружностями уменьшающегося радиуса. Не играют роли ни те особые точки, которые с самого начала остаются снаружи C, ни расположенные на других ветвях $\eta(\zeta)$, куда можно попасть только обходом вокруг сингулярностей, расположенных при $|\zeta| < R_{\text{сх}}$.

Если форма контура изменяется при различных соотношениях параметров (примеры ниже), то при выборе $R_{\text{сх}}$ следует соблюдать некоторую осторожность, так как при резких изменениях формы может происходить и перестройка системы особых точек: внутренние точки могут оказаться внешними, и наоборот. Однако при каждом фиксированном их расположении правило (11.10) неизменно должно выполняться.

§ 11.5. Примеры

11.5.1. Вытянутые и сжатые сфероиды

Уравнение контура для них

$$\frac{R^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1. \tag{11.11}$$

Заменяя в (11.11) величины R^2 и z^2 с помощью (11.8), получим квадратное уравнение для неизвестной ζ^*:

$$\zeta^{*2}(a_1^2 - a_3^2) + 2\zeta\zeta^*(a_1^2 + a_3^2) + \zeta^2(a_1^2 - a_3^2) - 4a_1^2a_3^2 = 0, \tag{11.12}$$

решение которого и даст функцию

$$\zeta^* = \eta(\zeta) = \frac{-\zeta(a_1^2 + a_3^2) \pm 2a_1a_3\sqrt{\zeta^2 + a_1^2 - a_3^2}}{a_1^2 - a_3^2}. \tag{11.13}$$

Особые точки функции $\eta(\zeta)$ здесь — это точки ветвления радикала в (11.13). Требуя обра-

[1] Радиус сходимости ряда Лапласа для однородного сфероида известен давно, см., например, учебник Субботина [45].

[2] Именно из-за этой неопределённости со сходимостью ряды Лапласа не применяются в теории фигур равновесия вращающихся жидких масс. А. М. Ляпунов, например, применяет особые ряды по малому параметру.

щения в нуль этого радикала, находим

$$\zeta = \pm\sqrt{a_3^2 - a_1^2}. \tag{11.14}$$

Следовательно,

$$R_{cx} = \sqrt{|a_1^2 - a_3^2|}. \tag{11.15}$$

Это — известный результат для однородного вытянутого и сжатого сфероидов.

Следующий пример также несложен.

11.5.2. Шаровые линзы

Здесь мы имеем дело с шаровыми сегментами и составленными из них линзами (менисками).

Уравнение контура $BDCE$ (рис. 96) в выбранной системе координат имеет вид

$$R^2 + (z + R_0 - h)^2 = R_0^2. \tag{11.16}$$

При $z = 0$ имеет место соотношение между параметрами тела

$$a^2 + h^2 = 2R_0 h. \tag{11.17}$$

Две особые точки на контуре расположены, очевидно, в точках B и C на расстоянии a от начала координат. Для отыскания ещё одной особой точки приведём (11.16) с учётом соотношений (11.8) к линейному уравнению, имеющему очевидное решение

$$\zeta^* = \eta(\zeta) = \frac{a^2 - \zeta(R_0 - h)}{\zeta + R_0 - h}. \tag{11.18}$$

Искомая третья особая точка

$$\zeta = h - R_0. \tag{11.19}$$

Итак, для симметричной линзы возможны два случая:

$$R_{cx} = a, \quad \text{если } a > h - R_0, \tag{11.20}$$

и

$$R_{cx} = h - R_0, \quad \text{при } a < h - R_0. \tag{11.21}$$

Вариант (11.20) соответствует случаю на рис. 96, *а*, в случае (96, *б*) возможны оба варианта (11.20) и (11.21). Варианту на рис. 96, *в* соответствует R_{cx} из (11.21).

В следующем примере также необходима чёткая регламентация видов кривой контура по соотношению параметров в уравнении.

11.5.3. Овалы Кассини

Однородное гравитирующее тело имеет меридиональное сечение в виде овалов Кассини. Это кривые четвёртого порядка, описываемые уравнением

$$\left[(R + c)^2 + z^2\right]\left[(R - c)^2 + z^2\right] = a^4, \tag{11.22}$$

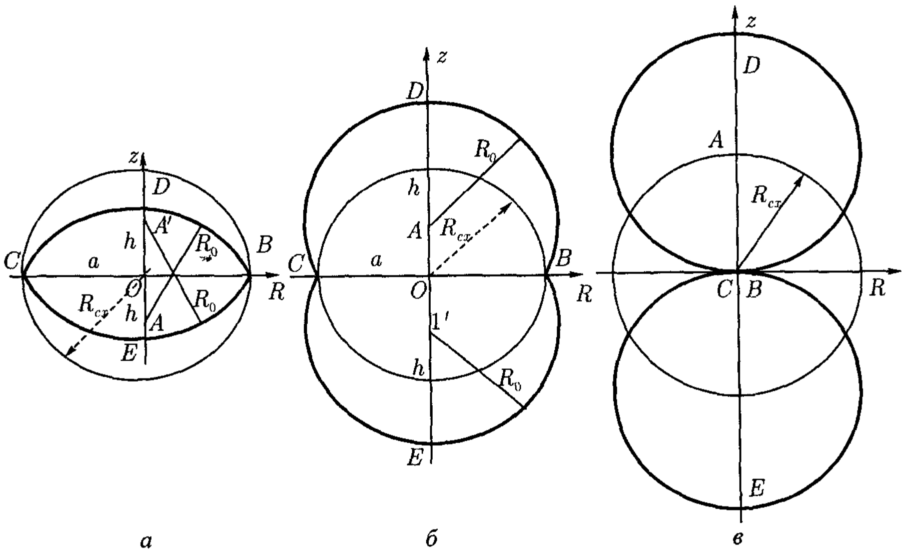


Рис. 96. Шаровая симметричная линза $BDCE$ при разных соотношениях параметров: *а* — случай $h < a < R_0$; *б* — случай $h > R_0 > a$; *в* — случай $h = 2R_0$; h — высота шарового сегмента. Радиус сходимости ряда Лапласа показан пунктиром

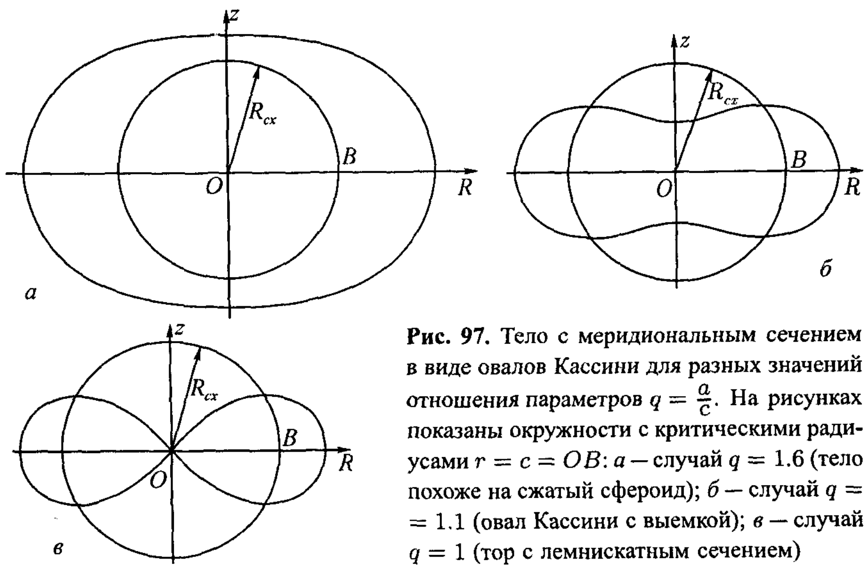


Рис. 97. Тело с меридиональным сечением в виде овалов Кассини для разных значений отношения параметров $q = \frac{a}{c}$. На рисунках показаны окружности с критическими радиусами $r = c = OB$: *а* — случай $q = 1.6$ (тело похоже на сжатый сфероид); *б* — случай $q = 1.1$ (овал Кассини с выемкой); *в* — случай $q = 1$ (тор с лемнискатным сечением)

где a и c — параметры. Конкретная геометрическая форма такой кривой зависит от отношения параметров $q = \frac{a}{c}$ (рис. 97). По нашему правилу, уравнение (11.22) с учётом (11.8) даёт теперь

$$\eta(\zeta) = \zeta^* = \pm\sqrt{\frac{a^4 - c^4 - c^2\zeta^2}{\zeta^2 + c^2}}. \qquad (11.23)$$

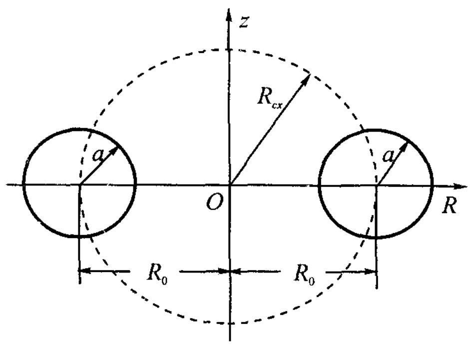


Рис. 98. Сечение кругового тора. Окружность с радиусом сходимости ряда Лапласа показана штрихами

Особые точки такой функции легко определяются

$$\zeta = \pm ic \quad \text{и} \quad \zeta = \pm\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{c}. \tag{11.24}$$

Отметим, что вторая особая точка в формуле (11.24) является вещественной и расположена на оси z вне фигуры овала. Её следует сразу отбросить и считать, что в этом примере всегда $R_{\text{сх}} = c$.

Имеем здесь варианты: если $\frac{a}{c} > \sqrt{2}$, тогда радиус сходимости $R_{cx} = c$ находится целиком внутри фигуры; если

$$1 < \frac{a}{c} < \sqrt{2}, \tag{11.25}$$

тогда радиус $R_{cx} = c$ таков, что критическая сфера пересекает фигуру; если $\frac{a}{c} \leqslant 1$ (торы с лемнискатными сечениями), то $R_{cx} = c$ и критическая сфера тоже пересекает гравитирующее тело.

11.5.4. Круговой тор

Уравнение поверхности (рис. 98)

$$(R - R_0)^2 + z^2 = a^2 \tag{11.26}$$

с учётом (11.8) даёт, как легко убедиться,

$$\eta(\zeta) = \zeta^* = \frac{a^2 - R_0^2 - iR_0\zeta}{\zeta - iR_0}. \tag{11.27}$$

Для варианта $R_0 > a$ (другие варианты тора мы здесь не рассматриваем) радиус сходимости, очевидно, равен

$$R_{\text{сх}} = R_0. \tag{11.28}$$

Замечания

Здесь сформулированы строгие критерии для нахождения особых точек у функций аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь однородного осесимметричного тела. Такие особые точки необходимо знать для размещения эквигравитирующих стержней тела. Если задано меридиональное сечение контура фигуры, данные методы позволяют найти все особые точки. Та особая точка, которая лежит на поверхности или внутри тела и при этом максимально удалена от выбранного начала системы отсчёта, и даёт радиус сходимости $R_{\text{сх}}$ ряда Лапласа.

Первоисточник: статья Антонова и Кондратьева Б. П. [4].

ГЛАВА 12

НОВЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛ

§ 12.1. Введение

Использование классических формул (8.3) и (8.5) для вычисления гравитационной энергии на практике редко приводит к цели. Причина затруднений ясна: в конечной аналитической форме даже потенциал $\varphi(x)$ известен лишь для немногих тел; следующий же шаг — нахождение потенциальной энергии тела — предполагает ещё и вычисление объёмных интегралов, под знаком которых стоит этот потенциал или его производные.

К тому же напомним: потенциальная энергия не относится к величинам, аддитивным по массе (заряду) и, даже зная энергию тела в целом, ничего нельзя сказать об энергии его отдельных частей (справедливо и обратное!).

Например, гравитационная энергия однородного цельного шара (1.64) хорошо известна, но попытка найти, опираясь на классические методы, энергию какой-либо *части* того же шара, будь то его сегмент или плоский шаровой слой, оказывается совершенно бесперспективной.

Таким образом, классические методы позволяют найти энергию W *лишь для шаров и однородных эллипсоидов*. Хорошо, но мало! Во Вселенной существуют много тел и другой формы, к тому же неоднородных каждый по своему. Сложную форму имеют, например, многие галактики и астероиды. А как поступать, если требуется знать потенциальную энергию слоёв на телах сложной формы?

Чтобы преодолеть эту кризисную ситуацию, нужно искать новые идеи и методы в этой трудной области математической физики.

В трёх следующих главах представлено *семь новых методов* нахождения потенциальной энергии *объёмных* тел. Кроме того, отдельно изучаются *слои и двумерные фигуры*. Каждый из методов позволяет решать задачи, прежде недоступные. Новизна темы и сложность выкладок требуют контроля результатов, что достигается решением одних и тех же узловых задач разными способами.

§ 12.2. Первый метод: слоисто-неоднородные эллипсоиды и сфероиды

Полученные ранее интегральные формулы (8.84) и (8.86) заметно расширяют класс решаемых задач и позволяют находить гравитационную энергию не только однородного, но и *любого слоисто-неоднородного эллипсоида*, т.е. эллипсоида со стратификацией общего вида.

Ограничимся для примера случаем гомотетических слоёв (когда m^2 дано в (5.20)).

Из (8.86) тогда следует выражение

$$W_{\text{эл}} = -\frac{2\pi G a_1 a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\, F\left(\arcsin e_{13}, \frac{e_{12}}{e_{13}}\right) \cdot \Psi(\rho)\,, \tag{12.1}$$

где

$$\Psi(\rho) = \int_0^1 \rho(m)\, M(m)\, dm^2, \tag{12.2}$$

причём масса $M(m)$ промежуточного эллипсоида с поверхностью $S(m)$, состоящего из гомотетических слоёв, дана в (8.87), а эксцентриситеты сечений e_{12} и e_{13} даны в (5.21).

В частности, при $e_{12} = 0$, $e_{13} \equiv e$ из (12.1) получим *формулу для энергии слоисто-неоднородного сжатого сфероида*

$$W_{\text{сф}} = -2\pi G a_1 a_3 \frac{\arcsin e}{e} \cdot \Psi(\rho). \tag{12.3}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а) *Однородный эллипсоид и сжатый сфероид:* для этих фигур

$$\Psi(\rho) = \frac{8}{15}\pi a_1 a_2 a_3 \rho^2 = \frac{2}{5} M\rho; \tag{12.4}$$

следовательно,

$$W_{\text{эл}} = -\frac{3}{5}\frac{M^2 G}{a_1 e_{13}} F\left(\arcsin e_{13}, \frac{e_{12}}{e_{13}}\right); \quad W_{\text{сф}} = -\frac{3}{5}\frac{M^2 G}{a_1}\frac{\arcsin e}{e}, \tag{12.5}$$

что эквивалентно (1.65) и первой из формул (1.66).

б) *Слоисто-неоднородный эллипсоид с распределением плотности* (10.58). Сразу подчеркнём, что сейчас мы имеем дело уже не только со сфероидом, как в гл. 9, но с более общим случаем: со слоисто-неоднородным эллипсоидом. Для него находим

$$M(m) = 2\pi \rho_0 a_1 a_2 a_3 \left(\arcsin m - m\sqrt{1 - m^2}\right); \quad \Psi(\rho) = \frac{8}{3}\pi \rho_0 a_1 a_2 a_3. \tag{12.6}$$

Следовательно, энергия такого эллипсоида равна

$$W_{\text{эл}} = -\frac{16}{3}\frac{M^2 G}{\pi^2 \sqrt{a_1^2 - a_3^2}} F\left(\arcsin e_{13}, \frac{e_{12}}{e_{13}}\right). \tag{12.7}$$

Наконец: *эллипсоид именно с таким распределением плотности в асимптотическом пределе $e_{13} \to 1$ даёт однородный эллиптический диск* с энергией (14.204).

Энергия же соответствующего слоисто-неоднородного сфероида получается из (12.7) как частный случай при $e_{12} \to 0$:

$$W_{\text{сф}} = -\frac{16}{3\pi^2}\frac{M^2 G}{a_1}\frac{\arcsin e_{13}}{e_{13}}. \tag{12.8}$$

В асимптотическом пределе $e_{13} \to 1$ *этот сфероид даёт, очевидно, однородный круглый диск с энергией* (8.19).

в) *Неоднородный эллипсоид (а также сфероид) с важным на практике «астрофизическим» законом плотности* (10.66). Прежде всего, при таком законе плотности масса эллипсоида-подсистемы с поверхностью $S(m)$ будет равна

$$M(m) = 4\pi \rho_0 a_1 a_2 a_3 \beta^{-3/2}\left[\ln\left(m\sqrt{\beta} + \sqrt{1 + \beta m^2}\right) - \frac{m\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \beta m^2}}\right], \tag{12.9}$$

а функция

$$\Psi(\rho) = 8\pi\rho_0^2 a_1 a_2 a_3 \beta^{-5/2}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\beta} - \frac{\ln\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{1+\beta}\right)}{\sqrt{1+\beta}}\right]. \tag{12.10}$$

Гравитационная энергия эллипсоида в целом оказывается равной

$$W_{\text{эл}} = -\frac{M^2G}{a_1}\frac{\sqrt{\beta}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\beta} - \dfrac{\ln\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{1+\beta}\right)}{\sqrt{1+\beta}}\right)}{\left[\ln\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{1+\beta}\right) - \sqrt{\dfrac{\beta}{1+\beta}}\right]^2}\frac{F\left(\arcsin e_{13}, \frac{e_{12}}{e_{13}}\right)}{e_{13}}. \tag{12.11}$$

При $\beta \gg 1$ такой эллипсоид[1] неплохо моделирует реальные Е-галактики (см. формулу (15.67)).

г) *Неоднородный сфероид с плотностью* (10.87)[2]. Опять задача разбивается на несколько этапов. При таком законе плотности масса промежуточного эллипсоида-подсистемы с поверхностью $S(m)$ равна

$$M(m) = \frac{2M_{\text{сф}}}{\pi}\left\{2m^3\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m} - m\sqrt{1-m^2} + \arcsin m\right\}. \tag{12.12}$$

В качестве проверки: при $m = 1$ полная масса тела действительно будет равна величине $M_{\text{сф}}$. Затем находим функцию

$$\Psi(\rho) = \frac{12M_{\text{сф}}^2}{\pi^3 a_1^2 a_3}\left(I_1 - I_2 + I_3\right), \tag{12.13}$$

где вспомогательные интегралы вычисляем методом интегрирования по частям:

$$I_1 = 2\int_0^1 m^4 \ln^2\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}dm = \frac{18G_{\text{K}} - 11}{30}, \tag{12.14}$$

$$I_2 = \int_0^1 m^2\sqrt{1-m^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}dm = \frac{6G_{\text{K}} - 1}{24}, \tag{12.15}$$

$$I_3 = \int_0^1 m\cdot\arcsin m\cdot\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}dm = \frac{3 - 2G_{\text{K}}}{4}. \tag{12.16}$$

Здесь G_{K} — известная постоянная Каталана (см. также (2.31)):

$$G_{\text{K}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx = 0.9159656... \tag{12.17}$$

[1] А также и сфероид, получающийся при $e_{12} = 0$, когда неполный эллиптический интеграл первого рода превращается в $F = \arcsin e_{13}$.

[2] Возможен, конечно, и трёхосный эллипсоид с таким законом плотности.

Собирая члены, имеем

$$\Psi(\rho) = \frac{3M_{\text{сф}}^2}{10\pi^3 a_1^2 a_3}\left(17 - 6G_{\text{К}}\right). \tag{12.18}$$

Подставляя (12.18) в (12.3), в итоге получим

$$W_{\text{сф}} = -\frac{3M_{\text{сф}}^2 G}{5\pi^2 a_1}\left(17 - 6G_{\text{К}}\right)\frac{\arcsin e}{e} = -\chi\frac{3M_{\text{сф}}^2 G}{5a_1}\frac{\arcsin e}{e}, \tag{12.19}$$

причём здесь

$$\chi = \frac{17 - 6G_{\text{К}}}{\pi^2} = 1.165620... \tag{12.20}$$

Заметим, что коэффициент χ близок к 1 и всё выражение (12.19) мало отличается по форме от W для однородного сфероида из (12.5) (в то время, как массы тел в обоих случаях, конечно, разные).

З а д а ч а 12.1. *Провести вычисления W по формуле* (12.1) *для неоднородного эллипсоида с «каноническим» законом плотности*

$$\rho = \rho_0\left(1 - m^2\right)^n. \tag{12.21}$$

Подчеркнём ещё раз: приведёнными выше примерами перечень тел, для которых можно найти точные выражения гравитационной энергии далеко не исчерпывается; формулы (8.84) и (8.86) приложимы к широкому классу слоисто-неоднородных эллипсоидов.

Три следующих оригинальных метода основаны на одной важной вспомогательной формуле для объёмных тел, которую мы вначале и получим.

§ 12.3. Вычисление потенциальной энергии однородных тел с помощью объёмного интеграла от дивергенции и поверхностного интеграла

Интегрируя по объёму T известное равенство векторной алгебры [31]

$$\operatorname{div}(\rho\varphi\boldsymbol{x}) = 3\rho\varphi + \boldsymbol{x}\operatorname{grad}(\rho\varphi), \tag{12.22}$$

имеем

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}(\rho\varphi\boldsymbol{x})\,dV = 3\iiint\limits_T \rho\varphi dV + \iiint\limits_T \boldsymbol{x}\operatorname{grad}(\rho\varphi)\,dV. \tag{12.23}$$

Заменяя первый член справа согласно (8.3) на $(-6W)$, получим соотношение

$$6W - \iiint\limits_T \boldsymbol{x}\operatorname{grad}(\rho\varphi)\,dV = -\iiint\limits_T \operatorname{div}(\rho\varphi\boldsymbol{x})\,dV. \tag{12.24}$$

Полагая теперь плотность ρ не зависящей от координат

$$\rho = \text{const}, \tag{12.25}$$

в левой части (12.23), с учётом (8.5), имеем величину $5W$. В итоге, следовательно,

$$W = -\frac{1}{5}\rho \iiint\limits_T \operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{x})\, dV. \tag{12.26}$$

Представление W интегралом от дивергенции является интересным и важным уже само по себе. Но более того, пользуясь *формулой Остроградского – Гаусса* [31]

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{F} dV = \iint\limits_S (F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3)\, dS, \tag{12.27}$$

можно преобразовать объёмный интеграл в (12.26) в поверхностный; в итоге получим ещё одну важную формулу

$$W = -\frac{1}{5}\rho \oiint\limits_S \varphi(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{S}, \tag{12.28}$$

где S — поверхность, ограничивающая тело, а $d\boldsymbol{S}$ — векторный элемент этой поверхности[3].

В сферических координатах

$$\boldsymbol{x} d\boldsymbol{S} = r^3 d\omega = r^3 \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{12.29}$$

и, очевидно,

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{S} = 3V. \tag{12.30}$$

Согласно формуле (12.28), *вычисление потенциальной энергии однородного тела сводится к интегрированию известных функций не по объёму, как ранее, а по поверхности однородного тела*.

Вот два несложных примера на прямое применение формулы (12.28).

Пример первый: вычислить энергию однородного шара с радиусом R и массой M. На границе сферы потенциал равен постоянному значению $\varphi|_S = GM/R$. Вынесем это $\varphi|_S$ за знак интеграла в (12.28), тогда, учитывая (12.30), получим искомое выражение (1.64).

Второй пример: найти *потенциальную энергию однородного трёхосного эллипсоида*, ограниченного поверхностью (5.3). Потенциал такого эллипсоида дан в (6.14). Подставим его в (12.28) и интегрирование проводим в сферических координатах. Учитывая формулу (12.29) и то, что уравнение поверхности (5.3) имеет теперь вид (5.29), легко найдём интегралы

$$\oiint\limits_S x_i^2 r^3 d\omega = V a_i^2 = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 a_i^2. \tag{12.31}$$

Таким образом, получим выражение энергии однородного эллипсоида (1.65), см. также (12.5). Применение формулы (12.28) упрощает решение задач для сплошных тел и для тел с полостями. Но далее она понадобится и для развития трёх новых теоретических методов.

§ 12.4. Метод второй: W через двойные интегралы по поверхности

Здесь получена формула, позволяющая вместо прежнего шестикратного интегрирования выражать W через интеграл по поверхности тела. С её помощью можно решать задачи даже для тел с особыми точками на поверхности.

Исходим из того, что, как известно, потенциал однородного тела может выражаться

[3] Хотя формула Остроградского – Гаусса непосредственно применима лишь к пространственно-односвязным областям, интеграл (12.28) можно распространить и на тела с внутренними полостями, если учесть, что на границе этих полостей направление нормали будет обратным.

поверхностным интегралом (1.11). Точка x, в которой находится потенциал, может принадлежать и самой поверхности тела. Имея в виду этот последний случай, скомбинируем формулу Гаусса и нашу (12.28) путём подстановки первой во вторую. Тогда получим следующий интеграл:

$$W = -\frac{G\rho^2}{10} \oiint_S \oiint_S (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) \cos\gamma' dS' dS. \tag{12.32}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор из начала отсчёта к элементу площади dS; $\boldsymbol{n}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — единичная внешняя нормаль к поверхности тела в точке $\boldsymbol{x}$, причём α_i — направляющие косинусы этой нормали. Тогда $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ есть проекция радиус-вектора $\boldsymbol{x}$ на эту нормаль. Через γ' обозначен угол между ортом нормали $\boldsymbol{n}\,(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ к поверхности в точке $\boldsymbol{x}'$ и ортом вектора вдоль отрезка $D = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}$, соединяющего точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$. Очевидно,

$$\cos\gamma' = \frac{\alpha_1'(x_1' - x_1) + \alpha_2'(x_2' - x_2) + \alpha_3'(x_3' - x_3)}{D}. \tag{12.33}$$

Обозначив через $\boldsymbol{n}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ единичную нормаль к поверхности S в точке $\boldsymbol{x}$, имеем

$$\boldsymbol{x} d\boldsymbol{S} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\, dS. \tag{12.34}$$

Согласно формуле (12.32), *нахождение потенциальной энергии однородного тела вторым методом сводится к вычислению четырёхкратного интеграла, дважды распространённого на его граничную поверхность*. Сравнение показывает также, что формула (12.32) не тождественна малоизвестному, кстати, выражению из книги Сретенского [44], с. 95 :

$$W = -\frac{G\rho^2}{12} \oiint dS \oiint D\cos\gamma \cdot \cos\gamma' dS'. \tag{12.35}$$

В отличие от нашей (12.32), формула Сретенского (12.35) симметрична относительно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$. Таким образом, в (12.32) и (12.35) мы имеем две разные формулы для вычисления W. Практическая эффективность их применения зависит от геометрии изучаемого тела. Кроме того, оба выражения могут служить для взаимного контроля результатов.

Задача 12.2. *Используя* (12.32), *найти энергию однородного шара радиуса* R.

Решение. Начало сферической системы координат поместим в центр шара, полярную ось направим через dS'; тогда $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}) = R$ и $\cos\gamma' = \sin\frac{\theta}{2}$, так что

$$W_{\text{шара}} = -\frac{G\rho^2 R^3}{10} \oiint dS' \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} \sin\theta d\theta d\lambda = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5, \tag{12.36}$$

что совпадает с (1.64). ▼

§ 12.5. Потенциальная энергия однородного кубоида

В качестве примера на применение второго метода рассмотрим задачу о нахождении гравитационной энергии кубоида (кубоид — прямоугольный параллелепипед), заполненного однородным веществом. Неожиданным оказывается то, что она выражается через элементарные функции (это устанавливается кропотливыми преобразованиями).

12.5.1. Вклад в W от противоположных граней кубоида

Прямоугольный параллелепипед (*кубоид*) с рёбрами a_1, a_2, a_3 заполнен однородным гравитирующим веществом. Система прямоугольных декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре симметрии фигуры ориентирована так, что её координатные плоскости параллельны соответствующим граням кубоида[4].

Вычисление потенциальной энергии однородного кубоида проведём с помощью формулы (12.32). Вклад в интеграл (12.32) дают два варианта расположения площадок dS и dS': это вариант с расположением рассматриваемых площадок на противоположных (параллельных) гранях (у кубоида три пары таких граней) и второй вариант, когда dS и dS' расположены на разных гранях с общим, естественно, ребром (как легко видеть, есть 24 комбинации среди пар перпендикулярных граней[5]). Разумеется, формально возможен и тот случай, когда элементарные площадки интегрирования dS и dS' находятся на одной грани кубоида, но ввиду очевидного $\cos\gamma' = 0$ вклада в энергию такое расположение площадок не даёт.

Начнём с нахождения вклада в гравитационную энергию кубоида от параллельных граней. Возьмём, например, грани, параллельные плоскости Ox_1x_2, и обозначим концы векторов $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}'_i$ через A и B (см. рис. 99). Тогда, очевидно, координаты точек и расстояние между ними будут:

$$\begin{aligned} &A\left(x_1, x_2, -\frac{a_3}{2}\right);\ B\left(x_1, x_2, -\frac{a_3}{2}\right);\ (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = \frac{a_3}{2};\\ &D = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + a_3^2};\ \cos\gamma' = \frac{a_3}{D}. \end{aligned} \tag{12.37}$$

Опуская пока множитель $\left(-\dfrac{G\rho^2}{10}\right)$, находим, что искомый вклад в энергию кубоида от параллельных граней даётся интегралом

$$\overline{\overline{I}}_{12} = \frac{a_3^2}{2} \iiiint \frac{dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2}{D}. \tag{12.38}$$

Этот четырёхкратный интеграл и подлежит вычислению.

Вычисление четырёхкратного интеграла (12.38) требует большого объёма работы. В результате имеем

$$\begin{aligned} \overline{\overline{I}}_{12} = a_3^2 \Bigg\{ & a_1\left(a_2^2 - a_3^2\right)\ln\frac{a_1 + L}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + a_2\left(a_1^2 - a_3^2\right)\ln\frac{a_2 + L}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}} + \\ & + a_3^2\left(a_1 \ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_3} + a_2 \ln\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_3}\right) - \\ & - 2a_1a_2a_3 \operatorname{arctg}\frac{a_1a_2}{a_3L} + \frac{1}{3}\sqrt{a_1^2 + a_3^2}\left(a_1^2 - 2a_3^2\right) + \\ & + \frac{1}{3}\sqrt{a_2^2 + a_3^2}\left(a_2^2 - 2a_3^2\right) + \frac{2}{3}a_3^2 + \frac{1}{3}L\left(2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{12.39}$$

[4] Потенциал внутри кубоида был найден в § 7.6.

[5] Число перпендикулярных пар граней у кубоида совпадает, очевидно, с числом рёбер и равно 12, но при этом каждая пара даёт две комбинации (в силу асимметрии подынтегрального выражения в (12.32) относительно расположения на двух гранях площадок dS и dS').

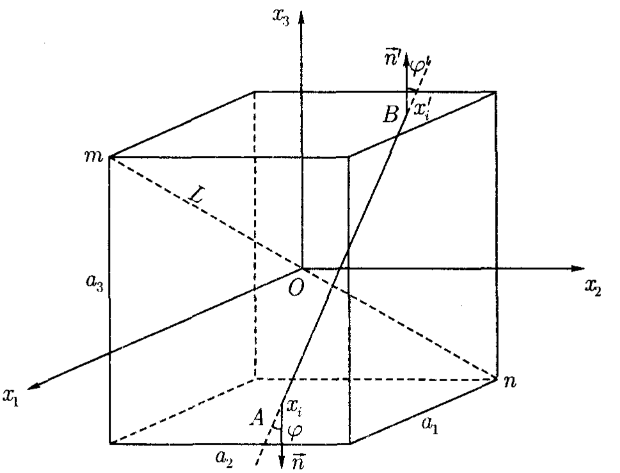


Рис. 99. Кубоид (прямоугольный параллелепипед), его главная диагональ L и точки интегрирования на двух противоположных гранях

Здесь, как и в § 7.6, через L обозначена главная диагональ кубоида.

Как и следовало ожидать, в формуле (12.39) индекс «3» оказывается выделенным, зато индексы «1» и «2» входят в неё на равных правах (симметрия относительно этих индексов). Очевидно, если мы поменяем местами площадки dS и dS', то вклад от этого не изменится и останется равным выражению (12.39). Следовательно, полный вклад в потенциальную энергию кубоида от двух граней, параллельных плоскости Ox_1x_2, будет равен $2\overline{\overline{I}}_{12}$.

Далее важно заметить, что вклад в энергию от двух других пар параллельных граней, а именно:

$$\overline{\overline{I}}_{23} = \frac{a_1^2}{2} \iiiint \frac{dx_2 dx_3 dx_2' dx_3'}{\sqrt{a_1^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}} \tag{12.40}$$

и

$$\overline{\overline{I}}_{31} = \frac{a_2^2}{2} \iiiint \frac{dx_1 dx_3 dx_1' dx_3'}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + a_2^2 + (x_3 - x_3')^2}} \tag{12.41}$$

получается из выражения (12.39) *круговой перестановкой индексов*. Ввиду этого для экономии места мы не будем записывать эти два выражения в явном виде, а запишем сразу вклад в энергию от всех трёх пар параллельных граней кубоида. После многих преобразований получим

$$\begin{gathered}
S_1 = 2\left(\overline{\overline{I}}_{12} + \overline{\overline{I}}_{23} + \overline{\overline{I}}_{31}\right) = 2\sum\left\{-a_1\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2 \ln\frac{a_1 + L}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \right. \\
+ a_3^4\left(a_1 \ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_3} + a_2 \ln\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_3}\right) - \\
-2a_1a_2a_3a_3^2 \operatorname{arctg}\frac{a_1a_2}{a_3L} + \frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 + a_3^2}\left(a_1^2a_3^2 - a_1^4 - a_3^4\right) + \\
\left. + \frac{2}{3}L\left(a_1^4 - a_1^2a_2^2\right) + \frac{2}{3}a_1^5\right\}.
\end{gathered} \tag{12.42}$$

В выражении (12.42) суммирование проводится по членам, получаемым из данного циклической перестановкой индексов (число членов при этом, разумеется, утраивается).

Все интегралы выражаются через элементарные функции.

12.5.2. Вклад в энергию кубоида от смежных граней

Двенадцать перпендикулярных граней разобьём на три равные группы по наименованию индекса, приписываемому общим рёбрам. Каждая пара граней даёт два вклада в энергию, и сумма последних является одинаковой для всех четырёх пар какой-то группы.

Для примера возьмём пару смежных граней с индексом «1» их общего ребра такую, что

$$A\left(x_1, x_2, -\frac{a_3}{2}\right); \quad B\left(x_1', \frac{a_2}{2}, x_3'\right); \quad (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = \frac{a_3}{2};$$
$$D\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \left(\frac{a_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{a_3}{2} + x_3'\right)^2}; \quad \cos\gamma' = \frac{\frac{a_2}{2} - x_2}{D}. \tag{12.43}$$

Искомый вклад даётся интегралом

$$\overline{\overline{I}}_{12;\,13} = \frac{a_3}{2} \iiiint \frac{\left(\frac{a_2}{2} - x_2\right) dx_1 dx_2 dx_1' dx_3'}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \left(\frac{a_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{a_3}{2} + x_3'\right)^2}}. \tag{12.44}$$

Отметим, что отличие выражения (12.44) от интеграла (12.38) проявляется уже в существовании у (12.44) дополнительного множителя. Но вклад от смежных граней оказывается однотипным вкладу от граней противоположных:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{I}}_{12;\,13} &= \frac{a_3 a_3^2}{6}\left(3a_2^2 + a_3^2\right)\ln\frac{a_1 + L}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \\
&+ \frac{a_3}{24}\left(6a_1^2 a_2^2 + a_1^4 - 3a_2^4\right)\ln\frac{a_3 + L}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} - \\
&- \frac{a_1 a_2 a_3}{3} a_2^2 \operatorname{arctg}\frac{a_1 a_3}{a_2 L} - \frac{a_1 a_3^4}{6}\ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_3} - \\
&- \frac{a_1^4 a_3}{24}\ln\frac{a_3 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_1} + \frac{a_2^4 a_3}{8}\ln\frac{a_3 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_2} + \\
&+ \frac{a_3^2}{12}\left[\sqrt{a_1^2 + a_3^2}\left(a_3^2 - \frac{3}{2}a_1^2\right) + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}\left(\frac{5}{2}a_2^2 + a_3^2\right)\right] - \\
&- \frac{a_3^5}{12} + \frac{a_3^2 L}{24}\left(3a_1^2 - 5a_2^2 - 2a_3^2\right).
\end{aligned} \tag{12.45}$$

Ещё один вклад в энергию от рассматриваемой пары смежных граней даётся интегралом

$$I_{13;12} = \frac{a_2}{2} \iiiint \frac{\left(\frac{a_3}{2} + x_3\right) dx_1 dx_1' dx_2' dx_3}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \left(\frac{a_2}{2} - x_2'\right)^2 + \left(\frac{a_3}{2} + x_3\right)^2}}. \tag{12.46}$$

В интегрировании (12.46) необходимости нет, если обратить внимание на то, что при перемене местами индексов «2» и «3» он сведётся к уже известному интегралу (12.44). Другими словами, для нахождения (12.46) достаточно в выражении (12.45) поменять местами указанные индексы.

В итоге, вклад от всех смежных граней кубоида находим равным

$$\begin{aligned} S_2 &= 4\left[(I_{12;13} + I_{13;12}) + (I_{23;21} + I_{21;23}) + (I_{32;31} + I_{31;32})\right] = \\ &= \frac{1}{3}\sum\left\{a_1\left(a_2^4 + a_3^4 + 18a_2^2a_3^2\right)\ln\frac{a_1 + L}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} - \right. \\ &-a_3^4\left(a_2\ln\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_3} + a_1\ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_3}\right) - \\ &-8a_1a_2a_3a_3^2\operatorname{arctg}\frac{a_1a_2}{a_3L} + 2\sqrt{a_1^2 + a_3^2}\left(a_1^4 + a_3^4 + a_1^2a_3^2\right) - \\ &\left.-2L\left(a_1^4 + a_1^2a_2^2\right) - 2a_1^5\right\}. \end{aligned} \tag{12.47}$$

12.5.3. Полная энергия кубоида

Полная гравитационная энергия однородного прямоугольного параллелепипеда находится теперь сложением выражений (12.42) и (12.47). Учитывая множитель $\left(-\frac{G\rho^2}{10}\right)$, получим

$$\begin{aligned} W_{\text{кубоида}} &= -\frac{G\rho^2}{6}\sum\left\{a_1\left(6a_2^2a_3^2 - a_2^4 - a_3^4\right)\ln\frac{a_1 + L}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \right. \\ &+a_3^4\left(a_1\ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{a_3} + a_2\ln\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_3}\right) - \\ &-4\,a_1a_2a_3a_3^2\operatorname{arctg}\frac{a_1a_2}{a_3L} - \frac{2}{5}\sqrt{a_1^2 + a_3^2}\left(a_1^4 + a_3^4 - 3a_1^2a_3^2\right) + \\ &\left.+\frac{2}{5}L\left(a_1^4 - 3a_1^2a_2^2\right) + \frac{2}{5}a_1^5\right\}. \end{aligned} \tag{12.48}$$

В этом выражении вновь подразумевается суммирование по членам, получаемым из данного циклической перестановкой индексов.

Для куба, например, выражение (12.48) сильно упрощается и тогда

$$W_{\text{куба}} = -\alpha\frac{GM^2}{a}, \tag{12.49}$$

где M — полная масса куба, a — его ребро, а постоянная

$$\alpha = 2\ln\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{3} + \frac{1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{5} \simeq 0.9411563 \tag{12.50}$$

близка к единице. В частности, сравнение с энергией (1.64) равновеликого шара той же массы даёт

$$\frac{W_{\text{шара}}}{W_{\text{куба}}} = \frac{3}{5\alpha}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} \simeq 1.027666. \tag{12.51}$$

Это отношение (12.51) больше единицы, что согласуется с известным глубоким результатом А. М. Ляпунова [35]: *однородный шар имеет наибольшую (по модулю) потенциальную энергию в сравнении с любой однородной конфигурацией того же объёма*. Конкретно, отношение (12.51) показывает, какую работу следует совершить, чтобы деформировать однородный шар в однородный куб того же объёма и массы.

Кроме того, *так как среди равновеликих параллелепипедов куб обладает наименьшей площадью поверхности, то и* max *потенциальной энергии по модулю должен принадлежать именно кубу*. Это подтверждается анализом формулы (12.48) и иллюстрируется рис. 100.

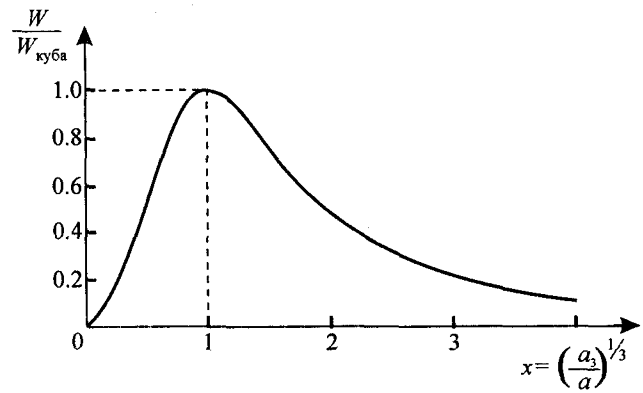


Рис. 100. Гравитационная энергия прямоугольного однородного бруса с квадратным сечением $a_1 = a_2$ как функция длины третьего ребра a_3. Нормировка на величины, относящиеся к кубу той же массы

Задача 12.3. *Определите, каким же образом в выражение* (12.50) *для куба «проникла» постоянная* π*!*

12.5.4. Предельный случай бесконечно тонкого кубоида (пластина)

Хорошей проверкой правильности выражения (12.48) может служить асимптотический переход к бесконечно тонкому параллелепипеду, когда одно ребро трёхмерного параллелепипеда, например a_1, становится весьма малым в сравнении с двумя другими его рёбрами a_2 и a_3. Получается однородная двумерная пластина.

Дело в том, что гравитационная энергия двумерной пластины может быть вычислена и совершенно другим, прямым способом по формуле

$$W_{\text{пл}} = -\frac{G\sigma^2}{2} \iiiint \frac{dx_2 dx_3 dx_2' dx_3'}{\sqrt{(x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}}, \tag{12.52}$$

где σ — поверхностная плотность пластины

$$\sigma = \lim_{a_1 \to 0} (\rho a_1) = \text{const}. \tag{12.53}$$

Проводя в (12.52) интегрирование (как мы это делали в случае кубоида) вначале по dx_2 и dx_2', а затем по dx_3 и dx_3', в итоге найдём

$$\begin{aligned} W_{\text{пл}} = -G\sigma^2 \Bigg\{ a_2 a_3 \left(a_2 \ln \frac{a_3 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_2} + a_3 \ln \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}}{a_3} \right) + \\ + \frac{a_2^3 + a_3^3 - \left(a_2^2 + a_3^2\right)^{3/2}}{3} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{12.54}$$

Как и следовало ожидать, данное выражение оказывается симметричным относительно индексов «2» и «3». Теперь же возникает

Задача 12.4. *Выполнить указанный предельный переход в общей формуле* (12.48) *и получить таким способом результат* (12.54).

Решение. Совершить переход к пластине можно только после соответствующей перегруппировки членов в исходном выражении. Развёртывая сумму в (12.48) и вынося a_1^2, после очевидных преобразований получим выражение

$$\begin{aligned} W_{\text{пл}} = -\frac{G\sigma^2}{6}\Bigg\{ & \frac{6a_2^2a_3^2 - a_2^4 - a_3^4}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}} + 6a_2a_3\left(a_2\ln\frac{a_3+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_2} + \right. \\ & \left. + a_3\ln\frac{a_2+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_3}\right) + \frac{11}{5}\left(a_2^3+a_3^3\right) - \frac{8a_2^2a_3^2 + \frac{6}{5}\left(a_2^2+a_3^2\right)^2}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}} + \\ & + a_2a_3^4\lim_{a_1\to 0}\left[\frac{1}{a_1^2}\ln\left(\frac{a_2+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_3}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}{a_2+L}\right)\right] + \\ & + a_2^4a_3\lim_{a_1\to 0}\left[\frac{1}{a_1^2}\ln\left(\frac{a_3+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_2}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{a_3+L}\right)\right] + \\ & + \frac{2}{5}\lim_{a_1\to 0}\left(\frac{a_2^5+a_3^5 - a_2^4\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3^4\sqrt{a_1^2+a_3^2}}{a_1^2}\right) + \\ & + \frac{2}{5}\lim_{a_1\to 0}\left(\frac{\left(a_2^4+a_3^4-3a_2^2a_3^2\right)\left(L-\sqrt{a_2^2+a_3^2}\right)}{a_1^2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{12.55}$$

Здесь все неопределённости типа $\frac{0}{0}$. Раскрывая самые сложные (первую и вторую), найдём, например,

$$\begin{aligned} & a_2a_3^4\lim_{a_1\to 0}\left[\frac{1}{a_1^2}\ln\left(\frac{a_2+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_3}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}{a_2+L}\right)\right] = \\ & = a_2^4a_3\lim_{a_1\to 0}\left[\frac{1}{a_1^2}\ln\left(\frac{a_3+\sqrt{a_2^2+a_3^2}}{a_2}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{a_3+L}\right)\right] = \frac{a_2^2a_3^2}{2\sqrt{a_2^2+a_3^2}}. \end{aligned} \tag{12.56}$$

Оставшиеся две неопределённости в (12.55) раскрываются аналогично: предпоследняя и последняя дают соответственно

$$-\frac{1}{5}\left(a_2^3+a_3^3\right), \quad \frac{1}{5}\frac{a_2^4+a_3^4-3a_2^2a_3^2}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}},$$

и в итоге данная формула действительно приводится к выражению (12.54). Это и доказывает правильность как формулы (12.48), так и (12.54). ▼

Задача 12.5. *Найти вторым методом гравитационную энергию однородного тетраэдра*:

а) *если три его грани совпадают с координатными плоскостями*;

б) *когда тетраэдр правильный.*

§ 12.6. Третий метод: нахождение гравитационной энергии объёмных тел с помощью особых рядов

Удивительная роль обобщённого гомотетического слоя

12.6.1. Как приходим к особому ряду

Вначале рассмотрим объёмные тела, имеющие круговую (ротационную) симметрию[6], причём допускается их неоднородность. Дано гравитирующее тело T, потенциал которого $\varphi(r,\theta)$ во *внешней* точке r представлен рядом по полиномам Лежандра (1.17). Пусть в этом силовом поле находится второе тело $\widetilde{T}$ с объёмной плотностью $\widetilde{\rho}(r,\theta)$. Подчеркнём: и первая, и вторая масса имеют ротационную симметрию относительно некоторой прямой, от которой и измеряется полярный угол θ. Потенциал второго тела *во внутренней точке* r также можно представить рядом Лапласа[7]:

$$\widetilde{\varphi}(r,\theta) = G\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{D}_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{12.57}$$

причём коэффициенты здесь равны

$$\widetilde{D}_n = 2\pi \oint\!\!\!\oint_{\widetilde{S}} \widetilde{\rho}(r',\theta')(r')^{1-n} P_n(\cos\theta')\sin\theta' dr' d\theta'. \tag{12.58}$$

Заметим, что выражение коэффициента во внутренней точке при $n=2$ зависит от того, совпадает или нет начало системы координат с самим телом. А именно: если начало системы координат находится внутри (однородного) тела, то следует сделать замену

$$\widetilde{D}_2 P_2(\cos\theta) \Rightarrow \widetilde{D}_2 P_2(\cos\theta) + \frac{2}{3}\pi\rho. \tag{12.59}$$

Выяснив это, поставим целью найти *взаимную* гравитационную энергию обеих масс. Как мы уже знаем, для этого достаточно определить, например, энергию второй массы в силовом поле первой. Согласно формуле (8.2), величина этой энергии будет представлена интегралом

$$W_{\text{вз}} = -2\pi \oint\!\!\!\oint_{\widetilde{S}} \widetilde{\rho}(r',\theta')\varphi(r',\theta')(r')^2 \sin\theta' dr' d\theta'. \tag{12.60}$$

Подставляя сюда выражение для φ из (8.1), после перегруппировки получим

$$W_{\text{вз}} = -G\sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[2\pi \oint\!\!\!\oint_{\widetilde{S}} \widetilde{\rho}(r',\theta')(r')^{1-n} P_n(\cos\theta')\sin\theta' dr' d\theta'\right]. \tag{12.61}$$

Но главное в том, что с учётом (12.58), выражение (12.61) оказывается представленным в изящной форме ряда

$$W_{\text{вз}} = -G\sum_{n=0}^{\infty} D_n \widetilde{D}_n. \tag{12.62}$$

[6] Более общий случай для однородных тел без осевой симметрии рассмотрен в § 12.7.

[7] Начало системы отсчёта находится вне этого второго тела.

Таким образом, *для вычисления взаимной потенциальной энергии двух соосных, имеющих азимутальную симметрию масс, достаточно знать только коэффициенты при разложении в ряд Лапласа внешнего потенциала одной массы и внутреннего потенциала другой массы.*

Этот замечательный результат ведёт нас ещё дальше: ряд (12.62) можно, оказывается, приспособить и для нахождения потенциальной энергии *изолированного однородного тела.* Однако теперь понадобится другая и, можно сказать, более глубокая интерпретация формулы (12.28). А именно: обратим внимание на то, что интегрирование в формуле (12.28) ведётся по поверхности тела, причём — и в этом суть! — здесь мы имеем дело *с известным нам обобщённым гомотетическим слоем* (5.105), где, однако, численный коэффициент следует взять равным $1/5$:

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{5}\rho\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right), \tag{12.63}$$

где, напомним, величины α_i — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела. (Соответственно, масса этого обобщённого гомеоида оказывается равной $3/5$ от массы исходного тела, на поверхности которого он лежит.)

Итак, выделение на поверхности тела воображаемого обобщённого гомотетического слоя с плотностью σ позволит записать формулу (12.28) в виде

$$W = -\oiint_S \sigma\varphi\, dS, \tag{12.64}$$

представляющем *потенциальную энергию однородного изолированного объёмного тела как взаимную потенциальную энергию данного слоя в силовом поле самого этого тела.* Результат поразительный, ибо, напомним: гравитационная энергия — это энергия тела, воздействующего полностью «самого на себя». У нас же результат принципиально иной — воображаемый обобщённый гомеоид — как реальный партнёр — также позволяет выразить потенциальную энергию всей массы через взаимную с ним энергию тела!

В свою очередь, это замечательное свойство обобщённого гомеоида и формулы (12.28) позволяет применить ряд (12.62) к вычислению уже не взаимной энергии, а энергии тела, воздействующего «самого на себя», т. е. искомой потенциальной энергии тела. Вот она — цепная реакция идей!

Для реализации намеченного плана обратимся к формуле для потенциала слоя (12.63). Подставив в правую часть формулы (5.115) (она — незаменимый элемент для достижения цели) ряд (12.57), где «тильду» сейчас можно убрать, находим ряд для внутреннего потенциала гомотетического слоя:

$$\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(2-n)\,\widetilde{D}_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{12.65}$$

Таким образом, чтобы формула (12.62) «работала» для изолированного тела, в ней, согласно (12.65), вместо $\widetilde{D}_n$ надо подставить выражение

$$\frac{2-n}{5}\widetilde{D}_n. \tag{12.66}$$

Следовательно, *для изолированного тела* формула (12.62) принимает вид

$$W = -\frac{1}{5}G\sum_{n=0}^{\infty}(2-n)\,D_n\widetilde{D}_n, \tag{12.67}$$

где, напомним, D_n и $\widetilde{D}_n$ являются коэффициентами в разложениях в ряд Лапласа потенциала тела во внешней (1.19) и внутренней (12.58) точках соответственно. Поставленная задача решена.

Заметим, что в выражении для энергии (12.67) коэффициенты D_2 и $\widetilde{D}_2$ выпадают.

Чтобы убедиться в правильности выражения энергии (12.67), рассмотрим три примера.

Для однородного шара радиусом R:

$$\begin{gathered} D_0 = M,\ D_1 = D_2 = \ldots = 0, \\ \widetilde{D}_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{M}{R},\ \widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_2 = \ldots = 0, \end{gathered} \tag{12.68}$$

с учётом которых (12.67) сразу даёт известный результат (1.64).

В примерах *для однородного сфероида случаи сжатого* ($a_3 \leqslant a_1$) *и вытянутого* ($a_3 \geqslant a_1$) следует различать. Для этих тел коэффициенты в разложении внешнего потенциала будут таковы:

$$D_0 = M,\ D_{2n+1} = 0,\ D_{2n} = \begin{cases} 3M\dfrac{(-1)^n\left(a_1^2 - a_3^2\right)^n}{(2n+1)(2n+3)}, & a_1 \geqslant a_3; \\ 3M\dfrac{\left(a_3^2 - a_1^2\right)^n}{(2n+1)(2n+3)}, & a_1 \leqslant a_3, \end{cases} \tag{12.69}$$

а для внутреннего потенциала нас интересует только коэффициент

$$\widetilde{D}_0 = \pi\rho\int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\dfrac{\sin^2\theta}{a_1^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{a_3^2}} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{a_1}\dfrac{\arcsin e}{e}, & a_1 \geqslant a_3; \\ \dfrac{3}{4}\dfrac{M}{a_3}\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1+e}{1-e}, & a_1 \leqslant a_3, \end{cases} \tag{12.70}$$

так как $\widetilde{D}_2$ выпадает (см. соотношение (12.66)), а остальные — в силу симметрии фигуры — просто равны нулю. Подставляя D_0 и $\widetilde{D}_0$ из (12.69) и (12.70) в ряд (12.67), для потенциальной энергии сжатого и вытянутого сфероидов действительно получим известные выражения (1.66).

12.6.2. Другие представления потенциальной энергии в виде особых рядов

Но является ли представление потенциальной энергии в виде ряда (12.67) единственно возможным? Вопрос этот важный и для ответа на него надо взглянуть более широко на то, что мы делали до сих пор.

Прежде всего, если задана форма однородного гравитирующего тела, то, пользуясь известными формулами, можно всегда найти два комплекта коэффициентов D_n и $\widetilde{D}_n$. Поэтому весьма интересна обратная постановка вопроса: всегда ли по заданным коэффициентам можно восстановить форму однородного тела? Исключая особые случаи, на него, насколько мы знаем, можно ответить положительно. Известна, например, *теорема Дива* [14] о том, что квадратичный внутренний потенциал может иметь только эллипсоид — и никакая другая однородная ограниченная фигура. Сходное положение существует и для внешних потенциалов. Поэтому знание обоих комплектов коэффициентов D_n и $\widetilde{D}_n$ содержит в себе даже излишнюю, а по сути — двойную информацию о самом теле. Это и наводит на мысль, что потенциальную энергию однородного тела можно представить через D_n и $\widetilde{D}_n$ не одним, как в предыдущем разделе, способом, а многими. Разумеется, только некоторые из этих формул могут быть удобны на практике.

Убедимся в этом на конкретном примере и покажем, что действительно есть более удобные аналоги формулы (12.67). Пусть задано однородное тело T с круговой симметрией. Полагая размеры тела ограниченными, окружим его сферой с однородной плотностью (одинаковой с плотностью тела T) и радиусом R (см. § 14.6 рис. 122). Таким образом, первоначально заданное тело дополнено до шара оболочкой той же плотности. Тогда потенциал исходного тела $\widetilde{\varphi}$ на внутреннюю точку $\boldsymbol{r}$ есть разность между внутренним потенциалом шара (6.36) и потенциалом упомянутой оболочки

$$\widetilde{\varphi}_{\text{об}}(\boldsymbol{r}) = G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{A}_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{12.71}$$

где

$$\widetilde{A}_n = \rho\iiint\limits_{T_{\text{об}}}\frac{P_n(\cos\theta')}{(r')^{n+1}}dV', \tag{12.72}$$

т. е.

$$\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{r}) = \widetilde{\varphi}_{\text{шара}}(\boldsymbol{r}) - \widetilde{\varphi}_{\text{об}}(\boldsymbol{r})\,. \tag{12.73}$$

В силу (12.73) имеет место равенство

$$\rho\sum_{n=0}^{\infty}\left[r^n P_n(\cos\theta)\iiint\limits_{T_{\text{ш}}}\frac{P_n(\cos\theta')}{(r')^{n+1}}dV'\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{A}_n + \widetilde{D}_n\right) r^n P_n(\cos\theta), \tag{12.74}$$

где

$$\widetilde{D}_n = \rho\iiint\limits_{T}\frac{P_n(\cos\theta')}{(r')^{n+1}}dV',$$

из которого, с учётом легко доказываемого соотношения

$$\begin{aligned}\rho\sum_{n=0}^{\infty}\left[r^n P_n(\cos\theta)\iiint\limits_{T_{\text{ш}}}\frac{P_n(\cos\theta')}{(r')^{n+1}}dV'\right] = \\ = 2\pi\rho\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\frac{P_0(\cos\theta')}{r'}(r')^2\sin\theta' dr' d\theta' = 2\pi\rho R^2,\end{aligned} \tag{12.75}$$

получим

$$G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{A}_n r^n P_n(\cos\theta) = 2\pi G\rho R^2 - G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{12.76}$$

Подставляя теперь (6.36) и (12.76) в (12.73), находим потенциал тела T во внутренней точке[8] r':

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(r',\theta') = 2\pi G\rho\left(R^2 - \frac{r'^2}{3}\right) + G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}_n (r')^n P_n(\cos\theta') - 2\pi G\rho R^2 = \\ = G\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}_n (r')^n P_n(\cos\theta') - \frac{2}{3}\pi G\rho r'^2,\end{aligned} \tag{12.77}$$

с учётом которого формула (8.3) даёт:

[8] Выражение (12.77) следует сравнить с ранее полученным (12.57). Появление в (12.77) дополнительного члена $\left(\frac{2}{3}\pi G\rho r'^2\right)$ объясняется тем, что начало системы отсчёта находится теперь внутри самого тела.

$$\begin{gathered}W=-\frac{1}{2}\rho\iiint\limits_{T}\widetilde{\varphi}\left(r',\theta'\right)dV'=\\=-\frac{G}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}_n\left[\iiint\limits_{T}\left(r'\right)^n P_n\left(\cos\theta'\right)dV'\right]+\frac{\pi G}{3}\rho^2\iiint\limits_{T}r'^2dV'.\end{gathered}\tag{12.78}$$

Последний интеграл в правой части (12.78) определяет *момент инерции однородного тела относительно начала координат*, который мы обозначим через

$$J=\rho\iiint\limits_{T}r'^2dV'.\tag{12.79}$$

В первом же члене правой части выражения (12.78) в квадратных скобках стоит коэффициент D_n из (1.19).

С учётом сказанного, *потенциальную энергию однородного тела T можно теперь представить в виде ряда*

$$W=-\frac{G}{2}\sum_{n=0}^{\infty}D_n\widetilde{D}_n+\frac{1}{3}\pi G\rho J.\tag{12.80}$$

Подчеркнём: это выражение даже более удобно, чем выражение (12.67). Действительно, если в (12.67) члены суммы при $n<2$ и при $n>2$ имеют разные знаки и при $n=2$ член вообще выпадает (см. соотношение (12.66)), то в (12.80) все члены ряда будут иметь одинаковый знак. А это немаловажно, когда рассматривается вопрос о суммировании ряда и получении энергии в конечном виде.

Кроме того, комбинируя тем или иным способом ряды (12.67) и (12.80), можно получить и другие выражения для потенциальной энергии тел вращения. Умножим, например, (12.80) на 2 и вычтем ряд (12.67). Получим ещё одну удобную для практического применения формулу:

$$W=-\frac{G}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\,D_n\widetilde{D}_n+\frac{2}{3}\pi G\rho J.\tag{12.81}$$

От характера задачи зависит, какую конкретно формулу из полученных здесь лучше всего использовать.

12.6.3. О сходимости особых рядов для потенциальной энергии

Вопрос о сходимости тех или иных рядов всегда относился к числу трудных и важных. Так и здесь. Сходятся ли ряды (12.62), (12.67) или (12.80) и (12.81), которыми представлена потенциальная энергия однородных тел. Для сравнения уместно напомнить столь же актуальную проблему в математической физике о сходимости рядов (1.17) и (12.57), которыми представлены внешний и внутренний потенциалы гравитирующего тела. Почти всегда вопрос о сходимости рядов требует нетривиальных и тонких рассуждений. В нашем же случае удивительно именно то, что *ответ на вопрос о сходимости ряда для потенциальной энергии даётся вообще без выяснения того, сходятся ли ряды для потенциалов тела.*

Теорема 1. *Независимо от того, сходятся или расходятся где-либо ряды для ньютоновских потенциалов первого и второго тела, сам ряд (12.62) всегда сходится и представляет собой конечную физическую величину — гравитационную энергию $W_{вз}$.*

Доказательство.

Увеличим в λ раз все размеры внешнего тела, а новые значения энергии и коэффициентов в разложениях потенциалов обозначим штрихами. Тогда, очевидно,

$$\widetilde{D}'_n = \lambda^{2-n}\widetilde{D}_n, \tag{12.82}$$

и энергия будет равна

$$W' = -G\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n \widetilde{D}_n}{\lambda^n}. \tag{12.83}$$

Степенной ряд Лорана при достаточно большом λ конечно же *сходится*. Тогда, по второй теореме Абеля, которая гласит: «*сумма степенного ряда есть непрерывная функция внутри радиуса сходимости*», мы заключаем, что и при $\lambda \to 1$ ряд (12.83) обязательно будет сходиться и давать правильное значение $W_{\text{вз}}$. ■

Замечание 1. Поскольку вывод выражений для рядов (12.67), (12.80) и (12.81) был основан на всё той же формуле (12.62) для исходного ряда, полученное заключение о сходимости последнего переносится и на все упомянутые ряды для полной гравитационной энергии тела.

§ 12.7. Обобщение третьего метода. Потенциальная энергия тел, не имеющих осевой симметрии

В случае однородных тел, *не имеющих осевой симметрии*, результаты получаются путём обобщения разработанного выше метода. Прежде всего, в отсутствие азимутальной симметрии тела (которое может быть и неоднородным) ряды Лапласа для внешнего (1.17) и внутреннего (12.57) потенциалов заменяются следующими:

$$\varphi_{\text{внешн}}(r,\theta,\lambda) = G\sum_{0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}, \tag{12.84}$$

$$\varphi_{\text{внутр}}(r,\theta,\lambda) = G\sum_{0}^{\infty} r^n \widetilde{Y}_n(\theta,\lambda), \tag{12.85}$$

где в сферические функции n-го порядка («игреки Лапласа») внешнего потенциала

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right] \tag{12.86}$$

входят гармонические коэффициенты

$$\begin{gathered} C_{n0} = \iiint\limits_T \rho(\mathbf{r}')\,P_n(\cos\theta')\,r'^n dV', \\ \left\{\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right\} = 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\iiint\limits_T r'^n \rho(\mathbf{r}')\,P_n^k(\cos\theta')\left\{\begin{matrix} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{matrix}\right\} dV',\ k \geqslant 1. \end{gathered} \tag{12.87}$$

Аналогично, для внутреннего потенциала

$$\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[\widetilde{C}_{nk}\cos k\lambda + \widetilde{S}_{nk}\sin k\lambda\right], \tag{12.88}$$

с гармоническими коэффициентами

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_{n0} = \iiint\limits_T \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{r'^{n+1}} P_n(\cos\theta')\,dV', \\
\left\{ \begin{matrix} \widetilde{C}_{nk} \\ \widetilde{S}_{nk} \end{matrix} \right\} = 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!} \iiint\limits_T \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{r'^{n+1}} P_n^k(\cos\theta') \left\{ \begin{matrix} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{matrix} \right\} dV', \ k \geqslant 1.
\end{gathered} \tag{12.89}$$

Переходя к *однородным* телам, заметим, что если начало системы отсчёта находится внутри тела, то в выражении для внутреннего потенциала, как и в случае осесимметричного тела (12.59), появится дополнительный член, пропорциональный r^2.

Рассуждая далее тем же способом, как и в § 12.6, вместо формулы (12.62) приходим к более общему выражению для взаимной энергии тел:

$$W_{\text{вз}} = -G\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)\cdot\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda). \tag{12.90}$$

В итоге, *потенциальная энергия однородных тел, не имеющих круговой симметрии*, вместо (12.67) и (12.80) будет выражаться рядами, состоящими из более общих коэффициентов:

$$W = -\frac{1}{5}G\sum_{n=0}^{\infty}(2-n)\,Y_n(\theta,\lambda)\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda), \tag{12.91}$$

$$W = -\frac{G}{2}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)\,\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda) + \frac{1}{3}\pi G\rho J. \tag{12.92}$$

Этими формулами и решается поставленная задача для энергии тела без азимутальной симметрии.

Задача 12.6. *Найти с помощью ряда* (12.91) *потенциальную энергию однородного трёхосного эллипсоида.*

Решение. Фигура эллипсоида симметрична относительно трёх плоскостей, что заметно упрощает задачу. В этом случае от ряда (12.91) остаётся только первый член

$$W = -\frac{2}{5}G\,C_{00}\widetilde{C}_{00}. \tag{12.93}$$

Подставляя сюда $\widetilde{C}_{00} = \pi\rho I$, где I из (1.39), и $C_{00} = M$, получим известный результат (1.65). ▼

§ 12.8. Примеры применения третьего метода. Потенциальная энергия однородной асимметричной линзы

Рассмотрим одно из тел с круговой симметрией — однородную асимметричную (относительно главной плоскости) линзу (рис. 101), представляющую собой два сложенных сегмента с одинаковыми основаниями, но с разной, вообще говоря, кривизной выпуклых поверхностей. Асимметрия линзы становится особенно явной в том предельном случае

$$a = 0, \ h = 2R, \ h_1 = 2R_1, \tag{12.94}$$

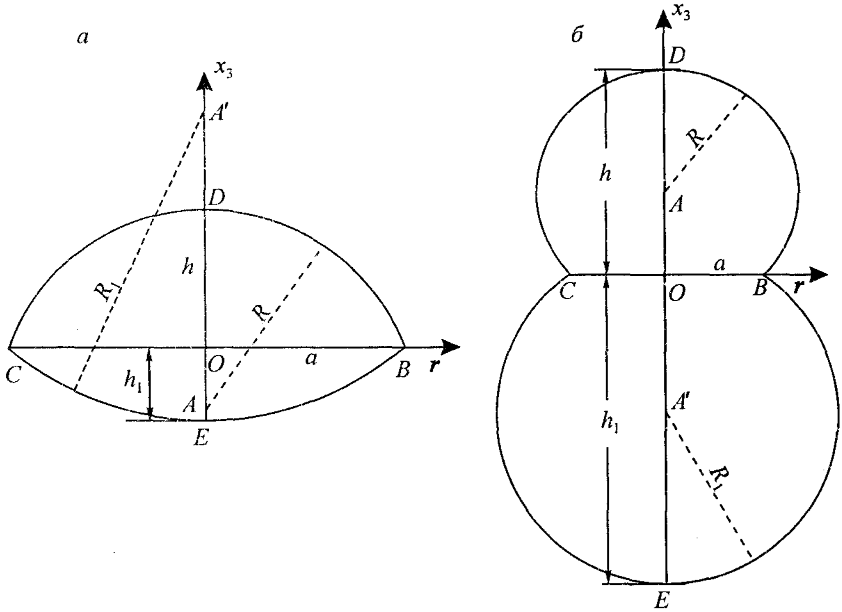


Рис. 101. Асимметричная линза (*а*) и один из её вариантов (*б*)

когда она превращается в конфигурацию из двух касающихся сфер с разными радиусами R и R_1. Имеют место соотношения

$$(R-h)^2+a^2=R^2;\ (R_1-h_1)^2+a^2=R_1^2. \tag{12.95}$$

При

$$R=R_1,\ h=h_1 \tag{12.96}$$

линза становится симметричной, а при дальнейшем вырождении $a=h=R$ она превращается в одиночный шар. Но сразу заметим, что возможен и другой, более сложный переход к плосковыпуклой линзе, т. е. к одиночному шаровому сегменту (об этом см. ниже раздел 12.9.4).

Вначале получим потенциалы на оси Ox_3 асимметричной линзы. Поместив начало цилиндрической системы координат в точку O, имеем дело с интегралами типа

$$\varphi(x_3)=2\pi G\rho\int\limits_0^h dx_3'\int\limits_0^{r_m}\frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2+(x_3-x_3')^2}}. \tag{12.97}$$

После многочисленных преобразований находим, соответственно, внешний и внутренний потенциалы линзы на её оси симметрии:

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{внешн}}(x_3)=\frac{2\pi G\rho}{3}\left[-\frac{R^3+\left(a^2+x_3^2\right)^{3/2}}{h-R-x_3}+\frac{R_1^3-\left(a^2+x_3^2\right)^{3/2}}{h_1-R_1+x_3}+\right.\\ \left.+(R+R_1-h-h_1)x_3+R_1^2-R^2+R_1h_1-Rh+\frac{h^2-h_1^2}{2}\right],\end{gathered} \tag{12.98}$$

$$\varphi_{\text{внутр}}(x_3) = \frac{2\pi G\rho}{3}\left[\frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} + \frac{R_1^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + x_3} - \right. \\ \left. -x_3^2 - (R - R_1 + h_1 - h)\,x_3 + R^2 + R_1^2 + Rh + R_1 h_1 - \frac{h^2 + h_1^2}{2}\right]. \tag{12.99}$$

В этих формулах возможны, конечно, переходы не только к симметричной, но и к плосковыпуклой линзе. Кроме того, при условии (12.96) и первого соотношения из (12.95) можно в (12.98) и (12.99) прямо перейти к потенциалам полного однородного шара.

З а д а ч а 12.7. *Выполните указанные выше переходы в формулах для потенциала асимметричной линзы.*

Решение. Они даны ниже: для симметричной линзы в формулах (12.147); для плосковыпуклой (шаровой сегмент) — в (12.151) и в (12.152). Для шара же всё просто (тем не менее, проверьте!). ▼

Момент инерции однородной асимметричной линзы относительно начала координат равен

$$J = \frac{\pi}{3}\rho\left[h^3\left(2R^2 - Rh + \frac{h^2}{5}\right) + h_1^3\left(2R_1^2 - R_1 h_1 + \frac{h_1^2}{5}\right)\right]. \tag{12.100}$$

В случае внешнего потенциала имеем дело с разложением по обратным степеням x_3 выражения:

$$\frac{R_1^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + x_3} - \frac{R^3 + \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x_3^{-n-1}, \tag{12.101}$$

коэффициенты которого выражаются через интеграл в комплексной плоскости

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{R_1^3 - \left(a^2 + t^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + t} - \frac{R^3 + \left(a^2 + t^2\right)^{3/2}}{h - R - t}\right] t^n dt. \tag{12.102}$$

При разложении внутреннего потенциала будем иметь дело со степенным рядом

$$\frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} + \frac{R_1^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + x_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_n x_3^n, \tag{12.103}$$

коэффициенты которого равны

$$\widetilde{P}_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{R^3 - \left(a^2 + t^2\right)^{3/2}}{h - R - t} + \frac{R_1^3 - \left(a^2 + t^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + t}\right] t^{-n-1} dt. \tag{12.104}$$

Тогда для коэффициентов D_n из формулы (12.80) имеем соотношение

$$D_n = \frac{2}{3}\pi\rho P_n, \ n \geqslant 0, \tag{12.105}$$

так как в (12.98) мы отбрасываем все оставшиеся члены (как пропорциональные x_3, так и не зависящие от этой переменной).

Что касается коэффициентов $\widetilde{D}_n$, то, согласно (12.99) и дополнительному условию (12.59), находим для них:

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_0 &= \frac{2}{3}\pi\rho\left[\widetilde{P}_0 + R^2 + R_1^2 + Rh + R_1h_1 - \frac{h^2+h_1^2}{2}\right],\\
\widetilde{D}_1 &= \frac{2}{3}\pi\rho\left[\widetilde{P}_1 + R_1 - R + h - h_1\right],\\
\widetilde{D}_n &= \frac{2}{3}\pi\rho\widetilde{P}_n,\ n \geqslant 2.
\end{aligned} \tag{12.106}$$

Выражение для гравитационной энергии (12.80) принимает тогда вид:

$$\begin{aligned}
W = &-\frac{2}{9}\pi^2G\rho^2\left\{S + P_0\left(R^2 + R_1^2 + Rh + R_1h_1 - \frac{h^2+h_1^2}{2}\right) + \right.\\
&\left. + P_1\left(R_1 - R + h - h_1\right)\right\} + \frac{\pi^2G\rho^2}{9}\left[h^3\left(2R^2 - Rh + \frac{h^2}{5}\right) + \right.\\
&\left. + h_1^3\left(2R_1^2 - R_1h_1 + \frac{h_1^2}{5}\right)\right],
\end{aligned} \tag{12.107}$$

где мы учли конкретный момент инерции из (12.100); входящая сюда величина S равна

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\widetilde{P}_n. \tag{12.108}$$

Эту величину S нам и предстоит теперь найти. Подставим сюда P_n из (12.102) и $\widetilde{P}_n$ из (12.104), предварительно заменив в (12.104) t на t_1. Имеем

$$\begin{aligned}
S = &-\frac{1}{4\pi^2}\oint\!\!\oint\left[\frac{R_1^3 - \left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + t} - \frac{R^3 + \left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h - R - t}\right]\times\\
&\times\left[\frac{R^3 - \left(a^2+t_1^2\right)^{3/2}}{h - R - t_1} + \frac{R_1^3 - \left(a^2+t_1^2\right)^{3/2}}{h_1 - R_1 + t_1}\right]\times\widetilde{S}\,dt\,dt_1,
\end{aligned} \tag{12.109}$$

где, в свою очередь, мы обозначили

$$\widetilde{S} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{t_1^{n+1}}. \tag{12.110}$$

Для нахождения последней суммы применим следующий приём. Модифицируем её вначале следующим образом:

$$\widetilde{S}' = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\frac{t^n}{t_1^{n+1}},\quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{12.111}$$

Очевидно, сумма (12.111) равна

$$\widetilde{S}' = \frac{1}{t_1 - \mu t}. \tag{12.112}$$

Теперь в результате предельного перехода будем иметь

$$\lim_{\mu\to 1}\oint\frac{dt_1}{t_1-\mu t}=-2\pi i, \tag{12.113}$$

так что вспомогательная сумма S из (12.109) сводится к одному только интегралу по замкнутому контуру в комплексной области (рис. 102), равному

$$\begin{gathered}2\pi i S^{*}=\oint\left\{\left[\frac{R_1^3-\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h_1-R_1+t}-\frac{R^3+\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h-R-t}\right]\times\right.\\ \left.\times\left[\frac{R^3-\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h-R-t}+\frac{R_1^3-\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{h_1-R_1+t}\right]\right\}dt.\end{gathered} \tag{12.114}$$

Для вычисления интеграла в правой части формулы (12.114) разобьём указанный на рис. 102 контур интегрирования в комплексной плоскости на правую и левую полуокружности. Тогда, очевидно, по правой полуокружности имеем следующие интегралы:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\text{пр}}\frac{R_1^6-2R_1^3\left(a^2+t^2\right)^{3/2}+\left(a^2+t^2\right)^3}{\left(h_1-R_1+t\right)^2}dt-\\ -\int\limits_{\text{пр}}\frac{R^6+\left(a^2+t^2\right)^3}{\left(h-R-t\right)^2}dt+\\ +2\int\limits_{\text{пр}}\frac{\left(a^2+t^2\right)^3-R_1^3\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{\left(h-R-t\right)\left(h_1-R_1+t\right)}dt.\end{gathered} \tag{12.115}$$

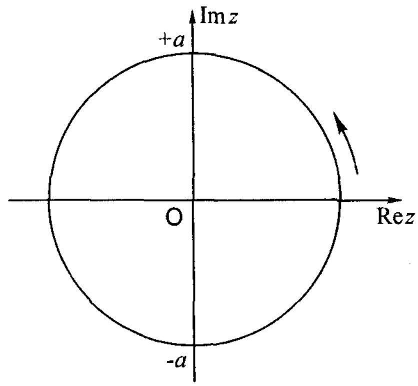


Рис. 102. Контур интегрирования в комплексной плоскости для интеграла (12.114)

Теперь, чтобы получить интегралы по левой полуокружности контура, в *первой* квадратной скобке (12.114), которая отвечает за *внешний потенциал*, следует изменить знак перед членом $\left(a^2+t^2\right)^{3/2}$; в итоге получим следующую совокупность из трёх весьма громоздких интегралов:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\text{л}}\frac{R_1^6-\left(a^2+t^2\right)^3}{\left(h_1-R_1+t\right)^2}dt-\int\limits_{\text{л}}\frac{R^6-2R^3\left(a^2+t^2\right)^{3/2}+\left(a^2+t^2\right)^3}{\left(h-R-t\right)^2}dt+\\ +2\int\limits_{\text{л}}\frac{R^3\left(a^2+t^2\right)^{3/2}-\left(a^2+t^2\right)^3}{\left(h-R-t\right)\left(h_1-R_1+t\right)}dt.\end{gathered} \tag{12.116}$$

Но важно заметить, что интегрирование по левой и по правой полуокружности можно заменить во всех выражениях одномерным интегрированием по вертикальному диаметру исходного контура:

$$\int\limits_{\text{пр}}[\ldots]\,dt\to\int\limits_{-ai}^{+ai}[\ldots]\,dt;\quad\int\limits_{\text{л}}[\ldots]\,dt\to\int\limits_{+ai}^{-ai}[\ldots]\,dt. \tag{12.117}$$

Согласно указанным в (12.117) преобразованиям, любой интеграл из (12.116) после изменения знака будет иметь такие же пределы интегрирования, как и каждый из интегралов в (12.115). Учитывая это и приводя подобные члены, вместо (12.114) после преобразований получим для искомой величины S:

$$\begin{gathered}2\pi i S = R_1^6 \oint \frac{dt}{(h_1 - R_1 + t)^2} - R^6 \oint \frac{dt}{(h - R - t)^2} - \\ -2R_1^3 \int\limits_{\text{пр}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{(h_1 - R_1 + t)^2} dt + 2 \int\limits_{\text{пр}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3}}{(h_1 - R_1 + t)^2} dt + \\ +2 \int\limits_{\text{пр}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3}}{(h - R - t)^2} dt + 4 \int\limits_{\text{пр}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3} dt}{(h - R - t)(h_1 - R_1 + t)} - \\ -2\left(R^3 + R_1^3\right) \int\limits_{\text{пр}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2} dt}{(h - R - t)(h_1 - R_1 + t)} + 2R^3 \int\limits_{\text{л}} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{(h - R - t)^2} dt.\end{gathered} \tag{12.118}$$

Два первых интеграла в выражении (12.118) равны, разумеется, нулю, как интегралы от полного дифференциала по замкнутому контуру.

Шесть оставшихся в (12.118) интегралов после несложных, но весьма громоздких выкладок, удаётся представить в следующем виде:

$$2R_1^3 \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{(h_1 - R_1 + t)^2} dt = 3\pi i R_1^3 h_1^2, \tag{12.119}$$

$$2 \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3} dt}{(h_1 - R_1 + t)^2} = 8i \left[3R_1^4 a - R_1^2 a^3 - \frac{2}{5} a^5 - 3R_1^4 (R_1 - h_1) \operatorname{arctg} \frac{a}{R_1 - h_1}\right], \tag{12.120}$$

$$2 \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3} dt}{(h - R - t)^2} = 8i \left[3R^4 a - R^2 a^3 - \frac{2}{5} a^5 - 3R^4 (R - h) \operatorname{arctg} \frac{a}{R - h}\right], \tag{12.121}$$

$$\begin{gathered}4 \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3} dt}{(h - R - t)(h_1 - R_1 + t)} = -\frac{64}{15} a^5 i + \frac{8i}{h + h_1 - R - R_1} \times \\ \times \left[(R - h)\left(\frac{2R^2 a^3}{3} + R^4 a\right) - R^6 \operatorname{arctg} \frac{a}{R - h} + \right. \\ \left. + (R_1 - h_1) R_1^2 a \left(R_1^2 + \frac{2a^2}{3}\right) - R_1^6 \operatorname{arctg} \frac{a}{R_1 - h_1}\right],\end{gathered} \tag{12.122}$$

$$\begin{gathered}2\left(R^3 + R_1^3\right) \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2} dt}{(h - R - t)(h_1 - R_1 + t)} = \\ = -\frac{i\pi\left(R^3 + R_1^3\right)}{h + h_1 - R - R_1} \left[h^2 (3R - h) + h_1^2 (3R_1 - h_1)\right],\end{gathered} \tag{12.123}$$

$$2R^3 \int\limits_{-ai}^{+ai} \frac{\left(a^2+t^2\right)^{3/2}}{(h-R-t)^2} dt = 3\pi i R^3 h^2. \tag{12.124}$$

Подставляя все найденные интегралы в общее выражение (12.118) и сокращая на i, имеем:

$$\begin{gathered}
2\pi S = -3\pi\left(R^3h^2 + R_1^3h_1^2\right) - \frac{\pi\left(R^3+R_1^3\right)}{R+R_1-h-h_1}\left[h^2(3R-h)+\right. \\
\left.+h_1^2(3R_1-h_1)\right] - \frac{32}{3}a^5 - 8a^3\left(R^2+R_1^2\right) - \frac{8a}{R+R_1-h-h_1}\times \\
\times\left[R^2(R-h)\left(R^2+\frac{2}{3}a^2\right) + R_1^2(R_1-h_1)\left(R_1^2+\frac{2}{3}a^2\right)\right] + \\
+24a\left(R^4+R_1^4\right) + 8R^4\left[\frac{R^2}{R+R_1-h-h_1} - 3(R-h)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h} + \\
+8R_1^4\left[\frac{R_1^2}{R+R_1-h-h_1} - 3(R_1-h_1)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}.
\end{gathered} \tag{12.125}$$

Итак, величина S найдена.

Этого, однако, ещё не достаточно для нахождения W, так как, согласно формуле (12.107), требуется знать и коэффициенты P_0 и P_1. Их мы получим, проведя интегрирование в формуле (12.102):

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{2}\left[a^2(h+h_1) + Rh^2 + R_1h_1^2\right], \\
P_1 &= \frac{1}{2}\left[h_1(R_1-h_1)\left(a^2+R_1h_1\right) - h(R-h)\left(a^2+Rh\right)\right].
\end{aligned} \tag{12.126}$$

Подставляя теперь (12.125) и (12.126) в выражение (12.107), после многих тождественных преобразований в итоге получим искомое выражение для *гравитационной энергии однородной асимметричной линзы:*

$$\begin{gathered}
W_{\text{линзы}} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\left\{\pi\left[a^2(h+h_1)+Rh^2+R_1h_1^2\right]\times\right. \\
\times\left[R^2+R_1^2+Rh+R_1h_1-\frac{h^2+h_1^2}{2}\right] + \pi\left[h_1(R_1-h_1)\times\right. \\
\left.\times\left(a^2+R_1h_1\right) - h(R-h)\left(a^2+Rh\right)\right]\left[h-h_1+R_1-R\right] - \\
-\pi\left[h^3\left(2R^2-Rh+\frac{h^2}{5}\right) + h_1^3\left(2R_1^2-R_1h_1+\frac{h_1^2}{5}\right)\right] - \\
-3\pi\left(R^3h^2+R_1^3h_1^2\right) - \frac{\pi\left(R^3+R_1^3\right)}{R+R_1-h-h_1}\left[h^2(3R-h)+\right. \\
\left.+h_1^2(3R_1-h_1)\right] - \frac{32}{3}a^5 - 8a^3\left(R^2+R_1^2\right) - \\
-\frac{8a}{R+R_1-h-h_1}\left[R^2(R-h)\left(R^2+\frac{2}{3}a^2\right) + R_1^2(R_1-h_1)\times\right.
\end{gathered}$$

$$\times\left(R_1^2+\frac{2}{3}a^2\right)\Bigg]+24a\left(R^4+R_1^4\right)+8R^4\left[\frac{R^2}{R+R_1-h-h_1}-\right.$$
$$\left.-3\left(R-h\right)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}+8R_1^4\left[\frac{R_1^2}{R+R_1-h-h_1}-3\left(R_1-h_1\right)\right]\times \tag{12.127}$$
$$\left.\times\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}\right\}.$$

Замечание 2. Если верхняя из половинок линзы переходит за полусферу, то

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}\ \text{заменяется на}\ 2\operatorname{arctg}\frac{h}{a}. \tag{12.128}$$

Аналогично и для нижней части линзы.

Удивительно, что гравитационная энергия такого сложного тела, какой является асимметричная линза, выражается через элементарные функции. Формула (12.127) является основным в данной задаче и далее из неё будут получены различные частные случаи.

§ 12.9. Частные случаи однородной асимметричной линзы: сегменты, шары и лунки

Асимметричная линза может превращаться в разные геометрические конфигурации — в симметричную линзу, в шаровой сегмент, наконец, в шар или даже в «снежную бабу» из двух разных шаров. Возможно и замечательное её превращение в лунку. С точки зрения гравитационной энергии, здесь возникает много интересных частных случаев выражения (12.127).

12.9.1. Касающиеся шары

В предельном случае (12.95) формула (12.127) даёт полную потенциальную энергию двух касающихся однородных шаров

$$W=-\frac{16}{45}\pi^2G\rho^2\left\{3\left(R^5+R_1^5\right)+5\frac{R^3R_1^3}{R+R_1}\right\}. \tag{12.129}$$

При $R=R_1$ получим отсюда полную потенциальную энергию двух одинаковых касающихся шаров (см. формулу (12.149)).

Задача 12.8. *Получите из выражения* (12.127) *формулу* (12.129) *с учётом равенств* (*см.* (12.128))

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}=\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}=\pi. \tag{12.130}$$

Любопытно отметить, что потенциальную энергию двух касающихся шаров можно получить и прямо по правилу (8.23), опираясь на результат (1.64) и учитывая очевидное выражение для их взаимной потенциальной энергии

$$W_{\text{вз}}=-\frac{GM_1M_2}{R_1+R_2}. \tag{12.131}$$

Убедитесь в этом, и тогда совпадение результатов даст ценную проверку сложной формулы (12.127).

12.9.2. Предельный переход от однородной асимметричной линзы к шару

Весьма нетривиальным является предельный переход от несимметричной линзы к одиночному шару, что служит ещё одной строгой проверкой выражения (12.127). Так, тонкий анализ необходим для группы членов с расходимостями.

Прежде всего

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{R-h} = 2\operatorname{arctg}\frac{h}{a}, \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}.$$

$$h^2 + a^2 = 2Rh, h_1^2 + a^2 = 2R_1h_1.$$

При предельном переходе к шару (см. рис. 103)

$$\left.\begin{aligned} &R_1 \to R \\ &h_1 \to 2R - h = \frac{a^2}{h} \\ &\alpha_1 + \alpha \to \pi \end{aligned}\right\}.$$

Существенно теперь заметить, что далее величины R, h, a будем считать постоянными, а величины R_1 и h_1 — переменными. Рассматриваем R_1 как функцию от h_1:

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(h_1 + \frac{a^2}{h_1}\right); \quad \frac{dR_1}{dh_1} - 1 = \frac{-R}{2R-h}. \tag{12.132}$$

Действительно,

$$\frac{dR_1}{dh_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{h_1^2}\right) \to \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right) = \\ = \frac{h\,(R-h)}{a^2} = \frac{R-h}{h_1} = \frac{R-h}{2R-h}.$$

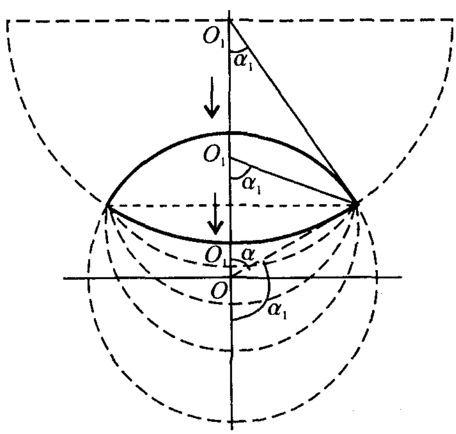


Рис. 103. Предельный переход от асимметричной линзы к шару. Точка O_1 стремится совпасть с точкой O – центром шара

Выполняя асимптотический переход к одиночному шару, сейчас нам предстоит преобразовать сложную общую формулу для гравитационной энергии однородной асимметричной линзы:

$$\begin{aligned} W_{\text{линзы}} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\Big\{&\pi\left[a^2\left(h+h_1\right) + Rh^2 + R_1h_1^2\right]\Big[R^2 + R_1^2 + Rh + R_1h_1 - \\ &-\frac{h^2+h_1^2}{2}\Big] + \pi\left[h_1\left(R_1-h_1\right)\left(a^2+R_1h_1\right) - h\left(R-h\right)\left(a^2+Rh\right)\right] \times \\ &\times\left[h - h_1 + R_1 - R\right] - \pi\left[h^3\left(2R^2 - Rh + \frac{h^2}{5}\right) + h_1^3\left(2R_1^2 - R_1h_1 + \frac{h_1^2}{5}\right)\right] - \\ &-3\pi\left(R^3h^2 + R_1^3h_1^2\right) + I_1 - \frac{32}{3}a^5 - 8a^3\left(R^2+R_1^2\right) + I_2 + 24a\left(R^4+R_1^4\right) + \\ &+8R^4\left[I_3 - 3\left(R-h\right)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h} + 8R_1^4\left[I_4 - 3\left(R_1-h_1\right)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}\Big\}, \end{aligned} \tag{12.133}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\pi\left(R^3+R_1^3\right)}{R+R_1-h-h_1}\left[h^2(3R-h)+h_1^2(3R_1-h_1)\right],\\
I_2 &= -\frac{8a}{R+R_1-h-h_1}\left[R^2(R-h)\left(R^2+\frac{2}{3}a^2\right)+R_1^2(R_1-h_1)\left(R_1^2+\frac{2}{3}a^2\right)\right],\\
I_3 &= \frac{R^2}{R+R_1-h-h_1},\quad I_4=\frac{R_1^2}{R+R_1-h-h_1}.
\end{aligned} \tag{12.134}$$

Рассмотрим вначале члены с π, в которых не возникает неопределённости:

$$\begin{aligned}
&h+h_1=2R,\\
&h^2+h_1^2=2\left(2R^2-a^2\right),\\
&h^3+h_1^3=2R\left(4R^2-3a^2\right),\\
&h^4+h_1^4=2\left(8R^4-8R^2a^2+a^4\right),\\
&h^5+h_1^5=2R\left(16R^4-20R^2a^2+5a^4\right),
\end{aligned} \tag{12.135}$$

тогда в выражении для $W_{\text{линзы}}$ первая строка равна

$$4\pi R^3\left(2R^2+a^2\right), \tag{12.136}$$

вторая строка

$$4\pi R\left(R^2-a^2\right)2R^2=8\pi R^3\left(R^2-a^2\right), \tag{12.137}$$

третья строка

$$-\frac{4}{5}\pi R^3\left(8R^2-5a^2\right)-6\pi R^3\left(2R^2-a^2\right), \tag{12.138}$$

или в сумме

$$A=6\pi R^3\left(a^2-\frac{2}{5}R^2\right). \tag{12.139}$$

Член I_2 имеет неопределённость типа $\frac{0}{0}$; раскрываем её:

$$\begin{aligned}
&-8a\frac{-4R(R-h)\left(R^2+\frac{1}{3}a^2\right)\frac{R-h}{2R-h}+R^2\left(R^2+\frac{2}{3}a^2\right)\left(\frac{dR_1}{dh_1}-1\right)}{\frac{dR_1}{dh_1}-1}=\\
&=-8a\left(5R^4-2R^2a^2-\frac{4}{3}a^4\right).
\end{aligned} \tag{12.140}$$

Итак, I_2 даёт

$$I_2=\frac{32}{3}a^5+16R^2a^3-40R^4a. \tag{12.141}$$

Далее, объединяем члены I_1, I_3 и I_4:

$$Q=\frac{-\pi\left(R^3+R_1^3\right)\left[h^2(3R-h)+h_1^2(3R_1-h_1)\right]+8R^6\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}+8R_1^6\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}}{R+R_1-h-h_1}. \tag{12.142}$$

При предельном переходе к шару и здесь имеем неопределённость $\frac{0}{0}$; раскрывая её и учитывая, что

$$\left.\frac{d\alpha_1}{dh_1}\right|_{\text{шар}} = \frac{d}{dh_1}\operatorname{arctg}\left.\frac{a}{R_1-h_1}\right|_{\text{шар}} = \frac{a}{R}\cdot\frac{1}{2R-h},$$

находим

$$Q = 12\pi R^4(R-h) + 6\pi R^3(2R-h)^2 - 48R^4(R-h)(\pi-\alpha) - 8R^4 a. \tag{12.143}$$

Сумма 4-й и 5-й строк в выражении $W_{\text{линзы}}$ равна

$$S = 12\pi R^5 - 6\pi R^3 a^2 = 6\pi R^3\left(2R^2 - a^2\right). \tag{12.144}$$

Следовательно,

$$S + A = 6\pi R^3\left(2R^2 - \frac{2}{5}R^2\right) = \frac{48}{5}\pi R^5. \tag{12.145}$$

В итоге

$$W_{\text{шара}} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\cdot\frac{48}{5}\pi R^5 = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5, \tag{12.146}$$

что и требовалось доказать!

Для асимметричной линзы важными также являются следующие специальные случаи.

12.9.3. Однородная симметричная линза

Во всех полученных выше формулах надо сделать подстановку (12.96). Так, внешний и внутренний потенциалы симметричной линзы будут теперь равны

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{внешн}}(x_3) &= \frac{2\pi G\rho}{3}\left[\frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R + x_3} - \right.\\
&\left. - \frac{R^3 + \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} + 2(R-h)x_3\right],\\
\varphi_{\text{внутр}}(x_3) &= \frac{2\pi G\rho}{3}\left[\frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R + x_3} + \right.\\
&\left. + \frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} - x_3^2 + 2R^2 + 2Rh - h^2\right].
\end{aligned} \tag{12.147}$$

Из (12.127) с учётом (12.96), после многих тождественных преобразований, получим *энергию однородной симметричной линзы*

$$\begin{aligned}
W_{\text{линзы}} = -\frac{4}{9}\pi G\rho^2 &\left\{10R^4 a - \frac{16}{3}R^2 a^3 - \frac{8}{3}a^5 + \pi h^4\left(\frac{2}{5}h - 2R - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{R^2}{R-h}\right) + 2R^4\left[\frac{R^2}{R-h} - 6(R-h)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}\right\}.
\end{aligned} \tag{12.148}$$

Для контроля усвоения метода служит следующая задача.

Задача 12.9. *Используя ряд* (12.80), *вывести формулу* (12.148) *прямым методом (как это делалось выше для асимметричной линзы).*

В одном из предельных случаев, когда симметричная линза превращается *в два касающихся одинаковых шара* ($a = 0$, $h = 2R$), формула (12.148) даёт

$$W = -\frac{136}{45}\pi^2 G\rho^2 R^5. \tag{12.149}$$

Действительно, складывая энергии двух изолированных шаров (см. (1.64)) и прибавляя затем их взаимную энергию:

$$-\left(\frac{16}{15} + \frac{16}{15} + \frac{8}{9}\right)\left(\pi^2 G\rho^2 R^5\right) = -\frac{136}{45}\left(\pi^2 G\rho^2 R^5\right),$$

прямо подтверждаем результат (12.149).

Отметим одну тонкость: при переходе в выражении (12.148) к предельному случаю потенциальной энергии *одиночного шара* ($a = h = R$), в (12.148) следует найти следующий предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x} - \pi x^4}{1-x} = -2 + 4\pi, \tag{12.150}$$

где обозначено $x = h/R$. С учётом (12.150), формула (12.148) действительно даёт известный результат (1.64).

12.9.4. Одиночная плосковыпуклая линза (однородный шаровой сегмент)

В этом важном частном случае при получении выражений для внешнего и внутреннего потенциалов из известных нам общих формул, если мы хотим оставить от асимметричной линзы, например, только её верхнюю часть, следует считать не только $h_1 = 0$, но и, в согласии с (12.96), в числителях вторых (но не первых!) дробей из (12.98) и (12.99) надо также положить $a = 0$. Тогда *потенциал во внешней точке плосковыпуклой линзы (однородного шарового сегмента)* при ($x_3 \geqslant h$) будет:

$$\varphi_{\text{внешн}}(x_3) = \frac{2\pi G\rho}{3}\left[-\frac{R^3 + \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} - x_3^2 + (R-h)\,x_3 - R^2 - Rh + \frac{h^2}{2}\right]. \tag{12.151}$$

Внутри сегмента ($0 \leqslant x_3 \leqslant h$) потенциал в точках на оси симметрии оказывается равным

$$\varphi_{\text{внутр}}(x_3) = \frac{2\pi G\rho}{3}\left[\frac{R^3 - \left(a^2 + x_3^2\right)^{3/2}}{h - R - x_3} - 2x_3^2 - (R-h)\,x_3 + R^2 + Rh - \frac{h^2}{2}\right]. \tag{12.152}$$

Задача 12.10. *Найти гравитационную энергию однородного шарового сегмента прямо с использованием общей формулы* (12.80).

Но подчеркнём, что и переход в полученном нами выражении гравитационной энергии однородной линзы (12.127) к энергии плосковыпуклой линзы при

$$h_1 \to 0, \quad R_1 \to \infty, \quad \text{так чтобы} \quad h_1 R_1 = \frac{a^2 + h_1^2}{2}, \tag{12.153}$$

также требует определённого искусства. Особую трудность при этом представляет анализ в этом выражении членов без π. Конкретно, здесь следует пользоваться разложениями

$$\frac{8a}{R+R_1-h-h_1} \approx \frac{8a}{R_1}\left[1-\frac{R-h-h_1}{R_1}+\frac{(R-h-h_1)^2}{R_1^2}- -\frac{(R-h)^3-3h_1(R-h)^2}{R_1^3}+\frac{(R-h)^4}{R_1^4}\right];$$

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1} \approx \operatorname{arctg}\left[\frac{a}{R_1}\left(1+\frac{h_1}{R_1}+\frac{h_1^2}{R_1^2}\right)\right] = = \frac{a}{R_1}\left(1+\frac{h_1}{R_1}+\frac{h_1^2}{R_1^2}\right)-\frac{1}{3}\frac{a^3}{R_1^3}\left(1+3\frac{h_1}{R_1}\right)+\frac{1}{5}\frac{a^5}{R_1^5}. \tag{12.154}$$

Можно показать, что члены при R_1^4, R_1^3, R_1^2 и R_1 исчезают; свободные же члены дают ненулевой результат.

Далее, при анализе членов с π в последнем выражении (12.127) необходимо использовать приближение

$$\frac{R^3+R_1^3}{R+R_1-h-h_1}\left[h^2(3R-h)+h_1^2(3R_1-h_1)\right] \approx \approx -R_1^2\left[1-\frac{R-h-h_1}{R_1}+\frac{(R-h)^2}{R_1^2}\right]\left[h^2(3R-h)+\frac{3}{2}h_1a^2\right]. \tag{12.155}$$

Выполнив всё это, в итоге приходим от (12.127) к выражению *энергии однородного шарового сегмента*[9]:

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\left\{\frac{3}{2}\pi h^4\left(\frac{h}{5}-R\right)+8\left[3R^4a-R^2a^3-\frac{2}{5}a^5-6R^4(R-h)\operatorname{arctg}\frac{h}{a}\right]\right\}. \tag{12.156}$$

Легко видеть, что в предельном случае $a=0$, $h=2R$ из (12.156) следует известная формула для *шара* (1.64).

В характерном частном случае $a=R=h$ из (12.156) получается потенциальная *энергия сплошного однородного гравитирующего полушара:*

$$W_{\text{полушара}} = -\frac{2}{45}\pi G\rho^2R^5\left[32-3\pi\right]. \tag{12.157}$$

Из формул (12.157) и (1.64) выясняется, что *работа по полному разделению сплошного шара на две половинки* оказывается равной

$$W_{\text{вз}} \approx -1.3443\pi G\rho^2R^5, \tag{12.158}$$

причём «распылить» в пространстве тот же шар будет в

$$\frac{12\pi}{15\pi-32} \approx 2.49$$

раз труднее.

[9] Ввиду важности, в § 13.2 выражение для гравитационной энергии однородного шарового сегмента будет получено ещё и другим, независимым методом.

Задача 12.11. *Доказать, что энергия сегмента высотой $2R - h$, дополняющего прежний сегмент (с высотой h) до полного шара, равна*

$$W_{2R-h} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\left\{-\frac{3}{10}\pi(2R-h)^4(3R+h)+\right.$$
$$\left.+8\left[3R^4a - R^2a^3 - \frac{2}{5}a^5 + 6R^4(R-h)\arctan\frac{a}{h}\right]\right\}. \tag{12.159}$$

Задача 12.12. *Найти взаимную энергию двух однородных шаровых сегментов, дополняющих друг друга до полного шара.*

Решение. Для этого достаточно подставить выражения (12.156) и (12.159) в формулу (8.23) и иметь в виду конечный результат (1.64). ▼

§ 12.10. Маленькое чудо: превращение однородной асимметричной линзы в «лунку»

К неожиданному перевоплощению асимметричной линзы в лунку приводит простая (даже поразительно!) замена в формуле (12.127):

$$h_1 \to -h_1, \quad R_1 \to -R_1. \tag{12.160}$$

При отрицательном h_1 нижняя часть линзы как бы переворачивается и создаёт выемку в её верхней части, что и превращает асимметричную линзу в «лунку» (рис. 104). Геометрически это понятно. *Но главное не в этом.* Парадоксально (именно так!) здесь то, что *гравитационную энергию полученной лунки* мы находим при указанных обращениях знаков (12.160) всё из той же формулы для линзы (12.127):

$$W_{\text{лунки}} = -\frac{\pi G\rho^2}{9}\left\{\pi\left[a^2(h-h_1)+Rh^2-R_1h_1^2\right]\times\right.$$
$$\times\left[R^2+R_1^2+Rh+R_1h_1-\frac{h^2+h_1^2}{2}\right]+\pi\left[h_1(R_1-h_1)\times\right.$$
$$\left.\times\left(a^2+R_1h_1\right)-h(R-h)\left(a^2+Rh\right)\right]\left[h+h_1-R_1-R\right]-$$
$$-\pi\left[h^3\left(2R^2-Rh+\frac{h^2}{5}\right)-h_1^3\left(2R_1^2-R_1h_1+\frac{h_1^2}{5}\right)\right]-$$
$$-3\pi\left(R^3h^2-R_1^3h_1^2\right)-\frac{\pi\left(R^3-R_1^3\right)}{R-R_1-h+h_1}\left[h^2(3R-h)-\right.$$
$$\left.-h_1^2(3R_1-h_1)\right]-\frac{32}{3}a^5-8a^3\left(R^2+R_1^2\right)-$$
$$-\frac{8a}{R-R_1-h+h_1}\left[R^2(R-h)\left(R^2+\frac{2}{3}a^2\right)-R_1^2(R_1-h_1)\times\right.$$
$$\left.\times\left(R_1^2+\frac{2}{3}a^2\right)\right]+24a\left(R^4+R_1^4\right)+8R^4\left[\frac{R^2}{R-R_1-h+h_1}-\right.$$
$$\left.-3(R-h)\right]\operatorname{arctg}\frac{a}{R-h}+8R_1^4\left[\frac{R_1^2}{R_1-R+h-h_1}-3(R_1-h_1)\right]\times$$
$$\left.\times\operatorname{arctg}\frac{a}{R_1-h_1}\right\}. \tag{12.161}$$

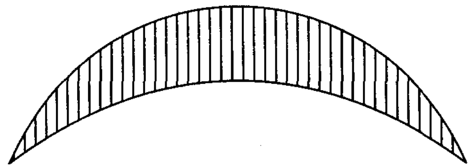


Рис. 104. Сечение «лунки»

Но как проверить эту сложную формулу? Опять помогают предельные случаи! Обратим внимание: в предельном случае (12.94) из рассматриваемого «полумесяца» получается такая конфигурация «лунки», когда острые концы у неё (в сечении) сходятся. Но мы уже видели такую картину в задаче 8.7 гл. 8, где рассматривалась оболочка, ограниченная двумя не концентрическими сферами. Присмотритесь к рис. 62 в § 8.3 — при касании изнутри двух сферических поверхностей оболочка превращается как раз в ту же «лунку» со смыкающимися острыми концами «рожков»! Это и даёт нам независимый и изящный способ проверки весьма непростого решения (12.161)! Дальнейшее — как говорят шахматисты, дело техники (но и она не должна подводить!).

Задача 12.13. *Проверьте и убедитесь, что в предельном случае* (12.94) *формула* (12.161) *действительно даёт ранее известный нам (но из совершенно других соображений полученный) результат* (8.66)[10].

§ 12.11. Резюме третьего метода

Вычисление потенциальной энергии однородных тел может быть сведено к суммированию рядов, составленных из пар коэффициентов разложения потенциалов тела во внешней и внутренней точках. Число членов в таком ряде зависит от геометрической симметрии рассматриваемого тела: чем выше эта симметрия, тем меньше членов надо учитывать. Представление потенциальной энергии указанными рядами может быть сделано не единственным способом.

В некоторых важных случаях ряды типа (12.67) могут быть просуммированы, и тогда потенциальная энергия тел представляется в конечном виде (и часто — через элементарные функции от их геометрических параметров).

Метод вычисления потенциальной энергии с помощью указанных рядов обобщается и на однородные тела без азимутальной симметрии.

Замечания

Материал главы полностью разработан автором.

§ 12.1. Мотивировка к теме этой и других глав: сложная проблема вычисления потенциальной энергии тел мало исследована. Возможности известных классических формул исчерпаны шарами и эллипсоидами (и то лишь однородными).

§ 12.2. Первый метод охватывает широкий класс тел: слоисто-неоднородные эллипсоиды и сфероиды. Но он позволяет находить и энергию плоских дисков.

Первоисточник: [21].

§ 12.3. Вывод новой важной формулы для потенциальной энергии тел (12.28). Вспомогательная формула (12.26) в несколько иной форме встречается в магистерской диссертации А. М. Ляпунова [35]. Однако маститый автор не уделил этой формуле должного внимания.

Первоисточник: [21].

§ 12.4. Второй метод приложим к широкому классу тел и позволяет решать новые задачи.

Первоисточник: [21].

§ 12.5. Результат неожиданный: гравитационная энергия (и внутренний потенциал, см. **§ 7.6**) кубоида выражаются через элементарные функции!

[10] Следует помнить, что в этом пределе оба арктангенса равны π.

Первоисточник: [21].

§ 12.6.

Первоисточник: [25].

Акцент в развитии третьего метода делается на использовании свойств обобщённого (§ 5.13) гомотетического слоя: энергия такого слоя в поле тяготения несущего (слой) тела равна энергии самого тела! Суть третьего метода — в представлении гравитационной энергии через особые ряды. Трудный вопрос о сходимости рядов получил здесь предельно лаконичное решение.

В **§ 12.7** третий метод распространяется на тела, не имеющие азимутальной симметрии.

Первоисточник: [21].

§ 12.8. При нахождении гравитационной энергии примеры нередко оказываются важнее правил — более того, они иногда и создают сами эти правила! Задача с асимметричной линзой сложная, но решается в элементарных функциях!

Первоисточник: [21].

§ 12.9. В задаче с асимметричной линзой есть много вариантов. Анализ всех случаев, и особенно переход к шару, требует тонких вычислений и понимания сути дела.

Первоисточник: [21], но в деталях много нового. См. также статью Кондратьева и Антонова [29].

§ 12.10. Переход от асимметричной линзы к лунке и геометрически красив, и в теоретическом отношении глубок: он представляет собой как бы аналитическое продолжение для выражения энергии линзы в область отрицательных значений её параметров. Конечный результат оправдывает это неожиданное сравнение. Взгляд на лунку со сходящимися острыми концами с двух разных точек зрения даёт уникальную возможность проверить формулу для энергии лунки. Вначале она получается выворачиванием внутрь одного края асимметричной линзы, но та же лунка представляет собой и оболочку между не концентрическими, касающимися изнутри, шарами!

Первоисточник: [21].

§ 12.11. Содержит резюме третьего метода.

Глава 13

НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ввиду сложности задач на определение гравитационной энергии, здесь разработан ещё один метод, имеющий важное практическое значение. Он также основан на формуле (12.28).

§ 13.1. Метод четвёртый: гравитационная энергия однородных тел с азимутальной симметрией

Накинуть невод на особые точки

13.1.1. Две основные формулы четвёртого метода

Рассмотрим *однородное* тело, имеющее круговую (азимутальную) симметрию. В цилиндрических координатах (r, x_3) его потенциал в точке x_3 на оси симметрии можно представить двойным интегралом

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \iint \frac{r\,dr\,dx_3'}{\sqrt{r^2 + (x_3' - x_3)^2}}. \tag{13.1}$$

Кроме того, как мы уже знаем, потенциал на той же оси, но во *во внешней* для тела области, можно представить интегралом типа Коши (9.100). Тогда *во всём пространстве вне тела* имеем следующую формулу:

$$\varphi(r, x_3) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}}\, d\zeta. \tag{13.2}$$

Подставляя φ из (13.2) в формулу (12.28), имеем

$$W = \frac{\rho}{10 i\pi} \iint\limits_S \oint \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\, dS. \tag{13.3}$$

К этому интегралу применим следующий приём: меняя в нём местами интегрирование по поверхности и по контуру, в итоге получим

$$W = \frac{1}{10 i\pi} \oint \varphi(\zeta)\, d\zeta \left(\rho \iint\limits_S \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} dS \right). \tag{13.4}$$

И здесь важно заметить, что в круглых скобках (13.4) мы имеем дело с изученным выше *потенциалом обобщённого гомотетического слоя* (5.115), поэтому указанное выражение можно сразу записать в замечательно простом виде

$$G\rho\iint\limits_S \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3}{\sqrt{r^2+(x_3-\zeta)^2}}dS = 2\varphi - \boldsymbol{x}\,\mathrm{grad}\varphi = 2\varphi - x_3\frac{d\varphi}{dx_3}. \tag{13.5}$$

Значение равенства (13.5) в том, что интеграл (13.4) приводится к следующему:

$$W = -\frac{1}{10i\pi G}\oint \varphi_{\text{внешн}}(\zeta)\left(2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta}\right)d\zeta. \tag{13.6}$$

Это и есть главная формула для расчёта гравитационной энергии тел четвёртым методом. Здесь внешний и внутренний потенциал берутся на оси симметрии тела и затем в них x_3 заменяется на ζ; интегрирование в (13.6) проводится по контуру фигуры в комплексной плоскости. Таким образом, данный метод нахождения гравитационной энергии тел сводится к вычислению контурных интегралов в комплексной плоскости.

З а д а ч а 13.1. *Доказать, что формулу* (13.6) *можно записать также в эквивалентном виде*

$$W = -\frac{1}{10i\pi G}\oint \varphi_{\text{внутр}}(\zeta)\left[3\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) + \zeta\frac{d\varphi_{\text{внешн}}}{d\zeta}\right]d\zeta. \tag{13.7}$$

Решение. Действительно, интегрирование по частям последнего в (13.6) члена даёт

$$\begin{aligned}\oint \varphi_{\text{внешн}}\cdot\zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta}d\zeta &= -\oint \varphi_{\text{внутр}}\cdot\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\varphi_{\text{внешн}}\right)d\zeta = \\ &= -\oint \varphi_{\text{внутр}}\cdot\varphi_{\text{внешн}}\,d\zeta - \oint \zeta\varphi_{\text{внутр}}\cdot\frac{d\varphi_{\text{внешн}}}{d\zeta}d\zeta,\end{aligned} \tag{13.8}$$

причем проинтегрированный член $[\varphi_{\text{внутр}}\cdot\zeta\cdot\varphi_{\text{внешн}}]$ обращается в нуль из–за замкнутости пути интегрирования. В итоге, складывая только что полученный результат с первым членом в (13.6), получим требуемую формулу (13.7). ▼

Вот два простых примера на применение формулы (13.6).

13.1.2. Однородный шар

З а д а ч а 13.2. *Вычислить, пользуясь формулой* (13.6), *гравитационную энергию однородного шара, если начало системы отсчёта находится в его центре.*

Решение. В этом случае

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{\zeta};\ \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R^2-\zeta^2\right), \tag{13.9}$$

так что

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 4\pi G\rho R^2. \tag{13.10}$$

Подставляя это в формулу (13.6) и учитывая, что

$$\oint\frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i, \tag{13.11}$$

легко приходим к известному выражению энергии шара (1.64). ▼

Заметим, что основная формула метода (13.6) работает не только в том случае, когда начало системы отсчёта находится *внутри* тела, но и тогда, когда оно расположено *вне* тела. Действительно, рассмотрим следующую задачу.

Задача 13.3. *Вычислить, пользуясь формулой* (13.6), *гравитационную энергию однородного шара, если начало отсчёта отстоит от центра шара на величину* $\Delta \geqslant R$.

Решение. Внутренний потенциал шара

$$\varphi'_{\text{внутр}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) \tag{13.12}$$

в принятой, по условиям задачи системе отсчёта ($x_3 \to x_3 - \Delta$), имеет теперь вид

$$\begin{aligned} &\varphi_{\text{внутр}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left[3R^2 - \Delta^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2\Delta\cdot x_3\right], \\ &\varphi_{\text{внешн}}(x_3) = \frac{MG}{x_3 - \Delta}. \end{aligned} \tag{13.13}$$

Тогда требуемая данным методом комбинация после замены $x_3 \to \zeta$ будет равна

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = \frac{4}{3}\pi G\rho\left[3R^2 - \Delta^2 + \Delta\cdot\zeta\right]. \tag{13.14}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{10i\pi G}\oint\frac{MG}{\zeta - \Delta}\cdot\frac{4}{3}\pi G\rho\left[3R^2 - \Delta^2 + \Delta\cdot\zeta\right]d\zeta = \\ &= \frac{2i}{15}MG\rho\oint\frac{3R^2 - \Delta^2 + \Delta\cdot\zeta}{\zeta - \Delta}d\zeta, \end{aligned} \tag{13.15}$$

откуда действительно следует результат для шара

$$W = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5. \tag{13.16}$$

▼

§ 13.2. Энергия однородного шарового сегмента. Нахождение четвёртым методом

Энергию однородного шарового сегмента выше мы уже находили, причём применили для этого третий метод, см. формулу (12.156). Но сейчас принципиально важно решить эту же задачу совершенно другим, независимым методом.

13.2.1. Постановка задачи

В однородном шаре радиуса R выделен сегмент с углом полураствора[1] α (рис. 105); сегмент заполнен однородным гравитирующим веществом плотности ρ. На оси симметрии Ox_3 внешний и внутренний потенциалы сегмента были найдены ранее в (12.151) и (12.152). Сейчас, однако, потенциалы сегмента целесообразно записать в системе отсчета, начало

[1] Здесь угол α отсчитывается по часовой стрелке, а не против неё, как обычно. Следовательно, в этой задаче положительным направлением обхода контура интегрирования, натянутого на точки ветвления, будет направление по *часовой стрелке*.

которой расположено в центре шара, и одновременно заменить переменную x_3 на комплексную $\zeta = x_3 + ir$:

$$x_3 \to \zeta + R - h. \tag{13.17}$$

После нормировки величин h и ζ на R, из (12.151) и (12.152) в итоге получим выражения для потенциалов сегмента в более подходящем сейчас виде

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\frac{\widetilde{R}^3 + 1}{\zeta} - \zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha - \frac{3}{2}\left(1 + \cos^2\alpha\right)\right] \tag{13.18}$$

и

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\frac{\widetilde{R}^3 - 1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right], \tag{13.19}$$

где

$$\widetilde{R} = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} = \sqrt{\left(\zeta - e^{i\alpha}\right)\left(\zeta - e^{-i\alpha}\right)}, \tag{13.20}$$

а

$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R}. \tag{13.21}$$

Угол α может меняться в пределах

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi; \tag{13.22}$$

например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (т. е. при $h = R$) сегмент превращается в половинку шара, а при $\alpha = \pi$ — в шар.

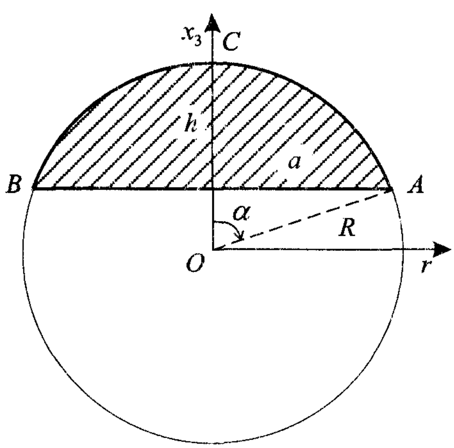


Рис. 105. Шаровой сегмент. Угол α может изменяться от 0 до π (полный шар)

Для проверки выражений (13.18) и (13.19) достаточно перейти к шару, поскольку потенциал его известен; действительно, полагая в (13.18) и (13.19) $\alpha = \pi$ и учитывая, что для шара $\widetilde{R} = 1 + \zeta$, получим соответственно

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2\left(3 - \zeta^2\right), \tag{13.23}$$

и

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{MG}{R\zeta} \tag{13.24}$$

(M — масса шара). Верно!

Далее, согласно (13.6) и (13.7), надо найти комбинации

$$S_1(\zeta) = 2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)}{d\zeta} \tag{13.25}$$

и

$$S_2(\zeta) = 3\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) + \zeta\frac{d\varphi_{\text{внешн}}(\zeta)}{d\zeta}. \tag{13.26}$$

Подставляя сюда потенциалы (13.18) и (13.19), получим

$$S_1(\zeta) = 2\pi G\rho R^2 \left[\widetilde{R}\left(\frac{1}{\zeta} - \cos\alpha\right) - \frac{1}{\zeta} + \zeta\cos\alpha + \sin^2\alpha\right] \tag{13.27}$$

и

$$S_2(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\widetilde{R}\left(5\zeta - 7\cos\alpha + \frac{2}{\zeta}\right) + \frac{2}{\zeta} - 5\zeta^2 + 12\zeta\cos\alpha - \frac{9}{2}\left(1 + \cos^2\alpha\right)\right]. \tag{13.28}$$

Для проверки двух последних формул (удобно вновь взять случай шара) замечаем, что в этом случае из (13.27) и (13.28) следуют выражения

$$S_1 = 4\pi G\rho R^2; \quad S_2(\zeta) = \frac{8}{3}\pi G\rho\frac{R^2}{\zeta}, \tag{13.29}$$

которые легко получаются и прямо при подстановке потенциалов (13.23) и (13.24) в (13.26) и (13.25) соответственно.

13.2.2. Особые точки и деформация контура интегрирования

Внешний и внутренний потенциалы сегмента (13.18) и (13.19) имеют по две точки ветвления первого порядка для радикала

$$\widetilde{R} = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} = \sqrt{\left(\zeta - e^{i\alpha}\right)\left(\zeta - e^{-i\alpha}\right)}; \tag{13.30}$$

эти точки, расположенные на изломах контура фигуры сегмента (см. рис. 106), суть

$$a = e^{i\alpha}; \quad b = e^{-i\alpha}. \tag{13.31}$$

Кроме точек ветвления, аналитическое продолжение внешнего потенциала (13.18) имеет внутри фигуры также полюс в начале координат O.

Чтобы сделать потенциал аналитической функцией во всём пространстве, точки ветвления внутреннего потенциала следует расположить вне, а внешнего потенциала — внутри сегмента.

Ниже при вычислении интегралов (13.6) и (13.7) будем учитывать только точки ветвления. Конкретно, мы «прячем» точки ветвления внутрь фигуры сегмента, и *опираться будем на точки ветвления* (13.31) *для внешнего потенциала* (13.18). Это позволяет, игнорируя точки ветвления внутреннего потенциала, деформировать исходный контур интегрирования L так, как показано на рис. 106.

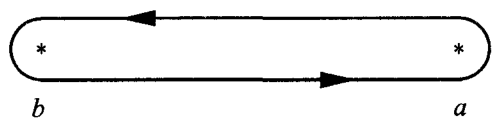


Рис. 106. Вид контура интегрирования, огибающего точки ветвления внешнего потенциала в задаче о шаровом сегменте

13.2.3. Вычисление W по формуле (13.6)

Контур интегрирования натягивается на точки ветвления (13.31), и при их обходе радикал $\widetilde{R}$ в выражении *внешнего потенциала* изменяет свой знак. Существенно, что остальные члены в (13.27) при обходе особых точек остаются неизменными и вклада в W, следовательно, не дают; поэтому далее их можно опустить. Член же с $\widetilde{R}$ из (13.18) по очевидной причине следует удвоить. Интеграл (13.6) по контуру сводится тогда к интегралу по отрезку в комплексной плоскости

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G\rho^2 R^5 \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\widetilde{R}^3}{\zeta} \cdot \left[\widetilde{R}\left(\frac{1}{\zeta} - \cos\alpha\right) - \frac{1}{\zeta} + \zeta\cos\alpha + \sin^2\alpha\right] d\zeta. \quad (13.32)$$

Раскрывая скобки под знаком этого интеграла, представим всё выражение в виде

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G\rho^2 R^5 \left[T_1 + T_2\right], \quad (13.33)$$

где

$$T_1 = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \widetilde{R}^4 \cdot \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos\alpha}{\zeta}\right) d\zeta; \quad (13.34)$$

$$T_2 = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \widetilde{R}^3 \cdot \left[-\frac{1}{\zeta^2} + \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\zeta}\right] d\zeta. \quad (13.35)$$

Для вычисления T_1 целесообразно вначале раскрыть подынтегральное выражение

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \widetilde{R}^4\left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos\alpha}{\zeta}\right) = \left(\zeta^4 + 4\zeta^2\cos^2\alpha + 1 - 4\zeta^3\cos\alpha + \right.\\ \left. +2\zeta^2 - 4\zeta\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos\alpha}{\zeta}\right) = -\zeta^3\cos\alpha + \zeta^2\left(1 + 4\cos^2\alpha\right) - \\ -2\zeta\cos\alpha\left(3 + 2\cos^2\alpha\right) + 2\left(1 + 4\cos^2\alpha\right) - \frac{5\cos\alpha}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}.\end{gathered} \quad (13.36)$$

Интегрируя теперь члены (13.36), находим

$$\begin{gathered}T_1 = i\left(-\frac{1}{2}\sin 4\alpha\cos\alpha + \frac{2}{3}\sin 3\alpha\left(1 + 4\cos^2\alpha\right) - \right.\\ \left. -2\sin 2\alpha\cos\alpha\left(3 + 2\cos^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\left(3 + 8\cos^2\alpha\right) - 10\alpha\cos\alpha\right),\end{gathered} \quad (13.37)$$

или в преобразованном виде:

$$T_1 = i\left\{-\frac{1}{12}\sin 5\alpha + \frac{5}{4}\sin 3\alpha + \frac{20}{3}\sin\alpha - 10\alpha\cos\alpha\right\}. \quad (13.38)$$

Раскрывая теперь подынтегральное выражение в T_2 из (13.35), имеем

$$\begin{gathered}\Phi_2 = \cos\alpha\,\zeta^2\widetilde{R} + \left(\sin^2\zeta - 2\cos^2\alpha\right)\zeta\widetilde{R} + \\ + \left(-1 + \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\,\cos\alpha\right)\widetilde{R} + \left[2\cos\alpha + \sin^2\alpha\right]\frac{\widetilde{R}}{\zeta} - \frac{\widetilde{R}}{\zeta^2}.\end{gathered} \quad (13.39)$$

Здесь надо отметить, что для вычисления T_2, а далее и других выражений, нам понадобятся следующие интегралы:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^3 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\, d\zeta = \frac{i\pi}{8}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right);\\
K_1 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\, d\zeta = \frac{i\pi}{8}\sin^2\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right);\\
K_2 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\, d\zeta = \frac{i\pi}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha;\\
K_3 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\, d\zeta = \frac{i\pi}{2}\sin^2\alpha;\\
K_4 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}}{\zeta}\, d\zeta = i\pi\left(1 - \cos\alpha\right);\\
K_5 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}}{\zeta^2}\, d\zeta = i\pi\left(1 - \cos\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{13.40}
$$

Отметим, кстати, совпадение значений двух разных интегралов K_4 и K_5!

Интегрирование $\Phi_2(\zeta)$ из (13.39) с учётом выражений (13.40) даёт

$$
\begin{aligned}
T_2 = i\pi\Bigg(&\frac{1}{8}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right) + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\sin^2\alpha - \right.\\
&\left.-2\cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(-1 + \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\right) + \\
&+\left(-1 + 2\cos\alpha + \sin^2\alpha\right)\left(1 - \cos\alpha\right)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{13.41}
$$

Заметим, что после преобразований (13.41) заметно упрощается:

$$
T_2 = -\frac{i\pi}{8}\left(\cos\alpha + 4\right)\left(1 - \cos\alpha\right)^4. \tag{13.42}
$$

Подставляя теперь найденные выражения T_1 и T_2 из (13.38) и (13.42) в (13.33), в итоге получим

$$
\begin{aligned}
W_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15}\pi G\rho^2 R^5 \Bigg\{&-\frac{1}{12}\sin 5\alpha + \frac{5}{4}\sin 3\alpha + \frac{20}{3}\sin\alpha - 10\alpha\cos\alpha - \\
&-\frac{\pi}{8}\left(\cos\alpha + 4\right)\left(1 - \cos\alpha\right)^4\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{13.43}
$$

Это и есть искомая *гравитационная энергия однородного шарового сегмента.*

Разумеется, выражение (13.43) следует сравнить с ранее найденным (12.156).

13.2.4. Проверка выражения (13.43)

Случай полушара: полагая в (13.43) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, находим результат, совпадающий с полученным ранее (12.157).

Случай шара: $\alpha = \pi$. И в этом случае общая формула (13.43) даёт правильный результат (1.64).

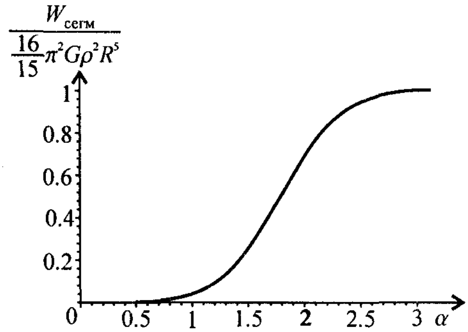


Рис. 107. График гравитационной энергии $W_{\text{сегмента}}$ (нормировка на энергию полного шара $-\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5$) шарового сегмента как функция угла α в радианах

Но данная проверка ещё не является полной. Подчеркнём: важной является независимая проверка формулы для энергии (13.43), выполненная далее в § 14.1.

Наконец, можно показать (предоставим это читателю), что и в целом полученная формула (13.43) оказывается эквивалентной ранее найденному нами выражению (12.156). В частности, графики, рассчитанные по формулам (13.43) и (12.156) совпадают друг с другом (см. рис. 107).

13.2.5. Вариант четвёртого метода с интегралом (13.7)

Формулу (13.7) также следует проверить на примере однородного шарового сегмента. В этом случае

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{2}{15i}\pi G\rho^2 R^5 \oint S_2(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{13.44}$$

причём выражение $S_2(\zeta)$ дано в (13.28), а внутренний потенциал сегмента приводится в (13.19). Контур интегрирования в (13.44) приводим к виду, показанному на рис. 106. Делая теперь разрез между точками ветвления, контурный интеграл прежним способом приводим к интегралу по отрезку в комплексной плоскости (сравните с (13.32)):

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{45i}\pi G\rho^2 R^5 \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \widetilde{R}\cdot(5\zeta - 7\cos\alpha + 2\zeta)\times \\ \times\left[\frac{\widetilde{R}^3 - 1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right]d\zeta.\end{aligned} \tag{13.45}$$

Запишем (13.45) кратко:

$$\widetilde{W}_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G\rho^2 R^5\left(\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2\right), \tag{13.46}$$

где

$$\widetilde{T}_1 = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \widetilde{R}^4 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{3\zeta}\cos\alpha + \frac{2}{3\zeta^2}\right) d\zeta \tag{13.47}$$

и

$$\widetilde{T}_2 = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \widetilde{R} \cdot \left(\frac{5}{3}\zeta - \frac{7}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3\zeta}\right) \left\{-\frac{1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right\} d\zeta. \tag{13.48}$$

Производя вычисления, известным нам способом находим

$$\begin{gathered} \widetilde{T}_1 = i\left\{\frac{2}{3}\sin 5\alpha - \frac{9}{2}\sin 4\alpha\cos\alpha + \frac{8}{3}\sin 3\alpha\left(1 + 4\cos^2\alpha\right) - \right. \\ \left. -\frac{14}{3}\sin 2\alpha\cos\alpha\left(3 + 2\cos^2\alpha\right) + \frac{2}{3}\sin\alpha\left(11 + 36\cos^2\alpha\right) - 10\alpha\cos\alpha\right\}. \end{gathered} \tag{13.49}$$

Наконец, после тождественных преобразований это выражение можно, оказывается, привести к виду, совпадающему с (13.38):

$$\widetilde{T}_1(\alpha) = T_1(\alpha). \tag{13.50}$$

Далее, с учётом вспомогательных интегралов (13.40), получим

$$\begin{gathered} \widetilde{T}_2 = i\pi\left\{-\frac{5}{12}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right) + \frac{29}{24}\sin^2\alpha\cos\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right) + \right. \\ + \sin^2\alpha\cos\alpha\left(\frac{5}{4}\sin^2\alpha - \frac{7}{2}\cos^2\alpha - \frac{2}{3}\right) + \sin^2\alpha\left(\cos\alpha - \frac{5}{6} - \frac{7}{4}\sin^2\alpha\cos\alpha\right) + \\ \left. + \left(\frac{7}{3}\cos\alpha + \sin^2\alpha - \frac{2}{3}\right)(1 - \cos\alpha)\right\}. \end{gathered} \tag{13.51}$$

Существенно, что после тождественных преобразований выражение (13.51) приводится к тому же виду, что и T_2 из (13.42):

$$\widetilde{T}_2(\alpha) = T_2(\alpha).$$

Складывая $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$, имеем, следовательно, равенство

$$\widetilde{W}_1 = W_1, \tag{13.52}$$

где W_1 дано в (13.41). Таким образом мы установили, что второй вариант четвёртого метода тоже работает и интеграл (13.44) даёт верное выражение для энергии однородного сегмента.

§ 13.3. Гравитационная энергия однородного шарового сектора

Эта красивая задача на применение четвёртого метода также требует новаторского подхода.

В шаре радиуса R выделен шаровой сектор с углом полураствора α (рис. 108). Масса такого сектора равна

$$M = \frac{2}{3}\pi G\rho R^3(1 - \cos\alpha). \tag{13.53}$$

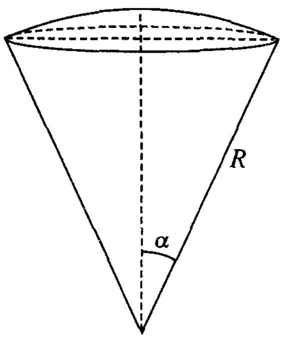


Рис. 108. Шаровой сектор

Потенциал в точке на оси симметрии Ox_3 однородного тела с азимутальной симметрией, а в данном примере — шарового сектора, находится по формуле

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \int_0^\alpha \int_0^R \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'}{\sqrt{r'^2 + x_3^2 - 2r'x_3 \cos\theta'}}. \tag{13.54}$$

Находим вначале *внутренний потенциал шарового сектора*, и после замены в нём x_3 на ζ, получим

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \pi G\rho \left\{ \frac{2\left(\zeta^2 - 2R\cos\alpha\cdot\zeta + R^2\right)^{3/2}}{3\zeta} + \right.$$
$$+\cos\alpha\,(R - \zeta\cdot\cos\alpha)\sqrt{\zeta^2 - 2R\cos\alpha\cdot\zeta + R^2} - \zeta^2\sin^2\alpha -$$
$$\left. -(\zeta - R)^2\,\frac{\zeta + 2R}{3\zeta} + \zeta^2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\left[\operatorname{Arsh}\frac{R - \zeta\cdot\cos\alpha}{\zeta\cdot\sin\alpha} + \operatorname{Arsh}(|\operatorname{ctg}\alpha|)\right]\right\}, \tag{13.55}$$

так что *комбинация в круглых скобках под знаком интеграла в* (13.6), *необходимая для применения четвёртого метода*, будет теперь равна

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 2\pi G\rho R^2\left[\frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\cos\alpha\cdot\zeta + 1}}{\zeta} + 1 - \frac{1}{\zeta}\right]. \tag{13.56}$$

Внешний же потенциал однородного шарового сектора равен

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \pi G\rho \Bigg\{ &\frac{2\left(\zeta^2 - 2R\cos\alpha\cdot\zeta + R^2\right)^{3/2}}{3\zeta} + \\ &+\cos\alpha\,(R - \zeta\cdot\cos\alpha)\sqrt{\zeta^2 - 2R\cos\alpha\cdot\zeta + R^2} - \\ &-\zeta^2\sin^2\alpha + (\zeta - R)^2\,\frac{\zeta + 2R}{3\zeta} + \\ &+\zeta^2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\left[\operatorname{Arsh}\frac{R - \zeta\cdot\cos\alpha}{\zeta\cdot\sin\alpha} + \operatorname{Arsh}(|\operatorname{ctg}\alpha|)\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{13.57}$$

Задача 13.4. *Выяснить асимптотику внешнего потенциала однородного шарового сектора на больших расстояниях.*

Решение. Проводится обычным способом и приводит к выражению

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) \sim \frac{MG}{\zeta}. \tag{13.58}$$

В частности, в случае полного шара ($\alpha = \pi$) имеем для асимптотики на больших расстояниях стандартное выражение

$$\varphi_{\text{шара}}(\zeta) \sim \frac{M_{\text{шара}}G}{\zeta}.$$

▼

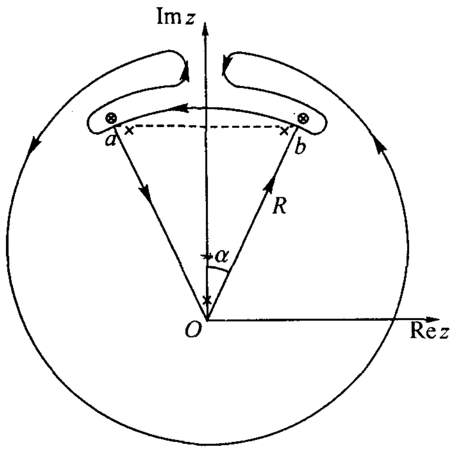


Рис. 109. Расположение особых точек для аналитического продолжения внешнего (крестики) и внутреннего (кружочки с крестиками) потенциалов шарового сектора. Показан начальный этап деформации контура интегрирования

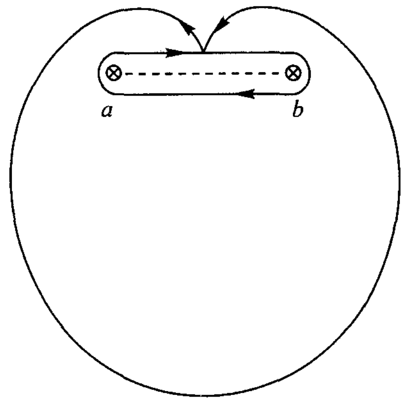


Рис. 110. Редукция контура интегрирования для шарового сектора

Важно сейчас выяснить, как в интеграле (13.6) будет проходить контур вокруг шарового сектора. *Здесь есть два варианта: можно опираться на особые точки или внутреннего, или внешнего потенциала.* Сами особые точки имеют расположение, показанное на рис. 109. Внутренний потенциал имеет особые точки

$$a = R\exp(-i\alpha) \text{ и } b = R\exp(+i\alpha), \tag{13.59}$$

вынесенные за фигуру и отмеченные на рис. 109 кружками с крестиками. Внешний потенциал, кроме тех же особых точек, имеет ещё и особую точку $\zeta = 0$, причём для него все три точки находятся (спрятаны) внутри границы шарового сектора. Подчеркнём, что *в обоих случаях указанное расположение особых точек делает потенциал сектора аналитической функцией во всей области определения.*

Остановимся здесь на первом варианте решения задачи, проводя контур в соответствии с расположением особых точек для *внутреннего потенциала*. Тогда контур в интеграле (13.6) можно деформировать способом, показанным на рис. 109. Расширяя и продолжая начатую деформацию, в пределе получим два контура на рис. 110. Первый (внутренний) контур охватывает особые точки a и b, являющиеся точками ветвления только функции $\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)$. Очевидно, два последних члена в выражении (13.56) не имеют точек ветвления и далее их можно не учитывать. Радикал в (13.56)

$$\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} = \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)} \tag{13.60}$$

испытывает, конечно, изменение знака при обходе точек a и b. Здесь и ниже принята нормировка $\zeta = \zeta/R$.

Значительно упрощает всю задачу и то, что при данном расположении внутреннего контура внешний потенциал $\varphi_{\text{внешн}}(\zeta)$ не имеет на нём особых точек. Кроме того, см. рис. 110, интеграл по второму, внешнему, контуру будет равен нулю и далее не учитывается. Таким образом, проведённая выше деформация контура интегрирования позволила на этом этапе существенно упростить весьма сложную задачу. Но и сейчас для достижения цели предстоит ещё проделать немалые расчёты.

С учётом сказанного, интеграл (13.6) приводится к виду

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{2\pi G\rho^2 R^5}{5\,i}\left\{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6\right\}, \tag{13.61}$$

где

$$T_1 = \frac{2}{3}\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\left(\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1\right)^2}{\zeta^2}d\zeta = \frac{16}{3}i\left(\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha - \alpha\cos\alpha\right);$$

$$T_2 = \cos\alpha\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \left(1 - \zeta\cos\alpha\right)\left(\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= 2i\cos\alpha\left[\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha\left(5 - 2\cos^2\alpha\right)\right];$$

$$T_3 = -\sin^2\alpha\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\,d\zeta = -\frac{i\pi}{2}\sin^4\alpha\cos\alpha;$$

$$T_4 = \frac{1}{3}\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (\zeta - 1)^2(\zeta + 2)\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\,\frac{d\zeta}{\zeta^2} = \frac{i\pi}{6}\left(\sin^2\alpha\cos\alpha - 2 + 2\cos\alpha\right);$$

$$T_5 = \sin^2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{Arsh}\left(|\mathrm{ctg}\,\alpha|\right)\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\,d\zeta = \frac{i\pi}{2}\sin^4\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{Arsh}\left(|\mathrm{ctg}\,\alpha|\right);$$

$$T_6 = \sin^2\alpha\cos\alpha\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\,\mathrm{Arsh}\frac{1 - \zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha}d\zeta =$$

$$= i\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\alpha\left(\frac{2}{3} - \cos^2\alpha\right) + \frac{1}{3}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{2}\cdot I\right].$$

Заметим, что при вычислении величин T_3, T_4, T_5 и T_6 встречаются вспомогательные интегралы и из (13.40).

Подставляя теперь все шесть интегралов T_i в формулу (13.61), после многочисленных преобразований в итоге находим искомую *гравитационную энергию однородного шарового сектора:*

$$\begin{aligned} W_{\text{сектора}} = -\frac{2\pi G\rho^2 R^5}{15}\Big\{&\alpha\cdot\cos\alpha\left[\sin^2\alpha\left(2 - 3\cos^2\alpha\right) - 10\right] + \\ &+\sin\alpha\left[\sin^2\alpha\left(\frac{2}{3} - 3\cos^2\alpha\right) + 10\right] + \\ &+\pi\left[\cos^3\alpha\left(1 + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right) - 1 + \frac{3}{2}\sin^4\alpha\cos^2\alpha\cdot\mathrm{Arsh}\left(|\mathrm{ctg}\,\alpha|\right)\right] + \\ &+\frac{3}{2}\sin^4\alpha\cos^2\alpha\cdot I\Big\}, \end{aligned} \tag{13.62}$$

где

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \sin\alpha \cdot \cos x}{1 - \sin\alpha \cdot \cos x} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \sin\alpha \cdot \sin x}{1 - \sin\alpha \cdot \sin x} dx =$$
$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin\alpha)^{2k+1}}{2k+1} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}. \tag{13.63}$$

Заметим: для произвольного α интеграл I в конечном виде не берётся; для полного шара, разумеется, $I = 0$, а при $\alpha = \pi/2$ (полушар) интеграл $I = 4G_{\text{К}}$ (здесь $G_{\text{К}}$ — постоянная Каталана из (12.17)).

Формула (13.62) проверяется как в случае шара $\alpha = \pi$ (получается выражение (1.64)), так и в случае полушара $\alpha = \frac{\pi}{2}$ с правильным результатом (12.157).

З а д а ч а 13.5. *Сделайте указанную элементарную проверку.*

Важно, наконец, обратить внимание, что здесь мы встретились с *независимой* проверкой гравитационной энергии для полушара (12.157): в самом деле, если ранее этот полушар получался нами в пределе из *шарового сегмента*, то теперь — из *шарового сектора!*

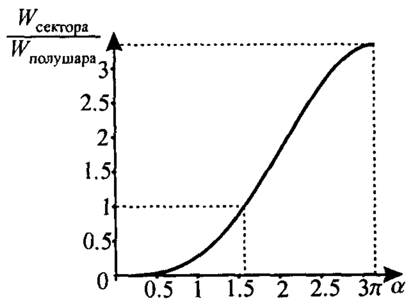


Рис. 111. Зависимость гравитационной энергии однородного шарового сектора (нормировка на энергию полушара (12.157) от угла полураствора α). Расчёт по формуле (13.62). Штриховыми вертикальными линиями отмечены энергия полушара и шара. Энергия шара (по модулю) в 3.34 раза больше энергии полушара

Возможна ещё и *прямая* проверка выражения (13.62); она будет выполнена в § 14.1 с помощью идеи *обобщения гравитационной энергии для подсистемы.*

На рис. 111 результаты расчётов по формуле (13.62) представлены графически.

При малых α шаровой сектор «складывается» наподобие веера в неоднородный отрезок длиной R. Строго говоря, одномерный отрезок имеет бесконечно большой потенциал в точках самого стержня, а значит, и бесконечно большую гравитационную энергию. Тем не менее, в данном случае всё же можно говорить об асимптотическом пределе гравитационной энергии шарового сектора (13.62) при малых α. А именно, из (13.62) при малых α находим

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{\pi G \rho^2 R^5}{5} \left\{ \pi \left[\ln\frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4} \right] \alpha^4 - \frac{64}{9}\alpha^5 + O\left(\alpha^6\right) \right\}. \tag{13.64}$$

Обратим внимание на то, что разложение выражения энергии шарового сектора по степеням малого α^4, т. е. в приближении стержня, начинается только с α^4.

И замечательно следующее: в следующем разделе формула (13.64) послужит для оригинальной проверки выражения гравитационной энергии в асимптотическом пределе уже для конуса, сложенного «веером» в такой же неоднородный стержень! Как говорится: «мал золотник, да дорог».

Тот же уровень сложности, что и для однородного шарового сектора, имеет следующая задача.

§ 13.4. Гравитационная энергия однородного прямого кругового конуса

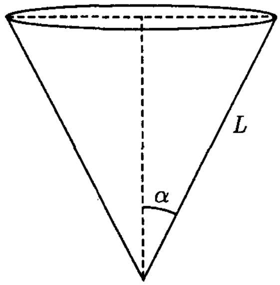


Рис. 112. Прямой круговой конус

Ранее эта задача не ставилась.

Конус и его параметры показаны на рис. 112. Фигура конуса допускает только значения $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Внутренний потенциал (и соответствующая ему комбинация членов), а также внешний потенциал однородного кругового конуса на оси симметрии имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \pi G\rho \Big\{ (L-\zeta\cos\alpha)\sqrt{L^2-2L\zeta\cos\alpha+\zeta^2} - \\ -\zeta^2\sin^2\alpha + \zeta^2\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\operatorname{Arsh}\frac{L-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha)\right) - \\ -(L\cos\alpha-\zeta)^2\Big\},\end{aligned} \tag{13.65}$$

так что

$$2\varphi_{\text{внутр}} - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 2\pi G\rho L^2\cos\alpha\left[\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1} - (\cos\alpha-\zeta)\right]; \tag{13.66}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \pi G\rho L^2\cos\alpha\Big\{(1-\zeta\cos\alpha)\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1} + \\ +\zeta^2\cos\alpha - 2\zeta + \cos\alpha + \zeta^2\sin^2\alpha\left(\operatorname{Arsh}\frac{1-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha)\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{13.67}$$

Выбор контура интегрирования и его редукцию в рассматриваемой задаче выполним по аналогии с предыдущим примером шарового сектора. Дело в том, что и для конуса мы имеем две особые точки с координатами (13.59). После этого будем иметь дело с общим интегралом в комплексной плоскости

$$\begin{aligned}W = -\frac{2\pi G\rho^2L^5\cos^2\alpha}{5i}\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}}\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1}\Big\{(1-\zeta\cos\alpha)\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1} + \\ +\zeta^2\cos\alpha - 2\zeta + \cos\alpha + \zeta^2\sin^2\alpha\left(\operatorname{Arsh}\frac{1-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha)\right)\Big\}\,d\zeta,\end{aligned} \tag{13.68}$$

который разбивается на шесть частных:

$$T_1 = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}}(1-\zeta\cos\alpha)\left(\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1\right)d\zeta = \frac{4}{3}i\sin^5\alpha; \tag{13.69}$$

$$T_2 = \cos\alpha\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}}\zeta^2\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1}\,d\zeta = \frac{i\pi}{8}\cos\alpha\sin^2\alpha\left(5\cos^2\alpha-1\right); \tag{13.70}$$

$$T_3 = -2\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}}\zeta\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1}\,d\zeta = -i\pi\cos\alpha\sin^2\alpha; \tag{13.71}$$

$$T_4 = \cos\alpha \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}\, d\zeta = \frac{i\pi}{2}\cos\alpha \sin^2\alpha; \tag{13.72}$$

$$T_5 = \sin^2\alpha \operatorname{Arshctg}\alpha \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{8}\sin^4\alpha \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha)\left(5\cos^2\alpha - 1\right); \tag{13.73}$$

$$T_6 = \sin^2\alpha \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} \operatorname{Arsh}\frac{1-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha}\, d\zeta =$$
$$= \frac{i\sin^2\alpha}{12}\left\{\sin\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right) + \alpha\cos\alpha\left(13 - 15\cos^2\alpha\right) + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right)\cdot I\right\}, \tag{13.74}$$

где интеграл I дан в (13.63). Здесь требуется

Пояснение. Главную трудность представляет вычисление интеграла T_6. Берём его по частям, обозначив

$$U = \operatorname{Arsh}\frac{1-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha}, \tag{13.75}$$

т. е.

$$dU = -\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}}, \tag{13.76}$$

и

$$V = \int \zeta^2\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} d\zeta = \frac{3\zeta + 5\cos\alpha}{12}\left(\zeta^2 - 2z\cos\alpha + 1\right)^{\frac{3}{2}} +$$
$$+\frac{5\cos^2\alpha - 1}{8}\left[\left(\zeta - \cos\alpha\right)\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1} + \sin^2\alpha\cdot\operatorname{Arsh}\frac{1-\zeta\cos\alpha}{\zeta\sin\alpha}\right]. \tag{13.77}$$

Тогда

$$T_6 = \sin^2\alpha\left\{[UV]_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} + T_6'\right\}, \tag{13.78}$$

где в правой части стоит интеграл

$$T_6' = \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} V(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha + 1}}. \tag{13.79}$$

Проинтегрированный член в (13.78) с учётом вида выражений (13.75) и (13.77) исчезает:

$$[UV]_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} = \frac{5\cos^2\alpha - 1}{8}\sin^2\alpha\left[\operatorname{Arsh}(-i)\operatorname{Arsh}(i) - \operatorname{Arsh}(i)\operatorname{Arsh}(-i)\right] = 0. \tag{13.80}$$

Остаётся интеграл T_6' из (13.79). В нём часть членов под знаком интеграла имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left(\zeta^2-2z\cos\alpha+1\right)+\frac{5\cos\alpha}{12}\left(\zeta-2\cos\alpha+\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{5\cos^2\alpha-1}{8}\left(1-\frac{\cos\alpha}{\zeta}\right)=\\ =\frac{1}{4}\left\{\zeta^2-\frac{\cos\alpha}{3}\zeta+\frac{3-5\cos^2\alpha}{6}+\frac{\cos\alpha\left(13-15\cos^2\alpha\right)}{6\zeta}\right\}\end{gathered}\tag{13.81}$$

и интегрируются сразу

$$A=\frac{i}{12}\left\{2\sin3\alpha-\cos\alpha\sin2\alpha+\left(3-5\cos^2\alpha\right)\sin\alpha+\alpha\cos\alpha\left(13-15\cos^2\alpha\right)\right\}.\tag{13.82}$$

Имеем

$$T_6=\sin^2\alpha\left\{A+\frac{5\cos^2\alpha-1}{8}\sin^2\alpha\cdot I_6\right\},\tag{13.83}$$

где

$$I_6=\int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}}\frac{\operatorname{Arsh}\frac{\zeta-\cos\alpha}{\sin\alpha}d\zeta}{\zeta\sqrt{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1}}.\tag{13.84}$$

Далее заменой

$$z=\frac{\zeta-\cos\alpha}{\sin\alpha}\tag{13.85}$$

интеграл I_6 приводим к виду

$$I_6=\int\limits_{-i}^{i}\frac{\operatorname{Arsh}z\,dz}{(\cos\alpha+z\sin\alpha)\sqrt{1+z^2}},\tag{13.86}$$

и переход к вещественной переменной

$$x=\frac{z}{i},\quad \operatorname{Arsh}(ix)=i\arcsin x\tag{13.87}$$

даёт

$$I_6=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\arcsin x}{\cos\alpha+ix\sin\alpha}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.\tag{13.88}$$

Дальнейшее ясно:

$$\begin{gathered}I_6=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos\alpha-ixsin\alpha}{\cos^2\alpha+x^2\sin^2\alpha}\arcsin x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\\ =2i\sin\alpha\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\arcsin x}{\cos^2\alpha+x^2\sin^2\alpha}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\\ =2i\sin\alpha\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\sin y\,dy}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2y}=i\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\sin\alpha\cos\alpha x}{1-\sin\alpha\cos\alpha x}dx.\end{gathered}\tag{13.89}$$

Это означает, что

$$I_6 = iI, \tag{13.90}$$

где интеграл I дан в (13.63). Собирая всё вместе, получим

$$T_6 = i\frac{\sin^2\alpha}{12}\left\{2\sin 3\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha + \left(3 - 5\cos^2\alpha\right)\sin\alpha + \alpha\cos\alpha\left(13 - 15\cos^2\alpha\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right)I\right\}, \tag{13.91}$$

где, напоминаем, I дан в (13.63). Тогда, в силу тождества

$$2\sin 3\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha + \left(3 - 5\cos^2\alpha\right)\sin\alpha = \sin\alpha\left(1 + \cos^2\alpha\right), \tag{13.92}$$

и приходим к доказываемому равенству (13.74).

В итоге, объединяя выражения $T_1, ..., T_6$, после многих преобразований находим *гравитационную энергию однородного кругового конуса*

$$\begin{aligned} W_{\text{конуса}} = &-\frac{1}{20}\pi G\rho^2 L^5 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left\{\sin^2\alpha\left(5\cos^2\alpha - 1\right)\cdot I + \right. \\ &+ \sin\alpha\left(\frac{4}{3} + 10\sin^2\alpha\right) + \alpha\cdot\cos\alpha\left(\frac{26}{3} - 10\cos^2\alpha\right) - \\ &\left. -\pi\sin^2\alpha\left[5\cos\alpha - \left(5\cos^2\alpha - 1\right)\operatorname{Arsh}\left(\operatorname{ctg}\alpha\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{13.93}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ — угол полураствора конуса, L — длина его образующей, а I дано в (13.63).

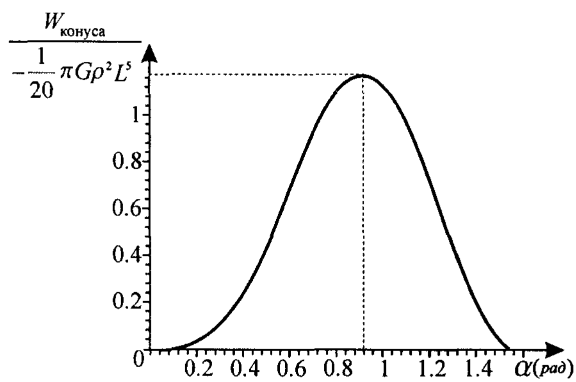


Рис. 113. Зависимость гравитационной энергии конуса от угла полураствора α. Обращение в нуль энергии при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ означает, что в пределе одномерного стержня или двумерного диска следует переходить от объёмной плотности ρ к одномерной или поверхностной плотности. Максимум гравитационной энергии конуса 1.17217 соответствует углу $\alpha = 0.92131$ ($\approx 52°47'$)

Но оказывается, проверить формулу (13.93) — далеко непросто! Дело в том, что конус — в отличие от шарового сектора — не допускает превращения в шар или в полушар (см. предыдущий пример), а только в одномерный стержень или в плоский круглый диск (и то лишь в асимптотическом пределе). Фактически, здесь мы имеем только два, и то *косвенных*, способа проверки.

Первый — это нахождение асимптотического предела $\alpha \to \pi/2$, когда конус превращается в *неоднородный* круглый диск с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \frac{3M}{\pi L^2}\left(1 - \frac{r}{L}\right). \tag{13.94}$$

З а д а ч а 13.6. *Из выражения* (13.93) *найти потенциальную энергию этого диска.*

Решение. Полагая в (13.93) угол полураствора равным $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, с точностью до ε^2 включительно найдём

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{30}\pi G\sigma_0^2 L^3 (17 - 6G_{\text{K}}) = -\frac{3}{10}\pi\chi\frac{M^2 G}{L}, \tag{13.95}$$

где G_{K} — постоянная Каталана, $\sigma_0 = \rho L\varepsilon$, а χ дана в (12.20). Этот предел и даёт *гравитационную энергию диска с* $\sigma(r)$ *из* (13.94).

Но надо пояснить, почему предельный переход от однородного конуса к диску даёт возможность проверить саму формулу для энергии конуса (13.93)? Всё дело в том, что энергия такого же диска была найдена нами (см. далее формулу (14.208)) совершенно другим способом: методом *предельного софокусного перехода от специального неоднородного сфероида к диску*. Сравнивая (13.95) и (14.208), убеждаемся в справедливости сказанного. Содружество методов приносит свои плоды[2] — ведь сейчас выражение энергии прямого кругового конуса мы фактически проверили через энергию слоисто-неоднородного сфероида!

Второй способ проверки выражения (13.93) — это асимптотический переход к очень малым углам α. В этом пределе прямой круговой конус, как и шаровой сектор, «складывается веером» в неоднородный стержень длиной L, и для него мы находим

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{\pi G\rho^2 L^5}{5}\left\{\pi\left[\ln\frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4}\right]\alpha^4 - \frac{64}{9}\alpha^5 + O\left(\alpha^6\right)\right\}. \tag{13.96}$$

Но с чем же сравнивать результат такого асимптотического перехода к стержню? Разумеется, *с аналогичным выражением* (13.64), *которое было получено выше из энергии шарового сектора*! Как видим, выражения (13.64) и (13.96) (при очевидной замене R на L в первом) с точностью до $O\left(\alpha^6\right)$ оказываются совершенно одинаковыми[3].

На рис. 113 показаны результаты расчётов по формуле (13.93).

§ 13.5. Гравитационная энергия однородного плоского шарового слоя

Рассмотрим ещё одну новую задачу на применение четвёртого метода.

Дан плоский слой в однородном шаре радиуса R (рис. 114). Углы α_1 и α_2 могут изменяться в пределах

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \pi. \tag{13.97}$$

В частных случаях такой слой может превращаться в полный шар, шаровой сегмент, полушар и даже в тонкий круглый диск.

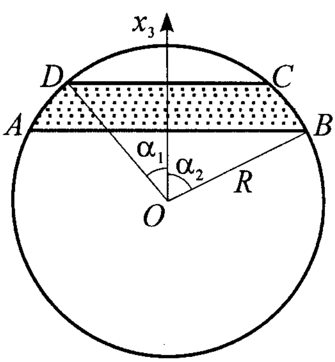


Рис. 114. Плоский шаровой слой

13.5.1. Потенциалы слоя на оси симметрии

Поместив начало отсчёта в центр шара, находим потенциалы шарового слоя на оси симметрии. Нормируя все координаты на R, имеем двойной интеграл

[2] Потенциальная энергия такого диска будет нами найдена также и через его эквигравитирующий стержень (см. в главе 14 задачу 14.13.

[3] Таким образом, различие между разложениями (13.64) и (13.96) начинается только с членов шестого порядка по α.

$$\varphi(x_3) = \pi G\rho R^2 \int\limits_{\cos\alpha_2}^{\cos\alpha_1} dx_3' \int\limits_0^{r_m^2} \frac{dy}{\sqrt{y + (x_3 - x_3')^2}}, \tag{13.98}$$

где

$$r_m^2 = 1 - {x'}_3^2. \tag{13.99}$$

Интегрируя и делая после этого замену $x_3 \to \zeta$, получим

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left\{ \frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} - \frac{3}{2}\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right) - \right.$$
$$\left. - 3\zeta^2 + 3\zeta\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) \right\}, \tag{13.100}$$

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left\{ \frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} + \frac{3}{2}\left(\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\right) - \right.$$
$$\left. - 3\zeta\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) \right\}. \tag{13.101}$$

Здесь и ниже для краткости мы обозначили

$$\tilde{R}_1 = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha_1 + 1}, \quad \tilde{R}_2 = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta\cos\alpha_2 + 1}. \tag{13.102}$$

Выполним проверку: в случае шара $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, и формулы (13.100) и (13.101) дают

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) &= \frac{2}{3}\pi G\rho R^2\left(3 - \zeta^2\right); \\ \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) &= \frac{MG}{\zeta} \end{aligned} \tag{13.103}$$

– верно!

Ещё одна проверка: в частном случае шарового сегмента, когда $\alpha_1 = 0$, из формул (13.100) и (13.101) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) &= \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left(\frac{\tilde{R}_2^3 - 1}{\zeta} + \frac{3}{2} - 2\zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha_2 - \frac{3}{2}\cos^2\alpha_2 \right); \\ \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) &= \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left(\frac{\tilde{R}_2^3 + 1}{\zeta} - \frac{3}{2} - \zeta^2 + 3\zeta\cos\alpha_2 - \frac{3}{2}\cos^2\alpha_2 \right). \end{aligned} \tag{13.104}$$

Эти выражения с точностью до обозначений также совпадают с внутренним (12.152) и внешним (12.151) потенциалами однородного сегмента.

Далее, для применения основной формулы четвёртого метода (13.6) нам требуется знать комбинацию:

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta\frac{d\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)}{d\zeta} = 2\pi G\rho R^2 \times S(\zeta), \tag{13.105}$$

где мы обозначили

$$S(\zeta) = \tilde{R}_2\left(\frac{1}{\zeta} - \cos\alpha_2\right) - \tilde{R}_1\left(\frac{1}{\zeta} - \cos\alpha_1\right) + \\ + \quad \zeta(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2. \tag{13.106}$$

13.5.2. Гравитационная энергия слоя в виде контурного интеграла и его преобразование

С учётом сказанного выше, формула (13.6) для гравитационной энергии принимает вид

$$W_{\text{слоя}} = -\frac{2}{15\,i}\pi G\rho^2 R^5 \times \\ \times \oint S(\zeta)\left[\frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} - 3\zeta(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + \frac{3}{2}\left(\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\right)\right] d\zeta, \tag{13.107}$$

где $S(\zeta)$ из (13.106).

Для дальнейшего важно, что контур интегрирования в (13.107) мы натягиваем на особые точки аналитического продолжения *внешнего* потенциала, расположенные *внутри* шарового слоя. При этом следует учитывать, что в ходе деформации данного контура интегрирования образуется ещё и малый кружок вокруг особой точки типа полюса в начале системы отсчёта, совпадающей с центром шара O. Необходимо знать, поэтому, и вычет в этой особой точке.

При деформации исходный контур интегрирования разбиваем на верхний и нижний контуры (рис. 115), которые натягиваются (соответственно) на следующие пары точек ветвления первого порядка:

$$\zeta = e^{\pm i\alpha_1}; \quad \zeta = e^{\pm i\alpha_2} \tag{13.108}$$

и, что относится только к нижнему контуру, ещё и на полюс O.

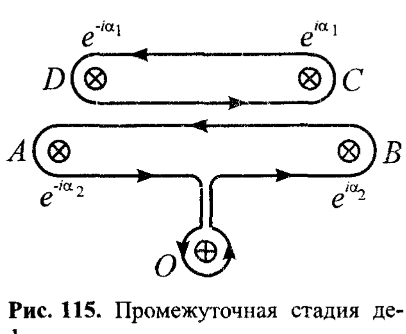


Рис. 115. Промежуточная стадия деформации контура интегрирования в задаче о шаровом слое

При обходе верхнего контура *в выражении внешнего потенциала меняет свой знак радикал* $\tilde{R}_1$, *а нижнего контура — радикал* $\tilde{R}_2$ (см. выражение в квадратных скобках под интегралом (13.107)).

Стискивая оба контура (или делая *разрез* между точками ветвления) и учитывая вышесказанное, получим однократные интегралы в комплексной плоскости:

$$W_{\text{слоя}} = -\frac{4}{15\,i}\pi G\rho^2 R^5\left(\Phi_1 + \Phi_2 + 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\zeta=0} \mathrm{F}(\zeta)\right), \tag{13.109}$$

где

$$\Phi_1 = -\int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} S(\zeta)\frac{\tilde{R}_1^3}{\zeta}\,d\zeta; \tag{13.110}$$

$$\Phi_2 = \int\limits_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} S(\zeta)\frac{\tilde{R}_2^3}{\zeta}\,d\zeta \tag{13.111}$$

и, напомним, $S(\zeta)$ из (13.106). Вычет же берётся от функции, которая будет указана ниже (см. разд. 13.5.7).

13.5.3. Вычисление интегралов, входящих в (13.110)

Прежде всего, приводим *(13.110)* к виду

$$\Phi_1 = T_1 - P_1 - D_1, \tag{13.112}$$

где

$$T_1(\alpha_1) = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1{}^2(\zeta)\left[1 + 2\cos^2\alpha_1 - \zeta\cos\alpha_1 - \frac{3\cos\alpha_1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\right]d\zeta; \tag{13.113}$$

$$P_1(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1(\zeta)\left(\zeta - 2\cos\alpha_1 + \frac{1}{\zeta}\right)\left[\zeta\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\right]d\zeta; \tag{13.114}$$

$$D_1(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1\tilde{R}_2\left[1 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \zeta\cos\alpha_2 - \frac{2\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\right]d\zeta. \tag{13.115}$$

Забегая вперёд заметим, что первые два из этих интегралов берутся в элементарных функциях от углов α_1 и α_2:

$$T_1(\alpha_1) = i\left[\frac{2}{3}\sin 3\alpha_1\left(1 + 4\cos^2\alpha_1\right) - \frac{1}{2}\sin 4\alpha_1\cos\alpha_1 - 2\sin 2\alpha_1\cos\alpha_1\left(3 + 2\cos^2\alpha_1\right)\right.$$
$$\left. + 2\sin\alpha_1\left(3 + 8\cos^2\alpha_1\right) - 10\alpha_1\cos\alpha_1\right]. \tag{13.116}$$

$$P_1(\alpha_1,\alpha_2) = i\pi\left\{\sin^2\alpha_1\left[\frac{1}{8}\left(5\cos^2\alpha_1 - 1\right)\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) - \right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\cos\alpha_1\left[\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right)^2 + 2\cos^2\alpha_1\right] + \cos\alpha_1\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right) + \tag{13.117}$$
$$\left.\left.\frac{1}{2}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right)\right] - \left(1 - \cos\alpha_1\right)\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right)\right\}.$$

Нахождение же интеграла $D_1(\alpha_1,\alpha_2)$ из (13.115) не является простым и потребует, как мы убедимся далее тщательного анализа с применением реккурентных формул (см. разд. 13.5.5).

13.5.4. Вычисление интегралов, входящих в (13.111)

С этой целью приводим вначале (13.111) к виду

$$\Phi_2 = T_2 + P_2 - D_2, \tag{13.118}$$

где

$$T_2(\alpha_2) = \int\limits_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_2{}^2(\zeta)\left[1 + 2\cos^2\alpha_2 - \zeta\cos\alpha_2 - \frac{3\cos\alpha_2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\right] d\zeta; \qquad (13.119)$$

$$P_2(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_2(\zeta)\left(\zeta - 2\cos\alpha_2 + \frac{1}{\zeta}\right)\left[\zeta(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\right] d\zeta; \qquad (13.120)$$

$$D_2(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_1\tilde{R}_2\left[1 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \zeta\cos\alpha_1 - \frac{2\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\right] d\zeta. \qquad (13.121)$$

Две первые из представленных здесь трёх квадратур вновь удаётся выразить через элементарные тригонометрические функции от углов α_1 и α_2; беря эти интегралы, после многих преобразований получим

$$\begin{gathered} T_2(\alpha_2) = i\left[\frac{2}{3}\sin 3\alpha_2\left(1 + 4\cos^2\alpha_2\right) - \frac{1}{2}\sin 4\alpha_2\cos\alpha_2 - \right. \\ \left. -2\sin 2\alpha_2\cos\alpha_2\left(3 + 8\cos^2\alpha_2\right) - 10\alpha_2\cdot\cos\alpha_2\right]. \end{gathered} \qquad (13.122)$$

$$\begin{gathered} P_2(\alpha_1,\alpha_2) = i\pi\left\{\sin^2\alpha_2\left[\frac{1}{8}\left(5\cos^2\alpha_2 - 1\right)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) - \frac{1}{2}\cos\alpha_2\times\right.\right. \\ \times\left[(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2 + 2\cos^2\alpha_2\right] + \cos\alpha_2\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right) + \\ \left.\left. + \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right] - (1 - \cos\alpha_2)\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right)\right\}. \end{gathered} \qquad (13.123)$$

Заметим, что выражение для интеграла $T_2(\alpha_2)$ получается из выражения $T_1(\alpha_1)$ путем одной только замены $\alpha_1 \to \alpha_2$. Существенно и то, что интеграл $P_2(\alpha_1,\alpha_2)$ получается из $P_1(\alpha_1,\alpha_2)$ перестановкой углов α_1 и α_2. Указанные здесь свойства симметрии используемых выражений важно учитывать для контроля за правильностью найденных сложных формул.

Интеграл же (13.121) намного сложнее только что рассмотренных и он будет взят в разд. 13.5.6.

На данном этапе исследования гравитационную энергию плоского однородного шарового слоя можно представить в таком виде

$$W_{\text{слоя}} = -\frac{4}{15\,i}\pi G\rho^2 R^5\left\{T_1 + T_2 - P_1 + P_2 - D_1 - D_2 + 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{\zeta=0}\mathrm{F}(\zeta)\right\}. \qquad (13.124)$$

Переходим к следующему этапу расчётов.

13.5.5. Квадратура D_1 из (13.115)

Так как

$$\tilde{R}_1^2\tilde{R}_2^2 = \zeta^4 + a_1\zeta^3 + a_2\zeta^2 + a_1\zeta + 1, \qquad (13.125)$$

где величины

$$a_1 = -2\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right), \quad a_2 = 2\left(1 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right) \tag{13.126}$$

симметричны относительно перестановки местами α_1 и α_2, искомое выражение для D_1 можно представить в виде

$$\begin{aligned} D_1 = &-\cos\alpha_2 I_5 + I_4\left(\frac{a_2}{2} - a_1\cos\alpha_2\right) + \\ &+ I_3\left[a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \cos\alpha_2\left(1 - a_2\right)\right] + I_2\left(2 + a_1^2 + \frac{a_2^2}{2}\right) + \\ &+ I_1\left(3a_1 + \frac{3}{2}a_1a_2 + a_2\cos\alpha_2\right) + I_0\left[\frac{3}{2}a_2 + a_1\left(a_1 + \cos\alpha_2\right)\right]. \end{aligned} \tag{13.127}$$

Здесь

$$I_n = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{\zeta^n d\zeta}{\tilde{R}_1(\zeta)\,\tilde{R}_2(\zeta)} \tag{13.128}$$

(n — целое число), причем при выводе этой формулы использовались равенства (см. (13.131))

$$I_2 = I_{-2}; \quad I_1 = I_{-1}. \tag{13.129}$$

Заметим, что достаточно найти интегралы (13.128)) только с $n = 0, 1, 2$, так как I_3, I_4 и I_5 удовлетворяют системе однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &8I_5 + 7a_1I_4 + 6a_2I_3 + 5a_1I_2 + 4I_1 = 0, \\ &6I_4 + 5a_1I_3 + 4a_2I_2 + 3a_1I_1 + 2I_0 = 0, \\ &4I_3 + 3a_1I_2 + 2a_2I_1 + a_1I_0 = 0. \end{aligned} \tag{13.130}$$

Еще одно соотношение

$$2I_2 + a_1I_1 - a_1I_{-1} - 2I_{-2} = 0 \tag{13.131}$$

даёт равенства (13.129). Эти алгебраические выражения получены из рекуррентной формулы (см. справочник [31], с. 645).

Основные интегралы I_0, I_1 и I_2 находим дробно-линейной заменой:

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \quad d\zeta = \frac{-2dz}{(1+z)^2}, \tag{13.132}$$

позволяющей одновременно избавиться от линейных членов в обоих радикалах R_1 и R_2 из (13.102). Тогда, как легко видеть,

$$\tilde{R}_1 = 2\cos\frac{\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{g^2+z^2}}{1+z}, \quad \tilde{R}_2 = 2\cos\frac{\alpha_2}{2}\frac{\sqrt{h^2+z^2}}{1+z}. \tag{13.133}$$

Здесь

$$g = \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}; \quad h = \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}, \tag{13.134}$$

так что при $\alpha_2 > \alpha_1$ имеем

$$h > g.$$

По указанной схеме последовательно находим

$$I_0 = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{d\zeta}{\tilde{R}_1(\zeta)\,\tilde{R}_2(\zeta)} = \frac{1}{N}\int\limits_0^{ig} \frac{dz}{\sqrt{(g^2+z^2)(h^2+z^2)}}, \tag{13.135}$$

где мы обозначили

$$N = \cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}. \tag{13.136}$$

Ещё одной заменой

$$z = ix \tag{13.137}$$

получим

$$I_0 = \frac{i}{N}\int\limits_0^{g} \frac{dx}{\sqrt{(g^2-x^2)(h^2-x^2)}} = \frac{i}{Nh}\mathrm{K}(k), \tag{13.138}$$

причём модуль эллиптического интеграла здесь (и ниже)

$$k = \frac{g}{h} < 1. \tag{13.139}$$

Аналогично находятся и два других интеграла. Так,

$$I_1 = \frac{2i}{Nh}\Pi\left[-g^2, k\right] - I_0. \tag{13.140}$$

Более сложных выкладок требует интеграл

$$I_2 = \int\limits_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\tilde{R}_1(\zeta)\,\tilde{R}_2(\zeta)}. \tag{13.141}$$

Однако и его можно выразить через полные эллиптические интегралы. После многих преобразований получим

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{2i}{Nh}\Bigg\{\left(1-\frac{4}{1+g^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{4g^2}{\left(1+g^2\right)\left(g^2+k^2\right)}\mathrm{E}(k) + \\ + \frac{4\left(k^2-g^2\right)}{\left(1+g^2\right)\left(g^2+k^2\right)}\Pi\left[-g^2,k\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{13.142}$$

Разрешая теперь систему уравнений (13.130), находим оставшиеся интегралы через уже известные:

$$\begin{pmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \tag{13.143}$$

где члены матрицы

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11} = -\frac{1}{4}a_1; \quad \alpha_{12} = -\frac{1}{2}a_2; \quad \alpha_{13} = -\frac{3}{4}a_1;\\
&\alpha_{21} = \frac{5}{24}a_1^2 - \frac{1}{3}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2}a_1\left(\frac{5}{6}a_2 - 1\right); \quad \alpha_{23} = \frac{5}{8}a_1^2 - \frac{2}{3}a_2;\\
&\alpha_{31} = \frac{1}{8}a_1\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{2}a_2 - \frac{35}{24}a_1^2\right);\\
&\alpha_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a_2^2 - 1 + \frac{7}{8}a_1^2 - \frac{35}{45}a_1^2 a_2\right);\\
&\alpha_{33} = \frac{5}{8}a_1\left(\frac{11}{6}a_2 - 1 - \frac{7}{8}a_1^2\right).
\end{aligned}
\tag{13.144}
$$

Таким образом, для нахождения D_1 при заданных углах α_1 и α_2 плоского шарового слоя вначале: вычисляем I_0 из (13.138), I_1 из (13.140), I_2 из (13.142); затем по формулам (13.143) и (13.144) находим интегралы I_3, I_4 и I_5, и, подставляя все эти выражения в формулу (13.127), получим в итоге сам интеграл D_1.

Подчеркнём, что D_1 выражается через полные эллиптические интегралы.

13.5.6. Квадратура D_2 из (13.121)

Обращаясь к выражению D_2 из (13.121), мы неожиданно обнаруживаем одну важную тонкость. Дело в том, что интервал интегрирования в D_2 содержит внутри себя две особые точки $e^{\pm i\alpha_1}$ (рис. 116).

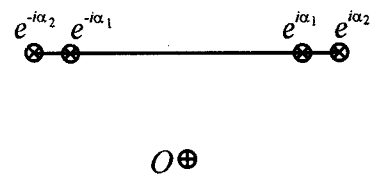


Рис. 116. Превращение второго контура интегрирования в линейный интервал и в кружок вокруг полюса

Прежде всего, D_2 можно, конечно, записать из выражения D_1 (см. (13.127)), поменяв в нём местами α_1 и α_2:

$$
\begin{aligned}
D_2 = &-\cos\alpha_1 \tilde{I}_5 + \tilde{I}_4\left(\frac{a_2}{2} - a_1\cos\alpha_1\right) + \\
&+ \tilde{I}_3\left[a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \cos\alpha_1(1 - a_2)\right] + \tilde{I}_2\left(2 + a_1^2 + \frac{a_2^2}{2}\right) + \\
&+ \tilde{I}_1\left(3a_1 + \frac{3}{2}a_1 a_2 + a_2\cos\alpha_1\right) + \tilde{I}_0\left[\frac{3}{2}a_2 + a_1(a_1 + \cos\alpha_1)\right].
\end{aligned}
\tag{13.145}
$$

Но находить здесь конкретные интегралы

$$
\tilde{I}_n = \int\limits_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \frac{\zeta^n}{\tilde{R}_1(\zeta)\tilde{R}_2(\zeta)} d\zeta \tag{13.146}
$$

по той схеме, как это было выше для интегралов I_n, сейчас уже нельзя. Дело в том, что интегрирование в $\tilde{I}_n$ производится от $e^{-i\alpha_2}$ до $e^{i\alpha_2}$, и, следовательно, на крайних отрезках этого интервала

$$e^{-i\alpha_2} \leqslant \zeta \leqslant e^{-i\alpha_1}; \quad e^{i\alpha_1} \leqslant \zeta \leqslant e^{i\alpha_2} \tag{13.147}$$

радикал

$$\tilde{R}_2 = \sqrt{\left(\zeta - e^{-i\alpha_2}\right)\left(\zeta - e^{i\alpha_2}\right)} \tag{13.148}$$

имеет уже мнимое значение.

Однако трудность эту можно преодолеть следующим красивым приёмом: вместо замены (13.132) делаем в (13.146) подстановку

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \quad d\zeta = \frac{2dz}{(1+z)^2}. \tag{13.149}$$

Тогда

$$\tilde{R}_1 = 2\sin\frac{\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{z^2+\frac{1}{g^2}}}{1+z}, \quad \tilde{R}_2 = 2\sin\frac{\alpha_2}{2}\frac{\sqrt{z^2+\frac{1}{h^2}}}{1+z} \tag{13.150}$$

с h и g из (13.134). Поскольку теперь

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \tag{13.151}$$

пределы интегрирования в (13.146) будут следующими:

$$-\frac{i}{h} \leqslant \zeta \leqslant \frac{i}{h}. \tag{13.152}$$

В выражениях для пределов интегрирования (13.152) сейчас следует избавиться от i, положив

$$x = \frac{z}{i}, \tag{13.153}$$

после чего вместо (13.146) имеем интеграл

$$\tilde{I}_n = \frac{i}{2\tilde{N}}\int\limits_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}\left(\frac{ix-1}{ix+1}\right)^n\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2}-x^2\right)\left(\frac{1}{h^2}-x^2\right)}}, \tag{13.154}$$

где

$$\tilde{N} = \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}. \tag{13.155}$$

Так как при $\alpha_2 > \alpha_1$ имеем

$$\frac{1}{g} > \frac{1}{h}, \tag{13.156}$$

и затруднения с мнимостью радикала в (13.154) *теперь исчезают.*

Находим:

$$\tilde{I}_0 = \frac{i}{\tilde{N}}\int\limits_0^{\frac{1}{h}}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2}-x^2\right)\left(\frac{1}{h^2}-x^2\right)}} = \frac{i}{\tilde{N}}g\,\mathrm{K}\left(k\right). \tag{13.157}$$

Здесь и ниже k из (13.139).

Далее,

$$\tilde{I}_1 = -\frac{i}{\tilde{N}} \int\limits_0^{\frac{1}{h}} \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right)\left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} = \frac{i}{\tilde{N}} \left(\mathrm{K}(k) - 2\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right). \qquad (13.158)$$

Наконец,

$$\tilde{I}_2 = \frac{i}{\tilde{N}} g \left\{ \mathrm{K}(k) - 8\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] + 8 \int\limits_0^{\frac{1}{h}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right)\left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} \right\}. \qquad (13.159)$$

Для взятия оставшегося в (13.159) интеграла сделаем замену

$$x = \frac{1}{h} \sin\theta. \qquad (13.160)$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{1}{h}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right)\left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} = g \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{h^2}\sin^2\theta\right)^2 \sqrt{1 + k^2 \sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{g}{2\left(1 + \frac{1}{h^2}\right)\left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right)} \left\{ -\left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right) \mathrm{K}(k) + \frac{1}{h^2} \mathrm{E}(k) + \right. \qquad (13.161)$$

$$\left. + \left[\frac{1}{h^4} + \frac{2}{h^2}(1+k^2) + 3k^2 \right] \Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right\}.$$

Поэтому

$$\tilde{I}_2 = \frac{i}{\tilde{N}} g \left\{ \mathrm{K}(k) - 8\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] + \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{h^2}\right)\left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{1}{h^2} \mathrm{E}(k) - \left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right) \mathrm{K}(k) + \left[\frac{1}{h^4} + \frac{2}{h^2}(1+k^2) + 3k^2 \right] \Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right] \right\}. \qquad (13.162)$$

Так как величины a_1 и a_2 из (13.126) инвариантны относительно перестановки местами углов α_1 и α_2, то для нахождения интегралов $\tilde{I}_3$, $\tilde{I}_4$ и $\tilde{I}_5$ можно использовать те же рекуррентные соотношения (13.130), которые применялись и для интегралов I_n без тильды. В итоге, согласно формулам (13.143), и сейчас имеем в изящном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_4 \\ \tilde{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_0 \\ \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} \tag{13.163}$$

с теми же коэффициентами α_{ij} из (13.144).

Таким образом, величина D_2 также выражается через стандартные полные эллиптические интегралы.

13.5.7. Нахождение вычета в (13.109)

Вычет следует находить от подынтегральной функции $\mathrm{F}(\zeta)$ в (13.121). Очевидно, вычеты имеют те члены, в знаменателе которых стоят или ζ, или ζ^2. Расчёты тогда показывают, что

$$\operatorname*{res}_{\zeta=0} \mathrm{F}(\zeta) = -(3\cos\alpha_2 + 2\cos\alpha_1)\,. \tag{13.164}$$

13.5.8. Полная энергия слоя

Собирая вместе все найденные выше выражения, входящие в (13.124), после многих трудоёмких преобразований и упрощений, в итоге получаем *гравитационную энергию однородного плоского шарового слоя*:

$$W_{\text{слоя}} = -\frac{\pi G\rho^2 R^5}{2880}\left\{q_1\mathrm{K}(k) + q_2\mathrm{E}(k) + q_3\Pi\left[-\frac{1}{h^2}, k\right] + q_4\Pi\left[-g^2, k\right] + q_5\right\}, \tag{13.165}$$

где модуль k у всех эллиптических интегралов один и тот же и дан в (13.139). Формула (13.165) содержит пять коэффициентов, представляющих собой выражения, куда входят элементарные тригонометрические функции от геометрических параметров слоя. Эти коэффициенты оказываются такими:

$$q_1 = \frac{8}{hN}\,[278 - 404\cos\alpha_1 + 112\cos 2\alpha_1 - 54\cos 3\alpha_1 - 5\cos 4\alpha_1 + 2\,(202+$$

$$+704\cos\alpha_1 + 7\cos 2\alpha_1 + 16\cos 3\alpha_1 + 7\cos 4\alpha_1)\cos\alpha_2 - 2\,(-56 + 7\cos\alpha_1 +$$

$$+22\cos 2\alpha_1 + 13\cos 3\alpha_1)\cos 2\alpha_2 + 2\,(27 + 16\cos\alpha_1 + 13\cos 2\alpha_1)\cos 3\alpha_2 -$$

$$-(5 + 14\cos\alpha_1)\cos 4\alpha_2]\,;$$

$$q_2 = 16hN\,[1182 + 15\cos 4\alpha_1 + 608\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - 80\cos 3\alpha_1\cos\alpha_2 + 112\cos 2\alpha_2 +$$

$$+\,4\cos 2\alpha_1\,(28 + 9\cos 2\alpha_2) - 80\cos\alpha_1\cos 3\alpha_2 + 15\cos 4\alpha_2]\,;$$

$$q_3 = \frac{1}{hN}\,[24\cos\alpha_1\,(302 - 16\cos 2\alpha_1 - 5\cos 4\alpha_1) + 288\,(28 - \cos 2\alpha_1 + \cos 4\alpha_1)\cos\alpha_2 -$$

$$-\,288\cos\alpha_1\,(-4 + \cos 2\alpha_1)\cos 2\alpha_2 - 96\,(3 + \cos 2\alpha_1)\cos 3\alpha_2 + 72\cos\alpha_1\cos 4\alpha_2]\,;$$

$$q_4 = \frac{1}{hN}\,[288\cos\alpha_1\,(2\cos 2\alpha_1 - 29) - 72\,(98 + 14\cos 2\alpha_1 + \cos 4\alpha_1)\cos\alpha_2 +$$

$$+ 384\cos^3\alpha_1\cos 2\alpha_2 + 36\,(7 + 4\cos 2\alpha_1)\cos 3\alpha_2 - 288\cos\alpha_1\cos 4\alpha_2 + 60\cos 5\alpha_2\big]\,;$$

$$q_5 = \frac{1}{hN}\,\{-2hN\,[12\,(87\pi - 320\alpha_1)\cos\alpha_1 + 3\pi\,(-48\cos 2\alpha_1 - 11\cos 3\alpha_1 + \tag{13.166}$$

$$+3\cos 4\alpha_1 + \cos 5\alpha_1) + 2560\sin\alpha_1 + 480\sin 3\alpha_1 - 32\sin 5\alpha_1] + 6hN\,\times$$

$$\times\,(2\cos\alpha_1 + 1)\,[640\alpha_2 - 466\pi + \pi\,(-48\cos\alpha_1 - 48\cos 2\alpha_1 + 4\cos 3\alpha_1 +$$

$$+3\cos 4\alpha_1)] + 3\pi\left(59\cos\frac{\alpha_1}{2} + 44\cos\frac{3\alpha_1}{2} - 8\cos\frac{5\alpha_1}{2} - 4\cos\frac{7\alpha_1}{2}\right)\sin\frac{5\alpha_2}{2} +$$

$$+3\pi\left(-8\cos\frac{\alpha_1}{2} + 7\cos\frac{3\alpha_1}{2} + 4\cos\frac{5\alpha_1}{2}\right)\sin\frac{7\alpha_2}{2} - 3\pi\left(4\cos\frac{\alpha_1}{2} + 3\cos\frac{3\alpha_1}{2}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{9\alpha_2}{2} + 4hN\,(-960\alpha_2 + 699\pi - 1280\sin\alpha_2 - 240\sin 3\alpha_2 + 16\sin 5\alpha_2) +$$

$$+3\pi\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{11\alpha_2}{2}\bigg\}.$$

Напомним, что в этих формулах

$$hN = \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}. \tag{13.167}$$

Таким образом, поставленная задача решена: в (13.165) даётся искомое выражение *гравитационной энергии плоского однородного шарового слоя.*

13.5.9. Проверка формулы (13.165)

Как видим, выражение (13.165) — сложное и поэтому требует всесторонней проверки. Очевидно, эффективной проверкой для него является переход от шарового слоя к известным уже случаям.

Задача 13.7. *Доказать, что в пределе*

$$\alpha_1 \to 0, \quad \alpha_2 \to \pi$$

формула (13.165) *приводит к энергии однородного шара* (1.64).

Решение. В этом случае находим:

$$q_1 = -q_2 = 2^{14};\ q_3 = q_4 = 0;\ q_5 = 3\cdot 2^{10}\pi,$$

что и даёт энергию однородного шара. ▼

Задача 13.8. *Доказать, что в пределе*

$$\alpha_1 \to 0, \quad \alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$$

формула (13.165) *приводит к энергии однородного полушара* (12.157).

Решение. В этом пределе $g = 0$, $h = 1$. Тогда $k = 0$ и, следовательно, $\mathrm{K}(0) = \mathrm{E}(0) = \frac{\pi}{2}$, так что формула (13.165) приводится к виду

$$W_{\text{полушара}} = -\pi G\rho^2 R^5\left\{\frac{64}{45} + \frac{9}{10}\pi - \frac{31}{15}\sqrt{2}\cdot\Pi\,[-1,0]\right\}. \tag{13.168}$$

Но так как

$$\Pi\,[-1,0]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\tag{13.169}$$

то (13.168) даёт

$$W_{\text{полушара}}=-\frac{2}{45}\pi\,(32-3\pi)\,G\rho^2R^5,\tag{13.170}$$

что совпадает с (12.157). ▼

Задача 13.9. *Доказать, что в пределе $\alpha_1\to 0$ формула для энергии слоя* (13.165) *действительно даёт энергию однородного шарового сегмента* (13.43) *или* (12.156).

Решение. При $\alpha_1\to 0$:

$$g=0,\ k=0,\ \mathrm{K}\,(0)=\mathrm{E}\,(0)=\frac{\pi}{2},\ \Pi\left[-\frac{1}{h^2},k\right]=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\ \Pi\left[-g^2,k\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Коэффициенты будут теперь такими:

$$\begin{aligned}
q_1&=-\frac{1024}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(19\cos^8\frac{\alpha}{2}-66\cos^6\frac{\alpha}{2}+64\cos^4\frac{\alpha}{2}-48\cos^2\frac{\alpha}{2}+16\right);\\
q_2&=2048\left(15\cos^8\frac{\alpha}{2}-50\cos^6\frac{\alpha}{2}+58\cos^4\frac{\alpha}{2}-16\cos^2\frac{\alpha}{2}+8\right)\sin\frac{\alpha}{2};\\
q_3&=\frac{3072}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos^4\frac{\alpha}{2}\left(3\cos^4\frac{\alpha}{2}-10\cos^2\frac{\alpha}{2}+12\right);\\
q_4&=\frac{3072}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos^4\frac{\alpha}{2}\left(10\cos^6\frac{\alpha}{2}-37\cos^4\frac{\alpha}{2}+50\cos^2\frac{\alpha}{2}-28\right);\\
q_5&=\frac{512}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[-64\cos^{11}\frac{\alpha}{2}+192\cos^9\frac{\alpha}{2}-152\cos^7\frac{\alpha}{2}-\right.\\
&-16\cos^5\frac{\alpha}{2}+70\cos^3\frac{\alpha}{2}-30\cos\frac{\alpha}{2}+\\
&+3\pi\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^{10}\frac{\alpha}{2}-8\cos^8\frac{\alpha}{2}+10\cos^6\frac{\alpha}{2}-2\cos^4\frac{\alpha}{2}-10\cos^2\frac{\alpha}{2}+3\right)+\\
&\left.+15\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\right].
\end{aligned}\tag{13.171}$$

В итоге, после многих преобразований, формула (13.165) даёт

$$\begin{aligned}
W_{\text{сегмента}}=-\frac{\pi[G\rho^2R^5}{1440}\,&[30\,(35\pi-128\cdot\alpha)\cos\alpha-3\pi\,(160\cos 2\alpha-\\
&-35\cos^3\alpha+\cos 5\alpha)-32\,(21\pi-80\sin\alpha-15\sin 3\alpha+\sin 5\alpha)]\,.
\end{aligned}\tag{13.172}$$

Но это выражение, как уже нетрудно показать, эквивалентно ранее найденным формулам *гравитационной энергии однородного шарового сегмента* (13.43) и (12.156)! ▼

Итак, мы провели всестороннюю аналитическую проверку выражения энергии слоя (13.165), сводя его к известным и твёрдо установленным ранее результатам.

Но кроме аналитической, была проведена и численная проверка формулы для энергии слоя. А именно, сравнивая результаты расчётов по формуле (13.165) с результатами, полученными методом Монте-Карло[4] для некоторых значений углов α_1 и α_2, мы и в этом случае получили полное согласие. Таким образом, сложное выражение (13.165) прошло проверку всеми доступными нам способами.

Задача 13.10. *Найти взаимную гравитационную энергию шарового слоя и сегмента, составляющих вместе однородный шаровой сегмент бóльших размеров.*

§ 13.6. О гравитационной энергии одномерных стержней

О ней можно говорить только в асимптотическом пределе

Одномерные стержни ведут себя на особицу: ни потенциала (внутреннего), ни потенциальной энергии в конечном виде они, разумеется, не имеют (в обоих случаях расходимость главного члена — логарифмическая). Но, соглашаясь с этим, думать в этом направлении полезно уже потому, что при переходе в асимптотическом пределе от объёмных фигур к стержням можно, оказывается, проверить выражения W для однородного шарового сектора (13.64) и конуса (13.96)! А эта проверка, ввиду сложности и новизны рассмотренных здесь задач, очень нужна!

Поэтому рассмотрим стержни подробнее.

13.6.1. Однородные стержни

Стержни, разумеется, существуют и сами по себе, но для нас сейчас важно обратить внимание на то, что однородные (в конкретном данном случае) стержни можно получить в асимптотическом пределе из некоторых объёмных тел. Например — из вытянутого сфероидального гомеоида при софокусном превращении этой эллипсоидальной оболочки в однородный фокальный отрезок (см. §5.8). Основываясь на этом факте, для нахождения энергии стержня длиной L возьмём выражение гравитационной энергии тонкого гомеоида (8.42) и подставим в него величину $I(1)$ из (1.45) с заменой там полуосей на величины (5.37); получим

$$W_{\text{гом}} = -\frac{M^2G}{4a_1}\frac{1-e^2}{e}\frac{m}{m^2-e^2}\ln\frac{1+e}{1-e}.$$

Выполним теперь софокусный переход от гомеоида к стержню; при этом выполняются соотношения

$$a_1 e \to \sqrt{a_1^2 - a_3^2} = \frac{L}{2};$$
$$e \to \mathrm{E}\,(m) = \frac{e}{m};$$
$$m \to e,$$

с учётом которых получим

$$W_{\text{ст}} = -\frac{M^2G}{2Le}\lim_{m\to e}\ln\frac{m+e}{m-e}. \tag{13.173}$$

Как и подчеркивалось выше, в выражении для *энергии стержня* действительно присутствует логарифмическая расходимость.

[4] Расчёты методом Монте-Карло проводились на кафедре астрономии УдГУ.

Совершенно другим является второй способ нахождения энергии однородного стержня: в пределе из плоской пластины. Обозначим отношение сторон прямоугольной пластины через $\varepsilon = \frac{a_3}{a_2}$ и пусть $\varepsilon \ll 1$. Превратим теперь эту пластину (с сохранением её массы) в однородный одномерный стержень с длиной a_2, массой $M_{\text{ст}}$ и плотностью $\mu = \sigma \cdot a_3 = \frac{M_{\text{ст}}}{a_2}$. Тогда, с учетом выражения энергии пластины (12.54), для этого стержня следует

$$W_{\text{ст}} = -\frac{M_{\text{ст}}^2 G}{a_2}\left(\ln\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \ldots\right). \tag{13.174}$$

При $\varepsilon \to 0$ функция $W_{\text{ст}}$ также логарифмически расходится.

Весьма поучительным будет выявление логарифмической расходимости для стержня следующим изящным прямым методом.

А именно, рассмотрим стержень длиной L и одномерной плотностью μ (см. рис. 117). Взаимная энергия двух элементов массы длиной dx' и dx равна $\varphi_{\text{вз}} = -\mu^2 \frac{dx'dx}{x'-x}$.

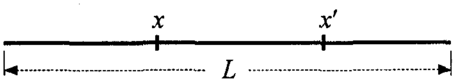


Рис. 117. Стержень и его элементы

Теперь, применяя разработанный в § 14.8 весьма эффективный *метод прогонки* и интегрируя по треугольной области (рис. 124), получим

$$W_{\text{ст}} = -\mu^2 G \int\limits_0^L dx \int\limits_x^L \frac{dx'}{x'-x}. \tag{13.175}$$

Следовательно,

$$W_{\text{ст}} = -\mu^2 GL\left(1 - \lim_{x' \to x} \ln\frac{x'-x}{L}\right), \tag{13.176}$$

что и требовалось показать для данной задачи.

Итак, тремя различными способами нами были получены и три *разных* выражения для энергии однородных стержней. Для сведения этих результатов воедино достаточно, казалось бы, сделать *перенормировку* выражения энергии стержня, отбросив расходящийся член. *Однако такую перенормировку принципиально невозможно сделать*!

И вот почему.

Обратим внимание, что для стержня с плотностью $\mu(x)$ наиболее естественным обрезанием расходимости является исключение из интегрирования участка длины 2ε вокруг пробной точки. Тогда для каждой такой пробной точки получается следующая асимптотика потенциала:

$$\varphi = 2\mu(x) \int\limits_{x+\varepsilon}^{c} \frac{d\zeta}{\zeta - x} \approx 2\mu(x) \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{13.177}$$

и после интегрирования по всему стержню имеем

$$W_{\text{ст}} = -\frac{1}{2}\int \mu(x)\,\varphi(x)\,dx \approx \ln\frac{1}{\varepsilon}\int \mu^2 dx. \tag{13.178}$$

Но существенно, что вычитание бесконечностей для двух стержней с плотностями $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ даёт

$$W_1 - W_2 = \ln\frac{1}{\varepsilon}\int\left(\mu_1^2 - \mu_2^2\right)dx. \tag{13.179}$$

Последний интеграл, вообще говоря, не нуль, так что бесконечность не выпадает. *Это и означает, что общей перенормировки гравитационной энергии для стержней разной плотности просто не существует; обрезание не приводит энергию даже однородных стержней к «общему знаменателю».*

Это обстоятельство не должно, однако, препятствовать нахождению энергии интересующих нас объёмных тел в асимптотическом пределе одномерного стержня.

13.6.2. Неоднородные стержни

Семейство неоднородных стержней, естественно, весьма разнообразное. Но существенно то, что как и для однородных, в выражениях для *гравитационной энергии неоднородных* стержней также имеет место всё та же *логарифмическая расходимость*.

Пример первый. Известный нам стержень (9.6) получается в пределе из однородного вытянутого сфероида.

Задача 13.11. *Найти гравитационную энергию стержня* (9.6).

Следующие два примера имеют для нас особое значение. Рассмотрим неоднородный стержень, который получается в асимптотическом пределе малых углов α из шарового сектора (массу сектора при переходе к стержню фиксируем). При этом сектор вырождается в неоднородный вещественный стержень длиной R с распределением плотности

$$\mu(\zeta) = \pi^2\alpha^2\rho\cdot\zeta^2 = \frac{3M_{\text{ст}}}{R^3}\zeta^2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant R. \tag{13.180}$$

Гравитационную энергию получаемого таким образом стержня находим в асимптотике малых α из формулы (13.62). Заметим: без сохранения массы сектора результат выразился бы рядом (13.64). *Но при сохранении массы* асимптотический переход даёт совсем другое:

$$W_{\text{ст}} = -\frac{9}{5}\frac{M_{\text{ст}}^2 G}{\pi^2 R}\left\{\ln\frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4} - \frac{64}{9\pi}\alpha + \ldots\right\}, \tag{13.181}$$

или, в перенормированном виде,

$$W_{\text{ст}} = \frac{9}{4}\frac{M_{\text{ст}}^2 G}{\pi^2 R}. \tag{13.182}$$

И вот что здесь главное: *стержень с точно таким же распределением плотности* (13.180) *получается в асимптотическом пределе и из прямого однородного конуса*! Поэтому указанный переход к стержню даёт еще одну — *независимую* — проверку для сложных выражений как энергии шарового сектора (13.62), так и однородного конуса (13.93). Для цели книги значение такой проверки невозможно переоценить!

Задача 13.12. *Найти гравитационную энергию стержня, получаемого в асимптотическом пределе из кругового конуса* (13.93).

Решение. Энергия находится также, как и в случае шарового сектора: из ряда (13.96) в асимптотическом пределе стержня с учётом сохранения массы конуса. ▼

Задача 13.13. *Почему, несмотря на логарифмическую расходимость, по одинаковым полученным выражениям гравитационной энергии для стержня с распределением плотности* (13.180) *можно всё же говорить о проверке исходных формул для потенциальной энергии сектора и конуса?*

Ответ. Дело в том, что одинаковые стержни были получены сейчас из выражений энергии шарового сектора и конуса ещё и совершенно одинаковым способом: в пределе малых углов α. Последнее условие как раз и не соблюдалось в трёх примерах *для однородных* стержней, данных выше в (13.173), (13.174) и (13.176) . ▼

Замечания

Материал главы разработан автором.

§ 13.1. Четвёртый метод основан на применении контурных интегралов в комплексной плоскости и на знании особых точек для внутреннего и внешнего потенциалов исследуемого тела. Накидывать контур интегрирования на *внешние* особые точки (включая и бесконечно удалённые) или на точки *внутренние* — дело вкуса исследователя, но всегда деформация контуров интегрирования требует точности и внимания. Далее мы применяем четвёртый метод к решению принципиально новых и трудных задач.

Первоисточник: [21].

§ 13.2. Важная проверка четвёртого метода на сложной задаче для однородного шарового сегмента с известным уже решением из § 12.9.

Первоисточник: [21].

§ 13.3. Найти энергию однородного шарового сектора — весьма нелёгкая задача.

Первоисточник: [21].

§ 13.4. У этой задачи о круговом конусе тот же (высокий!) уровень сложности, как и в задаче о шаровом секторе.

Первоисточник: [21].

§ 13.5. Путь к решению задачи об энергии плоского шарового слоя был, как в известной песне, «и далек, и долог». За рамками остались три варианта исследований (чего не подумаешь из изложенного текста). Временно разачаровавшись в четвёртом методе, автор много усилий потратил на поиски энергии слоя методом «прогонки». Увы, задача не давалась! Пришлось вернуться к четвёртому методу. Наконец, после удачных замен интегралы (13.115) и (13.121) пали, и именно данный метод принёс долгожданные плоды.

§ 13.6. Несмотря на логарифмическую расходимость, по одинаковости полученных выражений гравитационной энергии стержня с распределением плотности (13.180) можно, между прочим, говорить о проверке важных формул для потенциальной энергии сектора и конуса!

Глава 14

НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ, МЕТОДОМ ПРОГОНКИ И ДРУГИМИ

Эта глава посвящена изложению шести (с пятого по десятый) оригинальных методов нахождения гравитационной энергии тел. Пятый метод основан на эквигравитирующих стержнях, введенных ранее в гл. 9. Совершенно отличный от него шестой метод (метод прогонки или метод интегральных элементов) также весьма перспективен и требует интегрирования по треугольной плоской области параметров изучаемой фигуры. В седьмом методе мы опираемся на софокусные преобразования: делается переход от слоисто-неоднородного эллипсоида к эллиптическому диску, в результате чего выражение энергии эллипсоида превращается в искомую энергию диска. Остаётся только подобрать такой закон плотности в эллипсоиде, чтобы получить фокальный диск с интересующим нас распределением вещества. Методы с восьмого по десятый служат для нахождения энергии слоёв и двумерных тел.

§ 14.1. Обобщение понятия гравитационной энергии для подсистем тел

Вначале введём важное обобщение понятия гравитационной (потенциальной) энергии.

Дано тело с распределением плотности $\rho(x)$ и полным внутренним потенциалом $\varphi_{\text{полн}}(x)$. Выделим в нём подсистему объёмом $V_{\text{под}}$ и составим следующий интеграл по этому объёму:

$$E_{\text{под}} = -\iiint\limits_{V_{\text{под}}} \rho(x)\, \varphi_{\text{полн}}(x)\, dV. \tag{14.1}$$

Полный потенциал тела в точке x разобъём на две составляющие: на потенциал подсистемы и потенциал оставшейся части тела:

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_{\text{под}} + \varphi_{\text{ост}}. \tag{14.2}$$

Тогда формулу (14.1) приводим к виду

$$E_{\text{под}} = 2W_{\text{под}} + W_{\text{вз}}. \tag{14.3}$$

Здесь первый член справа — удвоенная потенциальная энергия $W_{\text{под}}$ только подсистемы, а $W_{\text{вз}}$ — взаимная энергия этой подсистемы с оставшейся частью тела.

Составим далее аналогичный интеграл по остальной части тела:

$$E_{\text{ост}} = 2W_{\text{ост}} + W_{\text{вз}}. \tag{14.4}$$

Здесь существенно отметить, что в силу (8.22) в формулах (14.3) и (14.4) стоит одна и та же величина *взаимной* энергии.

Формулы (14.3) и (14.4) могут быть использованы следующим образом: *если внутренний потенциал тела задан, то тогда по известной величине E можно вычислять как гравитационную энергию интересующей нас отдельной части тела, так и взаимную энергию его частей.*

Разбивая тело на несколько подсистем и рассуждая аналогично, легко обобщить формулы (14.3) и (14.4). Но и система из двух уравнений (14.3) и (14.4) позволяет решать новые задачи:

а) прежде всего, сумма уравнений (14.3) и (14.4) даёт, согласно (8.23), удвоенную полную энергию тела:

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2}\left(E_{\text{под}} + E_{\text{ост}}\right); \tag{14.5}$$

б) при известных $E_{\text{под}}$ и $E_{\text{ост}}$ система уравнений (14.3) и (14.4) позволяет по одной из трех величин $W_{\text{ост}}$, $W_{\text{вз}}$ или $W_{\text{под}}$ находить две другие;

в) наконец, вычитая (14.3) и (14.4) друг из друга, получим ещё одну ценную формулу

$$2\left(W_{\text{под}} - W_{\text{ост}}\right) = E_{\text{под}} - E_{\text{ост}}, \tag{14.6}$$

которая может служить для независимой проверки сложных выражений энергии подсистемы или остальной части тела. А такой проверкой, как правило, нельзя пренебрегать!

Продемонстрируем пользу этих соотношений на примерах.

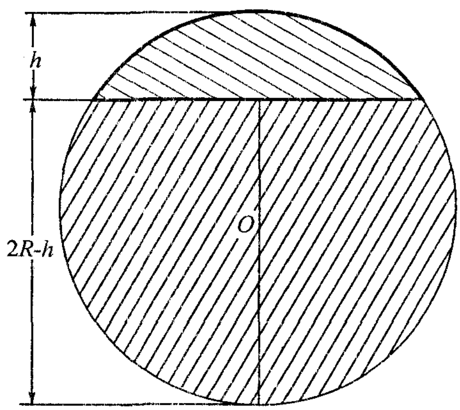


Рис. 118. Шар состоит из двух сегментов, показанных штриховкой с разным наклоном

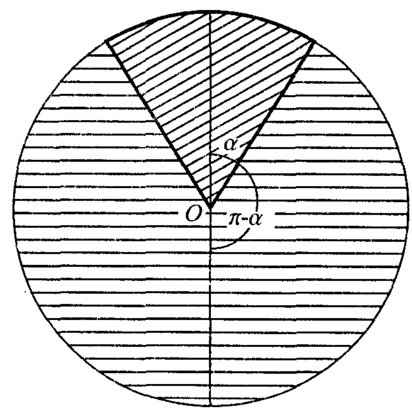


Рис. 119. Шаровой сектор и его дополнение до шара

Вернёмся к задаче с шаровым сегментом и рассмотрим рис. 118. Интегрируя потенциал однородного шара (6.36) по сегменту высотой h, получим

$$E_h = -\frac{\pi^2 G\rho^2}{15} h^2 \left(20R^3 - 5Rh^2 + h^3\right). \tag{14.7}$$

В частном случае $h = 2R$ величина E_h сводится к удвоенной гравитационной энергии однородного шара. Рассмотрим теперь такой же интеграл по остальной части шара, т. е. по сегменту высотой $h = 2R - h$. Получим

$$E_{2R-h} = -\frac{\pi^2 G\rho^2}{15}\left(32R^5 - 20R^3h^2 + 5Rh^4 - h^5\right). \tag{14.8}$$

Найденные величины E_h и E_{2R-h} выражают удвоенную гравитационную энергию соответствующего сегмента плюс взаимную энергию этого сегмента с другим сегментом, т. е.

$$\begin{aligned} E_h &= 2W_h + W_{\text{вз}}, \\ E_{2R-h} &= 2W_{2R-h} + W_{\text{вз}}. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Сумма выражений (14.9) даёт, согласно (8.23), удвоенную полную энергию шара, а их разность приводит к уравнению

$$E_{2R-h} - E_h = 2\left(W_{2R-h} - W_h\right). \tag{14.10}$$

Уравнение (14.10) полезно тем, что позволит проверить сложное выражение потенциальной энергии шарового сегмента (12.156). Значение такой проверки нельзя переоценить, ибо в частном случае полного шара в выражении для энергии сегмента ряд членов автоматически выпадает. Применить же в данном примере указанную идею — дело несложное.

Задача 14.1. *Подставив выражения* (12.156) *и* (12.159) *в* (14.10), *убедитесь в достоверности выражения* (12.156).

Невозможно переоценить роль уравнения (14.6) и при проверке выражения энергии шарового сектора (13.62). Дело в том, что указанные в конце § 13.3 способы проверки формулы (13.62) не были полными, так как в частных случаях шара и полушара многие члены в проверяемом выражении исчезают автоматически.

Но не так теперь! Прежде всего, *разбивая однородный шар на два сектора с углами полураствора α и $\pi - \alpha$* (рис. 119) и применяя затем к каждому из них формулу (13.62), находим разность потенциальных энергий двух указанных секторов

$$W_\alpha - W_{\pi-\alpha} = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \cos\alpha. \tag{14.11}$$

Но при известном внутреннем потенциале шара (6.36) легко найти, что для этих секторов

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \left(1 - \cos\alpha\right), \\ E_{\pi-\alpha} &= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \left(1 + \cos\alpha\right), \end{aligned} \tag{14.12}$$

и, вычитая эти выражения друг из друга

$$E_\alpha - E_{\pi-\alpha} = 2\left(W_\alpha - W_{\pi-\alpha}\right), \tag{14.13}$$

опять приходим к выражению (14.11). Изумительная проверка важной формулы (13.62), не правда ли!

Есть ещё один интересный случай: *когда сектор близок к полушару.*

Действительно, рассмотрим шаровой сектор с $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ $\left(\varepsilon \ll \frac{\pi}{2}\right)$. Для него, с точностью до ε включительно, из формулы (13.62) находим

$$W_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} = W_{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \cdot \varepsilon. \tag{14.14}$$

Как понимать этот результат? Добавка ε создаёт на полушаре тонкий секторный слой в виде тонкого неоднородного круглого диска с поверхностной плотностью

$$\sigma\left(r\right) = \rho\varepsilon r \tag{14.15}$$

(для ε возможен, кстати, и знак «$-$», что соответствует *отнятию* от полушара такого диска). Этот диск имеет взаимную с полушаром энергию

$$W_{\text{вз}} = -\pi \int \varphi(r)\ \sigma(r)\, r\, dr. \tag{14.16}$$

После подстановки сюда потенциала полушара (6.37), действующего на точки наращиваемого (или отнимаемого) слоя, находим

$$W_{\text{вз}} = -\frac{8}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \cdot \varepsilon. \tag{14.17}$$

Таким образом, формула (14.14) выражает полную энергию сектора, близкого к полушару; и она состоит (с точностью до ε) из энергии полушара плюс («$-$») взаимная энергия полушара с заданным слоем. Энергия же самого слоя — величина уже второго порядка малости по ε.

Фактически, и в этом примере мы проверили формулу (13.62).

Задача 14.2. *Чем различаются способы получения дисков с плотностью* (13.94) *из конуса и* (14.15) *из шарового сектора?*

§ 14.2. Метод (пятый) нахождения взаимной потенциальной энергии тел через эквигравитирующие стержни

Стержни мнимые — потенциал и энергия реальные

В основе пятого метода — применение эквигравитирующих стержней, которые рассматривались в главе 9. Важно сразу подчеркнуть, что такие стержни позволяют вычислять не только внешний потенциал, но — и это новая важная задача — гравитационную энергию осесимметричных тел.

Запишем интеграл от потенциала по длине заменяющего отрезка (или по системе таких отрезков и материальных точек, если последние есть среди эквигравитирующих элементов)

$$W_{\text{вз}} = -\int \left[\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \ldots\right] \varphi(\zeta)\, d\zeta, \tag{14.18}$$

который, независимо от того, принадлежит потенциал φ:

1) тому же самому телу,

или же

2) другому (внешнему) телу,

выражает собой потенциальную энергию стержня в заданном силовом поле.

Во втором случае эта энергия представляет собой *взаимную энергию двух разных тел* (что доказывается далее всей совокупностью решённых примеров и задач!).

В первом же случае, как установлено в § 14.6, *через этот интеграл можно, оказывается, выразить и полную потенциальную энергию тела, которому принадлежит данный стержень.*

Начнём со второго случая, когда стержень и потенциал принадлежат разным телам и рассмотрим *взаимную энергию этих двух тел.*

§ 14.3. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец. Кольца в параллельных плоскостях

Рассмотрим два соосных, в общем случае некомпланарных круговых колечка с радиусами R_1 и R_2 и линейными плотностями μ_1 и μ_2, расположенных на высоте h друг от друга; центры колец находятся на оси симметрии Ox_3 (см. рис. 120).

За начало системы отсчёта выберем центр второго кольца O. В этой системе отсчёта эквигравитирующий стержень второго кольца имеет вид

$$\mu_2(\zeta) = -\frac{2iR_2\mu_2}{\sqrt{R_2^2+\zeta^2}}, \tag{14.19}$$

а потенциал первого кольца на оси симметрии равен

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{2\pi G\mu_1 R_1}{\sqrt{R_1^2+(\zeta-h)^2}}. \tag{14.20}$$

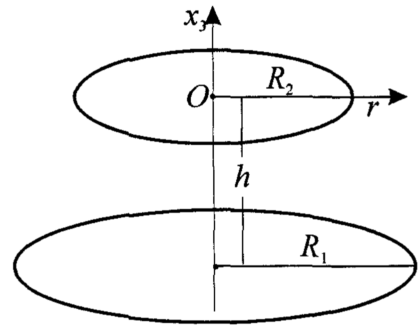


Рис. 120. Два соосных тонких круглых колечка. Указаны их радиусы и расстояние между центрами

Интегрируя этот потенциал по стержню второго кольца, находим взаимную энергию колец (см. формулу (14.18)):

$$W_{\text{вз}} = -\int\limits_{-iR_2}^{iR_2} \mu_2(\zeta)\varphi_1(\zeta)\,d\zeta. \tag{14.21}$$

С учётом сказанного,

$$W_{\text{вз}} = 4i\pi G\mu_1\mu_2R_1R_2 \int\limits_{-iR_2}^{iR_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{R_2^2+\zeta^2}\sqrt{R_1^2+(\zeta-h)^2}}. \tag{14.22}$$

Заменой $x = \dfrac{\zeta}{i}$ этот интеграл приводится к виду

$$W_{\text{вз}} = -4\pi G\mu_1\mu_2R_1R_2 \int\limits_{-R_2}^{R_2} \frac{1}{\sqrt{a-ib}}\frac{dx}{\sqrt{R_2^2-x^2}}, \tag{14.23}$$

где

$$a = R_1^2+h^2-x^2, \quad b = 2hx. \tag{14.24}$$

Избавиться от мнимости под вторым радикалом можно следующим способом. Разбиваем интервал интегрирования на два: $(0, R_2)$ и $(-R_2, 0)$; изменяя знак x на втором интервале, после тождественных преобразований (см., например, формулу (14.76)) получим

$$W_{\text{вз}} = -4\sqrt{2}\pi G\mu_1\mu_2R_1R_2 \int\limits_0^{R_2} \frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{dx}{\sqrt{R_2^2-x^2}}. \tag{14.25}$$

Мнимая единица исчезла, хотя и ценой некоторого усложнения подынтегрального выражения. Тем не менее, и такой интеграл можно найти.

Делаем в (14.25) замену

$$t = a+\sqrt{a^2+b^2}, \tag{14.26}$$

которая даёт

$$x^2 = \frac{t(t_3-t)}{2(t-2h^2)}; \tag{14.27}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2+b^2} = t - a = \frac{t^2 - 4h^2 t + 2h^2 t_3}{2\left(t-2h^2\right)}; \\ &R_2^2 - x^2 = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{2\left(t-2h^2\right)}; \\ &2x\,dx = -\frac{t^2 - 4h^2 t + 2h^2 t_3}{2\left(t-2h^2\right)^2}dt. \end{aligned} \tag{14.28}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &t_3 = 2\left(R_1^2 + h^2\right), \\ &\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \left(R_1^2 - R_2^2 + h^2\right) \pm \sqrt{\left(R_1^2 - R_2^2 + h^2\right)^2 + 4h^2 R_2^2}, \end{aligned} \tag{14.29}$$

причём t_1 и t_2 корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2t\left(R_1^2 - R_2^2 + h^2\right) - 4h^2 R_2^2 = 0. \tag{14.30}$$

Из (14.27) следует, что

$$t_3 \geqslant t > 2h^2. \tag{14.31}$$

Подставляя полученные выше выражения в интеграл (14.25), после сокращений приводим его к простому виду:

$$W_{\text{вз}} = -4\sqrt{2}\pi G\mu_1\mu_2 R_1 R_2 \int\limits_{t_1}^{t_3} \frac{dt}{\sqrt{(t_3-t)(t-t_1)(t-t_2)}}. \tag{14.32}$$

Для нахождения интеграла важно заметить, что здесь выполняются неравенства

$$t_3 \geqslant t \geqslant t_1 > t_2. \tag{14.33}$$

Таким образом, находим

$$W_{\text{вз}} = \frac{-2\sqrt{2}\,GM_1M_2}{\pi\sqrt{t_3-t_2}}\mathrm{K}\left[\sqrt{\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}}\right], \tag{14.34}$$

где M_1 и M_2 — массы колец, а параметры t_1, t_2 и t_3 из (14.29). В (14.34) получена *взаимная энергия (взаимный потенциал с обратным знаком) двух соосных элементарных круглых колец, расположенных параллельно*. Решение выражено через полный эллиптический интеграл первого рода.

З а д а ч а 14.3. *Рассмотреть в* (14.34) *частный случай колец, расположенных в одной плоскости (*$h = 0$*)*.

Решение. Если $h = 0$, то

$$t_1 = 2\left(R_1^2 - R_2^2\right), \ t_2 = 0, \ t_3 = 2R_1^2,$$

и формула (14.34) даёт

$$W_{\text{вз}} = -\frac{2GM_1M_2}{\pi R_1}\mathrm{K}\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \quad R_1 > R_2. \tag{14.35}$$

Разумеется, взаимная энергия двух совпадающих колец обращается в бесконечность. ▼

Задача 14.4. *Рассмотреть в* (14.34) *частный случай параллельных колец одинакового радиуса ($R_1 = R_2 = R$).*

Решение.

$$W_{вз} = -\frac{2\sqrt{2}GM_1M_2}{\pi\sqrt{2R^2 + h^2 + h\sqrt{4R^2 + h^2}}}\mathrm{K}(k), \quad h \neq 0, \tag{14.36}$$

где модуль эллиптического интеграла

$$k^2 = \frac{2R^2 + h^2 - h\sqrt{4R^2 + h^2}}{2R^2 + h^2 + h\sqrt{4R^2 + h^2}} \leqslant 1. \tag{14.37}$$

▼

§ 14.4. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец, пересекающихся по диаметру

Эта задача изящна и отнюдь не простая.

14.4.1. Случай перпендикулярных колец

Дана система из двух однородных тонких круговых колец. Конкретно, здесь рассматривается следующая конфигурация этих колец. Пусть первое кольцо радиусом R_1 и массой $M_1 = 2\pi R_1\mu_1$ расположено в плоскости Ox_1x_2, а второе (с параметрами R_2, μ_2) находится в плоскости Ox_1x_3. Диаметры обеих колец совпадают с осью Ox_1. Тогда, согласно формуле (9.38), потенциал первого кольца в плоскости второго даётся формулой

$$\varphi_1(|x_1|, x_3) = \frac{4G\mu_1R_1}{\sqrt{(R_1 + |x_1|)^2 + x_3^2}}\mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{R_1|x_1|}}{\sqrt{(R_1 + |x_1|)^2 + x_3^2}}\right). \tag{14.38}$$

Интегрируя этот потенциал с весовым множителем μ_2 вдоль дуги второго круга, и учитывая, что

$$x_1^2 + x_3^2 = R_2^2, \tag{14.39}$$

после замены

$$|x_1| = R_2\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \tag{14.40}$$

выразим взаимную энергию колец интегралом

$$W_{вз} = -16G\mu_1\mu_2R_1\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{K}\left(2\sqrt{\dfrac{R_1R_2\cos\theta}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\theta}}\right)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\theta}}d\theta. \tag{14.41}$$

Рассмотрим вначале вариант, когда *перпендикулярные кольца имеют одинаковые радиусы*

$$R_1 = R_2 = R. \tag{14.42}$$

Тогда (14.41) даёт

$$W_{\text{вз}} = -8\sqrt{2}G\mu_1\mu_2 R \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)}{\sqrt{1+\cos\theta}}d\theta. \tag{14.43}$$

Заменой $x = \operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$ приводим (14.43) к виду

$$W_{\text{вз}} = -8G\mu_1\mu_2 R \int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x\,(1+x)}}dx. \tag{14.44}$$

Определённый интеграл (14.44), оказывается, есть частный случай интеграла 2.16.3 на стр. 150 справочника [41], где надо положить

$$\alpha = \rho = \frac{1}{2},\ r = 1,\ z = 1,\ a = 1. \tag{14.45}$$

Находим

$$W_{\text{вз}} == -4\pi G\mu_1\mu_2 R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)_k \Gamma\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k \\ 1+k,\ 1+k \end{bmatrix}. \tag{14.46}$$

Здесь символ Похгаммера [41]

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}, \tag{14.47}$$

а другой символ:

$$\Gamma\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k \\ 1+k,\ 1+k \end{bmatrix} = \pi\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2. \tag{14.48}$$

В итоге, формула (14.46) приводит к следующему результату для *взаимной энергии перпендикулярных колец с одинаковыми радиусами*:

$$W_{\text{вз}} = -4\pi^2 G\mu_1\mu_2 R \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3 = -\frac{4\pi^3 G\mu_1\mu_2 R}{\sqrt{2}\left[\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\right]^2}. \tag{14.49}$$

В более общем случае перпендикулярных колец *с неодинаковыми радиусами*

$$R_1 \geqslant R_2, \tag{14.50}$$

вместо ряда (14.49) мы получим, как можно показать, другой ряд:

$$W_{\text{вз}} = -4\pi^2 G\mu_1\mu_2 R_2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}. \tag{14.51}$$

С помощью компьютерной программы Математика 5 этот сложный ряд (14.51) может быть просуммирован:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k} = \frac{8}{\pi^2\left(\sqrt{1+b^2}+1\right)}\mathrm{K}^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{\sqrt{1+b^2}+1}}\right), \tag{14.52}$$

где $b = \dfrac{R_2}{R_1}$. Таким образом, и в общем случае, *взаимная энергия перпендикулярных колец с неодинаковыми радиусами* выражается в конечном виде

$$W_{\text{вз}} = -\frac{32G\mu_1\mu_2 R_2}{\sqrt{1+b^2}+1}\mathrm{K}^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{\sqrt{1+b^2}+1}}\right). \tag{14.53}$$

В частном случае, когда $b = 1$, формула (14.53) даёт известный результат (14.49)[1].

Задача 14.5. *При замене*

$$x = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

интеграл (14.43) *превращается в следующий:*

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)}{\sqrt{1+\cos\theta}}d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}}.$$

Доказать, что

$$\int\limits_0^1\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}} = \frac{\pi^3}{2\sqrt{2}\left[\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\right]^2}. \tag{14.55}$$

Решение. Разлагая в левой части (14.55) эллиптический интеграл в ряд

$$\mathrm{K}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!^2}{2^{4n}n!^4}x^n,$$

находим, прежде всего, вспомогательный интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)\;{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}+n,-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}.$$

Разлагая теперь в ряд и гипергеометрическую функцию

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}+n,-1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+k\right)}\cdot\frac{(-1)^k}{k!},$$

после перестановки порядка суммирования мы действительно приходим к равенству (14.55). ▼

---

[1] Выражение (14.53) можно получить также с помощью вспомогательной формулы (частное сообщение В. А. Антонова)

$$\int\limits_\alpha^\beta\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}\right)dx}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}} = 2\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{1-u}{2}}\right)\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right), \tag{14.54}$$

где

$$u = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}+\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}; \quad v = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}-\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}.$$

14.4.2. Случай с произвольным наклоном колец

а) Вначале опять рассмотрим вариант, когда круговые кольца имеют *одинаковые радиусы* R.

Пусть углы θ и θ_1 отсчитываются вдоль обоих колец от точки пересечения. Угловое расстояние A между пробными точками на сфере определяется по известной теореме *косинусов* в сферической тригонометрии.

$$\cos A = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos\alpha \tag{14.56}$$

(α — угол между плоскостями обоих колец, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Линейное расстояние между двумя точками тогда

$$l = 2R\sin\frac{A}{2} = \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos A}. \tag{14.57}$$

Взаимная энергия двух таких колец выражается двойным интегралом

$$W_{\text{вз}} = -\frac{GR\mu_1\mu_2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta\,d\theta_1}{\sqrt{1-\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta\sin\theta_1\cos\alpha}}. \tag{14.58}$$

В более простом виде этот интеграл представлен в (14.64).

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ интеграл (14.58) вычисляется, и мы вновь получаем известное выражение (14.49).

Задача 14.6. *Попробуйте вычислить двойной интеграл* (14.58) *при произвольном угле* α.

б) *Более общий случай: наклонённые кольца с разными радиусами.*

Первое кольцо с параметрами R_1, μ_1 находится в плоскости Ox_1x_2, второе — в плоскости Ox_1x_2', причём ось Ox_2' наклонена к Ox_2 под углом α. Исходим из выражения потенциала кольца (9.38), который следует записать в точках второго (наклонённого) кольца. Очевидно, координаты точек в исходной системе отсчёта будут связаны с координатами второго кольца формулами

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x_1' = R_2\cos\theta,\\ x_2 &= x_2'\cos\alpha = R_2\sin\theta\cos\alpha,\\ x_3 &= x_2'\sin\alpha = R_2\sin\theta\sin\alpha, \end{aligned}$$

где угол θ отсчитывается вдоль второго кольца от оси Ox_1. Тогда

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2+x_2^2} = R_2\sqrt{n},\\ (R_1+r)^2 + x_3^2 &= R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\sqrt{n}, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$n = \sin^2\theta\cos^2\alpha + \cos^2\alpha. \tag{14.59}$$

Вводя вспомогательную величину

$$m = \sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1R_2} + 2\sqrt{n}}, \tag{14.60}$$

в итоге получим интегральное выражение взаимной энергии

$$W_{\text{вз}} = -16G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m}\mathrm{K}\left(\frac{2n^{\frac{1}{4}}}{m}\right)d\theta. \tag{14.61}$$

Так, если кольца располагаются в одной плоскости $\alpha = 0$, то $n = 1$ и из (14.61) сразу следует простое

$$W_{\text{вз}} = -8\pi G\mu_1\mu_2R_2\mathrm{K}\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \quad R_1 > R_2, \tag{14.62}$$

что совпадает, конечно, с (14.35) с точностью до обозначений.

В случае же $\alpha = \frac{\pi}{2}$ из (14.61) следует известный уже нам красивый результат (14.53).

Однако в общем случае — при произвольном α — интеграл (14.61) в конечном виде не удаётся найти. Всё же заметим, заменой

$$x = \frac{\gamma - 2\sqrt{n}}{\gamma + 2\sqrt{n}}, \quad \gamma = \frac{R_1^2 + R_1^2}{R_1R_2}$$

интеграл (14.61) приводится к виду

$$W_{\text{вз}} = p\int\limits_{\frac{\gamma-2}{\gamma+2}}^{\frac{\gamma-2\cos\alpha}{\gamma+2\cos\alpha}} \frac{(1-x)\,\mathrm{K}\left(\sqrt{1-x}\right)dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{(1+x)^2 - \frac{\gamma^2}{4}(1-x)^2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}(1-x)^2 - \cos^2\alpha\,(1+x)^2}}, \tag{14.63}$$

($p = -4\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2}\gamma^{\frac{3}{2}}$). В частности, при кольцах одинакового радиуса $\gamma = 2$, и тогда

$$W_{\text{вз}} = \frac{-8G\mu_1\mu_2R}{\sin\alpha}\int\limits_0^{a^2} \frac{(1-x)\,\mathrm{K}\left(\sqrt{1-x}\right)dx}{\sqrt{x(1+x)\left(a^2-x\right)\left(\frac{1}{a^2}-x\right)}}, \quad a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{14.64}$$

Подчеркнём: интеграл (14.64) уже не двойной, как (14.58), а одинарный.

В заключение заметим, что при больших значениях $\gamma = \dfrac{R_1^2 + R_1^2}{R_1R_2}$, т.е. когда внутреннее кольцо мало в сравнении с внешним, подынтегральное выражение в (14.61) можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{\gamma}$. Интегрируя затем этот ряд, находим

$$W_{\text{вз}} \approx -\frac{M_1M_2G}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\left\{1 + \frac{3}{2^4}\frac{1}{\gamma^2}(3 + \cos 2\alpha) + \frac{105}{2^{12}}\frac{1}{\gamma^4}\left[41 + 20\cos 2\alpha + 3\cos 4\alpha\right] + \ldots\right\}, \tag{14.65}$$

где M_1, M_2 — массы колец.

§ 14.5. Взаимная гравитационная энергия двух однородных круглых дисков, расположенных в параллельных плоскостях

Одна хорошая задача порождает другие хорошие задачи

Рассмотрим два однородных круглых диска, имеющих радиусы r_1 и r_2 и плотности σ_1 и σ_2. Оси симметрии дисков совпадают, и в системе отсчёта с началом O (рис. 121) они расположены на высотах $h_2 > h_1$, так что расстояние между дисками

$$2d = h_2 - h_1. \tag{14.66}$$

В принятой системе отсчёта эквигравитирующий стержень верхнего диска имеет плотность

$$\mu_2(\zeta) = -2i\sigma_2\sqrt{r_2^2 + (\zeta - h_2)^2}, \tag{14.67}$$

а потенциал (9.36) нижнего диска на оси симметрии после замены $x_3 \to \zeta - h_1$ будет представлен выражением

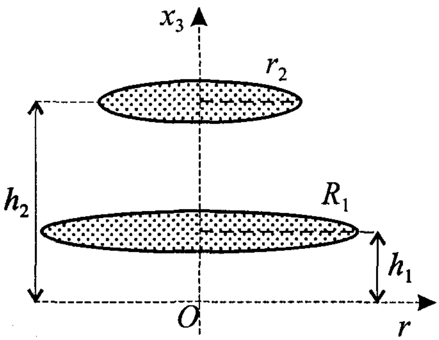


Рис. 121. Система из двух соосных круглых дисков. Обозначены радиусы и высоты расположения дисков

$$\varphi_1(\zeta) = 2\pi G\sigma_1\left[\sqrt{r_1^2 + (\zeta - h_1)^2} - (\zeta - h_1)\right]. \tag{14.68}$$

Взаимная гравитационная энергия дисков (или, с точностью до знака, их взаимный потенциал), согласно основной формуле (14.18), будет равна

$$W_{\text{вз}} = 4i\pi G\sigma_1\sigma_2 \int\limits_{h_2 - ir_2}^{h_2 + ir_2} \sqrt{r_2^2 + (\zeta - h_2)^2}\left[\sqrt{r_1^2 + (\zeta - h_1)^2} - (\zeta - h_1)\right] d\zeta. \tag{14.69}$$

Для вычисления этого интеграла сделаем в нём замену

$$x = \frac{\zeta - h_2}{ir_2}. \tag{14.70}$$

Тогда

$$W_{\text{вз}} = -4\pi G\sigma_1\sigma_2 r_2^2 \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\left[\sqrt{m + in} - (h_2 - h_1 + ir_2 x)\right] dx, \tag{14.71}$$

где

$$m = r_1^2 + (h_2 - h_1)^2 - r_2^2 x^2; \quad n = 2r_2(h_2 - h_1)\,x. \tag{14.72}$$

Последний член в (14.71) нечётный и при интегрировании по симметричному интервалу его можно опустить; кроме того,

$$-2(h_2 - h_1)\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}(h_2 - h_1). \tag{14.73}$$

Тогда интеграл (14.71) будет равен

$$W_{\text{вз}} = -4\pi^2 G\sigma_1\sigma_2 r_2^2 \left\{-\frac{1}{2}(h_2 - h_1) + I\right\}, \tag{14.74}$$

где основным является интеграл

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{m+in}\,dx. \tag{14.75}$$

Разбив его на два (от -1 до 0, и от 0 до 1), используя нечётность величины n и извлекая корень, так что

$$\sqrt{m+in} + \sqrt{m-in} = \sqrt{2}\sqrt{m+\sqrt{m^2+n^2}}, \tag{14.76}$$

избавляемся от мнимой единицы под знаком интеграла и имеем

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{m+\sqrt{m^2+n^2}}\,dx. \tag{14.77}$$

Но и дальнейшее вычисление интеграла (14.77) потребует усилий. Делая в нём замену

$$t = \sqrt{m^2+n^2} + m, \tag{14.78}$$

и возведя в квадрат обе части (14.78), с учётом выражений (14.72) находим

$$x^2 = \frac{t^2 - 2t\left[r_1^2 + (h_2-h_1)^2\right]}{2r_2^2\left[2(h_2-h_1)^2 - t\right]}, \tag{14.79}$$

так что

$$1 - x^2 = \frac{(t-b)(t-c)}{2r^2(t-l)}. \tag{14.80}$$

Здесь b и c — корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2z_1 t - 2r_2^2 l = 0, \tag{14.81}$$

а именно:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = z_1 \pm z_2, \tag{14.82}$$

причём в данной задаче введены обозначения

$$l = 2(h_2-h_1)^2;\ z_1 = r_1^2 - r_2^2 + \frac{l}{2};\ z_2 = \sqrt{z_1^2 + 2lr_2^2}. \tag{14.83}$$

В силу (14.79) имеет место соотношение

$$x^2 = \frac{1}{2r_2^2}\left[-t + 2r_1^2\left(1 + \frac{l}{t-l}\right)\right], \tag{14.84}$$

так что

$$xdx = -\frac{1}{4r_2^2}\left[1 + \frac{2lr_1^2}{(t-l)^2}\right]dt. \tag{14.85}$$

Таким образом, в результате известной замены (14.78) интеграл (14.77) примет теперь вид

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\,r_2^2}\left(I_1 + 2lr_1^2 I_2\right), \tag{14.86}$$

где

$$I_1 = \int\limits_b^a \sqrt{\frac{(t-b)(t-c)}{a-t}}\,dt; \tag{14.87}$$

$$I_2 = \int\limits_b^a \sqrt{\frac{(t-b)(t-c)}{a-t}}\,\frac{dt}{(t-l)^2}, \tag{14.88}$$

причём

$$a = 2r_1^2 + l. \tag{14.89}$$

Заметим, что

$$a > b > c, \tag{14.90}$$

и для первого интеграла имеем

$$I_1 = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\left[(2a-b-c)\,\mathrm{E}(k) - (b-c)\,\mathrm{K}(k)\right]. \tag{14.91}$$

Упрощает дальнейшие расчёты и то, что здесь (и далее в этом параграфе) модуль у всех полных эллиптических интегралов первого $\mathrm{K}(k)$, второго $\mathrm{E}(k)$ и третьего $\Pi\left[n(l), k\right]$ рода[2] будет один и тот же и равен

$$k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} \leqslant 1. \tag{14.92}$$

Далее, находим I_2 из (14.88). Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_b^a \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}}\left[1 + \frac{2l-b-c}{t-l} + \frac{(l-b)(l-c)}{t-l}\right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a-c}}\left\{\mathrm{K}(k) + \frac{2l-b-c}{a-l}\Pi\left[n,k\right] + (l-b)(l-c)\,I_3\right\}, \end{aligned} \tag{14.93}$$

где

$$n \equiv n(l) = \frac{a-b}{a-l}, \tag{14.94}$$

а оставшийся интеграл

$$I_3 = \int\limits_b^a \frac{dt}{(t-l)^2\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}}. \tag{14.95}$$

Для нахождения сложного интеграла I_3 (отсутствующего, кстати, в справочниках) дифференцируем его по параметру l, полагая пределы интегрирования постоянными. Прежде всего, так как

$$I_3 = \frac{d}{dt}\int\limits_b^a \frac{dt}{(t-l)\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}\frac{d}{dl}\left[\frac{\Pi\left[n(l),k\right]}{a-l}\right], \tag{14.96}$$

[2] Определение полных эллиптических интегралов дано в (7.23).

то

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{a-c}}\left[\frac{\Pi\left[n,k\right]}{\left(a-l\right)^2} + \frac{1}{a-l}\frac{d}{dl}\Pi\left[n\left(l\right),k\right]\right]. \tag{14.97}$$

Проведя расчёты, получим

$$I_3 = \frac{\left(n^2-2n-2nk^2+3k^2\right)\Pi\left[n,k\right] - \left(k^2-n\right)\mathrm{K}\left(k\right) - n\mathrm{E}\left(k\right)}{\sqrt{a-c}\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)\left(k^2-n\right)}. \tag{14.98}$$

Подставляя затем найденное выражение I_3 в формулу (14.93) и используя (неочевидное!) равенство

$$\frac{2l-b-c}{a-c} + \frac{\left(l-b\right)\left(l-c\right)\left[n^2-2n-2nk^2+3k^2\right]}{2\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)\left(k^2-n\right)} = \frac{r_2^2-r_1^2}{2r_1^2} \tag{14.99}$$

(здесь выражение слева есть коэффициент в (14.93) при $\Pi\left[n,k\right]$), после значительных упрощений имеем

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{2}{\sqrt{a-c}}\Bigg\{&\left[1-\frac{\left(l-b\right)\left(l-c\right)}{2\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)}\right]\mathrm{K}\left(k\right) - \\ &-\frac{n\left(l-b\right)\left(l-c\right)}{2\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)\left(k^2-n\right)}\mathrm{E}\left(k\right) - \frac{r_2^2-r_1^2}{2r_1^2}\Pi\left[n,k\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{14.100}$$

Подставляя, в свою очередь, найденное I_2 в (14.86), находим уже само I

$$I = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}r_2^2\sqrt{a-c}}\left\{\alpha\mathrm{K}\left(k\right) + \beta\mathrm{E}\left(k\right) + \gamma\Pi\left[n,k\right]\right\}, \tag{14.101}$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} \alpha &= -\left(a-c\right)\left(b-c\right) + 3lr_1^2\left(2-\frac{\left(l-b\right)\left(l-c\right)}{\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)}\right), \\ \beta &= \left(a-c\right)\left(2a-b-c\right) - 3lr_1^2\frac{n\left(l-b\right)\left(l-c\right)}{\left(a-l\right)^2\left(1-n\right)\left(k^2-n\right)}, \\ \gamma &= 3l\left(r_2^2-r_1^2\right) = -3l\left(r_1^2-r_2^2\right). \end{aligned} \tag{14.102}$$

Полезно заметить, что коэффициенты α и β после тождественных преобразований можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(h_2-h_1\right)^4 + \frac{5}{2}lr_1^2 - r_2^2\left(h_2-h_1\right)^2 - 2\left(r_1^2-r_2^2\right) + z_2; \\ \beta &= \left[2\left(r_1^2+r_2^2\right) - \left(h_2-h_1\right)^2\right]\left[\left(h_2-h_1\right)^2 + r_1^2 + r_2^2 + z_2\right]. \end{aligned} \tag{14.103}$$

Таким образом, *взаимная гравитационная энергия (взаимный потенциал) однородных круглых дисков с разными, вообще говоря, радиусами*, согласно (14.74), будет равна

$$W_{\text{вз}} = -\frac{4GM_1M_2}{r_1^2}\left\{-d+I\right\}, \tag{14.104}$$

где, напомним, d из (14.66) — половина расстояния между дисками, массы дисков равны $M_1 = \pi r_1^2 \sigma_1$ и $M_2 = \pi r_2^2 \sigma_2$, а сложная функция параметров I дана в (14.101).

В частном случае дисков, одинаковых по размерам ($r_1 = r_2 = R$) и по массе, выражение взаимной энергии (14.104) несколько упрощается (при $\gamma = 0$ исчезает, например, эллиптический интеграл третьего рода), и мы получим

$$W_{\text{вз}} = -\frac{4GM^2}{R^2} \left\{ -d + \frac{\left[4\,(a-c) - \frac{c^2}{a}\right] \mathrm{E}\,(k) - (b-c)\left(2 + \frac{c}{a}\right) \mathrm{K}\,(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{a-c}} \right\}, \tag{14.105}$$

где обозначения уже иные:

$$a = 2R^2,\ b = 4d^2\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2}} - 1\right),\ c = -4d^2\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2}} + 1\right), \tag{14.106}$$

и модуль эллиптических интегралов

$$k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} = 1 - \frac{b}{a} \leqslant 1. \tag{14.107}$$

Проверим формулу (14.105) при $d \to \infty$. Очевидно, в этом случае

$$b = a\,(1-k)\,,\ c = -a\left(\frac{1}{k} - 1\right),\ b - c = a\left(\frac{1}{k} - k\right). \tag{14.108}$$

Кроме того, при малом R/d с достаточной для нас точностью имеем

$$k \approx \frac{1}{4}\frac{a^2}{d^2}, \tag{14.109}$$

и с той же точностью

$$\mathrm{E}\,(k) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4}\right);\ \mathrm{K}\,(k) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right). \tag{14.110}$$

После подстановки этих выражений в (14.105) и преобразований, приходим к результату

$$W_{\text{вз}} \approx -\frac{GM^2}{2d}, \tag{14.111}$$

который и следовало ожидать. Сила же притяжения между дисками в асимптотике больших расстояний описывается, как и должно быть, законом обратных квадратов

$$F = \frac{dW_{\text{вз}}}{d\,(2d)} = \frac{GM^2}{(2d)^2}. \tag{14.112}$$

Задача 14.7. *Проверить и формулу* (14.104) *в асимптотике* $d \to \infty$.

Решение. Оно проводится тем же методом, что и для одинаковых дисков. Однако выкладки в общем случае будут несколько более сложными. ▼

§ 14.6. Метод пятый (продолжение). Энергия изолированных тел

И вновь опираемся на эквигравитирующие стержни

Переходим к нахождению гравитационной энергии тела с помощью заменяющих отрезков, принадлежащих *этому телу*. Для этого вновь обратимся к той идее, что *часть потенциальной энергии изолированного тела можно представить через половину взаимной энергии эквигравитирующего стержня (стержней, если их несколько) или иных эквигравитирующих элементов этого тела в гравитационном поле исходного тела*[3].

Окружим рассматриваемое однородное осесимметричное тело T вспомогательной сферой с радиусом $R_{\text{шара}}$ (рис. 122) и наполним пространство оболочки $T_{\text{об}}$ между телом и сферой веществом той же плотности ρ. Потенциал созданной однородной оболочки в точках тела T будет равен разности внутреннего потенциала вспомогательного шара $\varphi_{\text{шара}}$, данного в (6.36), и внутреннего потенциала $\varphi_{\text{т}}$ самого тела T:

$$\varphi_{\text{об}} = \varphi_{\text{шара}} - \varphi_{\text{т}}. \tag{14.113}$$

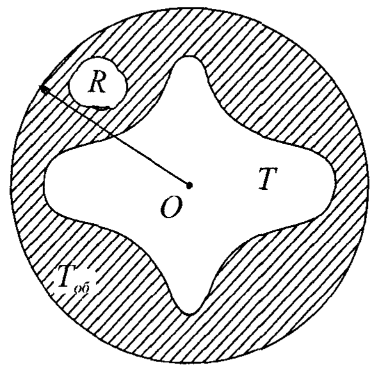


Рис. 122. Тело T с круговой симметрией и его дополнение (заштриховано) до шара

Находим взаимную гравитационную энергию тела T и оболочки $T_{\text{об}}$. Делаем это двумя независимыми способами.

Первый способ: интегрируем потенциал (14.113) по объёму тела T:

$$W_{\text{вз}} = -\rho \iiint\limits_T (\varphi_{\text{шара}} - \varphi_{\text{т}})\, dV = -2\pi G\rho \left[R^2_{\text{шара}} M_{\text{т}} - \frac{1}{3} J_{\text{т}}\right] - 2W_{\text{т}}, \tag{14.114}$$

где $M_{\text{т}}$ – масса тела T, $J_{\text{т}}$ — его момент инерции относительно начала координат, а $W_{\text{т}}$ — искомая гравитационная энергия тела T.

С другой стороны, замена тела T набором эквигравитирующих одномерных стержней или других эквигравитирующих элементов (это могут быть и материальные точки) с плотностями на них

$$\mu_1(\zeta), \quad \mu_2(\zeta), \ldots, \mu_i(\zeta) \tag{14.115}$$

даёт, с учётом (14.18),

$$W_{\text{вз}} = -\int \varphi_{\text{об}} \left[\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \ldots\right] d\zeta = -\int (\varphi_{\text{шара}} - \varphi_{\text{т}}) \left[\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \ldots\right] d\zeta. \tag{14.116}$$

Поскольку внутренний потенциал объемлющего шара в данном случае

$$\varphi_{\text{шара}}(\zeta) = 2\pi G\rho \left(R^2_{\text{шара}} - \frac{1}{3}\zeta^2\right), \tag{14.117}$$

то первый из интегралов в правой части (14.116) принимает вид

[3] Напомним: в § 12.6 данная идея уже применялась, правда в несколько ином виде, когда вместо эквигравитирующего стержня брался мысленно выделенный на поверхности тела обобщённый гомотетический слой.

$$\begin{aligned}\Phi &= -\int \varphi_{\text{шара}}(\zeta)\left[\mu_1(\zeta)+\mu_2(\zeta)+\ldots\right]d\zeta = \\ &= -2\pi G\rho\left[R^2 M_{\text{т}} - \frac{1}{3}\int \zeta^2\left[\mu_1(\zeta)+\mu_2(\zeta)+\ldots\right]d\zeta\right] + \\ &\quad + \int \varphi_{\text{т}}\left[\mu_1(\zeta)+\mu_2(\zeta)+\ldots\right]d\zeta.\end{aligned} \tag{14.118}$$

Приравнивая теперь $W_{\text{вз}}$ из формул (14.114) и (14.116), получим искомую гравитационную энергию тела

$$W_{\text{т}} = -\frac{1}{2}\int \varphi_{\text{т}}(\zeta)\left[\mu_1(\zeta)+\mu_2(\zeta)+\ldots\right]d\zeta + \frac{1}{3}\pi G\rho\left[J_{\text{т}} - \int \zeta^2\left[\mu_1(\zeta)+\mu_2(\zeta)+\ldots\right]d\zeta\right]. \tag{14.119}$$

Интегрирование в (14.119) проводится по всем эквигравитирующим элементам тела.

Подчеркнём, что в формуле (14.119) вспомогательный шар о себе никак не напоминает (соответствующие члены сократились!).

В частном случае, когда у тела T есть *единственный эквигравитирующий стержень* (или один любой другой эквигравитирующий элемент) с плотностью $\mu(\zeta)$, имеем

$$W_{\text{т}} = -\frac{1}{2}\int \varphi_{\text{внутр}}(\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{3}\pi G\rho\left(J - \int \zeta^2\mu(\zeta)\,d\zeta\right). \tag{14.120}$$

Интегрирование в этой формуле распространяется на все точки данного эквигравитирующего элемента.

Замечание 1. Интеграл в круглых скобках в формуле (14.120) с точностью до знака равен моменту инерции эквигравитирующего стержня относительно его центра. Любопытно, что *момент инерции стержня выражается через моменты инерции исходного тела.*

Докажем сейчас следующую теорему.

Теорема 1. *Для однородного круглого диска формула* (14.120) *заметно упрощается и принимает вид*

$$W = -\frac{1}{2}\int \varphi_{\text{внешн}}(\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta, \tag{14.121}$$

где интегрирование распространяется на все точки эквигравитирующего стержня с плотностью (9.30).

Доказательство.

Чтобы применить формулу (14.120), необходимо, как мы знаем, окружить плоский диск вспомогательным однородным шаром. Однако, прямо сделать это пока нельзя, поскольку исходный диск (имеющий не объёмную, а поверхностную плотность!) нарушает однородность вспомогательного шара. Воспользуемся следующим приёмом: «размажем» по высоте плоский диск и превратим его в объёмный круговой цилиндр плотности ρ и высотой $2H$. Чтобы этот цилиндр имел массу диска должно выполняться соотношение

$$\lim_{H\to 0} 2H\rho = \sigma. \tag{14.122}$$

Идея «размазывания» диска в цилиндр заключается в том, что однородный цилиндр уже можно окружить однородной оболочкой и дополнить его до вспомогательного однородного шара.

Превратив таким образом диск в цилиндр, необходимо обратиться к ранее найденным в задаче (9.11) *эквигравитирующим элементам однородного кругового цилиндра*: это три отрезка, два из них имеют чисто мнимую плотность $\mu_1(\zeta)$ и $\mu_2(\zeta)$, см. формулы (9.106) и (9.107), третий отрезок — вещественный и однородный с плотностью (9.108).

Далее дело техники. Интегралы с комплексными пределами, входящие в большие квадратные скобки (14.119), хотя и сложные, тем не менее вычисляются в конечном виде:

$$I_1 = \int\limits_{H-iR_{\text{цил.}}}^{H+iR_{\text{цил.}}} \zeta^2 \mu_1(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{цил.}} R^2_{\text{цил.}};$$
$$I_2 = \int\limits_{-H-iR_{\text{цил.}}}^{-H+iR_{\text{цил.}}} \zeta^2 \mu_2(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{цил.}} R^2_{\text{цил.}}; \tag{14.123}$$
$$I_3 = \int\limits_{-R_{\text{цил.}}}^{R_{\text{цил.}}} \zeta^2 \mu_3(\zeta)\, d\zeta = \frac{2}{3} M_{\text{цил.}} H^2_{\text{цил.}}.$$

Выполним теперь, с учётом (14.122), *обратный предельный переход от цилиндра к диску*: тогда $\lim\limits_{H\to 0} I_3 = 0$ и

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} M_{\text{диска}} R^2_{\text{диска}}. \tag{14.124}$$

Момент же инерции диска относительно оси симметрии очевидно равен

$$J_{\text{диска}} = \frac{1}{2} M_{\text{диска}} R^2_{\text{диска}}. \tag{14.125}$$

Следовательно,

$$J_{\text{диска}} - \int \zeta^2 \left[\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \mu_3(\zeta)\right] d\zeta = 0, \tag{14.126}$$

что и требовалось доказать[4]. ■

§ 14.7. Примеры на применение пятого метода

Применение формулы (14.120) поясним на примерах. Начнём с того, что рассмотрим однородный шар с несколько неожиданной точки зрения.

З а д а ч а 14.8. *Пользуясь формулой* (14.120), *найти гравитационную энергию однородного шара* $(R, \rho, M_{\text{т}})$ через его эквигравитирующий элемент — материальную точку массы $M_{\text{т}}$ *в центре.*

Решение. В этом случае:

$$\mu(\zeta) = M_{\text{т}} \cdot \delta(r);$$

[4] Заметим, что без предварительного «размазывания» диска соответствующий интеграл для момента инерции стержня диска (9.30)

$$2i\sigma \int\limits_{-iR_{\text{диска}}}^{iR_{\text{диска}}} \zeta^2 \sqrt{R^2_{\text{диска}} + \zeta^2}\, d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{диска}} R^2_{\text{диска}}$$

давал бы в два раз меньшую величину, нежели в (14.124), что для нас совсем неприемлемо!

$$\varphi(\zeta) = \varphi(0) = 2\pi G\rho R^2;$$
$$-\frac{1}{2}\int \varphi(\zeta)\cdot\mu(\zeta)\,d\zeta = -\pi G\rho R^2 M_{\text{т}};$$
$$J_{\text{т}} = \frac{3}{5}M_{\text{т}}R^2;$$
$$\int \zeta^2\mu(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака. В итоге, формула (14.120) даёт:

$$W_{\text{шара}} = -\frac{4}{5}\pi G\rho M_{\text{т}}R^2. \tag{14.127}$$

Верно! См. (1.64). ▼

Но к шару можно подойти и иначе.

Задача 14.9. *Пользуясь формулой* (14.120), *найти гравитационную энергию однородного шара* $(R, \rho, M_{\text{т}})$ *через его эквигравитирующий элемент — однородный шар радиусом* $R_1 \lessgtr R$ *той же массы.*

Решение. В этом случае: $\rho_1 = \rho\dfrac{R^3}{R_1^3}$, и

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta = -\frac{4}{3}\pi^2 G\rho^2\frac{R^3}{R_1^3}\int\left(3R^2 - r^2\right)r^2dr = -\frac{4}{3}\pi^2 G\rho^2 R^3\left(R^2 - \frac{1}{5}R_1^2\right);$$

$$J_{\text{т}} - \int \zeta^2\mu(\zeta)\,d\zeta = \frac{3}{5}M_{\text{т}}\left(R^2 - R_1^2\right).$$

Следовательно,

$$W_{\text{шара}} = -\frac{4}{5}\pi G\rho M_{\text{т}}R^2.$$

Верно! См. (14.127). ▼

Применим теперь общую формулу (14.120) к однородным сфероидам.

Задача 14.10. *С помощью формулы* (14.120) *вычислить гравитационную энергию однородного сжатого сфероида.*

Решение. Для сжатого сфероида

$$\varphi(\zeta) = \pi G\rho\left(I - A_3\zeta^2\right), \quad J_{\text{т}} = M\left(2a_1^2 + a_3^2\right)/5, \tag{14.128}$$

следовательно, с учётом (9.7),

$$\int\limits_{-ia_1e}^{+ia_1e} \zeta^2\mu(\zeta)\,d\zeta = -\frac{M_{\text{т}}}{5}\left(a_1^2 - a_3^2\right)^5; \tag{14.129}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-iR}^{iR}\mu(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{5}\pi G\rho M a_1^2\left(1 + 4\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arcsin e\right). \tag{14.130}$$

[5] Очевидно, в данном примере момент инерции стержня относительно центральной точки равен разности моментов инерции сжатого сфероида относительно меридиональной и экваториальной его плоскостей.

В целом, подставляя полученные результаты в формулу (14.120)

$$W_{\text{сж}} = -\frac{4}{5}\pi G\rho M a_1^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e, \tag{14.131}$$

получим известное выражение для энергии однородного сжатого сфероида из (1.66). ▼

Случай вытянутого сфероида аналогичен рассмотренному выше.

Задача 14.11. *С помощью формулы* (14.120) *вычислить гравитационную энергию однородного вытянутого сфероида.*

Задача 14.12. *Найти энергию однородного круглого диска, применив метод эквигравитирующего стержня.*

Решение. Используя известные для диска выражения плотности эквигравитирующего стержня (9.30) и потенциала на оси симметрии (9.35) (где x_3 следует заменить на ζ), интеграл (14.121) запишем в виде

$$W = 2i\pi G\sigma^2 \int\limits_{-ia}^{+ia} \sqrt{a^2+\zeta^2}\left(\sqrt{a^2+\zeta^2}-\zeta\right) d\zeta.$$

Последний член в круглых скобках нечётный по ζ и вклад в интеграл не даёт. Делая замену $\zeta = iRs$, легко вычисляем потенциальную энергию однородного плоского круглого диска

$$W_{\text{диска}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R^3. \tag{14.132}$$

▼

Замечание 2. Этот метод действительно изящен. Сравните с (8.19), когда энергия диска была найдена фактически через широкое кольцо. Краткость метода стержней ещё более выигрывает при его сравнении с *прямым методом*. Действительно, прямой метод опирается на формулу (8.8). Интегрируя внутренний потенциал (9.61) по площади диска, имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{2}\sigma \iint \varphi_{\text{внутр}}(r)\, dx_1 dx_2 = -4\pi G\sigma^2 R^3 \int\limits_0^1 k\,\mathrm{E}(k)\, dk, \tag{14.133}$$

где $k = r/R$. Последнее выражение с учётом вида полного эллиптического интеграла второго рода записывается в виде

$$W_{\text{диска}} = -4\pi G\sigma^2 R^3 \int\limits_0^1 k dk \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{14.134}$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим

$$W_{\text{диска}} = \frac{4}{3}\pi G\sigma^2 R^3 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi - 1}{\sin^2\varphi} d\varphi. \tag{14.135}$$

Но последний интеграл, как легко убедиться, равен -2, и в итоге мы получим то же выражение (14.132).

Задача 14.13. *Найти энергию неоднородного круглого диска с законом поверхностной плотности* (9.150).

Решение. Для такого диска пара «стержень — диск» приводится в формулах (9.151) и (9.153). Перед подстановкой этих выражений в интеграл (14.121) потенциал следует представить в виде $\left(\zeta \to \frac{\zeta}{R}\right)$

$$\varphi(\zeta) = \pi G\sigma_0 R\left\{\sqrt{1+\zeta^2} - 2\zeta + \frac{\zeta^2}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\sqrt{1+\zeta^2}}\right\}. \tag{14.136}$$

Тогда

$$W_{\text{диска}} = \frac{i}{2}\pi G\sigma_0^2 R^3 \left\{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5\right\}. \tag{14.137}$$

Последовательно находим здесь

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\int_0^i \left(1+\zeta^2\right) d\zeta = \frac{4}{3}i; \\ T_2 &= -2\int_{-i}^i \zeta\sqrt{1+\zeta^2}d\zeta = 0; \\ T_3 &= 2\int_0^i \zeta^2\sqrt{1+\zeta^2}\ln\frac{1+\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta. \end{aligned} \tag{14.138}$$

Делая в T_3 замену $\zeta = ix$, интегрируем затем по частям. После подстановки пределов, проинтегрированный член исчезает. Остаётся

$$T_3 = \frac{i}{2}\int_0^1 \left(1 - 2x^2 - \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

Но здесь интеграл от последнего члена равен удвоенной постоянной Каталана $G_К$ (см. 12.20). Тогда

$$T_3 = i\left(\frac{1}{6} - G_К\right). \tag{14.139}$$

Далее,

$$\begin{aligned} T_4 &= -\int_{-i}^i \zeta^3\ln\frac{1+\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\sqrt{1+\zeta^2}} = 0; \\ T_5 &= \frac{1}{2}\int_0^i \zeta^4\ln^2\frac{1+\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta = \frac{i}{2}\int_0^1 x^4\ln^2\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx. \end{aligned} \tag{14.140}$$

Применяя к T_5 два раза интегрирование по частям (до исчезновения логарифма), находим

$$T_5 = \frac{i}{10}\left(6G_К - \frac{11}{3}\right). \tag{14.141}$$

Объединяя эти выражения, в итоге получим

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{30}\pi G\sigma_0^2 R^3 \left(17 - 6G_К\right) = -\frac{3}{10}\frac{M^2 G}{R}\left(17 - 6G_К\right). \tag{14.142}$$

Этот результат эквивалентен (13.95) и (14.208) и, в силу независимого способа получения, является веским подтверждением корректности общих формул трёх методов. ▼

З а д а ч а 14.14. *Найти энергию «шапочки» на сфере.*

Решение. Потенциал и плотность заменяющего стержня для «шапочки» ранее были получены и даны в (9.113) и (9.114). Подставляя эти выражения в формулу (14.121) и делая замену $z = \frac{\zeta}{R}$, получим

$$W = 2\pi i G\sigma^2 R^3 \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1} - 1 + z}{z} \cdot \frac{\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}}{z} dz. \tag{14.143}$$

В (14.143) имеем дело с тремя интегралами

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}}{z} dz, \\ J_2 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}}{z^2} dz, \\ J_3 &= \int\limits_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}{z^2} dz. \end{aligned} \tag{14.144}$$

Заменой

$$x = \frac{z - \cos\alpha}{i\sin\alpha}$$

интеграл J_1 сводится к виду

$$J_1 = i\sin^2\alpha \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos\alpha + ix\sin\alpha} dx. \tag{14.145}$$

Умножая здесь числитель и знаменатель на $\cos\alpha - ix\sin\alpha$ и опуская нечётный член, после некоторых преобразований получим

$$J_1 = i\pi\left(1 - \cos\alpha\right). \tag{14.146}$$

Интеграл J_2 берём сначала по частям; действуя затем по аналогии с вышерассмотренным, после преобразований находим

$$J_2 = i\pi\left(1 - \cos\alpha\right). \tag{14.147}$$

Поэтому разность двух интегралов равна нулю[6]:

$$J_2 - J_1 = 0.$$

Далее, легко убедиться, что

$$J_3 = 4i\left(\sin\alpha - \alpha\cdot\cos\alpha\right).$$

[6] Обратим внимание: несмотря на разный вид подынтегральных выражений, выполняется равенство $J_1 = J_2$, что согласуется с результатами (13.40), см. там интегралы K_4 и K_5.

В итоге, *энергия «шапочки» на сфере* оказывается равной

$$W_{\text{«шапочки»}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 (\sin\alpha - \alpha\cdot\cos\alpha). \tag{14.148}$$

▼

Проверить формулу (14.148) можно в двух замечательных случаях. Во-первых, в случае полного сферического слоя, устремив угол $\alpha \to \pi$:

$$W_{\text{сфер. слоя}} = -8\pi^2 G\sigma^2 R^3 = -\frac{M^2 G}{2R} \tag{14.149}$$

(верно!). И во-вторых, в пределе однородного плоского круглого диска $\alpha \to 0$ (радиус диска $a = \alpha R$); подставляя в (14.148) приближенные значения $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ и $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, легко получим известное нам выражение (14.132). Переход от шапочки к плоскому диску, согласитесь, красив!

Формула (14.148) также гласит, что *энергия тонкой пустотелой полусферы* ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) равна

$$W_{\text{пуст. полусферы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3, \tag{14.150}$$

так что распылить элементарный полный сферический слой оказывается в π (а не в два!) раз труднее, чем распылить одну только его полусферу.

Задача 14.15. *Найти взаимную энергию кусков сферических поверхностей, составляющих асимметричную пустотелую линзу.*

Решение. Дана пустотелая линза, образованная кусками однородных тонких сферических поверхностей. Расположим начало системы отсчёта в точке O (рис. 123). Очевидно, здесь

$$\begin{aligned} b &= R_1 \sin\alpha_1 = R_2 \sin\alpha_2, \\ h_1 &= R_1 (1 - \cos\alpha_1), \\ h_2 &= R_2 (1 - \cos\alpha_2). \end{aligned} \tag{14.151}$$

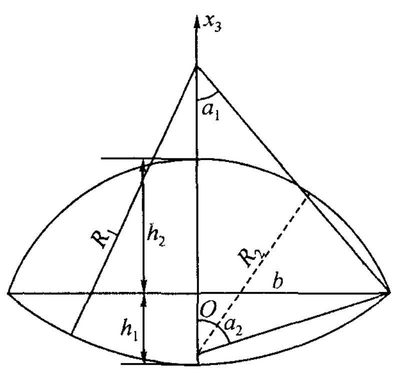


Рис. 123. Пустотелая асимметричная линза

Для вычисления по формуле (14.121) взаимной потенциальной энергии двух сферических «шапочек», образующих пустотелую асимметричную линзу, используем стержень для второй (нижней) «шапочки», и потенциал на оси симметрии — для первой (верхней):

$$\begin{aligned} \mu_2(\zeta) &= -2i\sigma R_2 \frac{\sqrt{b^2+\zeta^2}}{R_2\cos\alpha_2 - \zeta}, \\ \varphi_1(\zeta) &= 2\pi G\sigma R_1 \left(\frac{\sqrt{b^2+\zeta^2} - R_1}{R_1\cos\alpha_1 + \zeta} + 1 \right). \end{aligned} \tag{14.152}$$

Тогда имеем

$$W_{\text{вз}} = 4i\pi G\sigma^2 R_1 R_2 \int\limits_{-ib}^{+ib} \left(\frac{b^2+\zeta^2}{(R_1\cos\alpha_1+\zeta)(R_2\cos\alpha_2-\zeta)} - \right.$$

$$\left. - R_1 \frac{\sqrt{b^2+\zeta^2}}{(R_1\cos\alpha_1+\zeta)(R_2\cos\alpha_2-\zeta)} + \frac{\sqrt{b^2+\zeta^2}}{R_2\cos\alpha_2-\zeta} \right) d\zeta. \tag{14.153}$$

Итогом расчётов, которые мы здесь опускаем, является формула для *взаимной энергии двух «шапочек» пустотелой линзы:*

$$W_{\text{вз. шапочек пуст. ас. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R_1 R_2 \left\{ -b + \frac{R_1^2\alpha_1 + R_2^2\alpha_2}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\left(R_1 + R_2 - \frac{b^2 + R_1R_2 + H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2}{\Delta}\right)\right\}, \tag{14.154}$$

где введены обозначения

$$H_1 = R_1\cos\alpha_1, \quad H_2 = R_2\cos\alpha_2, \quad \Delta = H_1 + H_2. \tag{14.155}$$

▼

Задача 14.16. *С помощью формул* (14.148) *и* (14.154), *используя равенство* (8.23), *найти полную энергию асимметричной пустотелой линзы.*

Решение. Получим

$$W_{\text{пуст. ас. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 \left\{ R_1^2\left(b - \alpha_1 H_1\right) + R_2^2\left(b - \alpha_2 H_2\right)\right\} + W_{\text{вз}}, \tag{14.156}$$

где $W_{\text{вз}}$ из (14.154). Сравните выражения для энергии пустотелой (14.156) и сплошной (12.127) асимметричных линз. ▼

Частные случаи пустотелой линзы (14.154)

Начнём с простой задачи.

Задача 14.17. *Доказать, что полная энергия двух соприкасающихся пустотелых сфер равна*

$$W_{\text{двух пуст. сфер}} = -8\pi^2 G\sigma^2 \left[R_1^3 + R_2^3 + \frac{2R_1^2R_2^2}{R_1 + R_2}\right]. \tag{14.157}$$

Решение. Выражение (14.157) (сравните его с (12.129)) можно получить как прямым способом, так и подстановкой $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ в (14.156). Кстати, это хороший способ проверить последнюю формулу. ▼

Другие важные частные случаи:

а) *Симметричная пустотелая линза*

Взаимная *энергия двух симметричных «шапок»* получается из (14.154) подстановкой одинаковых характеристик обеих частей линзы:

$$W_{\text{вз. шапочек пуст. сим. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 \left\{ \frac{\alpha - 2\pi\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} - \sin\alpha \right\}. \tag{14.158}$$

Полная энергия симметричной пустотелой линзы равна

$$W_{\text{пуст. сим. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 \left\{ \frac{\alpha - 2\pi\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} + \sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha \right\}. \tag{14.159}$$

б) *Линза из двух полусфер*

Взаимная энергия двух полусфер ($\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$). Внешне эта конфигурация напоминает известные со школьной скамьи Магдебургские полушария:

$$W_{\text{вз. двух полусфер}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 \left(\pi - 2\right). \tag{14.160}$$

Полная же энергия тонкой пустотелой сферы оказывается равной

$$W_{\text{пуст. сферы}} = -8\pi^2 G\sigma^2 R^3 = \frac{M^2 G}{2R} \tag{14.161}$$

— в полном согласии с основами теории.

в) *Пустотелая линза с плоским днищем*

Взаимная энергия «шапочки» с плоским днищем ($R_2 \to \infty$, $\alpha_2 \to 0$)

$$W_{\text{вз. шапочки и днища}} = -8\pi G\sigma^2 R\left\{R^2\alpha - bH + \pi\left(RH - H^2 - \frac{b^2}{2}\right)\right\}. \tag{14.162}$$

Полная энергия пустотелой линзы с плоским днищем

$$W_{\text{пуст. линзы с плоским днищем}} = -8\pi G\sigma^2 R^3\left\{\frac{1}{3} + (\alpha + \sin\alpha)(1 - \cos\alpha) - 2\pi\sin^4\frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{14.163}$$

г) *Пустотелая «лунка»*

Как и в случае со сплошной асимметричной линзой (см. § 12.10), сейчас также допустим выгиб одной из сфер в обратную сторону. При этом асимметричная пустотелая линза превращается в пустотелую лунку!

Взаимную энергию сферических компонент пустотелой лунки мы получим, обращая формально в формуле (14.154) знаки у R_2, α_2 и H_2 (не надо забывать, что и сейчас речь идёт об аналитическом продолжении выражения (14.154) на область отрицательных значений параметров линзы, только пустотелой!): имеем

$$\begin{aligned} W_{\text{вз. поверхностей лунки}} = -8\pi G\sigma^2 R_1 R_2\Bigg\{b + \frac{-R_1^2\alpha_1 + R_2^2\alpha_2}{\widetilde{\Delta}} + \\ + \frac{\pi}{2}\left(R_2 - R_1 + \frac{b^2 - R_1R_2 + H_1^2 + H_2^2 - H_1H_2}{\widetilde{\Delta}}\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{14.164}$$

где $\widetilde{\Delta} = R_1\cos\alpha_1 - R_2\cos\alpha_2$.

З а д а ч а 14.18. *По аналогии с задачей 8.7 гл. 8, выполнить в* (14.164) *предельный переход к пустотелой «лунке» со сходящимися острыми краями.*

З а д а ч а 14.19. *Найти полную энергию пустотелой лунки.*

§ 14.8. Метод «прогонки» (шестой)

Прометаем треугольную территорию шаг за шагом

Важным на практике оказывается метод, который назовём условно методом «прогонки». Он заключается в следующем. Рассмотрим гравитирующее тело с распределением плотности $\rho(\boldsymbol{x})$. Разобьём (расслоим) объём этого тела на некоторые элементы; каждый такой элемент будет представлен подмножеством точек с размерностью на единицу меньше, чем у исходной фигуры. Другими словами, семейство элементов зависит только от одного параметра $q_s \geqslant q \geqslant 0$. Так, шар можно расслоить на сферические, а эллипсоид — на гомотетические слои, круглый диск на кольца, одномерный отрезок — на материальные точки, и т. д.[7] Следующий шаг заключается в нахождении взаимного потенциала (или, как говорилось выше, взаимной энергии по модулю) двух любых выделенных в данном семействе элементов

$$d\Phi_{12}(q_1, q_2).$$

[7] Расслоение одного и того же тела с размерностью больше двух может быть произведено разными способами, и в конкретных случаях этот способ надо, разумеется, указывать.

Интегрируя затем найденный взаимный потенциал двух элементов по площади треугольника (рис. 124), мы получим *полную гравитационную энергию тела*

$$W = -\int_0^{q_s} dq_1 \int_{q_1}^{q_s} [d\Phi_{12}]\, dq_2 \tag{14.165}$$

(множитель $1/2$ отсутствует, так как при интегрировании *каждый элемент тела учитывается только один раз*).*

На практике преимущество этого метода перед другими видно уже из того, что *трёхмерный интеграл в формуле* (8.3) *заменяется теперь на гораздо более простой двойной интеграл с универсальной для всех тел треугольной областью интегрирования*. Кроме того, в некоторых важных случаях и интеграл в (14.165) можно свести к *однократному* (см. узловую задачу для цилиндра в § 14.9).

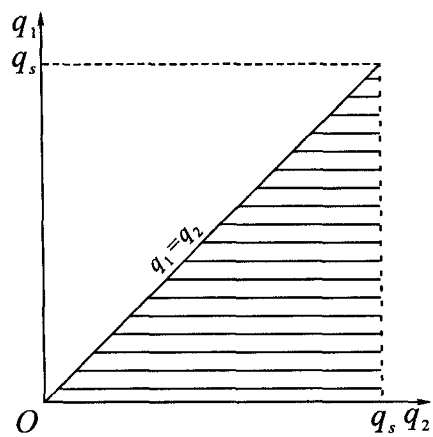


Рис. 124. Область интегрирования (заштрихована) в двойном интеграле (14.165)

Рассмотрим примеры.

1. *Самый простой — это однородный шар радиусом R*

Расслаиваем такой шар на *сферические слои* и выделяем два слоя с радиусами r_1 и r_2 и толщиной dr_1 и dr_2. Тогда, как легко видеть,

$$d\Phi_{12} = \frac{4\pi G\rho r_1^2 dr_1}{r_2} \cdot 4\pi\rho r_2^2 dr_2. \tag{14.166}$$

Таким образом, полная гравитационная энергия однородного шара оказывается равной

$$W_{\text{шара}} = -16\pi^2 G\rho^2 \int_0^R r_1^2 dr_1 \int_{r_1}^R r_2 dr_2 = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5, \tag{14.167}$$

что совпадает с известным результатом (1.64).

2. *Однородный сжатый сфероид*

Расслаиваем его на элементарные *гомотетические слои* с известным из § 5.1 параметром расслоения m. Выделяем затем из них два гомеоида с параметрами m_1 (внутренний) и m_2 (внешний). Масса внутреннего гомеоида равна $4\pi\rho a_1^2 a_3 m_1^2 dm_1$, а потенциал внутри внешнего есть величина постоянная и равная

$$d\varphi_{\text{внутр}} = 2\pi G\rho a_1^2 a_3 m_2 dm_2 \int_0^\infty \frac{ds}{\left(a_1^2 + s\right)\sqrt{a_3^2 + s}}. \tag{14.168}$$

Поскольку этот потенциал не зависит от координат, то

$$d\Phi_{12} = 8\pi^2 G\rho^2 a_1^4 a_3^2 \int_0^\infty \frac{ds}{\left(a_1^2 + s\right)\sqrt{a_3^2 + s}} \cdot m_1^2 m_2 dm_1 dm_2.$$

Следовательно, по формуле (14.165) получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{сж. сфер}} &= -8\pi^2 G\rho^2 a_1^4 a_3^2 \int\limits_0^\infty \frac{ds}{\left(a_1^2+s\right)\sqrt{a_3^2+s}} \cdot \int\limits_0^1 m_1^2 dm_1 \int\limits_{m_1}^1 m_2 dm_2 = \\ &= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 a_1^4 a_3^2 \frac{\arcsin e}{e}, \end{aligned} \tag{14.169}$$

что совпадает с первым результатом из (1.66).

3. *Однородный круглый диск и широкое кольцо*

Ранее эта задача была решена, но другими способами (см. § 8.1 и (для диска) задачу 14.12 этой главы). Но теперь полезно решить её и методом «прогонки».

Рассматриваем диск состоящим из элементарных круглых колечек. Внешний потенциал колечка радиусом r_1 в компланарной плоскости находится из (9.38). Полагая в ней $x_3 = 0$, имеем

$$\varphi(r) = \frac{4G\sigma r_1 dr_1}{r+r_1} \mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}\right) = 4G\sigma k_1 \mathrm{K}(k_1)\, dr_1, \tag{14.170}$$

где $k_1 = \frac{r_1}{r} \leqslant 1$. Тогда взаимный потенциал двух колец с r_1 и r_2 оказывается равен

$$d\Phi_{12} = 8\pi G\sigma^2 r_1 \mathrm{K}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) dr_1 dr_2. \tag{14.171}$$

Основная формула метода (14.165) теперь даёт

$$W_{\text{шир. кольца}} = -8\pi G\sigma^2 \int\limits_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \int\limits_{r_1}^{R_2} \mathrm{K}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) dr_2. \tag{14.172}$$

Представив полный эллиптический интеграл $\mathrm{K}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ его стандартным выражением в тригонометрической форме, после изменения порядка интегрирования запишем (14.172) в виде

$$W_{\text{шир. кольца}} = -8\pi G\sigma^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \int\limits_{r_1}^{R_2} \frac{r_2 dr_2}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2 \sin^2 x}}. \tag{14.173}$$

Находим вначале два внутренних интеграла:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \left(\sqrt{R_2^2 - r_1^2 \sin^2 x} - r_1 \cos x\right) = \\ &= -\frac{1}{3\sin^2 x}\left(R_2^2 - r_1^2 \sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r_1=R_1}^{r_1=R_2} - \frac{1}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\cos x = \\ &= -\frac{R_2^3}{3\sin^2 x}\left[\cos^3 x - \left(1-k^2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{R_2^3}{3}\left(1-k^3\right)\cos x = \\ &= \frac{R_2^3}{3}\left[-\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + \frac{\Delta^3}{\sin^2 x} - \left(1-k^3\right)\cos x\right], \end{aligned} \tag{14.174}$$

где

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \quad k = \frac{R_1}{R_2} \leqslant 1. \tag{14.175}$$

Подставив затем (14.174) в (14.172), получим

$$W_{\text{шир. кольца}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R_2^3 \left\{1 + k^3 + \left(1 - k^2\right) \mathrm{K}(k) - \left(1 + k^2\right) \mathrm{E}(k)\right\}. \tag{14.176}$$

Результат (14.176) совпадает с (8.18), полученным ранее другим методом.

При $R_1 = 0$, $(k = 0)$, $R_2 \equiv R$ кольцо превращается в однородный полный диск, как и следовало ожидать, с энергией (8.19) или (14.132).

Итак, метод «прогонки» даёт независимое и, что немаловажно, более компактное решение задач на гравитационную энергию (см. также в § 13.6 изящное приложение этого метода к задаче об энергии однородного стержня).

Но чтобы по настоящему раскрыть возможности шестого метода, решим сейчас новую и трудную задачу об энергии цилиндра. Приступим.

§ 14.9. Гравитационная энергия однородного кругового цилиндра конечной высоты

14.9.1. Постановка задачи и решение

Дан однородный круговой цилиндр длины $2H$ и радиусом основания R (рис. 125). Для нахождения его гравитационной энергии применим метод «прогонки». *С этой целью расслоим цилиндр на элементарные круглые диски.* Выделим два из них и воспользуемся выведенной ранее формулой (14.105) для взаимной энергии (потенциала) двух однородных дисков. Расстояние между дисками примем теперь равным

$$2d = R\left(u_2 - u_1\right), \tag{14.177}$$

где u_1 и u_2 — нормированная на R высота расположения первого и второго дисков. Согласно данному методу, пределы изменения переменных u_1 и u_2 будут следующие:

$$u_1 \leqslant u_2 < \beta; \quad -\beta \leqslant u_1 \leqslant \beta, \tag{14.178}$$

причём, здесь

$$\beta = \frac{H}{R} \tag{14.179}$$

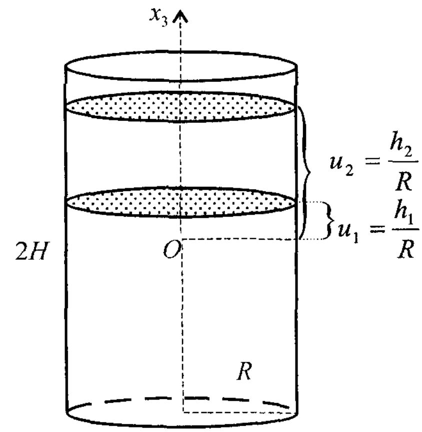


Рис. 125. Прямой круговой цилиндр. Выделены два элементарных круглых диска

— параметр геометрической формы цилиндра. Массы первого и второго дисков:

$$M_1 = \pi G\rho R^3 du_1, \quad M_2 = \pi G\rho R^3 du_2. \tag{14.180}$$

Тогда, с учётом известного нам выражения для взаимной энергии двух однородных круглых дисков $W_{\text{вз}}$ из (14.105), основная формула шестого метода (14.165) для гравитационной энергии цилиндра принимает вид

$$W_{\text{цил}} = -2\pi^2 G\rho^2 R^5 \int\limits_{-\beta}^{\beta} du_1 \int\limits_{u_1}^{\beta} \Phi\left(u_2 - u_1\right) du_2, \tag{14.181}$$

где интегрируемая функция равна

$$\Phi\left(u_2-u_1\right)=-\left(u_2-u_1\right)+\frac{\left[8\left(2-c\right)-c^2\right]\mathrm{E}\left(k\right)-\left(b-c\right)\left(4+c\right)\mathrm{K}\left(k\right)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2-c}}, \tag{14.182}$$

а величины

$$\begin{aligned} b &= \left(u_2-u_1\right)^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{\left(u_2-u_1\right)^2}}-1\right), \\ c &= -\left(u_2-u_1\right)^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{\left(u_2-u_1\right)^2}}+1\right). \end{aligned} \tag{14.183}$$

Область интегрирования в двойном интеграле (14.181) показана на рис. 126.

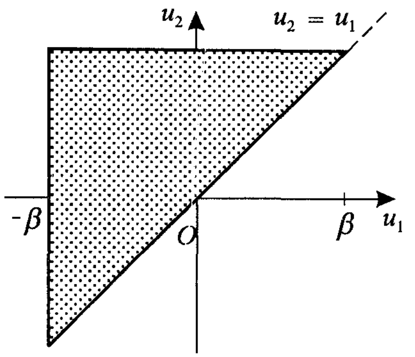


Рис. 126. Треугольная область интегрирования в двойном интеграле (14.181)

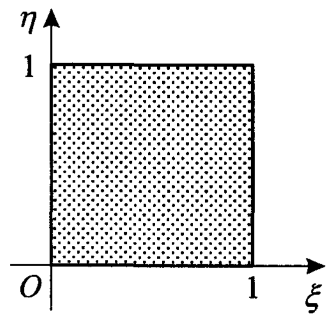


Рис. 127. Квадратная область интегрирования в интеграле (14.187)

Обратим внимание, что интегрируемая функция $\Phi\left(u_2-u_1\right)$ зависит только от разности переменных $\left(u_2-u_1\right)$. *Учитывая это, двойной интеграл* (14.181) *можно, оказывается, привести к однократному.*

Для этого *треугольную* область интегрирования следует вначале преобразовать в *квадратную*. Добиться этого можно, если переменные $(u_1,\, u_2)$ заменить на новые (ξ,η) такие, что

$$u_1=\beta\left(2\xi\eta-1\right),\quad u_2=\beta\left(1-2\xi+2\xi\eta\right). \tag{14.184}$$

Якобиан данного преобразования

$$J=4\beta^2. \tag{14.185}$$

Область на рис. 126 действительно преобразуется теперь в квадратную.

Существенно и то, что при указанном преобразовании (14.184) разность переменных $\left(u_2-u_1\right)$ превращается в выражение

$$u_2-u_1=2\beta\left(1-\xi\right), \tag{14.186}$$

где только *одна* переменная ξ.

Таким образом, приводим двойной интеграл (14.181) к следующему виду:

$$W_{\text{цил.}} = -8\pi^2 G\rho^2 R^5 \beta^2 \int\limits_0^1 \left\{-2\beta(1-\xi) + \right.$$
$$\left. + \frac{\left[8(2-c) - c^2\right] \mathrm{E}(k) - (b-c)(4+c)\mathrm{K}(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2-c}} \right\} \xi d\xi \int\limits_0^1 d\eta, \tag{14.187}$$

где

$$b = 4\beta^2(1-\xi)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2(1-\xi)^2}} - 1\right),$$
$$c = -\beta^2(1-\xi)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2(1-\xi)^2}} + 1\right), \tag{14.188}$$

$$k = \sqrt{\frac{2-b}{2-c}} = 1 - \frac{b}{2} \leqslant 1. \tag{14.189}$$

В (14.187) интегрирование по переменной η легко выполняется; после интегрирования и очевидной замены

$$x = 1 - \xi, \tag{14.190}$$

получим

$$W_{\text{цил.}} = -8\pi^2 G\rho^2 R^5 \beta^2 \int\limits_0^1 \left\{-2\beta x + \right.$$
$$\left. + \frac{\left[8(2-c) - c^2\right] \mathrm{E}(k) - (b-c)(4+c)\mathrm{K}(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2-c}} \right\} (1-x)\, dx, \tag{14.191}$$

причём

$$b = 4\beta^2 x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 x^2}} - 1\right),$$
$$c = -\beta^2 x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 x^2}} + 1\right), \tag{14.192}$$
$$k = \sqrt{\frac{2-b}{2-c}} = 1 - \frac{b}{2}.$$

В итоге, выражение для гравитационной энергии однородного кругового цилиндра конечной высоты (14.191) можно представить в виде

$$W_{\text{цил.}} = -\frac{8}{3}\pi^2 G\rho^2 R^5 \beta^2 \left\{-\beta + \frac{1}{6\pi^2} I\right\}, \tag{14.193}$$

куда входит определённый интеграл[8] от полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\left[8\,(2-c) - c^2\right] \mathrm{E}\,(k) - (b-c)\,(4+c)\,\mathrm{K}\,(k)}{\sqrt{2-c}}\,(1-x)\,dx. \tag{14.194}$$

Расчёты по формуле (14.193) показаны на рис. 128 и в табл. 1.

Важно подчеркнуть: корректность найденного выражения энергии цилиндра (14.193) подтверждается сравнением результатами расчётов энергии цилиндра совершенно независимым *методом Монте-Карло*.

Резюмируем: учитывая математическую трудность задачи для однородного кругового цилиндра, указанное выше её решение методом «прогонки» можно считать кратким и даже изящным. Другими методами эту задачу решить, как показывает практика, будет значительно труднее. Дело в том, что в данной задаче мы начали не с нуля и удачно применили то выражение для взаимной энергии двух круговых дисков, которое было найдено нами ранее методом эквигравитирующих стержней. Содружество новых методов помогает решать весьма нелёгкие задачи!

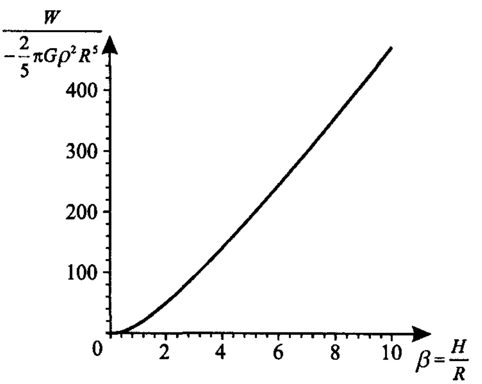


Рис. 128. Модуль гравитационной энергии (в единицах $-\frac{2}{5}\pi^2 G\rho^2 R^5$) однородного кругового цилиндра как функция геометрического параметра $\beta = \dfrac{H}{R}$

Таблица 1. Значения нормированной гравитационной энергии в зависимости от β

β	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
$\dfrac{W}{-\frac{2}{5}\pi G\rho^2 R^5}$	3.34	11.16	21.75	34.31	48.39	63.70	80.03	97.26	115.26	133.95

14.9.2. Представление интеграла (14.194) в конечном виде

Мы установили, что гравитационная энергия (14.193) однородного кругового цилиндра конечной высоты содержит сложный интеграл от полных эллиптических интегралов (14.194). Путём трудоёмких расчётов интеграл (14.194) можно выразить через элементарные функции, полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а также через гипергеометрические функции. Результат имеет весьма впечатляющий вид:

[8] Его можно выразить через эллиптические интегралы и гипергеометрические функции, см. ниже.

$$
\begin{aligned}
I = {} & \frac{6\sqrt{2}G_k}{\beta} + \frac{5+16\beta\left(\beta+\sqrt{1+\beta^2}\right)}{\sqrt{2}\beta}\mathrm{E}\left(n^2\right) - 4\sqrt{2}\left(n+\beta\right)\left(1+3\beta n\right)\mathrm{K}\left(n^2\right) - \\
& - \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{4},1;1\right) + \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2 n^5}{}_3F_2\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{4},1;n^4\right) + \\
& + \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{4},1;1\right) - \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2 n^5}{}_3F_2\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{4},1;n^4\right) + \\
& + \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{4},1;1\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2 n^3}{}_3F_2\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{4},1;n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{4},1;1\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta^2 n^3}{}_3F_2\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{4},1;n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2};1,\frac{5}{4};1\right) - \frac{3\pi n}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2};1,\frac{5}{4};n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right) + \frac{\pi n^2}{2\sqrt{2}\beta}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{6\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4};1,\frac{7}{4};1\right) + \frac{\pi n^3}{6\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4};1,\frac{7}{4};n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{4},1;1\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2 n}{}_3F_2\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{4},1;n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi n}{\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{5}{4};n^4\right) - \frac{\pi n^2}{\sqrt{2}\beta}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{6\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4};1,\frac{7}{4};1\right) + \frac{\pi n^3}{6\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4};1,\frac{7}{4};n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{10\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4};1,\frac{9}{4};1\right) - \frac{3\pi n^5}{10\sqrt{2}\beta^2}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4};1,\frac{9}{4};n^4\right) - \\
& - \frac{5\pi}{16\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(\frac{1}{2},1,1,\frac{3}{2};2,2,2;1\right) + \frac{\pi n^4}{4\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(1,1,\frac{3}{2},\frac{3}{2};2,2,2;n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{256\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(1,1,\frac{3}{2},\frac{5}{2};2,3,3;1\right) - \frac{3\pi n^4}{256\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(1,1,\frac{3}{2},\frac{5}{2};2,3,3;n^4\right) + \\
& + \frac{9\pi}{256\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(1,1,\frac{5}{2},\frac{5}{2};2,3,3;1\right) - \frac{9\pi}{256\sqrt{2}\beta}{}_4F_3\left(1,1,\frac{5}{2},\frac{5}{2};2,3,3;n^4\right) + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\beta^2}\left(-4\left(48\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^4 + \pi\beta\left(5+\pi\ln\left(16\right)\right)\right) - 6\pi^2\beta\ln n\right).
\end{aligned}
\tag{14.195}
$$

Здесь $G_k = 0.915\,965\,594$ — постоянная Каталана, $\Gamma\left(\ldots\right)$ — гамма-функция, а величина

$$
n = \sqrt{1+\beta^2} - \beta. \tag{14.196}
$$

Гипергеометрические функции, которые не содержат n (таких здесь тринадцать), являются фактически некоторыми постоянными, оставшиеся же пятнадцать зависят от геометрического параметра цилиндра β.

Важно заметить, что очень сложную формулу (14.193) можно проверить и *аналитически в дисковом пределе*.

14.9.3. Энергия цилиндра в дисковом пределе

Однородный круговой диск поверхностной плотности σ и массой $M = \pi\sigma R^2$ получается из цилиндра в пределе бесконечно малой его высоты $H \to 0$. Следует только учитывать, что в этом пределе $\rho \to \infty$ и для сохранения массы тела нужно положить

$$\rho R = \frac{\sigma}{2\beta}. \tag{14.197}$$

Учитывая сказанное выше и разложив выражение для энергии цилиндра по степеням малого β, получим следующий ряд:

$$W_{\text{цил.}} = -\frac{2}{3}\pi G\sigma^2 R^3 \left\{4 - \pi\beta + \beta^2(2\ln 2 + \frac{1}{12}) - \beta^2\ln\beta + ...\right\}. \tag{14.198}$$

При $\beta = 0$ отсюда сразу следует известное выражение гравитационной энергии (14.132) *для однородного круглого диска!*

§ 14.10. Замечания о гравитационной энергии однородного кругового тора

Найти в конечном аналитическом виде гравитационную энергию однородного кругового тора — очень заманчивая задача. Проблема эта новаторская, и по своему значению занимает такое же место, как и классическая задача о потенциале однородного трёхосного эллипсоида. Последняя же, напомним, явилась целой эпохой в развитии математической физики прошлых веков. Но несмотря на многократные попытки, найти такую формулу для тора пока не удаётся. Вот задача для настоящего исследователя, не хуже знаменитой большой теоремы Ферма!

В отсутствие аналитического решения полезной разведкой является численный расчёт энергии однородного кругового тора. Однако «в лоб» выполнить численный расчёт для соответствующего шестикратного интеграла по объёму тора тоже не просто. Поэтому для решения задачи мы применили метод Монте-Карло. Результаты вычислений для тора показаны на графике на рис. 129.

Некоторый интерес представляет представление предыдущего численного результата с помощью формулы

$$W_{\text{тора}} = -\alpha\frac{M^2_{\text{тора}}G}{r_0}, \tag{14.199}$$

где полная масса тора $M_{\text{тора}} = 2\pi^2\rho R_0 r_0^2$ (обозначения величин для тора см. на рис. 41, § 7.1), а фактор α аппроксимируется сплайнами. Численное значение данного фактора можно найти, комбинируя эту общую формулу с выполненным нами расчётом энергии тора методом Монте-Карло. В результате удаётся построить график для α, показанный на рис. 130. Максимальное значение α имеет для тора без сквозного отверстия, т. е. при $r_0 = R_0$. Для наглядности значение этого фактора по порядку величины интересно сравнить с соответствующим множителем 0.6 в формуле гравитационной энергии (1.64) для однородного

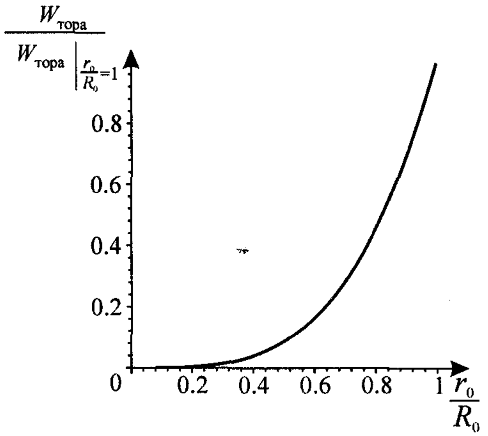


Рис. 129. Зависимость гравитационной энергии однородного кругового тора от геометрического параметра $\frac{r_0}{R_0}$

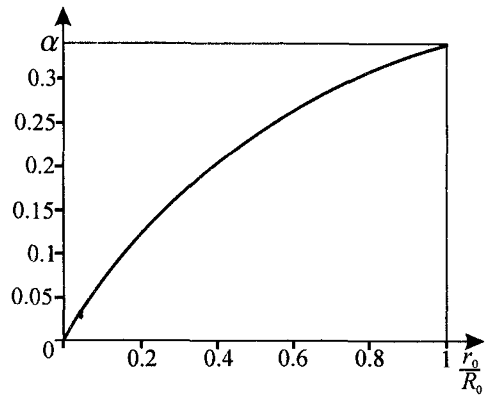


Рис. 130. Зависимость фактора α в формуле (14.199) от геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0}$

шара. Разумеется, в пределе при $\frac{r_0}{R_0} \to 0$, когда тор вырождается в тонкий обруч и его объёмная плотность стремится к бесконечности, величина энергии $W_{тора}$ также логарифмически расходится.

§ 14.11. Метод седьмой. Нахождение энергии дисков асимптотическим переходом от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов

Ещё одна важная роль софокусных преобразований

Переходим к плоским (не обязательно круглым!) дискам и двумерным слоям.

Здесь мы опираемся на результаты первого метода (см. формулы (8.84), (12.1) и (12.3)). А именно, в выражениях потенциальной энергии слоисто-неоднородных эллипсоидов (или сфероидов) выполняем предельный софокусный переход к эллиптическим (круглым) плоским дискам. При этом, опираясь на формулы из § 10.6 и § 10.9, мы заранее знаем, *каким для данного объёмного тела будет закон распределения поверхностной плотности у соответствующего ему диска.* Таким образом, круглый или эллиптический неоднородный диск по данной методике заранее проектируется!

Далее ограничимся для краткости случаем эллипсоидов и сфероидов с гомотетическими слоями. При софокусном «ужатии» исходного слоисто-неоднородного эллипсоида в диск масса первого сохраняется. С учётом этого преобразуем формулу (12.1), исключая в ней центральную объёмную плотность ρ_0 через массу тела M. Тогда в софокусном дисковом пределе при $e_{13} \to 1$ из неё находим[9] энергию эллиптического диска

$$W_{диска} = -\frac{M_{диска}^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \mathrm{K}(e) \cdot \psi(\widetilde{\rho}), \tag{14.200}$$

где

[9] Напомним, что, согласно (5.37), при софокусных преобразованиях мы делаем замены $a_1 \to a_1 m$, а $e_{13} \to \frac{e_{13}}{m}$, и поэтому произведение $a_1(m) \cdot e_{13}(m) = a_1 e_{13} = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ не изменяет своего значения.

$$\psi\left(\widetilde{\rho}\right)=\frac{\int\limits_0^1\left[m\widetilde{\rho}\left(m\right)\int\limits_0^m m^2\widetilde{\rho}\left(m\right)dm\right]dm}{\left(\int\limits_0^1 m^2\widetilde{\rho}\left(m\right)dm\right)^2},\tag{14.201}$$

а $\widetilde{\rho}(m)$ — объёмная плотность эллипсоида, нормированная на ρ_0. Здесь $e=\sqrt{\dfrac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2-a_3^2}}$ — эксцентриситет диска, а $\sqrt{a_1^2-a_3^2}$ — его большая полуось .

Важно помнить: получаемые таким образом диски являются эквигравитирующими исходным слоисто-неоднородным эллипсоидам.

Для сфероидов с гомотетическими слоями указанный дисковый предел совершается при $e\to 1$; тогда исходный сфероид с объёмной плотностью $\rho(m)$ переходит в фокальный эквигравитирующий диск с поверхностной плотностью $\sigma(r)$, причём последнюю находим по формуле (10.56).

Но при нахождении энергии плоских дисков можно поступать и обратным образом. Пусть требуется найти энергию диска с каким-то конкретным распределением поверхностной плотности $\sigma(r)$. Тогда:

1) по заданному $\sigma(r)$, используя формулу (10.76), находим соответствующий интересующему нас диску эквигравитирующий сфероид с объёмной плотностью $\rho(m)$;

2) затем, применяя формулу (12.1), вычисляем энергию $W_{\text{сфер}}$ такого сфероида;

3) наконец, выполняя *в выражении $W_{сфер}$ указанный софокусный* переход, получаем искомую гравитационную энергию $W_{\text{диска}}$ заданного диска.

Итак, в кратком изложении, в основе данного метода лежит переход по схеме:
«Диск – Сфероид – Диск»

Приведём примеры.

Дан эллиптический диск, у которого e — эксцентриситет, а $\sqrt{a_1^2-a_3^2}$ — большая полуось. Этот диск может быть как однородным, так и неоднородным.

а) *Однородному эллипсоиду соответствует, как мы знаем, неоднородный эллиптический диск с законом плотности* (9.3).

В данном случае формула (14.201) даёт $\psi\left(\widetilde{\rho}\right)=\dfrac{3}{5}$, так что из (14.200) сразу следует выражение энергии такого эллиптического диска

$$W_{\text{диска}}=-\frac{3}{5}\frac{M_{\text{диска}}^2G}{\sqrt{a_1^2-a_3^2}}\mathrm{K}\left(e\right).\tag{14.202}$$

В частности, гравитационная энергия круглого диска ($e_{12}=0$) радиуса $R=\sqrt{a_1^2-a_3^2}$ с распределением плотности (9.5) оказывается равной

$$W_{\text{диска}}=-\frac{3}{10}\frac{\pi M_{\text{диска}}^2G}{R}.\tag{14.203}$$

б) *Однородные эллиптический и круглый диски.* Однородный эллиптический диск получается в софокусном дисковом пределе из эллипсоида, состоящего из гомотетических слоёв и имеющего закон плотности (10.58). Для этого диска

$$\psi\left(\widetilde{\rho}\right)=\frac{8}{3}\pi a_1a_2a_3\rho_0^2,$$

и мы находим

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3\pi^2}\frac{M^2_{\text{диска}}G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}\,\mathrm{K}(e)\,. \qquad (14.204)$$

Круглый же однородный диск ($\mathrm{K}(0) = \frac{\pi}{2}$) согласно (14.204) , как легко убедиться, действительно имеет известную нам энергию (14.132).

в) *Эллиптический (или круглый) диск с плотностью*

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0\left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right), \; R_1 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}, R_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}; \qquad (14.205)$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид из гомотетических слоёв с распределением плотности

$$\rho(m) = \frac{2R_1R_2}{\pi a_1 a_2 a_3}\sigma_0\sqrt{1 - m^2}. \qquad (14.206)$$

Гравитационная энергия такого эллиптического диска:

$$W_{\text{диска}} = -\frac{2^{11}}{315\pi^2}\frac{M^2_{\text{диска}}G}{R_1}\mathrm{K}(e)\,. \qquad (14.207)$$

г) *Круглый диск с распределением поверхностной плотности* (13.94) удаётся моделировать эквигравитирующим сфероидом с законом плотности (10.87). Энергия данного сфероида получена в (12.19). Гравитационную же энергию диска теперь легко находим из (12.19) путём предельного софокусного перехода к плоской фигуре; она оказывается равной

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{10}\pi\chi\frac{M^2G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}, \qquad (14.208)$$

где фактор χ из (12.20).

Но кроме уже рассмотренных случаев, асимптотический переход от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов *позволяет вычислять энергию и многих других плоских эллиптических и круглых дисков*. Так, часто используемый в астрофизике диск с *гауссовским распределением плотности* (10.101) также можно представить через эквигравитирующий сфероид с объёмной плотностью (10.102); следовательно, указанным методом мы находим, что гравитационная энергия такого диска оказывается равной

$$W_{\text{диска}} = -\gamma\frac{M^2G}{R}. \qquad (14.209)$$

Здесь $M_{\text{диска}}$ — масса диска, R — его радиус, фактор γ зависит от параметра a, входящего в формулу (10.101). Эта зависимость показана в табл. 2.

Таблица 2. Значения γ в формуле (14.209)

a	1	2	3	4	5
γ	0.09216	0.04797	0.02885	0.01931	0.01395

§ 14.12. Восьмой метод. Нахождение гравитационной энергии слоёв во внешнем гравитационном поле методом дифференциации

Предположим, что гравитационная энергия однородного тела нам известна. Тогда для вычисления энергии элементарного слоя вещества на его поверхности, т. е. взаимной энергии слоя и тела, можно применить *метод дифференциации*[10] *к выражению гравитационной энергии по выбранному параметру геометрической формы тела*

$$W_{\text{вз}} = \frac{\partial W}{\partial q}. \qquad (14.210)$$

В частности, если расширить однородное тело в $(1+\varepsilon)$ раз с сохранением его плотности, исходная энергия изменится и станет равной $W(1+5\varepsilon)$. Приращение же

$$\delta W = 5\,\varepsilon W \qquad (14.211)$$

как раз и выражает энергию наложенного слоя.

Продемонстрируем данный метод на примерах. Сначала на двух простых.

Задача 14.20. *Найти работу, необходимую для удаления (соскребания) элементарного сферического слоя вещества с гравитирующего однородного шара.*

Решение. С геометрической точки зрения, элементарный слой на сфере образуется при дифференцировании её объёма по радиусу. Применяя метод дифференциации к выражению потенциальной энергии шара (1.64), находим энергию данного слоя в поле притяжения шара

$$W_{\text{вз}} = -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 R^4 dR = -\frac{GM_{\text{ш}}M_{\text{сл}}}{R}. \qquad (14.212)$$

Именно на применении этой формулы и основана оценка траты времени гравитационной энергии нашего Солнца на свечение (см. выражение (8.20)). ▼

Задача 14.21. *Найти энергию элементарного колечка в гравитационном поле однородного плоского диска.*

Решение. Дифференцируя по R выражение (14.132), находим

$$W_{\text{вз}} = -8\pi G\sigma^2 R^2 dR = -\frac{GM_{\text{кол}}M_{\text{д}}}{\pi R}. \qquad (14.213)$$

▼

Рассмотренные примеры несложные. Но метод дифференциации позволяет решать и более трудные задачи. С его помощью можно находить энергию расположенного на эллипсоиде *любого элементарного слоя* (а не только гомеоида или фокалоида). В случае однородного слоя для этого следует продифференцировать по параметру m выражение потенциальной энергии однородного эллипсоида (1.65), предварительно заменив там полуоси a_i на $a_i m \alpha_i(m)$:

$$dW_{\text{вз}} = -\frac{2}{5}\pi G\rho \frac{d}{dm}\left[M_{\text{эл}}(m)\, I(m)\right] dm. \qquad (14.214)$$

Здесь величины $M(m)$ и $I(m)$ даны соответственно в (5.85) и (5.100).

В частности, *энергия элементарного гомеоида на поверхности однородного эллипсоида* (5.3) оказывается равной

[10] Речь идёт о методе дифференциации в широком смысле, см. § 2.11.

$$dW_{\text{гом}} = -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \mathrm{F}(\nu, q)\, dm = -\frac{GM_{\text{эл}} M_{\text{гом}}}{a_1 e_{13}} \mathrm{F}(\nu, q), \tag{14.215}$$

где $\mathrm{F}(\nu, q)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, а

$$\nu = \arcsin e_{13}, \; q = \frac{e_{12}}{e_{13}}. \tag{14.216}$$

В простейшем случае сферического слоя отсюда сразу получаем результат (14.212).

§ 14.13. Девятый метод. Гравитационная энергия однородных плоских тел. Двумерный вариант формулы (12.28)

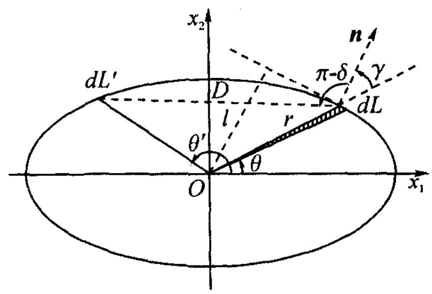


Рис. 131. Плоское тело с хордой между двумя элементами длины dL и dL' на его границе. l — кратчайшее расстояние до касательной к dL. Заштрихована площадь элементарного треугольника

Плоская фигура площадью S ограничена контуром L и имеет поверхностную плотность $\sigma(\boldsymbol{x})$. Интегрируя по заданной площади тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma\varphi x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma\varphi x_2) = 2\sigma\varphi + \boldsymbol{x}\,\mathrm{grad}\,(\sigma\varphi), \tag{14.217}$$

получим выражение

$$\iint\limits_S \mathrm{div}\,(\sigma\varphi\boldsymbol{x})\, dS = -4W + \iint\limits_S \boldsymbol{x}\,\mathrm{grad}\,(\sigma\varphi)\, dS. \tag{14.218}$$

Если плотность от координат не зависит, из (14.218) сразу следует *двумерный вариант формулы* (12.26):

$$W = -\frac{\sigma}{3} \iint\limits_S \mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol{x})\, dS. \tag{14.219}$$

Применяя теперь формулу Грина для плоскости (см. сноску (1) в § 2.1), приводим (14.219) к интегралу по граничному контуру L

$$W_{\text{диска}} = -\frac{\sigma}{3} \oint\limits_L \varphi\,(x_1 dx_2 - x_2 dx_1). \tag{14.220}$$

Удвоенную площадь заштрихованного треугольника (рис. 131) можно записать также как $r\cos\gamma\, dL$, где $\boldsymbol{r}\,(x_1, x_2)$ есть радиус-вектор произвольной точки на контуре фигуры, γ — угол между $\boldsymbol{r}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к контуру, dL — элемент длины контура. Таким образом, приходим *к двумерному варианту формулы* (12.28):

$$W_{\text{диска}} = -\frac{\sigma}{3} \oint\limits_L \varphi(x_1, x_2)\, r \cos\gamma \, dL. \tag{14.221}$$

Следовательно, *для вычисления гравитационной (электростатической) энергии однородной плоской фигуры достаточно знать её потенциал только на контуре L.* Заметим, что потенциал этот, входящий под знак интеграла в (14.221), нам уже известен и даётся контурным интегралом (2.7). Формула (14.221) становится пригодной для решения поставленной задачи.

Пример. В простом частном случае однородного круглого диска радиуса R угол $\gamma = 0$ потенциал на границе даётся выражением (2.12). С учётом этого, формула (14.221) сразу даёт гравитационную энергию круглого диска (14.132). Вновь убеждаемся в полезности взаимного контроля разработанных методов.

Используя интеграл (14.221), в качестве примера вычислим теперь энергию *однородного эллиптического диска* с границей (4.1). Для решения поставленной задачи вначале параметризуем границу этого диска

$$x_1 = a_1 \cos\theta, \;\; x_2 = a_2 \sin\theta \;\; (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{14.222}$$

Тогда

$$dL = \sqrt{a_1^2 \sin^2\theta + a_2^2 \cos^2\theta}\, d\theta, \tag{14.223}$$

а направляющие косинусы нормали $\boldsymbol{n}$ к эллипсу суть

$$n_1 = \frac{a_2 \cos\theta}{\frac{dL}{d\theta}}, \;\; n_2 = \frac{a_1 \sin\theta}{\frac{dL}{d\theta}}. \tag{14.224}$$

Как легко видеть,

$$r \cos\gamma \, dL = a_1 a_2 d\theta. \tag{14.225}$$

Остаётся подставить в формулу (14.221) выражение потенциала фигуры. Для вычисления в (2.7) $\cos\delta$ следует знать направляющие косинусы отрезка D из (1.31), длину которого можно записать в виде

$$D = \sqrt{a_1^2 (\cos\theta - \cos\theta')^2 + a_2^2 (\sin\theta - \sin\theta')^2}. \tag{14.226}$$

Очевидно, эти косинусы таковы:

$$D_1 = \frac{a_1 (\cos\theta - \cos\theta')}{D}, \;\; D_1 = \frac{a_2 (\sin\theta - \sin\theta')}{D}, \tag{14.227}$$

так что

$$\cos\delta = n_1 D_1 + n_2 D_2 = \frac{a_1 a_2}{D \cdot dL} \left[1 - \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'\right]. \tag{14.228}$$

Подставляя (14.225) и (14.228) в (14.221), после сокращения (в силу симметрии элементов длины dL и dL'), имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{G\sigma^2}{3}a_1^2a_2^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}{\sqrt{a_1^2(\cos\theta-\cos\theta')^2 + a_2^2(\sin\theta-\sin\theta')^2}}\,d\theta d\theta'. \tag{14.229}$$

Делая в этом двойном интеграле элементарные преобразования и вводя следующие обозначения:

$$\frac{\theta-\theta'}{2} = \xi, \quad \frac{\theta+\theta'}{2} = \eta, \tag{14.230}$$

после сокращения на $\sin\xi$, имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{2}{3}G\sigma^2a_1^2a_2^2 \iint \frac{\sin\xi\ d\xi d\eta}{\sqrt{a_1^2\sin^2\eta + a_2^2\cos^2\eta}}. \tag{14.231}$$

Новая область интегрирования показана на рис. 132. Интегрирование по обеим переменным теперь выполняется раздельно и двойной интеграл (14.231) сводится к однократному

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3}G\sigma^2a_1^2a_2^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2\sin^2\eta + a_2^2\cos^2\eta}}; \tag{14.232}$$

следовательно,

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3}G\sigma^2a_1a_2^2\,\mathrm{K}(e) = -\frac{16}{3\pi^2}\frac{M^2G}{a_1}\mathrm{K}(e), \tag{14.233}$$

где $K(e)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, а эксцентриситет диска $e = \sqrt{1-a_2^2/a_1^2}$.

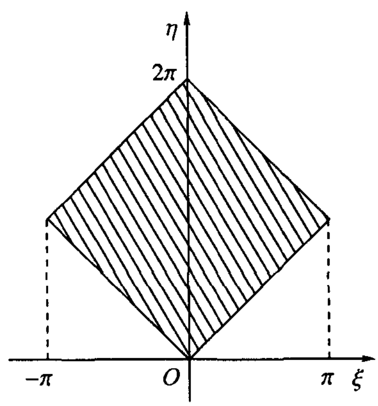


Рис. 132. Область интегрирования в двойном интеграле (14.231)

В (14.233) и дана *энергия однородного эллиптического диска.*

Для контроля заметим: формула (14.233) эквивалентна ранее найденной нами формуле (14.204) (очевидно, в последнем выражении $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ и есть наибольшая полуось эллипса, полученного там другим методом).

§ 14.14. Десятый метод. Гравитационная энергия однородных двумерных тел с логарифмическим потенциалом

Действуем по аналогии с выводом формулы(14.221). Для нахождения гравитационной энергии W двумерных цилиндров интегрируем потенциал (4.13) по dx_1dx_2; меняя порядок интегрирования по площади и по контуру, получим

$$W_{\text{цил}} = \frac{G\rho^2}{6}\oint dL' \iint\limits_S \left(R\ln R - \frac{R}{2}\right)dx_1dx_2. \tag{14.234}$$

Во внутреннем интеграле переходим к полярным координаты и проводим интегрирование по dr. Тогда переменная точка $\boldsymbol{x}$ «садится» на контур, и в итоге приходим к следующему выражению для энергии[11]:

$$W_{\text{цил}} = \frac{G\rho^2}{6} \oint\!\!\oint \left(D^2 \ln D - \frac{5}{6} D^2\right) \cos\gamma \cos\gamma' dL dL'. \tag{14.235}$$

Здесь $D = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$ есть длина хорды между концами векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ на контуре, восстановленными из начала отсчёта к элементам dL и dL' соответственно, а γ и γ' — углы между нормалями к контуру в данных точках и хордой D. Очевидно,

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{(x_1 - x_1')\, dx_2 - (x_2 - x_2')\, dx_1}{D \cdot dL}; \\ \cos\gamma' &= \frac{(x_1' - x_1)\, dx_2' - (x_2' - x_2)\, dx_1'}{D \cdot dL'}. \end{aligned} \tag{14.236}$$

Эти формулы завершают решение задачи.

Таким образом, согласно (14.235), нахождение гравитационной энергии однородного двумерного тела сводится к вычислению двойного контурного интеграла по границе сечения данного тела. Обратим внимание: *Выражение* (14.235) — *это двумерный аналог формулы* (12.32).

Отметим характерную особенность формулы (14.235): при заданной массе M на единицу длины цилиндра гравитационная энергия цилиндра будет зависеть не только от геометрии сечения, но ещё и от размеров фигуры (из-за членов типа $\ln D$). Этого и следовало ожидать, так как указанная особенность имеется и в самом потенциале (4.12). Поэтому и необходимо делать нормировку потенциала или выражения для энергии на единицу длины цилиндра.

Для примера применим формулу (14.235) к цилиндру с круговым сечением с радиусом R. Введём полярную систему координат с началом в центре круга и направим полярную ось в точку $\boldsymbol{x}'$. Тогда

$$D = 2R\sin\frac{\theta}{2};\ \cos\gamma = \cos\gamma' = \sin\frac{\theta}{2};\ dL = Rd\theta. \tag{14.237}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_{\text{кругл. цил}} &= \frac{G\rho^2}{6} \oint dL' \int_0^{2\pi} 4R^3 \sin^4\frac{\theta}{2} \left(\ln 2R - \frac{5}{6} + \ln\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \\ &= \frac{8}{3}\pi G\rho^2 R^4 \int_0^{\pi} \sin^4 x \left(\ln 2R - \frac{5}{6} + \ln\sin x\right) dx = \\ &= \pi^2 G\rho^2 R^4 \left(\ln R - \frac{1}{4}\right) = GM^2_{\text{кругл. цил}} \left(\ln R - \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \tag{14.238}$$

Здесь, как уже говорилось выше, $M_{\text{кругл. цил}}$ и $W_{\text{кругл. цил}}$ рассчитаны на единицу длины цилиндра.

[11] Напомним, что энергия (и масса M, см. ниже) рассчитываются в данной задаче на единицу длины цилиндра.

Используем сейчас этот результат для сравнения гравитационных энергий однородных цилиндров, имеющих равновеликие по площади круглое и квадратное сечения.

Задача 14.22. *Вычислить гравитационную энергию двумерного однородного цилиндра с прямоугольным сечением.*

Решение. Пусть в сечении цилиндра лежит прямоугольник со сторонами a_1 и a_2. Для решения задачи используем метод 2, применённый ранее к кубоиду (см. § 12.5), с учётом, однако, специфики найденного выражения потенциала (4.13). После многих преобразований, в итоге приходим к выражению

$$W_{\text{прямоуг. цил}} = \frac{GM^2_{\text{прямоуг. цил}}}{12}\left\{6\ln\left(a_1^2+a_2^2\right) - \frac{a_1^2}{a_2^2}\ln\left(1+\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - \frac{a_2^2}{a_1^2}\ln\left(1+\frac{a_1^2}{a_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 8\left[\frac{a_1}{a_2}\operatorname{arctg}\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1}\operatorname{arctg}\frac{a_1}{a_2}\right] - 25\right\}. \tag{14.239}$$

▼

Нормировку (14.239) удобно сделать на цилиндр с квадратным сечением $a = a_1 = a_2$. Для последнего

$$W_{\text{квадр. цил}} = \frac{GM^2_{\text{квадр. цил}}}{12}\left\{6\ln\left(2a^2\right) - 2\ln(2) + 4\pi - 25\right\}. \tag{14.240}$$

Следовательно,

$$W_{\text{прямоуг. цил}} - W_{\text{квадр. цил}} = \frac{GM^2}{12}\left\{6\ln\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a^2}\right) - \frac{a_1^2}{a_2^2}\ln\left(1+\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{a_2^2}{a_1^2}\ln\left(1+\frac{a_1^2}{a_2^2}\right) + 8\left[\frac{a_1}{a_2}\operatorname{arctg}\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1}\operatorname{arctg}\frac{a_1}{a_2}\right] - 4\ln 2 - 4\pi\right\}. \tag{14.241}$$

Отсюда следует: *среди цилиндров с прямоугольным сечением наибольшей по модулю энергией обладает цилиндр с квадратным сечением.*

Сравним теперь энергии равновеликих (по площади сечений) цилиндров с круглым и квадратным сечениями. Согласно (14.238) и (14.240), находим

$$W_{\text{кругл. цил}} - W_{\text{квадр. цил}} = -1.7278221 \cdot 10^{-2} M^2 G. \tag{14.242}$$

Итак, *цилиндр с круглым сечением обладает меньшей потенциальной энергией, чем цилиндр с равновеликим ему квадратным.* Округление сечения тела энергетически выгодно! С аналогичной ситуацией мы встречались и в трёхмерном случае для кубоида (см. формулу (12.51)), но там речь шла о шаре.

Замечания

Материал главы разработан автором.

§ 14.1. Совокупность формул (14.3) и (14.4) дает для задач на потенциальную энергию перспективный метод — контролёр, но он годится и для нахождения энергии частей тела.

Первоисточник: [21].

§ 14.2. Пятый метод основан на осознании (вначале это была только гипотеза!) того, что взаимная энергия пары *стержень — диск* равна удвоенной полной гравитационной энергии исходного осесимметричного тела. Данный метод распространяется и на тела, имеющие эквигравитирующие «скелеты» из стержней.

Первоисточник: [21].

§ 14.3. Задача о параллельных кольцах — прелюдия к узловой задаче о двух дисках.

§ 14.4. Новый материал о кольцах. Удивительно, что очень сложный определённый интеграл (14.41) удаётся представить вначале компактным рядом, а затем и выразить его в конечном виде (14.49) или (14.53).

Первоисточник: [21].

§ 14.5. Новый материал. Формула для взаимной энергии двух дисков важна не только само по себе, но она удачно используется затем и в шестом методе (метод «прогонки», или метод интегральных элементов) в задаче об энергии цилиндра конечной высоты.

§ 14.6. Теория пятого метода усовершенствована по сравнению с изложением в [21]. Впервые доказана важная теорема 1.

§ 14.7. Здесь решено много новых интересных задач. Даже шар проявляет себя с неожиданной стороны! Задача о пустотелой асимметричной линзе требует тщательного анализа многих частных случаев.

§ 14.8. Шестой метод предполагает расслоение тела на элементы. Здесь, в частности, могут пригодиться результаты гл. 5 по эллипсоидальной стратификации, а также формула для взаимной энергии двух дисков из § 14.5. Метод имеет важное практическое значение.

Первоисточник: [21].

§ 14.9. Новый материал. Задача об энергии цилиндра конечной высоты — очень крепкий орешек, и «по зубам» он оказывается лишь шестому методу. Здесь применён оригинальный способ преобразования двойного интеграла в однократный (см. преобразования (14.184)).

§ 14.10. Численный расчёт энергии для однородного кругового тора — это разведка для будущих аналитических исследований!

§ 14.11. Переход от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов к дискам позволяет находить не только потенциал (см. § 10.6 и § 10.7), но и гравитационную энергию дисков. Здесь применяется идея эквигравитирующих тел, детально разработанная в гл. 9. Облегчает дело то, что нам уже известно, как по данному диску находится заменяющий его эллипсоид (справедливо и обратное!).

Первоисточник: [21].

§ 14.12. Метод вычисления энергии слоёв путём дифференцирования общего выражения для W по параметру m допускает его обращение, т. е. интегрирование. Действительно, указанный выше шестой метод фактически и есть обращение метода дифференциации.

Первоисточник: [21].

§§ 14.13, 14.14. Формула (14.220) является двумерным аналогом выражения (12.28), а выражение (14.235) — это двумерный аналог формулы (12.32).

Первоисточник: [21].

ГЛАВА 15

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 15.1. О гравитационной силе от мантии Земли и жидкого ядра на твёрдое внутреннее ядро

Наша планета имеет слоистую структуру и во многих случаях её мантию можно представить толстой сфероидальной оболочкой малой сплюснутости с подобными слоями равной плотности. Легко убедиться, что в сравнении с влиянием Луны и Солнца, основную часть потенциала на точки внутреннего (твёрдого) ядра Земли даёт притяжение самой планеты. Обозначим через $\Phi_1(x, y, z)$ потенциал всей Земли. В состоянии покоя, когда геометрические центры ядра и мантии совпадают, потенциал $\Phi_1(x, y, z)$ — симметричная функция, и поэтому интегрирование $\operatorname{grad}\Phi_1$ по объёму симметрично расположенного внутреннего ядра даст нуль. Несимметричный член в потенциале появляется только при смещении этого внутреннего ядра, и данная часть потенциала содержит три компоненты: гравитационное воздействие на пробную точку от самого твёрдого ядра, притяжение от внешнего жидкого ядра и, кроме того, от мантии Земли. Оценим их значения.

1. *Потенциал внутри твёрдого ядра: вклад от самого твёрдого ядра и от внешнего жидкого*

Пусть R, ρ и R_1, ρ_1– средние радиусы и плотности соответственно внешнего жидкого и твёрдого внутреннего ядра Земли[1]. Начало системы отсчёта расположено в центре жидкого сферического ядра. Искомый потенциал состоит из суммы двух членов:

$$\Phi_1(\boldsymbol{r}) = \varphi_{\text{об}}(\boldsymbol{r}) + \varphi_{\text{смещ. шара}}(\boldsymbol{r}). \tag{15.1}$$

Здесь

$$\varphi_{\text{об}}(\boldsymbol{r}) = \frac{2}{3}\pi G\rho\left[3\left(R^2 - R_1^2\right) - h^2 - 2\boldsymbol{hr}\right] \tag{15.2}$$

— потенциал в пустой сферической каверне радиусом R_1, неконцентрическим образом расположенной внутри однородного шара радиусом R (смещение центра каверны равно $\boldsymbol{h}$); с точностью до обозначений этот потенциал был получен у нас в (6.39). Второй же член в (15.1)

$$\varphi_{\text{смещ. шара}}(\boldsymbol{r}) = \frac{2}{3}\pi G\rho_1\left[3R_1^2 - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{h})^2\right] \tag{15.3}$$

и есть потенциал смещенного на величину $\boldsymbol{h}$ однородного шара радиуса R_1, которым моделируется само твёрдое ядро.

Поэтому на единицу массы сместившегося на $\boldsymbol{h}$ твёрдого ядра действует гравитационное ускорение

$$\boldsymbol{F}_{\text{ядра}} = -\frac{4}{3}\pi G\left\{\rho_1\boldsymbol{r} - (\rho_1 - \rho)\,\boldsymbol{h}\right\}. \tag{15.4}$$

Тогда сила, действующая в целом на твёрдое ядро, будет равна[2]

[1] Плотности внутреннего и внешнего ядра полагаем здесь постоянными, так как учёт неоднородности фактически не меняет конечного результата.

[2] Разумеется, в целом внутреннее ядро само на себя не воздействует.

$$\iiint\limits_{T_1} \mathrm{grad}\Phi_1 dV = -\frac{4}{3}\pi G\rho V_1 \boldsymbol{h}, \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3. \tag{15.5}$$

Задача 15.1. *Дать вывод формулы* (15.5).

Решение. Имеем $\boldsymbol{h} = (h_x,\, h_y,\, h_z)$, а $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$. Сделаем перенос сначала сферических координат в конец вектора $\boldsymbol{h}$: тогда

$$\begin{aligned} x &= h_x + uR_1 \sin\theta\cos\lambda, \\ y &= h_y + uR_1 \sin\theta\sin\lambda, \\ z &= h_z + uR_1 \cos\theta, \end{aligned}$$

или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} + uR_1 \left[\sin\theta\left(\mathbf{i}_x\cos\lambda + \mathbf{i}_y\sin\lambda\right) + \mathbf{i}_z\cos\theta\right].$$

Якобиан преобразования равен $J = R_1^3 u^2 \sin\theta$. Теперь интеграл в (15.5) действительно дает требуемый результат:

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{T_1} \mathrm{grad}\Phi_1 dV = \\ &= -\frac{4}{3}\pi G R_1^3 \int\limits_0^1 u^2 du \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \left\{\rho_1 u R_1 \left[\sin\theta\left(\mathbf{i}_x\cos\lambda + \mathbf{i}_y\sin\lambda\right) + \mathbf{i}_z\cos\theta\right] + \rho\boldsymbol{h}\right\} d\lambda = \\ &= -\frac{4}{3}\pi G R_1^3 \int\limits_0^1 u^2 du \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \left\{\rho_1 u R_1 \mathbf{i}_z\cos\theta + \rho\boldsymbol{h}\right\} d\lambda = \\ &= -\frac{4}{3}\pi G R_1^3 \rho\boldsymbol{h} \int\limits_0^1 u^2 du \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\lambda = -\frac{16}{9}\pi^2 G R_1^3 \rho\boldsymbol{h} = -\frac{4}{3}\pi G\rho V_1 \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{15.6}$$

▼

2. *Потенциал внутри твёрдого ядра: вклад от мантии*

Моделируем мантию толстой слоисто-неоднородной оболочкой со слегка отличающимися от сферических эллипсоидальными слоями равной плотности. Для исследования гравитационных свойств мантии обратимся к формулам § 6.10. Поскольку потенциал внутри оболочки даётся формулой (6.140), сила на единицу массы при сделанных предположениях равна

$$F_{\text{мант}} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=h_x} = -2\widetilde{A}_1 h_x, \tag{15.7}$$

где $\widetilde{A}_1$ из (6.141). Но по теореме о среднем значении

$$\widetilde{A}_1(n) \approx \pi G\bar{\rho}_{\text{мант}}\left[A_1(1) - A_1(n)\right], \tag{15.8}$$

где средняя плотность мантии $\bar{\rho}_{\text{мант}} \approx 4\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$, так что для отношения силы (15.7) к (15.4) имеем

$$\nu = \frac{F_{\text{мант}}}{F_{\text{ядра}}} \approx \frac{3\bar{\rho}}{2(\rho_1 - \rho)}\left[A_1(1) - A_1(n)\right]. \tag{15.9}$$

Здесь, согласно современным данным [10],

$$\frac{3\bar{\rho}}{2(\rho_1 - \rho)} \approx 5, \tag{15.10}$$

а

$$A_1(1) - A_1(n) \approx \frac{2}{15}\left(e^2_{\text{ядра}} - e^2_{\oplus}\right) \approx \frac{4}{15}\left(\varepsilon_{\text{вн. ядра}} - \varepsilon_{\oplus}\right), \tag{15.11}$$

причём мы использовали разложение (6.84). Но так как $\varepsilon_{\text{вн. ядра}} - \varepsilon_{\oplus} \approx 8 \cdot 10^{-4}$, то

$$\nu \approx 4 \cdot 10^{-3}. \tag{15.12}$$

Итак, *гравитационным влиянием мантии на сместившееся внутреннее ядро можно пренебречь*, оно оказывается много меньше влияния на него внешнего жидкого ядра.

§ 15.2. Количество тепла при гравитационной дифференциации вещества в недрах Земли

Как известно, Земля состоит в основном из четырёх химических элементов: кислорода, кремния, алюминия и железа. Согласно современным представлениям, при зарождении Земля могла быть однородной по плотности и все химические элементы были перемешаны. В дальнейшем эволюция Земли могла происходить по следующему сценарию: наиболее тяжелые элементы (железо) постепенно «опускались» вниз к центру Земли, а более легкие (алюминий и кремний) «всплывали» к поверхности. Происходил процесс гравитационной дифференциации вещества, который сопровождался уменьшением модуля гравитационной энергии Земли и переходом части её в теплоту. Оценим эту теплоту чтобы знать, могла ли Земля когда либо быть в расплавленном состоянии.

Итак, полагая Землю вначале однородной и опираясь на современные данные о внутреннем строении нашей планеты, найдем величину изменения её гравитационной энергии в ходе совершившейся перестройки структуры.

Для этого, рассматривая разность гравитационных энергий однородного и неоднородного шара заметим, что эта величина сводится к разности одних только *внутренних частей гравитационных энергий* шаров (действительно, согласно формуле (8.139), *внешняя* часть $W_{\text{внешн}}$ не зависит от характера распределения плотности внутри шара). Таким образом, имеем

$$\Delta W = W^0_{\text{внутр}} - W^1_{\text{внутр}}. \tag{15.13}$$

Здесь, согласно первой формуле в (8.137),

$$W^0_{\text{внутр}} = -\frac{1}{10}\frac{M^2G}{R}, \tag{15.14}$$

а согласно (8.124), в случае шара

$$W^1_{\text{внутр}} = -\frac{1}{2G}\int\limits_0^R r^2 g^2(r)\, dr, \tag{15.15}$$

где $g(r)$ — гравитационное ускорение в пробной точке r.

По данным формулам можно сделать численные оценки. Из теоретических моделей одной из самых простых является двухкомпонентная модель неоднородной Земли (см., например, [43]). В этой модели Земля разделена на ядро с радиусом $r_c = 0.548\ R$ и постоянной плотностью $\rho_c = 11\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, и внешнюю однородную оболочку (мантию) с плотностью $\rho_m = 4.437\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. При этих значениях плотностей должны соблюдаться условия равенства момента инерции и полной массы данной модели и реальной Земли ($M = 6\cdot 10^{27}$ г). Например, последнее условие выглядит так:

$$\overline{\rho}R^3 = \rho_m\left(R^3 - \rho_c^3\right) + \rho_c r_c^3. \tag{15.16}$$

Здесь $\overline{\rho} = 5.517\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ — средняя плотность, а $R = 6.371$ км — средний радиус нашей планеты.

Кроме того, в этой модели

$$g_c = \frac{4}{3}\pi G\rho_c r, \quad r < r_c, \tag{15.17}$$

$$g_m = \frac{4}{3}\pi G\left[\rho_c\frac{r_c^3}{r^2} + \rho_m\left(r - \frac{r_c^3}{r^2}\right)\right], \tag{15.18}$$

поэтому

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{8}{9}\pi^2 G\left\{\frac{1}{5}\rho_c^2 r_c^5 + (\rho_c - \rho_m)\, r_c^6 + \frac{1}{5}\rho_m^2\left(R^5 - r_c^5\right) + \rho_m\left(\rho_c - \rho_m\right) r_c^3\left(R^2 - \rho_c^3\right)\right\}. \tag{15.19}$$

Подставляя (15.14) и (15.19) в (15.13), находим величину теплоты равной

$$Q = \Delta W_{\text{внутр}} \approx 1.9\cdot 10^{38}\text{эрг} = 4.58\cdot 10^{30}\text{кал}. \tag{15.20}$$

Эту величину можно сравнить с результатом расчётов, разделяя Землю уже на много слоёв, т.е. по формуле

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{1}{6}G\sum_{i=1} g_i^2\left(R_{i-1}^3 - R_i^3\right), \tag{15.21}$$

где g_i — среднее значение ускорения в слое с радиусами R_{i-1} и R_i. Это даёт вместо (15.20) более точное значение[3]

$$Q \approx 3.23\cdot 10^{30}\text{кал}. \tag{15.22}$$

Как видим, совпадение хорошее. Заметим, что величина (15.22) несколько меньше, чем у Еськова [16], с. 30, где приводится значение $Q = 4\cdot 10^{30}$ кал.

§ 15.3. Разложение в ряд внутреннего потенциала широкого кольца, заполненного розеточной орбитой

Рассмотрим опять широкое кольцо с распределением поверхностной плотности (3.69) и найдём ряд, представляющий потенциал кольца внутри сферы $r \leqslant r_p$. Это полезно знать для различных астрофизических приложений, например, при нахождении фигуры равновесия центрального тела у планеты Сатурн или в кольцевых галактиках.

Решение поставленной задачи ищем в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\varphi_{\text{внутр}} = G\sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{15.23}$$

с коэффициентами разложения

[3] Распределение g_i по внутренним слоям Земли было взято по известной модели Буллена [10], с. 275.

$$D_n = \iint \sigma(r') \frac{P_n(\cos\theta')}{(r')^n} d\theta'\, dr'. \tag{15.24}$$

В силу симметрии кольца n должно быть чётным $n = 0, 2, 4, \ldots$.

Точка интегрирования (r', θ') находится в плоскости самого кольца. Тогда $\theta' = \frac{\pi}{2}$ и, очевидно,

$$P_n(\cos\theta') \equiv \alpha_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(n-1)!!}{n!!}. \tag{15.25}$$

Поэтому

$$D_n = 2\pi C \alpha_n \int\limits_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{r^n \sqrt{(r_a - r)(r - r_p)}}. \tag{15.26}$$

Для взятия интеграла (15.26) выполним ряд преобразований. Положим

$$r = \frac{1}{s}, \quad s_a = r_a^{-1}, \quad s_p = r_p^{-1}, \tag{15.27}$$

тогда

$$D_n = \frac{2\pi C \alpha_n}{\sqrt{r_a r_p}} \int\limits_{s_a}^{s_p} \frac{s^{n-1} ds}{\sqrt{(s_a - s)(s - s_p)}}. \tag{15.28}$$

Еще одна замена будет следующая:

$$s = \frac{s_a + s_p}{2} + \frac{s_a - s_p}{2} \cos\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \pi, \tag{15.29}$$

так что

$$\begin{aligned} s_a - s &= \frac{s_a - s_p}{2}(1 - \cos\tau), \\ s - s_p &= \frac{s_a - s_p}{2}(1 + \cos\tau) \end{aligned} \tag{15.30}$$

и

$$D_n = \frac{2\pi C \alpha_n}{\sqrt{r_a r_p}} \int\limits_0^{\pi} \left[\frac{s_a + s_p}{2} + \frac{s_p - s_a}{2} \cos\tau\right]^{n-1} d\tau. \tag{15.31}$$

Наконец, переобозначим функцию от параметров s_a и s_p

$$x = \frac{s_a + s_p}{2\sqrt{s_a s_p}} = \frac{r_a + r_p}{2\sqrt{r_a r_p}}. \tag{15.32}$$

Легко видеть, что

$$\frac{s_a + s_p}{s_p - s_a} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \frac{s_p - s_a}{2} = \sqrt{s_a s_p}\sqrt{x^2 - 1}. \tag{15.33}$$

Таким образом, в выражении для коэффициента D_n из (15.31) имеем известное интегральное представление Лапласа для полиномов Лежандра

$$P_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(x + \cos\tau\sqrt{x^2 - 1}\right)^k d\tau. \tag{15.34}$$

Поэтому

$$D_n = 2\pi^2 C\alpha_n \left(r_a r_p\right)^{-\frac{n}{2}} P_{n-1}\left(\frac{r_a + r_p}{2\sqrt{r_a r_p}}\right). \qquad (15.35)$$

В частности, для $n = 0, 2, 4$ имеем

$$\begin{aligned} D_0 &= 2\pi^2 C = \frac{2M_{\text{кольца}}}{r_a + r_p}, \\ D_2 &= -\frac{\pi^2 C}{2}\frac{r_a + r_p}{\left(r_a r_p\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_{\text{кольца}}}{2\left(r_a r_p\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ D_4 &= \frac{3M_{\text{кольца}}}{64}\frac{5\left(r_a^2 + r_p^2\right) - 27 r_a r_p}{\left(r_a r_p\right)^{\frac{7}{2}}}, \end{aligned} \qquad (15.36)$$

где полная масса кольца $M_{\text{кольца}}$ дана в (3.70).

Искомое разложение внутреннего потенциала кольца имеет поэтому вид

$$\varphi(r,\theta) = GM_{\text{кольца}}\left\{\frac{2}{r_a + r_p} - \frac{r^2 P_2(\cos\theta)}{2\left(r_a r_p\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\left[5\left(r_a^2 + r_p^2\right) - 27 r_a r_p\right]}{64\left(r_a r_p\right)^{\frac{7}{2}}} r^4 P_4(\cos\theta) + \ldots\right\}. \qquad (15.37)$$

§ 15.4. Потенциал искривлённых дисков

Нередко спиральные галактики имеют искривлённые диски. Пространственный потенциал таких некомпланарных дисков вычислить, как правило, нелегко. Не вникая в геометрию дисков реальных галактик, рассмотрим здесь только два сравнительно простых варианта.

15.4.1. Потенциал тонкой галактики, искривлённой в виде части сферы

В одном из самых простых случаев некомпланарную галактику можно попытаться моделировать диском, искривлённым в виде части тонкой сферы с однородной поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$. Такая модель галактики будет представлять собой известную нам сферическую «чашу». Её потенциал на оси симметрии имеет следующий вид:

$$\phi(x_3) = 2\pi G\sigma R\frac{\sqrt{x_3^2 + R^2 - 2Rx_3\cos\theta_0} - R + x_3}{x_3} \qquad (15.38)$$

(начало отсчёта в центре образующей сферы). Замена $x_3 \to x_3 - R$ означает перенос начала отсчёта на «дно» чаши. Тогда для точек $x_3 > 0$ чаша обращена к ним выпуклостью, при $x_3 < 0$ — вогнутостью.

Кроме того, в рамках данной модели можно вычислять и пространственный потенциал. Его, как мы знаем, можно найти с помощью эквигравитирующего стержня (9.114).

Задача 15.2. *С помощью эквигравитирующего стержня* (9.114) *найти пространственный потенциал сферической чаши.*

15.4.2. Потенциал на оси симметрии Ox_3 вогнутого неоднородного диска

Пусть распределение поверхностной плотности имеет вид

$$\sigma(r) = \sigma_0\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} = \sigma_0\cos\theta. \tag{15.39}$$

Обозначим (см. рис. 133) $r = R\sin\theta$. Тогда $r_{\max} = R\sin\theta_0$ и

$$\sigma(\theta) = \sigma_0\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0}}. \tag{15.40}$$

Потенциал на оси симметрии даётся интегралом

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\sigma_0 R^2 \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\sin\theta\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0}}d\theta}{\sqrt{x_3^2+R^2+2Rx_3\cos\theta}}, \tag{15.41}$$

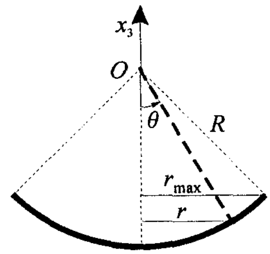


Рис. 133. К задаче об искривлённом диске

или, после замены $x = \cos\theta$,

$$\varphi(x_3) = 2\frac{\pi G\sigma_0 R^2}{\sin\theta_0\sqrt{2Rx_3}} \int\limits_{\cos\theta_0}^{1} \sqrt{\frac{(x-\cos\theta_0)(x+\cos\theta_0)}{x+\dfrac{R^2+x_3^2}{2Rx_3}}}\,dx. \tag{15.42}$$

Вводя обозначения

$$\nu = \arcsin\sqrt{\frac{1+b}{1-b}}, \quad k = \sqrt{\frac{c-b}{b+c}}; \tag{15.43}$$

$$a = \cos\theta_0, \quad b = -\cos\theta_0, \quad c = -\frac{R^2+x_3^2}{2Rx_3}, \tag{15.44}$$

имеем:

1) для $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi/2$

$$\varphi(x_3) = \frac{2\sqrt{2}\pi G\sigma_0 R^{3/2}}{3\sin\theta_0\sqrt{|x_3|}}\left\{(1+a+2c)\sqrt{\frac{(1-a)(1-c)}{1-b}} - \right. \\ \left. -2\sqrt{a-c}\,[a\mathrm{F}(\nu,k)+cE(\nu,k)]\right\}; \tag{15.45}$$

2) для $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ параметры a и b в (15.45) меняются местами.

Итак, потенциал на оси симметрии диска данного вида выражается через неполные эллиптические интегралы. Заметим, что в обоих рассмотренных случаях начало системы отсчёта находится в центре шара. Чтобы перенести начало оси x_3 на дно «чаши», в формулах надо сделать замену $x_3 \to x_3 + R$. Тогда, кстати, сменой знака у x_3 потенциал можно измерять уже по обе стороны «чаши».

З а д а ч а 15.3. *Выполнить численный анализ формулы* (15.45).

§ 15.5. Эллипсоид как динамическая модель

Знание потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида является важным как для теоретических исследований по математической физике, так и для приложений во многих областях механики и астрономии. Достаточно сказать, что многие фигуры равновесия: лабораторные сгустки плазмы, планеты, звёзды, шаровые скопления звёзд и эллиптические галактики, имеют внутреннее распределение вещества, которое с успехом можно моделировать слоисто-неоднородным эллипсоидом. Разработанный математический аппарат автор применил для исследования динамики эллиптических галактик (см., например, [21]). Не имея возможности подробно остановиться здесь на интересных вопросах динамики Е-галактик, мы ограничимся анализом только некоторых актуальных задач.

Пусть слоисто-неоднородный эллипсоид находится в стационарном состоянии и вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси Ox_3. Диагональные компоненты вириального уравнения 2-го порядка в системе отсчёта, связанной с осями эллипсоида, имеют вид [20]:

$$\begin{aligned}
&2T_{11} + W_{11} + \Pi_{11} + I_{11}\Omega^2 + 2\Omega \int\limits_V \rho\, u_2 x_1 dV = 0,\\
&2T_{22} + W_{22} + \Pi_{22} + I_{22}\Omega^2 - 2\Omega \int\limits_V \rho\, u_1 x_2 dV = 0,\\
&W_{33} + \Pi_{33} = 0,
\end{aligned} \tag{15.46}$$

где нам неизвестны лишь

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho\, u_i u_j dV \tag{15.47}$$

— тензор кинетической энергии упорядоченного движения вещества, учитывающий внутренние течения в эллипсоиде, и

$$\Pi_{ij} = \int\limits_V \rho\,(\dot{x}_i - u_i)\,(\dot{x}_j - u_j)\, dV \tag{15.48}$$

— тензор энергии хаотического движения; $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости упорядоченного, а $(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{u})$ — остаточного движений. В системе отсутствует меридиональная циркуляция и положено $T_{33} = 0$. Последний член в первых двух уравнениях (15.46) описывает действие силы Кориолиса, причём в случае прямых (относительно направления вращения конфигурации) токов вещества следует брать $u_1 < 0$ и $u_2 > 0$, а для противотоков: $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$. Уравнения (15.46) позволяют исследовать динамику конфигураций как с изотропным давлением $(\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{33})$, так и с анизотропным $(\Pi_{11} \neq \Pi_{22} \neq \Pi_{33})$. В качестве меры анизотропии возьмём отношение

$$k = \frac{\Pi_{11} + \Pi_{22}}{2\Pi_{33}}. \tag{15.49}$$

Для системы с изотропным давлением $k = 1$, но обратное не верно, так как при $k = 1$ возможно и $\Pi_{11} \neq \Pi_{22}$.

Складывая первые два уравнения в (15.46) и исключая с учётом третьего и выражения (15.49) для компонент Π_{ij}, получим формулу для энергии вращения конфигурации в инерциальной системе отсчёта

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\,(2kW_{33} - W_{11} - W_{22})\,. \tag{15.50}$$

Подчеркнём: *вид этой формулы не зависит от того, имеет конфигурация только твердотельное вращение или только внутренние вихревые течения, или то и другое одновременно.*

Из формулы (15.50) следует, что $T_{\text{вр}}$ несимметрична относительно компонент тензора гравитационной энергии. Вследствие этой несимметричности и характерного для эллипсоидальной конфигурации с $a_i > a_j$ неравенства $W_{ii} < W_{jj}$ возможны следующие комбинации:

а) вращение вокруг короткой оси:

$$a_3 < a_1 \neq a_2, \quad W_{33} > W_{11} \neq W_{22}; \tag{15.51}$$

б) вращение вокруг средней оси:

$$a_2 < a_3 < a_1, \quad W_{22} > W_{33} > W_{11}; \tag{15.52}$$

в) вращение вокруг длинной оси:

$$a_3 > a_1 \neq a_2, \quad W_{33} < W_{11} \neq W_{22}. \tag{15.53}$$

Далее, из первого и третьего уравнений (15.46) легко получить равенство

$$\Delta W \equiv W_{22} - W_{33} = \Pi_{33} - \Pi_{22} - 2T_{22} - I_{22}\Omega^2 + 2\Omega \int\limits_V \rho u_1 x_2 dV, \tag{15.54}$$

позволяющее проконтролировать, вокруг какой — короткой (при $\Delta W < 0$) или средней (при $\Delta W > 0$) — оси вращается конфигурация. Если в динамической модели величина внутренних течений задаётся некоторым параметром (как в жидких эллипсоидах Римана, см. гл. 8 в [21]), уравнение $\Delta W = 0$ определяет критическую конфигурацию $a_2 = a_3$ перехода от фигур с вращением вокруг малой оси к фигурам, вращающимся вокруг средних осей. При отсутствии такого параметра (в самосогласованных бесстолкновительных эллипсоидах, см. гл. 10 в [21]) уравнение (15.54) должно тождественно удовлетворяться.

Вращение вокруг средней оси, как следует из (15.54)*, возможно для фигур с изотропным давлением* (*к ним, строго говоря, относим только жидкие или газообразные*) *лишь при наличии сильных противотоков, а для бесстолкновительных фигур с анизотропным давлением — как при сильных противотоках центроидов, так и без них, при условии наличия требуемого соотношения между течениями и анизотропией дисперсии скоростей.*

Учитывая указанную выше возможность вращения моделей вокруг средней оси, нельзя забывать об изучении их устойчивости. Хорошо известно, что свободное вращение твёрдого эллипсоида вокруг средней оси неустойчиво. Совершенно иначе следует подходить к исследованию на устойчивость вращающихся жидких и бесстолкновительных эллипсоидов, имеющих внутренние усреднённые течения. Среди жидких эллипсоидов Римана существуют фигуры, вращающиеся вокруг средней оси и остающиеся устойчивыми в глобальном отношении [47]. Также устойчивы при вращении вокруг средней оси некоторые из бесстолкновительных эллипсоидов Фримана (см. гл. 10 и 11 в монографии [21]). С этой точки зрения следует серьёзно отнестись к гипотезе Кондратьева [28] о вращении некоторых из эллиптических галактик вокруг средней оси.

Вращение же вокруг длинной оси может осуществляться только в бесстолкновительных эллипсоидах[4]. Для этого должно выполняться:

$$k < k_{\text{кр}} \equiv \frac{W_{11} + W_{22}}{2W_{33}}.$$

Легко видеть, что $k_{\text{кр}} < 1$.

[4] Речь идёт, подчеркнём, только о гравитирующих фигурах. В присутствии же собственного магнитного поля даже конфигурации с изотропным давлением могут вращаться вокруг длинных осей.

З а д а ч а 15.4. *Показать, что для эллипсоида с подобными слоями $k_{\text{кр}}$ вообще не зависит от распределения плотности и равно*

$$k_{\text{кр}} = \frac{A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2}{2A_3 a_3^2}.$$

Решение.

Оно легко следует из выражения (8.89). ▼

Преобразуем формулу энергии вращения (15.50) конфигурации в случае изотропного давления $k = 1$. Подставляя туда компоненты тензора гравитационной энергии W_{ij} из (8.88), после многих преобразований получим

$$T_{\text{вр}} = T_1 - T_2 - T_3, \tag{15.55}$$

где

$$T_1 = \frac{\pi G}{2} \int_0^1 dm \rho(m) M(m) \frac{d}{dm} \left[m^2 \left(A_1(m) a_1^2 + A_2(m) a_2^2 \alpha_2^2(m) \right) - 2A_3(m) a_3^2 \alpha_3^2(m) \right],$$

$$T_2 = \frac{3\pi G}{2} \int_0^1 dm \rho(m) \left(N_{1;3}(m) \frac{d}{dm} B_{13}(m) + N_{2;3}(m) \frac{d}{dm} B_{23}(m) \right), \tag{15.56}$$

$$T_3 = \pi G \int_0^1 dm \rho(m) \left[N_{1;2}(m) \frac{dA_2}{dm} + \left(I_{11}(m) + 2I_{33}(m) \right) \frac{dA_3}{dm} \right].$$

Здесь $B_{ij}(m)$ получаются из (8.78) заменой a_i на $a_i(m)$.

Специальный анализ показал, что для широкого диапазона внутренних структур эллипсоида наибольший вклад в величину энергии вращения даёт член T_1; вклад членов T_2 и T_3 будет мал; в частности, член T_2 в силу очевидного

$$\frac{dB_{ij}}{dm} = \frac{\partial B_{ii}}{\partial e_{12}} \frac{de_{12}}{dm} + \frac{\partial B_{ii}}{\partial e_{13}} \frac{de_{13}}{dm} + \frac{\partial B_{ii}}{\partial e_{23}} \frac{de_{23}}{dm},$$

оказывается незначительным из-за малости входящих в него производных $\dfrac{\partial}{\partial e_{ij}} B_{kl}$.

Для конфигураций с подобными слоями $T_2 = T_3 = 0$; для них

$$T_{\text{вр}} = T_1 = \frac{\pi G}{2} \left(I - 3A_3 a_3^2 \right) \int_0^1 dm^2 \rho(m) M(m) \tag{15.57}$$

и, согласно (8.86), отношение

$$t = \frac{T_{\text{вр}}}{|W|} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3A_3 a_3^2}{I} \right) \tag{15.58}$$

вообще не зависит от распределения плотности вещества.

Этот факт замечателен: *отношение энергии вращения к гравитационной энергии у неоднородных эллипсоидов, состоящих из подобных слоёв, в точности совпадает с одноимённым отношением для классических однородных фигур равновесия (сфероиды Маклорена или эллипсоиды Якоби) и является функцией только эксцентриситетов слоя.*

Если же слои равной плотности не являются подобными друг другу, т.е. профиль сплюснутости слоёв отличается от линий $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, то все характеристики модели: масса, гравитационная энергия, энергия вращения и отношение t из (15.58) зависят от конкретных для данной модели профилей плотности и сжатия поверхностей равной плотности. Отметим следующее. Численные расчёты показали, что характеристики моделей тем сильнее зависят от профиля сплюснутости, чем больше в них концентрация вещества к центру. Влияние профиля сплюснутости на массу, гравитационную энергию и энергию вращения эффективнее в модели вытянутого сфероида, чем в модели сжатого; напротив, его влияние на $T_{\text{вр}}/|W|$ заметнее у последнего. При одинаковых профилях плотности и сплюснутости слоёв величина $T_{\text{вр}}/|W|$ у вытянутого сфероида всегда меньше, чем у сжатого. Однако это различие уменьшается с возрастанием концентрации вещества и отклонения профиля сплюснутости от линии $\varepsilon_{ij} = \text{const}$.

§ 15.6. Моделирование эллиптических галактик

Остановимся теперь на некоторых элементах динамики эллиптических галактик.

15.6.1. Интересная геометрическая задача

До 1975 года наблюдаемую сплюснутость эллиптических галактик пытались объяснить их вращением. Сказались традиционные представления о связи между сплюснутостью и вращением в жидких и газовых конфигурациях с изотропным давлением. Однако, как только удалось измерить вращение у некоторых Е-галактик (Bertola и Capaccioli [51]), был обнаружен удивительный факт — значение этого вращения в среднем составляло лишь $\frac{1}{3}$ предсказанного моделями[5]. Учитывая сглаженную форму нормальных Е-галактик, говорящую о стационарности в целом этих объектов, встаёт вопрос о природе той причины, которая *могла бы играть роль в формировании фигур эллиптических галактик.*

Чтобы моделировать, надо знать внутреннюю структуру эллиптических галактик. Прецизионными измерениями установлено, что у большинства Е-галактик изофоты являются правильными эллипсами (Carter [56]). Особенно уверенно можно говорить об эллипсоидальности наиболее ярких внутренних изофот. Это немаловажно, так как именно внутренняя плотная часть определяет динамические свойства всей галактики. Можно считать эллипсоидальными и слои равной плотности, поскольку в Е-галактиках отношение массы к светимости мало изменяется с расстоянием от центра (Strom K. H., Strom S. E. [70]).

Итак, в проекции на картинную плоскость наблюдатель видит галактику в форме эллипса. Какова же её пространственная форма (точнее, форма слоёв равной плотности)? Возможны варианты: сжатого сфероида, вытянутого сфероида и трёхосного эллипсоида. Были разработаны (Кондратьев и Озерной, [30]) наблюдательные тесты, позволяющие предсказать, какая именно форма у галактик предпочтительна.

Пусть наблюдатель связан с системой координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$, а произвольно ориентированный трёхосный эллипсоид (5.3) — с системой $Ox_1x_2x_3$. С помощью матрицы перехода от системы координат наблюдателя к системе эллипсоида (см. рис. 134)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{15.59}$$

запишем уравнение (5.3) в системе $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ и спроецируем видимую фигуру на плоскость $Ox_2^0x_3^0$, являющуюся картинной для наблюдателя. Уравнение проекции имеет вид

[5] Уточним сказанное. По современным сведениям [17], эллиптические галактики подразделяются на два класса в соответствии с их морфологией и кинематическими свойствами: на гигантские галактики и галактики средних и карликовых размеров. Гигантские Е-галактики действительно вращаются очень слабо; вероятно, это трёхосные конфигурации, вытянутая форма которых поддерживается, главным образом, за счёт анизотропии дисперсии скоростей. Но есть класс промежуточных галактик и галактик низкой светимости; их форма (возможно, осесимметричная) поддерживается быстрым вращением. Это так называемые ротаторы с почти изотропным давлением. Таким образом, выше мы говорим только о галактиках первого класса.

$$x_2^{0^2}\left(R_{12}^2 - R_1R_2\right) + 2x_2^0x_3^0\left(R_{12}R_{13} - R_1R_{23}\right) + x_3^{0^2}\left(R_{13}^2 - R_1R_3\right) + R_1 = 0, \qquad (15.60)$$

где введены обозначения

$$R_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_{ik}^2}{a_i^2}, \qquad R_{kl} = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_{ik}a_{il}}{a_i^2}, \qquad (15.61)$$

а a_{ij} — члены матрицы A. Угол между малой осью эллипса (15.60) и осью Ox_3^0 равен

$$\operatorname{tg}\, 2\varphi' = \frac{2\left(R_{12}R_{13} - R_1R_{23}\right)}{R_{13}^2 - R_1R_3 - R_{12}^2 + R_1R_2}. \qquad (15.62)$$

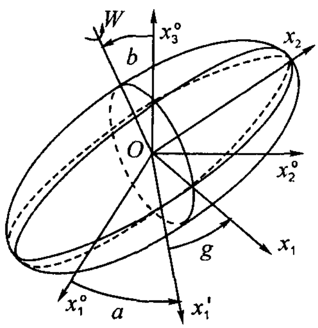


Рис. 134. Эллипсоид, связанный с системой координат $Ox_1x_2x_3$, которая произвольно ориентирована относительно системы координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$. Показаны меридиональные сечения эллипсоида и углы Эйлера α, β, γ

После преобразований этого выражения получим изящную формулу

$$\operatorname{tg}\, 2\varphi' = 2\frac{\dfrac{a_{32}a_{33}}{a_1^2a_2^2} + \dfrac{a_{22}a_{23}}{a_1^2a_3^2} + \dfrac{a_{12}a_{13}}{a_2^2a_3^2}}{\dfrac{a_{32}^2 - a_{33}^2}{a_1^2a_2^2} + \dfrac{a_{22}^2 - a_{23}^2}{a_1^2a_3^2} + \dfrac{a_{12}^2 - a_{13}^2}{a_2^2a_3^2}}. \qquad (15.63)$$

С другой стороны, уравнение проекции оси вращения Ox_3 на ту же плоскость $Ox_2^0x_3^0$ имеет вид $x_2^0 = -x_3^0\cos\alpha\,\operatorname{tg}\beta$. Обозначая через φ угол между этой проекцией и осью Ox_3^0, легко показать, что

$$\operatorname{tg}\, 2\varphi = -\frac{2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}. \qquad (15.64)$$

Рассмотрим частные случаи: а) $a_1 = a_2 > a_3$ (сжатый сфероид); в этом случае формула (15.63) даёт результат, тождественный формуле (15.64). Таким образом, если галактика имеет форму сжатого сфероида, проекция малой оси на картинную плоскость совпадает с направлением оси вращения при любой ориентации галактики относительно наблюдателя; б) $a_2 = a_3 < a_1$ (вытянутый сфероид). Из (15.63) легко видеть, что для этого случая, вообще говоря, нет совпадения оси вращения и видимой малой оси, т. е. $\varphi \neq \varphi'$; в) $a_1 > a_2 > a_3$ (трёхосный эллипсоид). Наблюдатель будет гораздо чаще видеть несовпадение означенных осей (для совпадения требуется равенство нулю углов α или β, что маловероятно).

Таким образом, тест, позволяющий судить об истинной форме эллиптической галактики, состоит в том, что в случае произвольно ориентированного *сжатого* сфероида ось вращения будет всегда видна совпадающей с видимой малой осью, а в случае *вытянутого* сфероида или *трёхосного* эллипсоида наиболее вероятно видеть эти оси несовпадающими. Последнее обстоятельство делает, кстати, несущественным для предлагаемого теста использованное выше предположение о совпадении оси вращения галактики с её истинной малой осью. Действительно, тест чисто геометрический, и вращение галактики в кинематическом отношении может происходить вокруг любой другой оси. В частности, и кинематически, и динамически возможно вращение эллиптической галактики с внутренними течениями вокруг средней оси симметрии (Кондратьев [28]) .

Отметим, что при несовпадении истинной малой оси галактики с её видимой малой осью (т. е. если галактика — не сжатый сфероид) наблюдатель зафиксирует движение вещества именно вдоль второй. В действительности же это — эффект проекции на неё вращения относительно первой оси.

Но из формулы (15.63) следует ещё один тест. Как известно, у Е-галактик сплюснутость изофот, как правило, меняется от центра к краю. Так вот: если бы эллиптическая галактика представляла собой сжатый сфероид, то наблюдатель не зафиксировал бы эффекта нарушения соосности изофот с расстоянием от центра (поскольку $\operatorname{tg} 2\varphi'$ не зависит от отношения осей); если же галактика — трёхосный эллипсоид, то эффект нарушения соосности изофот должен наблюдаться (из (15.63) следует, что для двух эллипсоидов разной геометрической формы углы φ' должны различаться).

15.6.2. Элементы моделирования

Имеющиеся к настоящему времени наблюдательные данные свидетельствуют, что наряду с формами сжатого сфероида, некоторые Е-галактики (в основном — массивные) с высокой вероятностью имеют трехосную форму[6]. Рассмотренный выше слоисто-неоднородный эллипсоид позволяет учитывать *реальную структуру галактик*[7], *что даёт возможность строить* индивидуальные модели последних с учётом наблюдаемых распределений поверхностной яркости и структуры изофот. Об этом мы можем сказать здесь лишь несколько слов.

Распределение поверхностной яркости I у Е-галактик удовлетворительно описывается законом, который открыл Хаббл [60]:

$$I = \frac{I_0}{1+\beta m^2}, \tag{15.65}$$

где $0 \leqslant m \leqslant 1$, β — параметр, который находится выравниванием данных фотометрии. Подставляя (15.65) в известное интегральное уравнение

$$\rho(m) = \frac{1}{\pi}\int\limits_m^1 \sqrt{r^2-m^2}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dI}{dr}\right)dr \tag{15.66}$$

и сохраняя после интегрирования только главный член, получим[8]

$$\rho(m) \approx \operatorname{arctg}\sqrt{\beta\frac{1-m^2}{1+\beta m^2}}\cdot\left(1+\beta m^2\right)^{-3/2}. \tag{15.67}$$

Зная для выбранной галактики $\rho(m)$ и $\varepsilon(m)$, находим

$$t_{\text{изотр}} = \frac{T_1 - T_2 - T_3}{|W|}. \tag{15.68}$$

Это отношение можно связать с наблюдаемыми у Е-галактик максимальной скоростью вращения $v_{\text{вр}}$ и дисперсией скоростей σ. Кривые вращения и профили дисперсии скоростей у этих объектов, как свидетельствуют наблюдения, почти плоские, и легко показать, что

$$\frac{v_{\text{вр}}}{\sigma} = \sqrt{\frac{t_{\text{изотр}}}{0{,}5 - t_{\text{изотр}}}}. \tag{15.69}$$

[6] Предположение о трёхосной форме Е-галактик высказывали ранее Контопулос (1956) и из динамических соображений К. Ф. Огородников (1958).

[7] Кроме, конечно, галактик с особенной морфологией (например, галактик с двойными ядрами).

[8] Гравитационная энергия эллипсоида с таким распределением плотности дана в (12.11).

Вычисленное по этой формуле $v_{\text{вр}}/\sigma$ следует сравнивать с наблюдаемым, что позволяет сделать некоторые выводы о динамическом состоянии данной галактики. Раньше казалось, что указанное выше расхождение теории и наблюдений можно было ликвидировать единственным способом — лишь допуская у галактик существование сильной анизотропии дисперсии скоростей (Binney [53], [54] Кондратьев [27]). Другими словами, подбором значения k в формуле (15.50) устранялось расхождение теории и наблюдений.

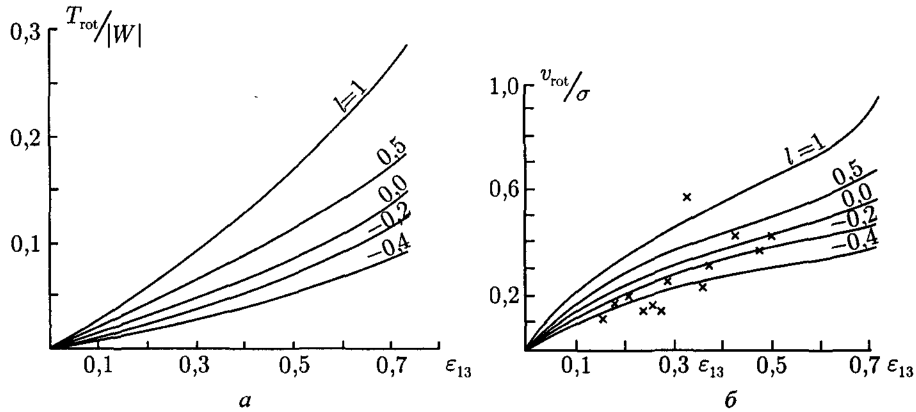


Рис. 135. К динамике эллипсоида с подобными слоями и изотропным давлением $k = 1$: *а* — зависимость $T_{\text{вр}}/|W|$ от сжатия эллипсоида ε_{13}, вращающегося вокруг короткой (при $0 \leqslant l \leqslant 1$) или средней (при $l < 0$) оси. Случаи $l = 1$ $(= 0)$ относятся к сжатому (вытянутому) сфероиду; *б* — зависимость $v_{\text{вр}}/\sigma$ от ε_{13}. Обозначения те же. Все $v_{\text{вр}}$ умножены на фактор проекции p: для сжатого сфероида $p = \pi/4$, а для трёхосного взято среднее значение $p \approx 0.85$. Крестики — данные наблюдений для 14 эллиптических галактик, взятые из статьи [61]

Но бесспорно ли то, что все эллиптические галактики вращаются вокруг наименьших своих осей?[9] Сейчас в этом нет уверенности, а значит, надо допускать и другие возможные варианты с ориентацией оси вращения у этих звёздных систем. Как мы уже знаем (см. § 15.5), для них динамика допускает вращение вокруг средних и даже длинных осей. Поэтому *отказ от гипотезы обязательности вращения эллиптических галактик вокруг малых осей может дать ещё один способ для устранения упомянутого расхождения* (Кондратьев [28]). Для иллюстрации этого эффекта проведём численные расчёты на простейшей модели с подобными слоями и при $k = 1$. Сжатия ортогональных сечений свяжем формулой

$$\varepsilon_{23} = l\varepsilon_{13}. \tag{15.70}$$

В интервале $0 \leqslant l \leqslant 1$ вращение (относительно оси Ox_3!) происходит вокруг короткой оси: при $l = 1$ $(= 0)$ имеем сжатый (вытянутый) сфероид, а при любом промежуточном l — трёхосный эллипсоид. В случае же $l < 0$ эллипсоид вращается вокруг средней из осей[10] (см. (15.52)). Результаты расчётов по формуле (15.58) приводятся на рис. 135, *а* (см. также рис. 135, *б*).

Важность выяснения ориентации Е-галактик относительно осей вращения связана не только с построением новых динамических моделей, но и с возможным выяснением происхождения и эволюции этих систем. Например, в известной схеме образования Е-галактик

[9] Здесь — отзвуки классических представлений: ведь вращение эллипсоидов Якоби происходит именно вокруг малой оси.

[10] Формула (15.70) имеет смысл и при изменении знака l, так как тогда и ε_{23} меняет свой знак.

в ходе бурной релаксации из сильно сплюснутых вначале систем следует считать $k > 1$, что делает невозможным вращение вокруг длинной оси. Следствием же другой гипотезы — образования эллиптических галактик в результате слияния двух звёздных систем — является любая теоретически возможная ориентация.

§ 15.7. Новая формула для угловой скорости фигур равновесия вращающейся гравитирующей жидкости

Для такой важной характеристики жидких фигур относительного равновесия, как угловая скорость вращения Ω, ранее было известно выражение только через геометрические параметры фигуры. В конкретном же виде Ω было известно только для последовательности сфероидов Маклорена

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left(3-2e^2\right)\arcsin e - \frac{3}{e^2}\left(1-e^2\right)\right] \tag{15.71}$$

и последовательности трёхосных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ эллипсоидов Якоби

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \tag{15.72}$$

(A_i — коэффициенты внутреннего потенциала из (6.14)), у которых угловая скорость выражается через e — эксцентриситет меридионального сечения фигуры.

Выражение совершенно другого типа, причём для любой, не обязательно эллипсоидальной, однородной фигуры относительного равновесия, мы сейчас получим с помощью введённых в § 8.8 понятий внешней $W_{\text{внешн}}$ и внутренней $W_{\text{внутр}}$ частей гравитационной энергии тела.

Рассмотрим однородную жидкую фигуру равновесия, вращающуюся с угловой скоростью Ω вокруг оси x_3. Уравнения гидродинамики принимают теперь вид

$$(\operatorname{grad}\varphi)^2 = \left(\operatorname{grad}\frac{p}{\rho}\right)^2 + \Omega^4 r^2 - 2\Omega^2 \boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{p}{\rho}. \tag{15.73}$$

Интегрируя равенство (15.73) по объёму фигуры, получаем

$$-8\pi G W_{\text{внутр}} = \int\limits_V \left(\operatorname{grad}\frac{p}{\rho}\right)^2 dV + \frac{\Omega^4}{\rho} I_3 - 2\Omega^2 \int \boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{p}{\rho}\,dV, \tag{15.74}$$

где величина внутренней гравитационной энергии тела (см. § 8.8) определена равенством (8.124), а I_3 представляет собой момент инерции фигуры относительно оси x_3 :

$$I_3 = \iint\limits_V \rho\cdot r^2 dV. \tag{15.75}$$

Применим к первому члену в правой части (15.74) теорему Грина. Тогда, в силу исчезновения давления на поверхности фигуры

$$p_s = 0, \tag{15.76}$$

получим

$$\int\limits_V \left(\operatorname{grad}\frac{p}{\rho}\right)^2 dV = -\int\limits_V \frac{p}{\rho}\cdot\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) dV = \frac{4\pi G\rho - 2\Omega^2}{\rho}\cdot\Pi, \tag{15.77}$$

где через П обозначен интеграл от давления

$$\Pi = \int\limits_V p\,dV \tag{15.78}$$

и лапласиан от нормированного давления равен[11]

$$\Delta\frac{p}{\rho} = -2\left(2\pi G\rho - \Omega^2\right). \tag{15.79}$$

Далее, третий член в правой части (15.74) с учётом определения П в (15.78) оказывается равным

$$2\Omega^2 \int\limits_V \boldsymbol{r}\,\mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho}dV = -\frac{4\Omega^2}{\rho}\cdot\Pi. \tag{15.80}$$

Таким образом, уравнение (15.74) приводится к виду

$$-8\pi G W_{\text{внутр}} = \left(\frac{2\Omega^2}{\rho} + 4\pi G\right)\Pi + \frac{\Omega^4 I_3}{\rho}. \tag{15.81}$$

С другой стороны, согласно теореме вириала

$$2\left(T_{\text{кин}} + T_{\text{тепл}}\right) + W = 0, \tag{15.82}$$

где $T_{\text{кин}}$ — кинетическая (механическая) энергия тела, а его тепловая энергия

$$T_{\text{тепл}} = \frac{3}{2}\int\limits_V p dV,$$

имеем

$$-3\Pi = 2T_{\text{вр}} + W_{\text{полн}} = \Omega^2 I_3 + W_{\text{полн}}, \tag{15.83}$$

где $W_{\text{полн}}$ есть полная гравитационная энергия тела. Исключая П из (15.81) с помощью (15.83), приходим к биквадратному уравнению для нормированной величины угловой скорости $\Omega = \Omega/\sqrt{\pi G\rho}$:

$$\Omega^4 - 4\Omega^2(1+\eta) + 4\frac{6W_{\text{внутр}} - W_{\text{полн}}}{\pi G\rho I_3} = 0, \tag{15.84}$$

где

$$\eta = \frac{W_{\text{полн}}}{2\pi G\rho I_3}. \tag{15.85}$$

Его корни

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\left\{1 + \eta \pm \sqrt{(1+\eta)^2 - \frac{6W_{\text{внутр}} - W_{\text{полн}}}{\pi G\rho I_3}}\right\} \tag{15.86}$$

[11] Кстати, именно при выполнении неравенства Пуанкаре $\Omega^2 \leqslant 2\pi G\rho$ лапласиан от давления отрицателен, что необходимо для реализации состояния равновесия фигуры.

и определяют *квадрат искомой угловой скорости однородной фигуры относительного равновесия через её внутреннюю и полную гравитационную энергию.*

Здесь

$$\eta \geqslant -1, \tag{15.87}$$

причём точное равенство имеет место только для шара.

Важно обратить внимание, что полученное выражение для угловой скорости содержит оба знака перед радикалом. Вопрос с выбором того или иного знака не является простым. Прежде всего, легко видеть, что формула (15.86) даёт для шара $\Omega = 0$ при обоих знаках перед радикалом.

Задача 15.5. *С помощью выражений* (8.137) *доказать последнее утверждение.*

Поэтому заранее нельзя отбрасывать тот или иной знак в полученных решениях (15.86). Необходимо, однако, заметить, что только при знаке «−» формула

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\left\{1+\eta-\sqrt{(1+\eta)^2-\frac{6W_{\text{внутр}}-W_{\text{полн}}}{\pi G\rho I_3}}\right\} \tag{15.88}$$

даёт известные классические выражения для квадрата угловой скорости сфероидов Маклорена (15.71) и эллипсоидов Якоби (15.72).

Задача 15.6. *Доказать, что для однородных сфероидов и эллипсоидов формула* (15.88) *действительно приводит к известным выражениям угловой скорости сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби.*

Решение. Для сфероидов Маклорена оно может быть получено после подстановки в (15.88) и последующих преобразований выражений $W_{\text{внутр}}$ из (8.135), $W_{\text{полн}}$ из (1.66) и очевидного $I_3 = 2/5Ma_1^2$. ▼

Формула для угловой скорости (15.88) может применяться при численных расчётах новых последовательностей неэллипсоидальных фигур равновесия, которые ответвляются от сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби. Кроме того она может быть полезной также при доказательстве существования верхнего предела для угловой скорости.

Задача 15.7. *Попробуйте ответить на вопрос: существует ли двумерный аналог формулы* (15.86)?

§ 15.8. Обобщённый фокалоид и фигуры относительного равновесия вращающейся гравитирующей жидкости

На поверхности фигуры равновесия вращающейся (не обязательно однородной) гравитирующей массы жидкости, как известно, полный потенциал (гравитационный плюс центробежный) должен быть постоянным:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \frac{\Omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{15.89}$$

Обозначим эту постоянную через Φ_0 и составим функцию $F(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi_0$.

Важно теперь заметить, что эта *функция $F(\boldsymbol{x})$ тесно связана с функцией $s(\boldsymbol{x})$*, введённой в § 5.13.2 в связи с рассмотрением обобщенного фокалоидного слоя. В самом деле, на границе фигуры имеет место равенство $F = 0$, а внутри эта функция удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = -4\pi G\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}), \tag{15.90}$$

где введена модифицированная плотность

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) - \frac{\Omega^2}{2\pi G}. \tag{15.91}$$

Следовательно, с учетом условий (5.129) имеем соотношение

$$s(\boldsymbol{x}) = \frac{F(\boldsymbol{x})}{G\tilde{\rho}}. \tag{15.92}$$

Саму функцию $F(\boldsymbol{x})$ можно тогда рассматривать как некий потенциал, равный сумме гравитационного потенциала тела заданной формы с внутренним распределением плотности $\tilde{\rho}$ и потенциала слоя обобщённого фокалоида с поверхностной плотностью

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho}{4\pi G\tilde{\rho}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}. \tag{15.93}$$

Таким образом, потенциал исходного тела оказывается равен

$$\varphi_{\text{тела}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\text{слоя}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\rho}{\tilde{\rho}}F(\boldsymbol{x}). \tag{15.94}$$

Формула (15.94) позволяет, в частности, дать наиболее простое доказательство известного в теории фигур относительного равновесия важного *неравенства Крудели*

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} \leqslant 1, \tag{15.95}$$

причём без принятого самим Крудели [45] ограничения на фигуру быть обязательно выпуклой.

§ 15.9. Неэллипсоидальные фигуры равновесия — двумерный случай

I. Проблема неэллипсоидальных фигур равновесия вращающейся гравитирующей жидкости актуальна в современной астрономии. Некоторую грушевидность имеют, например, Земля и даже фигуры некоторых галактик. Весьма важно включить в рассмотрение неэллипсоидальных фигур внутренние течения, так как наблюдения говорят о том, что планеты, звёзды и галактики имеют внутренние поля скоростей. Однако до сих пор ограниченные возможности математического аппарата не позволяли провести полный нелинейный анализ неэллипсоидальных фигур.

Два обстоятельства вызвали новую волну интереса к неэллипсоидальным фигурам. Это развитие современной астрономии и астрофизики, в частности, и применение мощных ЭВМ. Сейчас при объяснении наблюдаемых свойств у многих астрофизических объектов недостаточно знать лишь о теоретической возможности существования неэллипсоидальных фигур[12], а требуется умение в каждом конкретном случае рассчитывать форму фигуры, её угловую скорость, момент вращения и т. д. Фактически, на первом этапе надо уметь прослеживать ту или другую последовательность неэллипсоидальных фигур в целом и знать на ней финальные конфигурации. Появление ЭВМ даёт возможность ответить на некоторые из назревших вопросов.

Ввиду исключительной сложности задачи остановимся здесь на двумерных фигурах, последовательности которых берут начало от детально изученных нами (Кондратьев [21]) эллиптических цилиндров.

[12] Ранее Джинсу [64] для объяснения переменности блеска цефеид достаточно было просто упомянуть в качестве модели вращающуюся грушевидную фигуру, демонстрирующую наблюдателю то тупой, то острый конец!

II. Для поиска и изучения новых неэллиптических фигур равновесия нами были разработаны два базовых аналитико-численных метода. Характерным для них является применение методов теории функций комплексного переменного, включая теорию вычетов и конформные отображения одних геометрических областей на другие. Пригодность и целесообразность методов проверялись при расчётах на практике.

В основе методов лежит удобный для практической реализации критерий, для реализации которого *требуется знать гравитационный потенциал или комплексную напряжённость поля не внутри, а только на границе однородной искомой фигуры.*

Первый метод

Пусть Ox_1x_2 — плоскость, в которой расположена искомая фигура равновесия; в плоскости же $O\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$ расположен круг единичного радиуса и центр его в точке $\widetilde{z} = 0$. Внешняя область круга конформно отображается на внешнюю область истинной фигуры при помощи преобразования ($z = x_1 + ix_2$)

$$z = S\left(\widetilde{z}\right) = \mu\widetilde{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \widetilde{z}^{-m}, \tag{15.96}$$

где μ и β_m — коэффициенты, которые в данной задаче можно считать[13] действительными числами. Отображение (15.96) переводит бесконечные точки в бесконечные же и отображают границу круга в границу истинной фигуры. Тогда уравнение границы фигуры при $\widetilde{r} = 1$ будет

$$z = \mu e^{i\widetilde{\vartheta}} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{-im\widetilde{\vartheta}}. \tag{15.97}$$

Угол $\widetilde{\vartheta}$ играет роль параметра.

В частности, если все $\beta_i = 0$ и $\mu = R$, то (15.96) отображает окружность единичного радиуса в окружность с радиусом R.

При

$$\mu = \frac{a_1 + a_2}{2}; \quad \beta_1 = \frac{a_1 - a_2}{2}; \quad \beta_2 = \beta_3 = \ldots = 0 \tag{15.98}$$

формула (15.96) принимает вид[14]

$$z = \mu\widetilde{z} + \frac{\beta_1}{\widetilde{z}} \tag{15.99}$$

и преобразует эллипс на плоскости z

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \tag{15.100}$$

в окружность на плоскости $\widetilde{z}$.

Несколько более сложен случай

$$z = \mu\widetilde{z} + \frac{\beta_1}{\widetilde{z}} + \frac{\beta_2}{\widetilde{z}^2}. \tag{15.101}$$

[13] Это связано с предполагаемой здесь симметрией контура фигуры относительно оси Ox_1.

[14] Это — известная формула Н. Е. Жуковского.

Тогда, как можно показать,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\mu+\beta_1)\,\widetilde{x}_1 + \beta_2\left(\widetilde{x}_1^2 - \widetilde{x}_2^2\right), \\
x_1 &= (\mu-\beta_1)\,\widetilde{x}_2 - 2\beta_2\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2.
\end{aligned}
\tag{15.102}
$$

Это преобразование окружности в грушевидную фигуру (напоминающее рис. 138). Параметром её формы может служить коэффициент грушевидности β_2/μ.

Учёт дальнейших коэффициентов β_i позволяет получить конфигурации всё более сложной формы. При расчётах использовалось до десяти коэффициентов β_i. Слишком большое число коэффициентов β_i брать было уже не выгодно, так как приводило к потере точности.

Используя отображение (15.96), можно найти все геометрические характеристики конфигурации. Например:

площадь фигуры

$$
S = \pi\left\{\mu^2 - \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m^2\right\};
\tag{15.103}
$$

среднее значение абсциссы и ординаты

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1 = &-\frac{1}{3}\left[\mu\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\beta_m\beta_{m+1} + \mu\sum_{m=2}^{\infty}(2m-3)\beta_{m-1}\beta_m + \right. \\
&\left. + \sum_{m,k=1}^{\infty} k\beta_m\beta_k\left(\beta_{k-m}+\beta_{k+m}\right)\right] \Big/ \left(\mu^2 - \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m^2\right); \\
\overline{x}_2 = &\; 0,
\end{aligned}
\tag{15.104}
$$

представляющие координаты центра масс фигуры;

момент инерции однородной фигуры относительно начала координат

$$
\begin{aligned}
I = \frac{\pi\rho}{2}&\left\{\mu^4 - 2\mu^2\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)\,\beta_m^2 - \mu\sum_{n,k=1}^{\infty}(n+k)\,\beta_n\beta_k\beta_{n+k+1} - \right. \\
&\left. - \sum_{m,n,k=1}^{\infty}(m+n-k)\,\beta_m\beta_n\beta_k\beta_{m+n-k}\right\}, \quad m+n-k \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{15.105}
$$

Логарифмический потенциал цилиндрической фигуры в точке x_1, x_2 можно представить контурным интегралом

$$
\frac{\varphi(x_1,x_2)}{G\rho} = -\iint\limits_S \Big(\ln\left[x_1' - x_1 + i\,(x_2'-x_2)\right] + \ln\left[x_1' - x_1 - i\,(x_2'-x_2)\right]\Big)\, dx_1'\, dx_2'.
\tag{15.106}
$$

Воспользовавшись вспомогательным преобразованием[15]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1'}\left\{(x_1'-x_1)\ln\left[x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2'}\left\{(x_1'-x_1)\ln\left[x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)\right]\right\} = \\
&= 2\ln\left[x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)\right] + \frac{x_1'-x_1}{x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)} + \frac{i\,(x_2'-x_2)}{x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)} = \\
&= 2\ln\left[x_1'-x_1+i\,(x_2'-x_2)\right] + 1,
\end{aligned}
\tag{15.107}
$$

[15] Это равенство почти очевидно.

получим

$$\iint\limits_S \ln\left[x_1' - x_1 + i\,(x_2' - x_2)\right] dx_1'\, dx_2' =$$

$$= \frac{1}{2} \oint\limits_L \ln\left[x_1' - x_1 + i\,(x_2' - x_2)\right] \left\{(x_1' - x_1)\, dx_2' - (x_2' - x_2)\, dx_1'\right\} - \frac{1}{2} S;$$

следовательно, сопряженное выражение

$$\iint\limits_S \ln\left[x_1' - x_1 - i\,(x_2' - x_2)\right] dx_1'\, dx_2' =$$

$$= \frac{1}{2} \oint\limits_L \ln\left[x_1' - x_1 - i\,(x_2' - x_2)\right] \left\{(x_1' - x_1)\, dx_2' - (x_2' - x_2)\, dx_1'\right\} - \frac{1}{2} S.$$

Складывая последние два выражения, находим потенциал в виде

$$\varphi\,(x_1, x_2) = G\rho\,(S - I)\,, \tag{15.108}$$

где S — площадь сечения фигуры, а интеграл

$$I = \frac{1}{2} \oint \ln\left[(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2\right] \left\{(x_1' - x_1)\, dx_2' - (x_2' - x_2)\, dx_1'\right\} \tag{15.109}$$

вычисляется по контуру сечения фигуры.

Рассмотрим контурный интеграл I. Точка интегрирования x_1', x_2' находится на самом контуре фигуры. Следовательно, по формуле (15.97) значения сопряженных координат можно представить в виде

$$x_1' + i x_2' = \mu e^{i\theta'} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{-im\theta'}; \quad x_1' - i x_2' = \mu e^{-i\theta'} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{im\theta'}. \tag{15.110}$$

Если и испытуемая точка (x_1, x_2) также находится на контуре, то по аналогии можно записать

$$x_1 + i x_2 = \mu e^{i\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{-im\theta}; \quad x_1 - i x_2 = \mu e^{-i\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{im\theta}. \tag{15.111}$$

Разность первых компонент

$$x_1 - x_1' = \mu\,(\cos\theta - \cos\theta') + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\,(\cos m\theta - \cos m\theta'). \tag{15.112}$$

Далее, очевидно,

$$2 i x_2 = 2\mu i \sin\theta + 2i \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\theta, \text{ т. е. } x_2 = \mu \sin\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\theta, \tag{15.113}$$

поэтому разность вторых компонент оказывается равной

$$x_2 - x_2' = \mu\,(\sin\theta - \sin\theta') - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\,(\sin m\theta - \sin m\theta'). \qquad (15.114)$$

Подставляя эти формулы под знак контурного интеграла I, после преобразований приводим его к виду

$$I(\theta) = \int_0^{2\pi} N(\theta,\theta')\ln\left(BB^+\right)d\theta' + \int_0^{2\pi} N(\theta,\theta')\ln\left[4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right]d\theta'. \qquad (15.115)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} N(\theta,\theta') &= \mu^2\sin^2\frac{\vartheta'-\vartheta}{2} - \mu\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin\left[m\frac{\vartheta'-\vartheta}{2}\right]\sin\left[m\frac{\vartheta'+\vartheta}{2}+\vartheta'\right]+ \\ &+\mu\sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m\sin\left[\frac{\vartheta'-\vartheta}{2}\right]\sin\left[m\vartheta'+\frac{\vartheta'+\vartheta}{2}\right]+ \\ &+\sum_{m,k=1}^{\infty} k\beta_m\beta_k\sin\left[m\frac{\vartheta'-\vartheta}{2}\right]\sin\left[\frac{m}{2}(\vartheta'+\vartheta)-k\vartheta'\right], \end{aligned} \qquad (15.116)$$

и функция под знаком логарифма

$$B(\theta,\theta') = \mu - \beta_1 e^{-i(\vartheta'+\vartheta)} - \frac{1}{e^{i\vartheta}-e^{i\vartheta'}}\sum_{m=2}^{\infty}\beta_m\left(e^{-im\vartheta'} - e^{-im\vartheta}\right). \qquad (15.117)$$

Заметим: I из (15.115) представлен суммой двух членов с тем, чтобы выделить в подынтегральной функции сингулярную часть. В первом интеграле в правой части (15.115) подынтегральная функция особенностей не имеет. Но во втором интеграле

$$\int_0^{2\pi} N(\theta,\theta')\ln\left[4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right]d\theta'$$

аргумент логарифма при $\theta \to \theta'$ обращается в нуль и появляется расходимость. Правда, расходимость эта устранимая — в силу известного замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\,(x\cdot\ln x) = 0.$$

Действительно, все члены функции $N(\theta,\theta')$ содержат $\frac{\theta-\theta'}{2}$, что и обеспечивает выполнение этого предела.

Таким образом, логарифмичесий потенциал в точке на границе сечения однородной фигуры даётся выражением (15.108), причём площадь S дана в (15.103), а интеграл I определен в (15.115). Имея всё это в виду, а также существование интересного равенства (докажите его!)

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\ln\left[4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right]d\theta' = \pi, \qquad (15.118)$$

логарифмичесий потенциал в точке на границе сечения однородной фигуры запишем так:

$$\frac{\varphi(\theta)}{G\rho} = -\pi \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m^2 - \int_0^{2\pi} N(\theta,\theta') \ln\left(BB^+\right) d\theta' - \int_0^{2\pi} \tilde{N}(\theta,\theta') \ln\left[4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right] d\theta', \tag{15.119}$$

где $N(\theta,\theta')$ дано в (15.116), а

$$\tilde{N}(\theta,\theta') = \frac{\mu}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m \left[\cos\left(\theta + m\theta'\right) - \cos\left(m\theta + \theta'\right)\right] - \\ - \sum_{m,k=1}^{\infty} k\beta_m\beta_k \sin\left[m\frac{\vartheta'-\vartheta}{2}\right]\sin\left[\frac{m}{2}\left(\vartheta'+\vartheta\right) - k\vartheta'\right]. \tag{15.120}$$

Все найденные величины (характеристики фигуры равновесия) рассматривались затем как функции коэффициентов μ и β_m $(m = 1, 2, \ldots, N)$, определяющих одновременно и само конформное отображение. Точность приближения к истинной фигуре равновесия зависит от числа N членов в выражении (15.96).

Используя уравнение уровенной поверхности (интеграл исходных уравнений гидродинамики) в виде

$$\varphi + \frac{\Omega^2}{2}\left[\left(x_1 - \overline{x}_1\right)^2 + x_2^2\right] + C = 0, \tag{15.121}$$

записываем это условие относительного равновесия в достаточном для дальнейшего анализа числе точек круга. Так создаётся система алгебраических уравнений для неизвестных μ, β_m и C

$$F_k\left(\mu, \beta_m, \Omega, C\right) = 0. \tag{15.122}$$

Данная система алгебраических уравнений после регуляризации решалась на компьютере (причём, устойчивость расчётов повышается, если число уравнений k заметно превышает число неизвестных), и находились значения μ и β_m. С этими параметрами конформного отображения, в итоге находилась форма и все другие характеристики искомой фигуры равновесия. По результатам расчётов мы прослеживали всю последовательность: от точки бифуркации до конечной конфигурации.

Второй метод

Делается, как и ранее, конформное отображение внешней области неэллиптической фигуры равновесия на внешнюю область круга единичного радиуса, *включая его границу. При этом* все ранее найденные выражения геометрических характеристик фигуры через коэффициенты μ, β_m и здесь остаются в силе. Особенность же второго метода в том, что в точках на контуре истинной фигуры вычисляется не потенциал φ, а комплексная напряжённость

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}. \tag{15.123}$$

С точностью до несущественной постоянной, потенциал однородной двумерной фигуры равен

$$\varphi(x) = -2G\rho \iint \ln r\, dx_1' dx_2'. \tag{15.124}$$

Компоненты вектора комплексной напряжённости равны

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'} = 2G\rho\oint \ln r\,dx_2', \\
F_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2'} = 2G\rho\oint \ln r\,dx_1'.
\end{aligned} \tag{15.125}
$$

Знаки у интегралов (15.125) выбраны так, чтобы обход контура истинной фигуры в плоскости Ox_1x_2 проходил против часовой стрелки.

Комплексная напряжённость Φ есть аналитическая функция: её реальная и мнимая части должны удовлетворять условиям Коши — Римана. Взяв

$$
\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = F_1 - iF_2, \tag{15.126}
$$

легко удовлетворим этим условиям

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}(-F_2) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0, \\
\frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(-F_2) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 x_2}.
\end{aligned} \tag{15.127}
$$

Величина Φ будет представлена интегралом

$$
\Phi = 2G\rho\oint \ln r\,(dx_2' + i dx_1') = 2iG\rho\oint \ln r dz'^{+}. \tag{15.128}
$$

Очевидно,

$$
r^2 = |z - z'|^2 = (z - z')\left(z^{+} - z'^{+}\right). \tag{15.129}
$$

Поэтому

$$
\Phi = iG\rho\oint \ln (z - z')\left(z^{+} - z'^{+}\right) dz'^{+}. \tag{15.130}
$$

Интегрирование в (15.130) проводится по контуру истинной фигуры. Если при интеграции по dz' обход контура делается в положительном направлении, то в интеграле (15.130) обход при интеграции по dz'^{+} совершается в отрицательном направлении. Пробная точка z лежит бесконечно близко к контуру фигуры, причём с *внешней* его стороны.

Разобьём теперь интеграл (15.130) на два:

$$
I_1 = \oint \ln\left(z^{+} - z'^{+}\right) dz'^{+}, \tag{15.131}
$$

$$
I_2 = \oint \ln\left(z - z^{+}\right) dz'^{+}. \tag{15.132}
$$

Так как внутри контура особых точек нет, интеграл

$$
I_1 = 0. \tag{15.133}
$$

Комплексная напряжённость будет поэтому равна

$$
\Phi = iG\rho\oint \ln\left(z - z^{+}\right) dz'^{+}. \tag{15.134}
$$

Выполним теперь конформное отображение внешней области круга единичного радиуса, расположенного в плоскости $\zeta = \widetilde{x}_1 + i\widetilde{x}_2$, на внешнюю область искомой фигуры в плоскости z

$$z = S(\zeta) = \mu\zeta + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \zeta^{-m}. \tag{15.135}$$

Коэффициенты μ и β_m вновь считаем вещественными. Тогда

$$I_2 = -\oint [\ln(\zeta - \zeta') + \ln B] \cdot \left(\frac{\mu}{\zeta'^2} - \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m \zeta'^{(m-1)}\right) d\zeta', \tag{15.136}$$

где B может быть записана в виде

$$B = \mu - \frac{\beta_1}{\zeta\zeta'} - \frac{1}{\zeta}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{\zeta'^m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^k. \tag{15.137}$$

В (15.136) возможны некоторые упрощения. Прежде всего,

$$I_2' = -\mu \oint \frac{\ln(\zeta - \zeta')}{\zeta'^2} d\zeta' = \frac{\mu}{\zeta} \oint \left(\frac{1}{\zeta'} - \frac{1}{\zeta' - \zeta}\right) d\zeta' = 2\pi i \frac{\mu}{\zeta}. \tag{15.138}$$

Далее, поскольку внутри контура особых точек нет, очевидно, что

$$I_2'' = \oint \ln(\zeta - \zeta')\, \zeta'^{(m-1)} d\zeta' = 0 \quad (m \geqslant 1). \tag{15.139}$$

В итоге, искомая комплексная напряжённость на контуре фигуры будет равна

$$\Phi = -2\pi G\rho \left\{\frac{\mu}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\mu}{\zeta'^2} - \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m \zeta'^{(m-1)}\right) \ln B\, d\zeta'\right\}. \tag{15.140}$$

Для практических вычислений интеграл по замкнутому контуру (15.140) может быть взят по частям[16]. Делая это и учитывая, что проинтегрированный член обращается в нуль, получим

$$\Phi = -2\pi G\rho \left\{\frac{\mu}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\frac{\mu}{\zeta'} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \beta_m \zeta'^m}{B} \frac{dB}{d\zeta'} d\zeta'\right\}. \tag{15.141}$$

Здесь

$$\frac{dB}{d\zeta'} = \frac{i}{\zeta\zeta'}\left[\frac{\beta_1}{\zeta'} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{\zeta'^m} \sum_{k=0}^{m-1} (k - m) \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^k\right]. \tag{15.142}$$

Условие относительного равновесия в точках на границе фигуры даётся, как можно показать, уравнениями

$$\mathrm{Re}\left[\left(\Phi + \Omega^2 z^+\right) dz\right] = 0, \quad \mathrm{Im}\left[\left(\Phi + \Omega^2 z^+\right) dz\right] = 0, \tag{15.143}$$

[16] Вычисление $\ln B$ даже на ЭВМ требует много времени.

где

$$dz = \left(\mu - \sum_{m=1}^{N} m\beta_m \zeta^{-m-1}\right) d\zeta. \tag{15.144}$$

Далее, на базе уравнений (15.143) создавалась система алгебраических уравнений для неизвестных μ и β_m, которая решалась на компьютере.

Все найденные выше выражения легко могут быть проверены на известных случаях цилиндров с круговым и эллиптическим сечением.

Важно подчеркнуть, что результаты, полученные одним методом, контролировались с помощью другого. Угловая скорость Ω служила в качестве пробного параметра в схеме расчётов.

Результаты расчётов

Приведём некоторые результаты расчётов по указанным методам для фигур новых последовательностей, ответвляющихся от кругового цилиндра. Прежде всего, точки бифуркации рассчитывались по формуле (N — номер возмущающей гармоники)

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right), \quad N = 2, 3, 4, \ldots . \tag{15.145}$$

а) Последовательность «грушевидных», а точнее, треугольных фигур ($N = 3$). Ответвление при $\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = \frac{4}{3}$. Выяснилось, что вдоль неё[17]:

— угловая скорость монотонно убывает; — момент инерции I возрастает;

— момент вращения L сначала возрастает, достигает max при $\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} \simeq 1.23288$, а затем убывает вплоть до конца последовательности.

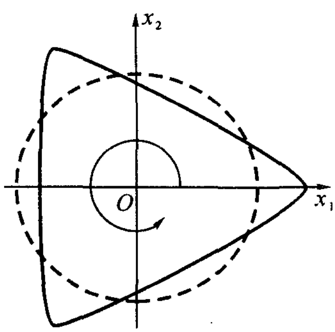


Рис. 136. Близкая к предельной конфигурация на последовательности жидких цилиндров, ответвляющихся от круглого при возмущении гармоникой $N = 3$. В точках заострения отношение центробежной силы к гравитационной на границе $\frac{F_{цб}}{F_{гр}} = 0.988$. Результаты численных расчётов по разработанной автором методике

Последовательность заканчивается не делением фигуры, а появлением трёх (по числу $N = 3$) особых точек на контуре фигуры, в которых центробежная сила уравновешена силой гравитации и $\operatorname{grad} p = 0$. Далее, за предельной конфигурацией (рис. 136) происходило бы истечение вещества из фигуры.

б) На рис. 137 показана предельная конфигурация на той последовательности цилиндрических фигур, которая ответвляется от кругового цилиндра при возмущении его гармоникой $N = 5$. Цилиндр в точке неустойчивости имеет следующие характеристики: $\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = \frac{8}{5}$, отношение центробежной силы к гравитационной на границе $\frac{F_{цб}}{F_{гр}} = \frac{4}{5}$. Для предельной же фигуры $\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 1.488$, а в точках заострения $\frac{F_{цб}}{F_{гр}} = 0.9980$. Близость последнего отношения к 1 как раз и указывает на появление пяти особых точек. Интересно отметить, что у этой предельной фигуры дуги сечения между особыми точками оказываются, в отличие от треугольного случая, вогнутыми к центру.

[17] Графики мы не имеем возможности здесь приводить.

в) Рис. 138. Фигура, близкая к финальной на последовательности «грушевидных» фигур, ответвляется от цилиндра, не имеющего внутренних течений, с отношением полуосей $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ и угловой скоростью $\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{3}{4}$. *Расчёты показали, что эта последовательность грушевидных фигур относительного равновесия заканчивается отнюдь не делением (как считал ранее Джинс), а фигурой, напоминающей собой вытянутый треугольник с двумя сглаженными и одним острым углом, в вершине которого находится особая точка (носик).*

В этой особой точке центробежная сила уравновешивается силой гравитационной; существование такой особой точки предполагает истечение через неё жидкости из фигуры.

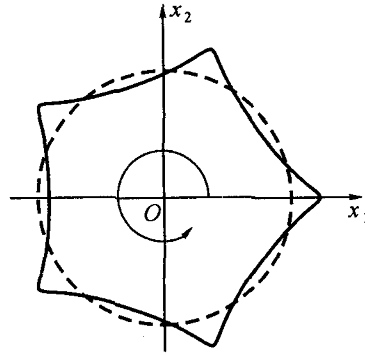


Рис. 137. То же самое, что на рис. 136, но для $N = 5$

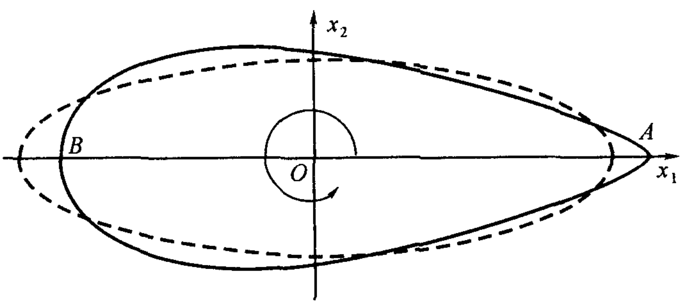


Рис. 138. Близкая к предельной конфигурация на последовательности жидких цилиндров, ответвляющихся от эллиптического цилиндра без внутренних течений с отношением полуосей $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ и угловой скоростью $\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{3}{4}$ при его возмущении гармоникой $N = 3$. В правой вершине намечается «носик». Результаты численных расчётов по разработанной автором методике

Таким образом, установлено, что вопреки Джинсу, независимо от того, устойчива вековым образом последовательность двумерных груш, или неустойчива (см. ниже!), никакого деления жидкой массы вдоль неё квазистатически не происходит. Выясняется также, что вдоль данной серии фигур все основные характеристики ведут себя немонотонным образом:

— угловая скорость вначале убывает, достигает некоторого min, затем немного растёт;

— момент инерции I возрастает, имеет max и затем убывает;

— момент вращения L сначала возрастает, достигает max при некотором β_2, а затем убывает до конца последовательности.

Последнее весьма любопытно и показательно, так как *возрастание углового момента всегда свидетельствует о вековой устойчивости фигур равновесия: в данном примере устойчивыми, по крайней мере на первом участке серии, оказываются двумерные «груши».* Между прочим, трёхмерные «груши», как впервые установил ещё А. М. Ляпунов, с самого начала последовательности являются неустойчивыми вековым образом[18].

г) На рис. 139 показана одна из фигур равновесия с внутренними течениями, последовательность которых ответвляется от эллиптического цилиндра с внутренним полем скоростей при возмущении гармоникой $N = 3$. И здесь появляется «носик».

[18] Вопрос о вековой устойчивости двумерной «груши» долгое время также оставался спорным. Видный специалист по этим вопросам астрофизик Джинс колебался: в мемуаре [62] от 1902 года он считал эти фигуры устойчивыми в вековом отношении, но затем, в 1916 году [63], изменил своё мнение по этому вопросу на прямо противоположное.

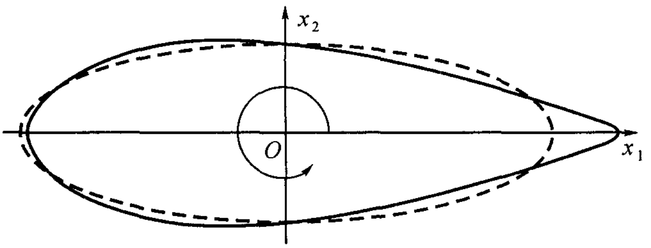


Рис. 139. Близкая к финальной фигура равновесия с общим вращением и внутренним полем скоростей. Имеет «носик». Эта последовательность ответвляется при возмущении гармоникой $N = 3$ эллиптического цилиндра с такими характеристиками: $\frac{a_2}{a_1} = 0.3$, течения сопутствующие ($f = \frac{\zeta}{\Omega} = 0.9115$), $\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = 0.668$ и $\frac{\zeta}{\sqrt{\pi G \rho}} = 0.745$

д) Нами также установлено, что некоторые серии неэллиптических фигур равновесия всё же заканчиваются делением жидкой массы. Такова, например, серия фигур, бифуркирующих от эллипса при $N = 4$ и имеющих «гантелеобразную» форму[19].

Напомним, что внутри эллиптических цилиндров, начальных для всех новых серий фигур, циркулирует линейное по координатам поле скоростей с однородной завихрённостью. И весьма важно, что для всех двумерных фигур, бифуркирующих от таких цилиндров, выполняется одно общее свойство:

— *хотя внутри неэллиптических фигур циркулирует уже нелинейное по координатам поле скоростей жидкости, завихрённость в них всё же остаётся одинаковой в каждой точке, т. е. однородной.*

Это уникальное свойство только двумерных фигур! Гидродинамика объёмных неэллипсоидальных фигур гораздо сложнее!

§ 15.10. Сводка формул для дисков и эквигравитирующих им тел

1. *Круглое тонкое кольцо*

Пространственный потенциал

$$\varphi_{\text{кольца}}(r, x_3) = \frac{4G\mu_0 R}{\sqrt{(R+r)^2 + x_3^2}} \mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + x_3^2}}\right); \tag{15.146}$$

эквигравитирующий стержень

$$\mu(\zeta) = -\frac{2iR\mu_0}{\sqrt{R^2+\zeta^2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{15.147}$$

2. *Однородный круглый диск*

Потенциал на оси симметрии

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = 2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2 + x_3^2} - |x_3|\right); \tag{15.148}$$

внутренний потенциал

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma R \mathrm{E}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (r \leqslant R); \tag{15.149}$$

[19] Отметим геометрическое сходство с сечениями объёмных неэллипсоидальных фигур равновесия.

внешний (в главной плоскости)

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 4G\sigma r\left\{\mathrm{E}\left(\frac{R}{r}\right) - \left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{K}\left(\frac{R}{r}\right)\right\}, \quad \frac{r}{R} \geqslant 1; \tag{15.150}$$

потенциал в любой точке главной плоскости

$$\varphi_{\text{диска}}(r) = 2\,G\sigma\frac{R-r}{R+r}\left\{(R+r)\,\mathrm{K}(k) + \frac{R-r}{1-k^2}\mathrm{E}(k)\right\}, k = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}; \tag{15.151}$$

пространственный потенциал в произвольной точке (см. формулу (9.56));
радиальная компонента силы в точках главной плоскости диска

$$\frac{F_r}{4G\sigma} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}(k)-\mathrm{K}(k)}{k},\ k = \frac{r}{R} \leqslant 1, \\ \mathrm{E}(k)-\mathrm{K}(k),\ k = \frac{R}{r} \leqslant 1. \end{array}\right\}; \tag{15.152}$$

эквигравитирующий стержень

$$\mu(\zeta) = -2i\sigma\sqrt{R^2+\zeta^2}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R; \tag{15.153}$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный сфероид из гомотетических слоёв

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-m^2}},\ m^2 = \frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}; \tag{15.154}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R^3. \tag{15.155}$$

3. *Неоднородные круглые диски*

3а). Плотность и масса диска

$$\sigma(r) = \sigma_0\left(1-\frac{r}{R}\right);\ M = \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2; \tag{15.156}$$

потенциал на оси симметрии

$$\varphi_{\text{диска}}(x_3) = \pi G\sigma_0\left\{\sqrt{R^2+x_3^2} - 2\,|x_3| + \frac{x_3^2}{R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2+x_3^2}}{|x_3|}\right\}; \tag{15.157}$$

эквигравитирующий стержень

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0\left(\sqrt{R^2+\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{2R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2+\zeta^2}}{R-\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right),\ -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R; \tag{15.158}$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный сфероид из гомотетических слоёв

$$\rho(m) = \frac{3M}{\pi^2 a_1^2 a_3}\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}; \tag{15.159}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{10}\pi k\frac{M^2G}{R},\ k = \frac{17-6G_{\text{K}}}{\pi^2} = 1.165620;\ R^2 = a_1^2 - a_3^2. \tag{15.160}$$

3b). Плотность диска

$$\sigma(r) = \frac{3M}{2\pi(a_1^2-a_3^2)}\sqrt{1-\frac{r^2}{a_1^2-a_3^2}}; \tag{15.161}$$

эквигравитирующий стержень

$$\mu(\zeta) = \frac{3M}{4i\sqrt{a_1^2-a_3^2}}\left(1+\frac{\zeta^2}{a_1^2-a_3^2}\right), \quad -\sqrt{a_1^2-a_3^2} \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant \sqrt{a_1^2-a_3^2}; \tag{15.162}$$

имеет эквигравитирующий сфероид — однородный с границей

$$\frac{r^2}{a_1^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2} = 1; \tag{15.163}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{10}\frac{\pi M^2 G}{\sqrt{a_1^2-a_3^2}}. \tag{15.164}$$

3c). Плотность диска

$$\sigma(r) = \sigma_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^n, \quad n \text{ – любое вещественное число; } M = \frac{\pi\sigma_0 R^2}{n+1}; \tag{15.165}$$

эквигравитирующий стержень

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0 R\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(1+\frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}; \tag{15.166}$$

в частном случае, при $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$\mu(\zeta) = -i\sigma_0 R\frac{n!\,2^{n+1}}{(2n+1)!!}\left(1+\frac{\zeta^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad -R \leqslant \frac{\zeta}{i} \leqslant R. \tag{15.167}$$

3d). Диск с гауссовским распределением плотности

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(-a\frac{r^2}{R^2}\right); \tag{15.168}$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный сфероид из гомотетических слоёв с законом плотности

$$\rho\left(m^2\right) = \frac{e^2\sigma_0}{\pi a_3}\left[\frac{\exp\left(-a\right)}{\sqrt{1-m^2}} + \sqrt{\pi a}\exp\left(-am^2\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{a\left(1-m^2\right)}\right)\right]; \tag{15.169}$$

гравитационная энергия такого диска

$$W_{\text{диска}} = -\gamma\frac{M^2G}{R},\ \left(\gamma = \gamma\left(a\right)\ \text{дано в таблице 2 § 14.11}\right). \tag{15.170}$$

3е). Мнимый круглый диск

$$\sigma\left(r\right) = -\frac{3M}{2\pi\left(a_3^2-a_1^2\right)}\sqrt{1+\frac{r^2}{a_3^2-a_1^2}},\quad 0 \leqslant \frac{r}{i} \leqslant \sqrt{a_3^2-a_1^2}; \tag{15.171}$$

эквигравитирующий стержень (вещественный)

$$\mu\left(\zeta\right) = \frac{3M}{4R}\left(1-\frac{\zeta^2}{R^2}\right),\ -R \leqslant \zeta \leqslant R; \tag{15.172}$$

имеет эквигравитирующий вытянутый однородный сфероид

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1;\ a_3 \geqslant a_1. \tag{15.173}$$

4. *Однородный эллиптический диск*

Граница

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1; \tag{15.174}$$

потенциал во внешней компланарной точке (обозначения в § 2.9)

$$\varphi_{\text{диска}}\left(x_1,x_2\right) = \frac{8G\sigma\sqrt{N}\cos^2\alpha}{1+\gamma\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)}\frac{a_1^2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\left\{-\mathrm{K}\left(k\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{C_2+m_1}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_1},k\right] - \frac{C_2+m_2}{m_1-m_2}\Pi\left[\frac{a^2}{a^2-m_2},k\right]\right\}; \tag{15.175}$$

потенциал на границе

$$\varphi_{\text{диска}}\left(x_1,x_2\right) = \frac{4G\sigma a_2}{e}\left\{\cos\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{ea_1\cos\alpha}{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha+a_1^2\sin^2\alpha}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\alpha}{2}\ln\frac{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha+a_1^2\sin^2\alpha}-ea_1\sin\alpha}{\sqrt{a_2^2\cos^2\alpha+a_1^2\sin^2\alpha}+ea_1\sin\alpha}\right\};\ e = \sqrt{1-\frac{a_2^2}{a_1^2}}; \tag{15.176}$$

потенциал на осях симметрии и в центре диска см. в § 2.9.4;

потенциал в произвольной внутренней точке (обозначения в § 2.9.5)

$$\varphi_{\text{диска}}(x_1, x_2) = 2G\sigma a_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}\,(I_1 + 2\,\mathrm{Re}\, I_2)\,; \tag{15.177}$$

пространственный (внешний и внутренний) потенциал в пробной точке (x_1, x_2, x_3) (обозначения в § 10.10, а полуоси диска R_1 и R_2 даны в (10.121).

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x}) = \frac{4G\sigma R_1 R_2}{\sqrt{\lambda - \nu}} \left\{ \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} - \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} - \frac{x_3^2}{\nu}\right) \mathrm{K}(k) + \right. \\ + \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} \Pi\left[-\frac{R_1^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k\right] + \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} \Pi\left[-\frac{R_2^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k\right] + \\ \left. + \frac{x_3^2}{\nu} \Pi\left[-\frac{\nu}{\lambda - \nu}, k\right] \right\},\end{gathered} \tag{15.178}$$

где модуль эллиптических интегралов

$$k = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\lambda - \nu}} \leqslant 1; \tag{15.179}$$

диск имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид из гомотетических слоёв с полуосями $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ и плотностью

$$\rho(m) = \frac{R_1 R_2}{\pi a_1 a_2 a_3} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - m^2}};\ m^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}; \tag{15.180}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3\pi^2} \frac{M^2 G}{R_1} \mathrm{K}(e)\,,\ e = \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}}. \tag{15.181}$$

5. *Неоднородный эллиптический диск*

5a). Плотность диска

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{3M}{2\pi R_1 R_2} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}}, \tag{15.182}$$

полуоси диска связаны с полуосями соответствующего эквигравитирующего эллипсоида равенствами (10.121);

имеет эквигравитирующий однородный эллипсоид $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ и массой M;

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{5} \frac{M^2 G}{R_1} \mathrm{K}(e)\,,\ e = \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}}. \tag{15.183}$$

5b). Плотность диска

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right), \tag{15.184}$$

здесь $R_1 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$, $R_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}$;
пространственный потенциал (обозначения в § 10.11)

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{диска}}(\boldsymbol{x}) = \frac{4}{3} G\sigma_0 R_1 R_2 \left\{I_0 - 2\left(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2\right) + \right. \\ \left. + I_{11} x_1^4 + I_{22} x_2^4 + I_{33} x_3^4 + 2\left(I_{12} x_1^2 x_2^2 + I_{13} x_1^2 x_3^2 + I_{23} x_2^2 x_3^2\right)\right\}.\end{gathered} \tag{15.185}$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид из гомотетических слоёв

$$\rho(m) = \frac{2R_1 R_2}{\pi a_1 a_2 a_3} \sigma_0 \sqrt{1 - m^2}; \tag{15.186}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = -\frac{2^{11}}{315\pi^2} \frac{M^2 G}{R_1} \mathrm{K}(e). \tag{15.187}$$

5c). Общий случай: плотность диска

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2}\right)^n, \ (n \geqslant 1); \tag{15.188}$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид из гомотетических слоёв

$$\rho(m) = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{\pi} a_1 a_2 a_3} \sigma_0 \left(1 - m^2\right)^{n - \frac{1}{2}} \frac{n \cdot \Gamma(n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}; \tag{15.189}$$

гравитационная энергия

$$W_{\text{диска}} = \frac{32}{\pi(2n+1)(2n+3)} \frac{\Gamma^2(n+2)}{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)} \cdot {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, 2, -n + \frac{1}{2}; \frac{5}{2}, n + \frac{5}{2}; 1\right). \tag{15.190}$$

В приводимой далее сводке формул для некоторых сферических тел (табл. 3) использованы следующие обозначения:

$$a = \sqrt{1 + \frac{R^2}{r_c^2}}, \quad b = \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}, \quad c = 1 + \frac{x^2}{r_c^2};$$

закон $\rho(r) \sim r^{-5/2}$ характерен равенством вириала и гравитационной энергии для сферической подсистемы при произвольном r;

распределение плотности $\rho(r) = \frac{\rho_0}{b^5}$ хорошо описывает многие астрофизические объекты, и шаровые звёздные скопления в частности;

закон $\rho(r) = \frac{\rho_0}{b^7}$ хорошо описывает концентрацию материи в карликовых сфероидальных галактиках.

§ 15.11. Сводка формул для некоторых сферических систем

Таблица 3

Плотность	$\sigma(x)$	$\varphi_{\text{внутр}}(r)$
$\rho = \text{const}$ $0 \leqslant r \leqslant R$	$2\rho\sqrt{R^2 - x^2}$	$\frac{2}{3}\pi G\rho\left(3R^2 - r^2\right)$
$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ $0 \leqslant r \leqslant R$	$\rho_0\left[\sqrt{R^2 - x^2} - \right.$ $\left. - \frac{x^2}{R}\ln\frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right]$	$\frac{2}{3}\pi G\rho\left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R}\right)$
$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n$ $n + 1 > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}n\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}\times$ $\times\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}+n}$	$\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R^2\left\{\frac{r^2}{R^2}\times\right.$ $\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, -n, \frac{5}{2}, \frac{r^2}{R^2}\right) +$ $\left. + \frac{3}{2}\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{n+1}}{1 + n}\right\}$
$\rho(r) \sim r^{-5/2}$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2\frac{1}{x^{3/2}}$	$\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$
$\rho(r) = \frac{\rho_0}{b^3}$ $0 \leqslant r \leqslant R < \infty$	$\frac{2\rho_0}{a}\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{c}$	$4\pi G\rho_0 r_c^2\left\{\frac{r_c}{r}\ln\left(\frac{r}{r_c} + \right.\right.$ $\left.\left. + b\right) - \frac{1}{a}\right\}$
а) $0 \leqslant r \leqslant R$ $\rho(r) = \frac{\rho_0}{b^5}$ *б*) $R \to \infty$ (шар Пламмера или политропа с $n = 5$)	$\frac{2\rho_0}{3c}\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{a}\times$ $\times\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{c}\right)$ $\frac{4\rho_0 r_c}{3c^2}$	$\frac{MG}{R^3}r_c^2\left\{\frac{a^3}{b} - 1\right\}$ $\frac{MG}{r_c}\cdot\frac{1}{b}$
$\rho(r) = \frac{\rho_0}{b^7}$	$\frac{\sigma_0}{c^3}$	$\frac{4}{5}\pi G\rho_0 r_c^2\left\{\frac{1}{3}\frac{r^2}{r_c^2}\frac{5 + 2\frac{r^2}{r_c^2}}{b^5} + \frac{1}{b^5} - \frac{1}{a^5}\right\}$

Продолжение таблицы 3

$M(r)$	M	W
$\frac{4}{3}\pi\rho r^3$	$\frac{4}{3}\pi\rho R^3$	$-\frac{3}{5}\frac{M^2G}{R}$
$\frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{R}\right)$	$\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$	$-\frac{26}{35}\frac{M^2G}{R}$
$\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3\frac{r^2}{R^2}\times$ $\times{}_2F_1\left(\frac{3}{2},-n,\frac{5}{2},\frac{r^2}{R^2}\right)$	$\pi^{3/2}\rho_0 R^3\frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+5/2)}$	$-\frac{8}{3}\pi^2 G\rho_0^2 R^5\times$ $\times\left\{\frac{2^{2n}n^2\Gamma^2(n)}{(2n+3)\Gamma(2n+2)}\times\right.$ $\times{}_3F_2\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-n,\frac{5}{2},\frac{5}{2}+n,1\right)+$ $\left.+\frac{3\sqrt{\pi}}{4(1+n)}\frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma\left(2n+\frac{7}{2}\right)}\right\}$
$\sim\sqrt{r}$	$M(r)\cdot\varphi(r)=\mathrm{const}$	$\sim-\ln r\sim-\ln M(r)$
$4\pi\rho_0 r_c^3\left[\ln\left(\frac{r}{r_c}+b\right)-\frac{r}{r_c}\right]$	$4\pi\rho_0 r_c^3\left[\ln\left(\frac{R}{r_c}+a\right)-\frac{R}{r_c}\right]$	$-8\pi^2 G\rho_0^2 r_c^5\left\{\operatorname{arctg}\frac{R}{r_c}+\frac{R}{r_c a^2}-\right.$ $\left.-\frac{2\ln\left(\frac{R}{r_c}+a\right)}{a}\right\}$
$\frac{4}{3}\pi\rho_0\frac{r^3}{b^3}$	$\frac{4}{3}\pi\rho_0\frac{R^3}{a^3}$ $\frac{4}{3}\pi\rho_0 r_c^3$	$-\frac{3}{16}\frac{M^2G}{r_c}\left\{\frac{r_c}{R}\left(1-8\frac{r_c^2}{R^2}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{r_c^4}{R^4}\right)+\left(1+\frac{r_c^2}{R^2}\right)^3\operatorname{arctg}\frac{R}{r_c}\right\}$ $-\frac{3\pi}{32}\frac{M^2G}{r_c}$
$\frac{4\pi\rho_0 r^3}{15}\frac{5+2\frac{r^2}{r_c^2}}{b^5}$	$\frac{4\pi\rho_0 R^3}{15}\frac{5+2\frac{R^2}{r_c^2}}{a^5}$	$-\frac{7\pi^2G\rho_0^2 r_c^5}{80a^{10}}\left\{\frac{R}{r_c}\left(a^2-2\right)\times\right.$ $\times a^2\left(a^4+\frac{8}{3}\left(a^2-1\right)\right)+$ $\left.+\frac{128}{35}\left(\frac{R}{r_c}\right)^5+a^2\operatorname{arctg}\frac{R}{r_c}\right\}$

Замечания

§ 15.1. Задача о гравитационном влиянии жидкого ядра и мантии на внутреннее твёрдое ядро нашей планеты актуальна и имеет важное прикладное значение. Полученный здесь результат заставил уже в наши дни пересмотреть прежнюю точку зрения в вопросе о величине смещения внутреннего ядра Земли под влиянием приливных сил от Солнца и Луны. Об этом см. статью Антонова и Кондратьева [3].

§ 15.2. Приведённый пример с выделением тепла в недрах Земли при гравитационной дифференциации её недр подчеркивает общефизическое значение понятия гравитационной энергии

§ 15.3. Представление потенциала широкого кольца в виде ряда позволяет найти поправки к находящейся внутри него фигуре равновесия (жидкой, газовой или звёздной системы).

§ 15.4. Формулы для расчёта потенциала искривлённых дисков могут найти применение при изучении реальных галактик.

§ 15.5. Подробнее о динамике слоисто-неоднородного эллипсоида см. [26].

В упомянутой статье Робертса [69] метод эллипсоидальных слоёв применён для изучения динамики вращающихся политроп.

§ 15.6. Вопрос о вращении эллиптических галактик захватил автора ещё в 1977 году. Незадолго до этого J. J. Binney [53] предложил объяснение загадки их малого вращения присутствием реликтовой анизотропии дисперсии скоростей звезд. Однако в одной из первых работ [55] на эту тему Binney допустил ошибку: без каких-либо оснований он посчитал потенциал внутри неоднородной эллипсоидальной оболочки постоянным и заменил тензор вириала тензором гравитационной энергии подсистемы. Но у нас доказано (см. формулу (8.97)), что *в общем случае тензор вириала состоит из двух членов и не сводится к одному только тензору гравитационной энергии.* Вскрытие этой ошибки (я был тогда аспирантом в теоротделе им И. Е. Тамма в ФИАН) и привело автора к исследованию всей проблемы притяжения слоисто-неоднородных эллипсоидов. См. также работу [26].

§ 15.7. Применение к фигурам равновесия вращающейся гравитирующей массы жидкости понятий внешней и внутренней гравитационной энергии, введённых в § 8.8, приводит к интересным результатам. Здесь на основе этой идеи получено новое выражение для угловой скорости фигур относительного равновесия, которое позволяет, например, изучать неэллипсоидальные фигуры равновесия.

Первоисточник: [21].

§ 15.8. Связь обобщённого фокалоида с фигурами относительного равновесия вращающейся гравитирующей жидкости весьма любопытна. В принципе, такой подход позволяет доказать известное неравенство Крудели.

§ 15.9. Проблема неэллипсоидальных фигур равновесия возникла в трудах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова в конце XIX века. Но аналитические исследования позволяли находить такие фигуры только в окрестности исходных классических сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби. С появлением компьютеров ситуация изменилась и впервые некоторые последовательности трехмерных неэллипсоидальных фигур равновесия удалось проследить от их зарождения до финала. Однако двумерные фигуры оставались не изученными. Б. П. Кондратьевым были разработаны два метода для исследования таких неэллиптических фигур равновесия. Расчёты проводились на кафедре астрономии и механики Удмуртского государственного университета. Помощь оказывал А. С. Дубровский.

Заключение

Астрономы всегда восхищались универсальностью и математической мощью закона всемирного тяготения. Во Вселенной «хоры стройные светил» движутся под управлением дирижёра, роль которого и выполняет гравитация. По мере расширения наших знаний о Космосе, уверенность в надёжности этого закона только возрастала. Но одновременно пополнялся и список задач, решение которых исследователям найти не удавалось. Со временем этот список становился всё более внушительным, а потому математические возможности закона всемирного тяготения до сих пор нельзя считать полностью раскрытыми.

В этой книге разработан комплекс новых методов в теории потенциала. Появилась возможность ставить и решать задачи, большинство из которых ранее были недоступны. Эти методы возникли вначале как догадки, но затем их доказательство потребовало от автора напряжённой работы. Если «лопата» и скребла о камень, это ещё не значило, что задачу следовало сразу забросить. Да и по самому звуку можно было всё-таки догадаться, поддастся данный камешек, или нет!

Мы старались показать, что многие из этих приёмов (а что такое метод, как не приём, который Вы используете хотя бы дважды!) заслуживают серьёзного внимания. Заметим, что ни один из предложенных в книге методов нахождения гравитационной и электростатической энергии тел не является на практике универсальным – слишком велико разнообразие форм тел и возникающих здесь задач. Но это нельзя рассматривать как недостаток: специальные методы с ясно очерченной областью применения в практическом отношении являются гораздо более гибкими и ценными, нежели общие методы типа формулы

$$W = -\frac{1}{2} \iiint\limits_V \rho(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x})\, dV.$$

Много внимания в книге уделялось вычислению гравитационной энергии отдельных тел. Но можно задуматься и о гравитационной энергии Вселенной в целом. Каждый человек проводит свою жизнь в глубокой потенциальной яме, созданной гравитационными силами. И здесь возникают неизученные до конца вопросы. В частности, теория относительности часто игнорирует вопрос об энергии гравитационного поля. С другой стороны, зная гравитационную энергию W системы с массой M, для неё можно найти и дефект массы

$$\Delta M = \frac{|W|}{c^2}$$

(c — скорость света). Чем больше модуль W, тем больше дефект массы. Для Вселенной в целом, возможно, дефект массы и есть сама её масса.

Не всё, что было задумано, вошло в эту книгу. Но и то, что изложено, будет способствовать дальнейшему развитию теории потенциала.

Литература

[1] *Абалакин В. К., Аксёнов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М.: Наука, 1976.

[2] *Антонов В. А., Железняк О. А., Кондратьев Б. П.* К проблеме замещающих самогравитирующих дисков в теории потенциала. // Вісник Астрономичної Школи. — 2000. — Т. 1, № 2. — С. 5.

[3] *Антонов В. А., Кондратьев Б. П.* К вопросу о величине смещения внутреннего ядра Земли. // Физика Земли — 2004. — № 4 — С. 63—66.

[4] *Антонов В. А., Кондратьев Б. П.* Новый метод нахождения радиуса сходимости у рядов Лапласа для потенциала осесимметричных тел. // Известия ГАО. — 2000. — № 214. С. 115–134.

[5] *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Сравнительные свойства различных представлений гравитационного поля Земли. // Труды 1-й Орловской конференции. — Киев: Наукова думка, 1982. С. 93.

[6] *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М.: Наука, 1988.

[7] *Антонов В. А., Холшевников К. В.* О возможности использования ряда Лапласа для гравитационного потенциала на поверхности планеты. // Астрон. журн. — 1980. — Т. 7. - С. 1323.

[8] *Аппель П* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. — Л.-М.: ОНТИ, 1936.

[9] *Больцман Л.* Лекции по теории газов. — М.: ГИТТЛ, 1956. - С. 403.

[10] *Буллен К. Е.* Плотность Земли. — М.: Мир, 1978.

[11] *Вебстер А. Г.* Механика материальных точек, твёрдых, упругих и жидких тел. — Л.-М ГТТИ, 1933. — Гл. 8.

[12] *Геронимус Я. Л.* Очерки о работах корифеев русской механики. — М.: ГИТТЛ, 1952.

[13] *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов. — М.: Наука, 1969.

[14] *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. — М.: Физматгиз, 1961.

[15] *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — 3-е изд. — М.: Наука, 1975. — Ч. I.

[16] *Еськов К. Ю.* История Земли и жизни на ней. — М.: НЦ ЭНАС, 2004.

[17] *Кинг И.* Введение в классическую звёздную динамику. — М.: УРСС, 2002.

[18] *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

[19] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии, т. 1. — М.: Наука, 1989.

[20] *Кондратьев Б. П.* Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. — М: Наука, 1989. — 272 с.

[21] *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. — Москва-Ижевск: Изд-во «РХД», 2003.

[22] *Кондратьев Б. П.* Ньютоновские потенциалы и динамика слоисто-неоднородного эллипсоида. // Астрон. журн. — 1982. — Т. 59. — С. 458.

[23] *Кондратьев Б. П.* Некоторые принципиальные вопросы теории фигур равновесия. // Кинематика и физика небесных тел. — 1999. — № 2 (Приложение). — С. 16.

[24] *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала: эквигравитирующие стержни для осесимметричных тел. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 247.

[25] *Кондратьев Б. П.* Новые методы в теории ньютоновского потенциала. I. О представлении потенциальной энергии гравитирующих тел сходящимися рядами. // Астрон. журн. — 1993. — Т. 70. — С. 583.

[26] *Кондратьев Б. П.* Потенциалы и динамика слоисто-неоднородного эллипсоида. — Препринт ФИАН СССР. 1981. № 52.

[27] *Кондратьев Б. П.* Анизотропия дисперсии скоростей в эллиптических галактиках. // Письма в Астрон. журн. — 1981. — Т. 7. — С. 83.

[28] *Кондратьев Б. П.* Вокруг какой оси вращаются эллиптические галактики? // Астрон. журн. — 1983. — Т. 60. — С. 858.

[29] *Кондратьев Б. П., Антонов В. А.* Новые методы в теории ньютоновского потенциала. II. Потенциальная энергия однородных линзовидных тел и шаровых сегментов. // Астрон. журн. — 1993. — Т. 70. — С. 594.

[30] *Кондратьев Б. П., Озерной Л. М.* Какую пространственную форму имеют эллиптические галактики? // Письма в Астрон. журн. — 1979. — Т. 5. — С. 67.

[31] *Корн Г.* и *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970.

[32] *Лебедев Н. Н.* // Специальные функции и их приложения. — М.: ГИТТЛ, 1953. — С. 295.

[33] *Левин В. И., Гросберг Ю. Н.* // Дифференциальные уравнения математической физики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — С. 182.

[34] *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. — М: Наука, 1990.

[35] *Ляпунов А. М.* Собр. соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. Т. 1. — С. 27.

[36] *Мультон Ф.* Введение в небесную механику. — М.-Л.: ОНТИ, 1935. — Гл. 5.

[37] *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида. — М.: Атомиздат, 1976.

[38] *Петровская М. С.* Представление гравитационного потенциала Земли в виде рядов, сходящихся во всём пространстве. // Труды 1-й Орловской конференции. — Киев: Наукова думка, 1982. С. 115.

[39] *Пицетти П.* Основы механической теории фигур планет. — М.: ГТТИ, 1933.

[40] *Привалов И. И.* Введение в теорию функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.

[41] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. — М.: Физматлит, стр. 687, 2003.

[42] *Риман Б.* О потенциале тора. Сочинения. — М.-Л.: ОГИЗ, 1948.

[43] *Снайдер Р.* Двухкомпонентная модель земного шара. // В сб. Физика за рубежом. Сер. Б. — М.: Мир, 1988.

[44] *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. — М.-Л.: Гостехиздат, 1946.

[45] *Субботин М. Ф.* Курс небесной механики. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 3.

[46] *Тодхантер И.* История математических теорий притяжения и фигуры Земли. — М.: УРСС, 2002.

[47] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973.

[48] *Чандрасекхар С.* Введение в учение о строении звёзд. — М.: ИЛ, 1950.

[49] *Шапиро Б.* О ньютоновском притяжении эллипсоидов. // ж. Квант — 1990 — №. 5. — С. 18.

* * *

[50] *Antonov V. A., Kondratyev B. P.* On the conditional extremum for the gravitational energy inherent to the oblate spheroid. // Astronomical and Astrophysical Transactions. — 1995. — Vol. 7. — P. 173.

[51] *Bertola F., Capaccioli M.* The dynamics of early-type galaxies. I. The rotation curve of the elliptical galaxy NGC 4697. // Astrophys. J. — 1975. — Vol. 200. — P. 439.

[52] *Binney J. J.* The rotation curves of elliptical galaxies. // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. — 1980. — Vol. 190. — P. 421.

[53] *Binney J. J.* Is the flattening of elliptical galaxies necessarily due to rotation? // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. — 1976. — Vol. 177. — P. 19.

[54] *Binney J. J.* On the rotation of elliptical galaxies. // Monthly Notices. Roy. Astron. Soc. — 1978. — Vol. 183. — P. 501.

[55] *Binney J. J.* The rotation curves of elliptical galaxies. // Monthly Notices. Roy. Astron. Soc. — 1980. — Vol. 190. — P. 424.

[56] *Carter D.* The structure of the isophotes of elliptical galaxies. // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. — 1978. — Vol. 182. — P. 797.

[57] *Chasles M.* Nauvelle solution du probleme de l'attraction d'un ellipsoide heterogene sur un point exterieur. // J. de Liouville — 1840. — Vol. 5.

[58] *Ferrers N.M.* On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings, of variable densities. // Quart. J. Pure and Appl. Math. — 1877. — Vol. 14, № 53. — P. 1.

[59] *Gauss K.* Werke, v. 5, s. 200.

[60] *Hubble E.* Distribution of luminosity in elliptical nebulae. // Astrophys. J. — 1930. — Vol. 71. — P. 231.

[61] *Illingworth G.* Rotation (?) in 13 elliptical galaxies. // Astrophys. J. — 1977. — Vol. 218. — P. L43.

[62] *Jeans J. H.* The equilibrium of rotating liquid cylinders. // Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A — 1903. — Vol. 200. — P. 397–430.

[63] *Jeans J. H.* The instability of the pear-shaped figure of quilibrium. — // Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A — 1916. — Vol. 217. — P. 1–34.

[64] *Jeans J. H.* Astronomy and Cosmogony. — Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1928.

[65] *Kellogg O. D.* Foundations of Potential Theory. — Berlin, Julius Springer, 1929.

[66] *Kholshevnikov K. V.* On convergence of an asymmetrical body potential expansion in spherical harmonics. // Celest. Mechan. — 1977. — Vol. 16. — p. 45—60.

[67] *Kondratyev B.P., Mukhametshina E. S., and Trubitsina N.G.* Gravitational Potential of Material Wide Ring, Filled by Rosette Orbit. // Proceedings of a meeting in S.-Petersburg, Russia, 2003. Astronomical Society of the Pacific Conference series. — Vol. 316. — P. 326.

[68] *Linden-Bell D.* Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. // Mon. Not. Roy. astron. Soc., — 1967. — Vol. 136. — P. 101.

[69] *Roberts P.H.* On highly rotating polytropes. II. // Astrophys. J. — 1963. — Vol. 138. — P. 809.

[70] *Strom K.M., Strom S.E.* Surface brightness and color distributions of elliptical and SO galaxies in Coma cluster. // Astron. J. — 1978. — Vol. 83. — P. 73.

[71] *Todhunter I.* History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth. — London, Constable, 1973.

[72] *Züge A.* Das Potential ringförmiger Körper, insbesondere eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt. // J. Reine Angew. Math. — 1889. — Band 104. — S. 89–101.

Именной указатель

Абалакин В. К. 36, 502
Абель 370
Айвори 12, 24, 33
Аксёнов Е. П. 31, 36, 502
Антонов В. А. 36, 55, 237, 252, 349, 352, 386, 429, 500, 502, 503
Аппель 36, 190, 502
Аристотель 14
Арнольд В. И. 154

Бернулли 104, 210
Бертола (Bertola F.) 475, 504
Бетти 227
Бинни (Binney J. J.) 235, 478, 500, 504
Больцман 502
Борелли 15
Брунс 19
Брычков Ю. А. 428, 504
Буллен 502

Вебстер 36, 300, 343, 502
Вейерштрасс 154

Галилей 14, 15
Гаусс 16, 18, 24, 39, 75, 85, 86, 93, 149, 154, 211, 236, 357, 358, 505
Гельмгольц 220
Геронимус Я. Л. 502
Гильберт 15
Градштейн И. С. 308
Гребеников Е. А. 13, 31, 36, 502
Грин 17, 37, 97, 153, 218, 250, 459, 479
Гросберг Ю. Н. 503
Гук 15

Дёмин В. Г. 31
Дайсон 29
Двайт Г. Б. 502
Джинс 482, 491, 505
Дирихле 24
Дубошин Г. Н. 27, 31, 36, 190, 299, 502
Дубровский А. С. 13, 500

Железняк О. А. 502

Иллингворт (Illingworth G.) 478, 505

Капаччиоли (Capaccioli M.) 475, 504
Картер (Carter D.) 475, 504
Кассини 154, 209, 210, 293, 294, 350, 351, 510
Каталан 355, 404, 442, 453
Келлог 36, 505
Кеплер 14, 15
Кинг 502
Кирхгоф 94, 503
Клейн 16, 36, 503
Клеро 19
Ковалевская С. В. 18
Кондратьев Б. П. 36, 75, 93, 128, 158, 237, 252, 298, 352, 386, 473, 475, 476, 478, 482, 500, 502, 503, 505
Контопулос 477
Коперник 14
Кориолис 472
Корн Г. 503
Корн Т. 503
Коши 273, 295, 299, 488
Крудели 482
Кулон 231

Лагранж 15, 16
Ламе 154
Лаплас 12, 15, 16, 18, 20, 21, 32–34, 103, 146, 153, 158, 182, 184, 186, 254, 255, 277, 286, 288, 305, 349, 352, 365–367, 370, 469
Лебедев Н. Н. 503
Левин В. И. 503
Лежандр 16, 20, 24, 365
Линден-Белл (Linden-Bell D.) 505
Литлвуд 503
Ляпунов А. М. 227, 239, 253, 349, 363, 385, 491, 500, 503

Маклорен 12, 24, 31–33, 146, 158, 186, 190, 254, 255, 304, 305, 343, 474, 479, 481, 500

Маричев О. И. 428, 504
Мультон 36, 503
Муратов Р. З. 503
Мухаметшина Э. Ш. 505

Ньютон 15, 22, 24, 31, 124, 140, 154, 217, 231, 503

Огородников К. Ф. 477
Озерной Л. М. 475, 503
Остроградский М. В. 16, 236, 357

Петровская М. С. 349, 504
Пицетти 36, 343, 504
Плана 39
Плейфер 216
Поль 14
Похгаммер 428
Привалов И. И. 348, 504
Прудников А. П. 428, 504
Птолемей 14
Пуанкаре 154, 480, 500
Пуассон 17, 18, 21, 25, 29, 103, 148, 184, 185, 218, 224, 250

Раус 29
Риман 348, 473, 488, 504
Риттер 227, 252
Робертс (Roberts P. H.) 233, 234, 500, 505
Робэн 20, 154
Родриг 24
Рыжик И. М. 308
Рябов Ю. А. 13, 31, 36, 502

Снайдер 504
Сретенский Л. Н. 36, 154, 298, 358, 504
Стеклов В. А. 154
Стром (Strom K. M.) 475, 505
Стром (Strom S. E.) 475, 505
Субботин М. Ф. 27, 36, 190, 331, 349, 504

Тейлор 148
Тимошкова Е. И. 36, 55, 349, 502
Тихо Браге 14
Тодхантер (Todhunter M.) 16, 36, 39, 216, 504
Томсон 220
Трубицына Н. Г. 505

Ферререс (Ferrers) 29, 190, 505
Фриман 473

Хаббл (Hubble E.) 477, 505
Холшевников К. В. 36, 55, 331, 349, 502, 505

Цуге (Züge A.) 191, 192

Чандрасекхар (Chandrasekhar) 25, 27, 28, 36, 190, 222, 224, 232, 234, 473, 504
Черепащук А. М. 13

Шаль 12, 154, 300, 302, 504
Шапиро Б. 504
Шварц 348
Шустер 27

Эйлер 15, 16, 31, 315, 476

Якоби 474, 479, 481

Предметный указатель

Вириал гравитационных сил 222
— вириальные уравнения 472
— компоненты уравнения 472
— подсистемы 235, 252
— полный 235, 249
—— теорема 480
— связь с гравитационной энергией 222, 224
— тензор 234, 235, 249
— усечённые вириалы 249

Гомеоид 30, 129, 132, 133, 302
— конечной толщины 142, 143, 257
— обобщённый 30, 148, 150, 236, 237
— потенциал 30, 139–141, 143, 147, 150, 159, 179, 181, 225, 228, 257, 302, 307, 467
— промежуточный 159
— сила притяжения 140, 143, 160
— софокусный 302, 304
— сфероидальный 140
—— эквигравитирующий диск и стержень 257, 307, 308
— элементарный 132–134, 136–139, 231, 305
— эллипсоид из гомеоидов 301
Гравитационная энергия 33, 474
— асимметричной линзы 377
—— переход к шару 379
—— пустотелой 445
— взаимная 217, 365, 366, 424, 437, 444, 445, 458, 463
—— внутреннего шара с оболочкой 229
—— гомеоида и эллипсоида 458
—— двух шаровых сегментов 384
—— колечка и круглого диска 458
—— поверхностного слоя и шара 458
—— половинок однородного шара 383
—— слоя и эллипсоида 458
—— физический смысл 220, 221
—— через эквигравитирующие стержни 438
—— «шапочек» пустотелой линзы и лунки 445, 446
—— эквивалентность двух способов представления 221
— внешняя часть 239
—— однородного сфероида и шара 240
— внутренняя часть 239
—— неоднородной Земли 468
—— однородного сфероида и шара 240, 241
— выметания 231
— гомеоида 228, 417, 458
— двух
—— однородных шаров 378, 382
—— пустотелых сфер 445
— конуса 403, 404
—— асимптотика малых углов 404
—— в дисковом пределе 403
— круглого диска
—— неоднородного 404, 442, 456, 457
—— однородного 441, 456, 457
— кубоида и куба 359, 362, 363
— лунки пустотелой 446
— максимальная 237
— неоднородного
—— стержня 419
—— шара 28
— обобщённого фокалоида 237
— оболочки 225
— однородного
—— кругового тора 454
—— кругового цилиндра
——— конечной высоты 451
——— в дисковом пределе 454
—— кубоида 358
—— полушара 383, 399, 424
—— стержня 417, 418
—— сфероида 28, 354, 367, 440, 441, 448
—— шара 28, 33, 225, 230, 239, 353, 357, 358, 363, 382, 388, 389, 422, 423, 447
—— эллипсоида 28, 226–228, 230, 354, 357, 371, 458
— однородной лунки 35, 229, 384–386
— плоского слоя 460
— поверхностного слоя 237, 353, 386, 458
— подсистемы 235, 252, 421, 422, 463
— полная 480, 481
— представление в виде ряда 366, 367, 369, 370, 385, 386
—— сходимость 369
— прямоугольной пластины 363
— пустотелой полусферы 444
— свойства 217 – 221, 224, 231, 233, 353, 458
— симметричной линзы 381
—— пустотелой 445

— слоисто-неоднородного
— — сфероида из гомотетических слоёв 354, 356, 456
— — эллипсоида 353
— — — из гомотетических слоёв 353–355, 455
— стержня во внешнем поле 424
— тело без круговой симметрии 371
— тензор 30, 234, 235, 473
— теорема об экстремальности 237
— толстого
— — гомеоида 228, 231
— — фокалоида 228
— толстой оболочки 229
— тонкой пустотелой сферы 446
— формула Сретенского 358
— «шапочки» 444
— — с днищем 446
— шарового
— — сегмента 33, 35, 371, 382–384, 393, 423
— — сектора 398, 423, 424
— — — асимптотика малых углов 399
— — сектора, близкого к полушару 423
— — слоя 414–416
— широкого кольца 449
— эллиптического диска
— — неоднородного 455
— — однородного 457, 460, 461
Гравитационная энергия тел с логарифмическим потенциалом 231, 462
— цилиндр с прямоугольным и квадратным сечением 463
— общая формула 462

Жидкие фигуры равновесия
— неэллипсоидальные 481
— неэллиптические 491, 492
— — методы нахождения 483, 487
— — предельная конфигурация 490, 491
— угловая скорость новая формула 479, 480
— уровенные поверхности 487

Задачи 17, 19, 23, 26–28, 38, 40, 42, 43, 47, 49, 51, 52, 55-57, 65, 74, 78–80, 85, 93, 103, 104, 125, 133, 137, 138, 140–142, 144, 146, 148–150, 153, 155, 157, 164, 165, 169, 171, 172, 180, 193, 194, 198, 202, 204, 206–209, 219, 220, 225, 226, 228, 229, 231, 234, 239, 242, 252, 259, 260, 262, 265, 268, 270–272, 275, 277, 280, 283, 285, 286, 298, 307, 309, 313–316, 318, 319, 321, 332, 333, 341, 343, 356, 358, 363, 364, 371, 373, 378, 382, 384, 385, 388, 389, 396, 399, 415–417, 419, 423, 424, 426, 427, 429, 430, 436, 439–442, 444–446, 458, 463, 466, 470, 471, 474, 481
— затравочные 33

Методы для потенциала
— Гаусса 18, 211
— асимптотический 94, 165, 167, 169, 198, 207, 214, 279
— дисковый предел 305
— дифференциации 77, 123, 124, 126, 144, 145, 185, 208, 303
— — определение 69
— интегральные формулы 37
— прямой 17, 21–23, 76, 87, 96, 100, 104, 118, 141, 142, 149, 152, 192, 204, 232, 261, 275, 277, 278, 282, 285, 308, 372, 381, 382, 387, 390, 396, 400, 405, 425, 427, 447, 470, 471
— ряд Лапласа 20, 330, 365, 366, 370, 468
— — радиус сходимости 288, 331
— синтеза
— — конечных величин 219, 228, 234, 242
— — конечных элементов 30, 263, 293, 368, 421, 437, 465, 482
— — элементов 25, 26, 30, 78, 142, 154, 159, 176, 178–180, 194, 205, 207, 208, 269, 448
— софокусных преобразований 174, 302, 304, 305, 307, 310
— через
— — дисковый предел 172, 174
— — интеграл Коши 273
— — контурный интеграл 484
— — уравнение Лапласа 18, 139
— — уравнение Пуассона 17, 18, 21, 224
— — эквигравитирующие тела 256, 257, 261–263, 265, 269, 271, 272, 275, 277, 280, 282, 287, 292, 295, 314, 316, 317, 319, 320, 322, 324, 327, 332, 334, 339, 341
Методы для энергии
— аналитического продолжения 35, 384
— асимптотический 363, 379, 381, 382, 399, 404, 419
— восьмой (дифференциации) 458
— — *определение* 458
— второй (через интеграл по поверхности) 358, 362
— — определение 358
— девятый (для плоских тел через интеграл по контуру) 461
— — определение 459
— десятый (для тел с логарифмическим потениалом) 463
— — определение 462
— дополнение до шара 422
— интеграл от квадрата градиента 218

— первый (синтеза) 234, 354, 355
— — определение 233
— прямой 28, 217–219, 225, 230, 236, 363
— пятый (через эквигравитирующие стержни) 32, 426–430, 432, 436–438, 440, 441, 444, 445
— — определение 424
— седьмой (переход от эллипсоидов к дискам) 226, 456, 457
— — определение 455
— сумма внешней и внутренней 239, 245, 248, 480
— тело из подсистем 221, 228, 229
— третий (через особые ряды) 34, 365–367, 369, 374, 378
— — для тел без симметрии 370, 371
— — определение 369
— через интеграл
— — от дивергенции 357
— — по поверхности 34, 357
— четвёртый (через интеграл в комплексной плоскости) 34, 388, 390, 392–396, 398, 400, 403, 405, 414
— — определение 388
— численный 454
— шестой («прогонки») 418, 448, 449, 452
— — определение 447
Монте-Карло метод 417

Потенциал
— асимметричной линзы на оси симметрии 372
— боковой цилиндрической поверхности
— — на оси симметрии 155
— — пространственный 155
— — эквипотенциали 156
— внутри
— — кругового кольца 74
— — оболочки 181
— двумерных тел 38, 39
— двух однородных шаров 242
— иглообразного эллипсоида
— — внешний 167, 168
— — внутренний 167
— искривлённого диска 471
— конуса на оси симметрии 400
— круглого диска
— — неоднородного 78, 85, 173, 315, 493
— — однородного:
— — — в главной плоскости 42, 47, 265, 493
— — — на оси симметрии 21, 142, 261, 492
— — — пространственный 265, 266, 493
— — — эквипотенциали 267
— круглого кольца
— — на оси симметрии 22
— — пространственный 76, 492
— — эквипотенциали 77
— кубоида внутренний 213
— — эквипотенциали 213
— логарифмический 22, 223
— — элементарного гомеоида и фокалоида 125-127
— — — эквипотенциали 125, 126
— материальная точка 16
— на внутреннее ядро Земли 465
— наклонённых колец 427
— неоднородного кольца с розеточной орбитой 91, 470
— — эквипотенциали 92
— неоднородного шара 26
— — политропного 241
— неэллиптической фигуры на границе 485
— обобщённого
— — гомеоида 149
— — фокалоида 152
— общая формула для двумерных тел 96
— объёмного фокалоида 145, 146
— объёмных тел 17, 18
— — свойства 18
— одномерных тел 22
— однородного кругового тора
— — на оси симметрии 193, 194, 197, 199
— — пространственный 196, 199, 205
— — эквигравитирующие элементы 295–298
— — эквипотенциали 202, 203
— однородного кругового цилиндра 275
— однородного полушара 164, 272, 273
— однородного сфероида 24, 25
— — внешний 162
— — внутренний 163
— — на оси симметрии 163, 256, 287
— однородного тора
— — с сечением в виде овала Кассини 211
— — с эллиптическим сечением 209
— однородного шара 24, 164, 388, 437
— однородного эллипсоида 24
— — внешний 159
— — внутренний 160, 161
— — дисковый предел 173
— — другая форма представления 161
— однородного эллиптического диска
— — на главной оси 325
— — на границе 495
— — пространственный 142, 496
— однородной параболоидной линзы 278
— однородных плоских тел интегральные формулы 37
— определение 16

— пластины
— — прямоугольной 57
— — — эквипотенциали 58
— — ромбовидной 55
— — — эквипотенциали 55
— — треугольной 52, 53
— — — эквипотенциали 53
— плоского эллиптического
— — гомеоида 71
— — — эквипотенциали 72
— — кольца 70
— — фокалоида 72, 73
— — — эквипотенциали 73
— половинки однородного круглого диска 51
— пустотелого кругового тора
— — на оси симметрии 207
— — пространственный 205, 206
— сегмента круглого диска 50
— — эквипотенциали 51
— сектора круглого диска 46, 49
— — эквипотенциали 47
— симметричной линзы
— — на оси симметрии 341, 381
— — на плоскости 342
— — пространственный 339
— слоисто-неоднородного сфероида с гомотетическими слоями 317, 319
— слоисто-неоднородного эллипсоида с гомотетическими слоями 25, 26, 178
— слоисто-неоднородного эллипсоида
— — внешний 176
— — внутренний 179
— — другая форма 186
— — свойства 182
— софокусных оболочек 303
— софокусных эллипсоидов 146
— стержня 140, 256, 257
— сферической
— — оболочки 165
— — полости 164, 229
— толстых оболочек 143
— тонкого эллиптического кольца 74
— четырёх эквигравитирующих тел 339
— шапочки на оси симметрии 277
— шарового сегмента
— — на оси симметрии 271, 382, 390
— — на плоскости 272, 342
— — пространственный 272
— шарового
— — сектора на оси симметрии 396
— — слоя на оси симметрии 405
— эквипотенциали 19
— элементарной оболочки общий случай 144
— эллипсоида Феррерса 29
— эллипсоидальной подсистемы 30

Сила
— внутри твёрдого ядра Земли 465
— от мантии на твёрдое ядро Земли 465, 466

Теорема
— Антонова — Кондратьева 237
— Арнольда 154
— Дива 368
— Маклорена — Лапласа 12, 27, 146, 254
— Ньютона 140
— о сходимости ряда для энергии 369
— Шаля 302
— Э – 1 255; Э – 2 260; Э – 3 269; Э – 4 303; Э – 5, Э – 6 304

Фокалоид
— обобщённый 30, 152, 158, 237, 252, 481
— — внешний потенциал 153
— — поверхностная плотность 152
— — пространственный потенциал 152
— — толщина 152
— — энергия выметания 237
— объёмный 129, 147, 157, 185
— — внешний потенциал 145, 186
— — внутренний потенциал 146
— — гравитационная энергия 225
— — линии равной толщины 137
— — масса 145
— — моменты инерции 137
— — потенциал 145
— — потенциал в центре 141
— — потенциал на поверхности 145
— — сжатый 136
— — скачок силы 147
— — сфероидальный 259
— — толщина 158
— — эквигравитирующий стержень 259, 260
— — эквипотенциали 147, 181
— — элементарный 134, 136, 137
— — энергия выметания 231
— софокусное расслоение 259, 300, 312
— софокусные преобразования 301, 302
— эквигравитирующий
— — диск 305
— — стержень 308
— элементарный 30
— — плоский 69, 72
— элементарный цилиндрический 126
— — эквипотенциали 126

Учебное издание

Борис Петрович Кондратьев

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

НОВЫЕ МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Зав. редакцией академик *В.И. Арнольд*
Зам. зав. редакцией и редактор *А.С. Попов*
Художник *Ф. Инфанте*
Технический редактор *Е.В. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *Б.П. Кондратьевым*

Подписано в печать 08.06.2007. Формат $70 \times 100^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 16,0 бум. л.
Печ. л. 32,0. Усл. печ. л. 41,6. Изд. № 1/10181.
Тираж 1500 экз. Заказ № 4360.

Издательство «Мир»
Министерства культуры и массовых коммуникаций РФ
107996, ГСП-6, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

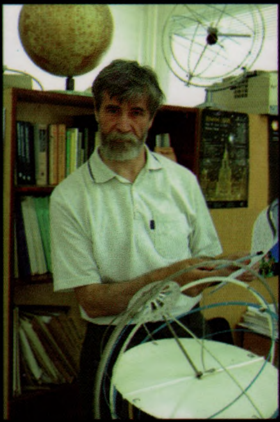
Диапозитивы подготовлены в издательстве «Мир»

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ГУП «Брянское областное полиграфическое объединение»
241019, г. Брянск, пр-т Ст. Димитрова, 40

Стр.	Строка или формула	Напечатано	Должно быть
11	4-й абзац, послед. предложение	Основное…	Главное…
13	Конец 1-го абзаца	… ,что…	…, и это…
16	Примечание 7	… для для…	… для…
20	Ф-ла (1.18)	x, y, z	x_1, x_2, x_3
22	Абзац после ф-лы (1.28) 4-я строка сверху	… почему –…	… почему…
24	После ф-лы (1.40)	… функций.	… функцией.
25	Перед ф-лой (1.46)	r, x_3	(r, x_3)
27	Задача 1.7	*... шара. Ответ: ...*	*... шара.* *Ответ: ...*
39	1-я строка	… видоизменять.	… видоизменить.
199	Строка после ф-лы (7.44)	*... сфер ...*	*... сферы...*
199	Разд. 7.1.6, строка 1	…(7.23)…	…(7.26)…
206	Абзац 2, строка 1	… тора тела…	… тора …
231	Послед. предложение. перед задачей 8.8	Очевидно, уровенное…	Уровенное…
265	1-е предложение после ф-лы (9.57)	… получен интеграл…	… получен потенциал…
291	Правая часть ф-лы (9.186) должна иметь вид	$\dfrac{2\pi i}{2\pi i G}\operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_3}\left\{\dfrac{2}{3}\pi G\rho\dfrac{R^3+\left(a^2+\zeta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\zeta-\zeta_3}\right\}$	
297	Ф-ла (9.222)	$-(1-k^2)\mathrm{K}\left(\frac{1}{k}\right)$	$+(1-k^2)\mathrm{K}\left(\frac{1}{k}\right)$
308	Абзац перед ф-лой (10.40)	▼ 2). Фокалоид…	▼ 2). Фокалоид…
308	После ф-лы (10.42)	…(9.29). 3).Сфероидальная…	…(9.29). 3).Сфероидальная…
352	Последняя строка	…Антонова…	…Антонова В.А.…
378	Абзац перед § 12.9, второе предложение	…основным…	…основной…
384	Ф-ла (12.159)	arctan	arctg
387	Предложение после ф-лы (13.1)	…во *во*…	…*во*…
389	§ 13.2, первый абзац	…эту же…	…эту…
399	Предложение после ф-лы (13.64)	…малого α^4	…малого α
420	§ 13.5, третья строка	…разачаровавшись…	…разочаровавшись…
434	Ф-ла (14.96)	$\frac{d}{dt}$	$\frac{d}{dl}$
441	Перед ф-лой (14.134)	…в виде	…так
460	Второй абзац, строка 2	…потенциал…	…,а потенциал…
461	Абзац перед § 14.14	…эллипса, полученного там другим методом).	…эллипса), полученной там другим методом.
462	Абзац 2, строка 3	:*Выражение*…	:*выражение*…
466	Задача 15.1	…сначала…	…начала…
485	Перед ф-лой (15110)	x_1', x_2'	(x_1', x_2')

Стр. 468 Вместо ф-лы (15.19) должно стоять

$$W_{\text{внутр}} = -\frac{8}{45}\pi^2 G r_c^5 \rho_m^2 \left\{\frac{\rho_c^2}{\rho_m^2}+5\left(\frac{\rho_c}{\rho_m}-1\right)\left[\left(\frac{\rho_c}{\rho_m}-1\right)\left(1-\frac{r_c}{R}\right)+\frac{R^2}{r_c^2}-1\right]+\frac{R^5}{r_c^5}-1\right\}$$



Кондратьев Борис Петрович

Доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой астрономии и механики Удмуртского гос. университета. Автор четырёх монографий и ряда публикаций по проблемам современной астрономии и физики. Область научных интересов: теория потенциала, динамика звёздных систем, теория фигур равновесия, геодинамика, квантовая механика.

Перевёл и отредактировал несколько иностранных книг по астрономии и математической физике.

В настоящей науке духовная жизнь бьёт ускоренным и горячим пульсом, и именно в таком состоянии автор трудился над этой книгой. В науке есть свои храмы, над созданием которых трудились многие поколения исследователей. Со временем некоторые её разделы приобрели статус канонических; к ним относится и теория потенциала. Но проводя читателя через здание строгой классической теории, автор старался показать, что и сейчас есть мастерские, где ведутся поисковые работы по созданию фундаментальных новых методов, открывающих путь к решению трудных задач. Привлекательность этой книги и заключается в широком разнообразии рассмотренных здесь методов и решённых с их помощью новых задач.

ISBN 978-5-03-00379[illegible]