УРСС

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко
Е. В. Шикин
В. И. Заляпин

1

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М.Л.Краснов
А.И.Киселев
Г.И.Макаренко
Е.В.Шикин
В.И.Заляпин

1

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Издание второе

Москва • 2003

УРСС

ББК 22.1я73

Краснов Михаил Леонтьевич
Киселев Александр Иванович
Макаренко Григорий Иванович
Шикин Евгений Викторович
Заляпин Владимир Ильич

Вся высшая математика: Учебник. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2003. Т. 1. — 328 с.

ISBN 5-354-00271-0

Предлагаемый учебник впервые вышел в свет в виде двухтомника сначала на английском и испанском языках в 1990 году, а затем на французском. Он пользуется большим спросом за рубежом.

В 1999 году книга стала лауреатом конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России.

Этот учебник адресован студентам высших учебных заведений (в первую очередь будущим инженерам и экономистам) и охватывает практически все разделы математики, но при этом представляет собой не набор разрозненных глав, а единое целое.

Первый том включает в себя материал по аналитической геометрии, линейной алгебре, некоторым разделам математического анализа (введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной).

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 19.11.2002 г.
Формат 70×100/16. Тираж 5000 экз. Печ. л. 20,5. Зак. № 750

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: urss@urss.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://urss.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00270-2 (Полное произведение)
ISBN 5-354-00271-0 (Том 1)

Оглавление

От издательства

Коллектив авторов данной книги хорошо известен не только в нашей стране, но и во всем мире. Их учебники и задачники переведены на многие языки: английский, испанский, французский, итальянский, японский, польский, португальский. Показателем большой популярности произведений этого авторского коллектива за рубежом является причина создания данной книги: правительство одного государства обратилось именно к этим авторам с заказом на написание учебника для своих студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Результатом их коллективного творчества стал двухтомник «Курс высшей математики для инженеров», вышедший сначала на английском и испанском языках (1990), а затем на французском (1993). Он пользуется большим спросом у иностранных читателей.

В 1999 году эта книга в дополненном и обновленном варианте стала лауреатом Конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России.

Мы рады предложить вашему вниманию первое издание этого учебника на русском языке. Он адресован студентам высших учебных заведений (в первую очередь будущим инженерам и экономистам) и охватывает практически все разделы математики, но при этом представляет собой не набор разрозненных глав, а единое целое. В книге учтен опыт многолетнего преподавания авторов в высших учебных заведениях разного профиля и уровня подготовки студентов. Она написана простым, доходчивым и в то же время современным математическим языком на достаточно строгом уровне.

Отбор материала и способы его изложения строились авторами так, чтобы у читателя постепенно складывалось цельное представление об основных математических идеях и методах. Они стремились вложить в руки пользователя простой, но эффективный инструмент, необходимый для разрешения прикладных задач разного уровня и разнообразной природы.

Отличительной особенностью книги является большое количество разнообразных примеров и геометрических иллюстраций. Наличие рисунков позволяет читателю лучше разобраться в материале, более основательно усвоить соответствующие темы и разделы.

В конце каждой главы приводятся задачи и упражнения (с ответами) для самостоятельного решения.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

§ 1. Прямоугольные декартовы координаты

1.1. Координатная ось

Пусть на плоскости или в пространстве задана произвольная прямая L. Ясно, что по этой прямой L мы можем перемещаться в одном из двух противоположных направлений. Выбор любого (одного) из этих направлений будем называть *ориентацией* прямой L.

Определение 1. Прямая с заданной на ней ориентацией называется *осью.*

На чертеже ориентация оси указывается стрелкой (рис. 1).

Фиксируем на оси $\vec{L}$ некоторую точку O и выберем какой-нибудь отрезок a, положив по определению его длину равной единице (рис. 2).

Пусть M — произвольная точка оси $\vec{L}$. Поставим этой точке в соответствие число x по следующему правилу: x равно расстоянию между точками O и M, взятому со знаком плюс или со знаком минус в зависимости от того, совпадает ли направление движения от точки O к точке M с заданным направлением или противоположно ему (рис. 3).

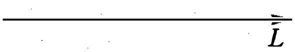


Рис. 1

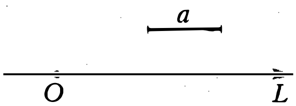


Рис. 2

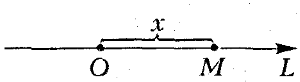


Рис. 3

Определение 2. Ось $\vec{L}$ с *точкой начала отсчета* O и *масштабным отрезком* a называется *координатной осью,* а число x, вычисляемое по указанному правилу, называется *координатой точки* M.

Обозначение: $M(x)$.

1.2. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости

Пусть П — произвольная плоскость. Возьмем на ней некоторую точку O и проведем через эту точку взаимно перпендикулярные прямые L_1 и L_2. Зададим на каждой из прямых L_1 и L_2 ориентацию и выберем единый масштабный отрезок a. Тогда эти прямые превратятся в координатные оси с общей точкой отсчета O (рис. 4).

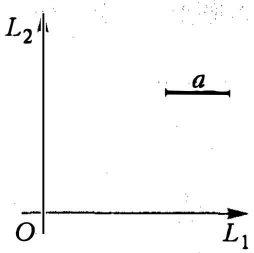


Рис. 4

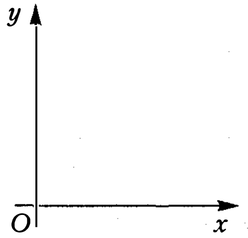


Рис. 5

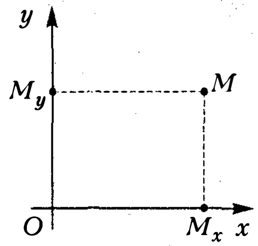


Рис. 6

Назовем одну из координатных осей *осью абсцисс* (*осью* Ox), другую — *осью ординат* (*осью* Oy) (рис. 5). Точка O называется *началом координат*.

Пусть M — произвольная точка плоскости П (рис. 6). Проведем через точку M прямые, перпендикулярные координатным осям, и поставим ей в соответствие упорядоченную пару чисел (x, y) по следующему правилу:

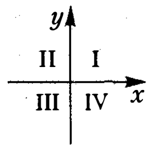
x — координата точки M_x на оси Ox,
y — координата точки M_y на оси Oy.

Числа x и y называются *прямоугольными декартовыми координатами* точки M; при этом x называется ее *абсциссой*, а y — *ординатой*.

Обозначение: $M(x, y)$.

Чтобы кратко охарактеризовать описанную конструкцию, говорят, что на плоскости П *задана прямоугольная декартова система координат* Oxy.

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами*. На рисунке и в таблице показано, как эти квадранты нумеруются (рис. 7).



	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Рис. 7

Замечание. Масштабные отрезки на координатных осях могут быть и разной длины. В этом случае координатная система называется просто *прямоугольной*.

1.3. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Возьмем в пространстве некоторую точку O и проведем через нее три взаимно перпендикулярные прямые L_1, L_2 и L_3. Выберем на каждой из прямых ориентацию и единый масштаб.

Прямые L_1, L_2 и L_3 превратятся в координатные оси с общей точкой отсчета O (рис. 8).

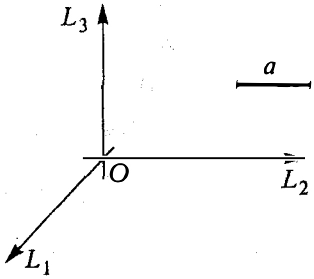


Рис. 8

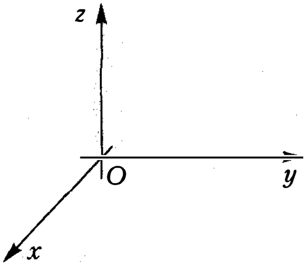


Рис. 9

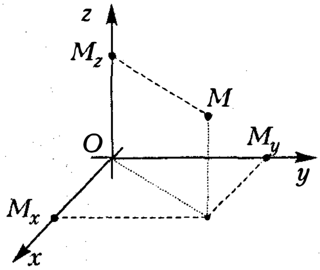


Рис. 10

Назовем одну из этих осей *осью абсцисс* (*осью* Ox), вторую — *осью ординат* (*осью* Oy) и третью — *осью аппликат* (*осью* Oz) (рис. 9). Точка O называется *началом координат*.

Пусть M — произвольная точка (рис. 10). Проведем через точку M плоскости, перпендикулярные координатным осям, и поставим ей в соответствие упорядоченную тройку чисел (x, y, z) по следующему правилу:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ — координата точки } M_x \text{ на оси } Ox, \\ y \text{ — координата точки } M_y \text{ на оси } Oy, \\ z \text{ — координата точки } M_z \text{ на оси } Oz. \end{array}}$$

Числа x, y и z называются *прямоугольными декартовыми координатами точки* M; при этом x называется *абсциссой* точки M, y — ее *ординатой*, а z — *аппликатой*.

Обозначение: $M(x, y, z)$.

Таким образом, в пространстве введена *прямоугольная декартова система координат*.

Определение. Плоскость, проходящая через любую пару координатных осей, называется *координатной плоскостью*.

Координатных плоскостей три: Oxy, Oyz и Oxz. Эти плоскости разбивают пространство на восемь частей — *октантов*.

1.4. Простейшие задачи аналитической геометрии

А. Расстояние между точками

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки на координатной оси. Тогда *расстояние* d между ними вычисляется по формуле

$$\boxed{d = d(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|.}$$

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy, то *расстояние* d между любыми двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по следующей формуле

$$\boxed{d = d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

◀ Рассмотрим прямоугольный треугольник $\Delta M M_1 M_2$ (рис. 11). По теореме Пифагора

$$|M_1M_2|^2 = |M_1M|^2 + |MM_2|^2.$$

Так как расстояние d между точками M_1 и M_2 равно длине отрезка M_1M_2, а $|M_1M| = |x_2 - x_1|$, $|MM_2| = |y_2 - y_1|$, то отсюда получаем, что

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

Замечая, что $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ и $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, и извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, приходим к требуемой формуле. ▶

Замечание. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве вычисляется по следующей формуле

$$\boxed{d = d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

(покажите это).

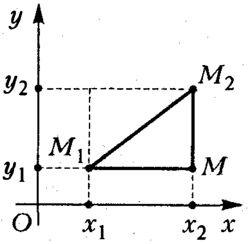


Рис. 11

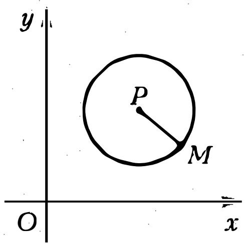


Рис. 12

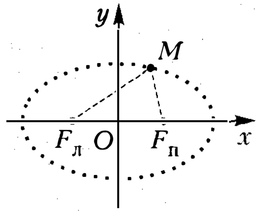


Рис. 13

Задача 1. Написать уравнение окружности радиуса r с центром в точке $P(a, b)$.

◀ Пусть $M(x, y)$ — точка окружности (рис. 12). Это означает, что $|MP| = r$. Заменим $|MP|$ его выражением

$$|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.}$$

Это есть каноническое *уравнение окружности* радиуса r с центром в точке $P(a, b)$. ▶

Задача 2. Пусть $F_л(-c, 0)$ и $F_п(c, 0)$ — фиксированные точки плоскости, a — заданное число ($a > c \geqslant 0$). Найти условие, которому удовлетворяют координаты x и y точки M, обладающей следующим свойством: сумма расстояний от точки M до $F_л$ и до $F_п$ равна $2a$.

◀ Вычислим расстояния между точками M и $F_л$ и между точками M и $F_п$. Имеем

$$|MF_л| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_п| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

(рис. 13). Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Перенесем второй корень в правую часть

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возводя обе части в квадрат, после простых преобразований получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

С целью дальнейших упрощений вновь возводим обе части в квадрат. В результате приходим к равенству

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Полагая $b^2 = a^2 - c^2$ и деля обе части последнего соотношения на a^2b^2, получаем *уравнение эллипса*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

(см. главу III). ▶

Б. Деление отрезка в данном отношении

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — различные точки плоскости. Пусть, далее, точка $M(x, y)$ лежит на отрезке M_1M_2 и делит его в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, т. е.

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Требуется выразить координаты x и y этой точки через координаты концов отрезка M_1M_2 и числа λ_1 и λ_2.

◀ Предположим сначала, что отрезок M_1M_2 не параллелен оси ординат Oy (рис. 14). Тогда

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|M_{1x}M_x|}{|M_xM_{2x}|}.$$

Так как

$|M_{1x}M_x| = |x_1 - x|$ и $|M_xM_{2x}| = |x - x_2|$,

то из последних двух соотношений получаем, что

$$\frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

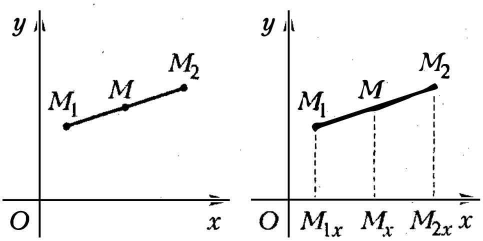


Рис. 14

Точка M лежит между точками M_1 и M_2, поэтому либо $x_1 < x < x_2$, либо $x_1 > x > x_2$. В любом из этих случаев разности $x_1 - x$ и $x - x_2$ имеют одинаковые знаки. Это позволяет переписать последнее равенство в следующей форме

$$\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (*)$$

В случае, когда отрезок M_1M_2 параллелен оси Oy, $x_1 = x_2 = x$. Заметим, что тот же результат дает формула $(*)$, если положить в ней $x_1 = x_2$.

Справедливость формулы

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

доказывается аналогичным рассуждением. ▶

Задача 3. Найти координаты центра тяжести M треугольника с вершинами в точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$.

◀ Воспользуемся тем, что центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан. Точка M делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины (рис. 15). Тем самым, ее координаты x и y можно найти по формулам

$$x = \frac{1 \cdot x_3 + 2 \cdot x'}{2 + 1}, \quad y = \frac{1 \cdot y_3 + 2 \cdot y'}{2 + 1},$$

где x' и y' — координаты второго конца M' медианы M_3M'. Так как M' — середина отрезка M_1M_2, то

$$x' = \frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \quad y' = \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}.$$

Полученные соотношения позволяют выразить координаты x и y центра тяжести M треугольника $\Delta M_1M_2M_3$ через координаты его вершин:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. ▶$$

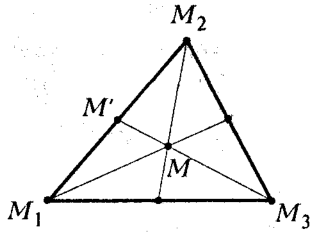


Рис. 15

Замечание. Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, то ее координаты вычисляются по формулам

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

§ 2. Полярные координаты

Предположим, что задана точка O, ось $\overrightarrow{L}$, содержащая точку O, и масштабный отрезок (эталон длины) (рис. 16).

Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от точки O (рис. 17). Ее положение на плоскости однозначно определяется двумя числами: расстоянием r между точками O и M и отсчитываемым против часовой стрелки углом φ между положительным лучом оси $\overrightarrow{L}$ и лучом OM с началом в точке O. Пару (r, φ) называют *полярными координатами* точки M; r — *полярный радиус* точки M, φ — *полярный угол*. Точка O называется *полюсом*, $\overrightarrow{L}$ — *полярной осью*.

Ясно, что $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Если точка M совпадает с полюсом, то считаем $r = 0$; полярный угол φ в этом случае не определен.

Таким образом, на плоскости можно задать еще одну координатную систему — *полярную*.

Прямоугольную декартову систему координат Oxy будем называть *согласованной* с заданной полярной, если начало координат $O(0, 0)$ — полюс, ось Ox — полярная ось, а ось Oy составляет с осью Ox угол, равный $+\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}}$$

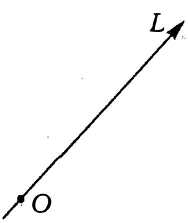


Рис. 16

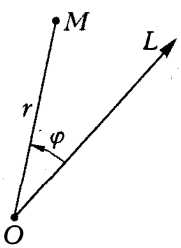


Рис. 17

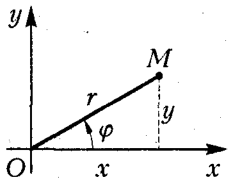


Рис. 18

(рис. 18). В свою очередь

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.}$$

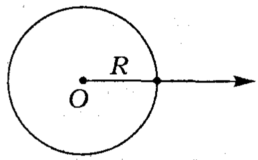


Рис. 19

Пример. Пусть $R > 0$ — заданное число. Множество точек плоскости, полярные координаты (r, φ) которых удовлетворяют равенству

$$r = R,$$

является окружностью радиуса R с центром в полюсе (рис. 19). ▶

§ 3. Определители 2-го и 3-го порядков

Пусть имеем четыре числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (читается — «a-один-один», «a-один-два», «a-два-один», «a-два-два»).

Определителем второго порядка называется число

$$\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

Обозначение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются *элементами определителя*; пары элементов a_{11}, a_{12} и a_{21}, a_{22} образуют *строки* определителя, а пары элементов a_{11}, a_{21} и a_{12}, a_{22} — его *столбцы*; пара элементов a_{11}, a_{22}, образует *главную диагональ* определителя, а пара a_{12}, a_{21} — *побочную диагональ*.

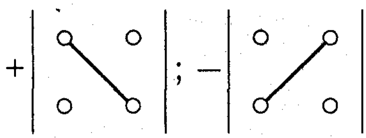


Рис. 20

Тем самым, для вычисления определителя второго порядка нужно из произведения $a_{11}a_{22}$ элементов главной диагонали вычесть произведение $a_{12}a_{21}$ элементов его побочной диагонали (рис. 20).

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

◀ По правилу (1) имеем

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2. \ ▶$$

С определителями второго порядка мы встречаемся уже при отыскании решения системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Решая эту систему методом исключения неизвестных при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

находим

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Пусть теперь даны девять чисел a_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$.

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по следующему правилу:

$$\boxed{\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.} \qquad (2)$$

Первый индекс i элемента a_{ij} указывает номер строки, в которой он расположен, а второй индекс j — номер столбца.

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя Δ, элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} — побочную диагональ.

Чтобы разобраться с распределением знаков в правой части формулы (2), обратим внимание на следующее: произведение элементов $a_{11}a_{22}a_{33}$ главной диагонали входит в формулу со своим знаком, также как и произведение $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$ элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали (рис. 21); с другой стороны, произведение $a_{13}a_{22}a_{31}$ элементов побочной диагонали, а также произведения $a_{21}a_{12}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$ — с противоположным знаком (рис. 22). Такой подход к вычислению определителя третьего порядка называется *правилом треугольника*.

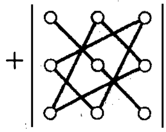


Рис. 21

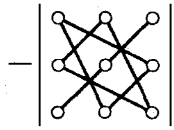


Рис. 22

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

◀ Применяя правило треугольника, находим

$$\Delta = 1\cdot4\cdot6 + (-1)\cdot2\cdot(-1) + 0\cdot3\cdot3 - (-1)\cdot3\cdot4 - 0\cdot2\cdot6 - 1\cdot(-1)\cdot3 =$$
$$= 24 + 2 + 0 + 12 - 0 + 3 = 41. \ ▶$$

Установим некоторые свойства определителей 3-го порядка, легко проверяемые при помощи разложений (1) и (2).

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить его столбцами с теми же номерами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. При перестановке любых двух строк (или любых двух столбцов) определителя он изменяет свой знак на противоположный.

Свойство 3. Общий множитель всех элементов одной строки (или одного столбца) определителя можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Следующие три свойства определителя вытекают из свойств 1–3. Впрочем, в их справедливости можно убедиться и непосредственно, пользуясь формулами (1) и (2).

Свойство 4. Если определитель имеет *две равные строки* (*или два равных столбца*), то он равен нулю.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 6. Если соответствующие элементы двух строк (или двух столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю.

Укажем еще один способ вычисления определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания элементов i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Например, минором элемента a_{23} будет определитель

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со своим знаком, если сумма $i + j$ номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}, есть число четное, и с противоположным знаком, если это число нечетное:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

Теорема. *Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (любого его столбца) на их алгебраические дополнения, так что имеют место следующие равенства*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{3}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

◀ Покажем, например, что

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Пользуясь формулой (2), получаем, что

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \ ▶$$

Правило (3) называется *разложением определителя по элементам i-й строки*, а правило (4) — *разложением определителя по элементам j-го столбца*.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

◀ Раскладывая определитель по элементам 1-ой строки, получим

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (24 + 3) + 0 + (2 + 12) = 41. \ ▶$$

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Понятия связанного и свободного векторов

Рассмотрим две точки A и B. По соединяющему их отрезку можно перемещаться в любом из двух противоположных направлений. Если считать, например, точку A начальной, а точку B конечной, то тогда получаем *направленный отрезок* AB, в другом случае — направленный отрезок BA. Направленные отрезки часто называют *связанными* или *закрепленными векторами*. На чертеже заданное направление указывается стрелкой (рис. 1).

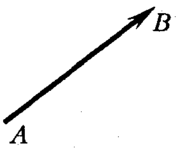


Рис. 1

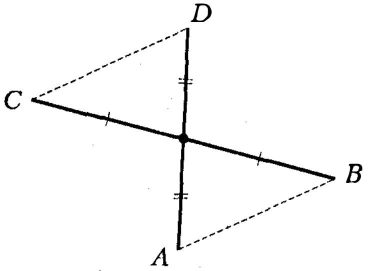


Рис. 2

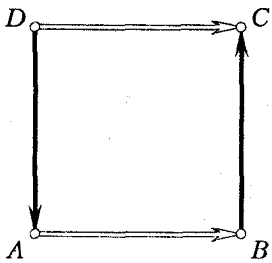


Рис. 3

В случае, когда начальная и конечная точки совпадают, $A = B$, связанный вектор называется *нулевым*.

Определение. Будем говорить, что связанные векторы AB и CD *равны*, если середины отрезков AD и BC совпадают (рис. 2).

Обозначение: $AB = CD$.

Заметим, что в случае, когда точки A, B, C и D не лежат на одной прямой, это равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Ясно, что равные связанные векторы имеют равные длины.

Пример. Рассмотрим квадрат и выберем векторы, как указано на рис. 3. Векторы AB и DC равны, а векторы BC и DA не равны. ▶

Укажем некоторые свойства равных связанных векторов:

1. Каждый связанный вектор равен самому себе: $AB = AB$.
2. Если $AB = CD$, то и $CD = AB$.

3. Если $AB = CD$ и $CD = EF$, то $AB = EF$ (рис. 4).

Пусть AB — заданный связанный вектор и C — произвольная точка. Ясно, что, опираясь на определение, всегда можно построить точку D так, чтобы

$$CD = AB.$$

Тем самым, от каждой точки можно *отложить* связанный вектор, равный исходному (рис. 5).

Мы будем рассматривать *свободные векторы*, т. е. такие векторы, начальную точку которых можно выбирать произвольно, или, что то же самое, которые можно произвольно переносить параллельно самим себе. Ясно, что свободный вектор $\overrightarrow{AB}$ однозначно определяется заданием связанного вектора AB.

Если в качестве начальных выбирать лишь те точки, которые лежат на прямой, определяемой заданным (ненулевым) связанным вектором, то мы приходим к понятию *скользящего вектора* (рис. 6).

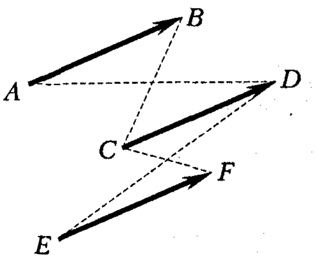


Рис. 4

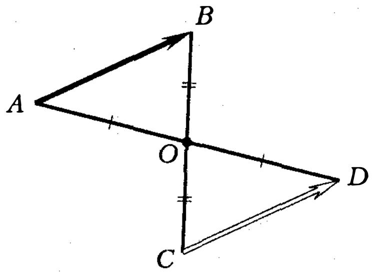


Рис. 5

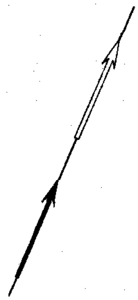


Рис. 6

Связанные и скользящие векторы широко используются в теоретической механике.

Для обозначения свободных векторов будем пользоваться полужирными строчными латинскими буквами — $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... ; нулевой вектор обозначается через $\mathbf{0}$.

Пусть заданы вектор $\mathbf{a}$ и точка A. Существует ровно одна точка B, для которой

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$$

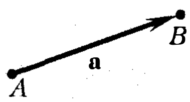


Рис. 7

(рис. 7). Операция построения связанного вектора AB, для которого выполняется это равенство, называется *откладыванием* свободного вектора $\mathbf{a}$ от точки A.

Заметим, что связанные векторы, получаемые в результате описанной операции откладывания, равны между собой и, значит, имеют одинаковую длину. Это позволяет ввести *длину свободного вектора* $\mathbf{a}$, которую мы будем обозначать символом $|\mathbf{a}|$. Длина нулевого вектора равна нулю. Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$; обратное неверно.

§2. Линейные операции над векторами

2.1. Сложение векторов

Пусть заданы два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Возьмем какую-нибудь точку O и отложим от нее вектор $\mathbf{a}$: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. От полученной точки A отложим вектор $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Полученный в результате вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается через $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (рис. 8). Этот способ построения суммы векторов называется *правилом треугольника.*

Нетрудно заметить, что сложение векторов *коммутативно*, т. е. для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}}$$

(рис. 9).

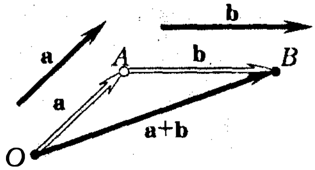


Рис. 8

Если отложить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей точки O и построить на них как на сторонах параллелограмм, то вектор $\overrightarrow{OB}$, идущий из общего начала O в противоположную вершину параллелограмма, будет их суммой $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (или $\mathbf{b}+\mathbf{a}$) (рис. 10). Этот способ построения суммы векторов называется *правилом параллелограмма.*

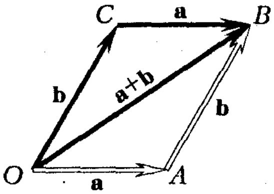


Рис. 9

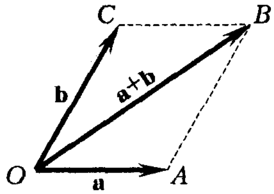


Рис. 10

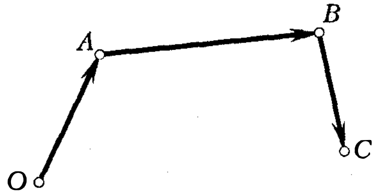


Рис. 11

Пусть заданы три вектора, например, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Отложим от произвольной точки O вектор $\mathbf{a}$: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; от полученной точки A отложим вектор $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$; от точки B — вектор $\mathbf{c}$: $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$ (рис. 11). По определению суммы $\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ (рис. 12). С другой стороны, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ и, значит, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (рис. 13). Тем самым, для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выполняется равенство

$$\boxed{(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),}$$

т. е. сложение векторов *ассоциативно.* Опуская скобки, можно говорить о сумме трех векторов и записывать ее так:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

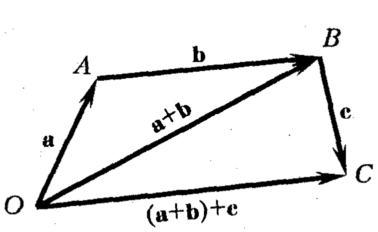


Рис. 12

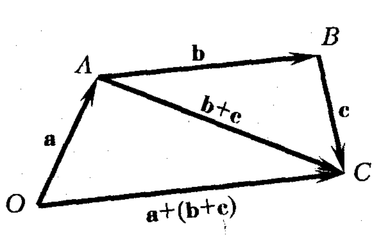


Рис. 13

Аналогично определяется сумма любого числа векторов: это есть вектор, который *замыкает* ломаную, построенную из заданных векторов. На рис. 14 показано, как построить сумму семи векторов:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_6+\mathbf{a}_7.$$

Приведенный способ сложения произвольного числа векторов называется *правилом замыкающего ломаную.*

Пример. Найти сумму векторов, идущих из центра правильного шестиугольника в его вершины.

◀ По правилу замыкающего ломаную получаем

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 = \mathbf{0}$$

(рис. 15). ▶

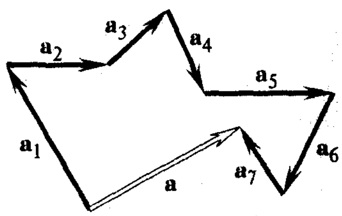


Рис. 14

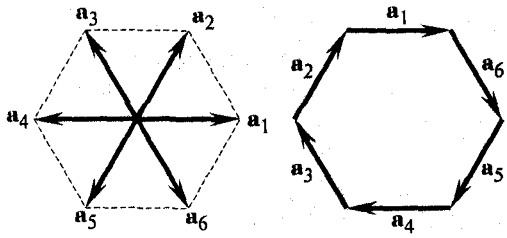


Рис. 15

2.2. Умножение вектора на число

Определение. Свободные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными*, если определяющие их связанные векторы лежат на параллельных или на совпадающих прямых (рис. 16).

Обозначение: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

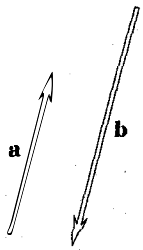


Рис. 16

Замечание. Из определения следует, что если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нулевой, то они коллинеарны.

Если отложить коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей точки O, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, то точки O, A и B будут лежать на одной прямой. При этом возможны два случая: точки A и B располагаются на этой прямой: 1) по одну сторону от точки O, 2) по разные стороны (рис. 17). В первом случае векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *одинаково направленными*, а во втором — *противоположно направленными.*

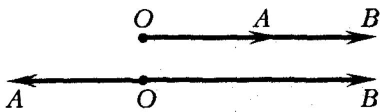


Рис. 17

Если векторы имеют равные длины и одинаково направлены, то они равны.

Пусть $\mathbf{a}$ — вектор, λ — вещественное число.

Определение. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* λ называется вектор $\mathbf{b}$ такой, что

1) $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;

2) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаково (соответственно, противоположно) направлены, если $\lambda > 0$ (соответственно, $\lambda < 0$).

Обозначение: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

При $\lambda = 0$ положим $\lambda\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$.

Таким образом, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ коллинеарны по определению. Верно и обратное: если векторы $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то можно найти число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Укажем основные свойства этой операции умножения вектора на число:

$$\boxed{\begin{aligned}&1.\ (\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a},\\ &2.\ \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a},\\ &3.\ \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\end{aligned}}$$

(здесь λ и μ — любые действительные числа, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные векторы).

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором,* или *ортом,* и обозначается $\mathbf{a}^0$ (читается: $\mathbf{a}$ с нуликом), $|\mathbf{a}^0| = 1$.

Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то вектор

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

есть единичный вектор (орт) направления вектора $\mathbf{a}$ (рис. 18).

Рис. 18

§ 3. Координаты и компоненты вектора

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат. Обозначим через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единичные векторы (орты) положительных направлений осей Ox, Oy, Oz (рис. 19). Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a}$, начало которого лежит в начале координат O, а конец — в точке A. Проведем через точку A плоскости, перпендикулярные осям Ox, Oy и Oz. Эти плоскости пересекут координатные оси в точках P, Q и R соответственно. Из рис. 20 видно, что

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}. \tag{1}$$

Векторы $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ коллинеарны соответственно единичным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$,

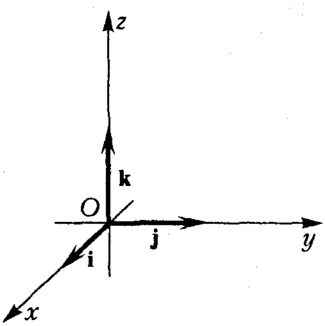


Рис. 19

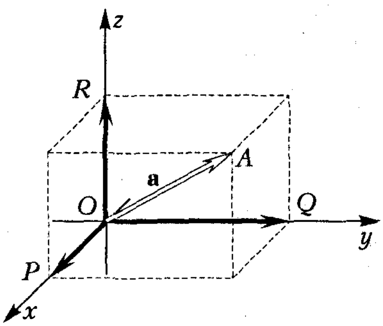


Рис. 20

поэтому найдутся числа x, y, z такие, что

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\boxed{\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.} \tag{2}$$

Формула (2) называется *разложением вектора* $\mathbf{a}$ *по векторам* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Указанным способом всякий вектор может быть разложен по векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ попарно ортогональны, и их длины равны единице. Тройку $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ называют *ортонормированным* (*координатным*) *базисом* (*ортобазисом*).

Можно показать, что для каждого вектора $\mathbf{a}$ разложение (2) по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единственно, т. е. коэффициенты x, y, z в разложении вектора $\mathbf{a}$ по векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ определены однозначно. Эти коэффициенты называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$. Они совпадают с координатами x, y, z точки A — конца вектора $\mathbf{a}$. Мы пишем в этом случае

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\}.$$

Эта запись означает, что свободный вектор $\mathbf{a}$ однозначно задается *упорядоченной* тройкой своих координат. Векторы $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$, сумма которых равна вектору $\mathbf{a}$, называются *компонентами вектора* $\mathbf{a}$.

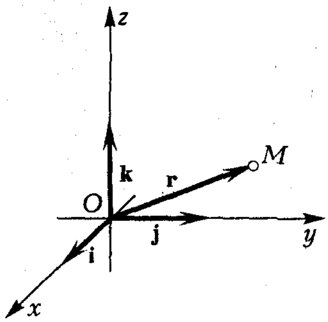


Рис. 21

Из вышеизложенного следует, что два вектора $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их координаты, т. е.

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}}$$

Радиус-вектором точки $M(x, y, z)$ называется вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, идущий из начала координат O в точку M (рис. 21).

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть имеем два вектора $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, так что $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. На основании правила сложения векторов имеем

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k},$$

или, что то же,

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}}$$

— при сложении векторов их координаты попарно складываются.

Аналогично получаем

$$\boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}.}$$

Далее,

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda x_1\mathbf{i} + \lambda y_1\mathbf{j} + \lambda z_1\mathbf{k},$$

или, что то же,

$$\boxed{\lambda\mathbf{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}}$$

— при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пусть $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ — коллинеарные векторы, причем $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, т. е.

$$x_1 = \mu x_2, \quad y_1 = \mu y_2, \quad z_1 = \mu z_2,$$

или

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.} \tag{3}$$

Обратно, если выполняются соотношения (3), то $\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Таким образом, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пример. Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, начало которого находится в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а конец — в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

◀ Из рис. 22 видно, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы точек M_1 и M_2 соответственно. Поэтому

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

— координаты вектора M_1M_2 равны разностям одноименных координат конечной M_2 и начальной M_1 точек этого вектора. ▶

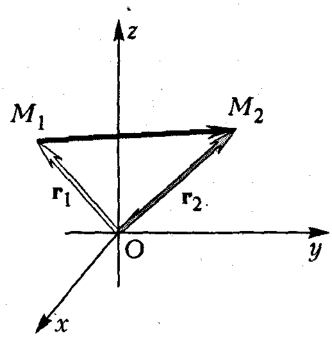


Рис. 22

§ 4. Проекция вектора на ось

Рассмотрим на оси l ненулевой направленный отрезок AB (рис. 23). *Величиной* направленного отрезка AB на оси l называется число, равное длине отрезка AB, взятой со знаком «+», если направление отрезка AB совпадает с направлением оси l, и со знаком «−», если эти направления противоположны.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$, определяемый связанным вектором AB. Опуская из его начала и конца перпендикуляры на заданную ось l, построим на ней направленный отрезок CD (рис. 24).

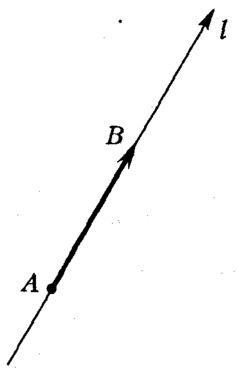


Рис. 23

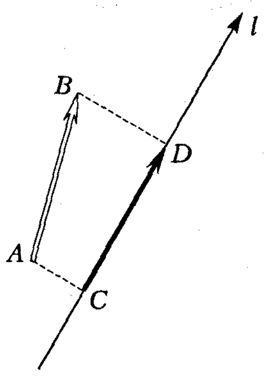


Рис. 24

Определение. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l называется величина направленного отрезка CD, построенного указанным выше способом.

Обозначение: $\mathrm{pr}_l\,\overrightarrow{AB} = |CD|$.

4.1. Основные свойства проекций

1. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на какую-либо ось l равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и этим вектором (рис. 25)

$$\boxed{\mathrm{pr}_l\,\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\alpha.}$$

2. Проекция суммы векторов на какую-либо ось l равна сумме проекций векторов на ту же ось.

Например,

$$\mathrm{pr}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathrm{pr}_l\,\mathbf{a} + \mathrm{pr}_l\,\mathbf{b} + \mathrm{pr}_l\,\mathbf{c}$$

(рис. 26).

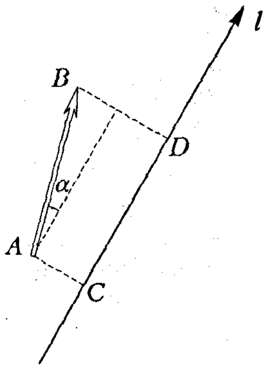


Рис. 25

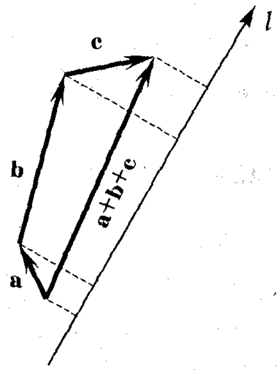


Рис. 26

§ 5. Скалярное произведение векторов

Пусть имеем два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Определение. *Скалярным произведением* вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется число, обозначаемое символом $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и определяемое равенством

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}),} \qquad (1)$$

где φ, или в иной записи $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$, есть угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 27 а).

Заметив, что $|\mathbf{b}|\cos\varphi$ есть проекция вектора $\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{a}$, можем написать

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$$

(рис. 27 б) и, аналогично, (2)

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cdot\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}}$$

(рис. 27 в), т. е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию на него другого вектора.

В случае, если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ — нулевой, будем считать, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

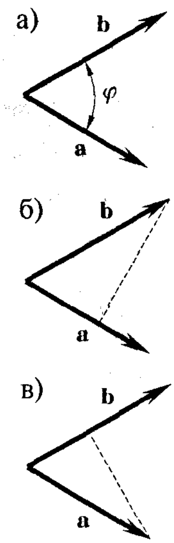


Рис. 27

5.1. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обращается в нуль в том и только в том случае, когда по крайней мере один из перемножаемых векторов является нулевым или когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

◀ Это следует из формулы (1), определяющей скалярное произведение. ▶

Поскольку направление нулевого вектора не определено, мы можем его считать ортогональным любому вектору. Поэтому указанное свойство скалярного произведения можно сформулировать так:

$$\boxed{\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.}$$

2. Скалярное произведение коммутативно:

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}).}$$

◀ Справедливость утверждения вытекает из формулы (1), если учесть четность функции $\cos\varphi$: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$. ▶

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно сложения:

$$\boxed{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}).}$$

◀ Действительно,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{c}| \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \cdot (\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{a} + \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b}) =$$
$$= |\mathbf{c}| \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \ ▶$$

4. Числовой множитель λ можно выносить за знак скалярного произведения

$$\boxed{(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}).}$$

◀ Действительно, пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}});$$

$$(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \lambda|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}),$$

поскольку при $\lambda > 0$ углы $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ и $(\widehat{\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}})$ равны (рис. 28).

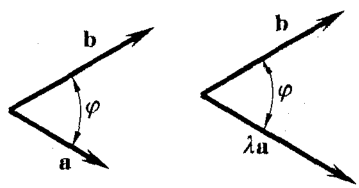


Рис. 28

Аналогично рассматривается случай $\lambda < 0$.

При $\lambda = 0$ свойство 4 очевидно. ▶

Замечание. В общем случае $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

5.2. Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},\ x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).$$

Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения, находим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + y_1x_2(\mathbf{j}, \mathbf{i}) + z_1x_2(\mathbf{k}, \mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \\ + y_1y_2(\mathbf{j}, \mathbf{j}) + z_1y_2(\mathbf{k}, \mathbf{j}) + x_1z_2(\mathbf{i}, \mathbf{k}) + y_1z_2(\mathbf{j}, \mathbf{k}) + z_1z_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}).$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = (\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1,$$

получаем

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.} \tag{4}$$

То есть, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

◀ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20.$ ▶

Скалярное произведение вектора на себя называется *скалярным квадратом*:

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2.}$$

Применяя формулу (4) при $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, найдем

$$\mathbf{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}|^2,$$

так что из (5) следует, что

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \tag{6}$$

— в ортонормированном базисе длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

5.3. Косинус угла между векторами. Направляющие косинусы

Согласно определению

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Из этой формулы получаем

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}} \tag{7}$$

(предполагается, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые).

Пусть $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда формула (7) примет следующий вид

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.} \tag{8}$$

Пример. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = \{2, -4, 4,\}$ и $\mathbf{b} = \{-3, 2, 6\}$.

◀ Пользуясь формулой (8), находим

$$\cos\varphi = \frac{-6 - 8 + 24}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{9+4+36}} = \frac{5}{21}. \ ▶$$

Пусть $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, т.е. $\mathbf{b} = \{1, 0, 0\}$. Тогда для всякого вектора $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \neq \mathbf{0}$ имеем

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{i})}{|\mathbf{a}|}}$$

или, в координатной записи,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},} \tag{9}$$

где α есть угол, образованный вектором $\mathbf{a}$ с осью Ox.

Аналогично получаем формулы

$$\cos\beta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{j})}{|\mathbf{a}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \tag{10}$$

$$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{k})}{|\mathbf{a}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{11}$$

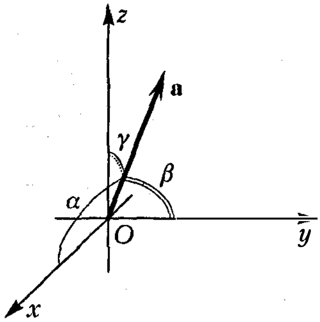


Рис. 29

Формулы (9)–(11) определяют *направляющие косинусы* вектора $\mathbf{a}$, т.е. косинусы углов, образуемых вектором $\mathbf{a}$ с осями координат (рис. 29).

Пример. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{n}^0$.

◀ По условию $|\mathbf{n}^0| = 1$. Пусть $\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Тогда

$$(\mathbf{n}^0, \mathbf{i}) = x = |\mathbf{n}^0|\cdot|\mathbf{i}|\cdot\cos(\widehat{\mathbf{n}^0, \mathbf{i}}) = \cos\alpha,$$

$$(\mathbf{n}^0, \mathbf{j}) = y = \cos\beta,$$

$$(\mathbf{n}^0, \mathbf{k}) = z = \cos\gamma.$$

Таким образом, координатами единичного вектора являются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат:

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma.$$

Отсюда получаем

$$(\mathbf{n}^0)^2 = (\mathbf{n}^0, \mathbf{n}^0) = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma. \ ▶$$

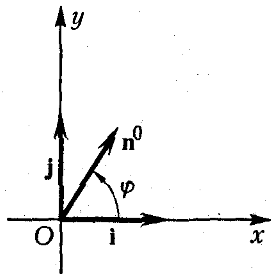


Рис. 30

Пример. Пусть единичный вектор $\mathbf{n}^0$ ортогонален оси z:

$$\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(рис. 30). Тогда его координаты x и y соответственно равны

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Тем самым,

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi. \ ▶$$

§ 6. Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением* вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), такой, что

1) длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равна $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 31);

2) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. перпендикулярен плоскости этих векторов;

3) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ направлен так, что из конца этого вектора кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ виден происходящим против часовой стрелки (рис. 32).

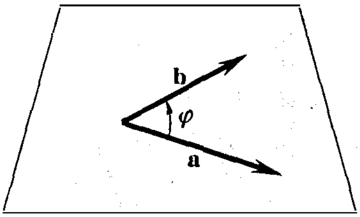


Рис. 31

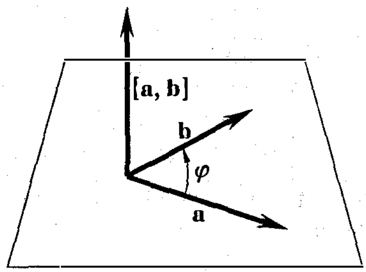


Рис. 32

Иными словами, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ образуют *правую тройку* векторов, т. е. расположены так, как большой, указательный и средний пальцы правой руки.

В случае, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, будем считать, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

По определению длина векторного произведения

$$\boxed{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi} \tag{1}$$

численно равна площади $S_{\square}$ параллелограмма (рис. 33), построенного на перемножаемых векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как на сторонах:

$$\boxed{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\square}.}$$

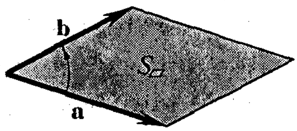


Рис. 33

6.1. Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда по крайней мере один из перемножаемых векторов является нулевым или когда эти векторы коллинеарны (если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то угол между ними равен либо 0, либо π).

◀ Это легко получить из того, что $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$. ▶

Если считать нулевой вектор коллинеарным любому вектору, то условие коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно выразить так

$$\boxed{\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}.}$$

2. Векторное произведение антикоммутативно, т. е. всегда

$$\boxed{[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}].} \tag{2}$$

◀ В самом деле, векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ имеют одинаковую длину и коллинеарны. Направления же этих векторов противоположны, так как из конца вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ будет виден происходящим против часовой стрелки, а из конца вектора $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ — по часовой стрелке (рис. 34). ▶

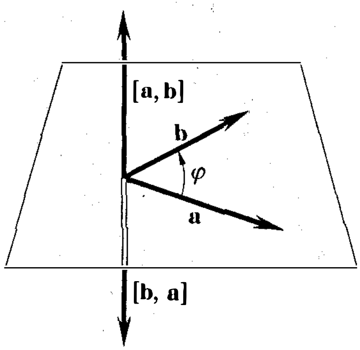


Рис. 34

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством по отношению к сложению

$$\boxed{[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}].}$$

4. Числовой множитель λ можно выносить за знак векторного произведения

$$\boxed{[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}].}$$

6.2. Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Пользуясь распределительным свойством векторного произведения, находим

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] + \\ &= x_1x_2[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \\ &\quad + y_1x_2[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + y_1z_2[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\ &\quad + z_1x_2[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k}, \mathbf{k}].\end{aligned} \tag{3}$$

Выпишем векторные произведения координатных ортов (рис. 35):

$$\boxed{[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = 0,}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll}[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}, & [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, & [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}, \\ [\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}, & [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}, & [\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j}.\end{array}}$$

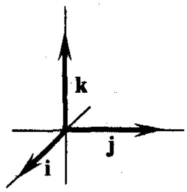


Рис. 35

Поэтому для векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ получаем из формулы (3) следующее выражение

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} = \\ &= \mathbf{i}(y_1z_2 - y_2z_1) + \mathbf{j}(x_2z_1 - x_1z_2) + \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1).\end{aligned} \tag{4}$$

Формулу (4) можно записать в символической, легко запоминающейся форме, если воспользоваться определителем 3-го порядка:

$$\boxed{[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.} \tag{5}$$

Разлагая этот определитель по элементам 1-й строки, получим (4).

Примеры.

1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

◀ Искомая площадь $S_{\square} = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$. Поэтому находим

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot (-1) + \mathbf{k} \cdot (-1) = -\mathbf{j} + \mathbf{k};$$

откуда

$$S_{\square} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. ▶$$

2. Найти площадь треугольника OAB (рис. 36).

◀ Ясно, что площадь $S_{\triangle}$ треугольника OAB равна половине площади S параллелограмма $OACB$. Вычисляя векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ векторов $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, получаем

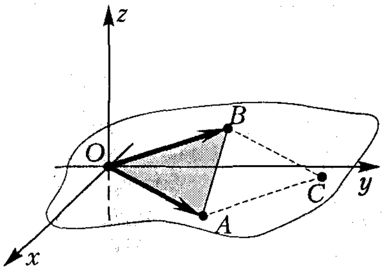


Рис. 36

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Отсюда

$$S_{\square} = |x_1y_2 - x_2y_1| \quad \text{и} \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|. ▶$$

Замечание. Векторное произведение не ассоциативно, т. е. равенство $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ в общем случае неверно. Например, при $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j}$ имеем

$$[[\mathbf{i}, \mathbf{j}], \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}, \quad [\mathbf{i}, [\mathbf{j}, \mathbf{j}]] = [\mathbf{i}, \mathbf{0}] = \mathbf{0}.$$

§ 7. Смешанное произведение векторов

Пусть имеем три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Перемножим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторно. В результате получим вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Умножим его скалярно на вектор $\mathbf{c}$:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Число $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$ называется *смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и обозначается символом $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

7.1. Геометрический смысл смешанного произведения

Отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от общей точки O (рис. 37). Если все четыре точки O, A, B, C лежат в одной плоскости (векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называются в этом случае *компланарными*), то смешанное произведение $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$. Это следует из того, что вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а значит, и вектору $\mathbf{c}$.

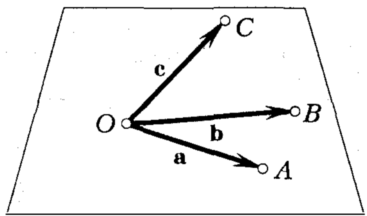


Рис. 37

Если же точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости (векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ некомпланарны), построим на ребрах OA, OB и OC параллелепипед (рис. 38 а). По определению векторного произведения имеем

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = S_{\square}\mathbf{c},$$

где $S_{\square}$ — площадь параллелограмма $OADB$, а $\mathbf{c}$ — единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и такой, что тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая, т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ расположены соответственно как большой, указательный и средний пальцы правой руки (рис. 38 б). Умножая обе части последнего равенства справа скалярно на вектор $\mathbf{c}$, получаем, что

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = S_{\square}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = S_{\square} \operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{c}.}$$

Число $\operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{c}$ равно высоте h построенного параллелепипеда, взятого со знаком «$+$», если угол φ между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}$ острый (тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая), и со знаком «$-$», если угол φ — тупой (тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — левая), так что

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pm S_{\square} h = \pm V.}$$

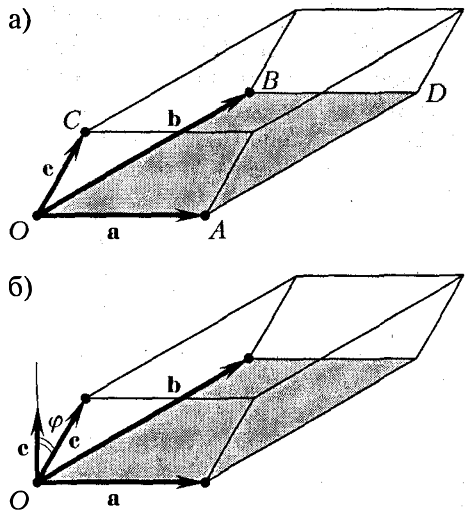


Рис. 38

Тем самым, смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, если тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая, и $-V$, если тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — левая.

Исходя из геометрического смысла смешанного произведения, можно заключить, что, перемножая те же векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в любом другом порядке, мы всегда будем получать либо $+V$, либо $-V$. Знак произведения будет зависеть лишь от того, какую тройку образуют перемножаемые векторы — правую или левую. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку, то правыми будут также тройки $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. В то же время все три тройки $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ — левые. Тем самым,

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).}$$

Еще раз подчеркнем, что смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны:

$$\boxed{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ компланарны}\} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.}$$

7.2. Смешанное произведение в координатах

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \qquad \mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \qquad \mathbf{c} = \{x_3, y_3, z_3\}.$$

Найдем выражение для их смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Имеем

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \mathbf{j}(x_2 z_1 - x_1 z_2) + \mathbf{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Откуда

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

— смешанное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, равно определителю третьего порядка, строки которого составлены соответственно из координат первого, второго и третьего из перемножаемых векторов.

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ запишется в следующем виде

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Проверить, компланарны ли векторы

$$\mathbf{a} = \{7, 4, 6\}, \quad \mathbf{b} = \{2, 1, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{19, 11, 17\}.$$

◀ Рассматриваемые векторы будут компланарны или некомпланарны в зависимости от того, будет равен нулю или нет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по элементам первой строки, получим

$\Delta = 7 \cdot 6 - 4 \cdot 15 + 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны. ▶

7.3. Двойное векторное произведение

Двойное векторное произведение $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ представляет собой вектор, перпендикулярный к векторам $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Поэтому он лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и может быть разложен по этим векторам. Можно показать, что справедлива формула

$$\boxed{[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).}$$

Упражнения

1. Три вектора $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ служат сторонами треугольника. Выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы, совпадающие с медианами AM, BN, CP треугольника.

2. Каким условием должны быть связаны векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, чтобы вектор $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ делил угол между ними пополам? Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

3. Вычислите длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, если известно, что $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{q}| = 3$ и $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

4. Обозначив через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ стороны ромба, выходящие из общей вершины, докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

5. Вычислите скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

6. Найдите единичный вектор $\mathbf{a}^0$, параллельный вектору $\mathbf{a} = \{6, 7, -6\}$.

7. Найдите проекцию вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ на вектор $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

8. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(-4,0,4)$, $B(-1,6,7)$, $C(1,10,9)$.

9. Найдите единичный вектор $\mathbf{p}^0$, одновременно перпендикулярный вектору $\mathbf{a} = \{3, 6, 8\}$ и оси Ox.

10. Вычислите синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ как на сторонах.

11. Вычислите высоту h параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Ответы

1. $\overrightarrow{AM} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ или $\overrightarrow{AM} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{BN} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$ или $\overrightarrow{BN} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{CP} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}$ или $\overrightarrow{CP} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$. **2.** $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$, т. к. диагональ параллелограмма делит его угол пополам лишь в случае, когда параллелограмм является ромбом. **3.** $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 15$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{593}$. **5.** -20. **6.** $\mathbf{a}^0 = \left\{\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right\}$ или $\mathbf{a}^0 = \left\{-\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right\}$. **7.** $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{4}{\sqrt{14}}$. **8.** $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$. **9.** $\mathbf{p}^0 = \pm\left\{0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$. **10.** $\sin\varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$. **11.** $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$.

Глава II

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Прямая на плоскости

1.1. Нормальное уравнение прямой. Общее уравнение прямой

Зафиксируем на плоскости некоторую точку O. Положение произвольно взятой прямой L на плоскости будет вполне определено, если задать следующие величины: расстояние до нее от начальной точки O, т. е. длину p отрезка OT перпендикуляра, опущенного из точки O на эту прямую, и единичный вектор $\mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$, перпендикулярный прямой L и направленный из начальной точки O к этой прямой (рис. 1).

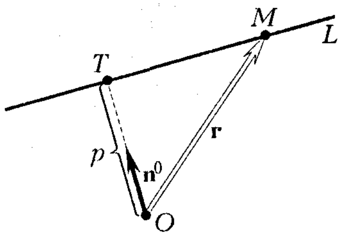


Рис. 1

Когда текущая точка M движется по прямой L, ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ меняется так, чтобы

$$\boxed{\operatorname{pr}_{\mathbf{n}^0} \overrightarrow{OM} = p.} \qquad (1)$$

Соотношение (1) выполняется для каждой точки прямой L и нарушается, если точка M лежит вне этой прямой. Тем самым, равенство (1) выражает свойство, присущее всем точкам прямой L и только им. Иными словами, оно является *уравнением* этой прямой.

Замечая, что

$$\operatorname{pr}_{\mathbf{n}^0} \overrightarrow{OM} = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0),$$

перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$\boxed{(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) - p = 0.} \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *нормальным* (*нормированным*) *уравнением прямой в векторной форме*. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки прямой называется *текущим радиусом-вектором прямой*.

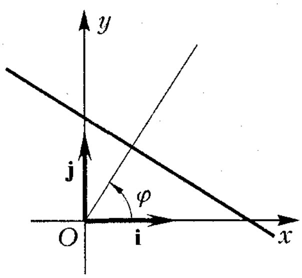


Рис. 2

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, поместив ее начало в точку O. Тогда векторы $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{r}$ можно записать так

$$\mathbf{n}^0 = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}, \qquad \mathbf{r} = \{x, y\}$$

(рис. 2), и уравнение (2) примет вид

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.} \qquad (3)$$

Это *нормальное уравнение прямой в координатной форме*.

Относительно переменных x и y уравнение (3) является уравнением первой степени. Тем самым, в прямоугольной декартовой системе координат всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y. Верно и обратное:

всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет на плоскости прямую.

◄ В самом деле, возьмем уравнение первой степени общего вида относительно переменных x и y

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0.} \tag{4}$$

Умножим каждый член уравнения (4) на один и тот же постоянный множитель μ,

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0, \tag{5}$$

и подберем множитель μ так, чтобы уравнение (5) оказалось нормальным уравнением. Для этого достаточно положить

$$\mu A = \cos\varphi, \quad \mu B = \sin\varphi, \quad \mu C = -p. \tag{6}$$

Из формул (6) находим

$$\mu^2(A^2 + B^2) = 1,$$

откуда

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

Из условия

$$\mu C = -p$$

вытекает, что в формуле (7) надо брать знак, противоположный знаку свободного члена C. Подставив полученное значение μ в равенства (6), найдем $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и p и, тем самым, преобразуем уравнение (4) к нормальному виду. Так как нормальное уравнение определяет прямую, то и уравнение (4) определяет прямую. ►

Множитель μ, выбираемый по указанному правилу, называют *нормирующим множителем* для данного уравнения прямой. Уравнение (4) называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Итак, всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет прямую как множество точек M плоскости, декартовы координаты x и y которых удовлетворяют этому уравнению.

Условимся называть *нормальным вектором* прямой L всякий ненулевой (не обязательно единичный) вектор, перпендикулярный этой прямой. Из приведенных выше рассуждений следует, что вектор

$$\mathbf{n} = \{A, B\}$$

будет нормальным вектором прямой, заданной уравнением (4).

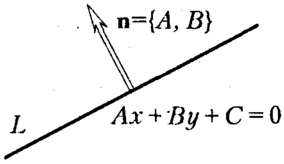


Рис. 3

Таким образом, коэффициенты A и B при текущих координатах x и y в общем уравнении прямой (4) имеют простой геометрический смысл: они являются координатами нормального вектора $\mathbf{n} = \{A, B\}$ этой прямой (рис. 3). Все другие нормальные векторы прямой можно получить, умножая вектор $\mathbf{n}$ на произвольное не равное нулю число.

Отметим два интересных частных случая.

а) Если $B \neq 0$, то, положив

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B},$$

получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$\boxed{y = kx + b}$$

(рис. 4).

б) Если $ABC \neq 0$, то, положив

$$a = -\frac{C}{A}, \qquad b = -\frac{C}{B},$$

получим *уравнение прямой в отрезках*

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

(рис. 5).

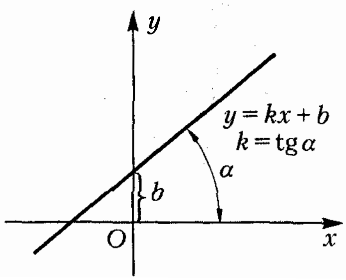


Рис. 4

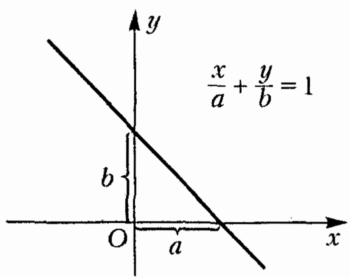


Рис. 5

1.2. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному направлению

Для того, чтобы найти уравнение прямой L, проходящей через точку M_0, заданную радиус-вектором

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\},$$

перпендикулярно вектору

$$\mathbf{n} = \{A, B\},$$

проведем радиус-вектор $\mathbf{r} = \{x, y\}$ в произвольную точку M этой прямой. Вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

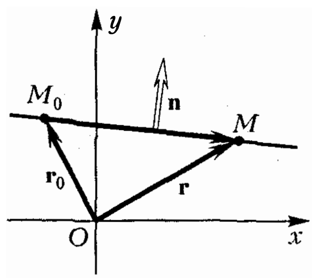


Рис. 6

лежит на прямой L и, значит, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$ (рис. 6). Поэтому их скалярное произведение равно нулю

$$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.} \tag{8}$$

Равенство (8) справедливо для всех точек M прямой L и нарушается, если точка M не принадлежит этой прямой. Тем самым, уравнение (8) является *векторным уравнением* искомой прямой.

Выражая скалярное произведение векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{n}$ через их координаты, получим уравнение этой же прямой L в координатной форме

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \tag{9}$$

1.3. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Расстоянием от точки M^* до прямой L называется длина отрезка M^*N перпендикуляра $L^\perp$, опущенного из точки M^* на эту прямую (рис. 7).

Пусть $M^*(x^*, y^*)$ — заданная точка и

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

— нормальное уравнение прямой L. Тогда расстояние от точки M^* до прямой L можно вычислить по формуле

$$\boxed{d = d(M^*, L) = \left|x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - p\right|.}$$

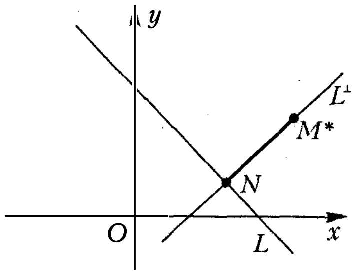


Рис. 7

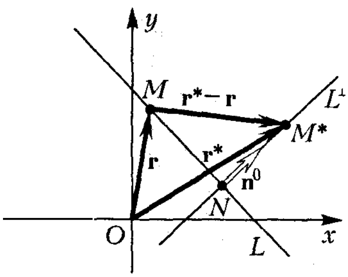


Рис. 8

◀ Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки M прямой L (рис. 8). Тогда выполнено равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = p.$$

Обозначим через $\mathbf{r}^*$ радиус-вектор точки M^*. Разность

$$(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p$$

равна проекции вектора $\mathbf{r}^* - \mathbf{r}$ на ось $L^\perp$, определяемую вектором $\mathbf{n}^0$:

$$(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p = (\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = \mathrm{pr}_{L^\perp}(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}).$$

Взяв разность $(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p$ по абсолютной величине, получим, что

$$|(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p| = d(M^*, L),$$

или, в координатах,

$$d(M^*, L) = |x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - p|. ▶$$

Если прямая L задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

то расстояние от точки M^* до этой прямой вычисляется по формуле

$$\boxed{d(M^*, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{10}$$

1.4. Угол между двумя прямыми

Пусть L_1 и L_2 — две прямые, заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_1^2 + B_1^2 > 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad A_2^2 + B_2^2 > 0$$

соответственно. Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между нормальными векторами $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ этих прямых (рис. 9). Отсюда вытекает, что

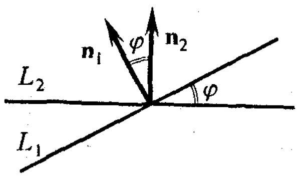


Рис. 9

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.}$$

1.5. Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости

В случае перпендикулярности прямых L_1 и L_2 их нормальные векторы также перпендикулярны, т. е. справедливо равенство

$$\boxed{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0, \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

— *условие перпендикулярности прямых.*

1.6. Условие параллельности двух прямых на плоскости

В случае параллельности прямых L_1 и L_2 их нормальные векторы коллинеарны, т. е. справедливо равенство

$$\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2.$$

Переходя к координатам этих векторов, получаем, что

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2,$$

или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$$

— *условие параллельности прямых.*

§ 2. Плоскость

К рассмотрению свойств плоскости можно подойти совершено аналогично.

2.1. Нормальное уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости

Зафиксируем в пространстве некоторую точку O. Положение плоскости Π в пространстве будет вполне определено, если задать следующие величины: расстояние до нее от начальной точки O, т. е. длину p отрезка OT перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость Π, и единичный вектор $\mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$, перпендикулярный плоскости Π и направленный из начальной точки O к этой плоскости (рис. 10).

Когда текущая точка M движется по плоскости П, ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ меняется так, что

$$\boxed{\operatorname{pr}_{\mathbf{n}^0} \overrightarrow{OM} = p.} \tag{1}$$

Соотношение (1) выполняется для каждой точки плоскости П и нарушается, если точка M лежит вне этой плоскости. Тем самым, равенство (1) выражает свойство, присущее всем точкам плоскости П и только им. Иными словами, (1) является *уравнением* этой *плоскости*. Замечая, что

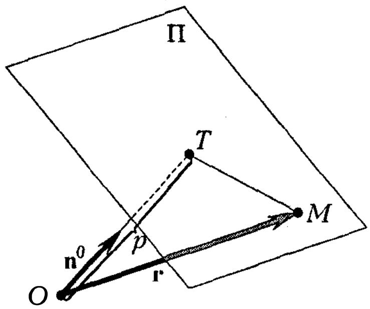


Рис. 10

$$\operatorname{pr}_{\mathbf{n}^0} \overrightarrow{OM} = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0),$$

перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$\boxed{(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) - p = 0.} \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *нормальным* (*нормированным*) *уравнением плоскости в векторной форме*. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки плоскости называется ее *текущим радиус-вектором*.

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат, поместив ее начало в точку O. Тогда векторы $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{r}$ можно записать так

$$\mathbf{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}, \qquad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

При этом уравнение (2) примет следующий вид

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \tag{3}$$

Это *нормальное уравнение плоскости в координатной форме.*

Особенности нормального уравнения плоскости (3):

1) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна 1,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

2) свободный член $(-p)$ неположителен.

Относительно переменных x, y и z уравнение (3) является уравнением первой степени, так что в прямоугольной декартовой системе координат всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно текущих координат x, y и z. Верно и обратное утверждение:

всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y и z определяет плоскость.

◀ В самом деле, возьмем уравнение первой степени общего вида относительно переменных x, y и z

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.} \tag{4}$$

Умножим каждый член уравнения (4) на один и тот же постоянный множитель μ,

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0, \tag{5}$$

и подберем его так, чтобы уравнение (5) оказалось нормальным уравнением. Для этого достаточно положить

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p. \tag{6}$$

Из формул (6) находим

$$\mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

откуда

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

Из условия

$$\mu D = -p \leqslant 0$$

вытекает, что в формуле (7) надо брать знак, противоположный знаку свободного члена D. Подставив полученное значение μ в равенство (6), найдем $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p и, тем самым, преобразуем уравнение (4) к нормальному виду. Так как нормальное уравнение определяет плоскость, то и уравнение (4) также определяет плоскость. ▶

Множитель μ, выбираемый по указанному правилу, называют ***нормирующим множителем*** для данного уравнения плоскости. Уравнение (4) называется ***общим уравнением плоскости***.

Итак, всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y и z определяет плоскость как множество точек M пространства, декартовы координаты x, y и z которых удовлетворяют этому уравнению.

Условимся называть всякий ненулевой (не обязательно единичный) вектор, перпендикулярный плоскости П, ***нормальным вектором*** этой плоскости. Из приведенных выше рассуждений следует, что вектор

$$\mathbf{n} = \{A, B, C\}$$

будет нормальным вектором прямой, заданной уравнением (4). Таким образом, коэффициенты A, B и C при текущих координатах x, y и z в общем уравнении плоскости (4) имеют простой геометрический смысл: они являются координатами нормального вектора $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ этой плоскости (рис. 11). Все другие нормальные векторы плоскости можно получить, умножая вектор $\mathbf{n}$ на произвольное не равное нулю число.

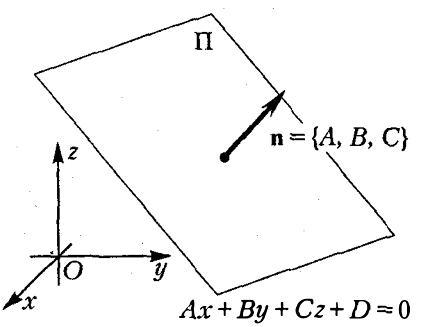


Рис. 11

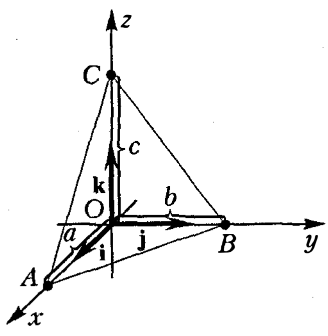


Рис. 12

Отметим интересный частный случай.

Если $ABCD \neq 0$, то, положив

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

получим *уравнение плоскости в отрезках*

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

(рис. 12).

2.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному направлению

Для того, чтобы найти уравнение плоскости П, проходящей через точку M_0, заданную радиус-вектором

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\},$$

перпендикулярно вектору

$$\mathbf{n} = \{A, B, C\},$$

проведем радиус-вектор $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ в произвольную точку M этой плоскости. Вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

лежит в плоскости П и, значит, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$ (рис. 13). Поэтому их скалярное произведение равно нулю

$$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.} \tag{8}$$

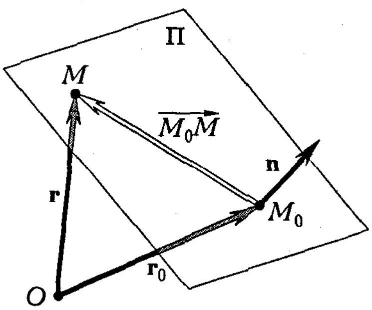


Рис. 13

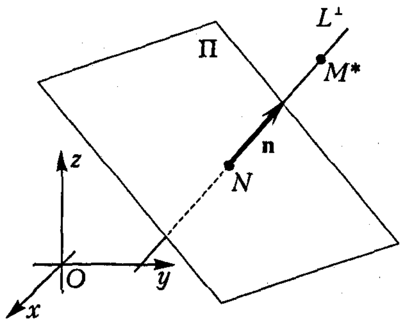


Рис. 14

Равенство (8) справедливо для всех точек M плоскости П и нарушается, если точка M этой плоскости не принадлежит. Тем самым, уравнение (8) является *векторным уравнением* искомой плоскости.

Выражая скалярное произведение векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{n}$ через их координаты, получим уравнение этой же плоскости П в координатной форме

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{9}$$

2.3. Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки M^* *до плоскости* Π называется длина отрезка M^*N перпендикуляра $L^{\perp}$, опущенного из точки M^* на эту плоскость (рис. 14).

Пусть $M^*(x^*, y^*, z^*)$ — заданная точка и

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

— нормальное уравнение плоскости П. Тогда расстояние от точки M^* до плоскости П можно вычислить по формуле

$$\boxed{d = d(M^*, \Pi) = \left|x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p\right|.}$$

◀ Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки M плоскости П. Тогда выполнено равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = p.$$

Обозначим через $\mathbf{r}^*$ радиус-вектор точки M^*. Разность

$$(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p$$

равна проекции вектора $\mathbf{r}^* - \mathbf{r}$ на ось $L^{\perp}$, определяемую вектором $\mathbf{n}^0$:

$$(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p = (\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = \mathrm{pr}_{L^{\perp}}(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}).$$

Взяв разность $(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p$ по абсолютной величине, получим, что

$$\left|(\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^0) - p\right| = d(M^*, \Pi)$$

или, в координатах,

$$d(M^*, \Pi) = \left|x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p\right|. \blacktriangleright$$

Если плоскость П задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то расстояние от точки M^* до этой плоскости вычисляется по формуле

$$\boxed{d(M^*, \Pi) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{10}$$

2.4. Угол между двумя плоскостями

Пусть Π_1 и Π_2 — две плоскости, заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$$

соответственно. *Углом между двумя плоскостями* будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями (рис. 15) (в случае параллельности плоскостей угол между ними равен или 0, или π). Один их этих двугранных углов равен углу φ между нормальными векторами $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ этих плоскостей. Отсюда вытекает, что

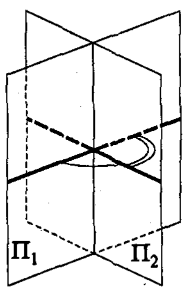


Рис. 15

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

2.5. Условие перпендикулярности двух плоскостей

В случае перпендикулярности плоскостей Π_1 и Π_2 их нормальные векторы также перпендикулярны, т. е. справедливо равенство

$$\boxed{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0, \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

— *условие перпендикулярности плоскостей.*

2.6. Условие параллельности двух плоскостей

В случае параллельности плоскостей Π_1 и Π_2 их нормальные векторы коллинеарны, т. е. справедливо равенство

$$\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2.$$

Переходя к координатам этих векторов, получаем, что

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2,$$

или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

— *условие параллельности плоскостей.*

§ 3. Прямая линия в пространстве

3.1. Уравнения прямой линии

Положение прямой линии в пространстве будет вполне определено, если задать точку M_0 на прямой (при помощи радиус-вектора $\mathbf{r}_0$) и ненулевой вектор $\mathbf{s}$, которому прямая параллельна. Вектор $\mathbf{s}$ называют *направляющим вектором* прямой.

Переменной точке M прямой соответствует ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$. Из рис. 16 получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

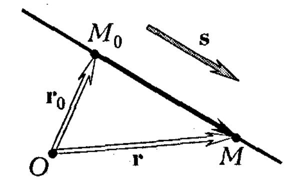


Рис. 16

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору $\mathbf{s}$, так что $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{s}t$ (числовой множитель t (параметр) может принимать любые значения в зависимости от положения точки M на прямой). Следовательно, равенство (1) можно записать так

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}t.} \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *векторным уравнением прямой.*

Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, поместив начало координат в точку O. Обозначим декартовы координаты точки M_0 (координаты вектора $\mathbf{r}_0$) через x_0, y_0 и z_0, текущие координаты точки M (координаты вектора $\mathbf{r}$) через x, y и z, а координаты направляющего вектора $\mathbf{s}$ через l, m и n. Тогда, записав векторное уравнение (2) в координатах, получим

$$\boxed{x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt.} \qquad (3)$$

Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой.* Числа l, m, n называют *направляющими коэффициентами* этой прямой.

Исключим из уравнений (3) параметр t. Имеем

$$\frac{x-x_0}{l}=t, \quad \frac{y-y_0}{m}=t, \quad \frac{z-z_0}{n}=t,$$

откуда

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.} \tag{4}$$

Уравнения (4) называют *каноническими уравнениями прямой.* В них x_0, y_0 и z_0 — координаты точки M_0, лежащей на прямой, а l, m и n — координаты направляющего вектора прямой $(l^2+m^2+n^2>0)$. Система уравнений (4) определяет прямую как линию пересечения двух плоскостей, описываемых, например, уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \quad \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

3.2. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Пусть требуется найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Будем искать эти уравнения в канонической форме. Для решения задачи надо знать координаты одной из точек, лежащих на прямой, и направляющий вектор. За точку на прямой можно взять любую из двух данных, например, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. За направляющий вектор прямой примем вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}.$$

Уравнения искомой прямой —

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5}$$

Замечание. Если точки M_1 и M_2 лежат в плоскости Oxy, т. е. $z_1=z_2=0$, то уравнения проходящей через них прямой имеют следующий вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad z=0.$$

Пример. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1, 0, -1)$ и $M_2(3, 1, 1)$.

◀ Пользуясь формулой (5), сразу получаем искомые уравнения

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}. \ ▶$$

3.3. Общие уравнения прямой. Переход к каноническим уравнениям

Всякие две не параллельные между собой и несовпадающие плоскости определяют прямую как линию их пересечения. Пусть уравнения этих плоскостей суть

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Рассматриваемые совместно,

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}} \tag{6}$$

эти уравнения называются *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений прямой (6) можно перейти к ее каноническим уравнениям. Для этого надо знать какую-нибудь точку прямой и ее направляющий вектор. Координаты точки прямой найдем из системы (6), выбирая одну из координат произвольно и решая полученную после этого систему относительно оставшихся двух координат. Для отыскания направляющего вектора $\mathbf{s}$ прямой заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения данных плоскостей, должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ этих плоскостей. Обратно, всякий вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, будет параллелен обеим плоскостям, т. е. параллелен их линии пересечения. Так как векторное произведение $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ перпендикулярно каждому из векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\mathbf{s} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

◀ 1) Находим какую-нибудь точку, принадлежащую прямой (7). Полагая, например, $z = 0$, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = -1, \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $y = -2$. Итак, $M_0(1, -2, 0)$ — точка данной прямой.

2) Нормальный вектор первой плоскости $\mathbf{n}_1 = \{1, -1, 1\}$, второй плоскости — $\mathbf{n}_2 = \{1, 1, -2\}$.

3) В качестве направляющего вектора прямой берем вектор

$$\mathbf{s} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

4) Канонические уравнения прямой (7) имеют вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}. \ ▶$$

3.4. Угол между прямой и плоскостью

Пусть даны прямая

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{8}$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{9}$$

Углом φ между прямой и плоскостью называют наименьший из углов, образованных прямой с ее проекцией на плоскость (рис. 17).

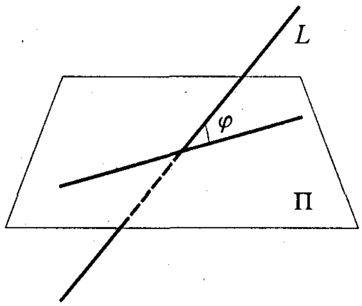


Рис. 17

Обозначим через α угол между прямой (8) и перпендикуляром к плоскости (9) (рис. 18). Для $\cos\alpha$ получаем выражение

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{s}|},}$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости (9), а $\mathbf{s}$ — направляющий вектор прямой (8).

Замечая, что $|\cos\alpha| = \sin\varphi$, находим

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.} \tag{10}$$

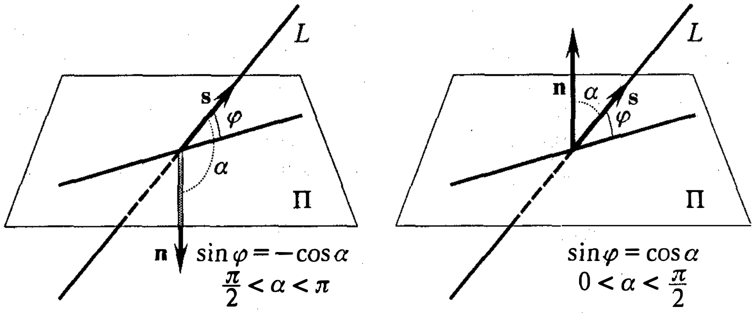


Рис. 18

Если прямая (8) параллельна плоскости (9), то направляющий вектор $\mathbf{s}$ прямой перпендикулярен нормальному вектору $\mathbf{n}$ плоскости, так что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{s}) = 0,$$

или

$$\boxed{Al + Bm + Cn = 0.} \tag{11}$$

Это *условие параллельности прямой и плоскости.*

Если прямая (8) перпендикулярна плоскости (9), то $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}$ (векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ параллельны), так что

$$\boxed{\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.} \tag{12}$$

Это *условие перпендикулярности прямой к плоскости.*

3.5. Пересечение прямой с плоскостью

Координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{13}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{14}$$

должны одновременно удовлетворять уравнениям (13) и (14), и, чтобы найти эти координаты, надо решить эти уравнения совместно, считая x, y и z неизвестными.

Перейдем от канонических уравнений прямой (13) к параметрическим уравнениям:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{15}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение (14), получим

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Al + Bm + Cn) = 0,$$

откуда

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}, \quad Al + Bm + Cn \neq 0. \tag{16}$$

По найденному значению t^* из формул (15) получаем координаты искомой точки.

Если

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

то прямая (13) параллельна плоскости (14), а точка (x_0, y_0, z_0), через которую прямая проходит, лежит вне этой плоскости. Следовательно, прямая (13) в этом случае не имеет с плоскостью (14) ни одной общей точки.

Если $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то в силу первого равенства прямая параллельна плоскости (14), а в силу второго равенства точка (x_0, y_0, z_0) прямой лежит в этой плоскости. Следовательно, в этом случае вся прямая лежит в этой плоскости.

Пример. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2} \tag{17}$$

и плоскости

$$2x + y + 7z - 3 = 0. \tag{18}$$

◀ Переходим от канонических уравнений (17) к параметрическим

$$x = 7 + 3t, \quad y = 3 + t, \quad z = -1 - 2t. \tag{19}$$

Подставляем найденные выражения для x, y и z в формулу (18)

$$6t + 14 + t + 3 - 14t - 7 - 3 = 0$$

или

$$-7t + 7 = 0,$$

откуда $t = 1$. Теперь из (19) находим $x = 10$, $y = 4$, $z = -3$ — координаты точки пересечения прямой и плоскости. ▶

Задача. Найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

Упражнения

1. Написать уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $(2, -5, 3)$;

б) проходящей через ось Oz и через точку $(-3, 1, -2)$.

2. Даны две точки $A(1, 3, -2)$ и $B(7, -4, 4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную отрезку AB.

3. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$;

б) проходящей через начало координат и перпендикулярной двум плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

4. Найти плоскость, зная, что точка $P(3, -6, 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(3, -2, 1)$ и $B(1, 4, 0)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (a, b, c).

7. Найти угол, образованный прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

(*Углом между прямыми* в пространстве называется любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным.)

8. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z + 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

9. Через точку $(2, -5, 3)$ провести прямую:

а) параллельную оси Oz;

б) параллельную прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;
в) параллельную прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

10. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(1, -1, 0)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y + 5z - 7 = 0$.

11. Найти точку пересечения:
а) прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$;
б) прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и плоскости $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

12. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}.$$

13. Найти проекцию точки $A(4, -3, 1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(4, -3, 1)$ и параллельной прямым $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ и $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

15. Написатьуравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$ параллельно прямой $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

Ответы

1. а) $y + 5 = 0$; б) $x + 3y = 0$. **2.** $6x - 7y + 6z - 94 = 0$. **3.** а) $x - 4y + 5z + 15 = 0$; б) $2x - y - z = 0$. **4.** $3x - 6y + 2z - 49 = 0$. **5.** $4x - y - 14z = 0$. **6.** $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. **7.** $\cos\varphi = \frac{72}{77}$. **8.** $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{-1}$. В качестве точки, лежащей на прямой, взята точка $(0, 0, -3)$. **9.** а) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1}$ или $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y + 5 = 0; \end{cases}$ б) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$; в) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$. **10.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{5}$. **11.** а) $(2, 3, 1)$; б) прямая параллельна плоскости. **12.** $4x + 5y - 2z = 0$. **13.** $(5, -1, 0)$. **14.** $16x - 27y + 14z - 159 = 0$. **15.** $23x - 16y + 10z - 153 = 0$.

Глава III

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Преобразование координат на плоскости

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные декартовы системы координат, Oxy и $O'x'y'$ (рис. 1). Произвольная точка M относительно одной из этих координатных систем определяется парой чисел x и y, а относительно другой — парой чисел x' и y'. Ясно, что между парами (x, y) и (x', y') имеется связь. Найдем ее.

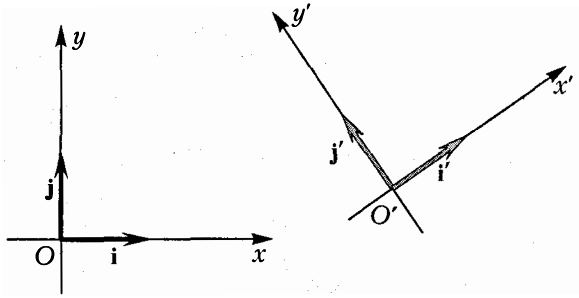


Рис. 1

1.1. Параллельный перенос

Предположим, что соответствующие координатные оси параллельны и сонаправлены, а точки начала отсчета различны. Это означает, что орты координатных осей соответственно равны (рис. 2).

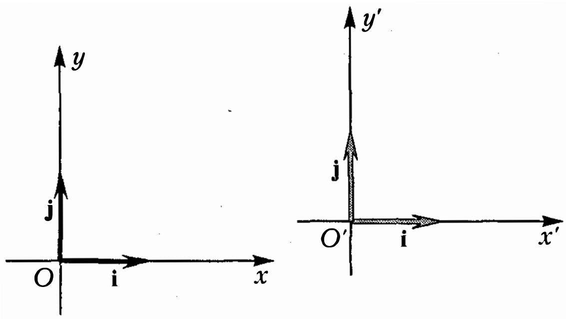


Рис. 2

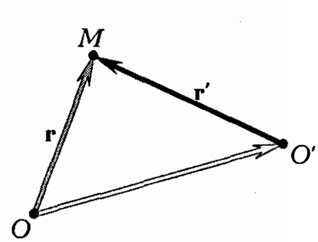


Рис. 3

Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы точки M, т. е.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j},$$

и α, β — координаты точки O' относительно системы координат Oxy, т. е.

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}.$$

Так как

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \overrightarrow{OO'}$$

(рис. 3), то

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}),$$

или

$$\boxed{x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta.}$$

1.2. Поворот

Предположим, что координатные оси одной системы координат получаются из координатных осей другой системы поворотом на угол φ, а начальные точки совпадают (рис. 4). Координатами единичного вектора $\mathbf{i}'$ являются косинусы углов φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$, образованных этим вектором с осями Ox и Oy:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi,$$

а координатами единичного вектора $\mathbf{j}'$ служат косинусы углов $\varphi + \frac{\pi}{2}$ и φ:

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$$

(рис. 5). Так как радиус-векторы $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$ произвольной точки M в рассматриваемом случае равны,

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}',$$

то, заменяя векторы $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$ их выражениями, получаем, что

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} &= x'(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) + y'(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi) = \\ &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\mathbf{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\mathbf{j}, \end{aligned}$$

или

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned}}$$

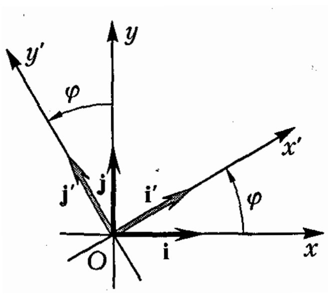


Рис. 4

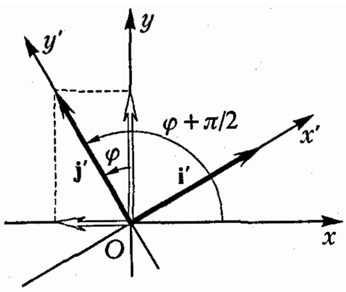


Рис. 5

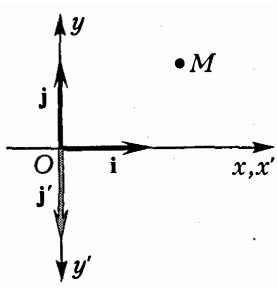


Рис. 6

1.3. Зеркальное отражение

В случае, когда оси абсцисс Ox и Ox' координатных систем совпадают, а оси ординат Oy и Oy' направлены противоположно, координаты (x, y) и (x', y') произвольной точки M связаны равенствами

$$\boxed{x' = x, \quad y' = -y}$$

(рис. 6).

Справедливо следующее утверждение.

Любое преобразование прямоугольных декартовых координат (с сохранением масштаба) можно представить в виде последовательного выполнения переноса, поворота и (если необходимо) зеркального отражения.

---

§ 2. Кривые второго порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Множество точек плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют равенству

$$\boxed{F(x, y) = 0,} \tag{$*$}$$

где $F(x, y)$ — некоторая функция двух переменных, называется *плоской кривой*, или *плоской линией*; само равенство $(*)$ называется *уравнением* данной *линии* (*кривой*).

Например, равенство $x - y = 0$ есть уравнение прямой — биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 7). Равенство $x^2 + y^2 - 1 = 0$ — уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 8).

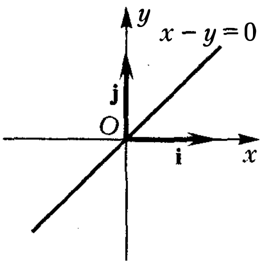


Рис. 7

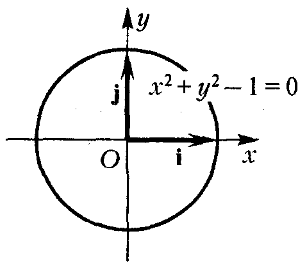


Рис. 8

Рассмотрим многочлен второй степени от двух переменных x и y:

$$\boxed{F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.}$$

Уравнение

$$\boxed{F(x, y) = 0}$$

будем называть *уравнением линии* (*кривой*) *второго порядка*.

Если линиями первого порядка являются именно прямые и только они, то множество кривых второго порядка заметно разнообразней. Поэтому исследованию общего уравнения кривой второго порядка естественно предпослать изучение некоторых частных, но важных случаев.

§ 3. Эллипс

Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,} \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$.

Система координат Oxy, в которой уравнение эллипса имеет вид (1), называется *канонической* (для данного эллипса); само уравнение (1) называется *каноническим уравнением эллипса.*

Окружность

$$x^2+y^2=a^2 \tag{2}$$

является частным случаем эллипса (при $a=b$). Это позволяет несложным способом определить форму эллипса: эллипс (1) получается из окружности (2) путем ее равномерного сжатия[1)] к оси Ox (с коэффициентом $\frac{b}{a}$), т.е. заменой в уравнении $x^2+y^2=a^2$ координаты y на $\frac{a}{b}y$ (рис. 9).

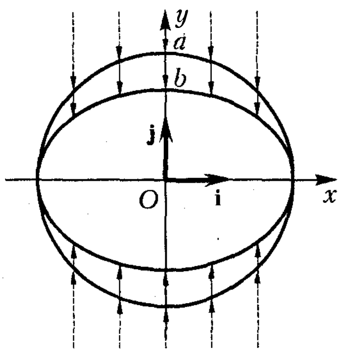


Рис. 9

Свойства эллипса

1. Эллипс (1) содержится в прямоугольнике

$$P=\{(x,y):|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b\}.$$

◀ В этом легко убедиться, заметив, что, если точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу (1), то (рис. 10)

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1. \blacktriangleright$$

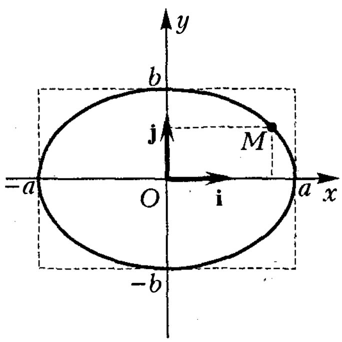


Рис. 10

Точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ называются *вершинами эллипса.*

2. Координатные оси Ox и Oy канонической системы являются осями симметрии эллипса, а начало координат O — его центром симметрии. Это означает, что если точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, то точки $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ и $(x_0, -y_0)$ также ему принадлежат (рис. 11).

3. Если эллипс не является окружностью, то координатные оси канонической системы — единственные оси симметрии.

Положим $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Ясно, что $c<a$. Точки $(-c,0)$ и $(c,0)$ называются *фокусами эллипса,* соответственно *левым* и *правым*; $2c$ — *фокусное расстояние.*

4. Эллипс есть множество точек, сумма расстояний которых от двух данных точек (фокусов эллипса) постоянна (равна заданному числу).

[1)] *Равномерным сжатием* окружности к оси Ox с коэффициентом $k>0$ называется преобразование, переводящее произвольную точку $M(x,y)$ окружности в точку $M'\left(x, \frac{y}{k}\right)$.

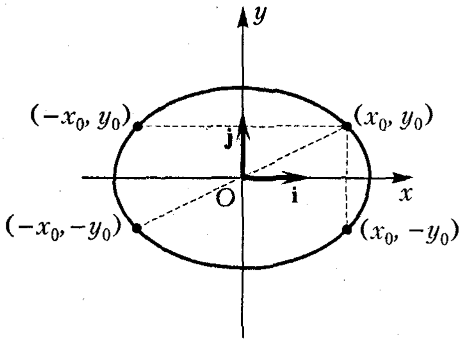


Рис. 11

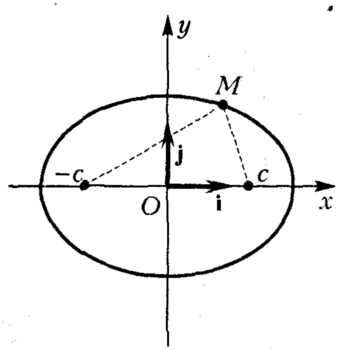


Рис. 12

◀ Пусть сначала $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вычислим ее расстояния от фокусов эллипса (рис. 12). Имеем

$$\rho_л = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \rho_п = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Заменяя y^2 его выражением

$$b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

после несложных преобразований получаем, что

$$\boxed{\rho_л} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right| = \boxed{a + \frac{c}{a}x.}$$

Последнее равенство вытекает из того, что $|x| \leqslant a$ и $\frac{c}{a} < 1$.

Аналогично находим

$$\boxed{\rho_п = a - \frac{c}{a}x,}$$

Легко убедиться в том, что

$$\rho_л + \rho_п = 2a.$$

Доказательство того, что точки, обладающие указанным свойством, принадлежат эллипсу, было проведено ранее (см. раздел «Простейшие задачи аналитической геометрии» Введения, задача 2). ▶

Число

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса (1). Ясно, что $0 < e < 1$. Эксцентриситет окружности равен нулю. Прямые

$$\boxed{x + \frac{a}{e} = 0, \qquad x - \frac{a}{e} = 0}$$

называются *директрисами* эллипса. У каждого эллипса две директрисы — *левая* и *правая* (рис. 13).

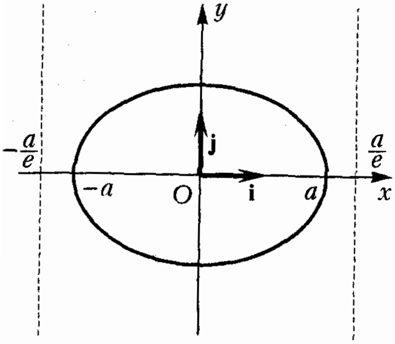


Рис. 13

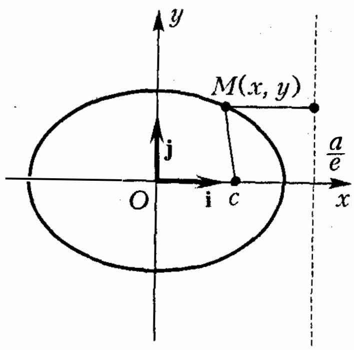


Рис. 14

5. Эллипс есть множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до *данной точки* (фокуса эллипса) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы эллипса) постоянно (равно эксцентриситету эллипса).

◀ Пусть сначала $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса (1). Вычислим расстояния от нее до правого фокуса и до правой директрисы (рис. 14). Имеем соответственно

$$\rho_{\text{п}} = a - ex, \quad d_{\text{п}} = \frac{a}{e} - x.$$

Откуда легко получаем требуемое

$$\boxed{\frac{\rho_{\text{п}}}{d_{\text{п}}} = e.}$$

Аналогично проверяется, что

$$\boxed{\frac{\rho_{\text{л}}}{d_{\text{л}}} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = e.}$$

Рассмотрим теперь на плоскости точку $(c, 0)$ и прямую $x = \frac{a}{e}$ $(c = ae)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и вычислим расстояния от нее до выбранной точки $(c, 0)$ —

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

— и до выбранной прямой —

$$\left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left|\frac{a}{e} - x\right|} = e.$$

Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |a - ex|.$$

Возведем обе части последнего соотношения в квадрат и, положив $b^2 = a^2 - c^2$ и учтя равенство $c = ae$, после простых преобразований получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тем самым, точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе (1). ▶

§ 4. Гипербола

Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат Oxy имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{1}$$

где $a > 0, b > 0$.

Система координат Oxy, в которой уравнение гиперболы имеет вид (1), называется *канонической* (для данной гиперболы); само уравнение (1) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Свойства гиперболы

1. Гипербола (1) лежит вне полосы $|x| < a$.

◀ Это вытекает из того, что если точка $M(x, y)$ лежит на гиперболе, то

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

и, значит, $|x| \geqslant a$ (рис. 15). ▶

Точки $(\pm a, 0)$ называются *вершинами гиперболы*.

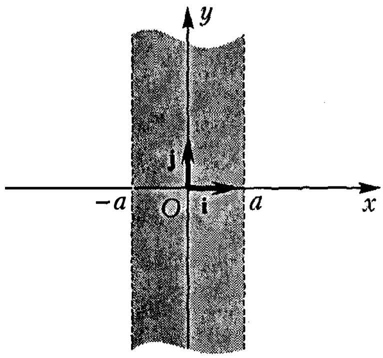


Рис. 15

2. Гипербола (1) лежит в вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm\frac{b}{a}x$ и содержащих точки оси Ox (рис. 16).

◀ Из неравенства

$$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2}$$

вытекает, что если точка $M(x, y)$ лежит на гиперболе (1), то

$$|y| < \frac{b}{a}|x|. \text{ ▶}$$

Таким образом, гипербола состоит из двух частей — *ветвей гиперболы*, *левой* и *правой*.

Прямые

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

называются *асимптотами* гиперболы.

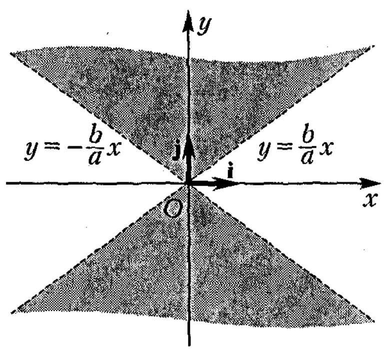


Рис. 16

3. На гиперболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат $O(0, 0)$.

◀ Пусть, например, точка $M(x, y)$ лежит на гиперболе (1) и $|y| = n$, где n — произвольное положительное число (рис. 17). Тогда

$$|x| = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} > \frac{a}{b}\,|y| = \frac{a}{b}\,n$$

и

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \frac{|x| + |y|}{2} > n\,\frac{a+b}{2b}. \blacktriangleright$$

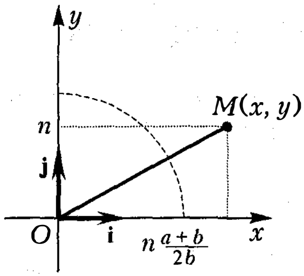


Рис. 17

Возьмем в первой четверти две точки: точку гиперболы (1) и точку ее асимптоты $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ с одинаковой абсциссой $x > a$ —

$$M\left(x, b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) \quad \text{и} \quad N\left(x, \frac{b}{a}x\right)$$

соответственно — и вычислим расстояние между ними. Имеем

$$d(M, N) = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

Умножив и разделив полученное выражение на сумму $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ и перейдя затем к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$d(M, N) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0.$$

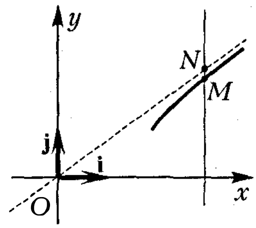


Рис. 18

Тем самым, установлен следующий факт.

4. Если текущая точка асимптоты неограниченно удаляется от начала координат, т. е. $|x| \to +\infty$, то на гиперболе можно указать соответствующую ей точку так, чтобы расстояние между ними стремилось к нулю (рис. 18).

Верно и обратное.

5. Если текущая точка $M(x, y)$ гиперболы неограниченно удаляется от точки $O(0, 0)$, т. е. $x^2 + y^2 \to \infty$, то ее расстояние до одной из прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

стремится к нулю.

6. Оси канонической координатной системы являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — ее центром симметрии (рис. 19).

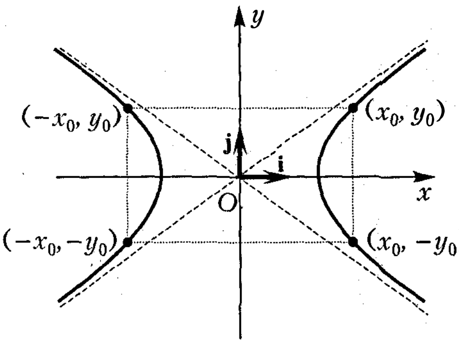


Рис. 19

Координатные оси канонической системы — единственные оси симметрии гиперболы.

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ясно, что $c > 0$. Точки $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ называются *фокусами гиперболы*; $2c$ — *фокусное расстояние*.

7. Гипербола есть множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек (фокусов гиперболы) постоянна (равна заданному числу).

◀ Доказательство этого свойства проводится так же, как и доказательство свойства 4 эллипса. Покажем, например, что каждая точка гиперболы обладает указанным свойством. Если $M(x, y)$ — точка гиперболы (1), то расстояния от нее до фокусов соответственно равны

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_л &= \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|, \\ \rho_п &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \end{aligned}}$$

(рис. 20). Так как $\frac{c}{a} > 1$, то

$$\rho_л = \begin{cases} a + \dfrac{c}{a}x, & \text{если } x \geqslant a, \\ -a - \dfrac{c}{a}x, & \text{если } x \leqslant -a, \end{cases} \qquad \rho_п = \begin{cases} -a + \dfrac{c}{a}x, & \text{если } x \geqslant a, \\ a - \dfrac{c}{a}x, & \text{если } x \leqslant -a. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно вычислить, что

$$\rho_л - \rho_п = \begin{cases} 2a, & \text{если } x \geqslant a, \\ -2a, & \text{если } x \leqslant -a, \end{cases}$$

и, значит,

$$\boxed{|\rho_л - \rho_п| = 2a.}$$ ▶

Число

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы (1). Ясно, что $e > 1$. Прямые

$$\boxed{x + \frac{a}{e} = 0, \qquad x - \frac{a}{e} = 0}$$

называются *директрисами* гиперболы (рис. 21). У каждой гиперболы две директрисы — *левая* и *правая*.

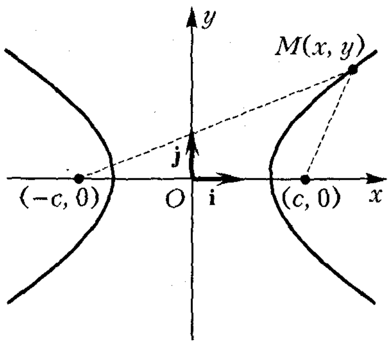


Рис. 20

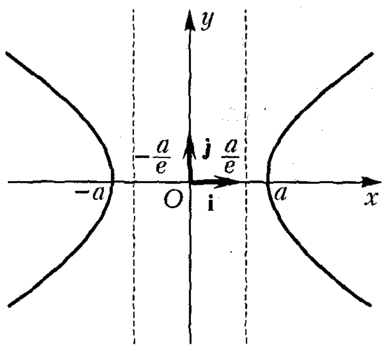


Рис. 21

Практически так же, как и для эллипса, доказывается следующий факт.

8. Гипербола есть множество точек, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса гиперболы) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) постоянно (равно эксцентриситету гиперболы) (рис. 22).

Гипербола

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1} \tag{2}$$

называется *сопряженной* гиперболе (1). Взаимное расположение гипербол (1) и (2) указано на рис. 23.

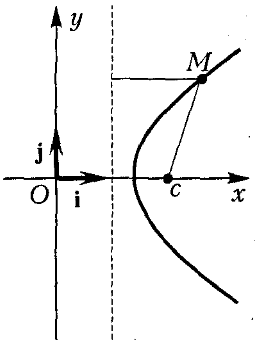


Рис. 22

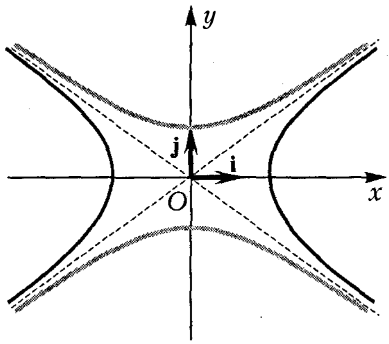


Рис. 23

§ 5. Парабола

Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy имеет вид

$$\boxed{y^2 = 2px,} \tag{1}$$

где $p > 0$ (рис. 24).

Система координат Oxy, в которой уравнение параболы имеет вид (1), называется *канонической* (для данной параболы); уравнение (1) называется *каноническим уравнением параболы.*

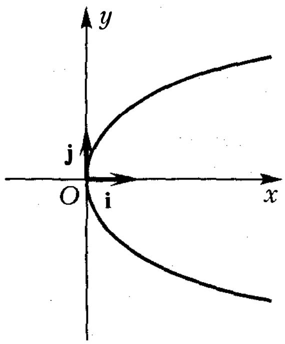


Рис. 24

Свойства параболы

1. Все точки параболы лежат в правой полуплоскости: $x \geqslant 0$ (рис. 25). Точка $O(0, 0)$ лежит на параболе и называется ее *вершиной.*

2. На параболе лежат точки, сколь угодно далеко расположенные от начала координат $O(0, 0)$.

3. Ось абсцисс канонической координатной системы является (единственной) осью симметрии параболы (рис. 26).

Ось симметрии параболы называется *осью параболы.* Число p называется *фокальным параметром* параболы; точка $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ — *фокус* параболы; прямая $x = -\frac{p}{2}$ — *директриса* параболы.

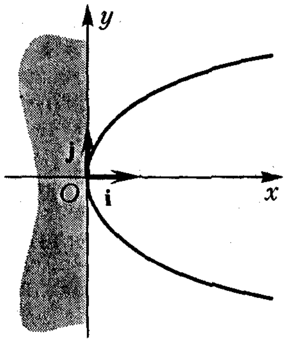


Рис. 25

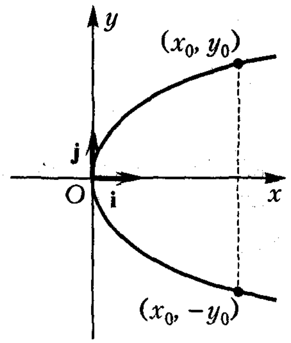


Рис. 26

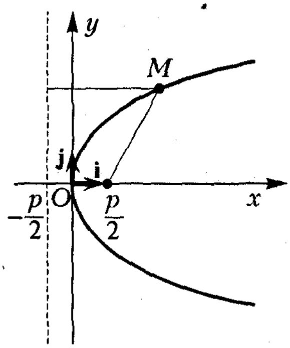


Рис. 27

4. Парабола есть множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса параболы) и от данной прямой (директрисы параболы) (рис. 27).

◀ Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе (1). Вычислим расстояния от нее до фокуса $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ —

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

— и до директрисы $x = -\frac{p}{2}$ —

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Заменяя y^2 его выражением $2px$, легко убеждаемся в том, что

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Верно и обратное. Если для некоторой точки $M(x, y)$ расстояния от нее до точки $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и до прямой $x = -\frac{p}{2}$ равны —

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

то, возводя в квадрат, после простых преобразований получаем, что эта точка лежит на параболе:

$$y^2 = 2px. \ ▶$$

§ 6. Оптическое свойство кривых второго порядка

6.1. Касательные к эллипсу и гиперболе

Если кривая задана уравнением

$$y = f(x),$$

то уравнение касательной к ней, проходящей через точку (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, можно записать в следующем виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим для определенности, что точка M_0 лежит в первой четверти, т. е. $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда часть эллипса, лежащую в первой четверти, можно описать уравнением

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Пользуясь формулой (1), получаем уравнение касательной к эллипсу в точке M_0

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0),$$

а так как точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе, то

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}},$$

и, значит,

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Полученное соотношение после несложных преобразований можно записать так:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Отсюда с учетом тождества

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

приходим к уравнению

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

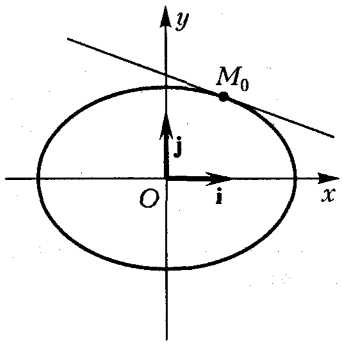


Рис. 28

(рис. 28). Полученное соотношение является *уравнением касательной к эллипсу*, проходящей через его точку (x_0, y_0), и в общем случае ее произвольного расположения, т. е. при любых знаках x_0 и y_0.

Уравнение касательной к гиперболе выводится аналогично и имеет следующий вид

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.}$$

Подчеркнем, что точка (x_0, y_0) лежит на гиперболе.

6.2. Касательные к параболе

Если кривая задана уравнением
$$x = g(y),$$
то уравнение касательной к ней, проходящей через точку (x_0, y_0), где $x_0 = g(y_0)$, можно записать в следующем виде
$$x - x_0 = g'(y_0)(y - y_0). \qquad (1)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка параболы. Пользуясь формулой (1), получаем *уравнение касательной к параболе*
$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0),$$
или
$$yy_0 - y_0^2 + px_0 - px = 0.$$
Отсюда в силу равенства $y_0^2 = 2px_0$ приходим к уравнению касательной вида
$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0).}$$

Замечание. Сопоставляя канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы с уравнениями касательных к этим кривым, нетрудно заметить, что для получения последних не требуется специальных вычислений. В самом деле, заменяя y^2 на yy_0, а x^2 на xx_0 (в случае параболы $2x$ нужно заменить на $x + x_0$), приходим к уравнению соответствующей касательной. Еще раз отметим, что сказанное справедливо лишь в том случае, когда точка (x_0, y_0) лежит на кривой.

6.3. Оптическое свойство эллипса

Пусть M_0 — произвольная точка эллипса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Как уже отмечалось, расстояния от нее до фокусов $F_л$ и $F_п$ — фокальные радиусы — равны соответственно
$$\rho_л = |ex_0 + a|, \qquad \rho_п = |ex_0 - a|.$$
Проведем через точку M_0 касательную к эллипсу,
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$
и вычислим, на каком расстоянии от этой касательной лежат фокусы $F_л(-c, 0)$ и $F_п(c, 0)$ (напомним, что для этого следует воспользоваться формулой (10) из § II.1). Имеем соответственно
$$h_л = \mu\left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|, \qquad h_п = \mu\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|,$$
где
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$
— нормирующий множитель (рис. 29).

Нетрудно проверить, что
$$\boxed{\frac{h_л}{\rho_л} = \frac{h_п}{\rho_п}.}$$

В самом деле,

$$\frac{h_л}{\rho_л} = \frac{\mu\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{|ex_0+a|} = \frac{\mu}{a}\cdot\frac{|ex_0+a|}{|ex_0+a|} = \frac{\mu}{a}, \qquad \frac{h_п}{\rho_п} = \frac{\mu\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{|ex_0-a|} = \frac{\mu}{a}.$$

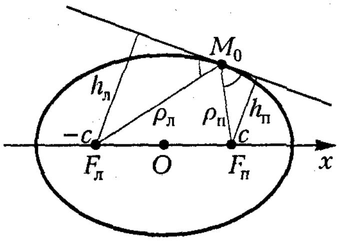


Рис. 29

Обратившись к рис. 29, заметим, что вычисленные отношения равны синусам углов, образованных касательной и фокальными радиусами точки касания. Из того, что синусы этих углов равны, вытекает равенство и самих углов. Тем самым доказано *оптическое свойство эллипса*: касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

Это свойство называется оптическим по следующей причине: если поместить в один из фокусов эллипса с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» эллипса сойдутся в другом его фокусе (рис. 30).

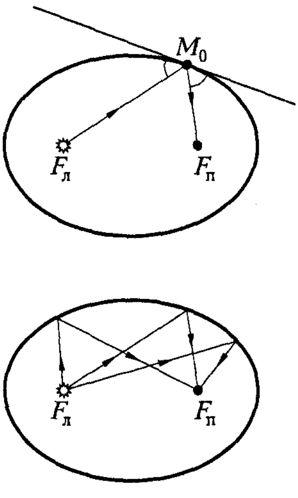


Рис. 30

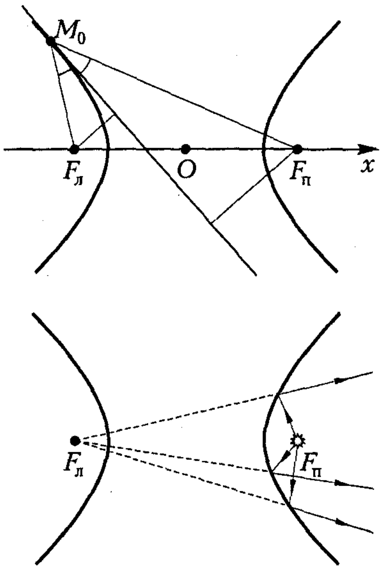


Рис. 31

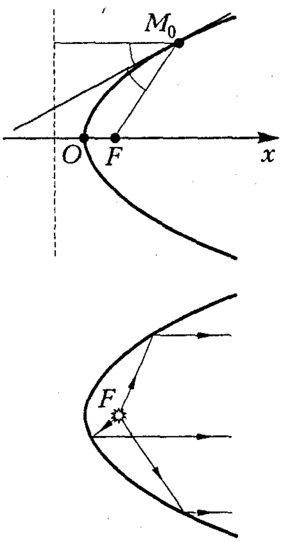


Рис. 32

6.4. Оптическое свойство гиперболы

Устанавливается аналогичными выкладками и заключается в следующем.

Если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной «поверхности» гиперболы видится исходящим из другого фокуса (рис. 31).

6.5. Оптическое свойство параболы

Если в фокус параболы помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы (рис. 32).

§ 7. Классификация кривых второго порядка

7.1. Многочлены второй степени на плоскости

Теорема. *Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат Oxy и пусть*

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0) \tag{1}$$

— многочлен второй степени от переменных x и y.

Тогда на плоскости можно построить прямоугольную декартову систему координат $O'XY$ так, что после замены переменных x и y на переменные X и Y исходный многочлен $f(x, y)$ приведется к многочлену $F(X, Y)$ одного из следующих трех видов:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & AX^2 + BY^2 + C, & A \cdot B \neq 0; \\ \text{II.} & BY^2 + 2DX, & B \cdot D \neq 0; \\ \text{III.} & BY^2 + E, & B \neq 0. \end{array}$$

◀ **1-й шаг.** Поворотом координатных осей на подходящим образом выбранный угол всегда можно добиться того, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат обратился в нуль.

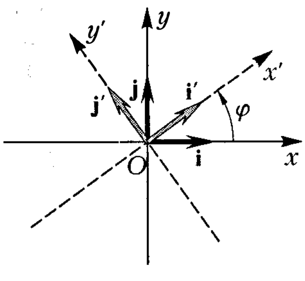


Рис. 33

Пусть $b \neq 0$ (при $b = 0$ этот шаг не нужен). Повернем оси координат вокруг точки O. Эта операция описывается следующими формулами

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом координатные оси исходной системы Oxy поворачиваются на угол φ (рис. 33).

Заменим переменные x и y в формуле (1) их выражениями (2) через x' и y' и вычислим коэффициент $2b'$ при произведении $x'y'$. Он равен

$$2\big(-a \sin\varphi \cos\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + c \sin\varphi \cos\varphi\big) = (c - a)\sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi$$

и обращается в нуль, если

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a - c}{2b}.$$

Так как полученное уравнение разрешимо относительно φ, то указанным преобразованием всегда можно добиться обращения в нуль нужного коэффициента.

Приступая ко второму этапу преобразования, будем считать, что исходный многочлен $f(x, y)$ уже имеет вид

$$f(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + g,$$

где $a^2 + c^2 > 0$. Для определенности положим $c \neq 0$ (это не ограничивает общности наших рассуждений, так как заменой x и y в случае необходимости этого всегда можно добиться).

2-й шаг. Переносом начала координат можно достичь дальнейшего упрощения вида многочлена $f(x, y)$. Эта операция описывается следующими формулами:

$$X = x + \alpha,\quad Y = y + \beta; \tag{3}$$

координатные оси новой системы $O'XY$ получаются из координатных осей исходной системы Oxy параллельным переносом в точку $(-\alpha, -\beta)$ (рис. 34).

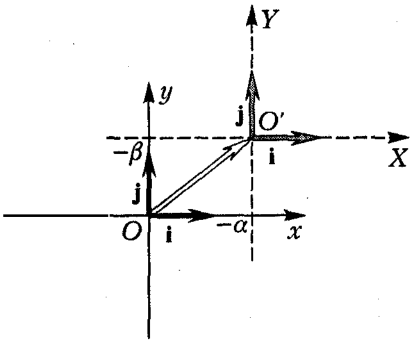


Рис. 34

Укажем конкретные значения α и β. Возможны три случая

I. $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тогда, полагая

$$\alpha = \frac{d}{a}, \quad \beta = \frac{e}{c},$$

получаем

$$\boxed{F(X, Y) = AX^2 + BY^2 + C,}$$

где $A = a$, $B = c$, $C = g - \frac{d^2}{a} - \frac{e^2}{c}$.

II. $a = 0$, $d \neq 0$. Тогда, полагая

$$\alpha = \frac{1}{2d}\left(g - \frac{e^2}{c}\right), \quad \beta = \frac{e}{c},$$

получаем, что

$$\boxed{F(X, Y) = BY^2 + 2DX,}$$

где $B = c$, $D = d$.

III. $a = d = 0$. Тогда, полагая

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{e}{c},$$

получаем, что

$$\boxed{F(X, Y) = BY^2 + E,}$$

где $B = c$, $E = g - \frac{e^2}{c}$. ▶

7.2. Канонические уравнения кривых второго порядка

Если многочлен второй степени $F(X, Y)$ приравнять к нулю, то получим уравнение линии второго порядка

$$\boxed{F(X, Y) = 0.}$$

Рассмотрим каждый из трех полученных выше случаев I, II, III отдельно.

I. $AX^2 + BY^2 + C = 0$, $A \cdot B \neq 0$.

Э. $A \cdot B > 0$. Домножением обеих частей уравнения на -1 и заменой X на Y, а Y на X (в случае необходимости) всегда можно добиться того, чтобы $B \geqslant A > 0$.

1. $C < 0$. Полагая

$$a^2 = -\frac{C}{A}, \quad b^2 = -\frac{C}{B},$$

получим *эллипс* —

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0.}$$

2. $C > 0$. Полагая

$$a^2 = \frac{C}{A}, \quad b^2 = \frac{C}{B},$$

получим

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1, \quad a \geqslant b > 0}$$

(*мнимый эллипс*)[2]. На действительной плоскости нет ни одной точки (X, Y), координаты которой обращали бы это уравнение в тождество.

3. $C = 0$. Полагая

$$a^2 = \frac{1}{A}, \quad b^2 = \frac{1}{B},$$

получим

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b > 0.}$$

Точка $(0, 0)$ является единственной точкой плоскости, координаты которой удовлетворяют этому уравнению; точку $(0, 0)$ можно мыслить как действительную точку пересечения *двух мнимых пересекающихся прямых*[3].

г. $A \cdot B < 0$. Домножением обеих частей уравнения из п. I на -1 и заменой X на Y, а Y на X (в случае необходимости) всегда можно добиться того, чтобы $A > 0$, $B < 0$, $C \leqslant 0$.

1. $C < 0$. Полагая

$$a^2 = -\frac{C}{A}, \quad b^2 = \frac{C}{B},$$

получим *гиперболу* —

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.}$$

2. $C = 0$. Полагая

$$a^2 = \frac{1}{A}, \quad b^2 = -\frac{1}{B},$$

получим

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

— *пару пересекающихся прямых*:

$$\boxed{\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0, \quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0.}$$

---

[2] Название можно объяснить некоторым сходством этого уравнения с уравнением эллипса.

[3] Название можно объяснить некоторым сходством этого уравнения с уравнением пары пересекающихся прямых.

II. $BY^2 + 2DX = 0,\ B \cdot D \neq 0.$

Всегда можно добиться того, чтобы $B \cdot D < 0$ (заменив, в случае необходимости, X на $-X$). Полагая

$$p = -\frac{D}{B} > 0,$$

получим *параболу*

$$\boxed{Y^2 = 2pX, \quad p > 0.}$$

III. $BY^2 + E = 0,\ B \neq 0.$

Можно считать, что $B > 0$.

1. $E < 0$. Полагая

$$c^2 = -\frac{E}{B},$$

получим

$$\boxed{Y^2 - c^2 = 0, \quad c > 0}$$

— *пару параллельных прямых*.

2. $E > 0$. Полагая

$$c^2 = \frac{E}{B},$$

получим

$$\boxed{Y^2 + c^2 = 0, \quad c > 0.}$$

На действительной плоскости нет ни одной точки, координаты которой обращали бы это уравнение (*пары мнимых параллельных прямых*)[4] в тождество.

3. $E = 0$. Тогда

$$\boxed{Y^2 = 0}$$

— *пара совпадающих прямых*.

Чтобы определить тип кривой второго порядка, не обязательно проводить все указанные выше преобразования. Достаточно вычислить знаки некоторых выражений, составленных из коэффициентов уравнения.

Пусть

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g = 0}$$

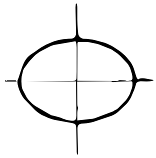
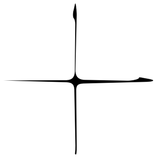
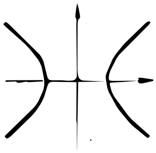
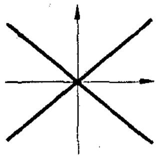
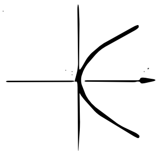
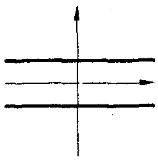
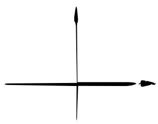
— уравнение линии второго порядка. Введем следующие обозначения

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{vmatrix}.$$

Числа D и Δ не зависят от выбора системы координат на плоскости и называются *инвариантами*. Из приводимой таблицы видно, какому сочетанию знаков определителей D и Δ соответствует та или иная линия второго порядка.

Задача. Убедитесь в том, что D и Δ при рассмотренных преобразованиях системы координат действительно остаются неизменными.

[4] Название можно объяснить некоторым сходством этого уравнения с уравнением пары параллельных прямых.

D	Δ	Название	Вид
	$-$	Эллипс	
$+$	$+$	Мнимый эллипс	
	0	Пара мнимых пересекающихся прямых	
$-$	$\neq 0$	Гипербола	
	0	Пара пересекающихся прямых	
	$\neq 0$	Парабола	
0		Пара параллельных прямых	
	0	Пара мнимых параллельных прямых	
		Пара совпадающих прямых	

§ 8. Поверхности второго порядка

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Множество точек пространства, координаты x, y и z которых удовлетворяют равенству

$$\boxed{F(x, y, z) = 0,} \qquad (*)$$

называется *поверхностью*; равенство $(*)$ называется *уравнением* этой *поверхности*.

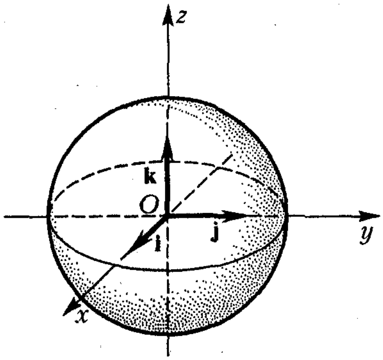


Рис. 35

Пример.

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (a > 0)$$

— уравнение сферы радиуса a с центром в точке $(0, 0, 0)$ (рис. 35). ▶

Рассмотрим многочлен второй степени от трех переменных x, y и z

$$F(x, y, z) \equiv \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + \alpha_{22}y^2 + \\ + 2\alpha_{23}yz + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + \alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0,$$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 > 0.$$

Уравнение

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

будем называть *уравнением поверхности второго порядка*.

Исследование общего уравнения поверхностей второго порядка оказывается значительно более сложным, чем исследование общего уравнения кривых второго порядка, требует разработки соответствующего математического аппарата и будет проведено в конце главы VI.

В оставшихся параграфах этой главы мы сначала остановимся на изучении геометрических свойств некоторых важных классов общих поверхностей; затем используем их для рассмотрения канонических уравнений основных поверхностей второго порядка и исследования структуры этих поверхностей.

§ 9. Некоторые классы поверхностей

9.1. Поверхности вращения

Рассмотрим на плоскости Oxz кривую γ, заданную уравнением

$$z = f(x), \qquad x \geqslant 0$$

(рис. 36). При вращении кривой γ вокруг оси Oz она будет заметать некоторую поверхность, называемую *поверхностью вращения* (рис. 37). Найдем уравнение этой поверхности, т. е. равенство, которому должны удовлетворять координаты точек построенной поверхности и только они.

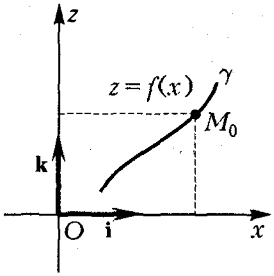


Рис. 36

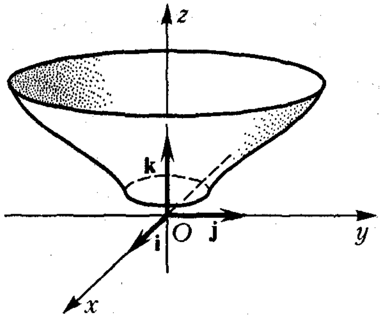


Рис. 37

Пусть $M_0(x_0, z_0)$ — произвольная точка кривой γ. При вращении кривой γ вокруг оси Oz точка M_0 будет описывать окружность, радиус которой равен ее абсциссе x_0 (рис. 38). Уравнение этой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = x_0^2.$$

Тем самым, координаты x, y и z_0 любой точки M этой окружности связаны следующим равенством

$$z_0 = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

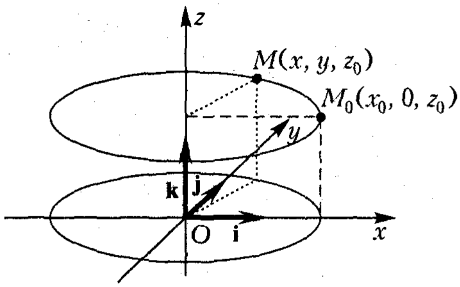


Рис. 38

В силу произвольности выбора точки M_0 на кривой γ искомое уравнение полученной поверхности вращения имеет вид

$$\boxed{z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).}$$

9.2. Цилиндрические поверхности

Через каждую точку некоторой заданной кривой γ проведем прямую l параллельно заданной прямой l_0. Множество точек, лежащих на так построенных прямых, назовем *цилиндрической поверхностью* (рис. 39); кривая γ называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а прямая l — ее *образующей*. Найдем уравнение, описывающее цилиндрическую поверхность.

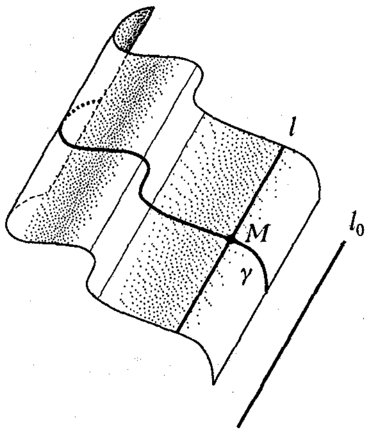


Рис. 39

Возьмем произвольную точку O и проведем через нее плоскость Π, перпендикулярную образующей l. Построим в пространстве прямоугольную координатную систему $Oxyz$, взяв за ось Oz прямую, перпендикулярную плоскости Π. Тогда плоскость Π будет координатной плоскостью Oxy (рис. 40). Плоскость Π пересекает цилиндрическую поверхность по направляющей γ_0.

Пусть

$$F(x, y) = 0$$

— уравнение этой направляющей. Убедимся в том, что последнее соотношение можно считать уравнением искомой цилиндрической поверхности.

◀ В самом деле, пусть (x, y, z) — точка цилиндрической поверхности (рис. 41). Тогда точка $(x, y, 0)$ лежит на γ_0 и, значит, удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0.$$

Но координаты точки (x, y, z) также обращают это уравнение в тождество. Последнее обстоятельство и позволяет считать соотношение

$$\boxed{F(x, y) = 0}$$

искомым уравнением. ▶

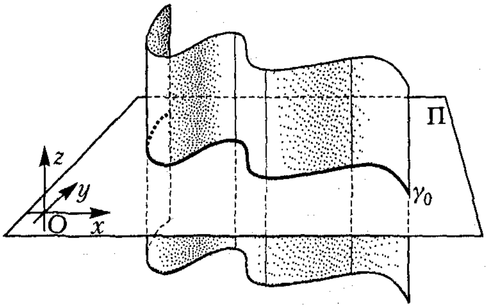


Рис. 40

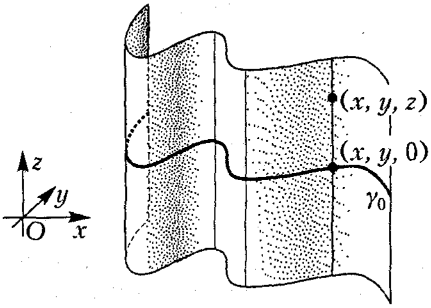


Рис. 41

Пример. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты $Oxyz$. *Соотношение*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

является уравнением цилиндрической поверхности (*эллиптического цилиндра*) (рис. 42). ▶

Замечание. Уравнение

$$F(y, z) = 0$$

описывает цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной координатной оси Ox, а уравнение

$$F(x, z) = 0$$

— цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oy.

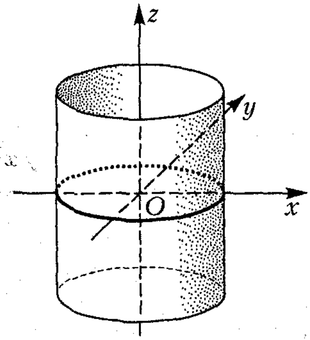


Рис. 42

9.3. Конические поверхности

Пусть γ — произвольная кривая и O — точка вне ее. Через каждую точку кривой γ и точку O проведем прямую l. Множество точек, лежащих на построенных таким образом прямых, называется *конической поверхностью* (рис. 43); кривая γ — *направляющая* конической поверхности, l — ее *образующая*, точка O — *вершина*.

Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z)$$

переменных x, y и z. Функция $F(x, y, z)$ называется *однородной функцией степени q*, если для любого $t > 0$ выполняется равенство

$$\boxed{F(tx, ty, tz) = t^q F(x, y, z).}$$

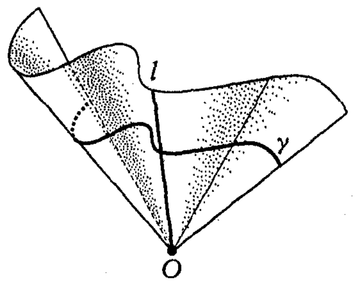


Рис. 43

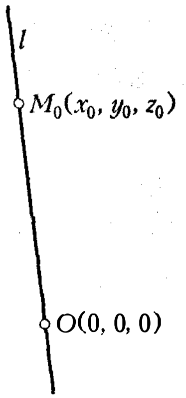


Рис. 44

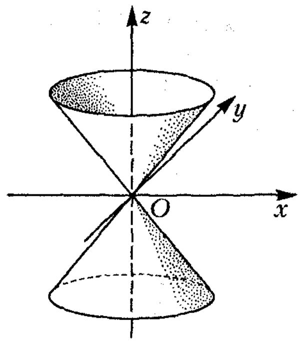


Рис. 45

Покажем, что если $F(x, y, z)$ — однородная функция, то

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

является *уравнением конической поверхности.*

◀ В самом деле, пусть

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

т. е. точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой поверхности. Будем считать, что $x_0^2+y_0^2+z_0^2 > 0$. Проведем через эту точку и точку $O(0, 0, 0)$ (считая, что $F(0, 0, 0) = 0$) прямую l (рис. 44). Ее параметрические уравнения имеют вид

$$x = tx_0, \quad y = ty_0, \quad z = tz_0.$$

Подставляя полученные выражения для x, y и z в функцию $F(x, y, z)$, видим, что

$$F(x, y, z) = F(tx_0, ty_0, tz_0) = t^q F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Это означает, что вся прямая l лежит на поверхности, определяемой уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

которое, следовательно, и описывает коническую поверхность. ▶

Пример. Функция

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

является однородной функцией второй степени:

$$F(tx, ty, tz) = \frac{(tx)^2}{a^2} + \frac{(ty)^2}{b^2} - \frac{(tz)^2}{c^2} = t^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = t^2 F(x, y, z).$$

Значит,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

— уравнение конической поверхности (*конуса второго порядка*) (рис. 45). ▶

Воспользуемся теперь полученными выше результатами для исследования геометрической формы поверхностей второго порядка.

§ 10. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Цилиндры и конус второго порядка

10.1. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Для того, чтобы выяснить, как выглядит эллипсоид, поступим следующим образом. Возьмем на плоскости Oxz эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и будем вращать его вокруг оси Oz (рис. 46).

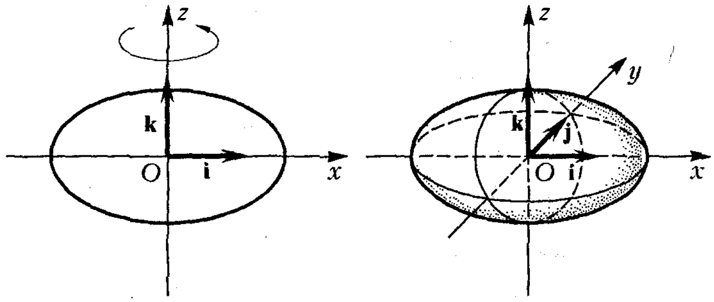


Рис. 46

Полученная поверхность

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (*)$$

— *эллипсоид вращения* — уже дает представление о том, как устроен *эллипсоид общего вида*. Чтобы получить его уравнение, достаточно равномерно сжать эллипсоид вращения вдоль оси Oy с коэффициентом $\frac{b}{a} \leqslant 1$, т. е. заменить в его уравнении y на $\frac{a}{b}y$[5].

10.2. Гиперболоиды

Вращая гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг оси Oz (рис. 47), получим поверхность, называемую *однополостным гиперболоидом вращения*. Его уравнение имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

получается тем же способом, что и в случае эллипсоида вращения.

---

[5] Эллипсоид вращения $(*)$ можно получить равномерным сжатием сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ вдоль оси Oz с коэффициентом $\frac{c}{a} \leqslant 1$.

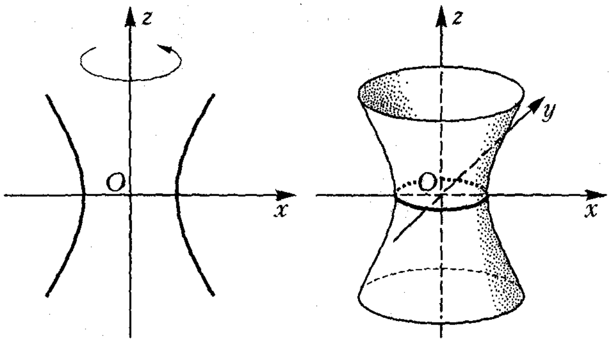


Рис. 47

Путем равномерного сжатия этой поверхности вдоль оси Oy с коэффициентом $\frac{b}{a} \leqslant 1$ получим *однополостный гиперболоид общего вида.* Его уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

получается тем же способом, что и в разобранном выше случае эллипсоида.

Путем вращения вокруг оси Oz сопряженной гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

получим *двуполостный гиперболоид вращения* (рис. 48). Его уравнение

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.}$$

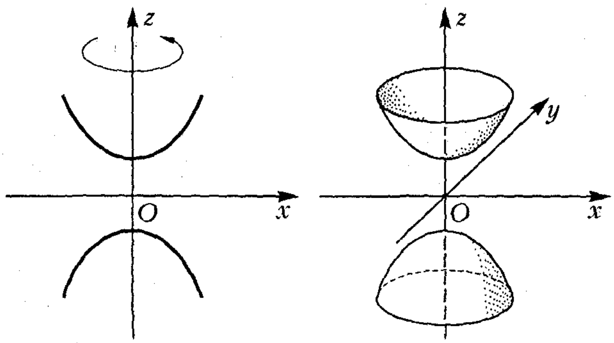


Рис. 48

Путем равномерного сжатия этой поверхности вдоль оси Oy с коэффициентом $\frac{b}{a} \leqslant 1$ приходим к *двуполостному гиперболоиду общего вида.* Заменой y на $\frac{b}{a}y$ получаем его уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.}$$

10.3. Эллиптический параболоид

Вращая параболу

$$x^2 = 2pz$$

вокруг оси Oz (рис. 49), получаем *параболоид вращения*. Его уравнение имеет вид

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2pz.}$$

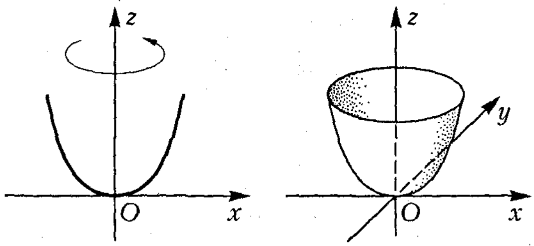


Рис. 49

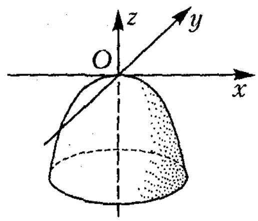


Рис. 50

Путем сжатия параболоида вращения вдоль оси Oy с коэффициентом $\sqrt{\frac{q}{p}} \leqslant 1$ получаем *эллиптический параболоид*. Его уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}$$

получается из уравнения параболоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

путем замены y на $\sqrt{\frac{p}{q}}\,y$.

Если $p < 0$, то получаем параболоид вида, указанного на рис. 50.

10.4. Гиперболический параболоид

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,} \qquad (*)$$

где $p > 0$, $q > 0$. Вид этой поверхности определим, применив так называемый *метод сечений*, который заключается в следующем: параллельно координатным плоскостям проводятся плоскости, пересекающие исследуемую поверхность, и по изменению конфигурации возникающих в результате плоских кривых делается вывод о структуре самой поверхности.

Начнем с сечений плоскостями $z = h = \text{const}$, параллельными координатной плоскости Oxy. При $h > 0$ получаем гиперболы

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2} = 1,$$

при $h < 0$ — сопряженные гиперболы

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{-2ph}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{-2qh}\right)^2} = -1,$$

а при $h = 0$ — пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{(\sqrt{p})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{q})^2} = 0.$$

Заметим, что эти прямые являются асимптотами для всех гипербол (т. е. при любом $h \neq 0$). Спроектируем получаемые кривые на плоскость Oxy. Получим следующую картину (рис. 51). Уже это рассмотрение позволяет сделать заключение о седлообразном строении рассматриваемой поверхности (рис. 52).

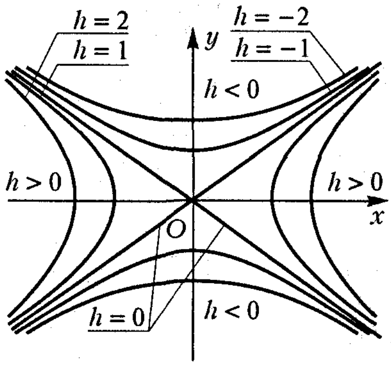


Рис. 51

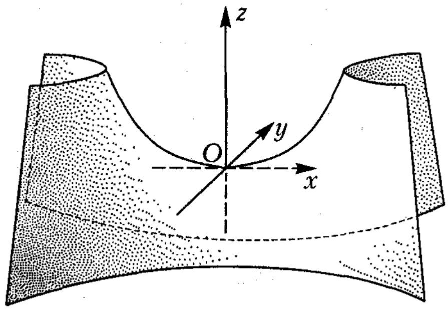


Рис. 52

Рассмотрим теперь сечения плоскостями

$$y = h.$$

Заменяя в уравнении поверхности y на h, получаем уравнения парабол

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2pq}\right)$$

(рис. 53).

Аналогичная картина возникает при рассечении заданной поверхности плоскостями

$$x = h.$$

В этом случае также получаются параболы

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2pq}\right),$$

ветви которых направлены вниз (а не вверх, как для сечения плоскостями $y = h$) (рис. 54).

Используя последние два типа сечений, приходим к заключению, что гиперболический параболоид можно получить путем параллельного переноса параболы $x^2 = 2pz$ вдоль параболы $y^2 = -2qz$, или наоборот (рис. 55).

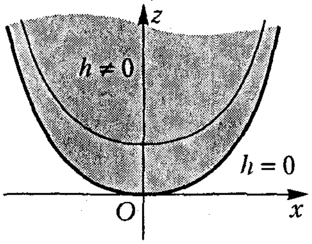


Рис. 53

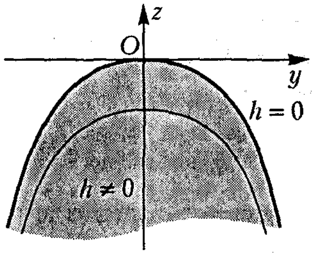


Рис. 54

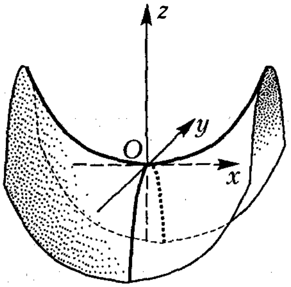


Рис. 55

Замечание. Методом сечений можно разобраться в строении и всех ранее рассмотренных поверхностей второго порядка. Однако путем вращения кривых второго порядка и последующего равномерного сжатия к пониманию их структуры можно прийти проще и значительно быстрее.

Оставшиеся поверхности второго порядка по существу уже рассмотрены ранее. Это *цилиндры*:

эллиптический $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ (рис. 56),

гиперболический $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ (рис. 57)

и *параболический* $\boxed{y^2 = 2px}$ (рис. 58)

и *конус второго порядка*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,}$$

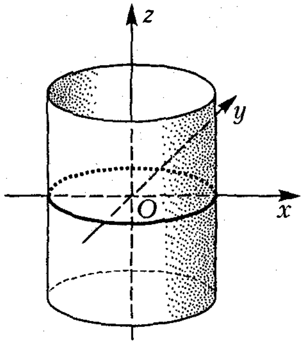


Рис. 56

представление о котором можно получить либо путем вращения пары пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

вокруг оси Oz и последующего сжатия, либо методом сечений. Конечно, в обоих случаях получим, что исследуемая поверхность имеет вид, указанный на рис. 59.

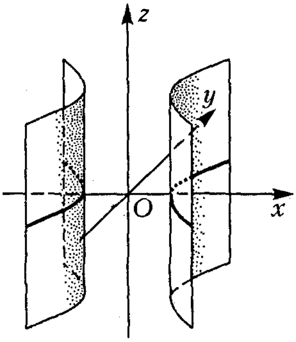


Рис. 57

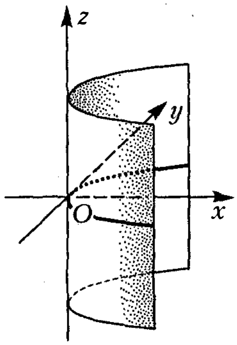


Рис. 58

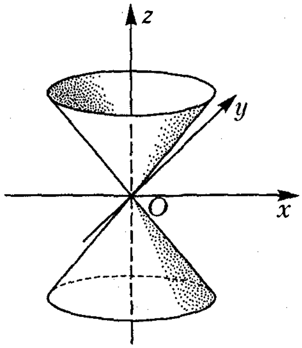


Рис. 59

Упражнения

1. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Задание:

а) вычислите координаты фокусов;

б) вычислите эксцентриситет;

в) напишите уравнения асимптот и директрис;

г) напишите уравнение сопряженной гиперболы и вычислите ее эксцентриситет.

2. Составьте каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до вершины равно 3.

3. Напишите уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ в его точке $M(4, 3)$.

4. Определите вид и расположение кривой, заданной уравнением:

а) $x^2 + 2y + 4x - 4y = 0$;

б) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

г) $xy + x + y = 0$;

д) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;

е) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

Ответы

1. а) $F_л(-5, 0)$, $F_п(5, 0)$; б) $e = \frac{5}{3}$; в) $y = \pm\frac{4}{3}x$, $x = \pm\frac{9}{5}$; г) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$, $e = \frac{5}{4}$. **2.** $y^2 = 12x$. **3.** $3x + 4y - 24 = 0$. **4.** а) эллипс $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^3}{3} = 1$, центр $O'(-2, 1)$, большая ось $O'X$ параллельна оси Ox; б) гипербола $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$, центр $O'(-1, 2)$, угловой коэффициент вещественной оси $O'X$ равен 3; в) парабола $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}X$, вершина $O'(3, 2)$, вектор оси $O'X$, направленный в сторону вогнутости параболы, равен $\{-2, -1\}$; г) гипербола с центром $O'(-1, 1)$, асимптоты параллельны осям координат; д) пара пересекающихся прямых $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$; е) пара параллельных прямых $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$.

Глава IV

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Матрицы

1.1. Терминология и обозначения

Матрицей А *размера* $m \times n$ называется набор $m \cdot n$ чисел — *элементов матрицы*

$$\alpha_{ij} \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n),$$

записанных в виде прямоугольной таблицы

$$\boxed{\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},} \qquad (1)$$

или

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Символ α_{ij} читается так: «альфа-и-жи».

Набор

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in} \quad (i = 1, \dots, m)$$

называется i*-й строкой* матрицы А:

$$\boxed{(\alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \dots \quad \alpha_{in}),}$$

а набор

$$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj} \quad (j = 1, \dots, n)$$

называется j*-м столбцом* матрицы А:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}.}$$

Таким образом, данная матрица А имеет m строк и n столбцов, а элемент α_{ij} расположен в i-й строке и в j-м столбце матрицы А — в *позиции* (i, j) (рис. 1). Числа i и j

определяют расположение элемента α_{ij} в матрице А и являются как бы координатами этого элемента в прямоугольной таблице А.

Если размер матрицы известен, то часто пишут кратко

$$\boxed{\mathsf{A} = (\alpha_{ij}).}$$

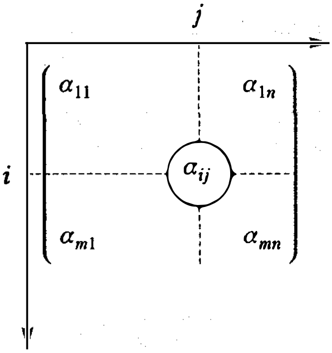


Рис. 1

Матрица размера $1 \times n$ называется просто *строкой*, а матрица размера $m \times 1$ — *столбцом*. В случае $m = n$ матрица

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *квадратной матрицей порядка n*. В частности, квадратной матрицей первого порядка является одноэлементная матрица $\mathsf{A} = (\alpha_{11})$.

Набор элементов

$$\boxed{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}}$$

образует *главную диагональ* матрицы А.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*, а квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю,

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

называется *единичной*. Подчеркнем, что для каждого размера $m \times n$ существует своя нулевая матрица, а для каждого числа n — своя единичная матрица порядка n.

Множество всех матриц размера $m \times n$ часто обозначают через $\mathbb{R}_{m\times n}$. Введенное обозначение требует дополнительных пояснений (для определенности мы ограничиваемся здесь рассмотрением только матриц, элементами которых являются вещественные числа). Множество вещественных чисел принято обозначать через $\mathbb{R}$. Отсюда и символ $\mathbb{R}_{m\times n}$ (множество матриц размера $m \times n$, элементами которых являются комплексные числа, принято обозначать так: $\mathbb{C}_{m\times n}$, см. главу XXV). С учетом этого обозначения матрицу (1) можно записать так

$$\mathsf{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}.$$

Матрицы $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})$ и $\mathsf{B} = (\beta_{ij})$ называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их элементы, находящиеся в одинаковых позициях, совпадают, т. е.

$$\mathsf{A} \in \mathbb{R}_{m\times n}, \quad \mathsf{B} \in \mathbb{R}_{m\times n}$$

и

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Обозначение: $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

1.2. Операции над матрицами

Сложение матриц

Пусть A и B — матрицы одного размера:

$$A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}, \quad B = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}.$$

Суммой матриц A и B называется матрица $C = (\gamma_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\boxed{\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).} \tag{3}$$

Обозначение: $C = A + B$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}$ *на число* λ называется матрица $B = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\boxed{\beta_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).} \tag{4}$$

Обозначение: $B = \lambda A$.

Запишем эти операции подробнее:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \ldots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix},}$$

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \ldots & \lambda\alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\alpha_{m1} & \ldots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}.}$$

1.3. Линейное пространство строк

Рассмотрим введенные операции сложения и умножения на число на множестве матриц размера $1 \times n$ — *n-мерных строках*.

Пусть

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_{1\times n}, \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}_{1\times n}.$$

Тогда, согласно формулам (3) и (4),

$$\boxed{a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)} \tag{5}$$

и

$$\boxed{\lambda a = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n).} \tag{6}$$

Правила (5) и (6) обладают легко проверяемыми свойствами

$a + b = b + a,$	$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$
$(a + b) + c = a + (b + c),$	$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$
$a + 0 = 0 + a = a,$	$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$
уравнение $a + x = 0$ однозначно разрешимо для любой строки a	$1 \cdot a = a$

(7)

(здесь λ и μ — произвольные числа; a, b, c и x — n-мерные строки; 0 — нулевая n-мерная строка) и задают на множестве n-строк структуру линейного пространства[1].

Линейная зависимость

Введем важное понятие линейной зависимости. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — n-мерные строки. Строка b, определяемая равенством

$$\boxed{b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m,} \tag{8}$$

называется *линейной комбинацией* строк $a_1, \ldots, a_m$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Линейная комбинация (8) называется *нетривиальной*, если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ отлично от нуля, и *тривиальной*, если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ (ясно, что в последнем случае b — нулевая строка). Строки называются *линейно зависимыми*, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулевой строке 0. Строки называются *линейно независимыми*, если нулевой строке равна только их тривиальная линейная комбинация.

Покажем, что

если строки линейно зависимы, то одна из них является линейной комбинацией остальных.

◀ Пусть строки $a_1, \ldots, a_m$ линейно зависимы: найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{m-1} a_{m-1} + \lambda_m a_m = 0.$$

Пусть, например, $\lambda_m \neq 0$. Перенесем все слагаемые, кроме последнего, из левой части формулы в правую,

$$\lambda_m a_m = -\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{m-1} a_{m-1},$$

и, поделив обе части полученного равенства на $\lambda_m \neq 0$, придем к тому, что строка a_m является линейной комбинацией остальных строк —

$$a_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} a_{m-1}.$$

Верно и обратное: если одна из строк является линейной комбинацией остальных, например,

$$a_m = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{m-1} a_{m-1},$$

то существует нетривиальная линейная комбинация строк $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$

$$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{m-1} a_{m-1} + (-1) a_m = 0$$

(коэффициент при a_m равен $-1 \neq 0$), равная нулевой строке. Значит, эти строки линейно зависимы. ▶

Аналогичными свойствами обладает множество $\mathbb{R}_{m\times 1}$ m-мерных столбцов.

[1] Общее определение линейного пространства будет рассмотрено в главе V.

Правило сокращенного суммирования

Сумму вида

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q$$

часто удобно записывать так

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i}$$

(знак сокращенного суммирования принято обозначать прописной греческой буквой Σ — «сигма»).

1.4. Умножение матриц

Пусть $\mathsf{A} = (\alpha_{ik})$ и $\mathsf{B} = (\beta_{kj})$ — квадратные матрицы порядка n. *Произведением* матрицы A на матрицу B называется матрица

$$\mathsf{C} = (\gamma_{ij}) \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

элементы которой вычисляются по формуле

$$\boxed{\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} \quad (i, j = 1, \ldots, n).} \tag{9}$$

Обозначение: C = AB.

Правило (9) можно проиллюстрировать следующей схемой

$$i\begin{pmatrix} \alpha_{11} \ \ \ldots \ \ \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boxed{\alpha_{i1} \ \ \ldots \ \ \alpha_{in}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ \ \ldots \ \ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix}\beta_{11}\\ \vdots\\ \beta_{n1}\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}\beta_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{nj}\end{matrix}} & \begin{matrix}\beta_{1n}\\ \vdots\\ \beta_{nn}\end{matrix} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \vdots & \gamma_{1n} \\ \ldots & \boxed{\gamma_{ij}} & \ldots \\ \gamma_{n1} & \vdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \end{array} i.$$

С использованием знака сокращенного суммирования формула (9) записывается так:

$$\boxed{\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad (i, j = 1, \ldots, n).}$$

Порядок матриц-сомножителей существен.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$.

Пример 1. Пусть

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Тогда

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \ ▶$$

Аналогичные примеры можно построить для матриц A и B любого порядка.

Пример 2. Пусть A — матрица третьего порядка

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

◀ Покажем, что умножение матрицы A на матрицу

$$\mathsf{P}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

слева меняет местами 2-ю и 3-ю строки. Имеем

$$\mathsf{P}_{23}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot\alpha_{11}+0\cdot\alpha_{21}+0\cdot\alpha_{31} & 1\cdot\alpha_{12}+0\cdot\alpha_{22}+0\cdot\alpha_{32} & 1\cdot\alpha_{13}+0\cdot\alpha_{23}+0\cdot\alpha_{33} \\ 0\cdot\alpha_{11}+0\cdot\alpha_{21}+1\cdot\alpha_{31} & 0\cdot\alpha_{12}+0\cdot\alpha_{22}+1\cdot\alpha_{32} & 0\cdot\alpha_{13}+0\cdot\alpha_{23}+1\cdot\alpha_{33} \\ 0\cdot\alpha_{11}+1\cdot\alpha_{21}+0\cdot\alpha_{31} & 0\cdot\alpha_{12}+1\cdot\alpha_{22}+0\cdot\alpha_{32} & 0\cdot\alpha_{13}+1\cdot\alpha_{23}+0\cdot\alpha_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Аналогично можно убедиться в том, что умножение матрицы A на матрицу P_{23} справа меняет местами 2-й и 3-й столбцы.

Пример 3. Для любой матрицы A выполняются равенства

$$\boxed{\mathsf{I}\cdot\mathsf{A} = \mathsf{A}\cdot\mathsf{I} = \mathsf{A},} \tag{10}$$

где I — единичная матрица.

◀ Пусть, например, A — матрица третьего порядка

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{I} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdot1+\alpha_{12}\cdot0+\alpha_{13}\cdot0 & \alpha_{11}\cdot0+\alpha_{12}\cdot1+\alpha_{13}\cdot0 & \alpha_{11}\cdot0+\alpha_{12}\cdot0+\alpha_{13}\cdot1 \\ \alpha_{21}\cdot1+\alpha_{22}\cdot0+\alpha_{23}\cdot0 & \alpha_{21}\cdot0+\alpha_{22}\cdot1+\alpha_{23}\cdot0 & \alpha_{21}\cdot0+\alpha_{22}\cdot0+\alpha_{23}\cdot1 \\ \alpha_{31}\cdot1+\alpha_{32}\cdot0+\alpha_{33}\cdot0 & \alpha_{31}\cdot0+\alpha_{32}\cdot1+\alpha_{33}\cdot0 & \alpha_{31}\cdot0+\alpha_{32}\cdot0+\alpha_{33}\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \mathsf{A}.$$

Справедливость равенства

$$\mathsf{I}\cdot\mathsf{A} = \mathsf{A}$$

проверяется аналогично. ▶

Доказанные формулы (10) объясняют название матрицы I.

Умножение матриц обладает следующими свойствами.

Если A, B, C, D *— квадратные матрицы (n-го порядка), то*

А. $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$,

Б. $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}, \quad (\mathsf{B}+\mathsf{C})\mathsf{D} = \mathsf{BD}+\mathsf{CD}.$

◀ Докажем, например, первую из формул Б.

Нетрудно видеть, что все три матрицы AB, AC и A(B + C) имеют одинаковый порядок n. Вычисляя их элементы в позиции (i, j), получаем соответственно

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\gamma_{kj}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(\beta_{kj}+\gamma_{kj}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(\beta_{kj}+\gamma_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\gamma_{kj}.$$

Требуемое равенство доказано.

Похожими рассуждениями доказываются и две другие формулы. ▶

Замечание. Операцию умножения можно определить и для прямоугольных матриц.

Пусть даны матрицы $\mathrm{A} = (\alpha_{ik}) \in \mathbb{R}_{m\times n}$ и $\mathrm{B} = (\beta_{kj}) \in \mathbb{R}_{n\times l}$. Тогда элементы γ_{ij} матрицы $\mathrm{C} = \mathrm{AB} \in \mathbb{R}_{m\times l}$ вычисляются по формуле

$$\boxed{\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, l).} \tag{11}$$

Произведение двух прямоугольных матриц существует не всегда: для того чтобы матрицу A можно было умножить на матрицу B, необходимо, чтобы число столбцов матрицы A совпадало с числом строк матрицы B (см. формулу (11) и рис. 2).

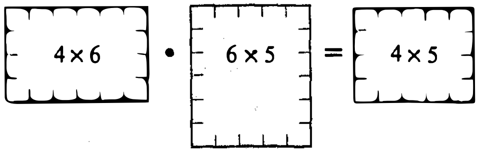


Рис. 2

Для прямоугольных матриц справедливы формулы (10), А и Б (при условии, разумеется, что соответствующие произведения имеют смысл).

Пример. Найти произведение матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

на матрицу

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

◀ Прежде всего, проверяем, что число столбцов матрицы A (два) совпадает с числом строк матрицы B (две). Значит, умножать матрицу A на матрицу B можно.

Вычислим это произведение. Имеем

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9\cdot1+5\cdot1 & 9\cdot0+5\cdot9 & 9\cdot1+5\cdot4 & 9\cdot2+5\cdot2 \\ 1\cdot1+9\cdot1 & 1\cdot0+9\cdot9 & 1\cdot1+9\cdot4 & 1\cdot2+9\cdot2 \\ 8\cdot1+6\cdot1 & 8\cdot0+6\cdot9 & 8\cdot1+6\cdot4 & 8\cdot2+6\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 45 & 29 & 28 \\ 10 & 81 & 37 & 20 \\ 14 & 54 & 32 & 28 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.5. О порядке суммирования

Сумму H всех элементов прямоугольной матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

можно вычислить двумя способами:

1-й способ. Найдем суммы элементов каждого столбца

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}$$

и сложим полученные числа:

$$H = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \right).$$

2-й способ. Найдем суммы элементов каждой строки

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j}, \quad \ldots, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}$$

и сложим полученные числа:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \right).}$$

1.6. Транспонирование матрицы

Матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *транспонированной* по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначение: A^T.

Пример. Транспонировав матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

согласно определению, получим

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

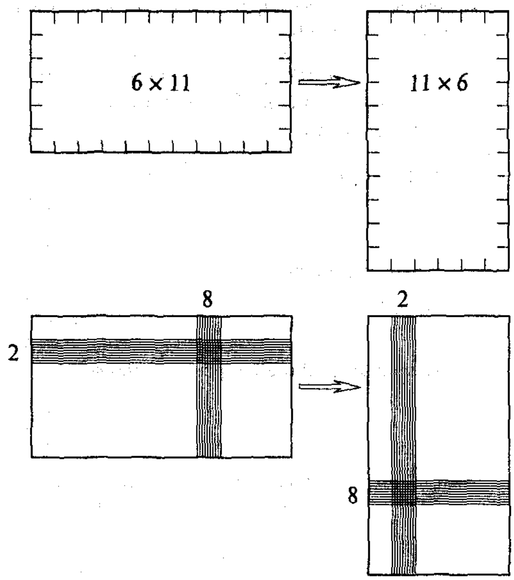


Рис. 3

Подчеркнем, что элемент матрицы A^T, находящийся в позиции (j, i), совпадает с элементом матрицы A, находящимся в позиции (i, j). При транспонировании строки матрицы A переходят в столбцы матрицы A^T, а столбцы — в строки. Таким образом, если у матрицы A m строк и n столбцов, то у транспонированной матрицы A^T n строк и m столбцов.

Укажем некоторые свойства операции транспонирования:

1.	$(A^T)^T = A$.
2.	$(A+B)^T = A^T + B^T$.
3.	$(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
4.	$(AB)^T = B^T A^T$.

1.7. Элементарные преобразования матрицы

Пусть A и $\widetilde{A}$ — произвольные матрицы одинакового размера $m \times n$. Обозначим последовательные строки матрицы A через

$$a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_l, \ldots, a_m$$

соответственно.

Будем говорить, что матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A

1. *перестановкой двух строк*, если $a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_k, \ldots, a_m$ — последовательные строки матрицы $\widetilde{A}$;

2. *умножением строки на неравное нулю число* β, если $a_1, \ldots, \beta a_k, \ldots, a_l, \ldots, a_m$ — последовательные строки матрицы $\widetilde{A}$;

3. *прибавлением к строке матрицы* A *другой ее строки, умноженной на число* γ, если $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_l + \gamma a_k, \ldots, a_m$ — последовательные строки матрицы $\widetilde{A}$.

Замечание. Во всех трех типах преобразований отмеченные многоточием строки не претерпевают никаких изменений.

Преобразования указанных трех типов называются *элементарными преобразованиями строк* матрицы A. Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов матрицы.

Пример. Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

получена из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

перестановкой 2-й и 3-й строк, а матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получена из матрицы A перестановкой 1-го и 2-го столбцов.

Если к 1-й строке матрицы A прибавить 3-ю, умноженную на -2, то получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -12 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Замечание. Нетрудно увидеть, что если матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A элементарным преобразованием строк любого из трех типов, то и матрицу A можно получить из матрицы $\widetilde{A}$ элементарным преобразованием строк, причем того же типа (либо вновь меняя местами k-ю и l-ю строки, либо умножая k-ю строку на $1/\beta$, либо прибавляя к l-й строке k-ю строку, умноженную на $-\gamma$).

Основной процесс

Опишем метод, который позволяет при помощи элементарных преобразований строк приводить произвольную матрицу к матрице более простого вида.

Пусть $\mathsf{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m\times n}$ — ненулевая матрица.

1-й шаг. То, что матрица A — ненулевая, означает, что в ней есть хотя бы один элемент, не равный нулю. Так как он расположен в какой-то строке, то в матрице A есть ненулевые строки. Выберем ту из них, в которой первый отличный от нуля элемент расположен в столбце с наименьшим номером $k_1 \geqslant 1$. Применив к матрице A преобразование 1-го типа, переставим эту строку на место первой строки. В результате этого преобразования матрица A переходит в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha^{(1)}_{1k_1} & \dots & \alpha^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2k_1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{mk_1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\alpha^{(1)}_{1k_1} \neq 0$.

Покажем теперь, как добиться того, чтобы все элементы k_1-го столбца матрицы (12), кроме первого его элемента $\alpha^{(1)}_{1k_1}$, оказались равными нулю.

Если к i-й строке матрицы (12) ($i = 2, \dots, m$) прибавить первую строку, умноженную на

$$-\frac{\alpha_{ik_1}}{\alpha^{(1)}_{1k_1}}$$

(это преобразование 3-го типа), то в результате получим матрицу, у которой элемент в позиции (i, k_1) будет равен нулю. Проведя эту операцию с каждой из строк, содержащих ненулевые элементы в k_1-м столбце, приходим к матрице вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha^{(1)}_{1k_1} & \dots & \alpha^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha^{(1)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Конец 1-го шага.

В дальнейших преобразованиях *первая строка не участвует*.

Возможны два случая:

1. Все строки матрицы (13), кроме первой, нулевые. В этом случае считаем процесс преобразований завершенным.

2. У матрицы (13) есть ненулевые строки, кроме первой.

2-й шаг. Выберем ту из них, в которой первый ненулевой элемент располагается в столбце с наименьшим номером, например, k_2 (вследствие специального выбора строки на первом шаге и выполненных выше преобразований $k_1 < k_2$). Применив к матрице (13) преобразование первого типа, переставим эту строку на место второй строки. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha^{(1)}_{1k_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{(2)}_{2k_2} & \dots & \alpha^{(2)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{(1)}_{mk_2} & \dots & \alpha^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\alpha_{2k_2}^{(2)} \neq 0$. Прибавляя к i-й строке ($i = 3, \ldots, m$) матрицы (14) вторую строку, умноженную на

$$-\frac{\alpha_{ik_2}^{(1)}}{\alpha_{2k_2}^{(2)}},$$

далее действуем по той же схеме, что и при первом шаге.

Конец 2-го шага.

В общем случае может возникнуть необходимость 3-го и последующих шагов. Однако суммарное число шагов не превосходит $\min(m, n)$. Поэтому обязательно наступит момент, когда процесс преобразований завершится, и мы получим матрицу следующего *ступенчатого* вида —

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1k_1}^{(1)} & \ldots\ldots & & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2k_2}^{(2)} & \ldots\ldots & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{rk_r}^{(r)} & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \quad \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \quad \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ и

$$\alpha_{1k_1}^{(1)} \neq 0, \quad \alpha_{2k_2}^{(2)} \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{rk_r}^{(r)} \neq 0.$$

Матрица вида (15) называется *ступенчатой*. Тем самым, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Любую матрицу можно привести к ступенчатой матрице при помощи конечного числа элементарных преобразований строк* (1*-го и* 3*-го типов*).

Пример 1. Привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

к матрице ступенчатого вида.

◀ Поменяем местами 1-ю и 4-ю строки матрицы A:

$$A \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами 3-ю и 4-ю строки матрицы A_1:

$$A_1 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 — ступенчатая. ▶

Пример 2. Привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

к ступенчатой.

◀ Поменяем местами первую и третью строки

$$A \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1-й шаг. Вычитаем из второй, третьей и четвертой строк первую строку, умноженную соответственно на числа 5, 3 и 7. Тогда

$$A_1 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг. Для простоты последующих вычислений воспользуемся элементарным преобразованием строк 2-го типа (хотя они и не использовались в описанном выше процессе, но их применение часто упрощает вычисления): умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, третью — на $\frac{1}{2}$, четвертую — на $\frac{1}{2}$. Тогда

$$A_2 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из третьей и четвертой строк вторую строку, умноженную на 1 и 2 соответственно. Тогда

$$A_3 \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3-й шаг. Замечая, что третья строка нулевая, переставим ее с четвертой. Тогда

$$A_4 \Rightarrow A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица A_5 является ступенчатой. ▶

Ступенчатую матрицу при помощи элементарных преобразований ее столбцов можно привести к матрице, имеющей еще более простой вид

$$\begin{array}{cc} & r \\ r & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad (16)$$

(все элементы матрицы, кроме единиц, стоящих в позициях $(1,1)$, $(2,2)$, $\ldots$, (r,r) равны нулю).

Путем перестановки в матрице (15) столбцов с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_r$ на места первого, второго, ..., r-го столбцов соответственно (это преобразования 1-го типа) получаем трапециевидную матрицу

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & \dots & \dots & \widetilde{\alpha}_{2n} \\ & \widetilde{\alpha}_{22} & \dots & \widetilde{\alpha}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \widetilde{\alpha}_{rr} \ \dots & \widetilde{\alpha}_{rn} \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где $\widetilde{\alpha}_{11} \neq 0$, $\widetilde{\alpha}_{22} \neq 0$, ..., $\widetilde{\alpha}_{rr} \neq 0$.

Пример 2 (продолжение). Например, переставляя 3-й и 5-й столбцы матрицы A_5, получаем, что

$$A_5 \Rightarrow A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 13 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к j-му столбцу матрицы (17) первый столбец, умноженный на

$$-\frac{\widetilde{\alpha}_{1j}}{\widetilde{\alpha}_{11}}, \qquad j = 2, \dots, n$$

(преобразования 3-го типа), получим в результате всех таких преобразований матрицу, первая строка которой содержит только один ненулевой элемент — $\widetilde{\alpha}_{11}$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{\alpha}_{22} & \dots & \dots & \dots & \widetilde{\alpha}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\alpha}_{rr} & \dots & \widetilde{\alpha}_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упрощая аналогично 2-ю, 3-ю, ..., r-ю строки, в итоге получим

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & & & 0 \\ & \widetilde{\alpha}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widetilde{\alpha}_{rr} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

К виду (16) матрица (18) приводится элементарными преобразованиями 2-го типа.

Пример 2 (продолжение). Подвергая матрицу A_6 таким преобразованиям, приходим к матрице

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, далее,

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8. Матрицы элементарных преобразований

С элементарными преобразованиями тесно связаны квадратные матрицы — *матрицы элементарных преобразований*. Так называются матрицы следующих трех типов.

1-й тип. Матрицы, получающиеся из единичной матрицы перестановкой любых двух строк. Например, матрица

$$\mathsf{P}_{ij} = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccccccc} &&& i &&&& j &&& \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&& \vdots &&&& \vdots &&& \\
& \ddots && \vdots &&&& \vdots &&& \\
&& 1 & \vdots &&&& \vdots &&& \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
\cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
&&& \vdots &&&& \vdots & 1 && \\
&&& \vdots &&&& \vdots && \ddots & \\
&&& \vdots &&&& \vdots &&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

получена из единичной матрицы

$$\begin{array}{c@{}c}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \text{\Large 0} && \\
&&& 1 &&&&&&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
& \text{\Large 0} &&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

перестановкой i-й и j-й строк (в матрице P_{ij} все элементы вне главной диагонали кроме тех, которые располагаются в позициях (i, j) и (j, i), равны нулю).

2-й тип. Матрицы, получающиеся из единичной заменой диагонального элемента на произвольное не равное нулю число. Например, матрица

$$\mathsf{D}_j = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccc} &&& j &&& \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&& \vdots &&& \\
& \ddots && \vdots &&& \\
&& 1 & \vdots &&& \\
\cdots & \cdots & \cdots & \beta & \cdots & \cdots & \cdots \\
&&& \vdots & 1 && \\
&&& \vdots && \ddots & \\
&&& \vdots &&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

отличается от единичной матрицы лишь элементом $\beta \neq 0$ в позиции (j, j) (в матрице D_j все элементы вне главной диагонали равны нулю).

3-й тип. Матрицы, отличающиеся от единичной матрицы лишь одним внедиагональным элементом.

Например, матрица

$$\mathsf{L}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & & & \\ & \ddots & \vdots & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \gamma & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & \vdots & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

отличается от единичной лишь элементом γ в позиции (i, j), а матрица

$$\mathsf{R}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \gamma & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

отличается от единичной тоже элементом γ, но в позиции (j, i) (все другие внедиагональные элементы матриц L_{ij} и R_{ij}, кроме указанных, равны нулю).

Сформулируем основное свойство матриц элементарных преобразований.

Теорема 2. *Элементарные преобразования произвольной матрицы равносильны умножению этой матрицы на матрицы элементарных преобразований:*

А. *Элементарные преобразования строк матрицы* A —

1. *Умножение матрицы* A *на матрицу* P_{ij} *слева переставляет строки с номерами* i *и* j.

2. *Умножение матрицы* A *на матрицу* D_j *слева равносильно умножению* j*-й строки матрицы* A *на число* β.

3. *Прибавление к* j*-й строке матрицы* A *ее* i*-й строки, умноженной на число* γ, *равносильно умножению матрицы* A *на матрицу* L_{ij} *слева.*

Б. *Элементарные преобразования столбцов матрицы* A —

1. *Умножение матрицы* A *на матрицу* P_{ij} *справа переставляет столбцы с номерами* i *и* j.

2. *Умножение матрицы* A *на матрицу* D_j *справа равносильно умножению* j*-го столбца матрицы* A *на число* β.

3. *Прибавление к* j*-му столбцу матрицы* A *ее* i*-го столбца, умноженного на число* γ, *равносильно умножению матрицы* A *на матрицу* R_{ij} *справа.*

◀ Для простоты ограничимся случаем $m = n = 3$. Пусть A — квадратная матрица третьего порядка

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

1. В п. 1.4 («Умножение матриц») было показано (см. пример 2), что при умножении матрицы A на матрицу

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

слева получается матрица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix},$$

а при умножении A на P_{23} справа — матрица

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{32} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица B отличается от матрицы A порядком строк, а матрица C — порядком столбцов.

Аналогично проверяется справедливость свойства **1** для матриц P_{12} и P_{13}.

2. Умножим матрицу A на

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

а) при умножении слева

$$D_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta\alpha_{21} & \beta\alpha_{22} & \beta\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix};$$

б) при умножении справа

$$AD_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяется справедливость свойства **2** для матриц D_1 и D_3.

Подобным же образом можно убедиться в справедливости свойства **3**. ▶

§ 2. Определители

Свяжем с каждой квадратной матрицей число — *определитель матрицы* — по следующему правилу.

Будем считать, что *определитель матрицы*

$$(\alpha_{11})$$

первого порядка равен числу α_{11}.

Определителем матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, равное $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Обозначение:

$$\boxed{\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.} \tag{1}$$

Определителем матрицы третьего порядка

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$$

называется число, равное

$$\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} - \alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} + \alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix}.$$

С учетом формулы (1) получаем:

$$\boxed{\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} =$$

$$\boxed{= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}.} \tag{2}$$

Формулу (2) легче запомнить, если воспользоваться двумя правилами для построения слагаемых определителя, символически описанными на рисунке 4. На левом рисунке показано, как выбирать сомножители первых трех слагаемых определителя, а на правом — трех последних.

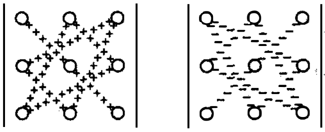


Рис. 4

Предположим теперь, что определители матриц, порядок которых меньше n, уже введены. *Определителем матрицы n-го порядка*

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \tag{3}$$

называется число, равное

$$\boxed{D = \alpha_{11}M_{11} - \alpha_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{n1}M_{n1}.} \tag{4}$$

Здесь M_{i1} $(i = 1, \ldots, n)$ — определитель матрицы порядка $n-1$:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{22} & \ldots\ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{i-1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i-1,n}\\ \alpha_{i+1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{i+1,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n2} & \ldots\ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица (5) получена из матрицы A путем вычеркивания первого столбца и i-й строки.

Обозначение:

$$\boxed{D = \det\mathsf{A} = |\mathsf{A}| = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}.} \tag{6}$$

Формула (4) называется *разложением определителя по первому столбцу.* Нетрудно проверить непосредственно, что при $n = 2$ и $n = 3$ эта формула дает те же числа, что и формулы (1) и (2) соответственно. Например, при $n = 3$ имеем

$$D = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}) - \alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{13}) + \alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}). \tag{7}$$

Формула (4) допускает сокращенную запись

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha_{i1}M_{i1}.} \tag{8}$$

Пример. Вычислим определитель *треугольной* матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

◀ Имеем

$$|A| = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \dots = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}.$$

Таким образом,

определитель треугольной матрицы (матрицы треугольного вида) равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали. ▶

Обратимся к общей ситуации. Пусть теперь i и j — произвольные числа из набора $1, 2, \dots, n-1, n$. Определитель матрицы порядка $n-1$, которая получается из матрицы A вычеркиванием элементов i-й строки и j-го столбца, называется *дополнительным минором* элемента α_{ij} и обозначается через M_{ij} (рис. 5). Таким образом, M_{i1} — дополнительный минор элемента α_{i1}.

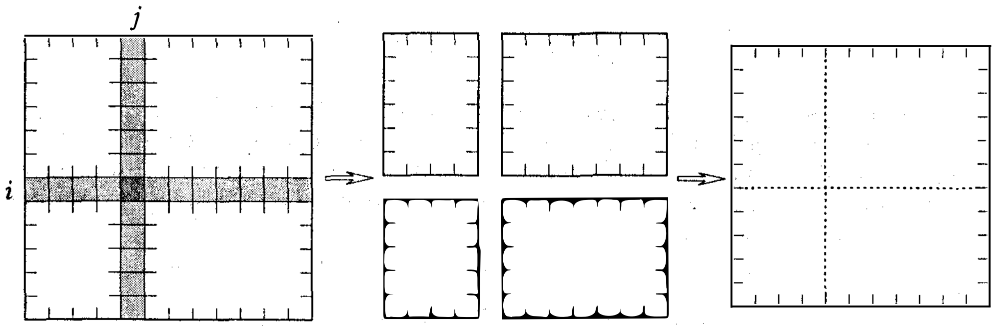


Рис. 5

По аналогии с формулой (8) введем числа D_j:

$$\boxed{D_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}M_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.} \tag{9}$$

Покажем, что все числа $D = D_1, D_2, \dots, D_n$ равны между собой.

◀ Для простоты ограничимся рассмотрением случая $n = 3$. Тогда из формул (9) при $j = 2$ получаем

$$D_2 = -\alpha_{12}M_{12} + \alpha_{22}M_{22} - \alpha_{32}M_{32}. \tag{10}$$

Каждый минор M_{i2} ($i = 1, 2, 3$) является определителем второго порядка —

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Вычислим определители (11) в соответствии с правилом (1) и, подставляя результаты

$$M_{12} = \alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}, \quad M_{22} = \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{13}, \quad M_{32} = \alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{13}$$

в формулу (10), получим, что

$$D_2 = -\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}) + \alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{13}) - \alpha_{32}(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{13}). \tag{12}$$

Сравнивая правые части соотношений (7) и (12), убеждаемся в том, что $D = D_2$. Подобным же образом проверяется равенство $D = D_3$. ▶

Замечание. Равенства $D = D_1 = \ldots = D_n$ в общем случае также доказываются путем сведения к вычислению определителей меньшего порядка ($(n-1)$-го и $(n-2)$-го).

Таким образом, доказана формула

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} M_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n,} \tag{13}$$

коротко называемая *разложением определителя по j-му столбцу.*

Придадим полученному результату несколько иной вид. Число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \tag{14}$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij} в определителе $|A|$. Заметим, что алгебраическое дополнение A_{ij} элемента α_{ij} зависит только от его позиции (i, j) в матрице A. При замене элемента α_{ij} матрицы на любое другое число алгебраическое дополнение A_{ij} не изменяется. С учетом обозначения (14) формулу (13) можно записать в следующем виде:

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij} = \alpha_{1j} A_{1j} + \ldots + \alpha_{nj} A_{nj}, \qquad j = 1, \ldots, n.} \tag{15}$$

Тем самым, показано, что

определитель квадратной матрицы равен сумме попарных произведений элементов произвольного столбца на их алгебраические дополнения.

По аналогии с формулами (9) вводятся числа

$$\boxed{\Delta_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}M_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,} \tag{16}$$

также равные между собой. Чтобы убедиться в этом, достаточно, поменяв ролями строки и столбцы, дословно повторить предыдущие рассуждения.

Имеет место следующий замечательный факт.

Теорема 3. *Для любого* $i = 1, \ldots, n$

$$D = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}M_{ij}. \tag{17}$$

Иными словами, справедливо разложение определителя по i-й строке.

◀ Достаточно убедиться в том, что

$$\Delta_1 = D. \tag{18}$$

Вновь ограничимся случаем $n = 3$. Согласно правилу (16), имеем

$$\Delta_1 = \alpha_{11}M_{11} - \alpha_{12}M_{12} + \alpha_{13}M_{13}$$

и далее

$$\Delta_1 = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}).$$

Сравнивая полученный результат с формулой (7), убеждаемся в справедливости требуемого равенства (18). ▶

Замечание. В общем случае равенство $\Delta_1 = D$ также доказывается путем сведения к вычислению определителей меньшего порядка ($(n-1)$-го и $(n-2)$-го).

С учетом обозначения (14) полученный результат можно записать следующим образом:

$$D = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}A_{ij} = \alpha_{i1}A_{i1} + \ldots + \alpha_{in}A_{in}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

— *определитель квадратной матрицы равен сумме попарных произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.*

Пример. Вычислим определители матриц элементарных преобразований.

◀ Раскладывая определитель матрицы P_{ij}

$$
|\mathrm{P}_{ij}| = \begin{array}{ccccccccc}
 & & & i & & & j & & \\
 & 1 & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \ddots & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & 1 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \cdots\cdots & & 0 & \cdots\cdots & & 1 & \cdots\cdots & i \\
 & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\
 & \cdots\cdots & & 1 & \cdots\cdots & & 0 & \cdots\cdots & j \\
 & & & \vdots & & & \vdots & 1 & \\
 & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & \vdots & 1 &
\end{array}
$$

по 1-й строке и затем повторяя эту операцию достаточное число раз $(n-2)$, придем в результате к следующей формуле

$$|P_{ij}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как матрица D_j элементарных преобразований 2-го типа имеет диагональный вид, то

$$|D_j| = \beta.$$

Для матрицы L_{ij} третьего типа получаем

$$|L_{ij}| = 1. \blacktriangleright$$

2.1. Свойства определителя

1. Линейность

Пусть в определителе D i-я строка является линейной комбинацией двух n-строк:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\beta_1 + \mu\gamma_1 & \dots & \lambda\beta_n + \mu\gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} i\ .$$

Тогда

$$\boxed{D = \lambda D' + \mu D'',}$$

где определители

$$D' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \end{vmatrix} i\ , \qquad D'' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \end{vmatrix} i$$

отличаются от определителя D только i-ми строками.

◀ Чтобы убедиться в справедливости этого свойства, достаточно разложить определители D, D' и D'' по i-й строке. Так как алгебраические дополнения A_{ij} элементов i-й строки у всех трех определителей одинаковы, то согласно формуле (19) имеем

$$D = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\beta_j + \mu\gamma_j)A_{ij}, \quad D' = \sum_{j=1}^{n} \beta_j A_{ij}, \quad D'' = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j A_{ij}.$$

Отсюда следует, что $D = \lambda D' + \mu D''$. ▶

2. Антисимметричность

Если определитель $\widetilde{D}$ получен из определителя D перестановкой двух строк, то

$$\boxed{\widetilde{D} = -D.}$$

◀ Предположим, что определитель $\widetilde{D}$ получен из определителя D перестановкой первых двух строк:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель D по второй строке, а определитель $\widetilde{D}$ — по первой строке. Согласно формуле (17) получим соответственно

$$D = -\alpha_{21}M_{21} + \alpha_{22}M_{22} + \ldots + (-1)^{2+n}\alpha_{2n}M_{2n},$$
$$\widetilde{D} = \alpha_{21}M_{21} - \alpha_{22}M_{22} + \ldots + (-1)^{1+n}\alpha_{2n}M_{2n}.$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{D} = -D$.

При перестановке любых двух строк определителя D доказательство проводится аналогично. ▶

3. Транспонирование определителя

При транспонировании матрицы определитель не изменяется

$$\boxed{|A^T| = |A|.}$$

Это свойство непосредственно вытекает из доказанной выше теоремы: разложение определителя $|A|$ по первой строке совпадает с разложением определителя $|A^T|$ по первому столбцу.

Заметим, чтосвойства 1 и 2 справедливы и для столбцов (это следует из свойства 3).

4. Определитель произведения квадратных матриц

Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, т. е. если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то

$$\boxed{|AB| = |A| \cdot |B|.}$$

Сформулируем свойства определителя, удобные при практических вычислениях.

1. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю.

◀ В самом деле, при перестановке двух любых строк, согласно свойству 2, определитель должен изменить знак на противоположный; с другой стороны, при перестановке двух одинаковых строк определитель не меняется. Значит, $D = -D$, откуда вытекает, что $D = 0$. ▶

2. Умножение строки определителя на число равносильно умножению самого определителя на это число.

◀ Это вытекает из свойства 1 при $\mu = 0$. ▶

3. Определитель с нулевой строкой равен нулю.

◀ Достаточно разложить определитель по нулевой строке. ▶

4. Определитель, одна из строк которого равна произведению другой его строки на число, равен нулю.

◀ В силу свойства 2 множитель можно вынести за знак определителя, после чего остается определитель с двумя равными строками. ▶

5. Если к строке определителя прибавить другую его строку, умноженную на любое число, то полученный определитель будет равен исходному.

◀ Полученный определитель согласно свойству 1 равен сумме двух определителей — исходного и определителя, одна из строк которого равна произведению другой его строки на число. ▶

Итог: *определитель не изменится, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других строк определителя.*

То же самое справедливо и для столбцов определителя.

Задача. Доказать, что сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки определителя равна нулю.

◀ Заменим в определителе

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (i \neq k)$$

элементы k-й строки соответствующими элементами i-й строки. Получим определитель

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

с двумя одинаковыми строками — i-й и k-й. Согласно свойству 1, $\tilde{D} = 0$.

Раскладывая определитель $\tilde{D}$ по k-й строке, получим требуемое равенство

$$\alpha_{i1}A_{k1} + \ldots + \alpha_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k)$$

(напомним, что изменение элементов строки определителя не изменяет алгебраических дополнений этих элементов). ▶

§ 3. Вычисление определителя

Прежде чем обратиться к описанию вычисления определителя при помощи элементарных преобразований, отметим, что при преобразованиях первого типа определитель изменяет знак (свойство 1), при преобразованиях второго типа определитель умножается на то же число (свойство 2), а при преобразованиях третьего типа определитель не изменяется.

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 4 \\ 4 & -10 & 8 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

◀ Элемент $\alpha_{11} \neq 0$. Не все элементы первого столбца делятся на α_{11} нацело. Чтобы избежать деления элементов матрицы, умножим 2-ю строку на -2, 3-ю на -1 и четвертую на 2. Получим

$$(-2)\cdot(-1)\cdot(2)|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ -6 & 8 & -14 & -8 \\ -4 & 10 & -8 & -3 \\ -6 & 4 & -10 & 6 \end{vmatrix}.$$

1-й шаг. Прибавляем ко второй, третьей и четвертой строкам первую строку, умноженную соответственно на 3, 2 и 3. Тогда

$$4|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

2-й шаг. Чтобы избежать деления, умножим последнюю строку на -7. Тогда

$$(-7)\cdot 4|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 77 & -14 & -105 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к четвертой строке вторую строку, умноженную на 11, получим

$$-28|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -36 & -94 \end{vmatrix}.$$

3-й шаг. Переставляем третью и четвертую строки:

$$-28|\mathsf{A}| = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -36 & -94 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя определитель полученной треугольной матрицы, имеем

$$-28|\mathsf{A}| = (-2)\cdot(-7)\cdot(-36)\cdot 3.$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$|\mathsf{A}| = 54. \blacktriangleright$$

§ 4. Обратная матрица

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если определитель этой матрицы не равен нулю.

Пусть $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n. Построим новую квадратную матрицу B порядка n по следующему правилу: в i-ю строку и j-й столбец матрицы B — в позицию (i, j) — помещается число, равное алгебраическому дополнению A_{ji} элемента α_{ji} матрицы A:

$$\boxed{\mathsf{A} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & | & \alpha_{1n} \\ \text{———} & \alpha_{ji} & \text{———} \\ \alpha_{n1} & | & \alpha_{nn} \end{array}\right) & j \\ \begin{array}{ccc} \phantom{\alpha_{11}} & i & \phantom{\alpha_{1n}} \end{array} & \end{array} \Rightarrow \mathsf{B} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & | & A_{n1} \\ \text{———} & A_{ji} & \text{———} \\ A_{1n} & | & A_{nn} \end{array}\right) & i \\ \begin{array}{ccc} \phantom{A_{11}} & j & \phantom{A_{n1}} \end{array} & \end{array}.}$$

Матрица B обладает следующим важным свойством:

$$\boxed{\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = \begin{pmatrix} |\mathsf{A}| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\mathsf{A}| \end{pmatrix} = |\mathsf{A}|\cdot \mathsf{I}.} \qquad (1)$$

Докажем, например, равенство

$$\mathsf{AB} = |\mathsf{A}|\cdot \mathsf{I}.$$

◀ Элемент произведения AB, находящийся в позиции (i, j), вычисляется по формуле

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{jk}.$$

При $i = j$ получаем разложение определителя матрицы А по i-й строке:

$$\gamma_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{ik} = |\mathrm{A}|.$$

При $i \neq j$ согласно разобранной выше (в § 2) задаче

$$\gamma_{ij} = 0. \blacktriangleright$$

Равенство

$$\mathrm{BA} = |\mathrm{A}| \cdot \mathrm{I}$$

обосновывается аналогично.

Матрица

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{|\mathrm{A}|} & \dots & \dfrac{A_{n1}}{|\mathrm{A}|} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{A_{1n}}{|\mathrm{A}|} & \dots & \dfrac{A_{nn}}{|\mathrm{A}|} \end{pmatrix} \tag{2}$$

называется *обратной* к матрице А.

Из формулы (1) вытекают равенства

$$\boxed{\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}, \quad \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}.} \tag{3}$$

Это означает, что матрицу A^{-1} можно рассматривать как решение сразу двух матричных уравнений

$$\boxed{\mathrm{AX} = \mathrm{I} \quad \text{и} \quad \mathrm{XA} = \mathrm{I},}$$

где

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

— неизвестная матрица.

Покажем, что других общих решений у этих матричных уравнений нет.

◀ Предположим, что для некоторой матрицы С выполняются равенства

$$\mathrm{AC} = \mathrm{I} \quad \text{и} \quad \mathrm{CA} = \mathrm{I}.$$

Умножим обе части каждого из равенств на матрицу A^{-1}: левого — слева, правого — справа. Получим

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AC}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{I}, \quad (\mathrm{CA})\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{IA}^{-1}. \tag{4}$$

Пользуясь свойствами операции умножения матриц, преобразуем правые части равенств (4):

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AC}) = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{C}, \quad (\mathrm{CA})\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{C}(\mathrm{AA}^{-1}).$$

В соответствии с формулой (3) и формулами (10) § 1 каждое из равенств (4) дает требуемое соотношение: $\mathrm{C} = \mathrm{A}^{-1}$. ▶

4.1. Метод Жордана

Укажем простой и эффективный способ вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Начнем с обоснования метода.

Теорема 4. *Произвольную невырожденную матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к единичной матрице.*

◀ Согласно теореме 1 любую матрицу при помощи элементарных преобразований строк (1-го и 3-го типов) можно привести к матрице ступенчатого вида. Если исходная матрица является квадратной и невырожденной, то она преобразуется к матрице, имеющей треугольный вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(3)} & \ldots & \alpha_{3n}^{(3)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\alpha_{11}^{(1)} \neq 0, \alpha_{22}^{(2)} \neq 0, \alpha_{33}^{(3)} \neq 0, \ldots, \alpha_{nn}^{(n)} \neq 0$.

Покажем это. Элементарные преобразования строк матрицы равносильны умножению этой матрицы слева на соответствующие матрицы элементарных преобразований (теорема 2). Как показано выше, матрицы элементарных преобразований невырождены. В силу свойства 4 определителя при умножении квадратных матриц их определители перемножаются. Поэтому при умножении невырожденной матрицы на любую из матриц элементарных преобразований вновь получаем невырожденную матрицу. Если ширина хотя бы одной «ступеньки» у получившейся в результате ступенчатой матрицы была бы больше одного элемента (см. рис. 6), то ее определитель равнялся бы нулю. Это противоречит предыдущему рассуждению. Тем самым, матрица (5) оказывается невырожденной, т. е.

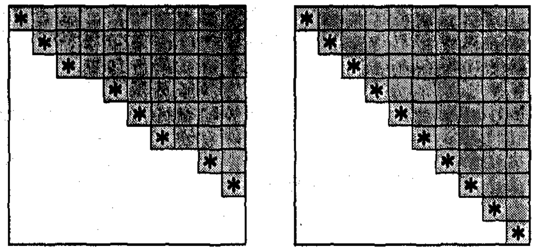


Рис. 6

$$\alpha_{11}^{(1)} \neq 0, \quad \alpha_{22}^{(2)} \neq 0, \quad \alpha_{33}^{(3)} \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{nn}^{(n)} \neq 0.$$

Элементарными преобразованиями строк 2-го типа полученная матрица (5) приводится к следующему виду

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\alpha}_{12} & \widetilde{\alpha}_{13} & \ldots & \widetilde{\alpha}_{1n} \\ 0 & 1 & \widetilde{\alpha}_{23} & \ldots & \widetilde{\alpha}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \widetilde{\alpha}_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Единичная матрица получается из матрицы (6) элементарными преобразованиями третьего типа: последовательно прибавляя к первым $n-1$ строкам последнюю, умноженную соответственно на $-\widetilde{\alpha}_{1n}, -\widetilde{\alpha}_{2n}, \ldots, -\widetilde{\alpha}_{n-1,n}$, приводим ее к матрице, у которой все элементы n-го столбца, кроме последнего, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\alpha}_{12} & \widetilde{\alpha}_{13} & \ldots & \widetilde{\alpha}_{1,n-1} & 0 \\ 0 & 1 & \widetilde{\alpha}_{23} & \ldots & \widetilde{\alpha}_{2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \widetilde{\alpha}_{3,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом, прибавляя к первым $n-2$ строкам полученной матрицы $(n-1)$-ю строку, умноженную соответственно на $-\widetilde{\alpha}_{1,n-1}, \ldots, -\widetilde{\alpha}_{n-2,n-1}$, придем к матрице, у которой все элементы последних двух столбцов, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, и т. д. Наконец, прибавляя к первой строке вторую, умноженную на $-\widetilde{\alpha}_{12}$, придем к единичной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. ▶$$

Доказанное утверждение позволяет переформулировать теорему 4 в матричной форме:

Теорема 5. *Для любой невырожденной матрицы* A *можно указать матрицы элементарных преобразований* $Q_1, \ldots, Q_k$ *такие, что*

$$Q_k \ldots Q_1 A = I. \tag{7}$$

Умножим обе части равенства (7) на матрицу A^{-1} справа. Получаем, что

$$Q_k \ldots Q_1 = A^{-1}.$$

4.2. Способ построения обратной матрицы

Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Составим расширенную матрицу

$$(A \mid I) \tag{8}$$

размера $n \times (2n)$. Если подвергнуть строки этой матрицы элементарным преобразованиям, соответствующим матрицам $Q_1, \ldots, Q_k$, то на месте матрицы A получится единичная матрица I, а на месте единичной матрицы I — матрица A^{-1}, обратная A. Иными словами, элементарными преобразованиями строк матрица (8) преобразуется в матрицу

$$(I \mid A^{-1}).$$

Таким образом, чтобы построить матрицу, обратную заданной квадратной невырожденной матрице $A = (\alpha_{ij})$, следует поступать так:

1. Составить расширенную матрицу

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы $(A \mid I)$ привести матрицу A к треугольному виду

$$(\widetilde{A} \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \widetilde{\alpha}_{12} & \ldots & \widetilde{\alpha}_{1n} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{\alpha}_{2n} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{array}\right).$$

(см. описание основного процесса, положенного в основу доказательства теоремы 1).

3. Элементарными преобразованиями строк матрицы $(\widetilde{A} \mid B)$ привести матрицу $\widetilde{A}$ к единичной

$$(I \mid C) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{array}\right).$$

(см. описание сведения матрицы (6) к единичной в теореме 4).

4. Полученная матрица C является обратной к матрице A:

$$C = A^{-1}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Составим расширенную матрицу

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1-й шаг. Вычитаем первую строку из всех последующих строк:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Элемент $\alpha_{22} = 0$. Меняем местами вторую и третью строки, затем вычитаем из четвертой строки полученную вторую:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

3-й шаг. Вычитаем из четвертой строки третью и делим все строки на их диагональные элементы:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right).$$

4-й шаг. Вычитаем последнюю строку из первых трех строк:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right).$$

5-й шаг. Вычитаем третью строку из первой строки:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right).$$

6-й шаг. Вычитаем вторую строку из первой строки:

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{4} A. \blacktriangleright$$

§5. Ранг матрицы

Выберем в матрице

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

k строк и k столбцов. Пусть

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

— номера выбранных строк и

$$j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

— номера выбранных столбцов. Построим матрицу k-го порядка

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_1j_2} & \dots & \alpha_{i_1j_k} \\ \alpha_{i_2j_1} & \alpha_{i_2j_2} & \dots & \alpha_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_kj_1} & \alpha_{i_kj_2} & \dots & \alpha_{i_kj_k} \end{pmatrix}$$

Определитель M_k этой матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы A. Ясно, что у матрицы размера $m \times n$ есть миноры, порядок которых равен $1, 2, \dots, \min(m, n)$.

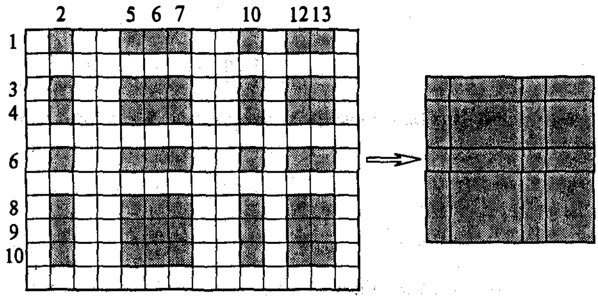


Рис. 7

Пример (см. рис. 7). Выберем в матрице А размера 11×14 7 строк и 7 столбцов:

1, 3, 4, 6, 8, 9, 10 — номера выбранных строк;

2, 5, 6, 7, 10, 12, 13 — номера выбранных столбцов.

Построим матрицу порядка 7 из элементов, располагающихся одновременно и в отобранных строках и в отобранных столбцах, сохранив их взаимное расположение. Получим матрицу, схематически изображенную на рис. 7 справа. Определитель этой матрицы будет минором 7-го порядка исходной матрицы. ▶

Пусть матрица A ненулевая. Тогда найдется число r такое, что

1) некоторый минор r-го порядка матрицы A отличен от нуля;

2) любой минор порядка s $(s > r)$ матрицы A (если таковой существует) равен нулю.

Число r называется *рангом матрицы* A.

Обозначение: rang A.

Ранг нулевой матрицы считаем равным нулю. Таким образом, для любой матрицы A размера $m \times n$

$$\boxed{0 \leqslant \operatorname{rang} A \leqslant \min(m, n).}$$

Отличный от нуля минор M_r, порядок которого равен рангу матрицы A, называется *базисным минором* матрицы A. Строки и столбцы матрицы A, которые содержат элементы базисного минора, называются *базисными*.

Теорема 6.

1. *Базисные строки матрицы* A *линейно независимы.*

2. *Каждая строка матрицы* A *может быть представлена в виде линейной комбинации базисных строк.*

Аналогичное утверждение справедливо и для базисных столбцов.

◄ Предположим для определенности, что базисный минор матрицы A имеет порядок r и расположен в ее левом верхнем углу:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline \alpha_{r+1,1} & \dots & \alpha_{r+1,r} & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mr} & \alpha_{m,r+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{array}\right). \tag{1}$$

Тогда первые r строк $a_1, \dots, a_r$ будут базисными.

1. Покажем, что строки $a_1, \dots, a_r$ линейно независимы. Будем рассуждать от противного. Пусть строки $a_1, \dots, a_r$ линейно зависимы. Тогда согласно утверждению п. 3 § 1 одна из строк является линейной комбинацией остальных. Пусть, например,

$$a_r = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{r-1} a_{r-1}.$$

Это означает, что в базисном миноре $M_r = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}$ r-я строка является линейной комбинацией остальных строк M_r. Отсюда в силу свойства определителя вытекает равенство $M_r = 0$, которое противоречит определению базисного минора. Тем самым, наше предположение о линейной зависимости строк $a_1, \dots, a_r$ неверно. Значит, они линейно независимы.

2. Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Покажем сначала, что для любых i и j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ выполняется равенство

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ij} \end{array}\right| = 0. \tag{2}$$

В самом деле, при $i \leqslant r$ у определителя Δ две одинаковых строки, при $j \leqslant r$ — два одинаковых столбца, а в остальных случаях (при $i > r$ и $j > r$) Δ является минором матрицы A порядка $r+1$. Тем самым, он оказывается равным нулю при всех обстоятельствах.

Зафиксируем i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и разложим определитель Δ по последнему столбцу. Имеем

$$\alpha_{1j}\Delta_1 + \alpha_{2j}\Delta_2 + \ldots + \alpha_{rj}\Delta_r + \alpha_{ij}M_r = 0. \tag{3}$$

Полученное равенство (3) выполняется для любого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$; при этом числа $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ от j не зависят. Полагая

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta_1}{M_r}, \quad \lambda_2 = -\frac{\Delta_2}{M_r}, \quad \ldots, \quad \lambda_r = -\frac{\Delta_r}{M_r},$$

перепишем равенство (3) в следующем виде

$$\alpha_{ij} = \lambda_1\alpha_{1j} + \ldots + \lambda_r\alpha_{rj}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

или, подробно,

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} &= \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_r\alpha_{r1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{in} &= \lambda_1\alpha_{1n} + \ldots + \lambda_r\alpha_{rn}. \end{aligned} \tag{4}$$

На основании полученных соотношений (4) заключаем, что

$$\mathrm{a}_i = \lambda_1\mathrm{a}_1 + \ldots + \lambda_r\mathrm{a}_r.$$

Тем самым, i-я строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_r$. Ввиду произвольности выбора i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ отсюда заключаем, что каждая строка матрицы является линейной комбинацией базисных. ▶

Утверждение. *Элементарные преобразования матрицы не увеличивают ее ранга.*

◀ Пусть матрица $\widetilde{A}$ ранга $\tilde{r}$ получена из матрицы A ранга r элементарным преобразованием строк 1-го типа. Рассмотрим в матрице $\widetilde{A}$ произвольный минор $\widetilde{M}_s$ порядка s и выберем в матрице A минор M_s того же порядка s по следующему правилу. Элементы минора M_s расположены в матрице A в тех же строках и в столбцах с теми же номерами, что и элементы минора $\widetilde{M}_s$ в матрице $\widetilde{A}$. Так как преобразование 1-го типа, переставляя строки матрицы, не изменяет их, то строки миноров M_s и $\widetilde{M}_s$ могут различаться только порядком расположения в минорах. Отсюда вытекает, что либо $\widetilde{M}_s = +M_s$, либо $\widetilde{M}_s = -M_s$.

По определению ранга все миноры матрицы A, порядок которых больше r, равны нулю. Поэтому из полученных равенств вытекает, что любой минор матрицы $\widetilde{A}$ порядка $s > r$ равен нулю: $\widetilde{M}_s = 0$. Это означает, что ранг матрицы $\widetilde{A}$ не может быть больше ранга матрицы A: $\tilde{r} \leqslant r$.

Похожими рассуждениями можно убедиться в справедливости неравенства

$$\boxed{\tilde{r} \leqslant r}$$

и для случая, когда матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк 2-го и 3-го типов.

Для столбцов доказательство проводится аналогично. ▶

Теорема 7. *Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.*

◀ Достаточно вспомнить, что если матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A элементарным преобразованием, то и матрицу A можно получить из матрицы $\widetilde{A}$ элементарным преобразованием (причем того же типа). С учетом доказанного выше утверждения из этого факта можно заключить, что и

$$r \leqslant \widetilde{r}.$$

Сопоставляя неравенства $\widetilde{r} \leqslant r$ и $r \leqslant \widetilde{r}$, получаем требуемое

$$\boxed{\widetilde{r} = r.}$$ ▶

Замечание. Число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно ее рангу.

◀ В самом деле, минор порядка r ступенчатой матрицы, элементы которого расположены в ее первых r строках и в столбцах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_r$, отличен от нуля,

$$\begin{vmatrix} \alpha^{(1)}_{1k_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{(r)}_{rk_r} \end{vmatrix} = \alpha^{(1)}_{1k_1} \ldots \alpha^{(r)}_{rk_r} \neq 0,$$

а любой минор порядка $s > r$ содержит нулевую строку и, значит, равен нулю. ▶

Тем самым, элементарные преобразования матрицы предоставляют простой и эффективный способ отыскания ранга произвольной матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

◀ *1-й шаг.* Вычитая из второй и третьей строк первую строку, умноженную соответственно на 2 и 1, получим, что

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг. Вычитаем из третьей строки вторую строку, умноженную на 2. Тогда

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$ ▶

§ 6. Система линейных уравнений

6.1. Основные понятия

Пусть дана матрица

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

первые n столбцов которой ненулевые. Совокупность соотношений

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \end{array}} \tag{2}$$

где числа $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как величины, подлежащие определению (*неизвестные*), называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными*, или, коротко, — *линейной системой*. Числа α_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* линейной системы (2), а числа β_i $(i = 1, \ldots, m)$ — ее *свободными членами*.

Решением линейной системы (2) называется упорядоченная совокупность чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, которая при подстановке в каждое уравнение системы (2) вместо совокупности неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ обращает его в тождество. Линейная система называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной*, если решений нет. Решения $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ системы (2) называются *различными*, если нарушено хотя бы одно из равенств

$$\gamma_1 = \gamma'_1, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad \ldots, \quad \gamma_n = \gamma'_n.$$

Совместная система называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет не менее двух различных решений.

Линейная система (2) допускает более компактную (*матричную*) запись:

$$\boxed{\mathrm{A}\mathrm{X} = \mathrm{b},} \tag{3}$$

где

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица A называется *матрицей системы* (2), b — *столбцом свободных членов*, X — *столбцом неизвестных*. Исходная матрица

$$\widehat{\mathrm{A}} = (\mathrm{A} \mid \mathrm{b})$$

называется *расширенной матрицей системы* (2). Решением матричной системы (3) является столбец Γ, элементы которого суть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 8 (Кронекера—Капелли). *Линейная система совместна в том и только в том случае, если ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны.*

◀ Пусть линейная система (2) совместна. Это означает, что некоторый упорядоченный набор чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ обращает каждое из уравнений этой системы в тождество:

$$\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m1}\gamma_1 + \alpha_{m2}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_n = \beta_m.$$

Полученные соотношения можно понимать так: столбец свободных членов расширенной матрицы $\widehat{\mathrm{A}} = (\mathrm{A} \mid \mathrm{b})$ является линейной комбинацией ее первых n столбцов, т. е. столбцов матрицы A. Прибавим к последнему столбцу матрицы $\widehat{\mathrm{A}}$ первый столбец, умноженный на $-\gamma_1$, затем второй столбец, умноженный на $-\gamma_2, \ldots$, и, наконец, n-й столбец, умноженный на $-\gamma_n$. В результате получим матрицу

$$\widetilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A} \mid 0).$$

Ранг матрицы $\widetilde{A}$ совпадает с рангом матрицы $\widehat{A}$, так как проведенные элементарные преобразования столбцов 3-го типа не изменяют ранга матрицы (теорема 7). С другой стороны, ясно, что ранги матриц $\widetilde{A} = (A \mid 0)$ и A также равны. Тем самым,

$$\operatorname{rang} \widehat{A} = \operatorname{rang} \widetilde{A} = \operatorname{rang} A.$$

Пусть теперь ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Так как $\widehat{A} = (A \mid b)$, то у матриц A и $\widehat{A}$ есть общий базисный минор. Предположим для определенности, что порядок базисного минора равен r, и он расположен в левом верхнем углу обеих матриц. Этого всегда можно добиться путем перестановки уравнений и (в случае необходимости) перенумерации неизвестных. Согласно теореме 6 любой столбец матрицы $\widehat{A}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов. В частности, для столбца свободных членов (это последний столбец матрицы $\widehat{A}$) имеем

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \gamma_r \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \vdots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{1r}\gamma_r = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \alpha_{m2}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{mr}\gamma_r = \beta_m. \end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что упорядоченный набор n чисел

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, \ldots, 0$$

обращает каждое из уравнений исходной линейной системы в тождество. Это означает, что система (2) совместна. ▶

6.2. Эквивалентные линейные системы

Совокупность всех решений линейной системы будем называть *множеством решений системы*. Две линейные системы с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными* (*равносильными*), если множества их решений (возможно, пустые) совпадают. Другими словами, всякое решение одной системы является решением другой и, обратно, всякое решение второй системы является решением первой, либо обе системы не имеют решений.

Ясно, что линейная система однозначно задается своей расширенной матрицей. Возьмем две матрицы $\widehat{A}$ и $\widehat{A}'$ одного размера $m \times (n+1)$ и рассмотрим соответствующие им линейные системы

$$\begin{matrix} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, & & \alpha'_{11}x_1 + \ldots + \alpha'_{1n}x_n = \beta'_1, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (*) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (*') \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m; & & \alpha'_{m1}x_1 + \ldots + \alpha'_{mn}x_n = \beta'_m. & \end{matrix}$$

Будем говорить, что система $(*')$ получена из системы $(*)$ при помощи элементарных преобразований, если расширенная матрица $\widehat{A}'$ системы $(*')$ получается из расширенной матрицы $\widehat{A}$ системы $(*)$ элементарными преобразованиями строк.

Теорема 9. *Если линейная система $(*')$ получена из линейной системы $(*)$ элементарными преобразованиями, то системы $(*)$ и $(*')$ эквивалентны.*

◀ Предположим сначала, что система (∗) совместна. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — ее решение. Покажем, что этот набор при подстановке в каждое из уравнений системы (∗′) вместо набора неизвестных $x_1, \dots, x_n$ обращает его в тождество. Достаточно рассмотреть только те уравнения, которые подверглись преобразованиям.

Пусть система (∗′) получена из системы (∗) элементарным преобразованием:

1) *первого типа* — изменение порядка уравнений в системе не лишает набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ возможности обратить каждое из них в тождество;

2) *второго типа* — после умножения k-го тождества

$$\alpha_{k1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{kn}\gamma_n = \beta_k$$

на $\lambda \neq 0$ получаем соотношение

$$(\lambda\alpha_{k1})\gamma_1 + \dots + (\lambda\alpha_{kn})\gamma_n = \lambda\beta_k,$$

означающее, что набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ обращает уравнение

$$(\lambda\alpha_{k1})x_1 + \dots + (\lambda\alpha_{kn})x_n = \lambda\beta_k$$

в тождество;

3) *третьего типа* — выпишем преобразованное уравнение

$$(\alpha_{l1} + \mu\alpha_{k1})x_1 + \dots + (\alpha_{ln} + \mu\alpha_{kn})x_n = \beta_l + \mu\beta_k \tag{5}$$

и тождества, полученные из k-го и l-го уравнений системы (∗):

$$\alpha_{k1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{kn}\gamma_n = \beta_k,$$
$$\alpha_{l1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{ln}\gamma_n = \beta_l.$$

Умножим первое из этих тождеств на μ и, прибавив ко второму, получим тождество

$$(\alpha_{l1} + \mu\alpha_{k1})\gamma_1 + \dots + (\alpha_{ln} + \mu\alpha_{kn})\gamma_n = \beta_l + \mu\beta_k.$$

Подстановка набора $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в уравнение (5) приводит к тому же результату. Таким образом, в каждом из трех случаев система (∗) оказывается совместной, и набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ является ее решением — всякое решение системы (∗) является решением системы (∗′).

Так как система (∗) также может быть получена из системы (∗′) путем элементарных преобразований (см. Замечание п. 7 § 1), то, повторяя приведенные выше рассуждения для систем (∗′) и (∗), убеждаемся в том, что всякое решение системы (∗′) является решением системы (∗).

В том случае, когда система (∗) несовместна, несовместна также и система (∗′). В этом легко убедиться, рассуждая от противного: совместность системы (∗′), согласно доказанному выше, неизбежно влечет совместность системы (∗), которая по условию не имеет решений.

Ясно, что если система (∗′) получена из системы (∗) при помощи конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны. ▶

6.3. Метод Гаусса

Решить линейную систему — это значит:

1) выяснить, является ли система совместной или несовместной;

2) если система совместна, то найти множество ее решений.

Укажем способ решения линейной системы, состоящий в следующем: элементарными преобразованиями заданная система приводится к системе простого вида, для которой ответить на поставленные вопросы уже нетрудно.

Так как элементарные преобразования системы напрямую связаны с элементарными преобразованиями строк ее расширенной матрицы, будет удобно рассматривать их одновременно:

$$\begin{matrix} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m; \end{matrix} \qquad (*) \qquad \widehat{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right).$$

Как доказано в теореме 1 § 1.7, элементарными преобразованиями строк матрицу $\widehat{\mathrm{A}}$ можно привести к ступенчатой

$$\widehat{\mathrm{A}}' = \left(\begin{array}{cccccc|c} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1r}^{(1)} & \ldots & \alpha_{1n}^{(1)} & \beta_1^{(1)} \\ & \alpha_{22}^{(2)} & \ldots & \alpha_{2r}^{(2)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(2)} & \beta_2^{(2)} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \alpha_{rr}^{(r)} & \ldots & \alpha_{rn}^{(r)} & \beta_r^{(r)} \\ & & & & & & \beta_{r+1}^{(r)} \\ & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & \ldots \\ & & & & & & 0 \end{array}\right).$$

Соответственно преобразуется и система $(*)$.

Если свободный член $\beta_{r+1}^{(r)}$ отличен от нуля, то полученная (а значит, и исходная) система будет несовместна. В самом деле, $(r+1)$-е уравнение имеет следующий вид:

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = \beta_{r+1}^{(r)} \neq 0,$$

и никакой набор чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ не может обратить его в тождество.

Обратимся к случаю, когда $\beta_{r+1}^{(r)} = 0$. Тогда только первые r строк матрицы $\widehat{\mathrm{A}}'$ будут отличными от нуля. Выпишем соответствующие уравнения. Для простоты записи будем считать, что

$$k_2 = 2, \quad \ldots, \quad k_r = r$$

(этого можно добиться, временно перенумеровав искомые неизвестные: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_{k_2}, \ldots, y_r = x_{k_r}, \ldots$). Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)}x_1 + \alpha_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}^{(1)}x_r + \ldots + \alpha_{1n}^{(1)}x_n &= \beta_1^{(1)}, \\ \alpha_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}^{(2)}x_r + \ldots + \alpha_{2n}^{(2)}x_n &= \beta_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{rr}^{(r)}x_r + \ldots + \alpha_{rn}^{(r)}x_n &= \beta_r^{(r)}, \end{aligned} \qquad (*')$$

где $\alpha_{11}^{(1)} \neq 0$, $\alpha_{22}^{(2)} \neq 0, \ldots, \alpha_{rr}^{(r)} \neq 0$. Возможны два случая:

1. Число неизвестных n и число уравнений r в системе $(*')$ равны, $r = n$. Тогда система $(*')$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)}x_1 + \alpha_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + \alpha_{1n}^{(1)}x_n &= \beta_1^{(1)}, \\ \alpha_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + \alpha_{2n}^{(2)}x_n &= \beta_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= \beta_{n-1}^{(n-1)}, \\ \alpha_{nn}^{(n)}x_n &= \beta_n^{(n)}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{kk}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Из последнего уравнения однозначно определяется значение неизвестного x_n. Подставляя его в предыдущее $(n-1)$-е уравнение, находим значение неизвестного x_{n-1} и т. д. Наконец, подставляя найденные значения неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ в первое уравнение, однозначно определяем значение неизвестного x_1.

Таким образом, в рассматриваемом случае (при $r = n$) система $(*')$ имеет единственное решение. Это же верно и для системы $(*)$.

2. Число неизвестных n больше числа уравнений r, $n > r$. Придадим неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ (их называют *свободными*) произвольные значения $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ и, перенося соответствующие слагаемые в правые части уравнений системы, получим

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{(1)}x_1 + \alpha_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}^{(1)}x_r &= \beta_1^{(1)} - \alpha_{1,r+1}^{(1)}\gamma_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}^{(1)}\gamma_n,\\
\alpha_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}^{(2)}x_r &= \beta_2^{(2)} - \alpha_{2,r+1}^{(2)}\gamma_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}^{(2)}\gamma_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_{rr}^{(r)}x_r &= \beta_r^{(r)} - \alpha_{r,r+1}^{(r)}\gamma_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}^{(r)}\gamma_n.
\end{aligned}$$

Как и выше, мы можем последовательно определить значения *главных* неизвестных $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$. Поскольку значения $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ были выбраны произвольно, то в рассматриваемом случае множество решений линейной системы бесконечно.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2,\\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

◀ Составим расширенную матрицу системы,

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right),$$

и приведем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатой матрице.

1-й шаг. Чтобы получить элемент в позиции (1,1) равным 1, вычитаем из второй строки удвоенную первую строку и затем меняем их местами. Тогда

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1\\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

Вычитаем из второй и третьей строк первую, умноженную на 3 и 5 соответственно. Получим, что

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1\\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1\\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Вычитаем из третьей строки вторую:

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1\\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Система несовместна, так как $\operatorname{rang} A = 2$, а $\operatorname{rang} \widehat{A} = 3$. ▶

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8,\\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9,\\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7,\\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

◀ Составим расширенную матрицу системы:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right).$$

Прямой ход.

1-й шаг. Переставим первую и четвертую строки. Тогда элемент в позиции $(1, 1)$ будет равен 1. Вычитая затем из всех строк первую строку, умноженную соответственно на 4, 2 и 2, получаем

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Во избежание громоздких вычислений вычитаем из второй строки удвоенную третью строку, а из третьей четвертую. Затем у полученной матрицы вычитаем из второй строки третью:

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right).$$

Вычитая из третьей и четвертой строк вторую строку, умноженную на 2 и 11 соответственно, получаем, что

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right).$$

3-й шаг. Вычитаем из четвертой строки третью, умноженную на 4. Затем умножаем элементы третьей строки на $\frac{1}{7}$:

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместна, так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widehat{A} = 3$, и имеет единственное решение, так как ранг матрицы равен числу неизвестных.

Таким образом, исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -4, \\ \qquad\quad x_3 = 1. \end{cases}$$

Обратный ход.

Из третьего уравнения сразу видим, что $x_3 = 1$. Подставив это значение x_3 во второе уравнение, получаем $-x_2 - 2 = -4$, откуда $x_2 = 2$. После подстановки найденных значений для x_3 и x_2 в первое уравнение получаем $x_1 + 16 - 7 = 12$, откуда $x_1 = 3$.

Система имеет единственное решение:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1. \ ▶$$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

◀ Составим расширенную матрицу системы:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

1-й шаг. Вычитаем из второй и третьей строк первую строку, умноженную на 2 и 3 соответственно:

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Вычитаем из третьей строки удвоенную вторую

$$\widehat{A} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместна ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widehat{A} = 2$) и имеет бесконечное число решений ($\operatorname{rang} A < 4$).

Исходная система эквивалентна системе следующего вида

$$\begin{cases} \underline{3x_1} - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ \qquad\qquad \underline{-6x_3} - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы. Придадим свободным неизвестным x_2 и x_4 произвольные значения γ_2 и γ_4 соответственно и, перенося соответствующие слагаемые в правые части уравнений, получим

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 = 2 + 2\gamma_2 - 4\gamma_4, \\ \qquad 6x_3 = 1 \qquad\quad - 5\gamma_4. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5\gamma_4), \quad \gamma_4 \text{ — произвольное.}$$

Подставляя выражение для x_3 в первое уравнение, получим, что

$$x_1 = \frac{1}{18}(7 + 12\gamma_2 + \gamma_4), \quad \gamma_2, \gamma_4 \text{ — произвольные.}$$

Общее решение системы имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{18}(7 + 12\gamma_2 + \gamma_4), \quad x_2 = \gamma_2, \quad x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5\gamma_4), \quad x_4 = \gamma_4,$$

где γ_2 и γ_4 — произвольные числа. Частное решение можно получить из общего, если придать свободным неизвестным конкретные значения. Например, положив $\gamma_2 = 1$, $\gamma_4 = -1$, получим, что $x_1 = x_3 = 1$. Итак, частное решение системы:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1. \ ▶$$

6.4. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными — *квадратную систему*

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases}} \tag{6}$$

или, в матричной записи,

$$\boxed{AX = b.} \tag{7}$$

Если квадратная матрица A невырождена, то система (6) совместна и имеет единственное решение, так как $\operatorname{rang} A = n$.

Умножая обе части равенства (7) слева на матрицу A^{-1}, обратную к A, получаем, что

$$X = A^{-1}b.$$

С учетом формулы (2) § 4 для обратной матрицы имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Проведем необходимые вычисления в правой части и получим, что

$$\boxed{x_j = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\sum_{k=1}^{n}\beta_k A_{kj}, \quad j = 1, \dots, n,}$$

или, подробнее,

$$x_j = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \vdots & \beta_1 & \vdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \vdots & \beta_n & \vdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \vdots & \alpha_{1j} & \vdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \vdots & \alpha_{nj} & \vdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

В числителе располагается определитель матрицы, полученной из матрицы A линейной системы путем замены j-го столбца на столбец свободных членов, а в знаменателе — определитель матрицы A.

Важное замечание. Приведенное правило (8) имеет в значительной степени теоретический интерес, и в практических вычислениях (за исключением квадратных систем с двумя или тремя неизвестными) не применяется ввиду громоздкости.

Замечание. Необходимость вычисления $n+1$ определителя n-го порядка сильно увеличивает количество вычислений по сравнению с методом Гаусса: при непосредственном раскрытии определителей решение квадратной системы с n неизвестными требует порядка $n!n$ арифметических операций. Уже при $n = 30$ такое число операций для современных ЭВМ недоступно.

Общее число арифметических действий в методе Гаусса имеет порядок n^3.

Большинство распространенных точных методов решения линейных систем можно рассматривать как варианты метода Гаусса, различающиеся между собой лишь некоторыми деталями. Количество арифметических операций для всех таких методов примерно одно и тоже.

Чтобы найти решение линейной системы

$$\mathsf{AX} = \mathsf{b}$$

с квадратной невырожденной матрицей A, следует поступать так:

1. Составить расширенную матрицу системы:

$$\widehat{\mathsf{A}} = (\mathsf{A} \mid \mathsf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы $\widehat{\mathsf{A}}$ привести матрицу системы к треугольному виду:

$$(\widetilde{\mathsf{A}} \mid \widetilde{\mathsf{b}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \widetilde{\alpha}_{12} & \dots & \widetilde{\alpha}_{1n} & \widetilde{\beta}_1 \\ 0 & 1 & \dots & \widetilde{\alpha}_{2n} & \widetilde{\beta}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \widetilde{\beta}_n \end{array}\right).$$

3. Элементарными преобразованиями строк матрицы $(\widetilde{\mathsf{A}} \mid \widetilde{\mathsf{b}})$ привести матрицу A к единичной:

$$(\mathsf{I} \mid \mathsf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \gamma_n \end{array}\right).$$

4. Записать линейную систему, соответствующую полученной расширенной матрице $(\mathrm{I} \mid \mathrm{c})$:

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = \gamma_1, \\ & x_2 & & = \gamma_2, \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & x_n & = \gamma_n. \end{array}$$

Набор

$$x_1 = \gamma_1, \quad x_2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma_n$$

— решение исходной системы.

6.5. Однородные линейные системы

Линейная система называется *однородной*, если все свободные члены системы равны нулю:

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{array}} \tag{9}$$

Основные свойства однородной системы:

1. Однородная система всегда совместна.

◀ Набор $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ — *нулевое* решение, существующее у системы (9) всегда. ▶

2. Если число m уравнений однородной системы меньше числа n неизвестных, то эта система имеет ненулевые решения.

◀ Согласно сформулированному условию ранг r матрицы системы (9) удовлетворяет неравенству $r \leqslant m < n$. Это позволяет утверждать, что исходная система является неопределенной (см. п. 1). ▶

3. Сумма решений однородной системы (9) также является ее решением.

◀ Пусть $\gamma_1', \ldots, \gamma_n'$ и $\gamma_1'', \ldots, \gamma_n''$ — решения системы (9). Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j' = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j'' = 0$$

для любого $i = 1, \ldots, m$.

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\gamma_j' + \gamma_j'') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j'' = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то набор

$$\gamma_1' + \gamma_1'', \ldots, \gamma_n' + \gamma_n''$$

— *сумма решений* $\gamma_1', \ldots, \gamma_n'$ и $\gamma_1'', \ldots, \gamma_n''$ — решение однородной системы (9). ▶

4. Произведение решения однородной системы (9) на любое число также является решением этой системы.

◀ Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — решение системы (9):

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

μ — произвольное число. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\mu\gamma_j) = \mu\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тем самым, набор $\mu\gamma_1, \ldots, \mu\gamma_n$ — *произведение решения* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *на число* μ — решение системы (9). ▶

Часто оказывается удобной матричная запись однородной системы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, короче,

$$\boxed{\mathsf{A}\mathsf{X} = 0.} \tag{10}$$

Проведем доказательство свойств 3 и 4 в матричной записи.

◀ **Доказательство свойства 3.**

Пусть столбцы Γ' и Γ'' — решения системы (10): $\mathsf{A}\Gamma' = 0$ и $\mathsf{A}\Gamma'' = 0$. Тогда столбец $\Gamma' + \Gamma''$ также является решением системы (10), так как

$$\mathsf{A}(\Gamma' + \Gamma'') = \mathsf{A}\Gamma' + \mathsf{A}\Gamma'' = 0 + 0 = 0.$$

Доказательство свойства 4.

Пусть $\mathsf{A}\Gamma = 0$. Вычислим $\mathsf{A}(\mu\Gamma)$, где μ— любое число. Имеем

$$\mathsf{A}(\mu\Gamma) = \mu(\mathsf{A}\Gamma) = \mu 0 = 0. \blacktriangleright$$

Свойства 3 и 4 означают, что множество решений однородной системы с естественными правилами сложения решений и умножения решения на число является линейным пространством[2)].

Познакомимся с одним важным свойством линейного пространства решений однородной системы.

Применив к однородной системе (9) метод Гаусса, приведем ее к следующему виду:

$$\begin{aligned} x_1 + \beta_{12}x_2 + \ldots + \beta_{1r}x_r + \beta_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \beta_{1n}x_n &= 0, \\ x_2 + \ldots + \beta_{2r}x_r + \beta_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \beta_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + \beta_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \beta_{rn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь мы считаем для простоты, что неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ — главные (напомним, что этого всегда можно добиться путем временной перенумерации неизвестных).

[2)] Общее понятие линейного пространства будет рассмотрено в § 1 главы V.

Пусть ранг r матрицы системы (11) меньше числа n неизвестных, $r < n$. Построим $n-r$ решений системы (11), придавая свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ значения в соответствии со следующей таблицей

	x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_{n-1}	x_n
1	1	0	...	0	0
2	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...
$n-r-1$	0	0	...	1	0
$n-r$	0	0	...	0	1

(12)

Каждому набору значений свободных неизвестных соответствует решение системы (11):

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{n-r-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,n-r-1} \\ \vdots \\ \gamma_{r,n-r-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{n-r} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,n-r} \\ \vdots \\ \gamma_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Построенная совокупность решений $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-r}$ линейно независима. Покажем это.

◀ Рассмотрим линейную комбинацию

$$\mu_{r+1}\Gamma_1 + \ldots + \mu_n\Gamma_{n-r} = \begin{pmatrix} \mu_{r+1}\gamma_{11} + & \ldots & +\mu_n\gamma_{1,n-r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{r+1}\gamma_{r1} + & \ldots & +\mu_n\gamma_{r,n-r} \\ & \mu_{r+1} & \\ & \mu_{r+2} & \\ & \ldots & \\ & \mu_{n-1} & \\ & \mu_n & \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Легко заметить, что линейная комбинация (13) равна нулевому столбцу в том и только в том случае, когда $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \ldots = \mu_{n-1} = \mu_n = 0$. Это означает, что нулевому решению системы (11) равна лишь тривиальная линейная комбинация решений $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-r}$. ▶

В силу доказанных выше свойств 3 и 4 линейная комбинация (13) является решением системы (11) при любых $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_n$.

Покажем, что любое решение

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \\ \mu_{r+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

однородной системы (11) можно представить в виде линейной комбинации вида (13).

◀ Умножая решения $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-r}$ на $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_n$ соответственно и складывая, получим решение системы (11) в виде (13). Сравнивая формулы (13) и (14), нетрудно убедиться в том, что эти решения имеют одинаковый набор значений свободных неизвестных $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_n$. А так как по заданным значениям свободных неизвестных главные определяются однозначно, то сами решения совпадают:

$$\Gamma = \mu_{r+1}\Gamma_1 + \ldots + \mu_n\Gamma_{n-r}. \blacktriangleright$$

Таким образом, построенная совокупность решений $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-r}$ однородной системы (9) обладает следующими свойствами:

1. она линейно независима;

2. любое решение системы (9) можно представить в виде линейной комбинации решений $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-r}$.

Определение. Любая совокупность из $n-r$ решений однородной системы (9), удовлетворяющая условиям 1 и 2, называется *фундаментальной системой решений* однородной системы (9).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

◀ Применив метод Гаусса, получим

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ \qquad\qquad -6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

(см. пример 3 п. 3). Свободные неизвестные — x_2 и x_4. Составим таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4
$2/3$	1	0	0
$1/18$	0	$-5/6$	1

Фундаментальную систему решений образуют решения

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Любое решение Γ заданной системы можно представить в следующем виде:

$$\Gamma = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -15 \\ 18 \end{pmatrix},$$

где μ и ν — произвольные постоянные. ▶

Итог. *Для того, чтобы описать множество решений однородной системы, достаточно найти ее фундаментальную систему решений (ФСР), так как всевозможные линейные комбинации элементов ФСР и составляют это множество.*

Нетрудно заметить, что в таблицу (12) заключена единичная матрица порядка $n-r$.

Замечание 1. Требование (12) на набор свободных неизвестных не является обязательным для построения ФСР. Можно поместить в таблицу (12) любую невырожденную матрицу $(n-r)$-го порядка.

Замечание 2. Любая однородная линейная система, имеющая ненулевые решения, обладает ФСР.

Упражнения

1. Умножьте матрицу A на матрицу B, если

а) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Умножьте матрицу $\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$ на себя.

3. Вычислите произведения AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}.$$

4. Приведите матрицу к матрице ступенчатого вида:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&3&1\\1&2&1&4\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&5&6\\5&6&7&8\\31&23&55&42\end{pmatrix}.$$

5. Вычислите определитель:

$$\text{а)}\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&0&1&2\\2&1&0&1\\3&2&1&0\end{vmatrix};\quad \text{б)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&6&8&11\\7&13&20&26\\31&23&55&42\end{vmatrix};\quad \text{в)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&4&5&6\\5&6&7&9\\31&23&55&42\end{vmatrix}.$$

6. Найдите матрицу, обратную данной:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&2&-4\end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

7. Найдите ранг матрицы:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

8. Решите систему:

$$\text{а)}\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\x_1-x_2+x_3=1,\\-x_1+x_2-x_3=1;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=2,\\x_1+2x_2+x_3=-2,\\2x_1-x_2-x_3=-2;\end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases}7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8,\\-3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3,\\2x_1-x_2-x_3-2x_4=1,\\-x_1+x_3+2x_4=1;\end{cases}\qquad \text{г)}\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3=0,\\5x_1+x_2-2x_3=2,\\-2x_1-2x_2+x_3=-3.\end{cases}$$

9. Решите систему:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответы

1. а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2a & ab+2c \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $AB = (-1)$, $BA = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 40 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **5.** а) -12; б) 5; в) 80. **6.** а) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **7.** а) 2; б) 2; в) 3. **8.** а) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; в) $x_1 = -1 - \gamma_3 + 2\gamma_4$, $x_2 = -3 + \gamma_3 + 2\gamma_4$, $x_3 = \gamma_3$, $x_4 = \gamma_4$; г) система несовместна. **9.** а) $x_1 = x_3$, $x_2 = -2x_3$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $x_1 = x_2 = x_3 + 2x_4$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Глава V

ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение линейного пространства. Простейшие свойства

Определение. Множество V элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным пространством* (*действительным* или *комплексным*), если по некоторому правилу

I. любым двум элементам x и y из V поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый $x + y$ и называемый *суммой* элементов x и y;

II. любому элементу x из V и каждому числу α (вещественному или комплексному) поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый αx и называемый *произведением* элемента x *на число* α, и эти правила сложения и умножения на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);
2. $x + y = y + x$ (*коммутативность*);
3. во множестве V существует элемент θ такой, что для любого элемента x из V выполняется равенство $x + \theta = x$;
4. для любого элемента x из V во множестве V существует элемент $(-x)$ такой, что $x + (-x) = \theta$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1x = x$.

Элемент θ называется *нулевым* элементом, а элемент $(-x)$ — *противоположным* элементу x.

Элементы $x, y, z, \ldots$ линейного пространства часто называют *векторами*. Поэтому линейное пространство называют также *векторным пространством*.

Примеры линейных пространств.

1. Совокупность свободных геометрических векторов V_3 в пространстве с введенными в § 2 главы I операциями сложения векторов и умножения вектора на число (рис. 1).

Этим же свойством обладают: совокупность V_1 векторов на прямой и совокупность V_2 векторов на плоскости.

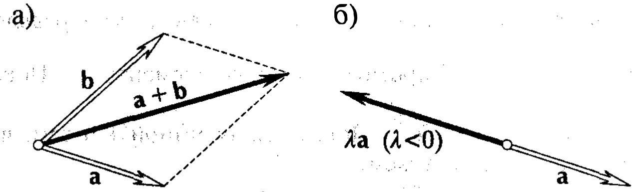


Рис. 1

2. Совокупность упорядоченных наборов $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ из n действительных чисел. Операции — сложение и умножение на действительное число — вводятся так:
а) сложение —

$$\boxed{(\xi^1, \dots, \xi^n) + (\eta^1, \dots, \eta^n) = (\xi^1 + \eta^1, \dots, \xi^n + \eta^n);}$$

б) умножение на число —

$$\boxed{\lambda(\xi^1, \dots, \xi^n) = (\lambda\xi^1, \dots, \lambda\xi^n).}$$

(см. рис. 2, где $n = 2$).

Обозначение: $\mathbb{R}^n$ (*n-мерное вещественное координатное пространство*).

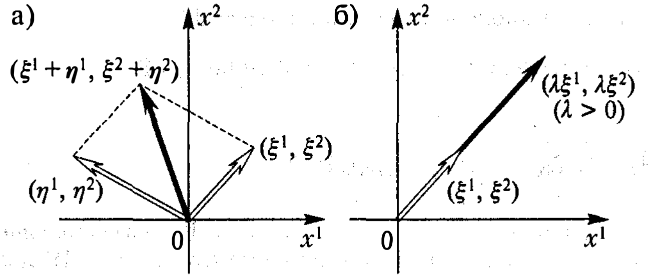


Рис. 2

3. Совокупность всевозможных матриц $\mathbb{R}_{m\times n}$ размера $m \times n$ с введенными в § 1 главы IV правилами сложения матриц,

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix},}$$

и умножения матрицы на число,

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\alpha_{m1} & \dots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}.}$$

В частности, совокупность n-строк, $\mathbb{R}_{1\times n}$, и совокупность столбцов высоты m, $\mathbb{R}_{m\times 1}$, являются линейными пространствами.

4. Множество $C(-1, 1)$ вещественных функций, непрерывных на интервале $(-1, 1)$, с естественными операциями сложения функций и умножения функции на число.

Во всех приведенных примерах требования 1–8 проверяются непосредственно.

Простейшие свойства линейных пространств

1. Нулевой элемент θ определен однозначно.

◄ Пусть θ_1 и θ_2 — нулевые элементы пространства V. Рассмотрим их сумму $\theta_1 + \theta_2$. Вследствие того, что θ_2 — нулевой элемент, из аксиомы 3 получаем, что $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$, а так как элемент θ_1 — также нулевой, то $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$, т. е. $\theta_1 = \theta_2$. ►

2. Для любого элемента x противоположный ему элемент $(-\mathrm{x})$ определен однозначно.

◀ Пусть x^- и x_- — элементы, противоположные элементу x. Покажем, что они равны.

Рассмотрим сумму $\mathrm{x}_- + \mathrm{x} + \mathrm{x}^-$. Пользуясь аксиомой 1 и тем, что элемент x^- противоположен элементу x, получаем:

$$\mathrm{x}_- + \mathrm{x} + \mathrm{x}^- = \mathrm{x}_- + (\mathrm{x} + \mathrm{x}^-) = \mathrm{x}_- + \theta = \mathrm{x}_-.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\mathrm{x}_- + \mathrm{x} + \mathrm{x}^- = (\mathrm{x}_- + \mathrm{x}) + \mathrm{x}^- = \theta + \mathrm{x}^- = \mathrm{x}^-. \blacktriangleright$$

Нетрудно убедится также в справедливости следующих свойств:

3. Для любого элемента x выполняется равенство $0\mathrm{x} = \theta$.

4. Для любого элемента x выполняется равенство $-\mathrm{x} = (-1)\mathrm{x}$.

5. Для любого числа α выполняется равенство $\alpha\theta = \theta$.

6. Из того, что $\alpha\mathrm{x} = \theta$, следует, что либо $\alpha = 0$, либо $\mathrm{x} = \theta$.

§ 2. Линейные подпространства

Непустое подмножество W линейного пространства V называется *линейным подпространством* пространства V, если для любых элементов x и y из W и любого числа α выполняются следующие условия:

$$\boxed{1.\ \mathrm{x} + \mathrm{y} \in W \quad \text{и} \quad 2.\ \alpha\mathrm{x} \in W.}$$

Иногда говорят: «множество W *замкнуто относительно указанных операций*».

Примеры линейных подпространств.

1. Множество векторов на плоскости V_2 является линейным подпространством линейного пространства V_3.

2. Совокупность решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

образует линейное подпространство линейного пространства $\mathbb{R}_{n\times 1}$.

◀ В самом деле, сумма решений однородной системы (*) является решением этой же системы и произведение решения системы (*) на число также является ее решением. ▶

3. Совокупность всех вещественнозначных функций, непрерывных на интервале $(-1, 1)$ и обращающихся в нуль при $t = 0$, образует линейное подпространство линейного пространства $C(-1, 1)$.

◀ Сумма $f(t) + g(t)$ функций $f(t)$ и $g(t)$, обращающихся в нуль при $t = 0$, $f(0) = g(0) = 0$, и произведение $\alpha f(t)$ функции $f(t)$, обращающейся в нуль при $t = 0$, $f(0) = 0$, на число α равны нулю при $t = 0$. ▶

2.1. Свойства линейного подпространства

1. Если $x_1, \ldots, x_q$ — элементы линейного подпространства W, то любая их линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q$ также лежит в W.

2. Линейное подпространство W само является линейным пространством.

◀ Достаточно убедиться лишь в том, что нулевой элемент θ и элемент, противоположный произвольному элементу из W, лежат в W. Указанные векторы получаются умножением произвольного элемента $x \in W$ на 0 и на -1: $\theta = 0x$, $-x = (-1)x$. ▶

2.2. Сумма и пересечение линейных подпространств

Пусть V — линейное пространство, W_1 и W_2 — его линейные подпространства. *Суммой* $W_1 + W_2$ линейных подпространств W_1 и W_2 называется совокупность всевозможных элементов x пространства V, которые можно представить в следующем виде

$$x = x_1 + x_2, \tag{1}$$

где x_1 лежит в W_1, а x_2 — в W_2. Коротко это можно записать так:

$$\boxed{W_1 + W_2 = \{x = x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}.}$$

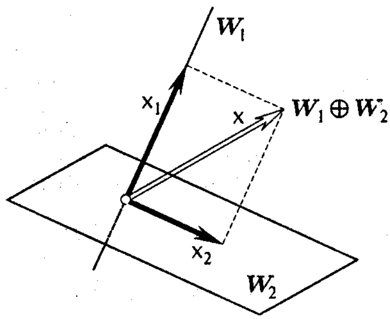


Рис. 3

Сумма линейных подпространств W_1 и W_2 называется *прямой*, если для каждого элемента x этой суммы разложение (1) единственно (рис. 3).

Обозначение: $W_1 \oplus W_2$.

Пересечением $W_1 \cap W_2$ линейных подпространств W_1 и W_2 линейного пространства V называется совокупность элементов, которые принадлежат одновременно и линейному подпространству W_1, и линейному подпространству W_2.

2.3. Свойства пересечения и суммы линейных подпространств

1. Сумма $W_1 + W_2$ является линейным подпространством пространства V.

◀ Возьмем в $W_1 + W_2$ два произвольных элемента x и y. По определению суммы подпространств найдутся элементы x_1, y_1 из W_1 и x_2, y_2, из W_2 такие, что

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2.$$

Это позволяет записать сумму $x + y$ в следующем виде

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2).$$

Так как $x_1 + y_1 \in W_1$ и $x_2 + y_2 \in W_2$, то сумма $x + y$ лежит в $W_1 + W_2$.

Аналогично доказывается включение $\alpha x \in W_1 + W_2$. ▶

2. Пересечение $W_1 \cap W_2$ является линейным подпространством пространства V.

3. Если нулевой элемент является единственным общим вектором подпространств W_1 и W_2 линейного пространства V, то их сумма является прямой — $W_1 \oplus W_2$.

2.4. Линейная оболочка

Линейной оболочкой $L(X)$ подмножества X линейного пространства V называется совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из X,

$$\boxed{L(X) = \left\{ \mathrm{y} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \mathrm{x}_j \;\middle|\; \mathrm{x}_j \in X,\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ q = 1, 2, \ldots \right\}.}$$

Последнее читается так: «линейная оболочка $L(X)$ состоит из всевозможных элементов y, представимых в виде линейных комбинаций элементов множества X».

2.5. Основные свойства линейной оболочки

1. Линейная оболочка $L(X)$ содержит само множество X.

2. $L(X)$ — линейное подпространство пространства V.

◀ Сумма линейных комбинаций элементов множества X и произведение линейной комбинации элементов на любое число снова являются линейными комбинациями элементов множества X. ▶

3. $L(X)$ — наименьшее линейное подпространство, содержащее множество X.

Это свойство следует понимать так: если линейное подпространство W содержит множество X, то W содержит и его линейную оболочку $L(X)$.

◀ Пусть W — линейное подпространство, содержащее заданное множество X. Тогда произвольная линейная комбинация $\alpha_1\mathrm{x}_1 + \ldots + \alpha_q\mathrm{x}_q$ элементов множества X — элемент линейной оболочки $L(X)$ — содержится и в подпространстве W. ▶

Пример 1. Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ две тройки $\xi = (1, 1, 0)$ и $\eta = (1, 0, 1)$ (рис. 4). Множество решений уравнения

$$x^1 - x^2 - x^3 = 0 \qquad (2)$$

является линейной оболочкой $L(\xi, \eta)$ троек ξ и η.

◀ Действительно, тройки $(1, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (2), и значит, любое решение этого уравнения является их линейной комбинацией. ▶

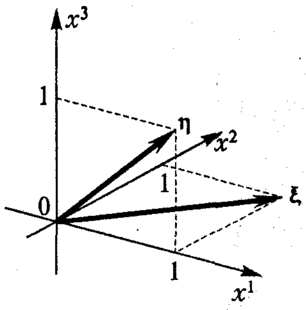


Рис. 4

Пример 2. Рассмотрим в линейном пространстве $C(-\infty, \infty)$ вещественнозначных функций, непрерывных на всей числовой оси, набор X одночленов $1, x, \ldots, x^n$:

$$X = \{1, x, \ldots, x^n\}.$$

Линейная оболочка $L(X)$ представляет собой совокупность многочленов с вещественными коэффициентами, степени которых не превосходят n. ▶

Обозначение: $M_n = L(1, x, \ldots, x^n)$.

§ 3. Линейная зависимость

Определение. Система элементов $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q$ линейного пространства V называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, не все равные нулю и такие, что

$$\boxed{\alpha_1\mathrm{x}_1 + \ldots + \alpha_q\mathrm{x}_q = \theta.} \qquad (1)$$

Если равенство (1) выполняется только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$, то система элементов $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_q$ называется *линейно независимой*.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Система элементов* $x_1, \ldots, x_q$ $(q \geqslant 2)$ *линейно зависима в том и только в том случае, если хотя бы один из ее элементов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

◀ Предположим сначала, что система элементов $x_1, \ldots, x_q$ линейно зависима. Будем считать для определенности, что в равенстве (1) отличен от нуля коэффициент α_q. Перенося все слагаемые, кроме последнего, в правую часть, после деления на $\alpha_q \neq 0$ получим, что элемент x_q является линейной комбинацией элементов $x_1, \ldots, x_q$:

$$x_q = -\frac{\alpha_1}{\alpha_q} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_{q-1}}{\alpha_q} x_{q-1}.$$

Обратно, если один из элементов равен линейной комбинации остальных,

$$\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{q-1} x_{q-1} = x_q,$$

то, перенося его в левую часть, получим линейную комбинацию

$$\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{q-1} x_{q-1} + (-1) x_q = \theta,$$

в которой есть отличные от нуля коэффициенты $(-1 \neq 0)$. Значит, система элементов $x_1, \ldots, x_q$ линейно зависима. ▶

Теорема 2. *Пусть система элементов* $x_1, \ldots, x_q$ *линейно независима и* $y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q$. *Тогда коэффициенты* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *определяются по элементу* y *единственным образом.*

◀ Пусть

$$y = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_q x_q.$$

Тогда

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_q x_q,$$

откуда

$$(\alpha_1 - \beta_1) x_1 + \ldots + (\alpha_q - \beta_q) x_q = \theta.$$

Из линейной независимости элементов $x_1, \ldots, x_q$ вытекает, что $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_q - \beta_q = 0$ и, значит, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_q = \beta_q$. ▶.

Теорема 3. *Система элементов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.*

◀ Пусть первые q элементов системы $x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_m$ линейно зависимы. Тогда найдется линейная комбинация этих элементов такая, что

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q = \theta$$

и не все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ равны нулю. Добавляя элементы $x_{q+1}, \ldots, x_m$ с нулевыми множителями, получаем, что и в линейной комбинации

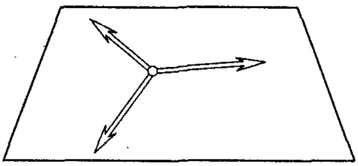


Рис. 5

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q + 0 x_{q+1} + \ldots + 0 x_m = \theta$$

равны нулю не все коэффициенты. ▶

Пример. Векторы из V_3 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны (рис. 5). ▶

§ 4. Базис. Размерность

Упорядоченная система элементов $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V называется *базисом* этого линейного пространства, если элементы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы и каждый элемент из V можно представить в виде их линейной комбинации. Упорядоченность означает здесь, что каждому элементу приписан определенный (порядковый) номер. Из одной системы n элементов можно построить $n!$ упорядоченных систем.

Пример. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — тройка некомпланарных векторов из V_3 (рис. 6). Тогда упорядоченные тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$; $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$; $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$; $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$ — различные базисы V_3. ▶

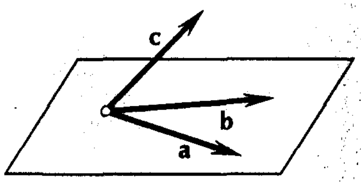


Рис. 6

Пусть $\mathbf{e} = (e_1 \ \ldots \ e_n)$ — базис пространства V. Тогда для любого элемента x из V найдется набор чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$ такой, что

$$\boxed{x = \xi^1 e_1 + \ldots + \xi^n e_n = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i.}$$

В силу теоремы 2 числа $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — *координаты элемента* x в базисе $\mathbf{e}$ — определены однозначно.

Посмотрим, что происходит с координатами элементов при простейших действиях с ними.

Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i e_i$. Тогда

$$\boxed{x + y = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i + \sum_{i=1}^{n} \eta^i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i + \eta^i) e_i}$$

и для любого числа α

$$\boxed{\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \xi^i) e_i.}$$

Таким образом, при сложении элементов их соответствующие координаты складываются, а при умножении элемента на число все его координаты умножаются на это число.

Координаты элемента часто удобно записывать в виде столбца. Например,

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

— *координатный столбец* элемента $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$ в базисе $\mathbf{e}$.

Разложим произвольную систему элементов $x_1, \ldots, x_q$ по базису $\mathbf{e}$,

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i e_i, \ldots, x_q = \sum_{i=1}^{n} \xi_q^i e_i,$$

и рассмотрим координатные столбцы элементов $x_1, \dots, x_q$ в этом базисе:

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \vdots \\ \xi_q^n \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Система элементов $x_1, \dots, x_q$ линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система их координатных столбцов в каком-нибудь базисе.*

◀ Пусть

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_q x_q = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k x_k = \theta,$$

причем хотя бы один из коэффициентов λ_k отличен от нуля. Запишем это подробнее

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_k^i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \xi_k^i \right) e_i = \theta. \tag{1}$$

Отсюда в силу единственности разложения элемента по базису вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \xi_k^1 = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \xi_k^n = 0,$$

или, что то же,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_q \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \vdots \\ \xi_q^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, линейная комбинация координатных столбцов элементов $x_1, \dots, x_q$ равна нулевому столбцу (с теми же коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_q$). Это и означает, что система координатных столбцов линейно зависима.

Если же выполняется равенство (2), то, проводя рассуждения в обратном порядке, получаем формулу (1).

Тем самым, обращение в нуль некоторой нетривиальной (хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля) линейной комбинации элементов линейного пространства равносильно тому, что нетривиальная линейная комбинация их координатных столбцов (с теми же коэффициентами) равна нулевому столбцу. ▶

Теорема 5. *Пусть базис $\mathbf{e}$ линейного пространства V состоит из n элементов. Тогда всякая система из m элементов, где $m > n$, линейно зависима.*

◀ В силу теоремы 3 достаточно рассмотреть случай $m = n + 1$.

Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ — произвольные элементы пространства V. Разложим каждый элемент по базису $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$:

$$\begin{gathered} x_1 = \xi_1^1 e_1 + \ldots + \xi_1^n e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} = \xi_{n+1}^1 e_1 + \ldots + \xi_{n+1}^n e_n, \end{gathered}$$

и запишем координаты элементов $x_1, \ldots, x_{n+1}$ в виде матрицы, отводя j-й столбец координатам элемента x_j, $j = 1, \ldots, n+1$. Получим матрицу из n строк и $n+1$ столбцов —

$$\mathsf{K} = \overset{n+1}{\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_{n+1}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^n & \ldots & \xi_{n+1}^n \end{pmatrix}} n.$$

Ввиду того, что ранг матрицы K не превосходит числа n ее строк, столбцы матрицы K (их $n+1$) линейно зависимы. А так как это координатные столбцы элементов $x_1, \ldots, x_{n+1}$, то согласно теореме 4 система элементов $x_1, \ldots, x_{n+1}$ также линейно зависима. ▶

Следствие. *Все базисы линейного пространства V состоят из одинакового числа элементов.*

◀ Пусть базис $\mathbf{e}$ состоит из n элементов, а базис $\mathbf{e}'$ из n' элементов. В силу только что доказанной теоремы из линейной независимости системы $e_1', \ldots, e_{n'}'$ заключаем, что $n' \leqslant n$. Меняя базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ местами, в силу этой же теоремы получаем, что $n \leqslant n'$.

Тем самым, $n = n'$. ▶

Размерностью линейного пространства V называется число элементов базиса этого пространства.

Пример 1. Базис координатного пространства $\mathbb{R}^n$ образуют элементы

$$\boxed{e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots 0, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).}$$

◀ Система элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима: из равенства

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

получаем, что

$$\alpha_1(1, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$$

и значит, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Кроме того, любой элемент $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ из $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде линейной комбинации элементов $e_1, \ldots, e_n$:

$$\xi = \xi^1(1, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + \xi^n(0, 0, \ldots, 0, 1) = (\xi^1, \ldots, \xi^n).$$

Тем самым, размерность пространства $\mathbb{R}^n$ равна n. ▶

Пример 2. Однородная линейная система

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{gathered}$$

имеющая ненулевые решения, обладает фундаментальной системой решений (ФСР). ФСР является базисом линейного пространства решений однородной системы. Размерность этого линейного пространства равна числу элементов ФСР, т. е. $n - r$, где r — ранг матрицы коэффициентов однородной системы, а n — число неизвестных. ▶

Пример 3. Размерность линейного пространства M_n многочленов степени не выше n равна $n+1$.

◀ Так как всякий многочлен $P(t)$ степени не выше n имеет вид

$$P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n,$$

то достаточно показать линейную независимость элементов $e_1 = 1$, $e_2 = t, \ldots, e_{n+1} = t^n$.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \ldots + \alpha_n \cdot t^n = 0, \tag{3}$$

где t произвольно. Полагая $t = 0$, получаем, что $\alpha_0 = 0$.

Продифференцируем равенство (3) по t:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots + n\alpha_n t^{n-1} = 0.$$

Вновь положив $t = 0$, получим, что $\alpha_1 = 0$.

Продолжая этот процесс, последовательно убеждаемся в том, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Это означает, что система элементов $\mathrm{e}_1 = 1, \ldots, \mathrm{e}_{n+1} = t^n$ линейно независима. Следовательно, искомая размерность равна $n + 1$. ▶

Линейное пространство, размерность которого равна n, называется *n-мерным*.
Обозначение: $\dim V = n$.

Соглашение. Далее в этой главе всюду считается, если не оговорено противное, что размерность линейного пространства V равна n.

Ясно, что если W — подпространство n-мерного линейного пространства V, то $\dim W \leqslant n$.

Покажем, что в n-мерном линейном пространстве V есть линейные подпространства любой размерности $k \leqslant n$.

◀ Пусть $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_1 \ \ldots \ \mathrm{e}_n)$ — базис пространства V. Легко убедиться в том, что линейная оболочка

$$W_k = L(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$$

имеет размерность k. ▶

По определению $\dim\{\theta\} = 0$.

Теорема 6 (о пополнении базиса). *Пусть система элементов $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$ линейного пространства V размерности n линейно независима и $k < n$. Тогда в пространстве V найдутся элементы $\mathrm{a}_{k+1}, \ldots, \mathrm{a}_n$ такие, что система $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \mathrm{a}_{k+1}, \ldots, \mathrm{a}_n$ — базис V.*

◀ Пусть b — произвольный элемент линейного пространства V. Если система $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \mathrm{b}$ линейно зависима, то

$$\mathrm{b} = \alpha_1 \mathrm{a}_1 + \ldots + \alpha_k \mathrm{a}_k, \tag{4}$$

так как в нетривиальной линейной комбинации

$$\lambda_1 \mathrm{a}_1 + \ldots + \lambda_k \mathrm{a}_k + \mu \mathrm{b} = \theta$$

коэффициент $\mu \neq 0$ вследствие линейной независимости системы $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$.

Если бы разложение вида (4) можно было бы написать для любого элемента b пространства V, то исходная система $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$ была бы базисом согласно определению. Но в силу условия $k < n$ это невозможно. Поэтому должен существовать элемент $\mathrm{a}_{k+1} \in V$ такой, что пополненная система $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \mathrm{a}_{k+1}$ будет линейно независимой.

Если $k + 1 = n$, то эта система — базис пространства V.

Если $k + 1 < n$, то для системы $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \mathrm{a}_{k+1}$ следует повторить предыдущие рассуждения.

Таким способом любую заданную линейно независимую систему элементов можно достроить до базиса всего пространства V. ▶

Пример. Дополнить систему из двух векторов $\mathrm{a}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathrm{a}_2 = (-1, 1, 1, 0)$ пространства $\mathbb{R}^4$ до базиса этого пространства.

◀ Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^4$ векторы $\mathrm{a}_3 = (1, 0, 0, 0)$ и $\mathrm{a}_4 = (0, 1, 0, 0)$ и покажем, что система векторов $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4$ — базис $\mathbb{R}^4$.

Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

строками которой являются координаты векторов a_1, a_2, a_3, a_4, равен четырем. Это означает, что строки матрицы A, а, значит, и векторы a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы. ▶

Подобный подход используется и в общем случае: чтобы дополнить систему k линейно независимых элементов

$$a_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \quad \ldots, \quad a_k = (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn})$$

до базиса пространства $\mathbb{R}^n$, матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

элементарными преобразованиями строк приводится к трапециевидной форме, а затем дополняется $n-k$ строками вида

$$(0 \ \ldots \ 1 \ \ldots \ 0)$$

так, чтобы ранг получаемой матрицы был равен n.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть W_1 и W_2 — линейные подпространства линейного пространства V. Тогда*

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

§ 5. Замена базиса

Пусть $\mathbf{e} = (e_1 \ \ldots \ e_n)$ и $\mathbf{e}' = (e'_1 \ \ldots \ e'_n)$ — базисы линейного пространства V. Разложим элементы базиса $\mathbf{e}'$ по базису $\mathbf{e}$. Имеем

$$e'_j = \sigma_j^1 e_1 + \ldots + \sigma_j^n e_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_j^i e_i, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Эти соотношения удобно записать в матричной форме

$$\boxed{(e'_1 \ \ldots \ e'_n) = (e_1 \ \ldots \ e_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \ldots & \sigma_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1^n & \ldots & \sigma_n^n \end{pmatrix}.} \tag{2}$$

Матрица

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \ldots & \sigma_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1^n & \ldots & \sigma_n^n \end{pmatrix}}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$.

Свойства матрицы перехода

1. $\det S \neq 0$.

◀ Доказательство этого свойства проводится от противного.

Из равенства $\det S = 0$ вытекает линейная зависимость столбцов матрицы S. Эти столбцы являются координатными столбцами элементов $e'_1, \ldots, e'_n$ в базисе $\mathbf{e}$. Поэтому (и вследствие теоремы 4) элементы $e'_1, \ldots, e'_n$ должны быть линейно зависимыми. Последнее противоречит тому, что $\mathbf{e}'$ — базис. Значит, допущение, что $\det S = 0$, неверно. ▶

2. Если $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$ — координаты элемента x в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ соответственно, то

$$\boxed{\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi'^1 \\ \vdots \\ \xi'^n \end{pmatrix}.} \tag{3}$$

◀ Заменяя в формуле

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \sum_{j=1}^{n} \xi'^j e'_j$$

e'_j их выражениями (1), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \sum_{j=1}^{n} \xi'^j \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^i_j e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma^i_j \xi'^j \right) e_i.$$

Отсюда в силу единственности разложения элемента по базису имеем

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} \sigma^i_j \xi'^j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Переходя к матричной записи найденных равенств, убеждаемся в справедливости свойства 2. ▶

3. S^{-1} — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}'$ к базису $\mathbf{e}$.

◀ Свойство 3 доказывается умножением обеих частей матричного равенства (2) на матрицу S^{-1} справа. ▶

§ 6. Евклидовы пространства

Вещественное линейное пространство V называется (*вещественным*) *евклидовым* пространством, если любым двум элементам x и y из V ставится в соответствие число, обозначаемое через (x, y), такое, что для любых элементов x, y, z и произвольного вещественного числа α выполняются следующие условия:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4. $(x, x) \geqslant 0$; причем равенство нулю возможно в том и только в том случае, если $x = \theta$.

Число (x, y) называется *скалярным произведением* элементов x и y.

Примеры евклидовых пространств.

1. В пространстве свободных векторов V_3 скалярное произведение векторов a и b определяется так:

$$\boxed{(a, b) = |a||b| \cos(\widehat{a, b}).}$$

2. Скалярное произведение произвольных элементов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\eta = (\eta, \ldots, \eta^n)$ из координатного пространства $\mathbb{R}^n$ можно определить формулой

$$\boxed{(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i.}$$

3. Линейное подпространство евклидова пространства само является евклидовым пространством.

Пользуясь определением евклидова пространства, нетрудно доказать следующие свойства:

1. $(\theta, x) = 0$;
2. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$;
3. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
4. $\left(\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i x_i, \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{l} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j)$.

Теорема 8 (неравенство Коши—Буняковского). *Для любых двух элементов* x *и* y *евклидова пространства* V *справедливо неравенство*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

◀ Если $(x, x) = 0$, то $x = \theta$ и неравенство выполняется вследствие того, что $(\theta, y) = 0$.

Обратимся к случаю $(x, x) \neq 0$. Тогда $(x, x) > 0$. По определению скалярного произведения неравенство

$$(tx - y, tx - y) \geqslant 0 \tag{1}$$

справедливо для любых элементов x и y из пространства V и любого вещественного числа t. Запишем неравенство (1) подробнее:

$$t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Левую часть последнего неравенства можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно t. Из того, что знак этого квадратного трехчлена не изменяется при любых t, заключаем, что его дискриминант неположителен,

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0.$$

Перенося вычитаемое в правую часть, получаем требуемое неравенство. ▶

Замечание. Часто доказанное неравенство записывают в равносильной форме,

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

Следует подчеркнуть, что слева в этом неравенстве стоит абсолютная величина (модуль) скалярного произведения, а в правой части — нормы векторов x и y.

Определение. *Длиной* (*нормой*) *элемента* x называется число $|x|$, вычисляемое по правилу $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Ясно, что $|x| \geqslant 0$ для любого x, причем равенство $|x| = 0$ возможно лишь в случае, если $x = \theta$.

Рассмотрим цепочку равенств:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2.$$

Заменяя второе слагаемое на $2|(x, y)| \geqslant 2(x, y)$ и применяя неравенство Коши—Буняковского $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, получаем, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = \left(|x| + |y|\right)^2.$$

После извлечения квадратного корня приходим к *неравенству треугольника*:

$$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$$

(рис. 7).

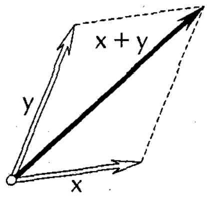


Рис. 7

Углом между ненулевыми элементами x и y ***евклидова пространства*** называется число φ, подчиненное следующим двум условиям:

$$\boxed{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.}$$

Определение угла корректно, так как согласно теореме 8 имеем

$$-1 \leqslant \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$$

для любых ненулевых элементов x и y.

Элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Для ортогональных элементов из соотношения (2) вытекает равенство

$$\boxed{|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2,}$$

являющееся обобщением известной *теоремы Пифагора*: квадрат длины суммы ортогональных элементов равен сумме квадратов их длин (рис. 8).

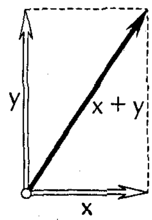


Рис. 8

Система элементов $f_1, \ldots, f_k$ называется *ортогональной*, если $(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$, и *ортонормированной*, если

$$\boxed{(f_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}}$$

Определение. Символ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

называют *символом Кронекера*.

Теорема 9. *Ортонормированная система элементов линейно независима.*

◄ Умножая обе части равенства

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k = \theta$$

скалярно на элемент f_j, $j = 1, \ldots, k$, получаем, что

$$\alpha_j(f_j, f_j) = 0.$$

И так как $(f_j, f_j) = 1$, то $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. ►

§ 7. Метод ортогонализации

Покажем, как, пользуясь заданной системой линейно независимых элементов $f_1, \ldots, f_k$ евклидова пространства E, построить в нем ортонормированную систему из k элементов.

◄ Положим $g_1 = f_1$.

Для того, чтобы элемент

$$g_2 = f_2 - \alpha_1 g_1$$

был ортогонален элементу g_1, необходимо выполнение следующего равенства:

$$0 = (g_2, g_1) = (f_2, g_1) - \alpha_1(g_1, g_1),$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}.$$

Тем самым, элемент

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$

ортогонален элементу g_1 (рис. 9 а).

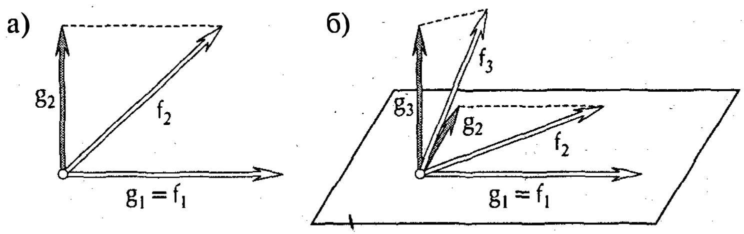


Рис. 9

Пользуясь построенными элементами g_1, g_2 и заданным элементом f_3, построим элемент

$$g_3 = f_3 - \beta_1 g_1 - \beta_2 g_2,$$

ортогональный как элементу g_1, так и элементу g_2. Для этого коэффициенты β_1 и β_2 должны удовлетворять следующим условиям:

$$0 = (g_3, g_1) = (f_3, g_1) - \beta_1(g_1, g_1), \quad 0 = (g_3, g_2) = (f_3, g_2) - \beta_2(g_2, g_2),$$

откуда

$$\beta_1 = \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)}.$$

Таким образом, элемент

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2$$

ортогонален элементам g_1 и g_2 (рис. 9 б).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что элемент

$$\boxed{g_i = f_i - \frac{(f_i, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(f_i, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 - \ldots - \frac{(f_i, g_{i-1})}{(g_{i-1}, g_{i-1})} g_{i-1}, \qquad i = 3, \ldots, k,}$$

ортогонален элементам $g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}$.

Делением каждого элемента g_i $(i = 1, \ldots, k)$ на его длину $|g_i|$, получаем ортонормированную систему

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}, \qquad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}, \qquad \ldots, \qquad e_k = \frac{g_k}{|g_k|}$$

(рис. 10). ▶

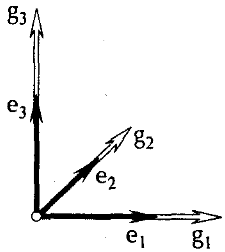


Рис. 10

Базис $\mathbf{e} = (e_1 \ \ldots \ e_n)$ евклидова пространства называется *ортонормированным*, или *ортобазисом*, если

$$\boxed{(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n).}$$

Суммируя вышеизложенное, получаем следующий результат.

Теорема 10. *В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Пример. Методом ортогонализации построить ортонормированный базис евклидова пространства E по его базису

$$a_1 = (1, 2, 2), \quad a_2 = (3, 0, 3), \quad a_3 = (5, 1, 1).$$

◀ Полагаем $b_1 = a_1$ и $b_2 = a_2 - \alpha b_1$. Для того, чтобы вектор

$$b_2 = a_2 - \alpha b_1$$

был ортогонален вектору b_1, необходимо выполнение неравенства

$$0 = (a_2, b_1) - \alpha(b_1, b_1),$$

откуда

$$\alpha = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{9}{9} = 1.$$

Тем самым,

$$b_2 = (3, 0, 3) - 1 \cdot (1, 2, 2) = (2, -2, 1).$$

Для того, чтобы вектор

$$b_3 = a_3 - \beta b_1 - \gamma b_2$$

был ортогонален векторам b_1 и b_2, необходимо выполнение равенств

$$0 = (a_3, b_1) - \beta(b_1, b_1), \qquad 0 = (a_3, b_2) - \gamma(b_2, b_2),$$

откуда

$$\beta = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{9}{9} = 1, \qquad \gamma = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{9}{9} = 1.$$

Тем самым, вектор

$$b_3 = (5, 1, 1) - 1 \cdot (1, 2, 2) - 1 \cdot (2, -2, 1) = (2, 1, -2).$$

Система векторов b_1, b_2, b_3 ортогональна. Поделив каждый вектор на его длину, получим

$$e_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad e_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

— ортонормированный базис пространства E. ▶

При помощи ортонормированного базиса скалярное произведение элементов вычисляется особенно просто. Пусть $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1 \ \dots \ \mathrm{e}_n)$ — ортонормированный базис пространства E. Вычислим скалярное произведение элементов x и y, предварительно разложив их по базису $\mathbf{e}$

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathrm{e}_i, \quad \mathrm{y} = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathrm{e}_j.$$

Имеем

$$\boxed{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathrm{e}_i, \ \sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathrm{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi^i \eta^j (\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i.}$$

В частности,

$$\boxed{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2.}$$

Откуда

$$\boxed{|\mathrm{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}.}$$

§8. Ортогональное дополнение

Пусть W — линейное подпространство евклидова пространства V. Совокупность $W^\perp$ элементов y пространства V, обладающих свойством

$$(\mathrm{y}, \mathrm{x}) = 0,$$

где x — произвольный элемент из W, называется *ортогональным дополнением* подпространства W. Другими словами, ортогональное дополнение $W^\perp$ состоит из всех элементов y, ортогональных всем элементам подпространства W.

Свойства ортогонального дополнения

1. $W^\perp$ — линейное подпространство пространства V.

◄ Пусть элементы y_1, y_2 лежат в $W^\perp$, т. е.

$$(\mathrm{y}_1, \mathrm{x}) = 0, \quad (\mathrm{y}_2, \mathrm{x}) = 0$$

для любого элемента x из W. Складывая эти равенства и пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем, что

$$(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2, \mathrm{x}) = 0$$

для любого элемента x из W. Это означает, что $\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 \in W^\perp$.

Из того, что $(\mathrm{y}, \mathrm{x}) = 0$ для любого элемента x из W, вытекает равенство $(\alpha \mathrm{y}, \mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{y}, \mathrm{x})$ и, значит, включение $\alpha \mathrm{y} \in W^\perp$. ►

2. $V = W \oplus W^\perp$.

Свойство 2 означает, что любой элемент x пространства V можно представить, причем единственным образом, в виде суммы элементов из W и $W^\perp$:

$$x = y + z. \qquad (*)$$

Элемент $y \in W$ называется *ортогональной проекцией* элемента x на линейное подпространство W, а элемент $z \in W^\perp$ — его *ортогональной составляющей* (рис. 11).

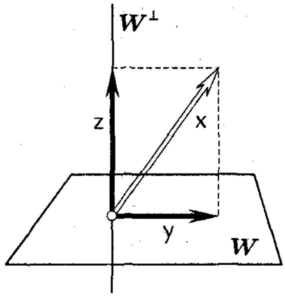


Рис. 11

Покажем, как по заданным элементу x и линейному подпространству W найти его ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z.

◀ Можно считать, что в линейном подпространстве W задан ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$. Запишем искомый элемент y в виде линейной комбинации

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k.$$

Подставляя это выражение в формулу (*):

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + z$$

и умножая обе части полученного равенства последовательно на элементы $e_1, \dots, e_k$, в предположении $z \perp W$ приходим к соотношениям

$$(x, e_1) = \alpha_1, \quad \dots, \quad (x, e_k) = \alpha_k.$$

Элементы

$$y = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_k)e_k \quad \text{и} \quad z = x - y$$

обладают требуемыми свойствами. ▶

Пример. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (4, 2, 3, 5)$ на линейное подпространство $W \subset \mathbb{R}^4$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

◀ Векторы $a_1 = (1, 0, 0, -1)$ и $a_2 = (0, 1, -1, 0)$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, базис подпространства W. Кроме того, векторы a_1 и a_2 *ортогональны*. Для того, чтобы построить ортонормированный базис подпространства W, достаточно разделить эти векторы на их длины. В результате получим

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \quad e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right).$$

Вектор

$$y = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 = \left(\frac{4}{\sqrt2} - \frac{5}{\sqrt2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt2}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt2} - \frac{3}{\sqrt2}\right)\cdot\left(0, \frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right) = \frac12(-1, -1, 1, 1)$$

является ортогональной проекцией вектора $x = (4, 2, 3, 5)$, на подпространство W, а вектор

$$z = x - y = \left(4\tfrac12, 2\tfrac12, 2\tfrac12, 4\tfrac12\right)$$

— его ортогональной составляющей. ▶

§ 9. Унитарные пространства

Унитарным пространством называется линейное комплексное пространство U, в котором каждой упорядоченной паре элементов x и y из U ставится в соответствие число — *скалярное произведение* (x, y) так, что для любых элементов x, y и z из U и любого комплексного числа α выполняются следующие соотношения:

1. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (черта в правой части указывает на операцию комплексного сопряжения);

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4. $(x, x) \geqslant 0$, причем равенство $(x, x) = 0$ возможно лишь в случае, если $x = \theta$.

Пример. В координатном пространстве $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы n комплексных чисел, скалярное произведение можно ввести так

$$\boxed{(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \overline{\eta^j},}$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n) \in \mathbb{C}^n$. ►

Упражнения

1. Найдите линейную оболочку, порождаемую многочленами $1 + t^2$, $t + t^2$, $1 + t + t^2$.

2. Является ли система векторов x_1, x_2, x_3 пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависимой, если:
а) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (4, 5, 6)$, $x_3 = (7, 8, 9)$;
б) $x_1 = (1, 4, 7, 10)$, $x_2 = (2, 5, 8, 11)$, $x_3 = (3, 6, 9, 12)$?

3. Покажите, что система векторов $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (0, 1, -1)$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

4. Дополните систему векторов $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ до базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

5. Проверьте, что векторы $(2, 2, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(-1, 2, 2)$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$, и найдите координаты вектора $x = (3, 3, 3)$ в этом базисе.

6. Определите размерность и найдите какой-нибудь базис линейной оболочки, натянутой на систему векторов $x_1 = (1, 2, 2, -1)$, $x_2 = (2, 3, 2, 5)$, $x_3 = (-1, 4, 3, -1)$, $x_4 = (2, 9, 3, 5)$ из линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

7. Найдите угол между векторами $(2, -1, 3, -2)$ и $(3, 1, 5, 1)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

8. Примените процесс ортогонализации к системе векторов $(1, -2, 2)$, $(-1, 0, -1)$, $(5, -3, -7)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

9. Найдите ортогональную проекцию вектора x на подпространство L линейного пространства $\mathbb{R}^4$ и его ортогональную составляющую, если $x = (2, -5, 3, 4)$, а L натянуто на векторы $(1, 3, 3, 5)$, $(1, 3, -5, -3)$, $(1, -5, 3, -3)$.

Ответы

1. Совокупность M_2 всех многочленов степени не выше 2. **2.** а) да; б) да. **4.** Например, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$. **5.** $1, 1, 1$. **6.** 4; x_1, x_2, x_3, x_4. **7.** $\frac{\pi}{4}$. **8.** $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. **9.** $y = (0, -3, 5, 2)$, $z = (2, -2, -2, 2)$.

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Определение линейного отображения. Образ и ядро линейного отображения

Пусть V и W — линейные пространства (либо оба вещественные, либо оба комплексные). *Линейным отображением* линейного пространства V в линейное пространство W называется правило $\mathcal{A}$, согласно которому каждому элементу x из пространства V ставится в соответствие (единственный) элемент $\mathrm{y} = \mathcal{A}\mathrm{x}$ из пространства W так, что

1. $\mathcal{A}(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) = \mathcal{A}\mathrm{x}_1 + \mathcal{A}\mathrm{x}_2$,
2. $\mathcal{A}(\alpha\mathrm{x}) = \alpha\mathcal{A}\mathrm{x}$.

Эти два требования можно объединить в одно:

$$\boxed{\mathcal{A}(\alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2) = \alpha_1\mathcal{A}\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathrm{x}_2.}$$

Обозначение: $\mathcal{A}\colon V \to W$.

Примеры линейных отображений.

1. Пусть $V = W = M_n$, где M_n — пространство многочленов, степень которых не выше n. Правило

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : M_n \to M_n,}$$

согласно которому каждому многочлену из M_n ставится в соответствие его производная, является линейным отображением (производная суммы равна сумме производных, постоянный сомножитель можно выносить из-под знака производной).

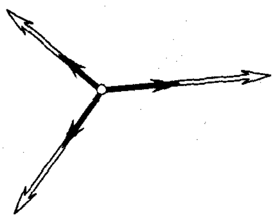


Рис. 1

2. Правило, по которому каждому элементу x из V ставится в соответствие элемент $\lambda\mathrm{x}$ из V ($\lambda \neq 0$ и фиксировано), — *преобразование подобия* — является линейным отображением (рис. 1).

3. Пусть $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_i, \ldots, \mathrm{e}_n)$ — базис пространства V. Поставим произвольному элементу

$$\mathrm{x} = \xi^1\mathrm{e}_1 + \ldots + \xi^k\mathrm{e}_k + \ldots + \xi^n\mathrm{e}_n = \sum_{i=1}^{n}\xi^i\mathrm{e}_i$$

в соответствие элемент

$$\boxed{\mathcal{P}\mathrm{x} = \xi^1\mathrm{e}_1 + \ldots + \xi^k\mathrm{e}_k = \sum_{i=1}^{k}\xi^i\mathrm{e}_i}$$

(здесь $k < n$ фиксировано). Правило $\mathcal{P} : V \to V$ является линейным отображением и называется *отображением проектирования* (рис. 2).

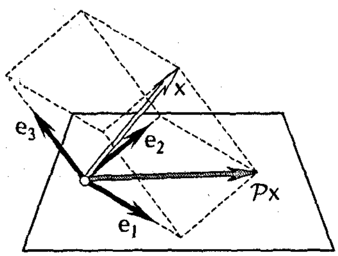


Рис. 2

4. Совокупность T_2 тригонометрических многочленов вида

$$\alpha \cos t + \beta \sin t$$

образует линейное пространство. Правило

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : \alpha \cos t + \beta \sin t \mapsto -\alpha \sin t + \beta \cos t}$$

является линейным отображением

$$\mathcal{D} : T_2 \to T_2.$$

5. Пусть $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_{m\times n}$ — фиксированная матрица, X — произвольный столбец высоты n. Умножение столбца X на матрицу A слева является линейным отображением пространства столбцов высоты n в пространство столбцов высоты m,

$$\mathrm{X} \in \mathbb{R}_{n\times 1} \mapsto \mathrm{AX} \in \mathbb{R}_{m\times 1}.$$

Образом линейного отображения $\mathcal{A}: V \to W$ называется множество $\operatorname{im}\mathcal{A}$ всех элементов из пространства W, обладающих следующим свойством: элемент y лежит в $\operatorname{im}\mathcal{A}$, если в пространстве V найдется элемент x, такой, что $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{y}$.

Примеры.

1′. Образом операции дифференцирования $\mathcal{D} : M_n \to M_n$ является совокупность многочленов, степень которых не выше $n-1$.

2′. Образ отображения подобия совпадает со всем пространством V.

3′. Образ отображения проектирования $\mathcal{P} : V \to V$ является подпространством

$$W_k = L(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$$

пространства V.

4′. Образ операции дифференцирования $\mathcal{D} : T_2 \to T_2$ совпадает со всем пространством T_2.

Теорема. *Образ* $\operatorname{im}\mathcal{A}$ *линейного отображения* $\mathcal{A}: V \to W$ *является линейным подпространством пространства* W.

◀ Пусть y_1 и y_2 — элементы из $\operatorname{im}\mathcal{A}$. Это означает, что в пространстве V найдутся элементы x_1 и x_2, такие, что $\mathcal{A}\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$ и $\mathcal{A}\mathrm{x}_2 = \mathrm{y}_2$. Из формулы

$$\lambda_1\mathrm{y}_1 + \lambda_2\mathrm{y}_2 = \lambda_1\mathcal{A}\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathcal{A}\mathrm{x}_2 = \mathcal{A}(\lambda_1\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathrm{x}_2)$$

вытекает, что произвольная линейная комбинация элементов y_1 и y_2 также лежит в $\operatorname{im}\mathcal{A}$. ▶

Размерность образа линейного отображения называется *рангом* этого линейного отображения.

Обозначение: $\operatorname{rang}\mathcal{A}$.

Определение. Линейные отображения $\mathcal{A}: V \to W$ и $\mathcal{B}: V \to W$ называются *равными*, если для любого элемента x из пространства V выполняется равенство $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathcal{B}\mathrm{x}$.

Обозначение: $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Теорема 1 (Построение линейного отображения). *Пусть* V *и* W *— линейные пространства,* $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ *— базис пространства* V, *а* $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n$ *— произвольные элементы из пространства* W. *Тогда существует и притом ровно одно линейное отображение*

$$\mathcal{A}: V \to W,$$

для которого

$$\mathcal{A}\mathrm{e}_k = \mathrm{f}_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

◀ **А. Существование.** Разложим произвольный элемент x из пространства V по базису e этого пространства,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k,$$

и построим отображение $\mathcal{A}$: $V \to W$ по следующему правилу:

$$\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k f_k. \tag{2}$$

Ясно, что

$$\mathcal{A}e_k = f_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

В линейности отображения $\mathcal{A}$ убедимся непосредственно. Пусть

$$y = \sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k.$$

Тогда согласно правилу (2)

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \xi^k + \mu \eta^k) f_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi^k f_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \eta^k f_k = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y.$$

Б. Единственность. Покажем, что требованием (1) линейное отображение $\mathcal{A}$ определяется однозначно.

Пусть $\mathcal{B}$: $V \to W$ — линейное отображение и

$$\mathcal{B}e_k = f_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вычисляя действия $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на произвольный элемент x из V, убеждаемся в том, что в обоих случаях результат один и тот же —

$$\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n} \xi^k f_k = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathcal{B}e_k = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k e_k\right) = \mathcal{B}x.$$

Значит, отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают. ▶

Таким образом, линейное отображение можно задать его действием только на элементы базиса.

Ядром линейного отображения $\mathcal{A}$: $V \to W$ называется множество $\ker \mathcal{A}$ всех элементов из пространства V, каждый из которых отображение $\mathcal{A}$ переводит в нулевой элемент θ_W пространства W.

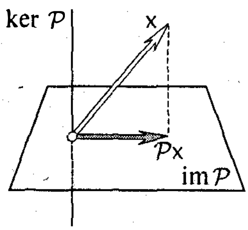


Рис. 3

Примеры.

1″. Многочлены нулевой степени образуют ядро операции дифференцирования $\mathcal{D}$: $M_n \to M_n$.

2″. Ядро отображения подобия состоит из нулевого элемента θ_V пространства V.

3″. Ядром отображения проектирования $\mathcal{P}: V \to V$ является линейное подпространство $L(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ (рис. 3).

4″. Ядро операции дифференцирования $\mathcal{D}: T_2 \to T_2$ состоит из нуля.

5″. Ядром отображения

$$A: \mathbb{R}_{n\times 1} \to \mathbb{R}_{m\times 1}$$

является множество решений однородной линейной системы

$$AX = 0.$$

Теорема 2. *Ядро линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ является линейным подпространством пространства V.*

◄ Из равенств $\mathcal{A}x = \theta_W$ и $\mathcal{A}y = \theta_W$ вытекает, что

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda\mathcal{A}x + \mu\mathcal{A}y = \lambda\theta_W + \mu\theta_W = \theta_W. \blacktriangleright$$

Размерность ядра линейного отображения называется *дефектом* этого отображения.

Обозначение: $\operatorname{defect}\mathcal{A}$.

Для любого линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ справедливо равенство

$$\boxed{\operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{defect}\mathcal{A} = \dim V.} \qquad (*)$$

§ 2. Операции над линейными отображениями

Пусть V и W — линейные пространства и $\mathcal{A}\colon V \to W$, $\mathcal{B}\colon V \to W$ — линейные отображения. *Суммой линейных отображений* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется отображение $\mathcal{C}\colon V \to W$, определяемое п о следующему правилу:

$$\boxed{\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x}$$

для любого элемента x из V. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\mathcal{C}$ является линейным. В самом деле,

$$\mathcal{C}(\lambda x + \mu y) = \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) + \mathcal{B}(\lambda x + \mu y) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + \mu(\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) == \lambda\mathcal{C}x + \mu\mathcal{C}y. \blacktriangleright$$

Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Произведением линейного отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ *на число* α называется отображение $\mathcal{B}\colon V \to W$, определяемое по правилу:

$$\boxed{\mathcal{B}x = \alpha\mathcal{A}x}$$

для любого элемента x из V. Отображение $\mathcal{B}$ линейно:

$$\mathcal{B}(\lambda x + \mu y) = \alpha\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda(\alpha\mathcal{A}x) + \mu(\alpha\mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{B}x + \mu\mathcal{B}y. \blacktriangleright$$

Обозначение: $\mathcal{B} = \alpha\mathcal{A}$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением *линейных операторов* — линейных отображений, действующих из пространства V в это же пространство V. Среди рассмотренных выше примеров отображений линейными операторами являются дифференцирование, подобиеи проектирование; умножение столбца на квадратную матрицу также является линейным оператором.

Оператор $\mathcal{I}\colon V \to V$, задаваемый правилом $\mathcal{I}x = x$ для любого элемента x из V, называется *тождественным*.

Введем операцию *умножения линейных операторов*. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ и $\mathcal{B}\colon V \to V$ — линейные операторы. *Произведением оператора $\mathcal{A}$ на оператор $\mathcal{B}$* называется отображение $\mathcal{C}\colon V \to V$, определяемое по правилу

$$\boxed{\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x),}$$

где x — произвольный элемент из V. Покажем, что $\mathcal{C}$ — линейный оператор:

$$\mathcal{C}(\lambda x + \mu y) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\lambda x + \mu y)\big) = \mathcal{B}(\lambda\mathcal{A}x + \mu\mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mu\mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{C}x + \mu\mathcal{C}y. \blacktriangleright$$

Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Замечание. Порядок сомножителей в произведении линейных операторов является существенным, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^2$.

Отображения

$$\mathcal{A}\colon (\xi^1, \xi^2) \mapsto (\xi^1, 0); \quad \mathcal{B}\colon (\xi^1, \xi^2) \mapsto (\xi^1 + \xi^2, \xi^2)$$

— линейные операторы, действующие из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ (рис. 4). Тогда

$$\mathcal{B}\mathcal{A}\colon (\xi^1, \xi^2) \mapsto (\xi^1, 0), \quad \mathcal{A}\mathcal{B}\colon (\xi^1, \xi^2) \mapsto (\xi^1 + \xi^2, 0).$$

Ясно, что при $\xi^2 \neq 0$

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\xi^1, \xi^2) \neq (\mathcal{A}\mathcal{B})(\xi^1, \xi^2).$$

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор. Линейный оператор $\mathcal{B}\colon V \to V$ называется *обратным* оператору $\mathcal{A}$, если выполнены следующие равенства

$$\boxed{\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I},} \tag{1}$$

где $\mathcal{I}\colon V \to V$ — тождественный оператор.

Теорема 3. *Для того, чтобы у линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ был обратный, необходимо и достаточно, чтобы образ оператора $\mathcal{A}$ совпадал со всем пространством,*

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = V.$$

◄ Предположим сначала, что обратный оператор $\mathcal{B}$ у заданного оператора $\mathcal{A}$ существует и покажем, что произвольно взятый элемент y из пространства V непременно лежит в $\operatorname{im} \mathcal{A}$. Подействовав оператором $\mathcal{A}$ на элемент $\mathrm{x} = \mathcal{B}\mathrm{y}$, согласно определению (1), получим

$$\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathrm{y}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathrm{y} = \mathcal{I}\mathrm{y} = \mathrm{y}.$$

Значит, элемент y является образом элемента $\mathrm{x} = \mathcal{B}\mathrm{y}$ и, следовательно, лежит в $\operatorname{im} \mathcal{A}$. Тем самым, $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$.

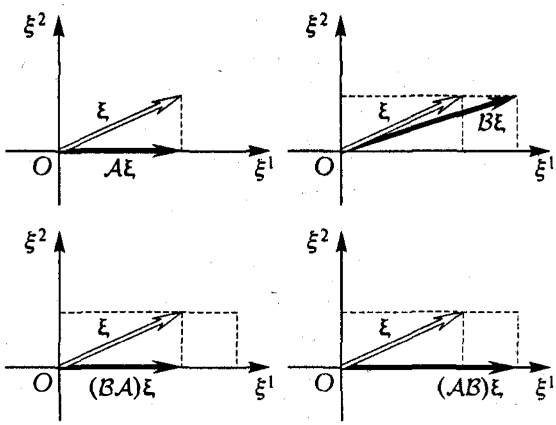


Рис. 4

Пусть теперь образ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством V:

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = V.$$

Тогда

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim V.$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}$ переводит базис пространства V снова в базис:

$$\mathcal{A}\colon \mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \to \mathrm{f} = (\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n),$$

где $\mathrm{f}_k = \mathcal{A}\mathrm{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Построим линейный оператор $\mathcal{B}$ по следующему правилу

$$\mathcal{B}\mathrm{f}_k = \mathrm{e}_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Согласно теореме 1, условием (2) оператор $\mathcal{B}$ определяется однозначно.

Пусть x — произвольный элемент пространства V. Вычислим $(\mathcal{BA})\mathrm{x}$ и $(\mathcal{AB})\mathrm{x}$. Разложим x по базису **e**. Имеем

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathrm{e}_k.$$

Подействовав на него оператором $\mathcal{BA}$, с учетом формул (2) получаем, что

$$(\mathcal{BA})\mathrm{x} = (\mathcal{BA})\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathrm{e}_k\right) = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathcal{A}\mathrm{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathrm{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathcal{B}\mathrm{f}_k = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \mathrm{e}_k = \mathrm{x}.$$

Аналогично, раскладывая элемент x по базису f,

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathrm{f}_k,$$

и действуя на него оператором $\mathcal{AB}$, имеем

$$(\mathcal{AB})\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathrm{f}_k) = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathcal{A}\mathrm{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathrm{f}_k = \mathrm{x}.$$

Тем самым,

$$\mathcal{BA}\mathrm{x} = \mathrm{x}, \qquad \mathcal{AB}\mathrm{x} = \mathrm{x}$$

для любого элемента x из V и, значит,

$$\mathcal{BA} = \mathcal{AB} = \mathcal{I}. \blacktriangleright$$

Замечание. В ходе доказательства этой теоремы мы установили также, что обратный к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно.

Для оператора, обратного к $\mathcal{A}$, принято следующее **обозначение:** $\mathcal{A}^{-1}$.

Следствие. *Линейный оператор $\mathcal{A}: V \to V$ обратим (имеет обратный) тогда и только тогда, когда его ядро тривиально,*

$$\ker \mathcal{A} = \{\theta_V\}.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 3 и формулы (∗) § 1.

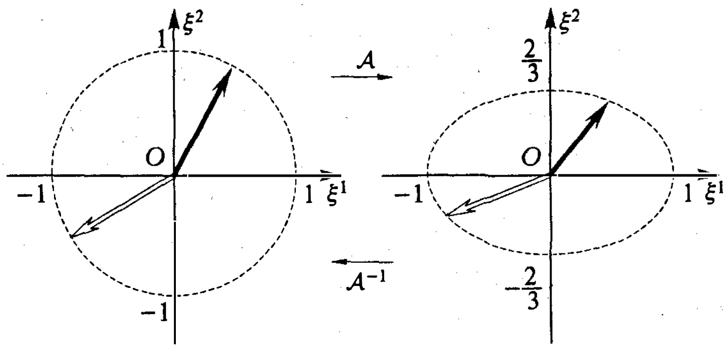


Рис. 5

Пример. Линейный оператор

$$\mathcal{A}: (\xi^1, \xi^2) \mapsto \left(\xi^1, \tfrac{2}{3}\xi^2\right)$$

осуществляет равномерное сжатие плоскости к оси ξ^1 (с коэффициентом $\frac{2}{3}$); обратный оператор

$$\mathcal{A}^{-1} : (\xi^1, \xi^2) \mapsto \left(\xi^1, \tfrac{3}{2}\xi^2\right)$$

— равномерное растяжение (с коэффициентом $\frac{3}{2}$) (рис. 5). ▶

§ 3. Матрица линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}: V \to V$ преобразует элементы базиса $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства V по следующему правилу

$$\boxed{\mathcal{A}e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k = \alpha_i^1 e_1 + \ldots + \alpha_i^n e_n, \quad i = 1, \ldots, n.}$$

Матрица

$$\boxed{\mathsf{A} = \mathsf{A}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix},}$$

столбцами которой являются координаты образов базисных элементов, называется *матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе* $\mathbf{e}$.

Пример 1. Матрица $\mathsf{D}(\mathbf{e})$ оператора дифференцирования $\mathcal{D} : M_3 \to M_3$ в базисе $e_0 = 1$, $e_1 = t$, $e_2 = \frac{t^2}{2!}$, $e_3 = \frac{t^3}{3!}$ имеет вид

$$\mathsf{D}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Матрица $\mathsf{D}(\mathbf{e})$ оператора дифференцирования $\mathcal{D} : T_2 \to T_2$ в базисе $e_1 = \cos t$, $e_2 = \sin t$ имеет вид

$$\mathsf{D}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как

$$\mathcal{D}e_1 = \mathcal{D}\cos t = -\sin t = -e_2 = 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2,$$
$$\mathcal{D}e_2 = \mathcal{D}\sin t = \cos t = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2. \blacktriangleright$$

Пусть

$$y = \mathcal{A}x.$$

Разложим элементы x и y по базису $\mathbf{e}$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k.$$

Координатные столбцы

$$\boxed{x(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad y(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}}$$

элементов x и y в базисе $\mathbf{e}$ связаны соотношением

$$\boxed{y(\mathbf{e}) = A(\mathbf{e})x(\mathbf{e}).} \qquad (1)$$

◀ Сравнивая формулы

$$y = \sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k$$

и

$$y = \mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathcal{A}e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \xi^i\right) e_k,$$

в силу единственности разложения элемента y по базису **e** получаем

$$\eta^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \xi^i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Записывая полученные n равенств в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

получаем требуемое равенство (1). ▶

Теорема 4. *Ранг матрицы* $A(\mathbf{e})$ *линейного оператора* $\mathcal{A}: V \to V$ *не зависит от выбора базиса* $\mathbf{e}$ *и равен рангу* $\operatorname{rang} \mathcal{A}$ *оператора* $\mathcal{A}$.

◀ Так как

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = L(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n),$$

то $\operatorname{rang} \mathcal{A}$ равен максимальному числу линейно независимых элементов в системе $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. В силу теоремы 4 главы V, последнее совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов матрицы $A(\mathbf{e})$, т. е. с ее рангом.

Таким образом,

$$\operatorname{rang} A(\mathbf{e}) = \operatorname{rang} \mathcal{A}. \ ▶$$

Легко убедиться в том, что

при сложении линейных операторов их матрицы (вычисленные в одном базисе) складываются, а при умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это число.

Матрица произведения $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ *операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *равна произведению матриц этих операторов (относительно одного и того же базиса* $\mathbf{e}$*):*

$$C(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e})A(\mathbf{e}). \tag{2}$$

◀ Пусть

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k, \quad \mathcal{B}e_k = \sum_{m=1}^{n} \beta_k^m e_m.$$

Тогда

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}\mathcal{A}e_i = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \mathcal{B}e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \left(\sum_{m=1}^{n} \beta_k^m e_k\right) = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^m \alpha_i^k\right) e_k.$$

Положим

$$\gamma_i^m = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^m \alpha_i^k, \quad i, m = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Тем самым,

$$\mathsf{C}(\mathbf{e}) = (\gamma_i^m). \tag{4}$$

Вследствие того, что $\mathsf{A}(\mathbf{e}) = (\alpha_i^k)$ и $\mathsf{B}(\mathbf{e}) = (\beta_k^m)$, из формул (3) и (4) получаем

$$\mathsf{C}(\mathbf{e}) = \mathsf{B}(\mathbf{e})\mathsf{A}(\mathbf{e}). ▶$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$, обратного к $\mathcal{A}$, является обратной к его матрице A.

◀ В самом деле, из соотношений

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I},$$

определяющих обратный оператор, получаем, что его матрица B удовлетворяет равенствам

$$\mathsf{B}\mathsf{A} = \mathsf{I}, \quad \mathsf{A}\mathsf{B} = \mathsf{I},$$

и, значит, является обратной к A:

$$\boxed{\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1}.} ▶$$

Теорема 5. *Матрицы* $\mathsf{A} = \mathsf{A}(\mathbf{e})$ *и* $\mathsf{A}' = \mathsf{A}(\mathbf{e}')$ *линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to V$ *относительно базисов* $\mathbf{e}$ *и* $\mathbf{e}'$ *пространства* V *связаны равенством*

$$\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}, \tag{5}$$

где S *— матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}$ *к базису* $\mathbf{e}'$.

◀ Пусть $\mathsf{y} = \mathcal{A}\mathsf{x}$. Координатные столбцы элементов x и y относительно базисов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ связаны равенствами

$$\mathsf{y}(\mathbf{e}) = \mathsf{A}\mathsf{x}(\mathbf{e}), \quad \mathsf{y}(\mathbf{e}') = \mathsf{A}'\mathsf{x}(\mathbf{e}') \tag{6}$$

соответственно. Согласно свойству 2 матрицы перехода (§ 5 главы V) имеем

$$\mathsf{x}(\mathbf{e}) = \mathsf{S}\mathsf{x}(\mathbf{e}'), \quad \mathsf{y}(\mathbf{e}) = \mathsf{S}\mathsf{y}(\mathbf{e}'). \tag{7}$$

Заменяя в первом из равенств (6) столбцы $\mathsf{x}(\mathbf{e})$ и $\mathsf{y}(\mathbf{e})$ их выражениями (7), получаем

$$\mathsf{S}\mathsf{y}(\mathbf{e}') = \mathsf{A}\mathsf{S}\mathsf{x}(\mathbf{e}').$$

Пользуясь вторым равенством (6), имеем

$$\mathsf{S}\mathsf{A}'\mathsf{x}(\mathbf{e}') = \mathsf{A}\mathsf{S}\mathsf{x}(\mathbf{e}').$$

Отсюда в силу произвольности столбца $x(\mathbf{c}')$ получаем, что

$$SA' = AS.$$

Так как матрица перехода S невырождена и, значит, обратима, то умножая обе части последнего равенства на матрицу S^{-1} слева приходим к требуемой формуле (5). ►

Следствие. *Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

◄ Вычислим определитель матрицы

$$A(\mathbf{c}') = S^{-1}A(\mathbf{c})S.$$

Имеем

$$\det A(\mathbf{c}') = \det\left(S^{-1}A(\mathbf{c})S\right) = \det S^{-1} \cdot \det A(\mathbf{c}) \cdot \det S = \det A(\mathbf{c}).$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что

$$\det(S^{-1}) = (\det S)^{-1}. \blacktriangleright$$

Таким же свойством обладает и определитель матрицы линейного оператора

$$\mathcal{A} - t\mathcal{I},$$

где $\mathcal{I}$ — тождественный оператор, а t — произвольное число.

◄ Рассмотрим матрицы этого оператора в базисах $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ соответственно:

$$A(\mathbf{c}) - tI, \qquad A(\mathbf{c}') - tI.$$

Воспользовавшись равенством (5)

$$A(\mathbf{c}') - tI = S^{-1}A(\mathbf{c})S - tI = S^{-1}\left(A(\mathbf{c}) - tI\right)S$$

и доказанным выше следствием, получаем, что

$$\det\left(A(\mathbf{c}') - tI\right) = \det\left(A(\mathbf{c}) - tI\right). \blacktriangleright$$

Пусть $A = (\alpha^i_j)$ — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в каком-нибудь базисе. Функция

$$\chi(t) = \det(A - tI)$$

является многочленом от t и, согласно только что доказанному, не зависит от выбора базиса. Расписав определитель матрицы $A - tI$ подробнее, получаем, что

$$\chi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 - t & \dots & \alpha^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^n_1 & \dots & \alpha^n_n - t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + \gamma_{n-1}t^{n-1} + \dots + \gamma_1 t + \gamma_0.$$

Многочлен

$$\boxed{\chi(t) = (-1)^n t^n + \gamma_{n-1}t^{n-1} + \dots + \gamma_1 t + \gamma_0}$$

называется *характеристическим многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ (матрицы A). Его корни называются *характеристическими*, или *собственными*, числами линейного оператора $\mathcal{A}$ (матрицы A).

§ 4. Собственные значения и собственные элементы

Ненулевой элемент $x \in V$ называется *собственным элементом* линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$, если найдется такое число λ — *собственное значение* линейного оператора $\mathcal{A}$, что

$$\boxed{\mathcal{A}\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}.}$$

Пример 1. Всякий многочлен нулевой степени является собственным элементом оператора дифференцирования

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : M_n \to M_n;$$

соответствующее собственное значение равно нулю:

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 = 0 \cdot 1. \blacktriangleright$$

Пример 2. Оператор дифференцирования

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : T_2 \to T_2$$

собственных элементов не имеет.

◀ Пусть некоторый тригонометрический многочлен $\alpha \cos t + \beta \sin t$ после дифференцирования переходит в пропорциональный:

$$\mathcal{D}(\alpha \cos t + \beta \sin t) = \lambda(\alpha \cos t + \beta \sin t).$$

Это означает, что

$$-\alpha \sin t + \beta \cos t = \lambda\alpha \cos t + \lambda\beta \sin t$$

или, что то же,

$$(\lambda\beta + \alpha)\sin t + (\lambda\alpha - \beta)\cos t = 0.$$

Последнее равенство выполняется в том и только в том случае, если

$$\alpha + \lambda\beta = 0 \quad \text{и} \quad \lambda\alpha - \beta = 0,$$

откуда вытекает, что $\alpha = \beta = 0$ и, значит, многочлен может быть только нулевым. ▶

Теорема 6. *Вещественное число λ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда это число — корень его характеристического многочлена:* $\chi(\lambda) = 0$.

◀ **Неоходимость.** Пусть λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Тогда найдется ненулевой элемент x, для которого $\mathcal{A}\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$.

Пусть $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ — базис пространства. Тогда последнее равенство можно переписать в эквивалентном матричном виде

$$\mathsf{A}(\mathbf{e})\mathsf{x}(\mathbf{e}) = \lambda\mathsf{x}(\mathbf{e})$$

или, что то же,

$$\big(\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}\big)\mathsf{x}(\mathbf{e}) = 0. \tag{1}$$

Из того, что x — собственный элемент, вытекает, что его координатный столбец $\mathsf{x}(\mathbf{e})$ ненулевой. Это означает, что линейная система (1) имеет ненулевое решение. Последнее возможно лишь при условии, что

$$\det\big(\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}\big) = 0$$

или, что то же,

$$\chi(\lambda) = 0.$$

Достаточность. Способ построения собственного элемента.

Пусть λ — корень многочлена $\chi(t)$, т. е.

$$\chi(\lambda) = \det\bigl(\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}\bigr) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим однородную линейную систему с матрицей $\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}$:

$$\bigl(\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}\bigr)\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned}(\alpha_1^1 - \lambda)\xi^1 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ \alpha_1^n\xi^1 + \ldots + (\alpha_n^n - \lambda)\xi^n &= 0.\end{aligned} \tag{3}$$

В силу условия (2) эта система имеет ненулевое решение $\xi^1, \ldots, \xi^n$.

Построим элемент x по правилу

$$\mathsf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathsf{e}_i \neq \theta_V.$$

Координатный столбец $\mathsf{x}(\mathbf{e})$ этого элемента удовлетворяет условию

$$\bigl(\mathsf{A}(\mathbf{e}) - \lambda\mathsf{I}\bigr)\mathsf{x}(\mathbf{e}) = 0$$

или, что то же,

$$\mathsf{A}(\mathbf{e})\mathsf{x}(\mathbf{e}) = \lambda\mathsf{x}(\mathbf{e}).$$

Последнее эквивалентно тому, что

$$\mathcal{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}.$$

Следовательно, x — собственный элемент линейного оператора $\mathcal{A}$, а λ — соответствующее ему собственное значение. ▶

Замечание. Для нахождения всех собственных элементов, отвечающих заданному собственному значению λ, необходимо построить ФСР системы (3).

Пример 1. Найти собственные векторы линейного оператора

$$\mathcal{P} : V^3 \to V^3,$$

действующего по правилу

$$\mathcal{P} : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \mapsto x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(оператор проектирования) (рис. 6).

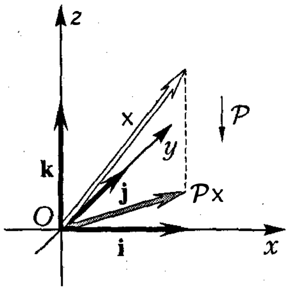


Рис. 6

◀ Рассмотрим действия линейного оператора $\mathcal{P}$ на базисные векторы. Имеем

$$\mathcal{P} : \mathbf{i} \to \mathbf{i}, \quad \mathcal{P} : \mathbf{j} \to \mathbf{j}, \quad \mathcal{P} : \mathbf{k} \to \boldsymbol{\theta}.$$

Запишем матрицу оператора:

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

построим характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

и найдем его корни. Имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. Построим однородные линейные системы с матрицами:

$$\underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}; \qquad \underset{\lambda=1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Получим соответственно:

$$\begin{cases} x & & & = 0, \\ & y & & = 0, \\ & & 0 & = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & = 0, \\ 0 & = 0, \\ -z & = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальные системы решений для каждой из этих систем. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственными векторами этого оператора проектирования являются: вектор $\mathbf{k}$ с собственным значением 0 и любой вектор $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $(x^2 + y^2 > 0)$ с собственным значением 1. ▶

Пример 2. Найти собственные элементы линейного оператора дифференцирования $\mathcal{D}$, действующего в пространстве M_2 многочленов степени не выше двух:

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt} : \alpha + \beta t + \gamma t^2 \mapsto \beta + 2\gamma t.$$

◀ Матрица D заданного оператора в базисе $1, t, t^2$ имеет вид

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

характеристический многочлен $-\lambda^3$ имеет ровно один корень $\lambda = 0$. Решением системы

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

является набор $1, 0, 0$, которому соответствует многочлен нулевой степени. ▶

§ 5. Сопряженный оператор

В евклидовом пространстве над линейными операторами можно ввести еще одно действие — *операцию сопряжения*.

Пусть V — n-мерное евклидово пространство. С каждым линейным оператором

$$\mathcal{A}: V \to V,$$

действующим в этом пространстве, естественно связан другой линейный оператор, *сопряженный* данному.

Определение. Линейный оператор

$$\mathcal{A}^* : V \to V$$

(читается: «а со звездой») называется *сопряженным* линейному оператору $\mathcal{A}: V \to V$, если для любых элементов x и y из пространства V выполняется равенство

$$(\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathcal{A}^*\mathrm{y}). \qquad (1)$$

Линейный оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный данному оператору $\mathcal{A}$, всегда существует.

Пусть $\mathbf{c} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ — ортобазис пространства V и $\mathsf{A} = \mathsf{A}(\mathbf{c}) = (\alpha_i^j)$ — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе, т. е.

$$\mathcal{A}\mathrm{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \mathrm{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что для линейного оператора $\mathcal{A}^* : V \to V$, определяемого по правилу

$$\mathcal{A}^*\mathrm{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j \mathrm{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$\beta_i^j = \alpha_j^i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

равенство (1) выполнено при любых x и y. Напомним, что согласно теореме 1, для того, чтобы построить линейный оператор, достаточно задать его действие на базисные элементы.

Пример. Введем в линейном пространстве M_1 многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше первой операцию скалярного умножения по следующему правилу. Пусть

$$\varphi(t) = a + bt, \quad \psi(t) = c + dt.$$

Положим

$$(\varphi, \psi) = ac + bd. \tag{*}$$

Тем самым, M_1 — двумерное евклидово пространство.

Пусть $\mathcal{D} : M_1 \to M_1$ — оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(a + bt) = b$. Построим сопряженный оператор $\mathcal{D}^* : M_1 \to M_1$.

Многочлены 1 и t образуют ортобазис пространства M_1, так как согласно правилу (*) $(1, 1) = (t, t) = 1$, $(1, t) = 0$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. к. $\mathcal{D}(1) = 0$, $\mathcal{D}(t) = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$, действующего по правилу:

$$\mathcal{D}^*(1) = 1, \quad \mathcal{D}^*(t) = 0.$$

Для произвольного многочлена $\varphi(t) = a + bt$ получаем

$$\mathcal{D} : a + bt \mapsto b, \quad \mathcal{D}^* : a + bt \mapsto at. \blacktriangleright$$

Свойства операции сопряжения

1. У каждого линейного оператора существует ровно один сопряженный ему оператор.

◀ Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — операторы, сопряженные заданному оператору $\mathcal{A}$. Это означает, что для любых элементов x и y из пространства V выполняются равенства

$$(\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathcal{B}\mathrm{y}), \quad (\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathcal{C}\mathrm{y}).$$

Отсюда вытекает, что

$$(\mathrm{x}, \mathcal{B}\mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathcal{C}\mathrm{y})$$

и, далее,

$$(\mathrm{x}, \mathcal{B}\mathrm{y} - \mathcal{C}\mathrm{y}) = 0.$$

В силу произвольности выбора элемента x заключаем, что элемент $\mathcal{B}\mathrm{y} - \mathcal{C}\mathrm{y}$ ортогонален любому элементу пространства V и, в частности, себе самому. Последнее возможно лишь в случае, когда $\mathcal{B}y - \mathcal{C}y = \theta$ и, значит, $\mathcal{B}y = \mathcal{C}y$. Вследствие того, что y — произвольный элемент, получаем $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. ▶

2. $(\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A}^*$, где α — произвольное вещественное число.

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ и $\mathcal{B}\colon V \to V$ — линейные операторы. Тогда

3. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$;

4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$;

5. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

◀ Свойства 2–5 легко вытекают из единственности сопряженного оператора. ▶

6. Пусть $\mathbf{e}$ — ортобазис пространства V. Для того, чтобы операторы $\mathcal{A}\colon V \to V$ и $\mathcal{B}\colon V \to V$ были взаимносопряженными, т. е. выполнялись равенства $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^*$, необходимо и достаточно, чтобы их матрицы $\mathsf{A} = \mathsf{A}(\mathbf{e})$ и $\mathsf{B} = \mathsf{B}(\mathbf{e})$ получались одна из другой транспонированием.

Замечание. Подчеркнем, что свойство 6 справедливо только для матриц, построенных в ортонормированном базисе. Для произвольного базиса оно неверно.

7. Если линейный оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то сопряженный ему оператор $\mathcal{A}^*$ также невырожден и выполняется равенство

$$\boxed{(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}.}$$

§ 6. Симметричный оператор

Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *самосопряженным* (или *симметричным*), если он совпадает с сопряженным ему оператором $\mathcal{A}^*$, т. е.

$$\boxed{\mathcal{A}^* = \mathcal{A}.}$$

В силу свойства 6 из предыдущего параграфа матрица самосопряженного оператора в ортобазисе симметрична, т. е. не изменяется при транспонировании. Поэтому самосопряженный оператор называют также *симметричным* оператором.

Пример. Рассмотрим оператор $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства $Oxyz$ на координатную плоскость Oxy (рис. 7). В ортобазисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ матрица этого оператора имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(так как $\mathcal{P}\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $\mathcal{P}\mathbf{j} = \mathbf{j}$, $\mathcal{P}\mathbf{k} = \boldsymbol{\theta}$), т. е. является симметричной. Значит, оператор проектирования $\mathcal{P}$ симметричен. ▶

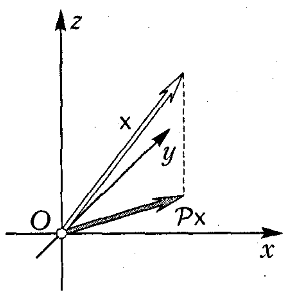


Рис. 7

Симметричный оператор обладает рядом замечательных *свойств*.

Свойства симметричного оператора

Первые два вытекают из его определения.

1. Для того, чтобы линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов x и y из пространства V выполнялось равенство

$$\boxed{(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y).} \tag{6}$$

2. Для того, чтобы линейный оператор был симметричен, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в (каком-нибудь) ортонормированном базисе была симметрична.

3. Характеристический многочлен симметричного оператора (и симметричной матрицы) имеет только вещественные корни.

Напомним, что вещественный корень λ характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ является его собственным значением, т. е. существует ненулевой элемент x (собственный вектор оператора $\mathcal{A}$), который оператор $\mathcal{A}$ преобразует так: $\mathcal{A}x = \lambda x$.

4. Собственные элементы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

◀ Пусть x_1 и x_2 — собственные элементы оператора $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \qquad \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2,$$

и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В силу симметричности оператора имеем

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2).$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2), \qquad (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Из вытекающего отсюда равенства

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Отсюда в силу неравенства $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ имеем

$$\boxed{(x_1, x_2) = 0.}$$ ▶

5. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — симметричный оператор. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, состоящий из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \dots, n; \qquad (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В приведенном выше примере таким базисом является тройка **i**, **j**, **k**: векторы **i** и **j** — собственные векторы оператора проектирования $\mathcal{P}$ с собственными значениями, равными единице, а **k** — его собственный вектор с нулевым собственным значением.

6. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — невырожденный симметричный оператор. Тогда обратный ему оператор $\mathcal{A}^{-1} : V \to V$ также является симметричным.

Замечание. Все собственные значения невырожденного оператора отличны от нуля. Если $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то $\frac{1}{\lambda}$ — собственное значение обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$.

Симметричный оператор называется *положительным*, если для любого ненулевого элемента x из пространства V выполняется неравенство $(\mathcal{A}x, x) > 0$.

Свойства положительного оператора

1. Симметричный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ является положительным в том и только в том случае, когда все его собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ положительны.

2. Положительный оператор невырожден (обратим).

3. Оператор, обратный положительному, также положителен.

§7. Квадратичные формы

Пусть $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})$ — симметричная матрица порядка n, $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$. Выражение

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j} \tag{1}$$

называется *квадратичной формой* переменных $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Матрица A называется *матрицей этой квадратичной формы.*

Примером квадратичной формы двух переменных x и y может служить выражение $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где a, b и c — некоторые действительные числа; ее матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Набор чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$ можно рассматривать как координаты элемента n-мерного евклидова пространства V в некотором фиксированном ортобазисе $\mathbf{e} = (\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ этого пространства,

$$\mathsf{x} = \xi^1\mathsf{e}_1 + \ldots + \xi^n\mathsf{e}_n.$$

Тогда выражение (1) будет представлять собой числовую функцию аргумента x, заданную на всем пространстве V. Эту функцию принято обозначать так: $\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$. О такой квадратичной форме

$$\boxed{\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j} \tag{2}$$

говорят, что она задана в n-мерном евклидовом пространстве V.

Со всякой квадратичной формой $\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$ естественно связана *симметричная билинейная* форма

$$\boxed{\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\eta^j,} \tag{3}$$

где $\eta^1, \ldots, \eta^n$ — координаты элемента y в ортобазисе $\mathbf{e}$:

$$\mathsf{y} = \eta^1\mathsf{e}_1 + \ldots + \eta^n\mathsf{e}_n.$$

Замечание. Форма (3) называется билинейной, так как она линейна по каждому аргументу — и по x, и по y:

$$\mathscr{A}(\alpha_1\mathsf{x}_1 + \alpha_2\mathsf{x}_2, \mathsf{y}) = \alpha_1\mathscr{A}(\mathsf{x}_1, \mathsf{y}) + \alpha\mathscr{A}(\mathsf{x}_2, \mathsf{y}),$$

$$\mathscr{A}(\mathsf{x}, \beta_1\mathsf{y}_1 + \beta_2\mathsf{y}_2) = \beta_1\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{y}_1) + \beta_2\mathscr{A}(\mathsf{x}, \mathsf{y}_2)$$

(здесь α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные числа).

Билинейная форма (3) называется симметричной вследствие того, что ее значение не зависит от порядка аргументов,

$$\boxed{\mathcal{A}(y, x) = \mathcal{A}(x, y).}$$

Вычисляя значения билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ на базисных элементах, т. е. полагая $x = e_k$, $y = e_m$, получаем, что

$$\mathcal{A}(e_k, e_m) = \alpha_{km}. \tag{4}$$

Это означает, что элементы матрицы A квадратичной формы (2) суть значения билинейной формы на элементах базиса **e**.

Примером билинейной формы может служить скалярное произведение векторов n-мерного координатного пространства $\mathbb{R}^n$

$$(\xi; \eta) = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^n\eta^n,$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n) \in \mathbb{R}^n$. Соответствующая квадратичная форма

$$|\xi|^2 = (\xi, \xi) = (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2.$$

определяет квадрат длины вектора ξ. ▶

При переходе к другому базису координаты элемента x изменяются. Меняется и матрица $A = A(e)$ квадратичной формы.

В приложениях часто возникает необходимость приведения квадратичной формы к наиболее простому виду. Таким видом является *диагональный*, или *нормальный вид*. Будем говорить, что квадратичная форма в базисе **e** имеет нормальный вид, если все коэффициенты при произведениях различных координат равны нулю, т.е. $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\mathcal{A}(x, x) = \alpha_{11}(\xi^1)^2 + \alpha_{22}(\xi^2)^2 + \ldots + \alpha_{nn}(\xi^n)^2.$$

Матрица квадратичной формы в этом базисе имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & 0 \\ & \alpha_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 7. *Для каждой квадратичной формы, заданной в евклидовом пространстве, можно указать (ортонормированный) базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид.*

◀ Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, воспользуемся свойствами симметричного оператора. Построим линейный оператор $\mathcal{A}: V \to V$ так, чтобы его матрица (α^i_j) в базисе **e** совпадала с матрицей (α_{ij}) квадратичной формы в этом же базисе **e**, т.е. положим $\alpha^i_j = \alpha_{ij}$. В силу симметричности матрицы (α^i_j) оператор $\mathcal{A}$ симметричен.

Вычислим $(\mathcal{A}x, x)$. Замечая, что

$$(\mathcal{A}e_i, e_j) = \alpha^j_i = \alpha_{ij}$$

вследствие ортонормированности базиса **e**, получаем

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right), \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i\xi^j(\mathcal{A}e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}\xi^i\xi^j = \mathcal{A}(x, x).$$

Тем самым, мы установили важную связь

$$\boxed{\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = (\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{x})} \qquad (5)$$

между квадратичной формой, заданной в евклидовом пространстве V, и действующим в нем симметричным оператором.

В силу симметричности построенного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V существует ортонормированный базис $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n)$, состоящий из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\mathrm{f}_k = \lambda_k \mathrm{f}_k, \quad k = 1, \ldots, n; \qquad (\mathrm{f}_k, \mathrm{f}_m) = \delta_{km}.$$

Заметим, что

$$(\mathcal{A}\mathrm{f}_k, \mathrm{f}_m) = (\lambda_k \mathrm{f}_k, \mathrm{f}_m) = \lambda_k \delta_{km} = \begin{cases} \lambda_k, & k = m, \\ 0\ , & k \neq m. \end{cases}$$

Разложим элемент x по базису f,

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathrm{f}_k,$$

и вновь вычислим $(\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{x})$. Имеем

$$(\mathcal{A}\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \left(\mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{n} \eta^k \mathrm{f}_k\right), \sum_{m=1}^{n} \eta^m \mathrm{f}_m\right) = \sum_{k,m=1}^{n} \eta^k \eta^m (\mathcal{A}\mathrm{f}_k, \mathrm{f}_m) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\eta^k)^2.$$

Отсюда в силу равенства (5) получаем, что

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\eta^k)^2.$$

Тем самым, матрица $\mathrm{A(f)}$ исходной квадратичной формы в базисе f является диагональной:

$$\mathrm{A(f)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \ ►$$

Сам диагональный вид квадратичной формы можно (с точностью до порядка слагаемых) записать и не вычисляя элементов базиса f. Достаточно найти собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$ или, что тоже самое, собственные значения матрицы $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$ и выписать их с учетом кратности.

Пример. Привести квадратичную форму

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 2xy + 2yz + 2xz$$

к диагональному виду.

◄ Запишем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и построим ее характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Приравняв полученное выражение к нулю, найдем его корни: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$. Тем самым,

$$\mathcal{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 2\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2.$$

Построение соответствующего ортобазиса сложнее.

Собственные векторы симметричного оператора $\mathcal{A}$ суть собственные векторы матрицы квадратичной формы. Найдем их.

Пусть $\lambda = 2$. Рассмотрим однородную линейную систему с матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Все решения системы

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0, \\ x - 2y + z &= 0, \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

пропорциональны набору $(\,1 \quad 1 \quad 1\,)^{\mathrm{T}}$.

Пусть $\lambda = -1$. Однородная линейная система с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

сводится к одному уравнению

$$x + y + z = 0$$

и имеет два линейно независимых решения. Выберем их так, чтобы они были ортогональны: $(\,1 \quad -2 \quad 1\,)^{\mathrm{T}}$, $(\,1 \quad 0 \quad -1\,)^{\mathrm{T}}$. Легко убедиться в том, что векторы с найденными координатными столбцами попарно ортогональны. Пронормируем их:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Искомый базис построен:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}. \ \blacktriangleright$$

Замечание. В качестве пространства V можно взять любое n-мерное евклидово пространство. Однако в задачах наиболее часто встречается *координатное* пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел — $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, стандартный базис состоит из наборов $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0, 0), \ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, 0)$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, а скалярное произведение наборов $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ определяется формулой

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^n\eta^n.$$

Опишем *алгоритм*, посредством которого для произвольной квадратичной формы, заданной в n-мерном координатном пространстве, строится базис, в котором эта квадратичная форма имеет диагональный вид.

◀ Пусть $\mathcal{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j$ — заданная квадратичная форма.

1. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Построим характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - t & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} - t \end{vmatrix}$$

и найдем его корни (в силу симметричности матрицы все корни вещественны). Запишем их с учетом кратности:

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

3. Пусть λ — один из этих корней, кратности k. Однородная линейная система с матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

имеет ровно k линейно независимых решений (образующих фундаментальную систему решений). Ортонормировав ее, получим k попарно ортогональных решений единичной длины.

4. Поступая так с каждым корнем характеристического многочлена, получаем набор ровно n попарно ортогональных элементов единичной длины, т. е. ортобазис $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$.

5. В построенном ортобазисе $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n)$ заданная квадратичная форма имеет диагональный вид:

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \ldots + \lambda_n(\eta^n)^2,$$

где

$$\mathrm{x} = \eta^1\mathrm{f}_1 + \ldots + \eta^n\mathrm{f}_n. \blacktriangleright$$

Определение. Квадратичная форма

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j \qquad (6)$$

называется *положительно определенной* или *знакоположительной*, если для любого ненулевого элемента x (или, что то же, для любого ненулевого набора $\xi^1, \ldots, \xi^n$) выполняется неравенство

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) > 0.$$

Примером знакоположительной квадратичной формы может служить скалярный квадрат произвольного вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ координатного пространства:

$$(\xi, \xi) = (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2. \blacktriangleright$$

После приведения знакоположительной квадратичной формы к диагональному виду получаем

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \ldots + \lambda_n(\eta^n)^2,$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$.

Критерий Сильвестра (знакоположительности квадратичной формы). *Для того, чтобы квадратичная форма* (6) *была знакоположительной, необходимо и достаточно, чтобы все миноры ее матрицы, расположенные в левом верхнем углу, были положительны, т. е.*

$$\alpha_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Метод Лагранжа

Существует еще один (простой) метод приведения квадратичной формы к диагональному виду, удобный, например, при получении ответа на вопрос, является ли квадратичная форма знакоопределенной или нет. Этот *метод Лагранжа*, или *метод выделения полного квадрата*, заключается в следующем.

Пусть

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j$$

— заданная квадратичная форма и $\alpha_{11} \neq 0$. Выпишем сначала все слагаемые, содержащие переменную ξ^1, и преобразуем их так:

$$\alpha_{11}(\xi^1)^2 + 2\alpha_{12}\xi^1\xi^2 + \ldots + 2\alpha_{1n}\xi^1\xi^n =$$
$$= \alpha_{11}\left((\xi^1)^2 + 2\,\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\,\xi^1\xi^2 + \ldots + 2\,\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\,\xi^1\xi^n\right) =$$
$$= \alpha_{11}\left(\xi^1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\,\xi^2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\,\xi^n\right)^2 - \sum_{i,j=2}^{n} \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}\,\xi^i\xi^j.$$

Полагая

$$\eta^1 = \xi^1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\,\xi^2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\,\xi^n,$$
$$\eta^k = \xi^k, \quad k = 2, \ldots, n,$$

получаем, что

$$\mathscr{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \alpha_{11}(\eta^1)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} \alpha'_{ij}\eta^i\eta^j,$$

где

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}.$$

Замечая, что выражение

$$\mathscr{A}_1(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{i,j=2}^{n} \alpha'_{ij}\eta^i\eta^j$$

также является квадратичной формой, но уже зависящей от меньшего числа переменных, вновь выделяем полный квадрат и т. д.

Если $\alpha_{11} = 0$, но отлично от нуля $\alpha_{ii}(2 \leqslant i \leqslant n)$, то применяем тот же прием, но уже к переменной ξ^i.

Если все коэффициенты при квадратах неизвестных равны нулю, $\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$, то тогда следует начинать с преобразования координат вида

$$\xi^1 = \eta^1 + \eta^2,$$
$$\xi^2 = \eta^1 - \eta^2,$$
$$\xi^k = \eta^k, \quad k = 3, \ldots, n.$$

В результате проведенного преобразования координат, в частности, получим

$$2\alpha_{12}\xi^1\xi^2 = 2\alpha_{12}(\eta^1)^2 - 2\alpha_{12}(\eta^2)^2.$$

И, тем самым, придем к общему случаю. ►

Пример. Методом Лагранжа привести к диагональному виду квадратичную форму

$$\mathscr{A}(\mathrm{x},\mathrm{x}) = 2xy + 2yz + 2zx.$$

◀ Введем новые координаты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$:

$$x = \tilde{x} + \tilde{y}, \quad y = \tilde{x} - \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}.$$

Тогда

$$\mathscr{A}(\mathrm{x},\mathrm{x}) = 2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 + 4\tilde{x}\tilde{z} = 2(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{z}) - 2\tilde{y}^2 = 2(\tilde{x} + \tilde{z})^2 - 2\tilde{y}^2 - 2\tilde{z}^2.$$

Положим $\hat{x} = \tilde{x} + \tilde{z}$, $\hat{y} = \tilde{y}$, $\hat{z} = \tilde{z}$ и получим

$$\mathscr{A}(\mathrm{x},\mathrm{x}) = 2\hat{x}^2 - 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2. ▶$$

Замечание. Недостаток метода Лагранжа состоит в том, что при указанных преобразованиях координат новые координатные оси уже не являются попарно ортогональными.

Существуют и другие способы приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Сравнивая результаты описанных выше двух способов приведения квадратичной формы $2xy + 2yz + 2zx$ к диагональному виду (речь идет о последних двух разобранных примерах), можно заметить, что в них соответственно одинаковы: число отрицательных коэффициентов и число положительных коэффициентов. Это совпадение не случайно, а является важным свойством квадратичных форм, называемым *законом инерции*:

число положительных, число отрицательных и число нулевых коэффициентов при квадратах неизвестных в диагональном виде квадратичной формы всегда одни и те же и не зависят от способа приведения квадратичной формы к этому виду.

§ 8. Классификация кривых и поверхностей второго порядка

Применим описанный выше алгоритм приведения квадратичной формы к диагональному виду для классификации кривых и поверхностей второго порядка.

А. Кривые

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка на плоскости Oxy:

$$\underline{ax^2 + 2bxy + cy^2} + 2dx + 2ey + f = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Построим матрицу квадратичной части $ax^2 + 2bxy + cy^2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

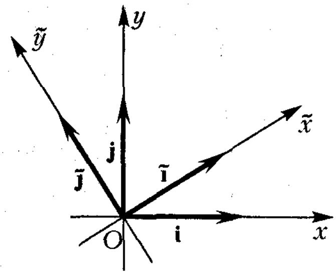


Рис. 8

Найдем корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена и соответствующие им собственные векторы $\tilde{\mathbf{i}}$ и $\tilde{\mathbf{j}}$ (единичные и взаимноортогональные). Возьмем эти векторы за орты новых осей $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$ (рис. 8). Переходя к новым координатам $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, получим

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + 2\tilde{d}\tilde{x} + 2\tilde{e}\tilde{y} + f = 0.$$

Возможны два случая: 1) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, 2) λ_1 (или λ_2) равно нулю.

В первом случае сдвигом точки начала отсчета

$$X = \tilde{x} + \frac{\tilde{d}}{\lambda_1}, \quad Y = \tilde{y} + \frac{\tilde{e}}{\lambda_2}$$

добиваемся исчезновения линейных членов (как это описано в п. 1 § 7 главы III)

$$\boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \tilde{f} = 0.}$$

Далее, как это и делалось в п 2 § 7 главы III, рассматриваем всевозможные сочетания знаков у коэффициентов λ_1, λ_2 и $\tilde{f}$. В результате получаем: *эллипс*, *гиперболу*, *пару пересекающихся прямых*, *точку*, *пустое множество*.

Во втором случае (положим для определенности $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$) сдвигом начала отсчета

$$X = \tilde{x} + \alpha, \quad Y = \tilde{y} + \frac{\tilde{e}}{\lambda_2}$$

от уравнения

$$\lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\tilde{d}\tilde{x} + 2\tilde{e}\tilde{y} + f = 0$$

приходим к уравнению

$$\boxed{\lambda_2 Y^2 + 2\tilde{d}X + \tilde{f} = 0.}$$

Если $\tilde{d} \neq 0$, то, полагая $\alpha = \frac{\tilde{f}}{2\tilde{d}}$, соответственно получим

$$\boxed{\lambda_2 Y^2 + 2\tilde{d}X = 0}$$

(*парабола*).

Если же $\tilde{d} = 0$, то взяв $\alpha = 0$, имеем

$$\boxed{\lambda_2 Y^2 + \tilde{f} = 0.}$$

В зависимости от знака $\frac{\tilde{f}}{\lambda_2}$ получаем: *пару параллельных прямых*, *пару совпадающих прямых*, *пустое множество*.

Замечание. Операция отыскания корней характеристического многочлена квадратичной части уравнения кривой и взаимноортогональных единичных собственных векторов, описанная здесь, заменяет уничтожение произведения разноименных координат путем поворота на подходящий угол (см. § 7 главы III). В случае поверхностей второго порядка дело обстоит сложнее (и для того, чтобы разобраться с классификацией до конца, нужны и внимание и терпение).

Б. Поверхности

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет следующий вид

$$\underline{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2} + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

где

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 > 0.$$

Упростим вид квадратичной части этого уравнения (подчеркнута), пользуясь описанным выше алгоритмом. Построим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

найдем корни λ_1, λ_2, λ_3 характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-t & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}-t \end{vmatrix}$$

и соответствующие им собственные векторы $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\mathbf{k}}$ так, чтобы они образовывали ортонормированную тройку (это всегда возможно). Возьмем векторы $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{k}}$ за орты новых координатных осей $O\tilde{x}$, $O\tilde{x}$, $O\tilde{z}$. Производя замену координат, получим

$$\boxed{\underline{\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2} + 2\widetilde{\alpha}_{14}\tilde{x} + 2\widetilde{\alpha}_{24}\tilde{y} + 2\widetilde{\alpha}_{34}\tilde{z} + \widetilde{\alpha}_{44} = 0.} \qquad (*)$$

Возможны три случая:

(I) Все три корня λ_1, λ_2, λ_3 отличны от нуля.

Путем сдвига начала

$$X = \tilde{x} + \frac{\widetilde{\alpha}_{14}}{\lambda_1}, \quad Y = \tilde{y} + \frac{\widetilde{\alpha}_{24}}{\lambda_2}, \quad Z = \tilde{z} + \frac{\widetilde{\alpha}_{34}}{\lambda_3}$$

уравнение $(*)$ поверхности приводится к следующему виду

$$\boxed{\mathbf{I.}\quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \tilde{\alpha}_{44} = 0.}$$

а. $\underline{\widetilde{\alpha}_{44} \neq 0.}$

α) λ_1, λ_2 и λ_3 имеют один и тот же знак, противоположный знаку $\widetilde{\alpha}_{44}$.

Полагая

$$a^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_3},$$

получаем уравнение *эллипсоида*

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.}$$

β) Знаки λ_1 и λ_2 противоположны знаку $\widetilde{\alpha}_{44}$, а знаки λ_3 и $\widetilde{\alpha}_{44}$ совпадают.

Полагая

$$a^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_3},$$

получаем уравнение *однополостного гиперболоида*

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1.}$$

γ) Знаки λ_1 и λ_2 совпадают со знаком $\widetilde{\alpha}_{44}$, а знаки λ_3 и $\widetilde{\alpha}_{44}$ противоположны.

Полагая

$$a^2 = \frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{\lambda_3},$$

получаем уравнение *двуполостного гиперболоида*

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1.}$$

б. $\widetilde{a}_{44} = 0$.

α) Если λ_1, λ_2 и λ_3 имеют один и тот же знак, то получаем *точку* $(0, 0, 0)$.

β) Если одно из λ_i имеет знак, противоположный знаку двух других, то получаем уравнение *конуса второго порядка*

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.}$$

(II) Ровно один корень равен нулю (для определенности $\lambda_3 = 0$).

Полагая

$$X = \tilde{x} + \frac{\widetilde{a}_{14}}{\lambda_1}, \quad Y = \tilde{y} + \frac{\widetilde{a}_{24}}{\lambda_2}, \quad Z = \tilde{z},$$

получим

$$\boxed{\text{II.} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2\widetilde{a}_{34} Z + \widetilde{a}_{44} = 0.}$$

а. $\widetilde{a}_{34} \neq 0$. Тогда сдвигом точки начала отсчета

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + \frac{\widetilde{a}_{44}}{2\widetilde{a}_{34}}$$

получаем уравнение вида

$$\boxed{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\widetilde{a}_{34} z = 0.}$$

α) Если λ_1 и λ_2 — одного знака, то, полагая

$$p = -\frac{\widetilde{a}_{34}}{\lambda_1} > 0, \quad q = -\frac{\widetilde{a}_{34}}{\lambda_2} > 0$$

(можно считать, что знак $\widetilde{a}_{34}$ противоположен знаку λ_1 и λ_2; этого всегда можно добиться, поменяв в случае необходимости ориентацию оси z на противоположную), получаем уравнение *эллиптического параболоида*

$$\boxed{2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}.}$$

β) Если λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки, то, положив

$$p = -\frac{\widetilde{a}_{34}}{\lambda_1} > 0, \quad q = +\frac{\widetilde{a}_{34}}{\lambda_2} > 0,$$

получим уравнение *гиперболического параболоида*

$$\boxed{2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}.}$$

б. $\widetilde{a}_{34} = 0$. Тогда уравнение поверхности имеет следующий вид

$$\boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \widetilde{a}_{44} = 0.}$$

Классификация поверхностей с уравнениями такого типа приводится в таблице.

Замечание. Отсутствие третьей координаты (точнее, ее неявное присутствие) приводит к цилиндрическим поверхностям, направляющими которых являются кривые второго порядка, лежащие в плоскости $Z = 0$ и имеющие уравнения вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \widetilde{a}_{44} = 0.$$

Таблица

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \cdot \widetilde{\alpha}_{44} > 0$	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	эллиптический цилиндр
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \cdot \widetilde{\alpha}_{44} < 0$	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$	$\varnothing$
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\widetilde{\alpha}_{44} = 0$	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$	ось Oz
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\widetilde{\alpha}_{44} \neq 0$	$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	гиперболический цилиндр
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\widetilde{\alpha}_{44} = 0$	$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$	пара пересекающихся плоскостей

(III) Ровно два корня равны нулю (для определенности $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$). Преобразованием координат

$$X = \tilde{x} + \frac{\widetilde{\alpha}_{14}}{\lambda_1}, \quad Y = \tilde{y}, \quad Z = \tilde{z}$$

приходим к уравнению

$$\boxed{\textbf{III.} \quad \lambda_1 X^2 + 2\widetilde{\alpha}_{24} Y + 2\widetilde{\alpha}_{34} Z + \widetilde{\alpha}_{44} = 0.}$$

а. $\underline{\widetilde{\alpha}_{24}, \widetilde{\alpha}_{34} \neq 0}$. Покажем, что этот случай всегда можно свести к такому: $\widetilde{\alpha}_{24} \neq 0$, $\widetilde{\alpha}_{34} = 0$. Преобразованием координат

$$\hat{x} = X, \quad \hat{y} = \frac{\widetilde{\alpha}_{24} Y + \widetilde{\alpha}_{34} Z}{\sqrt{\widetilde{\alpha}_{24}^2 + \widetilde{\alpha}_{34}^2}}, \quad \hat{z} = \frac{-\widetilde{\alpha}_{34} Y + \widetilde{\alpha}_{24} Z}{\sqrt{\widetilde{\alpha}_{24}^2 + \widetilde{\alpha}_{34}^2}}$$

уравнение поверхности приводится к следующему виду

$$\boxed{\lambda_1 \hat{x}^2 + 2\beta \hat{y} + \widetilde{\alpha}_{44} = 0,}$$

где

$$\beta = \sqrt{\widetilde{\alpha}_{24}^2 + \widetilde{\alpha}_{34}^2}.$$

Замечание. Преобразование координат, упрощающее вид уравнения, выбирается так, чтобы новая координатная система вновь была прямоугольной декартовой.

Сдвигом начала координат

$$x = \hat{x}, \quad y = \hat{y} + \frac{\widetilde{\alpha}_{44}}{2\beta}, \quad z = \hat{z}$$

получаем уравнение *параболического цилиндра*

$$\boxed{x^2 = 2py.}$$

6. $\widetilde{\alpha}_{24} = \widetilde{\alpha}_{34} = 0$. Уравнение

$$\lambda_1 X^2 + \widetilde{\alpha}_{44} = 0$$

описывает либо *пару параллельных плоскостей* ($\lambda_1 \cdot \widetilde{\alpha}_{44} < 0$), либо *пару совпадающих плоскостей* ($\widetilde{\alpha}_{44} = 0$), либо *пустое множество* ($\lambda_1 \cdot \widetilde{\alpha}_{44} > 0$).

Упражнения

1. Проверьте, что оператор $\mathcal{A}$, преобразующий векторы трехмерного евклидова пространства по правилу

$$\mathcal{A}\mathrm{x} = (\mathrm{x}, \mathrm{a})\mathrm{a}$$

(a — фиксированный вектор), является линейным.

2. Найдите образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}$, преобразующего произвольный элемент $\mathrm{x} = (x^1, x^2, x^3)$ пространства $\mathbb{R}^3$ по правилу

$$\mathcal{A}\mathrm{x} = (2x^1 - x^2 - x^3, x^1 - 2x^2 + x^3, x^1 + x^2 - 2x^3).$$

Вычислите ранг и дефект этого линейного оператора.

3. Найдите матрицу оператора дифференцирования в двумерном линейном пространстве, натянутом на базисные функции $\varphi(t) = e^t \cos t$, $\psi(t) = e^t \sin t$.

4. В базисе $1, t, t^2$ пространства M_2 оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе, составленном многочленами $3t^2 + 2t$, $5t^2 + 3t + 1$, $7t^2 + 5t + 3$.

5. Вычислите собственные значения и собственные элементы операторов, заданных матрицами:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$.

7. Приведите квадратичную форму $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$ к диагональному виду.

8. Определите вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

а) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y - 18z + 30 = 0$;

б) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;

в) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$.

Ответы

2. Базис образа $\mathrm{y}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathrm{y}_2 = (-1, 2, 1)$; базис ядра $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$; ранг равен 2; дефект равен 1. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -4 & -5 \\ \frac{9}{4} & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **5.** а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **6.** Поворот на угол $-\frac{\pi}{2}$. **7.** $X^2 + 7Y^2 + Z^2$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z$; $y = -\frac{2}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z$; $z = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{6}}Y - \frac{1}{\sqrt{3}}Z$. **8.** а) эллипсоид $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{\frac{2}{3}} = 1$; б) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{12}} = 1$; в) гиперболический параболоид $\frac{X^2}{\frac{4}{7\sqrt{14}}} - \frac{Y^2}{\frac{2}{\sqrt{14}}} = 2Z$.

Глава VII

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, неопределяемых понятий. Употребляя термин «множество», будем понимать под этим любое собрание (совокупность) определенных и различимых между собой элементов, мыслимое как единое целое. Например, мы можем говорить о множестве букв на данной странице, о множестве песчинок на морском берегу, о множестве всех корней уравнения, о множестве всех четных чисел и т. д.

Если A — произвольное множество элементов, то утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$. Запись $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Если каждый элемент из множества A входит и в множество B, то мы называем A ***подмножеством*** множества B и пишем $A \subset B$. Так, множество всех четных чисел $\mathbb{Z}'$ является подмножеством множества $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Заметим, что всегда $A \subset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е. если каждый элемент множества A есть также и элемент B и наоборот, то мы говорим, что множества A и B равны и пишем $A = B$. Тем самым множество однозначно определено своими элементами. Пользуясь этим, мы будем иногда обозначать множество его элементами, заключенными в фигурные скобки. Так

$$A = \{a\}, \quad A = \{a, b\}, \quad A = \{a, b, c\}$$

суть множества, соответственно состоящие из одного элемента a, двух элементов a и b, трех элементов a, b и c. Часто все элементы множества выписать затруднительно, или невозможно. В таких случаях невыписанные элементы будем заменять точками:

$$A = \{a, b, c, \dots\}$$

есть множество, состоящее из элементов a, b, c и, может быть, еще некоторых других. Какие эти другие элементы, обозначенные точками, должно быть указано, например:

множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

множество квадратов натуральных чисел $\{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$;

множество простых чисел $\{2, 3, 5, 7, \dots\}$.

Если $A \subset B$, но $A \neq B$, то A называют ***правильной частью*** множества B (***истинным подмножеством*** множества B).

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некоторое множество хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие ***пустого множества***, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Будем обозначать пустое множество символом $\varnothing$. Любое множество содержит пустое множество в качестве подмножества.

Пусть A и B — два множества. Их *суммой* или *объединением* $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1).

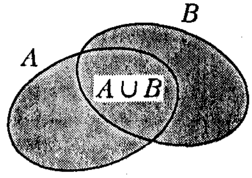


Рис. 1

Назовем *пересечением* множеств A и B множество $C = A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B (рис. 2). Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$.

Аналогично определяются объединение и пересечение любого числа множеств.

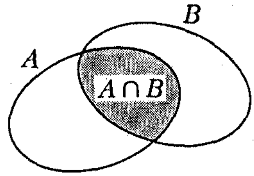


Рис. 2

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Множество называется *конечным*, если оно состоит из некоторого натурального числа элементов. Например, конечным является множество всех жителей данного города, а также множество всех людей, населяющих планету Земля. Непустое множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным. Так, множество $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ всех натуральных чисел является бесконечным множеством.

Пусть A и B — некоторые множества. Говорят, что между множествами A и B установлено *взаимнооднозначное соответствие*, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один элемент множества B так, что: 1) разным элементам множества A поставлены в соответствие разные элементы множества B и 2) каждый элемент множества B поставлен в соответствие некоторому элементу множества A. Если между двумя *конечными* множествами A и B удалось установить взаимнооднозначное соответствие, то множество A и B имеют одинаковое число элементов. Множества A и B, между которыми можно установить взаимнооднозначное соответствие, называются *эквивалентными*.

Обозначение: $A \sim B$.

Бесконечное множество A называется *счетным*, если можно установить взаимнооднозначное соответствие между множеством A и множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел, т. е. если $A \sim \mathbb{N}$. Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

§ 2. Действительные числа. Абсолютная величина

Числа $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ называются *натуральными* числами. Дроби вида

$$\pm\frac{m}{n},$$

где m и n — натуральные числа, а также число 0 называются *рациональными* числами. В частности, рациональным будет каждое натуральное и каждое целое отрицательное число. Любое рациональное число выражается либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дробью.

Кроме рациональных чисел существуют еще иррациональные числа, которые выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Например, $\sqrt{2} = 1{,}41\dots$, $\pi = 3{,}14\dots$.

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* (*вещественными*) числами.

Можно показать, что множество всех рациональных чисел счетно. Множество всех действительных чисел счетным не является.

Мы будем предполагать, что основные свойства действительных чисел и арифметические действия над ними известны из школьного курса математики.

Определение. *Абсолютной величиной* (*модулем*) числа a называется само число a, если a — положительно, и число $-a$, если a — отрицательно. Абсолютная величина нуля есть нуль.

Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Таким образом, по определению

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}}$$

Если $a > 0$, то отношение $|x| \leqslant a$ эквивалентно отношению

$$-a \leqslant x \leqslant a \qquad \text{(проверьте это!)}.$$

Для абсолютных величин верны следующие соотношения:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Справедливость этих соотношений вытекает из правила умножения и деления действительных чисел и из определения абсолютной величины.

3. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

◀ Сложив почленно очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

получим двойное неравенство

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

равносильное неравенству

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \ ▶$$

4. $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$

◀ Так как

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

то

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \qquad (1)$$

Из неравенства

$$|b| = |(b - a) + a| \leqslant |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$$

получаем, что

$$|a| - |b| \geqslant -|a - b|. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует

$$-|a-b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a-b|,$$

что равносильно неравенству

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|. \blacktriangleright$$

§ 3. Числовая ось. Простейшие множества чисел

Действительные числа изображаются точками прямой. Делается это так.

Рис. 3

На некоторой прямой (будем считать ее расположенной горизонтально, рис. 3) выберем положительное направление, начало отсчета O и единицу масштаба u. Для изображения положительного числа a возьмем на нашей прямой справа от начала O точку на расстоянии (в принятом масштабе), равном данному числу a; для изображения отрицательного числа a возьмем точку слева от начала O на расстоянии, равном $|a|$; числу $a = 0$ будет отвечать точка O — начало отсчета. Таким приемом мы устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между всеми точками прямой и множеством действительных чисел: каждое действительное число будет изображено одной определенной точкой прямой, причем каждая точка прямой будет изображением одного определенного действительного числа.

Определение. Прямая, для всех точек которой установлено указанное взаимооднозначное соответствие с множеством всех действительных чисел, называется *числовой осью* или *числовой прямой*.

В дальнейшем мы будем обозначать одним и тем же символом x действительное число x и точку x числовой оси.

Числовая ось позволяет дать наглядное представление о расположении действительных чисел. Неравенство $x_1 < x_2$ означает, что точка x_1 лежит левее точки x_2; двойное неравенство $x_1 < x_3 < x_2$ означает, что точка x_3 лежит между точками x_1 и x_2.

3.1. Простейшие множества чисел

Дадим определения простейших числовых множеств, с которыми нам особенно часто придется иметь дело в дальнейшем.

Для наиболее важных множеств приняты стандартные обозначения. Так например, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

Множество всех действительных чисел x (всех точек числовой оси), удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$, называется *отрезком* (*сегментом*) и обозначается $[a, b]$. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается (a, b). Множество всех действительных чисел x, определяемых неравенствами $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$ мы будем обозначать соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$ и употреблять в обоих случаях равносильные термины: *полуинтервал* и *полуотрезок*. Мы будем рассматривать также *бесконечные* интервалы и полуинтервалы, вводя *несобственные* точки (числа) $+\infty$ и $-\infty$. Таким образом,

$(a, +\infty)$ — множество всех действительных чисел $x > a$;
$[a, +\infty)$ — множество всех действительных чисел $x \geqslant a$;
$(-\infty, b)$ — множество всех действительных чисел $x < b$;
$(-\infty, b]$ — множество всех действительных чисел $x \leqslant b$;
$(-\infty, +\infty)$ — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел (числовая прямая).

Определение. *Окрестностью точки* x_0 числовой оси называется любой интервал, содержащий точку x_0.

Пусть δ — положительное число.

Определение. *δ-окрестностью точки* x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, симметричный относительно точки x_0 (рис. 4). Это — совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

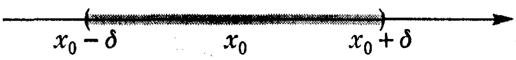


Рис. 4

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{или, что то же,} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

Определение. Интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, из которого выброшена точка x_0, иногда называют *проколотой δ-окрестностью* точки x_0.

Обозначение: $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

---

§ 4. Точная верхняя и точная нижняя грани множества

Определение. Множество E действительных чисел называется *ограниченным сверху*, если существует число a такое, что для всякого числа $x \in E$ выполнено неравенство

$$x \leqslant b.$$

Например, множество $E = (-\infty, 1]$ ограничено сверху.

Определение. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует число a такое, что для всякого числа $x \in E$ выполнено неравенство

$$a \leqslant x.$$

Так, множество всех натуральных чисел ограничено снизу.

Определение. Множество E называется *ограниченным*, если оно ограничено снизу и сверху, т. е. если существуют такие числа a и b, что для всякого числа $x \in E$ имеем

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Отсюда следует, что множество E ограничено, если оно содержится в некотором отрезке $[a, b]$.

Множество, не являющееся ограниченным сверху (снизу), называется *неограниченным сверху* (*снизу*). Например, множество всех натуральных чисел является неограниченным сверху (но ограниченным снизу); множество всех отрицательных чисел является неограниченным снизу (но ограниченным сверху). Множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел, а также множество всех действительных чисел являются множествами, не ограниченными как сверху, так и снизу.

Если множество E ограничено сверху числом b, то это число b называют *верхней гранью* множества E. В этом случае любое число b', бóльшее b, тоже будет верхней гранью множества E.

Определение. Число M называется *точной верхней гранью* множества E, если

1) для любого $x \in E$ выполняется неравенство

$$x \leqslant M;$$

2) для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $x^* \in E$ такое, что

$$M - \varepsilon < x^* \leqslant M.$$

Иными словами, точная верхняя грань множества E есть наименьшая из всех верхних граней множества E.

Точная верхняя грань множества E обозначается

$$M = \sup E \quad \text{или} \quad M = \sup_{x \in E} \{x\}$$

(сокращение от латинского слова supremum — наивысший). Для множества E, не ограниченного сверху, будем считать по определению точную верхнюю грань равной $+\infty$ и писать

$$\sup E = +\infty.$$

Если множество E ограничено снизу числом a, то это число a называют *нижней гранью* множества E. Ясно, что всякое число, меньшее a, тоже будет нижней гранью множества E.

Определение. Число m называется *точной нижней гранью* множества E, если

1) для любого $x \in E$ выполняется неравенство

$$x \geqslant m;$$

2) для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $x^* \in E$ такое, что

$$m \leqslant x^* < m + \varepsilon.$$

Таким образом, точная нижняя грань множества E есть наибольшая из нижних граней этого множества.

Точная нижняя грань множества E обозначается

$$m = \inf E \quad \text{или} \quad m = \inf_{x \in E} \{x\}$$

(сокращение от латинского слова intimum — наинизший). Для множества E, не ограниченного снизу, полагаем

$$\inf E = -\infty.$$

Примеры.

◀ Если $E = [a, b]$, то $\inf E = a$, $\sup E = b$.

Если $E = (a, b)$, то опять $\inf E = a$, $\sup E = b$. В первом случае $\inf E$ и $\sup E$ принадлежат множеству E, во втором — нет.

Для множества

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

имеем $\inf E = 0$, $\sup E = 1$. ▶

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу — точную нижнюю грань.*

---

§ 5. Логические символы. Логические высказывания

В дальнейшем изложении для сокращения записи и для упрощения построения определений мы будем пользоваться некоторыми логическими символами и отношениями.

Квантор существования $\exists$ соответствует словам «существует», «существуют», «найдется». *Квантор общности* $\forall$ соответствует словам «для всякого», «для любого», «для каждого», «для всех».

Будем называть *высказыванием* всякое повествовательное предложение, в отношении которого имеет смысл утверждать, истинно оно или ложно. Например, высказываниями являются предложения «Математика есть наука», «2 меньше 3», «6 есть простое число». Напротив, предложения «Закройте дверь», «Сколько Вам лет?» не являются высказываниями. Условимся обозначать высказывания буквами α, β, γ и т. д.

Импликация $\alpha \Rightarrow \beta$ (читается «если α, то β» или «α влечет за собой β») означает высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда α истинно, а β ложно. Соотношение «если α, то β» не следует понимать как отношение основания и следствия. Напротив, высказывание $\alpha \Rightarrow \beta$ истинно всякий раз, когда α есть ложное высказывание. Иными словами, из неверного суждения следует любое суждение: если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы.

Эквиваленция $\alpha \Leftrightarrow \beta$ («α тогда и только тогда, когда β») означает логическую равносильность высказываний α и β.

Конъюнкция $\alpha \wedge \beta$ означает высказывание, составленное из высказываний α и β при помощи союза «и» (читается «α и β»). Конъюнкция $\alpha \wedge \beta$ считается истинным высказыванием тогда и только тогда, когда оба высказывания α и β истинны.

Дизъюнкция $\alpha \vee \beta$ означает высказывание, образованное из высказываний α и β при помощи союза «или» (читается «α или β»). Дизъюнкция $\alpha \vee \beta$ считается истинным высказыванием тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний.

Отрицание. Пусть α — некоторое высказывание. Высказывание $\overline{\alpha}$ называют *отрицанием* высказывания α (читается «α с чертой» или «не α»). Высказывание $\overline{\alpha}$ истинно, если α ложно и, наоборот, ложно, если α истинно.

Отрицание некоторого свойства, содержащего кванторы $\forall$, $\exists$ и свойство A, получается заменой каждого квантора на двойственный (т. е. квантора общности на квантор существования и наоборот) и заменой свойства A на его отрицание $\overline{A}$. При этом, если $\beta \Rightarrow \gamma$, то $\overline{\beta \Rightarrow \gamma} \Leftrightarrow \beta \wedge \overline{\gamma}$.

5.1. Необходимое и достаточное условия

Пусть β — некоторое высказывание. Всякое высказывание α, из которого следует β, называется *достаточным* условием для β. Всякое высказывание α, которое вытекает из β, называется *необходимым* условием для β.

Например, пусть высказывания α и β таковы:

α: «число x равно нулю»;

β: «произведение xy равно нулю».

Тогда α является достаточным условием для β. Действительно, для того, чтобы произведение xy равнялось нулю, достаточно, чтобы число x было равно нулю. Для того, чтобы x было равно нулю, необходимо, чтобы произведение xy было равно нулю. Однако, β не является достаточным для α: из того, что произведение xy равно нулю, не вытекает, что обязательно число x равно нулю.

Теорему: *«если истинно высказывание α, то истинно высказывание β»*, можно записать так: $\alpha \Rightarrow \beta$ и выразить любой из следующих формулировок:

«α является достаточным условием для β»;

«β является необходимым условием для α».

Если высказывания α и β таковы, что из каждого из них вытекает другое, т. е. $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$, то говорят, что каждое из высказываний α и β является *необходимым и достаточным* условием для другого и пишут

$$\alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Другие употребительные формулировки:

1) для справедливости α необходимо и достаточно, чтобы имело место β;
2) α имеет место в том и только в том случае, если выполняется β;
3) α истинно тогда и только тогда, когда истинно β.

5.2. Метод математической индукции

Многочисленные примеры убеждают нас в том, что некоторое утверждение может быть справедливо в целом ряде частных случаев и в то же время быть несправедливым вообще. Вот один из таких примеров. Подставляя в выражение $991n^2 + 1$ вместо n последовательные натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 10^{10}$, мы будем получать числа, не являющиеся полными квадратами. Однако делать отсюда вывод, что все числа такого вида не являются квадратами, было бы преждевременным: существуют n, при которых число $991n^2 + 1$ есть полный квадрат. Вот наименьшее из таких значений n:

$$12055735790331359447442538767.$$

Поэтому естественно возникает следующий вопрос. Имеется утверждение α, зависящее от натурального параметра (числа) n и справедливое в нескольких частных случаях. Как узнать справедливо ли это утверждение вообще (при всех значениях параметра n)?

Этот вопрос иногда удается решить *методом математической индукции* (*полной индукции*). В основе этого метода лежит *принцип математической индукции*, заключающийся в следующем.

Принцип математической индукции. *Если*

1) *утверждение $\alpha(n)$ справедливо для $n = 1$;*

2) *из справедливости утверждения $\alpha(n)$ для какого-либо натурального числа $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$,*

то утверждение $\alpha(n)$ справедливо для всякого натурального n.

Этот принцип принимают в качестве основного положения математического мышления.

В качестве его применения установим одно неравенство, называемое *неравенством Бернулли*: если $h > -1$, то

$$\boxed{(1+h)^n \geqslant 1+nh, \quad \forall n \in \mathbb{N}.} \qquad (*)$$

◀ В самом деле, неравенство $(*)$ верно для $n = 1$. Допустим, что оно доказано для некоторого натурального $n = m > 1$, т. е.

$$(1+h)^m \geqslant 1+mh,$$

и покажем, что оно справедливо при $n = m+1$. Умножим обе части последнего неравенства на $1+h > 0$. Имеем

$$(1+h)^{m+1} \geqslant (1+mh)(1+h) = 1+(m+1)h+mh^2.$$

Отбрасывая справа неотрицательное слагаемое mh^2, получим

$$(1+h)^{m+1} \geqslant 1+(m+1)h,$$

т. е. неравенство оказывается верным и для $m+1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, неравенство $(*)$ верно для всякого натурального числа n.

§ 6. Числовая последовательность и ее предел

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число a_n, то говорят, что *задана числовая последовательность*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* последовательности; a_n называют *общим членом* последовательности. Он содержит закон образования членов последовательности.

Ради сокращения записи последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ будем обозначать $\{a_n\}$[1].

Примеры последовательностей:

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots ;$

$\{2^n\} = 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots ;$

$\{1\} = 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots ;$

$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\} = 1, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ldots ;$

$\{\cos n\} = \cos 1, \cos 2, \ldots, \cos n, \ldots .$

Введем важное понятие предела числовой последовательности. Число A называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого как угодно малого

[1] Не следует путать последовательность $\{a_n\}$ с множеством $\{a_n\}$. Так, например, последовательность $\{5\} = 5, 5, \ldots, 5, \ldots$, в то время как множество $\{5\}$ состоит из одного элемента 5.

положительного числа ε существует номер N такой, что все члены последовательности a_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству

$$|a_n - A| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Обозначения:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

С помощью логических символов определение предела последовательности $\{a_n\}$ выражается следующим образом:

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} a_n = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon\right).}$$

Геометрический смысл предела последовательности

Изобразим члены последовательности $\{a_n\}$ точками числовой оси (рис. 5). Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, равносильное двойному неравенству $A-\varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, означает, что точка a_n находится в ε-окрестности точки A.

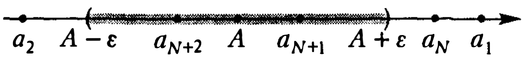


Рис. 5

Таким образом, число A есть предел последовательности $\{a_n\}$, если какова бы ни была ε-окрестность точки A, найдется такой номер N, что все точки a_n с номерами $n > N$ будут содержаться в этой окрестности точки A, т. е. в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$; вне этого интервала может оказаться лишь конечное множество точек данной последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся*, если она имеет (конечный) предел, и *расходящейся*, если она предела не имеет.

Пример 1. Последовательность $\{a_n\}$, все члены которой равны одному и тому же числу A (*стационарная* последовательность), имеет предел, равный этому числу A. ▶

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$$

с общим членом

$$a_n = \frac{n+1}{n}.$$

Очевидно, что при больших n дробь $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ мало отличается от единицы. Это дает основание предполагать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Докажем, что это действительно так. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем натуральное число N такое, что при всех значениях $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Решим неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$, считая n неизвестным:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если взять в качестве N целое число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$, то для всех $n > N$ будет выполняться соотношение

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

а следовательно, и неравенство (2). Согласно определению, это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1. \;▶$$

Номер N в определении понятия предела, вообще говоря, зависит от ε:

$$N = N(\varepsilon).$$

Так, в приведенном примере при $\varepsilon = 0,1$ в качестве N можно взять число 10 (или любое большее), а при $\varepsilon = 0,01$ в качестве N следует брать число, не меньшее, чем 100.

Замечание. Номер N, фигурирующий в определении понятия предела последовательности, определяется заданием числа ε неоднозначно в следующем смысле: если неравенство (1) выполнено при всех $n > N_1$, то оно выполнено и при $n > N_2$, где $N_2 > N_1$. Как правило, не возникает необходимости искать среди этих номеров наименьший.

Сформулируем теорему, которая дает необходимое и достаточное условие существования предела последовательности.

Теорема 2 (критерий Коши). *Для сходимости последовательности*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что для всех $n > N$ и всех $m > N$ было бы верно неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условию Коши, называется *фундаментальной.*

Теорема 3 (единственность предела последовательности). *Последовательность $\{a_n\}$ не может иметь двух различных пределов.*

◀ Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом число A. Докажем, что тогда никакое число $B \neq A$ не может быть пределом $\{a_n\}$. Для этой цели возьмем ε-окрестности точек A и B столь малыми, чтобы они не пересекались, например, возьмем

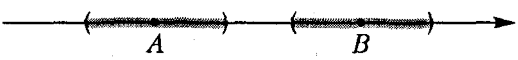


Рис. 6

$$\varepsilon = \frac{|B - A|}{3}$$

(рис. 6).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то вне интервала $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$, в частности, в интервале $(B - \varepsilon,\ B + \varepsilon)$ может располагаться лишь конечное число точек из последовательности $\{a_n\}$. Поэтому число B и не может быть пределом последовательности $\{a_n\}$. ▶

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что

$$a_n \leqslant M \quad \forall n.$$

Пример. Последовательность $\ldots -n, -(n-1), \ldots, -3, -2, -1$ ограничена сверху: любой член этой последовательности меньше нуля. ▶

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что

$$a_n \geqslant m \quad \forall n.$$

Пример. Последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ограничена снизу: любой член этой последовательности не меньше единицы. ▶

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют числа m и M такие, что

$$m \leqslant a_n \leqslant M \quad \forall n.$$

Геометрически это означает, что все точки, изображающие члены последовательности $\{a_n\}$, лежат на отрезке $[m, M]$.

Пример. Последовательность $\{a_n\}$ с общим членом $a_n = \frac{n+1}{n}$ ограничена: при всяком n имеем

$$1 < a_n \leqslant 2. \blacktriangleright$$

Иногда бывает удобнее другое, равносильное определение.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существуют число $K > 0$ такое, что для любого n выполнено неравенство

$$|a_n| \leqslant K.$$

Сформулируем определение ограниченности последовательности с помощью логических символов:

$$\boxed{\big(\text{последовательность } \{a_n\} \text{ ограничена}\big) \Leftrightarrow \big(\exists K > 0: \quad \forall n \quad |a_n| \leqslant K\big).}$$

Определение *неограниченной последовательности* получаем из предыдущего заменой квантора существования на квантор общности, квантора общности на квантор существования и обращения неравенства:

$$\boxed{\big(\text{последовательность } \{a_n\} \text{ неограничена}\big) \Leftrightarrow \big(\forall K > 0 \quad \exists n: \quad |a_n| > K\big).}$$

Пример. Последовательность $\{2^n\}$ — неограниченная.

◀ Каково бы ни было число $K > 0$, найдется n такое, что $2^n > K$, именно $n > \log_2 K$. Тем самым, последовательность $\{2^n\}$ неограничена. ▶

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого как угодно большого числа $M > 0$ существует номер N такой, что

$$|a_n| > M \quad \forall n > N.$$

Мы пишем в этом случае, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Если последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$\forall M > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad a_n > M \quad (\text{соответственно, } a_n < -M),$$

то эту последовательность также называют *бесконечно большой* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\text{соответственно, } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Напротив, неограниченная последовательность $\{a_n\}$ может и не быть бесконечно большой. Такова, например, последовательность $\left\{n \sin n\frac{\pi}{2}\right\}$.

Теорема 4 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Всякая сходящаяся последовательность ограничена, т. е. существуют числа m и M такие, что*

$$m \leqslant a_n \leqslant M$$

для всех членов данной последовательности.

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмем какое угодно $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что все члены a_n с номерами $n > N$ будут содержаться в интервале $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$, а вне этого интервала могут оказаться только точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (рис. 7). Последних конечное множество. Поэтому среди них есть самая левая точка a_-, и самая правая точка a^+. Обозначим через m меньшее из двух чисел a_- и $A-\varepsilon$:

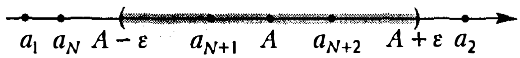


Рис. 7

$$m = \min\{a_-, A-\varepsilon\},$$

а через M — большее из чисел a^+ и $A+\varepsilon$:

$$M = \max\{a^+, A+\varepsilon\}.$$

Тогда на отрезке $[m, M]$ будут находиться точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$, а также интервал $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$, содержащий все точки a_n с номерами $n \geqslant N+1$.

Следовательно, отрезок $[m, M]$ будет содержать все члены данной последовательности $\{a_n\}$, что и означает ее ограниченность. ▶

Из теоремы 4 следует, что необходимым условием сходимости последовательности является ее ограниченность. Однако для сходимости последовательности условие ограниченности достаточным не является.

Пример. Ограниченная последовательность

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots \tag{3}$$

расходится.

◀ Предположим противное, т. е. что последовательность (3) имеет предел, равный числу A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = \frac{1}{4}$, должно найтись натуральное число N такое, что

$$|a_n - A| < \frac{1}{4} \quad \forall n > N.$$

Поскольку члены последовательности (3) равны то единице, то нулю, будут выполняться неравенства

$$|0 - A| = |A| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad |1 - A| < \frac{1}{4} \quad \forall n > N,$$

откуда легко вытекает, что

$$1 = |(1-A) + A| \leqslant |1-A| + |A| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

т. е. $1 < \frac{1}{2}$.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что наше допущение о сходимости последовательности (3) неверно. Значит, последовательность (3) предела не имеет, т. е. расходится. ▶

§ 7. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема 5. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n + b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{1}$$

◄ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что для всех $n > N_1$ будет верно неравенство

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Аналогично найдется номер N_2 такой, что для всех $n > N_2$ будем иметь

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всякого $n > N$ будут одновременно выполняться неравенства (2) и (3). Поэтому для всех $n > N$ будем иметь

$$\big|(a_n + b_n) - (A + B)\big| = \big|(a_n - A) + (b_n - B)\big| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Согласно определению, это означает, что последовательность $\{a_n+b_n\}$ сходится и имеет место равенство (1). ►

Теорема остается справедливой для суммы любого конечного числа сходящихся последовательностей.

Похожими рассуждениями доказываются следующие утверждения.

Теорема 6. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n - b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Теорема 7. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Теорема 8. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, причем $b_n \neq 0$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

§ 8. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots .$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots .$$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Неубывающая последовательность $\{a_n\}$ будет ограниченной, если она ограничена сверху, т. е. если существует такое число M, что $a_n \leqslant M \ \forall n$.

◀ В самом деле, в этом случае все члены последовательности лежат на отрезке $[a_1, M]$. ▶

Невозрастающая последовательность $\{a_n\}$ будет ограниченной, если она ограничена снизу, т. е. если существует число m такое, что $a_n \geqslant m \quad \forall n$.

◀ Все члены последовательности $\{a_n\}$ будут лежать на отрезке $[m, a_1]$. ▶

Теорема 9. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

◀ Так как последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то множество ее элементов имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. Пусть M — точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{a_n\}$. Покажем, что если $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$.

Согласно определению точной верхней грани, для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать элемент a_N такой, что $a_N > M - \varepsilon$ и $a_N < M$. Из этих двух неравенств следует двойное неравенство $0 \leqslant M - a_N < \varepsilon$. Так как $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность, то при $\forall n \geqslant N$ верны неравенства

$$0 \leqslant M - a_n \leqslant M - a_N.$$

Отсюда вытекает, что

$$0 \leqslant M - a_n < \varepsilon,$$

или

$$|a_n - M| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Это означает, что число M есть предел последовательности $\{a_n\}$.

Аналогично доказывается, что если $\{a_n\}$ — невозрастающая ограниченная последовательность и m — точная нижняя грань множества элементов последовательности, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$. ▶

Замечание. Монотонность не является необходимым условием сходимости последовательности. Например, немонотонная последовательность $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ сходится: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Из теоремы 9 следует важное свойство стягивающейся системы вложенных отрезков.

Лемма (Кантор). *Пусть задана последовательность отрезков*

$$\sigma_n = [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *с длинами, стремящимися к нулю:* $\alpha_n = b_n - a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует и притом единственная точка, принадлежащая всем отрезкам* σ_n.

Эта лемма выражает замечательное свойство непрерывности множества действительных чисел или свойство полноты числовой прямой (сплошное, без «дырок», заполнение этой прямой действительными числами).

§ 9. Число e

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ с общим членом

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Выпишем несколько ее первых членов:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}, \quad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27}.$$

Легко видеть, что $a_1 < a_2 < a_3$.

Пользуясь формулой бинома Ньютона[2)], можно показать, что последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает и ограничена, причем

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n.$$

Значит, эта последовательность имеет предел, который обозначают буквой e,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e иррациональное, $e \approx 2{,}7183\ldots$. По некоторым соображениям число e удобно выбрать в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются ***натуральными логарифмами***. Натуральный логарифм числа $x > 0$ обозначается символом $\ln x$.

[2)] *Формулой бинома Ньютона* называется формула

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

где, по определению, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$.

В частности,

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1!}ab + \frac{2\cdot 1}{2!}b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1!}a^2b + \frac{3\cdot 2}{2!}ab^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

т. е. получаем знакомые формулы квадрата суммы и куба суммы двух слагаемых.

Замечание. Существование предела последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ можно доказать, если воспользоваться неравенством Бернулли.

◀ В самом деле, в силу этого неравенства $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу. Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, где

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ясно, что $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n > 2\ \forall n$. Имеем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{2n+4}\cdot n}{(n+1)\left\{[(n+1)-1][(n+1)+1]\right\}^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\,\frac{(n+1)^{2n+4}}{[(n+1)^2-1]^{n+2}} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2} \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2}.$$

Применив опять неравенство Бернулли к выражению

$$\left[1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2},$$

получим

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n+2}{(n+1)^2-1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

т. е. $b_n \geqslant b_{n+1}$.

Таким образом, последовательность $\{b_n\}$ — невозрастающая и ограниченная снизу и потому имеет предел. Но тогда существует и предел последовательности $\{a_n\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} b_n. \ ▶$$

§ 10. Комплексные числа и действия над ними

В этом параграфе изложены основные определения и факты, относящиеся к понятию комплексного числа, действиям с комплексными числами и их геометрической интерпретации.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy$$

(*алгебраическая форма записи комплексного числа*), где x и y — произвольные действительные числа, а i — *мнимая единица* — удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Числа x и y называются соответственно *действительной* (*вещественной*) и *мнимой частями* комплексного числа $z = x + iy$.

Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число вида $x + i0$ отождествляется с действительным числом x.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Введем *алгебраические операции* над комплексными числами.

1) Сложение. *Суммой* $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$\boxed{z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).} \qquad (1)$$

Непосредственно проверяются основные законы сложения — переместительный:

$$\boxed{z_1 + z_2 = z_2 + z_1,}$$

и сочетательный:

$$\boxed{(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).}$$

Сложение допускает обратную операцию — **вычитание**: для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 можно указать такое число z, что $z_1 = z + z_2$. Это комплексное число z называется *разностью* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается через $z_1 - z_2$:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).} \tag{2}$$

2) Умножение. *Произведением* $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).} \tag{3}$$

Эту формулу легко запомнить: достаточно при обычном перемножении $(x_1 + iy_1)$ и $(x_2 + iy_2)$ учесть, что $i^2 = -1$. Если z_1 и z_2 — действительные числа, то правило (3) совпадает с обычным.

Несложно проверить, что при таком определении произведения сохраняются основные законы умножения — переместительный:

$$\boxed{z_1 z_2 = z_2 z_1,}$$

сочетательный:

$$\boxed{(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),}$$

распределительный (относительно сложения):

$$\boxed{(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.}$$

Умножение допускает обратную операцию — **деление**: для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$) можно найти такое комплексное число z, что

$$z_1 = z_2 z. \tag{4}$$

Комплексное число z называется *частным* от деления z_1 на z_2 и обозначается через $\frac{z_1}{z_2}$.

Укажем формулу для вычисления частного. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad z = x + iy.$$

Тогда из формулы (4) вытекает, что

$$x_1 = x_2 x - y_2 y, \quad y_1 = x_2 y + x y_2. \tag{5}$$

Полученная система (5) при $z_2 \neq 0$ всегда разрешима относительно x и y. Имеем

$$\boxed{z = x + iy = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.} \tag{6}$$

Комплексное число

$$\bar{z} = x - iy$$

называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$. Укажем некоторые свойства операции сопряжения:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \\ z\overline{z} &= x^2 + y^2. \end{aligned}} \tag{7}$$

10.1. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец — в точке $M(x, y)$ (рис. 8). Такую плоскость будем называть *комплексной плоскостью* z; ось Ox — *действительной* (*вещественной*) осью, а ось Oy — *мнимой* осью.

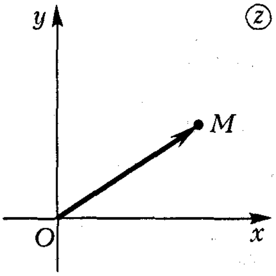


Рис. 8

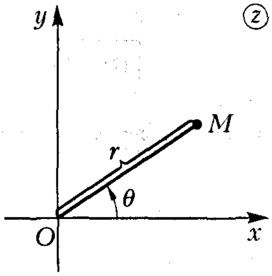


Рис. 9

Для определения положения точки $M \neq 0$ на координатной плоскости удобно пользоваться полярными координатами (r, θ), где r — длина вектора $\overline{OM}$, а θ — угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Ox (рис. 9). Переходя в алгебраической форме записи комплексного числа $z = x + iy$ к полярным координатам

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z \neq 0.} \tag{8}$$

Полярный радиус r называется *модулем* комплексного числа z, а полярный угол θ — его *аргументом*.

Обозначение: $r = |z|$, $\theta = \operatorname{Arg} z$.

Модуль комплексного числа определяется однозначно:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}} \geqslant 0.} \tag{9}$$

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),} \tag{10}$$

где $\arg z$ — *главное значение аргумента*, задаваемое следующими условиями

$$\boxed{-\pi < \arg z \leqslant \pi \quad (\text{или} \quad 0 \leqslant \arg z < 2\pi)} \tag{11}$$

и

$$\boxed{\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geqslant 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}} \tag{12}$$

Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще неопределен, а модуль этого числа равен нулю.

Два отличных от нуля комплексных числа z_1 и z_2 равны между собой в том и только в том случае, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на слагаемое, кратное 2π:

$$\boxed{|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n,} \tag{13}$$

где n — целое число.

Пример. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

◀ Имеем

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

Главным значением аргумента, согласно (12) будет

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1. \ ▶$$

Отмеченное выше соответствие между комплексными числами и векторами на плоскости придает естественный геометрический смысл операциям сложения и вычитания комплексных чисел (см. рис. 10, где изображена сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2).

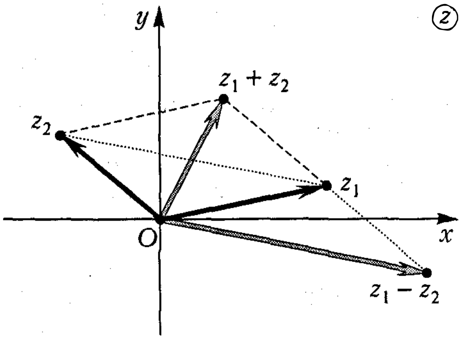


Рис. 10

Легко устанавливаются следующие неравенства.

$$\boxed{\begin{aligned} &|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \\ &|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|. \end{aligned}} \tag{14}$$

Для простоты письма введем сокращенное обозначение

$$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}} \tag{15}$$

(полный смысл введенного обозначения будет установлен в дальнейшем). Это позволяет записать комплексное число (8) в *показательной* форме

$$\boxed{z = re^{i\theta}.} \tag{16}$$

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа удобны для выполнения операции умножения и деления комплексных чисел. Если $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, то

$$\boxed{r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.} \tag{17}$$

◀ В самом деле

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\big] = \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.} \tag{18}$$

Так же просто выполняется операция деления комплексных чисел:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}} \tag{19}$$

(при $r_2 \neq 0$). Из формулы (19) видно, что

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.} \tag{20}$$

Определим операцию возведения комплексного числа z в натуральную степень n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}.$$

В силу формулы (17) возведение комплексного числа

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

в степень n можно производить по правилу

$$\boxed{z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).} \tag{21}$$

Из последнего соотношения при $r = 1$ получается *формула Муавра*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.} \tag{22}$$

Обратная операция — ***извлечение корня*** — определяется следующим образом. Комплексное число w называется ***корнем n-й степени*** из комплексного числа z, если

$$\boxed{w^n = z.} \tag{23}$$

Обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$.

Покажем, что для любого $z \neq 0$ корень $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений. Подставляя

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \rho e^{i\varphi}$$

в формулу (23), получаем

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}. \tag{24}$$

Напомним, что из равенства комплексных чисел вытекает равенство их модулей, а аргументы чисел либо совпадают, либо различаются на слагаемое, кратное 2π. Поэтому из соотношения (24) вытекают равенства

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

или, что то же,

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.} \tag{25}$$

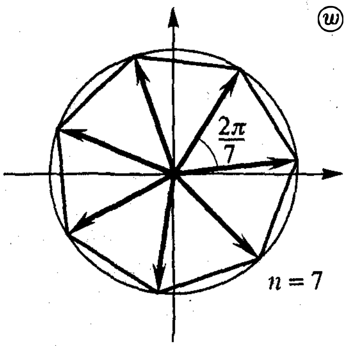


Рис. 11

Первое из равенств (25) показывает, что модули всех корней n-й степени из z одинаковы, а второе — что их аргументы различаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда вытекает, что точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке $w = 0$ (рис. 11).

Придавая в формуле (25) числу k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных комплексных чисел

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{26}$$

или

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{27}$$

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{i}$.

◀ Запишем комплексное число $z = i$ в показательной форме

$$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

В соответствии с формулами (27) получаем

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Отсюда

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

$$w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2},$$

$$w_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

(рис. 12). ▶

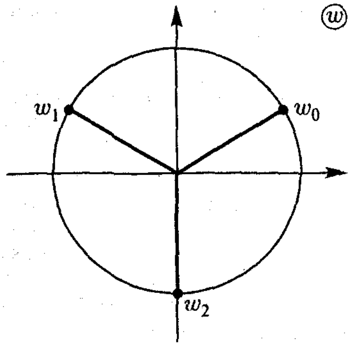


Рис. 12

10.2. Предел последовательности комплексных чисел

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел.

Определение. Комплексное число z называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая пределом комплексное число z, называется *сходящейся* к числу z.

Обозначения: $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ или $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$.

Каждый элемент $z_n = x_n + iy_n$ последовательности $\{z_n\}$ характеризуется парой действительных чисел x_n и y_n. Поэтому последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности вещественных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, составленные из действительных и из мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$.

Теорема. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ является сходящейся в том и только в том случае, когда одновременно сходятся обе последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $(z_n = x_n + iy_n)$.*

◀ Пусть последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу z. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N, такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$. Так как $|x_n - x| \leqslant |z_n - z|$ и $|y_n - y| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon$, то отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Обратно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$|z_n - z| = \big|(x_n + iy_n) - (x + iy)\big| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Тем самым,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = x + iy. \text{ ▶}$$

Доказанное утверждение позволяет переносить на последовательности комплексных чисел все основные факты, установленные для сходящихся последовательностей действительных чисел.

Упражнения

1. Докажите, что предел последовательности $\{\frac{1}{n^2}\}$ равен нулю. Для каких значений n будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

если: а) $\varepsilon > 0$ — любое; б) $\varepsilon = 0{,}1$; в) $\varepsilon = 0{,}01$.

2. Докажите, что предел последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ равен единице.

Найдите пределы:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2}{n^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n^2 + 1}{n^4 + 16n + 2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n + 5}{2n + 6}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2n^3 + n - 2}}{n + 1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+6} - n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt[5]{n^4+1}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+1} + \sqrt[5]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^4+3} + \sqrt{n^3+5}}$.

(**Указание.** При отыскании предела отношения двух многочленов относительно n целесообразно предварительно разделить числитель и знаменатель на n^p, где p — наивысшая степень многочлена в знаменателе. Этот прием используется и при отыскании предела дробей, содержащих иррациональности.)

Найдите пределы:

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)! - n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n!}{n^2 + 1}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - n\right)$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

16. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:
а) $4 + 3i$; б) $-2 + 2\sqrt{3}i$; в) $-7 - i$; г) $-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$; д) $4 - 3i$.

17. Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме:
а) -2; б) $2i$; в) $-i$; г) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

18. Вычислите:
а) $(2 - 2i)^7$; б) $(\sqrt{3} - 3i)^6$; в) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

19. Найдите все значения корня:
а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt{i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$; г) $\sqrt[3]{-1+i}$; д) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$.

Ответы

1. а) $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; б) $n \geqslant 4$; в) $n > 10$. **3.** 1. **4.** 0. **5.** ∞. **6.** $\sqrt[3]{2}$. **7.** -1. **8.** 0. **9.** 0. **10.** 1. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** 0. **13.** 0. **14.** -2. **15.** $\frac{1}{2}$. **16.** а) $r = 5$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $r = 4$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$; в) $r = 5\sqrt{2}$, $\theta = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; г) $r = 1$, $\theta = \frac{4\pi}{5}$; д) $r = 5$, $\theta = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **17.** а) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $2e^{i\pi}$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; г) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **18.** а) $2^{10}(1+i)$; б) 1728; в) 1. **19.** а) ± 1, $\pm i$; б) $\frac{1}{2}(1+i)$; в) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; г) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{12}\left(\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right)$; д) $\pm(\sqrt{3} - i)$.

Глава VIII

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие функции. Способы задания функции

Понятие функции является основным и первоначальным, как и понятие множества.

Пусть X — некоторое множество действительных чисел x. Если каждому $x \in X$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число y, то говорят, что *на множестве X задана функция* и пишут

$$\boxed{y = f(x) \quad \text{или} \quad y = y(x), \quad x \in X.}$$

Введенную таким образом функцию называют *числовой*. При этом множество X называют *областью определения функции*, а независимую переменную x — *аргументом*.

Для указания функции иногда используют только символ, которым обозначен закон соответствия, т. е. вместо $f(x)$ пишут просто f.

Таким образом, функция задана, если указаны

1) область определения X;

2) правило f, которое каждому значению $x \in X$ ставит в соответствие определенное число $y = f(x)$ — значение функции, отвечаюшее этому значению аргумента x.

Функции f и g называют *равными*, если их области определения совпадают и равенство $f(x) = g(x)$ верно для любого значения аргумента x из их общей области определения. Так, функции $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$ и $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не являются равными; они равны только на отрезке $[0, 1]$.

Примеры функций.

1. Последовательность $\{a_n\}$ есть функция целочисленного аргумента, определенная на множестве натуральных чисел, такая, что $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

2. Функция $y = n!$ (читается «эн-факториал»). Задана на множестве натуральных чисел: каждому натуральному числу n ставится в соответствие произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,}$$

причем условно полагают $0! = 1$.

3.

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Обозначение sign происходит от латинского слова *signum* — знак. Эта функция определена на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$; множество ее значений состоит из трех чисел $-1, 0, 1$ (рис. 1).

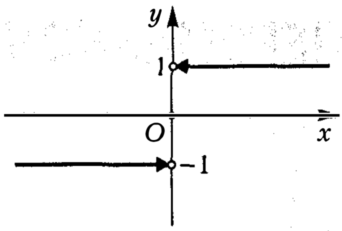


Рис. 1

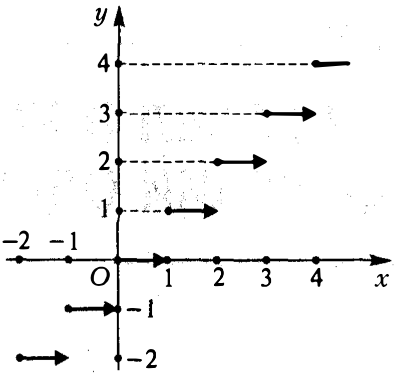


Рис. 2

4. $y = [x]$, где $[x]$ обозначает целую часть действительного числа x, т. е. $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x: $[x] = n$ для $n \leqslant x < n+1$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Читается: «игрек равно антье икс» (фр. *entier*). Эта функция задана на всей числовой оси, а множество всех ее значений состоит из целых чисел (рис. 2).

Способы задания функции

1.1. Аналитическое задание функции

Функция $y = f(x)$ называется *заданной аналитически*, если она определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия надо произвести над каждым значением x, чтобы получить соответствующее значение y. Например, функция

$$y = \frac{x}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

задана аналитически.

При этом под областью определения функции (если она заранее не указана) понимается множество всех действительных значений аргумента x, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, принимает лишь действительные и конечные значения. В этом смысле область определения функции называют также ее *областью существования*.

Для функции $y = \sqrt{1-x^2}$ областью определения является отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Для функции $y = \sin x$ область определения — вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$.

Заметим, что не всякая формула определяет функцию. Например, формула

$$y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$$

никакую функцию не определяет, так как нет ни одного действительного значения x, при котором имели бы действительные значения оба написанных выше корня.

Аналитическое задание функции может выглядеть достаточно сложно. В частности, функция может быть задана различными формулами на различных частях своей области определения. Например, функция может быть определена так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

(рис. 3).

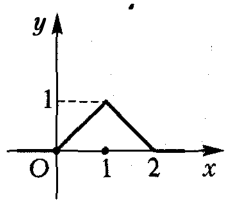


Рис. 3

1.2. Графический способ задания функции

Функция $y = f(x)$ называется *заданной графически*, если задан ее *график*, т. е. множество точек $(x, f(x))$ на плоскости xOy, абсциссы которых принадлежат области определения функции, а ординаты равны соответствующим значениям функции (рис. 4).

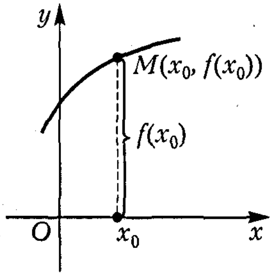


Рис. 4

Не для каждой функции ее график можно изобразить на рисунке. Например, *функция Дирихле*

$$\boxed{\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное,} \end{cases}}$$

не допускает такого изображения. Функция $\mathscr{D}(x)$ задана на всей числовой оси, а множество ее значений состоит из двух чисел 0 и 1.

1.3. Табличный способ задания функции

Функция называется *заданной таблично*, если приведена таблица, в которой указаны численные значения функции для некоторых значений аргумента. При табличном задании функции ее область определения состоит только из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перечисленных в таблице.

§ 2. Предел функции в точке

Понятие предела функции является центральным в математическом анализе.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$, которое может быть как угодно малым, существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in \Omega$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$\boxed{|x - x_0| < \delta,}$$

верно неравенство

$$\boxed{|f(x) - A| < \varepsilon.}$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

С помощью логических символов это определение выражается следующим образом

$$\boxed{\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\colon \quad \forall x,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).}$$

Примеры.

1. Пользуясь определением предела функции в точке, показать, что

$$\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5.$$

◀ Функция $f(x) = 2x + 3$ определена всюду, включая точку $x_0 = 1$: $f(1) = 5$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для того, чтобы неравенство $|(2x+3) - 5| < \varepsilon$ имело место, необходимо выполнение следующих неравенств

$$|2x - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ будем иметь $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Это означает, что число 5 есть предел функции $f(x) = 2x + 3$ в точке $x_0 = 1$. ▶

2. Пользуясь определением предела функции, показать, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = 2.$$

◀ Функция

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$$

не определена в точке $x_0 = 2$. Рассмотрим $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, например, на интервале $(1, 5)$, не содержащем точку $x = 0$, в которой функция $f(x)$ также не определена. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и преобразуем выражение $|f(x) - 2|$ при $x \neq 2$ следующим образом

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x} - 2\right| = \left|\frac{x+2}{2} - 2\right| = \left|\frac{-x+2}{x}\right| = \frac{|x-2|}{|x|} = \frac{|x-2|}{x}.$$

Для $x \in (1, 5)$ получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x} - 2\right| < \frac{|x-2|}{1}.$$

Отсюда видно, что если взять $\delta = \varepsilon$, то для всех $x \in (1, 5)$, подчиненных условию

$$0 < |x - 2| < \delta,$$

будет верно неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x} - 2\right| < \delta = \varepsilon.$$

Это означает, что число $A = 2$ является пределом данной функции в точке $x_0 = 2$. ▶

Дадим геометрическое пояснение понятия предела функции в точке, обратившись к ее графику (рис. 5). При $x < x_0$ значения функции $f(x)$ определяются ординатами точек кривой M_1M, при $x > x_0$ — ординатами точек кривой MM_2. Значение $f(x_0)$ определяется ординатой точки N. График данной функции получается, если взять «хорошую» кривую M_1MM_2 и точку $M(x_0, A)$ на кривой заменить точкой N.

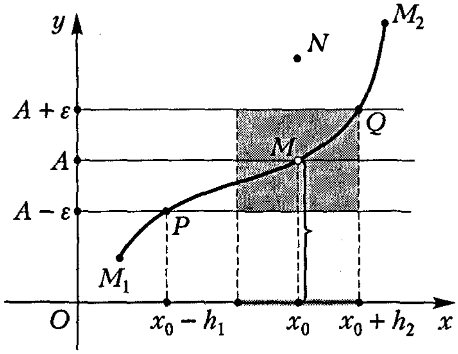


Рис. 5

Покажем, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, равный числу A (ординате точки M). Возьмем любое (как угодно малое) число $\varepsilon > 0$. Отметим на оси Oy точки с ординатами A, $A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$. Обозначим через P и Q точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Пусть абсциссы этих точек есть x_0-h_1, x_0+h_2 соответственно ($h_1>0$, $h_2>0$). Из рисунка видно, что для любого $x\neq x_0$ из интервала (x_0-h_1, x_0+h_2) значение функции $f(x)$ заключено между $A-\varepsilon$ и $A+\varepsilon$, т. е. для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$x_0-h_1<x<x_0+h_2,$$

верно неравенство

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Положим $\delta=\min\{h_1,h_2\}$. Тогда интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ будет содержаться в интервале (x_0-h_1, x_0+h_2) и, следовательно, неравенство $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ или, что то же,

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

будет выполнено для всех x, удовлетворяющих условию

$$0<|x-x_0|<\delta.$$

Это доказывает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Таким образом, функция $y=f(x)$ имеет предел A в точке x_0, если, какой бы узкой ни была ε-полоска между прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$, найдется такое $\delta>0$, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки x_0 точки графика функции $y=f(x)$ оказываются внутри указанной ε-полоски.

Замечание 1. Величина δ зависит от ε: $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Замечание 2. В определении предела функции в точке x_0 сама точка x_0 из рассмотрения исключается. Таким образом, значение функции в точке x_0 не влияет на предел функции в этой точке. Более того, функция может быть даже не определена в точке x_0. Поэтому две функции, равные в окрестности точки x_0, исключая, быть может, саму точку x_0 (в ней они могут иметь разные значения, одна из них или обе вместе могут быть не определены), имеют при $x\to x_0$ один и тот же предел или обе не имеют предела. Отсюда, в частности, следует, что для отыскания в точке x_0 предела дроби законно сокращать эту дробь на равные выражения, обращающиеся в нуль при $x=x_0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$.

◀ Функция $f(x)=\frac{x}{x}$ для всех $x\neq 0$ равна единице, а в точке $x=0$ не определена. Заменив $f(x)$ на равную ей при $x\neq 0$ функцию $g(x)=1$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1.\ ▶$$

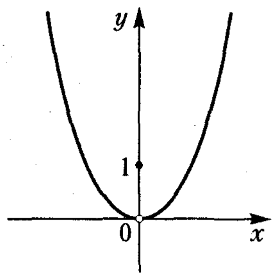


Рис. 6

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

(рис. 6).

◀ Функция $g(x)=x^2$, $-\infty<x<+\infty$, совпадает с функцией $f(x)$ всюду, исключая точку $x=0$, и имеет в точке $x=0$ предел, равный нулю: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ (покажите это!). Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. ▶

Задача. Сформулировать с помощью неравенств (на языке ε - δ), что означает

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=1$; 4) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-2$.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение (Гейне). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x ($x_n \in \Omega$, $x_n \neq x_0$), сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Приведенным определением удобно пользоваться, когда надо установить, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0. Для этого достаточно найти какую-нибудь последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеющую предела, или же указать две последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$, имеющие различные пределы.

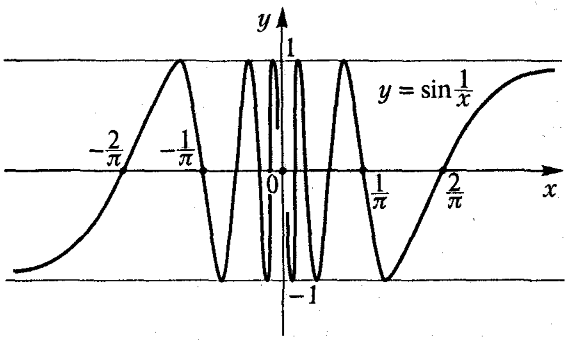


Рис. 7

Покажем, например, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 7), определенная всюду, кроме точки $x = 0$, не имеет предела в точке $x = 0$.

◀ Рассмотрим две последовательности $\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$, сходящиеся к точке $x = 0$. Соответствующие последовательности значений функции $f(x)$ сходятся к разным пределам: последовательность $\{\sin n\pi\}$ сходится к нулю, а последовательность $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right\}$ — к единице. Это означает, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ предела не имеет. ▶

Замечание. Оба определения предела функции в точке (определение Коши и определение Гейне) равносильны.

§ 3. Теоремы о пределах

Теорема 1 (единственность предела). *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.*

◀ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Покажем, что никакое число $B \neq A$ не может быть пределом функции $f(x)$ в точке x_0. Тот факт, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq B$ с помощью логических символов формулируется так:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, \quad x \neq x_0, \quad \big(|x - x_0| < \delta\big) \wedge \big(|f(x) - B| \geqslant \varepsilon\big).$$

Воспользовавшись неравенством $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$, получаем

$$\big|f(x)-B\big| = \big|(f(x)-A)-(B-A)\big| \geqslant \big||f(x)-A|-|B-A|\big| = \big||B-A|-|f(x)-A|\big|. \quad (1)$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|B-A|}{2} > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\big|f(x) - A\big| < \varepsilon\, \forall x, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Из соотношения (1) для указанных значений x имеем

$$\left|f(x) - B\right| \geqslant \frac{|B - A|}{2} = \varepsilon.$$

Итак, нашлось $\varepsilon > 0$ такое, что каким бы малым ни было $\delta > 0$, существуют $x \neq x_0$, такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$ и вместе с тем $\left|f(x) - B\right| \geqslant \varepsilon$. Отсюда $B \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. ▶

Определение. Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности точки* x_0, если существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left|f(x)\right| \leqslant M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Теорема 2 (ограниченность функции, имеющей предел). *Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

◀ Пусть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство

$$\left|f(x) - A\right| < 1.$$

Замечая, что всегда

$$\left|f(x)\right| - |A| \leqslant \left|f(x) - A\right|,$$

получим

$$\left|f(x)\right| < |A| + 1.$$

Положим $M = \max\left\{|A| + 1, |f(x_0)|\right\}$. Тогда в каждой точке x интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будем иметь

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Это означает, согласно определению, что функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0. ▶

Напротив, из ограниченности функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 не следует существования предела функции $f(x)$ в точке x_0. Например, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ограничена в окрестности точки $x = 0$:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \quad \forall x,\ x \neq 0,$$

но не имеет предела в точке $x = 0$.

Сформулируем еще две теоремы, геометрический смысл которых достаточно ясен.

Теорема 3 (переход к пределу в неравенстве). *Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 имеет предел, то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

(рис. 8).

Заметим, что из строгого неравенства $f(x) < \varphi(x)$ для функций не обязательно следует строгое неравенство для их пределов. Если эти пределы существуют, то мы можем утверждать лишь, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

Так, например, для функций

$$f(x) = x^2 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

выполнено неравенство $f(x) < \varphi(x)\ \forall x$, в то время как

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0.$$

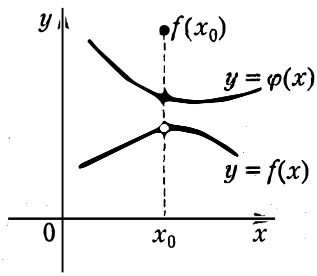


Рис. 8

Теорема 4 (предел промежуточной функции). *Если $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ для всех x в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0* (рис. 9), *и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точке x_0 имеют один и тот же предел A, то и функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный этому же числу A.*

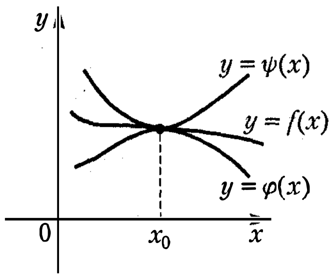


Рис. 9

§ 4. Предел функции в бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена либо на всей числовой оси, либо по крайней мере для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > K$ при некотором $K > 0$.

Определение. Число A называют *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, и пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$\bigl|f(x) - A\bigr| < \varepsilon.$$

Заменив в этом определении условие $|x| > N$ на $x > N$ или на $x < -N$ соответственно, получим определения

$$\boxed{A = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{или} \quad A = \lim_{x\to-\infty} f(x).}$$

Из этих определений следует, что

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

тогда и только тогда, когда одновременно $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Тот факт, что $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, геометрически означает следующее: какой бы узкой ни была ε-полоска между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, найдется такая прямая

$x = N > 0$, что правее нее график функции $y = f(x)$ целиком содержится в указанной ε-полоске (рис. 10). В этом случае говорят, что при $x \to +\infty$ график функции $y = f(x)$ *асимптотически приближается* к прямой $y = A$.

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ определена на всей числовой оси и представляет собой дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель неограниченно возрастает при $|x| \to +\infty$. Естественно ожидать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Покажем это.

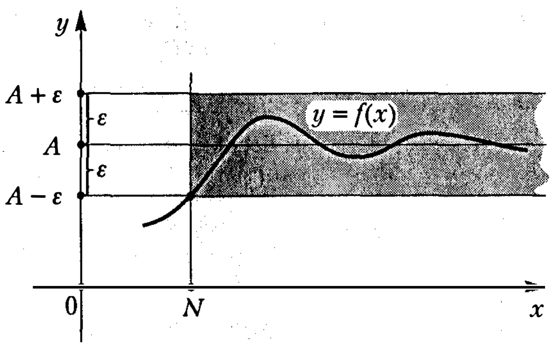


Рис. 10

◀ Возьмем любое $\varepsilon > 0$, подчиненное условию $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Чтобы имело место соотношение

$$\left|\frac{1}{x^2+1} - 0\right| < \varepsilon,$$

должно выполняться неравенство $\frac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ или, что то же, $x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$. Таким образом, если взять $N = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, то при $|x| > N$ будем иметь $\left|\frac{1}{x^2+1} - 0\right| < \varepsilon$. Это означает, что число $A = 0$ есть предел данной функции при $x \to \infty$.

Заметим, что подкоренное выражение $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \geqslant 0$ лишь для $\varepsilon \leqslant 1$. В случае, когда $\varepsilon > 1$, неравенство $\frac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ выполняется автоматически для всех $x \in \mathbb{R}$.

График четной функции $y = \frac{1}{x^2+1}$ асимптотически приближается к прямой $y = 0$ при $x \to \pm\infty$. ▶

Задача. Сформулировать с помощью неравенств, что означает

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

§ 5. Бесконечно малые функции

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (сокращенно б. м. ф.) при x, стремящемся к x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

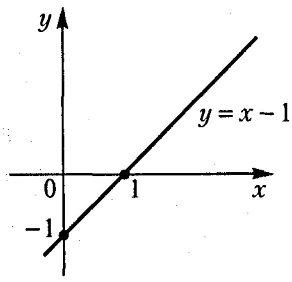


Рис. 11

Например, функция $\alpha(x) = x - 1$ является б. м. ф. при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$. График функции $y = x-1$ изображен на рис. 11.

Вообще, функция $\alpha(x)=x-x_0$ является простейшим примером б. м. ф. при $x\to x_0$.

Принимая во внимание определение предела функции в точке, определение б. м. ф. можно сформулировать так.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to x_0$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Наряду с понятием бесконечно малой функции при $x \to x_0$ вводится понятие бесконечно малой функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to \infty$*, если

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

Если

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* соответственно *при $x \to +\infty$* или *при $x \to -\infty$*.

Например, функция $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, является бесконечно малой при $x \to \infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Функция $\alpha(x) = e^{-x}$ есть бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

В дальнейшем все понятия и теоремы, связанные с пределами функций, мы будем, как правило, рассматривать только применительно к случаю предела функции в точке, предоставляя читателю самому сформулировать соответствующие понятия и доказать аналогичные теоремы для случаев, когда $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 5. *Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть также б. м. ф. при $x \to x_0$.*

◀ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta_1,$$

верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

По условию $\beta(x)$ также б.м.ф. при $x \to x_0$, поэтому найдется $\delta_2 > 0$, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta_2,$$

верно неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будут одновременно верны неравенства (1) и (2). Поэтому

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta.$$

Это означает, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть б. м. ф. при $x \to x_0$. ▶

Замечание. Теорема остается справедливой для суммы любого конечного числа функций, б. м. при $x \to x_0$.

Теорема 6 (произведение б. м. ф. на ограниченную функцию). *Если функция $\alpha(x)$ является б. м. ф. при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, то произведение $\alpha(x)f(x)$ есть б. м. ф. при $x \to x_0$.*

◀ По условию функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0. Это означает, что существуют такие числа $\delta_1 > 0$ и $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta_2$, будет верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будут одновременно верны неравенства

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{и} \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Поэтому

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \quad \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta.$$

Это означает, что произведение $\alpha(x)f(x)$ есть б. м. ф. при $x \to x_0$. ▶

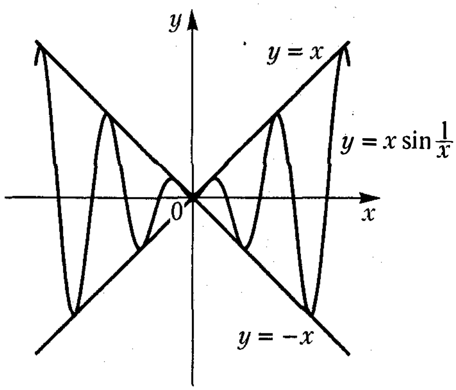


Рис. 12

Пример. Функцию $y = x \sin \frac{1}{x}$ (рис. 12) можно рассматривать как произведение функций $\alpha(x) = x$ и $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Функция $\alpha(x)$ есть б. м. ф. при $x \to 0$, а функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ определена всюду, исключая точку $x = 0$, и ограничена в любой проколотой окрестности этой точки. Поэтому, в силу теоремы 6, функция $y = x \sin \frac{1}{x}$ есть б. м. ф. при $x \to 0$, так что

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. \ ▶$$

Следствие. *Если $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ в точке x_0 имеет (конечный) предел, то произведение $\alpha(x)f(x)$ есть б. м. ф. при $x \to x_0$.*

Это вытекает из того, что функция, имеющая в точке x_0 предел, ограничена в проколотой окрестности точки x_0.

Лемма. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, отличный от нуля, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0.*

◀ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство

$$\left|A - f(x)\right| < \frac{|A|}{2}.$$

Так как $\left|A - f(x)\right| \geqslant |A| - \left|f(x)\right|$, то

$$|A| - \left|f(x)\right| < \frac{|A|}{2},$$

откуда

$$\left|f(x)\right| > \frac{|A|}{2} \quad \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta.$$

Значит, для указанных значений x определена функция $\frac{1}{f(x)}$, причем

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{\left|f(x)\right|} < \frac{2}{|A|},$$

так что $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0. ▶

Теорема 7. *Если $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, отличный от нуля, то частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ есть б. м. ф. при $x \to x_0$.*

◀ Представим частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ в виде

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

В силу леммы функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0 и, следовательно, $\alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ — б. м. ф. при $x \to x_0$ как произведение б. м. ф. на ограниченную. ▶

Условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ является существенным. Рассмотрим, например, функции $\alpha(x) = x$ и $f(x) = x^2$, являющиеся б. м. ф. при $x \to 0$. Частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, очевидно, не является б. м. ф. при $x \to 0$, так что отношение двух бесконечно малых функций в общем случае не есть бесконечно малая функция.

Теорема 8 (связь функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией). *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела пределом число A, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$.

◀ **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный числу A,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Положим

$$\alpha(x) = f(x) - A \tag{1}$$

и докажем, что $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

то для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

В силу (1) последнее можно записать в виде

$$\left|\alpha(x)\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$.

Достаточность. Пусть функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{2}$$

где A — постоянная, а $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. Докажем, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный числу A. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, то найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$\left|\alpha(x)\right| < \varepsilon.$$

Но в силу (2) $\alpha(x) = f(x) - A$. Поэтому $|f(x) - A| < \varepsilon$ для тех же значений x. Согласно определению это означает, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ▶

§ 6. Арифметические операции над пределами

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Теорема 9. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 имеют пределы, то в этой точке имеют пределы также их сумма $f(x) + \varphi(x)$, разность $f(x) - \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и, при дополнительном условии $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$, частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0\right)$.

Ограничимся доказательством утверждения 2) о пределе произведения.

◀ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда, согласно теореме 8,

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. Отсюда

$$f(x)\cdot\varphi(x) = \big[A + \alpha(x)\big]\cdot\big[B + \beta(x)\big] = A\cdot B + B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Так как $B\alpha(x)$, $A\beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$ (как произведение б. м. ф. на ограниченную), то и их сумма есть б. м. ф. при $x \to x_0$.

Таким образом, функция $f(x)\varphi(x)$ представлена как сумма постоянной AB и б. м. ф. при $x \to x_0$. Отсюда на основании теоремы 8 заключаем, что функция $f(x)\cdot\varphi(x)$ имеет предел в точке x_0, равный числу AB:

$$\lim_{x\to x_0}\big[f(x)\varphi(x)\big] = A\cdot B = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Утверждения 1) и 3) доказываются подобным же образом (докажите!). ▶

Замечание. Теорема о пределе суммы (произведения) обобщается на случай любого фиксированного числа слагаемых (сомножителей), имеющих предел.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Задача. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы

$$1)\ \lim_{x\to x_0}\big[f(x) + \varphi(x)\big]; \qquad 2)\ \lim_{x\to x_0}\big[f(x)\cdot\varphi(x)\big]\,?$$

Задача. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x)\cdot\varphi(x)\big]$ не существует.

Приведем несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x+1}$.

◀ Будем рассматривать данную функцию как частное двух функций $f(x) = x^2 - 4$ и $\varphi(x) = x + 1$. Каждая из этих функций в точке $x = 0$ имеет предел:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - 4) = -4;$$
$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}(x + 1) = 1 \neq 0.$$

Так как предел знаменателя $\varphi(x)$ заданного отношения не равен нулю, то можно воспользоваться теоремой о пределе частного, что дает

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)} = -4. \ ▶$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

◀ Полагая $f(x) = x^2 - 1$, $\varphi(x) = x - 1$, имеем $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x) = 0$, т. е., как говорят, имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Пользоваться теоремой о пределе частного нельзя. Для раскрытия неопределенности поступаем так. В определении предела функции в точке $x = 1$ сама точка $x = 1$ из рассмотрения исключается. Заметив это, представим данную функцию в виде

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1},$$

откуда, сокращая на $x - 1 \neq 0$, получим

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2. ▶$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

◀ Пределы числителя и знаменателя в точке $x = 0$ равны нулю, т. е. опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{1+x^2}+1$. При $x \neq 0$ имеем

$$\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

К полученной функции применима теорема о пределе частного, так что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{2}. ▶$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x^2$. Она определена на всей числовой оси, четна, ограничена $\left(|\sin x^2| \leqslant 1 \ \forall x\right)$ и обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{n\pi}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

◀ Покажем, что эта функция — не периодическая. Возьмем два соседних нуля функции; пусть это будут $\sqrt{n\pi}$ и $\sqrt{(n+1)\pi}$. Расстояние между ними равно $\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right)$.

Здесь имеет место неопределенность вида $\infty - \infty$. Чтобы ее раскрыть, умножим и разделим выражение $\left(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right)$ на $\left(\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}\right)$. Будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)\left(\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}\right)}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}} = 0$$

(поскольку числитель последней дроби постоянен, а знаменатель неограниченно возрастает при $n\to\infty$).

Таким образом, расстояние между двумя соседними нулями функции стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, функция $\sin x^2$ — не периодическая. ▶

§ 7. Бесконечно большие функции. Их связь с бесконечно малыми функциями

Наряду с понятием бесконечно малых функций вводится понятие бесконечно больших функций (б. б. ф.).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение. Если для любого, как угодно большого, числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x)| > M,$$

то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой функцией при* $x \to x_0$ и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

При этом говорят также, что $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет *бесконечный предел.*

С помощью логических символов определение функции $f(x)$, бесконечно большой при $x \to x_0$, запишется так

$$\big(f(x) - \text{б. б. ф. при } x \to x_0\big) \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M\big).$$

Заменяя в приведенном определении неравенство $\left|f(x)\right| > M$ на $f(x) > M$ или на $f(x) < -M$ соответственно, получим определение *положительной* б. б. ф. $f(x)$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

или *отрицательной* б. б. ф. $f(x)$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$, определенная для всех $x \neq 0$ (рис. 13), есть б. б. ф. при $x \to 0$.

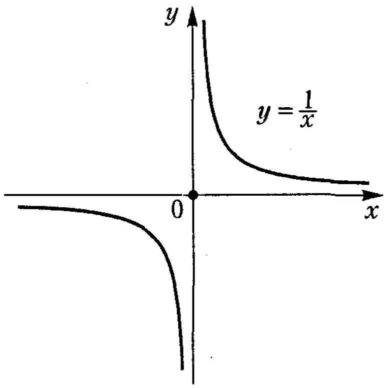


Рис. 13

◀ Возьмем любое $M > 0$, как угодно большое. Неравенство $\left|f(x)\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > M$ равносильно неравенству $|x| = |x - 0| < \frac{1}{M}$. Поэтому, если взять $\delta = \frac{1}{M}$, то для $\forall x, x \neq 0$, таких, что $|x - 0| = |x| < \frac{1}{M}$, будет верно неравенство $\left|f(x)\right| = \frac{1}{|x|} > M$. Согласно определению это означает, что $f(x) = \frac{1}{x}$ — б. б. ф. при $x \to 0$. ▶

Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$, определенная для всех $x \neq 0$ (рис. 14), при $x \to 0$ есть положительная б. б. ф.

Геометрическое пояснение б. б. ф.: функция $f(x)$ является б. б. ф. при $x \to x_0$, если для любой горизонтальной полосы между прямыми $y = -M$ и $y = M$, сколь бы широкой она ни была, можно указать такие две вертикальные прямые $x = x_0 - \delta$ и $x = x_0 + \delta$, что между этими прямыми часть графика функции $y = f(x)$, $x \neq x_0$, целиком расположена вне этой горизонтальной полосы (рис. 15).

Заметим, что функция $f(x)$ может быть неограниченной в окрестности точки x_0 и не быть бесконечно большой при $x \to x_0$. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ не ограничена в окрестности точки $x = 0$, но не является б. б. ф. при $x \to 0$ (попробуйте сделать рисунок).

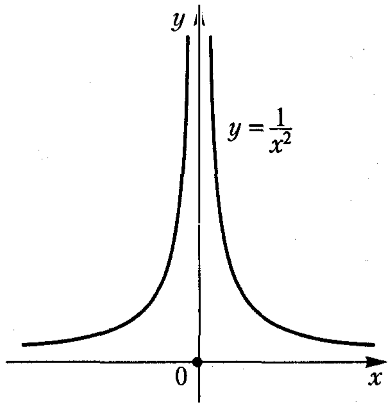


Рис. 14

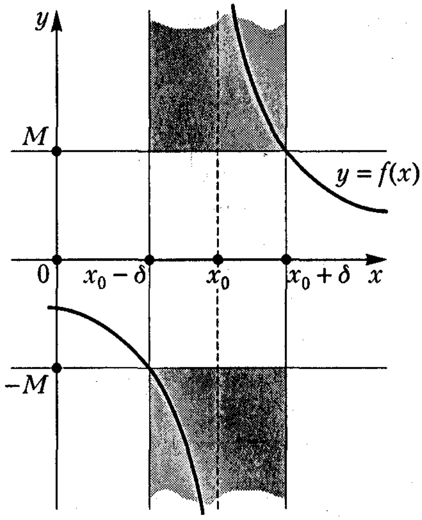


Рис. 15

Определение. Будем говорить, что $f(x)$ есть *бесконечно большая функция при* $x \to \infty$ и писать

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

если для любого числа $M > 0$, хотя бы и как угодно большого, найдется число $n > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Пример. $f(x) = x$ — б. б. ф. при $x \to \infty$. В самом деле, $\forall M > 0\ \exists N > 0$, например, $N = M$, такое, что $\forall x$, $|x| > N$, верно неравенство $|f(x)| = |x| > M$. ▶

Подобным же образом можно сформулировать определение бесконечно больших функций при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует зависимость, которая выражается следующими теоремами.

Теорема 10. *Если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.*

◀ Возьмем любое, как угодно малое $\varepsilon > 0$. Так как по условию функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$, то для любого $M > 0$, в частности для $M = \frac{1}{\varepsilon}$, найдется такое $\delta > 0$, что при всех значениях x, $x \neq x_0$, из условия $|x - x_0| < \delta$ будет следовать неравенство

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Для таких значений x определена функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$, и для нее

$$|\alpha(x)| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. ▶

Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 11. *Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$ и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, $\alpha(x)$ отлична от нуля, то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$.*

Задача. Сформулировать на языке неравенств, что значит

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Пример. Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$\boxed{y(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}, \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0),}$$

представляющую собой отношение двух многочленов относительно x степеней m и n соответственно, и исследуем поведение этой функции при $x \to \infty$.

◀ При достаточно больших $|x|$ знаменатель этой дроби отличен от нуля, и рассматриваемое отношение имеет смысл. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^n, получим

$$y(x) = \frac{a_0x^{m-n} + a_1x^{m-n-1} + \ldots + a_mx^{-n}}{b_0 + b_1x^{-1} + \ldots + b_nx^{-n}}.$$

Ясно, что при $x \to \infty$ знаменатель дроби имеет пределом число $b_0 \neq 0$. Числитель дроби при $m > n$ неограниченно возрастает по абсолютной величине; при $m = n$ предел числителя равен коэффициенту a_0; при $m < n$ предел числителя равен нулю.

Таким образом,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, & m > n; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n; \\ 0, & m < n. \end{cases}} \ ▶$$

§ 8. Односторонние пределы функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, x_0).

Определение 1. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$A = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) \quad \text{или} \quad A = f(x_0 - 0).$$

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (x_0, b).

Определение 2. Число A называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа* и пишут

$$A = \lim_{x_0+0} f(x) \quad \text{или} \quad A = (x_0 + 0),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, верно неравенство

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена в двусторонней окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0 (рис. 16).

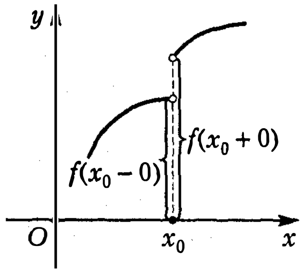


Рис. 16

Теорема 12. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *имела предел в точке* x_0*, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *слева и справа и они были равны между собой. Тогда*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

◀ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, верно неравенство

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как неравенство (1) имеет место как на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, так и на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, то согласно определению

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Обратно, пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что если $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ и соответственно $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, то $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$. Обозначая через δ наименьшее из чисел δ_1, δ_2, получим, что $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ для всех x таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. ▶

Примеры.

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{(рис. 17)}.$$

Здесь

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

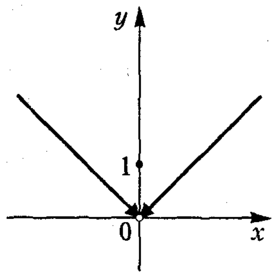


Рис. 17

2. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, \quad x \neq 0 \qquad \text{(рис. 18)}.$$

Здесь

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 0 \Rightarrow \overline{\exists} \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Пусть

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0 \qquad \text{(рис. 19)}.$$

Здесь

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty \Rightarrow \bar{\exists} \lim_{x\to 0} f(x) = 0. \blacktriangleright$$

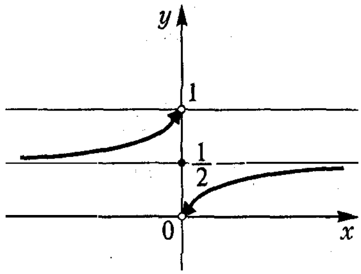


Рис. 18

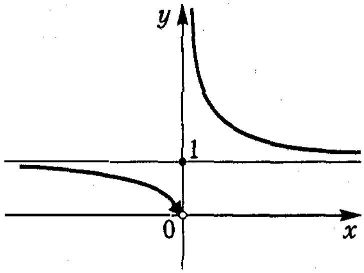


Рис. 19

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ или на интервале (a, b), то в точке a она может иметь только предел справа, а в точке b — только слева.

§ 9. Непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

1) она имеет предел в точке x_0;

2) этот предел равен $f(x_0)$ — значению функции $f(x)$ в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Так как $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$, то равенству (1) можно придать следующую форму

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Следовательно, для непрерывной функции символ $\lim$ предельного перехода и символ f функции можно менять местами.

На языке ε — δ определение непрерывности выглядит так.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

При этом в общем случае величина δ зависит как от числа $\varepsilon > 0$, так и от точки x_0: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

С помощью логических символов определение 2 записывается в виде

$$\boxed{\begin{aligned}&\big(f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0\big) \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}\\ &\quad \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \Omega\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon\big).\end{aligned}}$$

Подчеркнем, что теперь (в отличие от предыдущих параграфов) мы не требуем, чтобы $x \neq x_0$.

Приведем еще одну формулировку понятия непрерывности функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0 (рис. 20). Считая x_0 исходной точкой, возьмем другое значение аргумента $x = x_0 + \Delta x \in \Omega$, отличающееся от первоначального значения x_0 на некоторую величину Δx (все равно, положительную или отрицательную), которую будем называть *приращением аргумента*. Величину изменения функции

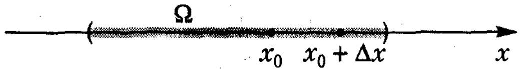


Рис. 20

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \tag{3}$$

назовем *приращением функции* f в точке x_0, отвечающим приращению Δx аргумента x.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

можно записать так

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).}$$

Это равносильно тому, что

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = 0.} \tag{4}$$

Замечая, что $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, равенство (4) можно представить в виде

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.}$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in \Omega$, если приращение Δy функции в этой точке, отвечающее приращению Δx аргумента, стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Пример. Покажем, что функция $y = x^2$ непрерывна во всякой точке x_0 числовой оси.

◀ В самом деле, для любого приращения Δx в точке x_0 имеем

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x,$$

откуда видно, что величина $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. ▶

В ряде случаев удобно пользоваться следующим определением непрерывности функции в точке.

Определение 4 (Гейне). Пусть функция $f(x)$ задана на произвольном множестве E действительных чисел и пусть точка $x_0 \in E$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, $x_n \in E$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(x_0)$.

Пользуясь определением 4, можно показать, что функция Дирихле

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Все четыре определения непрерывности функции равносильны. В каждом конкретном случае пользуются тем определением, которое оказывается более удобным.

Следующие теоремы выражают локальные свойства функции, непрерывной в точке.

Теорема 13. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > A$ (соответственно $f(x_0) < A$), то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > A$ (соответственно $f(x) < A$) для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

◀ Пусть для определенности $f(x_0) > A$, так что

$$f(x_0) = A + h,$$

где $h > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{h}{2}$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \frac{h}{2}$ или

$$-\frac{h}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{h}{2},$$

откуда $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеем

$$f(x) > f(x_0) - \frac{h}{2} = A + h - \frac{h}{2} = A + \frac{h}{2} > A. \blacktriangleright$$

Теорема 14 (устойчивость знака непрерывной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой функция $f(x)$ не обращается в нуль и сохраняет один и тот же знак (знак числа $f(x_0)$).*

◀ Чтобы убедиться в этом, достаточно в предыдущей теореме взять $A = 0$. ▶

§ 10. Основные элементарные функции. Их непрерывность

Основными элементарными функциями называются следующие функции[1].

1. Степенная функция

$$\boxed{y = x^\alpha, \quad \text{где } \alpha \text{ — любое действительное число; область определения } x > 0.}$$

2. Показательная функция

$$\boxed{y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1; \text{ область определения } -\infty < x < +\infty.}$$

3. Логарифмическая функция

$$\boxed{y = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1; \text{ область определения } x > 0.}$$

[1] Подробнее с основными элементарными функциями можно познакомиться в приложении.

4. Тригонометрические функции

$y = \sin x$;	область определения $-\infty < x < +\infty$;
$y = \cos x$;	область определения $-\infty < x < +\infty$;
$y = \operatorname{tg} x$;	область определения $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
$y = \operatorname{ctg} x$;	область определения $x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

5. Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$;	область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
$y = \arccos x$;	область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
$y = \operatorname{arctg} x$;	область определения $-\infty < x < +\infty$;
$y = \operatorname{arcctg} x$;	область определения $-\infty < x < +\infty$.

Функции, которые получаются из основных с помощью конечного числа арифметических операций, а также операций взятия функции от функции, примененных конечное число раз, называются *элементарными функциями*.

Можно показать, что все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Пример. Покажем, например, непрерывность функции $y = \cos x$, $-\infty < x < +\infty$.

Предварительно докажем неравенство

$$\boxed{|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall x.} \tag{1}$$

Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 21). Пусть угол AOB имеет радианную величину x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и пусть $\angle AOB = \angle AOC$. Очевидно, длина отрезка BC равна $2\sin x$; длина дуги $\smile BC$ равна $2x$. Так как длина дуги больше длины хорды, стягивающей эту дугу, то

$$2\sin x < 2x \quad \text{и, значит,} \quad \sin < x.$$

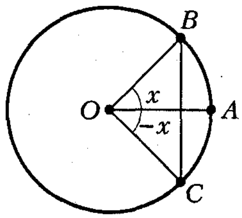


Рис. 21

Для рассматриваемых значений $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ это неравенство можно записать в виде $|\sin x| < |x|$. Учитывая, что $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ и $|-x| = |x|$, замечаем, что неравенство $|\sin x| < |x|$ верно и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Так как $\sin 0 = 0$, то неравенство (1) справедливо для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Если же $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$, тогда как $|\sin x| \leqslant 1$ $\forall x$. Следовательно, неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

верно для любых x.

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой оси. Возьмем любую точку $x \in \mathbb{R}$. Дадим этому значению x приращение Δx. Тогда функция $y = \cos x$ получит приращение

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$|\Delta y| = \left|-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right| = 2\left|\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|. \tag{2}$$

Воспользовавшись тем, что всегда $\left|\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$ и $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}$ в силу неравенства (1), из (2) получаем, что

$$|\Delta y| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

Итак

$$0 \leqslant |\Delta y| \leqslant |\Delta x|$$

(при фиксированном x Δy есть функция от Δx). Отсюда, в силу теоремы о пределе промежуточной функции, при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Это означает, что функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке x числовой оси.

§ 11. Замечательные пределы

11.1. Первый замечательный предел

Если угол x выражен в радианах, то

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{1}$$

◀ Предположим, что угол x заключен в границах $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса 1 и проведем некоторые построения (рис. 22). Из рисунка видно, что

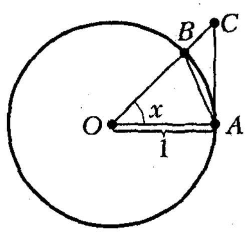


Рис. 22

$$\text{площ. } \triangle OAB < \text{площ. сектора } OAB < \text{площ. } \triangle OAC.$$

Так как указанные площади равны соответственно

$$\frac{1}{2}\sin x, \quad \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Разделив все члены этого неравенства на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{2}$$

Неравенство (2) доказано для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, но оно верно и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, так как

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке x, в частности, в точке $x = 0$, так что

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1. \tag{3}$$

Таким образом, обе функции $\varphi(x) \equiv \cos x$ и $\psi(x) \equiv 1$ имеют в точке $x = 0$ предел, равный единице. По теореме о пределе промежуточной функции из (2) и (3) получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \blacktriangleright$$

11.2. Второй замечательный предел

Мы установили выше, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Положим $\frac{1}{n} = z$. Легко видеть, что z принимает значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и $z \to 0$ при $n \to \infty$.

Будем очевидно иметь

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Можно показать, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,}$$

когда x стремится к нулю произвольным образом, пробегая любую последовательность значений, отличных от нуля.

§ 12. Операции над непрерывными функциями

Теорема 15. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в точке x_0 их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$, а также частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при дополнительном условии $\varphi(x_0)\neq 0$).*

◀ Докажем непрерывность частного функций.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, причем $\varphi(x_0)\neq 0$. В силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0, в которой функция $\varphi(x)\neq 0$. Поэтому функция $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0)\neq 0$, то по теореме о пределе частного имеем

$$\lim_{x\to x_0}F(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0).$$

Итак $\lim\limits_{x\to x_0}F(x) = F(x_0)$, т. е. функция $F(x_0) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. ▶

12.1. Сложная функция. Непрерывность сложной функции

Пусть на некотором множестве E точек числовой оси задана функция $u = \varphi(x)$. Обозначим через E_1 множество значений u, соответствующих значениям x из множества E. Пусть далее на множестве E_1 определена функция $y = f(u)$. Таким образом, каждому $x\in E$ соответствует определенное $u\in E_1$, а этому $u\in E_1$, в свою очередь, соответствует определенное значение $y = f(u)$ (рис. 23). Следовательно, величина y

в конечном счете является функцией от x, определенной на множестве E. В этом случае y мы будем называть *сложной функцией* от x и обозначать так:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Например, если $u = \sin x$, $y = e^u$, то мы имеем сложную функцию $y = e^{\sin x}$, определенную для всех x.

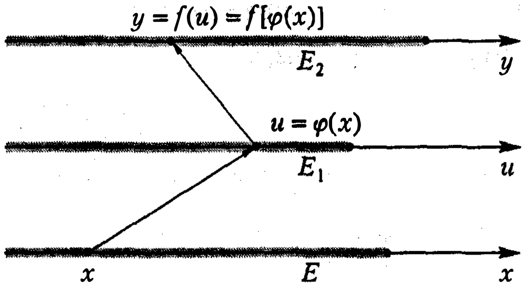


Рис. 23

Теорема 16 (переход к пределу под знаком непрерывной функции). *Если функция $u = \varphi(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный числу A, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(A)$.*

◀ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то для выбранного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что для всех u, удовлетворяющих условию

$$|u - A| < \eta, \tag{1}$$

верно неравенство

$$\left|f(u) - f(A)\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

По условию $A = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$. Поэтому, каким бы ни было число $\eta > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta, \tag{3}$$

будет верно неравенство

$$\left|\varphi(x) - A\right| < \eta$$

или, что то же самое,неравенство (1). А из неравенства (1) следует неравенство (2), которое можно записать в виде

$$\left|f\left[\varphi(x)\right] - f(A)\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$\left|f\left[\varphi(x)\right] - f(A)\right| < \varepsilon.$$

Согласно определению это означает, что число $f(A)$ есть предел сложной функции $f\left[\varphi(x)\right]$ в точке x_0. ▶

Таким образом, при выполнении условий теоремы

$$\lim_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f(A)$$

или, что то же

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right].}$$

Это соотношение выражает *правило перехода к пределу под знаком непрерывной функции.* ▶

Пример. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

◀ Заметим, что $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$. Функция $y=\ln(1+x)^{1/x}$ является сложной функцией, составленной из функций $y=\ln u$, $u=(1+x)^{1/x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, и функция $y=\ln u$ непрерывна в точке $u=e$, то на основании теоремы 16 получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=\ln e=1. \blacktriangleright$$

Теорема 17 (непрерывность сложной функции). *Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

◀ По условию функция $u=\varphi(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный $\varphi(x_0)=u_0$. Кроме того, функция $y=f(u)$ непрерывна в точке u_0. На основании теоремы 16 о переходе к пределу под знаком непрерывной функции сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$,

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)],$$

что означает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0. ▶

§ 13. Точки разрыва функции. Их классификация

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 выражается соотношением

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Пользуясь односторонними пределами функции, равенство (1) можно заменить равносильным ему двойным равенством

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).} \tag{2}$$

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы слева и справа, они равны между собой и равны значению функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ не является непрерывной, то говорят, что $f(x)$ *разрывна* в этой точке, и точку x_0 называют *точкой разрыва* функции $f(x)$[2].

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, как именно нарушено условие ее непрерывности (2).

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел слева и предел справа и они равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0,

[2] Если функция $f(x)$ не определена в точке x_0, то точку x_0 также называют точкой разрыва функции.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$.

Такое название оправдывается тем, что в этом случае достаточно изменить значение функции только в одной точке x_0, чтобы получить новую функцию, уже непрерывную в точке x_0. Именно, если $f(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв, то функция

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0; \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}}$$

непрерывна в точке x_0. Мы «устранили» разрыв, изменив значение функции в одной точке x_0.

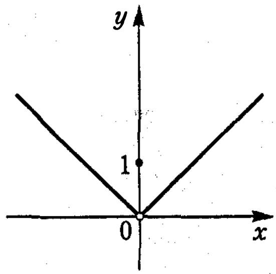


Рис. 24

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

◀ Имеем

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0),$$

так что точка $x = 0$ есть точка устранимого разрыва для функции $f(x)$ (рис. 24). Если изменить значение данной функции f в точке $x = 0$, положив $f(0) = 0$, то получим непрерывную в точке $x = 0$ функцию $F(x) = |x|$. ▶

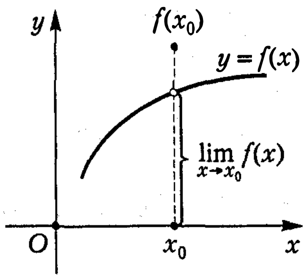


Рис. 25

Вообще, графиком функции, непрерывной на множестве $(x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2)$ и имеющей в точке x_0 устранимый разрыв, служит непрерывная кривая, из которой удалена точка с абсциссой x_0 (рис. 25).

Подчеркнем, что в точке x_0 устранимого разрыва $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, то точка x_0 называется точкой *неустранимого разрыва*.

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, но они разные,

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$ *с конечным скачком функции*. (При этом безразлично, совпадает или нет $f(x_0)$ с одним из односторонних пределов.)

Такое название точки разрыва обусловлено тем, что при переходе x через точку x_0 значения функции $f(x)$ претерпевают скачок, измеряемый разностью $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ предельных значений $f(x)$ в точке x_0 справа и слева.

Пример. Пусть $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{1/x}}$, $f(0) = 1$ (рис. 26).

◀ Для данной функции точка $x = 0$ есть точка разрыва с конечным скачком функции, равным -2:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = 0. ▶$$

Точки устранимого разрыва и точки разрыва с конечным скачком функции называются *точками разрыва первого рода*. Каждая точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$ характеризуется тем, что в этой точке функция $f(x)$ имеет конечный предел как слева, так и справа.

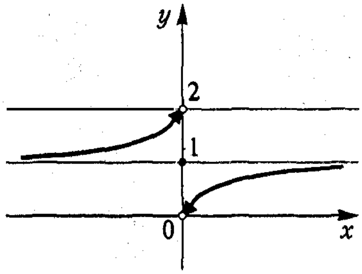


Рис. 26

Все другие точки разрыва функции называются *точками разрыва второго рода*. Каждая точка разрыва второго рода функции $f(x)$ характеризуется тем, что в этой точке функция $f(x)$ не имеет конечного предела по крайней мере с одной стороны — слева или справа.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

◀ Для данной функции точка $x = 0$ есть точка разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$. ▶

2. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

◀ Эта функция в точке $x = 0$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела как слева, так и справа (чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться определением предела функции по Гейне). Поэтому для данной функции точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода. ▶

3. Для функции Дирихле

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases}$$

любая точка x_0 есть точка разрыва 2-го рода. ▶

Будем говорить, что функция $f(x)$ в точке x_0 *непрерывна справа*, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0), \qquad \bigl(f(x_0+0) = f(x_0)\bigr),}$$

и *непрерывна слева*, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad \bigl(f(x_0-0) = f(x_0)\bigr).}$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Множество всех функций, непрерывных на интервале (a, b) обозначают $C(a, b)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точке a непрерывна справа, а в точке b — непрерывна слева. Множество всех таких функций обозначают $C[a, b]$.

§ 14. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 18 (Больцано—Коши) (о нуле функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала (a, b).*

◀ Пусть числа $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку. Точка $\xi = \frac{a+b}{2}$ делит отрезок $[a, b]$ пополам. Если $f(\xi) = 0$, то теорема верна. Пусть $f(\xi) \neq 0$. Тогда один из отрезков $[a, \xi]$ или $[\xi, b]$ будет таким, что в его концах значения функции $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$ и разделим его пополам точкой $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f(\xi_1) = 0$, то теорема верна. Пусть $f(\xi_1) \neq 0$. Тогда один из отрезков $[a_1, \xi_1]$ или $[\xi_1, b_1]$ будет таким, что в его концах значения функции $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок через $[a_2, b_2]$ и разделим его пополам.

Продолжая этот процесс, мы либо встретим на очередном этапе рассуждений точку $\alpha \in (a, b)$, для которой $f(\alpha) = 0$, и тогда теорема доказана. Либо получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю,

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0,$$

и на концах каждого из которых функция $f(x)$ имеет значения разных знаков.

В силу леммы Кантора существует единственная точка α, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

Докажем, что $f(\alpha) = 0$. Допустим противное: $f(\alpha) \neq 0$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $\alpha \in [a, b]$ и, в силу устойчивости знака непрерывной функции, найдется такой интервал $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, в котором $f(x)$ сохраняет знак. Так как $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то n можно взять настолько большим, что отрезок $[a_n, b_n]$ будет содержаться в интервале $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, и поэтому числа $f(a_n)$ и $f(b_n)$ будут одного знака. Но по построению отрезков $[a_n, b_n]$ при любом n числа $f(a_n)$ и $f(b_n)$ противоположны по знаку. Полученное противоречие доказывает, что наше допущение $f(\alpha) \neq 0$ неверно. Следовательно $f(\alpha) = 0$, где $a < \alpha < b$ (точка $\alpha \in [a, b]$, но не может совпадать ни с точкой a, ни с точкой b, так как $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$). ▶

Геометрически результат теоремы очевиден. Если $f(a)f(b) < 0$, то точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ лежат в разных полуплоскостях, на которые ось Ox делит плоскость xOy. График непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий эти точки, обязательно пересечет ось Ox по крайней мере в одной точке (рис. 27).

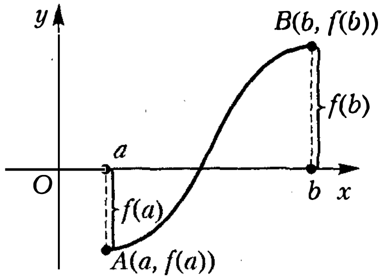


Рис. 27

Требование непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$ существенно: функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному и не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(рис. 28).

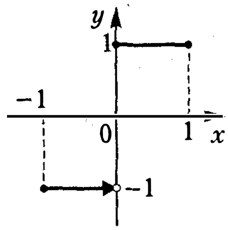


Рис. 28

Укажем одно из применений доказанной теоремы. Рассмотрим многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами

$$P_{2n+1}(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{2n+1}.$$

Пусть для определенности $a_0 > 0$. При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях x знак многочлена $P_{2n+1}(x)$ будет отрицательным, а при достаточно больших положительных значениях x — положительным. Так как многочлен есть всюду непрерывная функция, то найдется некоторая точка, в которой он необходимо обращается в нуль. Отсюда следует, что

всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

Теоремой 18 можно пользоваться и для приближенного вычисления корня.

Пример. Найдем приближенно корень многочлена $P_3(x) = x^3 + x - 1$.

◀ Это — многочлен нечетной степени и потому заведомо имеет по крайней мере один действительный корень.

На концах отрезка $[0, 1]$ многочлен $P_3(x)$ принимает значения разных знаков: $P_3(0) = -1 < 0$, $P_3(1) = 1 > 0$. Следовательно, в интервале $(0, 1)$ имеется корень этого многочлена.

Если взять точку $\xi = \frac{1}{2}$ — середину отрезка $[0, 1]$, то получим $P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, $P_3(1) > 0$. Значит, корень находится в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Возьмем теперь точку $\xi_1 = \frac{3}{4}$ — середину отрезка $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Будем иметь $P_3\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $P_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$, так что корень содержится в интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Продолжая этот процесс, мы можем найти все более тесные границы для корня многочлена $P_3(x)$. ▶

Теорема 19 (Коши) (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда каким бы ни было число C, заключенное между числами A и B, на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка α такая, что $f(\alpha) = C$.*

Иными словами, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка.

◀ Пусть, для определенности, $A < B$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C,$$

где $A < C < B$. Очевидно, функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем на концах этого отрезка $\varphi(x)$ принимает значения противоположного знака,

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

По теореме 18 в интервале (a, b) найдется точка α такая, что $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - C = 0$, т. е. $f(\alpha) = C$. ▶

Теорема 20 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем, т. е. существует такое число $K > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ верно неравенство*

$$|f(x)| \leqslant K.$$

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) (или на полуинтервале $[a, b)$, или на полуинтервале $(a, b]$), то $f(x)$ не обязательно ограничена на нем. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на некотором множестве E. Назовем *точной верхней гранью* M функции $f(x)$ на множестве E точную верхнюю грань множества значений функции $f(x)$ на множестве E:

$$M = \sup_{x \in E} f(x).$$

Аналогично определяется *точная нижняя грань* m функции $f(x)$ на E:

$$m = \inf_{x \in E} f(x).$$

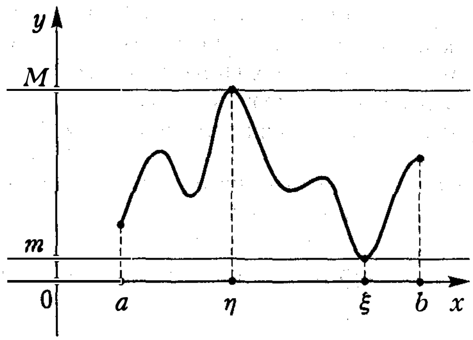


Рис. 29

Теорема 21 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной нижней и верхней граней, т. е. на отрезке $[a, b]$ найдутся такие точки ξ и η, что*

$$f(\xi) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad f(\eta) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

(рис. 29).

Замечание. Условие непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существенно: функция $f(x) = x$ непрерывна на интервале $(-1, 1)$ и ограничена на нем, но ее точная верхняя грань $\sup\limits_{x \in (-1,1)} x = 1$ не достигается, т. е. нет такого $x_0 \in (-1, 1)$, значение этой функции для которого равно единице. Другой пример: $f(x) = x - [x]$ на $[0, 1]$ (рис. 30). Здесь $\sup\limits_{x \in [0,1]} f(x) = 1$, но он не достигается на отрезке $[0, 1]$. Это связано с тем, что функция $f(x)$ разрывна на $[0, 1]$.

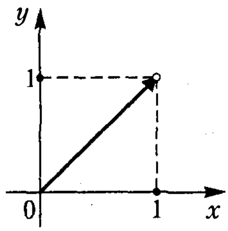


Рис. 30

Назовем точную верхнюю грань *наибольшим значением*, а точную нижнюю грань — *наименьшим значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда второй теореме Вейерштрасса можно придать следующую формулировку.

Теорема 22. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

14.1. Равномерная непрерывность

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b). Тогда в любой точке $x_0 \in (a, b)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. При этом величина δ зависит как от ε, так и от точки x_0: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Так что при одном и том же $\varepsilon > 0$ в разных точках $x \in (a, b)$ число δ может оказаться разным и ниоткуда не следует, что существует единое δ для всех $x \in (a, b)$. Требование, чтобы такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ существовало, является более сильным, чем требование просто непрерывности функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на интервале (a, b), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек x' и x'' из интервала (a, b), удовлетворяющих условию

$$|x' - x''| < \delta,$$

верно неравенство

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon.$$

Здесь существенно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обеспечивающее выполнение неравенства $\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$ сразу для всех x', x'' из интервала (a, b) при единственном условии $|x' - x''| < \delta$.

Пример 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси. Здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$. ▶

Ясно, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале (a, b), то она непрерывна в каждой точке $x \in (a, b)$. Обратное утверждение неверно.

Пример 2. Функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

◀ Пусть $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{2}{2n+1}$. Тогда величина

$$|x'_n - x''_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)}$$

за счет выбора n может быть сделана меньше любого числа $\delta > 0$, в то время как

$$\left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| = 1.$$

Тем самым, существует $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) такое, что при любом $\delta > 0$ найдутся точки x'_n и x''_n из $(0, 1)$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $\left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| > \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$. ▶

Пример 3. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

◀ Пусть $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{1}{n+2\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — любое). Тогда величина

$$|x'_n - x''_n| = \frac{2\varepsilon}{n(n+2\varepsilon)}$$

при достаточно большом n может быть сделана меньше любого $\delta > 0$. Вместе с тем, $\left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| = 2\varepsilon > \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$. ▶

Тем более интересно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке обладает свойством равномерной непрерывности.

Теорема 23 (Кантор). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

§ 15. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$.

Определение 1. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то $\alpha(x)$ называется б. м. *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ и пишут $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$, $x \to x_0$ (читается «альфа равно о-малое от бета»). Символ $o\big(\beta(x)\big)$, $x \to x_0$, означает любую б. м. ф., имеющую в точке x_0 более высокий порядок малости, чем б. м. в этой точке функция $\beta(x)$.

Пример. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$ — б. м. ф. при $x \to 0$. Для них

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

так что $x^2 = o(x)$, $x \to 0$. ▶

Определение 2. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми функциями одного порядка.*

Так, $\alpha(x) = 2x$, $\beta(x) = x$, $x \to 0$, — б. м. ф. одного порядка, поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

Определение 3. Говорят, что б. м. при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *не сравнимы*, если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ не имеет предела, ни конечного, ни бесконечного.

Например, б. м. при $x \to 0$ функции $\alpha(x) = x \sin\frac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ не сравнимы, поскольку их отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \sin\frac{1}{x}$ не имеет конечного предела в точке $x = 0$ и не является б. б. ф. при $x \to 0$.

Определение 4. Говорят, что б.м. при $x \to 0$ функция $\alpha(x)$ имеет *порядок малости* $m \in \mathbb{N}$ относительно основной б. м. при $x \to x_0$ функции $\omega(x) = x - x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^m} = \beta \neq 0.$$

Например, функция $\alpha(x) = 3\sin^2 x$, б. м. при $x \to 0$, имеет порядок малости $m = 2$ относительно б. м. при $x \to 0$ функции $\omega(x) = x$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x}{(x)^2} = 3.$$

§ 16. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение. Две бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*, если предел их отношения в точке x_0 равен единице:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Эквивалентные б. м. ф. представляют частный случай б. м. одного порядка. Эквивалентность б. м. ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается так:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \to x_0.$$

Про эквивалентные б. м. ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ говорят также, что они *равны асимптотически* при $x \to x_0$.

Замечание. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. Нетрудно видеть, что

1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $x \to x_0$;
2) если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$, $x \to x_0$;
3) если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $x \to x_0$,

так что отношение эквивалентности обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Приведем примеры эквивалентных бесконечно малых функций. В свое время мы установили, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x, \ x \to 0; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x, \ x \to 0.}$$

Нетрудно показать, что

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, \ x \to 0; \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \Rightarrow \arcsin x \sim x, \ x \to 0; \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} x \sim x, \ x \to 0. \end{aligned}}$$

Докажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1).}$$

◄ Положим $a^x - 1 = y$. Отсюда $a^x = 1 + y$, $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$. Ясно, что $y \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

Поэтому $a^x - 1 \sim x \ln a$, $x \to 0$. ►

В частности, при $a = e$ получаем

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0.}$$

Докажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p \quad (p\in\mathbb{R}).}$$

◀ Положим $(1+x)^p-1=y$. Тогда $(1+x)^p=1+y$, откуда

$$p\ln(1+x)=\ln(1+y). \tag{1}$$

Ясно, что $y\to 0$ при $x\to 0$. Используя равенство (1), получим

$$\frac{(1+x)^p-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{p\ln(1+x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x\to 0$ $(y\to 0)$, найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{p\ln(1+x)}{x}=p. \ \blacktriangleright$$

Итак,

$$\boxed{(1+x)^p-1\sim px, \quad x\to 0.}$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций (асимптотических равенств)

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x\sim x\\
&\operatorname{tg} x\sim x\\
&\arcsin x\sim x\\
&\operatorname{arctg} x\sim x\\
&\ln(1+x)\sim x\\
&a^x-1\sim x\ln a\\
&e^x-1\sim x\\
&(1+x)^p-1\sim px
\end{aligned}\right\}\ x\to 0. \tag{2}$$

Определение. Если для функции $f(x)$ можно подобрать числа a и m, $a\neq 0$, $m\in\mathbb{N}$, такие, что $f(x)\sim ax^m$, $x\to 0$, то говорят, что функция ax^m есть *главный степенной член* функции $f(x)$ при $x\to 0$.

Правые части написанных выше асимптотических равенств есть главные степенные члены левых частей.

Теорема 24 (замена б.м.ф. эквивалентными). *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$ функции, причем $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$. Если в точке x_0 отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на $\alpha_1(x)$ и $\beta(x)$ на $\beta_1(x)$.*

◀ Представим отношение $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ в виде

$$\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}. \tag{3}$$

По условию $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1$. Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке x_0 имеет предел A, то, воспользовавшись теоремой о пределе произведения, из (3) будем иметь

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = A.$$

Если же $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то вся правая часть равенства (3) и, значит, $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ также будет б. б. ф. при $x \to x_0$. ▶

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

◀ Пользуясь теоремой о замене б. м. ф. им эквивалентными и таблицей (2), получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Теорема 25 (условие эквивалентности). *Для того, чтобы две бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x \to x_0$ была бы б. м. ф. более высокого порядка, чем они сами.*

◀ **Необходимость.** Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные б. м. ф. при $x \to x_0$. Докажем, что их разность

$$\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

(б. м. ф. при $x \to x_0$) является б. м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$, а, следовательно, и $\alpha(x)$. Действительно, по условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$, и значит

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0.$$

Это означает, что при $x \to x_0$ б. м. ф. $\gamma(x)$ есть б. м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Достаточность. Пусть разность

$$\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, б. м. при $x \to x_0$, есть б. м. ф. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (или $\alpha(x)$). Докажем, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$. По условию

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x) + \gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right) = 1,$$

что означает эквивалентность б. м. ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$. ▶

Пример. Функции $\alpha(x) = x + 2x^3$ и $\beta(x) = x$ есть б. м. ф. при $x \to 0$. Их разность $\gamma(x) = 2x^3$ при $x \to 0$ является б. м. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Следовательно, $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to 0$.

§ 17. Символы o и O (символы Ландау)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности Ω точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и пусть в некоторой окрестности Ω_0 точки x_0, $x \neq x_0$, $\varphi(x) \neq 0$ (здесь точка x_0 может быть конечной и бесконечной).

Говорят, что $f(x)$ есть *o-малое* от $\varphi(x)$ и пишут

$$\boxed{f(x) = o\big(\varphi(x)\big), \quad x \to x_0,}$$

если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.}$$

Соотношение $f(x) = o\big(\varphi(x)\big)$, $x \to x_0$, означает таким образом, что функция $f(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с $\varphi(x)$ при $x \to x_0$. В частности, соотношение $f(x) = o(1)$, $x \to x_0$, означает, что $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Примеры.

1. $x^2 = o(x)$, $x \to 0$.
2. $x = o(x^2)$, $x \to \infty$,

вообще

$$x^\alpha = o(x^\beta), \quad x \to +\infty, \quad \alpha < \beta,$$
$$x^\alpha = o(x^\beta), \quad x \to 0+0, \quad \alpha > \beta.$$

Говорят, что $f(x)$ есть *O-большое* от $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, $x \in \Omega$, и пишут

$$\boxed{f(x) = O\big(\varphi(x)\big), \quad x \to x_0,}$$

если существует число $M > 0$ и окрестность Ω_0 точки x_0 такие, что

$$\boxed{\big|f(x)\big| \leqslant M \cdot \big|\varphi(x)\big| \quad \forall x \in \Omega_0, \quad x \neq x_0.}$$

Соотношение $f(x) = O(1)$, $x \to x_0$, означает, что $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Примеры.

1. $x = O(x^2)$ на $[1, +\infty)$.
2. $x^2 = O(x)$ на $[-2, 2]$.
3. $\sin x = O(1)$, $-\infty < x < +\infty$.

Использование знака равенства в рассматриваемой ситуации является чисто условным, так как некоторые свойства знака равенства не сохраняются. Например, из «равенства»

$$\sin x = O(1), \quad -\infty < x < +\infty,$$

не следует, что $O(1) = \sin x$.

Справедливы следующие формулы:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)),\\
2)\ o(f(x)) \cdot o(\varphi(x)) = o(f(x)\cdot\varphi(x)),\\
3)\ o(o(f(x))) = o(f(x)),\\
4)\ o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)),\\
5)\ o(f(x)) \cdot O(\varphi(x)) = o(f(x)\cdot\varphi(x)),\\
6)\ O(f(x)) \cdot O(\varphi(x)) = O(f(x)\cdot\varphi(x)),\\
7)\ O(o(f(x))) = o(f(x)),\ o(O(f(x))) = o(f(x)),
\end{array}\right\}\ x \to x_0.$$

Напомним, что если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называют *эквивалентными* или *асимптотически равными* при $x \to x_0$ и пишут $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \to x_0$.

Пользуясь таблицей (2) эквивалентных б. м. ф. и теоремой 25, получаем асимптотические формулы

$$\left.\begin{array}{l}
\sin x = x + o(x)\\
e^x = 1 + x + o(x)\\
\ln(1+x) = x + o(x)\\
(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)
\end{array}\right\}\ x \to 0.$$

Всю группу соотношений $f(x) \sim \varphi(x)$, $f(x) = o(\varphi(x))$, $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, называют *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками*.

Упражнения

Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. **4.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. **6.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. **7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-2x^3}{1+x^2+3x^3}$.

Пользуясь эквивалентными б. м. ф., найдите пределы:

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$. **10.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ $(\alpha, \beta = \text{const})$. **11.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$. **13.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 3x}$. **14.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$. **16.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 3x}$. **17.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{x^2}$. **19.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}$. **20.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)}{e^{\sin x}-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a, b = \text{const})$. **22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Найдите пределы:

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. **26.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

Ответы

1. 0. **2.** -2. **3.** $-\frac{2}{5}$. **4.** 0. **5.** $-\frac{1}{56}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** 0. **8.** $-\frac{2}{3}$. **9.** 2. **10.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **11.** $\frac{3}{2}$. **12.** 3. **13.** $\frac{2}{3}$. **14.** $-\frac{3}{2}$ (положить $\pi - x = t$). **15.** $\frac{2}{\pi}$. **16.** $\frac{1}{9}$. **17.** $\frac{1}{e}$. **18.** $-\frac{1}{2}$. **19.** 1. **20.** -1. **21.** $a-b$. **22.** 1. **23.** $\frac{1}{e}$. **24.** e^9. **25.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **26.** 0.

Глава IX

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Возьмем какое-нибудь значение x из этого интервала. Затем возьмем другое новое значение аргумента $x + \Delta x$, придав первоначальному значению x приращение Δx, положительное или отрицательное, но такое, чтобы точка $x + \Delta x$ содержалась в интервале (a, b). Найдем приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим разностное отношение приращения функции Δy к соответствующему приращению $\Delta x \neq 0$ аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

При фиксированном x это отношение является функцией от Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x).$$

Определение. Если при $\Delta x \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то этот предел называется *производной* от функции $y = f(x)$ *в данной точке* x и обозначается $f'(x)$ или $y'(x)$ или y'_x.

Таким образом, по определению

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \tag{1}$$

Примеры.

1. Пусть $y = x^2$. Тогда в любой точке x для любого Δx имеем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$. Следовательно, функция $y = x^2$ имеет во всякой точке x производную $y' = 2x$, т. е.

$$(x^2)' = 2x.$$

2. Пусть $y = e^x$. Тогда в любой точке x для любого Δx имеем

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x.$$

Таким образом,

$$(e^x)' = e^x\ \forall x.$$

Замечание. Формулу (1), определяющую производную функции $f(x)$, бывает удобно брать в следующей эквивалентной форме. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},}$$

если этот предел существует.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет *производную на интервале* (a, b), если производная $f'(x)$ существует в каждой точке $x \in (a, b)$.

Задача 1. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

пользуясь определением производной, найти $f'(0)$.

Задача 2. Исходя из определения производной, доказать, что если периодическая с периодом T функция $f(x)$ имеет производную, то эта производная есть также T-периодическая функция.

Задача 3. Исходя из определения производной, доказать, что производная четной функции, имеющей производную, есть функция нечетная, а производная нечетной функции есть функция четная.

1.1. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, непрерывной на интервале (a, b). Фиксируем произвольную точку $M(x, f(x))$ кривой $y = f(x)$. Пусть $P(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ — другая точка этой кривой. Проведем секущую MP (рис. 1). *Касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке M назовем прямую MT, проходящую через точку M и являющуюся предельным положением секущей MP при стремлении точки P к точке M по кривой (или, что то же, при $\Delta x \to 0$). Это предельное положение секущей определяется тем, что угол TMP стремится к нулю, когда точка P стремится к точке M.

Из рисунка видно, что угловой коэффициент k_c секущей MP равен

$$k_c = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пусть $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ — угол, образуемый касательной MT с осью Ox. Учитывая, что угловой коэффициент касательной MT к кривой $y = f(x)$ в точке M есть предел углового коэффициента секущей MP, когда точка P стремится по кривой к точке M (и, значит, $\Delta x \to 0$), получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{P\to M}\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

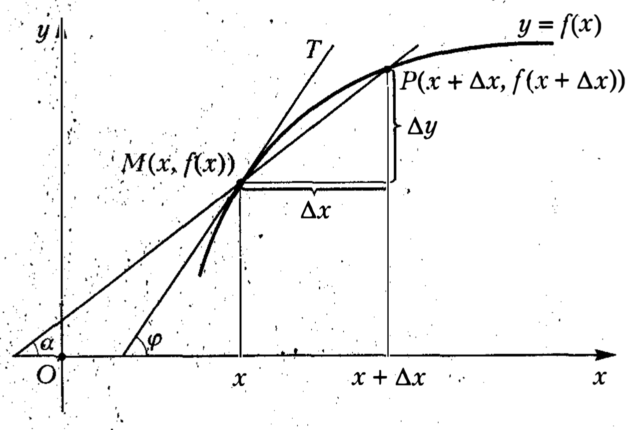


Рис. 1

Последний предел (если он существует) есть производная $f'(x)$, так что

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\varphi.}$$

Таким образом, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть угловой коэффициент k_τ касательной, проведенной к кривой $y(x) = f(x)$ в точке с абсциссой x.

1.2. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Возьмем на этой кривой точку $M_0(x_0, f(x_0))$ и выведем уравнение касательной к кривой в точке M_0, предполагая, что существует производная $f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, выглядит так

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент касательной $k_\tau = f'(x_0)$, поэтому уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0).}$$

Нормалью к кривой в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к кривой в этой точке. Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_τ касательной соотношением

$$k_n = -\frac{1}{k_\tau}, \quad \text{т. е.} \quad k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.}$$

В случае, когда $f'(x_0) = 0$, уравнение нормали есть $x = x_0$.

Пример. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2$ в точке $O(0, 0)$.

◀ Имеем $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$. Поэтому уравнение касательной:

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \quad \text{или} \quad y = 0 \quad (\text{ось } Ox);$$

уравнение нормали:

$$x = 0 \quad (\text{ось } Oy)$$

(рис. 2). ▶

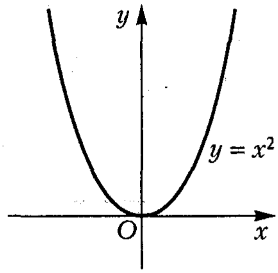


Рис. 2

1.3. Производная с точки зрения механики

Пусть $S = S(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, выражающий путь S, пройденный точкой, как функцию времени. Обозначим через ΔS путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t + \Delta t$, т. е.

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ называется средней скоростью точки за время от t до $t+\Delta t$. Скорость v в данный момент t определим как предел средней скорости за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Таким образом, скорость $v(t)$ есть производная от пути $S = S(t)$ по времени t: $v(t) = S'(t)$.

Пример. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2$ (S — метры, t — секунды). Найти ее скорость в момент $t = 3$.

◀ Скорость точки в любой момент времени t

$$v = \frac{dS}{dt} = 2t.$$

Отсюда $v\big|_{t=3} = 6$ м/сек. ▶

1.4. Правая и левая производные

Введем понятия правой и левой производной функции $f(x)$ в точке x.

Определение. *Правой производной* $f'(x+0)$ функции $y = f(x)$ в данной точке x называется величина

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и *левой производной* $f'(x-0)$ — величина

$$f'(x-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если указанные пределы существуют.

Пользуясь понятием односторонних пределов функции, получаем: для того чтобы в точке x существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x функция $y = f(x)$ имела правую и левую производные и эти производные были равны между собой:

$$\boxed{f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x).}$$

Следующий пример показывает, что существуют функции, которые имеют в точке x правую и левую производные, но не имеют производной в этой точке.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Для этой функции отношение

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

равно 1, если $\Delta x > 0$, и равно -1, если $\Delta x < 0$. Поэтому функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ имеет правую производную

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

и левую производную

$$f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

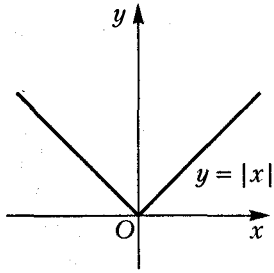


Рис. 3

но они не равны, и значит, в точке $x = 0$ функция $f(x) = |x|$ не имеет производной. Геометрически это означает, что в точке $O(0,0)$ график функции $y = |x|$ (рис. 3) не имеет касательной. ▶

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *бесконечную производную*, равную $+\infty$ или $-\infty$, если в этой точке

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty}$$

или соответственно

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty.}$$

Геометрически это означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$ перпендикулярна к оси Ox.

Пример. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Для этой функции при $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}},$$

откуда видно, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $+\infty$ при стремлении Δx к нулю произвольным образом. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $O(0,0)$ имеет вертикальную касательную $x = 0$ (ось Oy, рис. 4). ▶

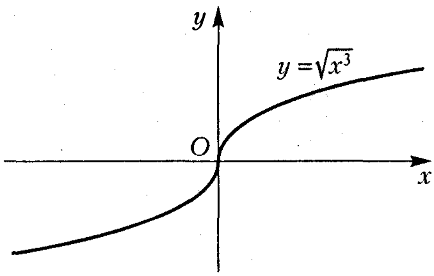


Рис. 4

Таким образом, если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ имеет касательную (рис. 5), определяемую уравнением

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *гладкой на интервале* (a, b), если она непрерывна вместе со своей производной на этом интервале. В этом случае кривую, задаваемую правилом $y = f(x)$, называют гладкой кривой на (a, b).

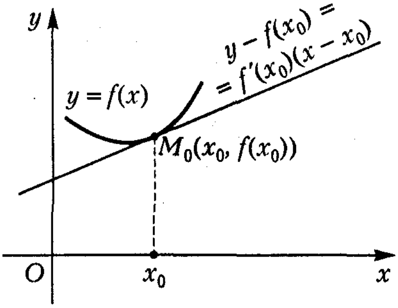


Рис. 5

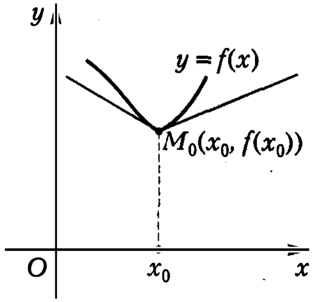


Рис. 6

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет правую и левую производные $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$, причем $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0)$, то в точке $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ график функции $y = f(x)$ касательной не имеет (кривая не гладкая). Но существуют две односторонние *полукасательные* (рис. 6). Точку $M_0(x_0, f(x_0))$ называют в этом случае *угловой точкой* кривой $y = f(x)$. Так, точка $O(0,0)$ есть угловая точка графика функции $y = |x|$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а ее производная в точке x_0 бесконечна, то возможны случаи:

1) $f'(x_0) = +\infty$;
2) $f'(x_0) = -\infty$;
3) $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$;
4) $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$.

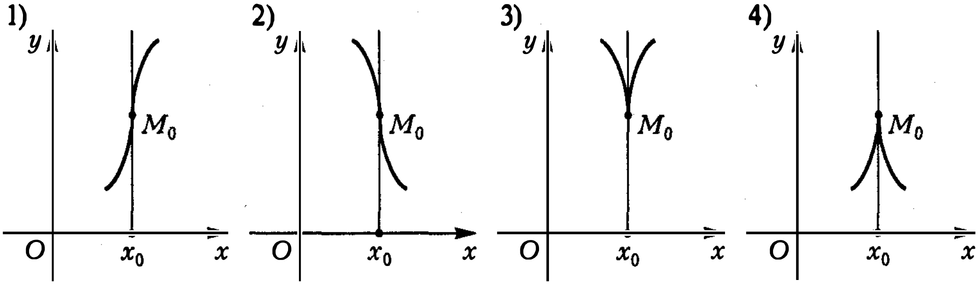


Рис. 7

На рис. 7 представлены расположения касательной $x = x_0$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, отвечающие случаям 1)–4). (В случаях 3) и 4) иногда говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет две слившиеся полукасательные.)

§ 2. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Возьмем некоторое значение $x \in (a, b)$. Дадим x приращение Δx любое, но такое, чтобы $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x \in (a, b)$, если приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

где A — некоторое число, которое не зависит от Δx (но, вообще говоря, зависит от x), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Во всякой точке x и при любом Δx имеем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \underbrace{2x}_{A}\,\Delta x + \underbrace{\Delta x}_{\alpha}\cdot\Delta x.$$

Отсюда, в силу определения, функция $y = x^2$ дифференцируема в любой точке x, причем $A = 2x$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x$. ▶

Следующая теорема выражает необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ в этой точке имела конечную производную $f'(x)$.*

◀ **Необходимость.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Докажем, что в этой точке существует производная $f'(x)$. Действительно, из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x следует, что приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где величина A для данной точки x постоянна (не зависит от Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. По теореме о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, отсюда следует, что

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Существование производной доказано. Одновременно мы установили, что $A = f'(x)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ в точке x имеет конечную производную $f'(x)$. Докажем, что $f(x)$ в этой точке дифференцируема. Действительно, существование производной $f'(x)$ означает, что при $\Delta x \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отсюда, в силу теоремы о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, вытекает, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и, значит,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2)$$

Так как в правой части формулы (2) величина $f'(x)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то равенство (2) доказывает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. ▶

Теорема 1 устанавливает, что для функции $f(x)$ дифференцируемость в данной точке x и существование конечной производной в этой точке — понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной функции называют также *дифференцированием* этой функции.

В дальнейшем, когда мы говорим, что функция $f(x)$ имеет производную в данной точке, мы подразумеваем наличие *конечной* производной, если не оговорено противное.

2.1. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x, то она непрерывна в этой точке.*

◀ Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то приращение Δy этой функции, отвечающее приращению Δx аргумента, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (3)$$

где A — постоянная для данной точки x, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из равенства (3) следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

что и означает, согласно определению, непрерывность функции $y = f(x)$ в данной точке x. ▶

Обратное заключение неверно: из непрерывности функции $f(x)$ в некоторой точке x не следует дифференцируемость функции в этой точке.

Пример. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но, как мы показали выше (с. 236), не имеет производной в точке $x = 0$ и потому не является дифференцируемой в этой точке. ▶

Приведем еще пример.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$. Для всех $x \neq 0$ она имеет производную, но в точке $x = 0$ она не имеет ни правой, ни левой производной, потому что величина

$$\frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

не имеет предела, как при $\Delta x \to 0 + 0$, так и при $\Delta x \to 0 - 0$. ▶

В приведенных примерах производная отсутствует лишь в одной точке. Так и думали в XVIII и начале XIX в., когда считали, что непрерывная функция может не иметь производной самое большее в конечном числе точек. Позже были построены (Больцано, Вейерштрасс, Пеано, Ван дер Варден) примеры непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, не имеющих производной ни в одной точке отрезка.

2.2. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. приращение Δy этой функции, отвечающее приращению Δx аргумента, представимо в виде

$$\boxed{\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,} \tag{4}$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то часть приращения функции $A\Delta x$ при $A \neq 0$ называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ и обозначается символом dy или $df(x)$:

$$dy = A\Delta x. \tag{5}$$

В случае $A \neq 0$ дифференциал функции называют *главной линейной частью* приращения Δy функции, поскольку при $\Delta x \to 0$ величина $\alpha(\Delta x)\Delta x$ в равенстве (4) есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $A\Delta x$.

В случае, когда $A = 0$, считают, что дифференциал dy равен нулю.

В силу теоремы 1 имеем $A = f'(x)$, так что формула (5) для dy принимает вид

$$\boxed{dy = f'(x)\Delta x.} \tag{6}$$

Наряду с понятием дифференциала функции вводят понятие *дифференциала dx независимой переменной x*, полагая по определению

$$\boxed{dx = \Delta x.}$$

Тогда формулу для дифференциала функции $y = f(x)$ можно записать в более симметричной форме

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx.}$$

Отсюда в свою очередь имеем: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Это еще одно обозначение производной (*обозначение Лейбница*), которую можно рассматривать как дробь — отношение дифференциала функции dy к дифференциалу аргумента dx.

Введем еще одно понятие. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b), если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

2.3. Геометрический смысл дифференциала

Пусть имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — дифференцируемая в точке $x \in (a, b)$. Проведем касательную к этой кривой в точке $M(x, y)$ и отметим на кривой еще точку M_1 с абсциссой $x + dx$. Как известно, $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$.

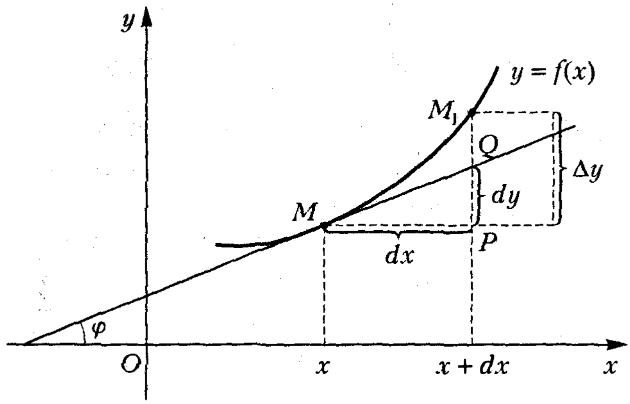


Рис. 8

Рассмотрим треугольник MPQ (рис. 8). Из рисунка видно, что

$$PQ = MP \cdot \operatorname{tg}\varphi = f'(x)\,dx = dy.$$

Таким образом, дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ функции $y = f(x)$ есть приращение ординаты касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x, при переходе от точки касания к точке с абсциссой $x + dx$.

§3. Дифференцирование суммы, произведения и частного

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производную в точке x, то в этой точке имеют производную их сумма $u(x) + v(x)$, разность $u(x) - v(x)$, произведение $u(x) \cdot v(x)$ и частное $\frac{u(x)}{v(x)}$ (последнее при дополнительном условии $v(x) \neq 0$), причем

$$\big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \qquad v(x) \neq 0.$$

◄ Докажем, например, правило дифференцирования частного. Из дифференцируемости функции $v(x)$ в точке x следует непрерывность $v(x)$ в этой точке, а из условия $v(x) \neq 0$ в силу устойчивости знака непрерывной функции вытекает, что $v(x+\Delta x) \neq 0$ для всех достаточно малых $|\Delta x|$. Поэтому отношение

$$\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

определено для всех Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Дадим x приращение Δx. Тогда функция $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ получит приращение

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}. \qquad (1)$$

По условию существуют $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$, так что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Что касается величин u и v, то они для данной точки x являются постоянными, причем $v(x) \neq 0$. Таким образом, правая часть равенства (1) имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный $\frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$. Следовательно, существует и предел левой части (1), т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$. Переходя в равенстве (1) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$y'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{e^x - 1}{x^2+5}$.

◀ $$y' = \left(\frac{e^x - 1}{x^2+5}\right)' = \frac{(e^x-1)' \cdot (x^2+5) - (e^x-1)(x^2+5)'}{(x^2+5)^2} =$$
$$= \frac{e^x(x^2+5) - (e^x-1) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{(x^2-2x+5)e^x + 2x}{(x^2+5)^2}.$$ ▶

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*

$$\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x).$$

Следствие 2. *Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ (n — конечное) имеют производную в точке x, то в этой точке имеют производную их сумма и произведение, причем*

$$\left(u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\right)' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x),$$
$$\left(u_1(x) \cdot u_2(x) \ldots u_n(x)\right)' = u_1'(x)u_2(x) \ldots u_n(x) +$$
$$+ u_1(x)u_2'(x)u_3(x) \ldots u_n(x) + \ldots + u_1(x)u_2(x) \ldots u_{n-1}(x) \cdot u_n'(x).$$

Задача 1. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x) + \varphi(x)$ в точке x, если в этой точке функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $\varphi(x)$ не дифференцируема?

Задача 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ не дифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ является недифференцируемым в точке x_0.

Задача 3. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не имеют производной в точке x_0. Следует ли отсюда, что в этой точке не имеют производной функции: 1) $f(x) + \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$?

(Рассмотреть примеры:
1) $f(x) = |x|$, $\varphi(x) = -|x|$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \varphi(x) = |x|$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \varphi(x) = |x| + 1$, $x_0 = 0$.)

§ 4. Производные некоторых основных элементарных функций

4.1. Производная показательной функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Эта функция определена на всей числовой оси, и потому для всякого x и любого Δx имеем
$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Итак,
$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

В частности, если $a = e$, то
$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

4.2. Производная логарифмической функции $y = \ln x$ $(x > 0)$

При любых $x > 0$ и Δx, таких, что $x + \Delta x > 0$, имеем
$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Отсюда
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Итак,
$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Известно следующее равенство
$$\log_a x = \log_a e \cdot \ln x, \quad (a > 0, a \neq 1),$$

откуда
$$(\log_a x)' = \log_a e(\ln x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,
$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

4.3. Производная степенной функции $y = x^\alpha$ (α — любое действительное число)

Эта функция определена во всяком случае для всех $x > 0$. Имеем
$$\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right].$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha}\,\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1 \sim \alpha\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x} = x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\alpha\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак,

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

4.4. Производные тригонометрических функций

Рассмотрим функцию $y = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$. Во всякой точке x и для любого Δx

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ и что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ в силу непрерывности функции $y = \cos x$ во всякой точке x, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

Итак

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \tag{1}$$

Аналогично получаем

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.} \tag{2}$$

Пользуясь формулами (1) и (2) и правилом дифференцирования частного, найдем производную от функции $y = \operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.}$$

Аналогично находим

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x, \quad x \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.}$$

§ 5. Дифференцирование сложной функции

Теорема 3 (о дифференцировании сложной функции). *Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x \big|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{1}$$

◄ Дадим значению $x = x_0$ приращение Δx. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение Δu, а это в свою очередь при $\Delta u \neq 0$ вызовет приращение Δy функции $y = f(u)$. По условию функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, поэтому приращение Δy этой функции может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \tag{2}$$

где $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $\alpha(\Delta u)$ вообще не определена при $\Delta u = 0$. Доопределим ее, положив $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta u)$ будет непрерывной при $\Delta u = 0$.

Разделив обе части равенства (2) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

По условию функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и, значит, непрерывна в этой точке. Поэтому при $\Delta x \to 0$ приращение $\Delta u \to 0$, что вызывает стремление к нулю $\alpha(\Delta u)$. Кроме того, из этого условия следует, что $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, правая часть (3) имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный $f'(u_0)\varphi'(x_0)$. Поэтому существует и предел левой части равенства (3) при $\Delta x \to 0$, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, который есть производная по x сложной функции $y = f\left[\varphi(x)\right]$ в точке x_0. Переходя в равенстве (3) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x \big|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{4}$$

Здесь символ $f'(u_0)$ означает производную функции $f(u)$ по ее аргументу u (а не x), вычисленную при значении $u_0 = \varphi(x_0)$ этого аргумента. ►

Равенство (4) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \qquad \text{или} \qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{5}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = e^{\sin x}$.

◄ Здесь y есть сложная функция аргумента x: $y = e^{u(x)}$, где $u(x) = \sin x$. Поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x}\cos x. \;►$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \ln|x|, \qquad x \neq 0.$$

◄ Эта функция определена на всей числовой оси, исключая точку $x = 0$; четная. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $\ln|x| = \ln x$, так что

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$.

Представим функцию $y = \ln(-x)$ как сложную функцию, положив

$$y = \ln u, \quad u = -x.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x},$$

так что и для $x < 0$

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

Замечание. Теорема может быть обобщена на случай любой конечной цепочки функции. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(z)$, $z = \psi(x)$, так что $y = f\left\{\varphi\left[\psi(x)\right]\right\}$, причем существуют производные f'_u, φ'_z, ψ'_x, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_x.$$

Инвариантность формы дифференциала

Если $y = f(u)$ — дифференцируемая функция независимой переменной u, то

$$dy = f'(u)\,du, \tag{6}$$

где дифференциал независимой переменной равен ее произвольному приращению:

$$du = \Delta u.$$

Пусть теперь аргумент u дифференцируемой функции $y = f(u)$ сам является дифференцируемой функцией $u = \varphi(x)$ независимой переменной x. В таком случае y можно рассматривать как сложную функцию $y = f\left[\varphi(x)\right]$ аргумента x. Поскольку аргумент x является независимой переменной, то для сложной функции $y = f\left[\varphi(x)\right]$ дифференциал dy представляется в виде

$$dy = \left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x\,dx. \tag{7}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x = f'(u)\varphi'(x),$$

поэтому формула (7) примет вид

$$dy = f'(u)\varphi'(x)\,dx.$$

Замечая, что $\varphi'(x)\,dx = du$, получим для dy выражение

$$dy = f'(u)\,du,$$

совпадающее с (6).

Таким образом, дифференциал функции выражается формулой одного и того же вида как в случае функции от независимой переменной, так и в случае функции от функции. Это свойство дифференциала называют *инвариантностью* формы дифференциала.

Следует обратить внимание на то, что если u — независимая переменная, то в формуле дифференциала $dy = f'(u)\,du$ величина du равна Δu — произвольному приращению независимой переменной; когда же $u = \varphi(x)$, то $du = \varphi'(x)\,dx$ есть *линейная часть* приращения функции $u = \varphi(x)$, в общем случае *не равная* Δu.

§6. Понятие обратной функции. Производная обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и пусть множеством значений этой функции является отрезок $[\alpha, \beta]$ оси Oy. Пусть, далее, каждому y из $[\alpha, \beta]$ соответствует только одно значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$ (рис. 9). Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ можно определить функцию $x = \varphi(y)$, ставя в соответствие каждому $y \in [\alpha, \beta]$ то значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$. Функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y = f(x)$.

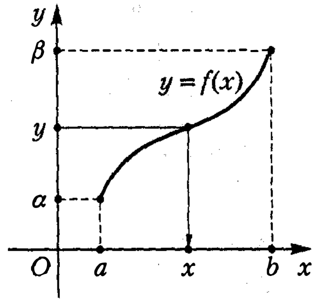


Рис. 9

Если $x = \varphi(y)$ — обратная функция для $y = f(x)$, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называют *взаимно обратными*. Для взаимно обратных функций имеют место соотношения

$$\boxed{f[\varphi(y)] = y, \quad \varphi[f(x)] = x.} \tag{1}$$

Укажем еще один, более конструктивный, подход к понятию обратной функции. Если уравнение $y = f(x)$, определяющее y как функцию от x, можно разрешить относительно x так, что каждому значению y соответствует одно определенное значение x, то получим уравнение $x = \varphi(y)$, определяющее x как функцию y. Эта функция $x = \varphi(y)$ является обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Примеры.

1. $y = 3x$ на $[0, 1]$; обратная функция $x = \frac{y}{3}$ на $[0, 3]$.

2. $y = x^3$, $-\infty < x < +\infty$; обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$, $-\infty < y < +\infty$.

3.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 1 - x, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \end{cases}$$

обратная функция

$$x = \begin{cases} y, & \text{если } y \text{ — рациональное число,} \\ 1 - y, & \text{если } y \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

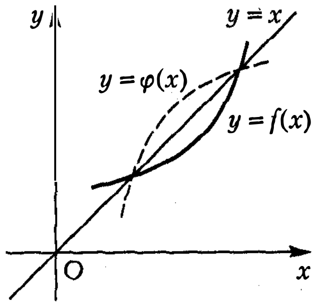


Рис. 10

Очевидно, уравнения $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ определяют одну и ту же кривую на плоскости xOy.

Если в обоих случаях откладывать значения аргументов на оси абсцисс, а значения функции на оси ординат, т. е. вместо уравнений $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ рассматривать уравнения $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, то график функции $y = \varphi(x)$ будет симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 10).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором отрезке $[a, b]$, если для любых x_1 и x_2 из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Пример. Такова, например, функция $f(x) = x^3$ на любом отрезке $[a, b]$. ▶

Теорема 4. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, то она имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, которая определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Ограничимся геометрическим пояснением теоремы (рис. 11). Кривая AB является графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и возрастающей на $[a, b]$. Из рисунка видно, что каждому значению $y \in [\alpha, \beta]$ отвечает одно значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$. Поэтому той же кривой AB величина x выражается как функция y на $[\alpha, \beta]$: $x = \varphi(y)$. Это и есть функция, обратная к $y = f(x)$. Она на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывна (ее графиком является та же непрерывная кривая AB) и возрастает, т. к. большему значению аргумента y отвечает большее значение функции $x = \varphi(y)$.

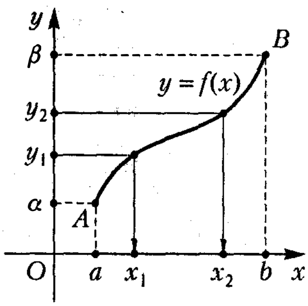


Рис. 11

Аналогичное утверждение справедливо и для непрерывной убывающей на $[a, b]$ функции.

6.1. Производная обратной функции

Теорема 5. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{2}$$

◀ Рассмотрим функцию $x = \varphi(y)$. Дадим значению $y = y_0$ приращение Δy. Тогда функция $x = \varphi(y)$ получит некоторое приращение Δx:

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0).$$

При этом в силу возрастания (убывания) обратной функции при $\Delta y \neq 0$ обязательно $\Delta x \neq 0$. Поэтому отношение $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{3}$$

Если теперь Δy устремить к нулю, то и Δx будет стремиться к нулю, т. к. обратная функция $x = \varphi(y)$ также непрерывна в точке y_0.

По условию функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$. Следовательно, при $\Delta y \to 0$ (когда и $\Delta x \to 0$), предел частного $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ существует и равен $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Из равенства (3) вытекает поэтому, что при $\Delta y \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, причем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Но предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ при $\Delta y \to 0$ есть производная $\varphi'(y_0)$ функции $x = \varphi(y)$ в точке $y = y_0$. Таким образом,

$$\boxed{\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.} \blacktriangleright \tag{4}$$

Геометрически результат теоремы достаточно прозрачен. Существование производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 эквивалентно существованию касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Поэтому, если существует касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, не параллельная оси Ox, то она будет касательной и к графику функции $x = \varphi(y)$ (та же кривая!) в точке M_0 (рис. 12). При этом $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$ и, поскольку $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, т. е.

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

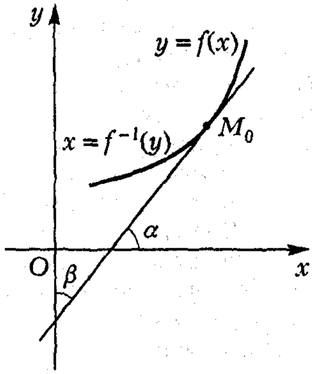


Рис. 12

Формулу (4) записывают также в виде

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y \neq 0.} \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) можно получить совсем просто. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные дифференцируемые функции. Тогда

$$\varphi\,\underbrace{[f(x)]}_{y} = x.$$

Дифференцируя обе части по x и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$\varphi'_y \cdot f'_x = 1 \left.\right\} \begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \varphi'_y = \frac{1}{f'_x}, \quad f'_x \neq 0, \\ &\Longrightarrow \quad f'_x = \frac{1}{\varphi'_y}, \quad \varphi'_y \neq 0. \end{aligned}$$

6.2. Производные обратных тригонометрических функций

1. Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1, 1]$ (рис. 13) и является обратной для функции $x = \sin y$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим интервал $-1 < x < 1$. Функция $x = \sin y$ имеет для соответствующих значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ положительную производную $x'_y = \cos y$. В таком случае существует также производная y'_x, равная, согласно (5), $\frac{1}{x'_y}$:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Корень $\sqrt{1-x^2}$ берем со знаком «+», т. к. $\cos y > 0$ для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.} \tag{6}$$

Мы исключаем значения $x = \pm 1$, поскольку для соответствующих значений $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y = \cos y$ равна нулю и правая часть (6) теряет числовой смысл.

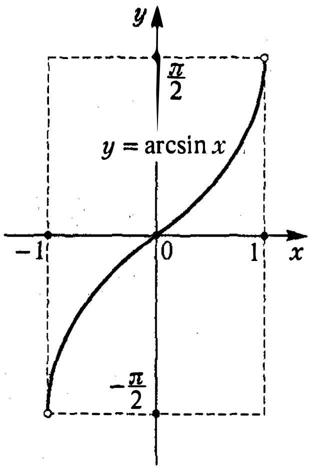


Рис. 13

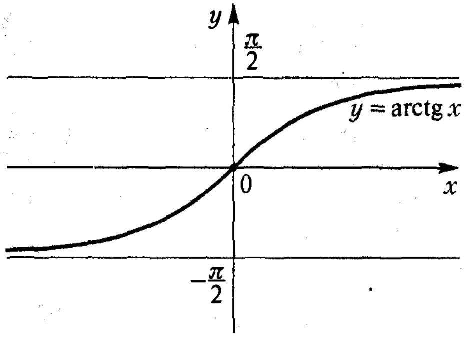


Рис. 14

2. Функция $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$ (рис. 14) служит обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. По формуле (5)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x.} \tag{7}$$

Чтобы найти формулы для производных $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$, достаточно заметить, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.} \tag{8}$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x.} \tag{9}$$

§ 7. Производные гиперболических функций

По определению гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Отсюда легко находим

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x.}$$

По определению гиперболический тангенс $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Пользуясь правилом дифференцирования частного и тождеством

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1,$$

получаем

$$\boxed{\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \\ (\operatorname{cth} x)' &= \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}}$$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — любое действительное число, $x > 0$);	
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;	**3.** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;	**5.** $(e^x)' = e^x$;
6. $(\sin x)' = \cos x$;	**7.** $(\cos x)' = -\sin x$;
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;	
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;	
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;	**11.** $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	**13.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	**15.** $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	**17.** $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

§ 8. Логарифмическое дифференцирование

При отыскании производной сложной функции иногда бывает удобным следующий прием, называемый *логарифмическим дифференцированием*. Пусть требуется найти производную функции $y = f(x) > 0$ и пусть функция $\varphi(x) = \ln f(x)$ дифференцируется значительно проще. Тогда поступаем так. Беря натуральный логарифм данной функции, будем иметь

$$\ln y = \ln f(x),$$

или

$$\ln y = \varphi(x). \tag{1}$$

Дифференцируя обе части (1) по x и учитывая, что y есть функция от x, найдем

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x),$$

откуда $y' = y \cdot \varphi'(x)$, или

$$\boxed{y' = f(x)\big(\ln f(x)\big)'.} \tag{2}$$

Логарифмическое дифференцирование особенно удобно при дифференцировании сложной степенно-показательной функции, т. е. функции вида

$$y = \left[u(x)\right]^{v(x)} \quad (u(x) > 0,\ u(x) \text{ и } v(x) \text{ — дифференцируемые функции}).$$

Имеем

$$\ln y = v(x)\ln u(x).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)},$$

откуда

$$y'(x) = \left[u(x)\right]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Пример. Найти производную функции

$$y = x^x, \quad x > 0. \tag{*}$$

◀ Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства (*), получаем

$$\ln y = x\ln x,$$

откуда

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1, \quad y' = y(\ln x + 1)$$

или

$$y' = x^x(\ln x + 1). \ ▶$$

§ 9. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, так что приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента, представимо в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $f'(x_0)\Delta x = dy(x_0)$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Если $dy(x_0) \neq 0$ и, значит, $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)},$$

так что при $\Delta x \to 0$ бесконечно малые Δy и dy эквивалентны и их разность $\Delta y - dy$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем они сами. Поэтому мы можем брать величину dy в качестве приближенного значения Δy:

$$\Delta y \approx dy.$$

Таким образом, если $dy(x_0) \neq 0$, то для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0 + \Delta x$ можно пользоваться формулой

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,} \tag{1}$$

причем абсолютная и относительная погрешности будут как угодно малы при достаточно малом $|\Delta x|$.

Пусть, например, $y = x^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)^\beta - x_0^\beta, \quad dy(x_0) = \beta x_0^{\beta-1}\Delta x.$$

При малых значениях $|\Delta x|$ полагаем

$$(x_0 + \Delta x)^\beta \approx x_0^\beta + dy(x_0),$$

или

$$\boxed{(x_0 + \Delta x)^\beta \approx x_0^\beta + \beta x_0^{\beta-1}\Delta x.}$$

В частности, при $\beta = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x, \quad x_0 > 0. \tag{2}$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{3{,}996}$.

◄ Полагаем $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}004$, получим по формуле (2)

$$\sqrt{3{,}996} = \sqrt{4 + (-0{,}004)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}004) = 1{,}999. ►$$

§ 10. Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала (a, b), то $f'(x)$ есть функция от x, определенная на интервале (a, b). Может оказаться, что и $f'(x)$ в точке $x \in (a, b)$ в свою очередь имеет производную, которую называют *производной 2-го порядка* функции $f(x)$ (или *второй производной*) и обозначают символом $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. Таким образом

$$\boxed{f''(x) = \left(f'(x)\right)'.}$$

Производные более высоких порядков определяются аналогично. Именно, *производная n-го порядка* функции $f(x)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка этой функции:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

Число n, указывающее порядок производной, заключают в скобки, чтобы не путать с показателем степени.

Чтобы найти $f^{(n)}(x)$, надо сначала найти $f'(x)$, затем $f''(x)$, взяв производную от $f'(x)$, и т. д., пока не получим производную нужного порядка. Таким образом, производные высших порядков вычисляются при помощи уже известных правил и формул дифференцирования.

Примеры.

1. Вычислим n-ю производную функции $y = e^{kx}$, $k = \text{const}$. Последовательно дифференцируя, будем иметь

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}, \ldots .$$

По методу математической индукции получаем

$$\boxed{(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}, \quad n = 1, 2, \ldots .}$$

2. Вычислим n-ю производную функции $y = \sin x$. Имеем

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots .$$

Методом индукции устанавливаем

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

3. Аналогично получаем формулу

$$\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Множество всех функций $f(x)$, определенных на интервале (a, b) и имеющих в каждой точке $x \in (a, b)$ непрерывную производную n-го порядка, обозначается $C^n(a, b)$. Функцию $f(x)$, имеющую производную любого порядка в каждой точке $x \in (a, b)$, называют *бесконечно дифференцируемой* на (a, b) и пишут $f(x) \in C^\infty(a, b)$. Так, функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ бесконечно дифференцируемы на $(-\infty, +\infty)$.

Замечание. Производные четвертого порядка и выше иногда обозначают римскими цифрами и без скобок, т. е. пишут

$$y^{IV}, \quad y^{V}, \quad y^{VI}, \quad \ldots .$$

10.1. Механический смысл второй производной

Пусть $S = S(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда, как известно, $S'(t) = v(t)$ — мгновенная скорость движущейся точки в момент времени t. В таком случае вторая производная $S''(t)$ равна $v'(t)$, т.е. ускорению $a(t)$ движущейся точки в момент времени t:

$$S''(t) = a(t).$$

10.2. Производные высших порядков суммы и произведения функций

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x, то функции $u(x) \pm v(x)$ и $u(x) \cdot v(x)$ также имеют производные n-го порядка в этой точке, причем

$$\big(u(x) \pm v(x)\big)^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n)} &= u^{(n)} \cdot v + \frac{n}{1!}\, u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}\, u^{(n-2)}v'' + \ldots + \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\, u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) доказываются по индукции. Для формулы (1) это делается без труда (проделайте самостоятельно). Остановимся несколько подробнее на выводе формулы (2). Если $y = u(x) \cdot v(x)$, то

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot v + u \cdot v', \\ y'' &= u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + uv'', \\ y''' &= u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + uv''' \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома $(u+v)^1$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, лишь вместо степеней u и v стоят порядки производных. Сходство становится еще более полным, если в полученных формулах вместо u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ (производные нулевого порядка). Формула (2) носит название *формулы Лейбница*.

Пример. Пользуясь формулой Лейбница, найти $y^{(1001)}$ от функции $y = x^2e^x$.

◀ Имеем

$$y^{(1001)} = (\underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v})^{(1001)} = (e^x)^{(1001)} \cdot x^2 + \frac{1001}{1!}(e^x)^{(1000)}(x^2)' + \frac{1001 \cdot 1000}{2!}(e^x)^{(999)}(x^2)'' + 0 =$$

$$= e^x x^2 + 2002e^x x + 1001 \cdot 10^3 e^x. \ ▶$$

Отметим еще полезную формулу. Пусть $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ — взаимно обратные функции и пусть $f'(x) \neq 0$. Тогда

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Далее,

$$x''_{yy} = \frac{d}{dy}(x'_y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'_x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'_x}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

§ 11. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Может оказаться, что в точке x дифференциал $dy = f'(x)\,dx$, рассматриваемый как функция x, есть также дифференцируемая функция. Тогда существует дифференциал от дифференциала данной функции, который называется *дифференциалом второго порядка функции* $y = f(x)$ и обозначается d^2y. Таким образом,

$$\boxed{d^2y = d(dy).}$$

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков: *дифференциалом n-го порядка d^ny функции $y = f(x)$* называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции

$$\boxed{d^ny = d(d^{n-1}y).}$$

Дифференциал dy естественно называть *дифференциалом 1-го порядка* от функции $y = f(x)$.

Найдем формулы, выражающие дифференциалы высших порядков. Пусть $y = f(x)$ есть функция независимой переменной x, имеющая дифференциалы любого порядка. Тогда

$$dy = f'(x)\,dx,$$

где $dx = \Delta x$ есть некоторое приращение независимой переменной x, которое не зависит от x. По определению

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(x)\,dx\big).$$

Т.к. здесь $f'(x)\,dx$ рассматривается как функция от x, то множитель dx является постоянным и его можно вынести за знак дифференциала. Поэтому

$$d^2y = d\big(f'(x)\big)\,dx.$$

Для вычисления $d(f'(x))$ применим формулу дифференциала первого порядка к функции $f'(x)$. Получим

$$d(f'(x)) = (f'(x))'dx = f''(x)\,dx.$$

Следовательно, дифференциал d^2y второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующий тому же дифференциалу dx независимой переменной x, определится формулой

$$\boxed{d^2y = f''(x)\,dx^2,}$$

где dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Пользуясь методом математической индукции, получаем формулу дифференциала n-го порядка

$$\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n,}$$

где $dx^n = (dx)^n$. Отсюда

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.}$$

Пусть теперь $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ — функция, дифференцируемая достаточное число раз. Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала

$$dy = f'(u)\,du.$$

Здесь $du = \varphi'(x)\,dx$ в общем случае не является постоянной величиной, поэтому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(u)\,du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u. \qquad (1)$$

В случае, когда u — независимая переменная, $d^2u = 0$ и

$$d^2y = f''(u)\,du^2. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), заключаем, что уже второй дифференциал инвариантностью формы не обладает.

Заметим, что если $u = \varphi(x)$ есть линейная функция x, т. е. $u = ax+b$ ($a, b = \text{const}$), инвариантность формы сохраняется.

§ 12. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ изменения параметра. Если параметр t рассматривать как время, то указанные функции определяют закон движения точки M с координатами

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \qquad (1)$$

на плоскости xOy.

Определение. Множество $\{M\}$ всех точек плоскости, координаты (x, y) которых определяются уравнениями (1), называют *плоской кривой*. Говорят в этом случае, что кривая задана *в параметрической форме*.

Пример. Так, например, окружность радиуса R с центром в начале координат можно задать в параметрической форме уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi, \qquad (2)$$

где t — радианная величина угла между осью Ox и радиус-вектором OM, проведенным в точку $M(x, y)$ (рис. 15). ▶

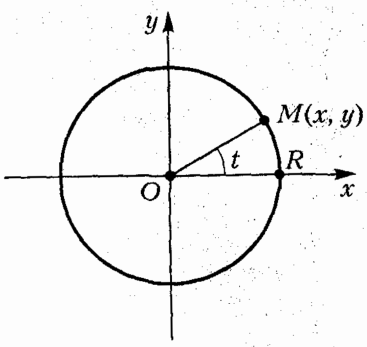


Рис. 15

Если из системы уравнений (1) исключить параметр t, то останется одно уравнение, содержащее x и y, и тогда данная кривая будет определяться уравнением $F(x, y) = 0$. Так, если в уравнениях (2) возведем в квадрат левые и правые части и затем полученные уравнения почленно сложим, то параметр t будет исключен и данная окружность будет выражаться уже знакомым нам уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Однако исключить параметр t не всегда бывает возможно. И тем не менее, для решения некоторых задач, как, например, для отыскания касательной к кривой, надо уметь находить производную от y по x и в таких случаях, когда кривая задана в параметрической форме.

Будем говорить, что функциональная зависимость y от x задана параметрически, если обе переменные x и y заданы как функции параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in (\alpha, \beta).$$

Рассмотрим вопрос о вычислении производной от y по x в случае параметрического задания функции.

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале (α, β) изменения t. Пусть для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = g(x)$. Тогда y есть сложная функция от x:

$$y = \psi[g(x)]. \qquad (3)$$

Допустим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t \in (\alpha, \beta)$, причем $\varphi'(t) \neq 0$, а функция $t = g(x)$ дифференцируема в соответствующей точке x. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции, будет дифференцируемой в точке x и функция $y = \psi[g(x)]$, причем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Но по правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t},$$

так что

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t},$$

или

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \varphi'(t) \neq 0.}$$

Формально этот результат получается мгновенно: производную $\frac{dy}{dx}$ рассматриваем как дробь и делим числитель и знаменатель на dt, что дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Для окружности $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t,$$

или $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (пояснить результат геометрически).

Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные k-го порядка, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то и функция $y = \psi\left[g(x)\right]$ имеет производную k-го порядка по x.

Производная 2-го порядка от y по x вычисляется так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx} =$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Таким образом,

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

вообще

$$\boxed{y_x^{(n)} = \frac{\left[y_x^{(n-1)}\right]'_t}{x'_t},}$$

где $y = f(x)$ — функция, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Пример. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

◀ Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

далее

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}. \ ▶$$

§ 13. Вектор-функция скалярного аргумента

Пусть материальная точка M движется по некоторой траектории L. Тогда каждому значению времени t соответствует определенная длина и направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ этой точки, а также ее скорости $\mathbf{v}$, ускорения $\mathbf{w}$ и т. д.

Следовательно, каждый из этих векторов можно рассматривать как некоторую векторную функцию скалярного аргумента t:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(t).$$

Определение. Если каждому значению скалярного аргумента t из интервала (α, β) соответствует по некоторому закону определенный вектор $\mathbf{a}$, то говорят, что на интервале (α, β) задана *вектор-функция скалярного аргумента* t и пишут

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t). \tag{1}$$

Пусть вектор $\mathbf{a}$ разложен по координатным ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ некоторой фиксированной системы координат

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2}$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ есть какая-либо векторная функция аргумента t, то ее координаты x, y, z будут также некоторыми (скалярными) функциями этого аргумента:

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t), \qquad \alpha < t < \beta. \tag{3}$$

Обратно, если координаты x, y, z вектора $\mathbf{a}$ являются функциями аргумента t, то функцией аргумента t будет и сам вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j} + \zeta(t)\mathbf{k}. \tag{4}$$

Таким образом, задание одной вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций (3) и обратно.

При изменении аргумента t вектор $\mathbf{a}(t)$, вообще говоря, меняет длину и направление (а в некоторых случаях и точку приложения, как, например, вектор скорости).

Определение. *Годографом* вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ называется множество точек, которое прочерчивает конец вектора $\mathbf{a}(t)$ при изменении аргумента t, когда начало вектора $\mathbf{a}(t)$ помещено в фиксированную точку O пространства.

Годограф $\mathbf{a}(t)$ есть вообще некоторая кривая L в пространстве (рис. 16). Годографом радиуса-вектора $\mathbf{r}$ движущейся точки будет сама траектория L этой точки.

Уравнение

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \alpha < t < \beta,}$$

или

$$\mathbf{r}(t) = \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j} + \zeta(t)\mathbf{k},$$

называется *векторным уравнением* кривой L. Уравнения

$$\boxed{\begin{cases} x = \xi(t), & \\ y = \eta(t), & \alpha < t < \beta, \\ z = \zeta(t), & \end{cases}}$$

называются *параметрическими уравнениями* этой кривой.

Пример. Например, уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t, & \\ y = R\sin t, & 0 \leqslant t < 2\pi \quad (R, h = \mathrm{const}) \\ z = ht, & \end{cases}$$

являются параметрическими уравнениями одного витка винтовой линии (рис. 17). ▶

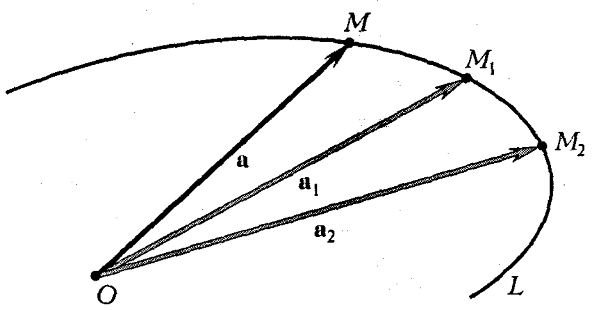


Рис. 16

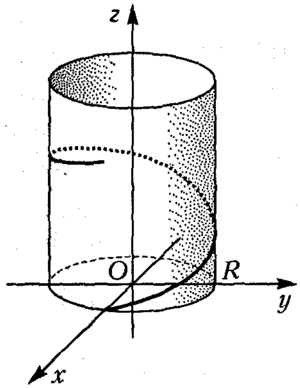


Рис. 17

13.1. Предел и непрерывность вектор-функции скалярного аргумента

Пусть вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ определена в некоторой окрестности точки $t = t_0$ кроме, быть может, самой этой точки.

Определение. Постоянный вектор $\mathbf{A}$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{a}(t)$ при $t \to t_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, верно неравенство

$$\left|\mathbf{a}(t) - \mathbf{A}\right| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}.$$

Геометрически это означает, что при $t \to t_0$ длина вектора $\mathbf{a}(t) - \mathbf{A}$ стремится к нулю, т. е. что вектор $\mathbf{a}(t)$ при $t \to t_0$ приближается по своей длине и направлению к вектору $\mathbf{A}$ (рис. 18).

Таким образом,

$$\boxed{\left(\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}\right) \iff \left(\lim_{t \to t_0} |\mathbf{a}(t) - \mathbf{A}| = 0\right).}$$

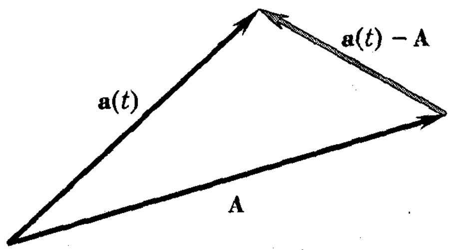


Рис. 18

Пусть

$$\mathbf{a}(t) = \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j} + \zeta(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{A} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

Тогда

$$\left|\mathbf{a}(t) - \mathbf{A}\right| = \sqrt{\left(\xi(t) - X\right)^2 + \left(\eta(t) - Y\right)^2 + \left(\zeta(t) - Z\right)^2}.$$

Отсюда, если $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}$, то

$$\lim_{t \to t_0} \xi(t) = X, \quad \lim_{t \to t_0} \eta(t) = Y, \quad \lim_{t \to t_0} \zeta(t) = Z$$

и наоборот.

Пусть вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ определена на интервале $\alpha < t < \beta$ и $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Определение. Вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ называется *непрерывной* при $t = t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0).$$

13.2. Производная вектор-функции по ее скалярному аргументу

Пусть вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ определена на интервале $\alpha < t < \beta$ и пусть кривая L есть годограф $\mathbf{a}(t)$. Возьмем какое-нибудь фиксированное значение аргумента $t \in (\alpha, \beta)$. Ему отвечает точка M кривой L. Дадим t любое приращение Δt, но такое, что $t + \Delta t \in (\alpha, \beta)$. Тогда получим вектор $\mathbf{a}(t + \Delta t)$, который определит на кривой L некоторую точку M_1 (рис. 19).

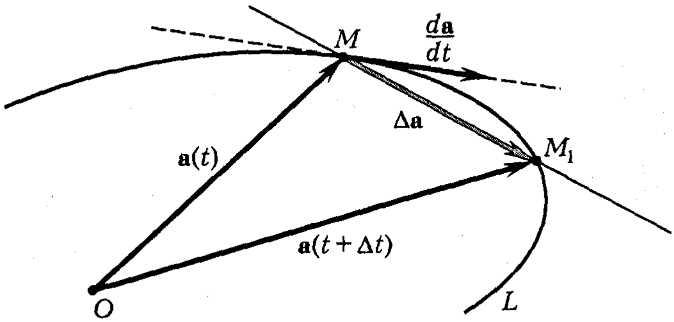


Рис. 19

Рассмотрим приращение $\Delta\mathbf{a}$ вектор-функции $\mathbf{a}(t)$, отвечающее приращению Δt аргумента:

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \neq 0.$$

Это новый вектор, коллинеарный вектору $\Delta\mathbf{a}$.

Определение. Если при $\Delta t \to 0$ разностное отношение $\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}$ имеет предел, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\mathbf{a}(t)$ по ее аргументу t в данной точке t и обозначается $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$ или $\mathbf{a}'(t)$.

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}.} \tag{1}$$

В этом случае $\mathbf{a}(t)$ называется *дифференцируемой* в точке t.

Выясним направление вектора $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$. При $\Delta t \to 0$ точка M_1 стремится по годографу к точке M, и потому секущая MM_1 стремится к касательной к кривой L в точке M. Следовательно, производная $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ представляет собой вектор, касательный к годографу функции $\mathbf{a}(t)$ в точке M. Направлен же вектор $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ в ту сторону, куда перемещается конец вектора $\mathbf{a}(t)$ по годографу при возрастании параметра t (рис. 19).

Найдем выражение для производной $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ в координатах. Пусть

$$\mathbf{a}(t) = \xi(t)\mathbf{i} + \eta(t)\mathbf{j} + \zeta(t)\mathbf{k}.$$

Тогда

$$\Delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) = \mathbf{i}\Delta\xi(t) + \mathbf{j}\Delta\eta(t) + \mathbf{k}\Delta\zeta(t).$$

Деля обе части на $\Delta t \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \mathbf{i}\,\frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t} + \mathbf{j}\,\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta t} + \mathbf{k}\,\frac{\Delta\zeta(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

Если функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ имеют производную при выбранном значении t, то при $\Delta \to 0$ каждое слагаемое в правой части равенства (2) имеет предел, так что существует и предел левой части, т. е. существует $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$. Переходя в равенстве (2) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{i}\,\frac{d\xi}{dt} + \mathbf{j}\,\frac{d\eta}{dt} + \mathbf{k}\,\frac{d\zeta}{dt}.} \tag{3}$$

Итак, если вектор $\mathbf{a}(t)$ отнесен к неподвижной системе координат, то его производная $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ выражается формулой (3).

Таким образом, вычисление производной вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ сводится к вычислению производных ее координат.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть радиус-вектор движущейся в пространстве точки, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — скорость этой точки в момент времени t:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

Пример. Найти производную вектор-функции

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}R\cos t + \mathbf{j}R\sin t + \mathbf{k}ht \quad (R, h = \text{const}).$$

◀ По формуле (3)

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\mathbf{i}R\sin t + \mathbf{j}R\cos t + \mathbf{k}h. \ ▶$$

13.3. Правила дифференцирования

1. Если $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, то $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$.

2. Если векторы $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ имеют производную в точке t, то

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)\big) = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}.$$

3. Постоянный числовой множитель можно выносить за знак производной

$$\frac{d(\alpha\mathbf{a}(t))}{dt} = \alpha\,\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \quad (\alpha \text{ — числовая постоянная}).$$

4. Производная от скалярного произведения векторов выражается формулой

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)\big) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right).$$

Следствие. *Если вектор $\mathbf{c}(t)$ единичный, т. е. $|\mathbf{c}(t)| = 1$, то $\frac{d\mathbf{c}}{dt} \perp \mathbf{c}$.*

◀ В самом деле, если $\mathbf{c}$ — единичный вектор, то

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 1.$$

Беря производную по t от обеих частей последнего равенства, получим

$$\left(\frac{d\mathbf{c}}{dt}, \mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{c}, \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right) = 0$$

или $2\left(\frac{d\mathbf{c}}{dt}, \mathbf{c}\right) = 0$, откуда $\frac{d\mathbf{c}}{dt} \perp \mathbf{c}$. ▶

5. Производная векторного произведения векторов определяется формулой

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right] + \left[\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right]$$

(*порядок сомножителей существен*).

Упражнения

Найдите производные функций:

1. $y = x^2 - 5x + 1$. **2.** $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{3}$. **3.** $y = (x^2 - 3x + 3)(x^3 - 1)$.

4. $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$. **5.** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. **6.** $y = (x^3 + 1)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Найдите $y'(1)$:

7. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$. **8.** $y = \sin x - \cos x$. **9.** $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. **10.** $y = \sin^2 x$.

11. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$. **12.** $y = \sin 5x$. **13.** $y = 2\sin(3x - 1)$. **14.** $y = \sin\frac{1}{x}$.

15. $y = \sin^5 2x$. **16.** $y = \sin(\sin x)$. **17.** $y = x \arcsin x$. **18.** $y = x \sin x \operatorname{arctg} x$.

19. $y = \arcsin\frac{2}{x}$. **20.** $y = \operatorname{arctg} x^2$. **21.** $y = \ln^2 x$. **22.** $y = x^2 \log_3 x$.

23. $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$. **24.** $y = \ln \operatorname{tg} x$. **25.** $y = \frac{1}{\ln x}$. **26.** $y = 9^x$. **27.** $y = xe^x$.

28. $y = \frac{x^3 + 2^x}{x}$. **29.** $y = x^3 - 3x$. **30.** $y = 10^{3x+1}$. **31.** $y = 5^{\sin x}$.

32. $y = \sin(3^x)$. **33.** $y = \operatorname{sh}^3 x$. **34.** $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$. **35.** $y = \operatorname{th}(\ln x)$. **36.** $y = 3^{\operatorname{sh}^2 x}$.

37. $y = (\sin x)^{\cos x}$. **38.** $y = x^{\sin x}$. **39.** $y = x^{\ln x}$. **40.** $y = \frac{(x - 2)^2\sqrt[3]{x + 1}}{(x - 5)^3}$.

41. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$. **42.** $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

43. $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}$. **44.** $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.

Найдите дифференциал функции:

45. $y = \frac{1}{4x^4}$. **46.** $y = \operatorname{tg}^2 x$. **47.** $y = 5^{\ln \sin x}$.

48. Вычислите приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

Проведите повторное дифференцирование:

49. $y = x^3 - 3x + 5$; $y'' = ?$ **50.** $y = \operatorname{arctg} x$; $y''(1) = ?$

51. $y = a^{3x}$; $y''' = ?$ **52.** $y = x^5 \ln x$; $y''' = ?$

Найдите общие выражения для производных порядка n от функций:

53. $y = xe^x$. **54.** $y = \sin^2 x$. **55.** $y = \frac{1}{x(1+x)}$.

Вычислите дифференциалы высших порядков:

56. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $d^2y = ?$ **57.** $y = x^m$, $d^3y = ?$.

Найдите $\frac{dy}{dx}$ для функций, заданных параметрически:

58. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$ **59.** $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

61. Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$

62. Найдите $\dfrac{d^2x}{dy^2}$, если $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Ответы

1. $y' = 2x - 5$. **2.** $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. **3.** $y' = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x + 3$. **4.** $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. **5.** $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. **6.** $y'(1) = 16$. **7.** $y' = -\frac{2x}{3(1+x^2)^{4/3}}$. **8.** $y' = \cos x + \sin x$. **9.** $y' = \frac{1}{1+\cos x}$. **10.** $y' = \sin 2x$. **11.** $y' = \operatorname{tg}^4 x$. **12.** $y' = 5\cos 5x$. **13.** $y' = 6\cos(3x-1)$. **14.** $y' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$. **15.** $y' = 10\sin^4 2x \cos 2x$. **16.** $y' = \cos(\sin x)\cos x$. **17.** $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **18.** $y' = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x + x\cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x\sin x}{1+x^2}$. **19.** $y' = -\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$. **20.** $y' = \frac{2x}{1+x^4}$. **21.** $y' = \frac{2}{x}\ln x$. **22.** $y' = 2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$. **23.** $y' = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. **24.** $y' = \frac{2}{\sin 2x}$. **25.** $y' = -\frac{1}{x\ln^2 x}$. **26.** $y' = 9^x \ln 9$. **27.** $y' = e^x(x+1)$. **28.** $y' = \frac{2^x(x\ln 2 - 1) + 2x^3}{x^2}$. **29.** $y' = 3x^2 - 3^x \ln 3$. **30.** $y' = 310^{3x+1}\ln 10$. **31.** $y' = 5^{\sin x}\cos x \ln 5$. **32.** $y' = 3^x \cos(3x)\ln 3$. **33.** $y' = 3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$. **34.** $y' = \frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$. **35.** $y' = \frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. **36.** $y' = 3^{\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{sh} 2x \ln 3$. **37.** $y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right)$. **38.** $y' = x^{\sin x}\left(\cos \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$. **39.** $y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$. **40.** $y' = \frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. **41.** $y' = \sqrt{x^2 - a^2}$. **42.** $y' = \frac{1}{\sin^3 x}$. **43.** $y' = 9x^2 \arcsin x$. **44.** $y' = (\arcsin x)^2$. **45.** $dy = -\frac{dx}{x^5}$. **46.** $dy = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$. **47.** $dy = 5^{\ln \sin x}\operatorname{ctg} x \ln 5 dx$. **48.** $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$. **49.** $y'' = 6x$. **50.** $y''(1) = -\frac{1}{2}$. **51.** $y''' = 27a^{3x}\ln^3 a$. **52.** $y''' = x^2(60\ln x + 47)$. **53.** $y^{(n)} = e^x(x+n)$. **54.** $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$. **55.** $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right]$ (**Указание.** Представить данную функцию в виде $y = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$). **56.** $d^2y = e^{-x^2/2}(x^2-1)dx^2$. **57.** $d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$. **58.** $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t^2$. **59.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **60.** $\frac{dy}{dx} = -2e^{3t}$. **61.** $\frac{d^2y}{dx^2} = 9t^3$. **62.** $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{2e^{-t}}{(\cos t + \sin t)^3}$.

Глава X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 1. Теоремы о среднем значении

Теорема 1 (Ролль). *Если функция* $f(x)$

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеет производную хотя бы на интервале* (a, b);

3) *на концах отрезка* $[a, b]$ *принимает равные значения* $(f(a) = f(b))$,

то в интервале (a, b) *существует по крайней мере одна точка* ξ, *в которой производная данной функции равна нулю*:

$$f'(\xi) = 0, \quad \xi \in (a, b).$$

◀ Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения. Обозначим их соответственно m и M. Могут представиться два случая:

1) $M = m$. В этом случае $M \leqslant f(x) \leqslant M$, т.е. $f(x)$ есть постоянная на $[a, b]$. Поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале (a, b), так что в этом случае теорема верна.

2) $M \neq m$. Тогда функция $f(x)$ по крайней мере одно из двух своих значений M или m принимает в точке ξ, содержащейся внутри интервала (a, b), так как $f(a) = f(b)$ и потому не может быть одновременно M значением $f(x)$ на одном конце, а m — на другом конце отрезка $[a, b]$. Пусть для определенности $M = f(\xi)$, $a < \xi < b$ (рис. 1).

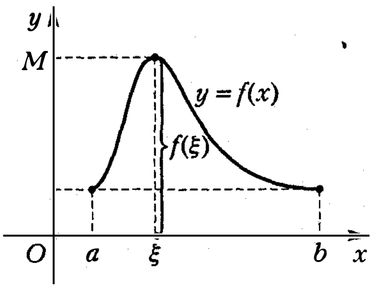


Рис. 1

Так как по условию $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала (a, b), то существует и $f'(\xi)$ и

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} = f'(\xi).$$

Но $f(\xi) = M$ — наибольшему значению функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и поэтому

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(\xi - \Delta x) - f(\xi) \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leqslant 0, \quad \text{а} \quad \frac{f(\xi-\Delta x)-f(\xi)}{-\Delta x} \geqslant 0 \quad (\Delta x > 0).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получим два неравенства

$$f'(\xi) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f'(\xi) \geqslant 0,$$

которые должны быть верны одновременно. Следовательно, $f'(\xi) = 0$, т. е. теорема верна и для этого случая. ▶

Теореме Ролля можно дать следующее геометрическое истолкование. Пусть имеем кривую $\smile AB$, заданную уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Это означает, что

1) кривая $\smile AB$ непрерывна на $[a, b]$;

2) в любой точке кривой, находящейся между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, можно провести касательную к этой кривой;

3) концы дуги $\smile AB$ кривой находятся на одном уровне по отношению к оси Ox (рис. 2).

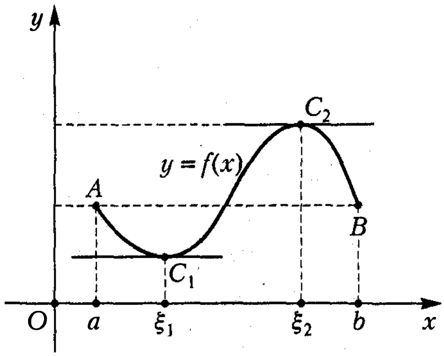


Рис. 2

Утверждение теоремы Ролля состоит в том, что на дуге $\smile AB$ кривой, обладающей указанными свойствами, найдется по крайней мере одна точка $C(\xi, f(\xi))$, в которой касательная к данной кривой параллельна оси Ox (или хорде AB).

Условия теоремы Ролля являются существенными и при их нарушении утверждение теоремы может оказаться несправедливым.

Пример. Так, например, для функции $f(x) = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, (рис. 3) выполнены все условия теоремы Ролля, кроме существования производной $f'(x)$ в интервале $(-1, 1)$. Не существует $f'(x)$ в одной только точке $x = 0$, и утверждение теоремы Ролля к данной функции уже неприменимо, так как в интервале $(-1, 1)$ нет такой точки, где производная $f'(x)$ равна нулю: $f'(x) = -1$, если $-1 < x < 0$, $f'(x) = 1$, если $0 < x < 1$, а при $x = 0$ производная $f'(x)$ не существует. ▶

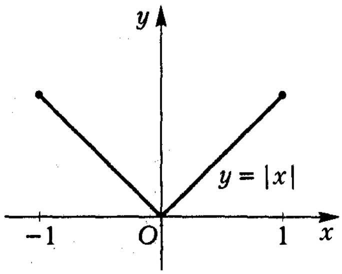


Рис. 3

Пример. Еще пример. Функция $f(x) = x - [x]$ (рис. 4) на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля за исключением непрерывности: она имеет разрыв при $x = 1$, а производная $f'(x) = 1$ всюду в интервале $(0, 1)$. ▶

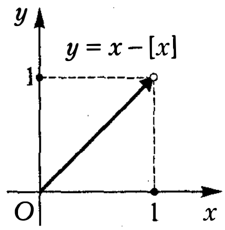


Рис. 4

Задача 1. Дана функция $f(x) = 1 + x^m(1-x)^n$, где m, n — целые положительные числа. Не вычисляя производной, показать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, 1)$.

Задача 2. Показать, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет только один действительный корень.

Теорема 2 (Лагранж) о конечных приращениях.

Если функция $f(x)$

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеет производную* $f'(x)$ *на интервале* (a, b),

то в интервале (a, b) *существует по крайней мере одна точка* ξ *такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad a < \xi < b.$$

◀ Введем вспомогательную функцию $F(x)$, определив ее на отрезке $[a, b]$ равенством

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{1}$$

Эта функция на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на $[a, b]$, поскольку на $[a, b]$ непрерывно каждое слагаемое в правой части (1). На интервале (a, b) функция $F(x)$ имеет производную, так как каждое слагаемое в выражении $F(x)$ имеет производную на этом интервале. Наконец, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $F(a) = F(b) = 0$, т. е. $F(x)$ принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$.

В силу теоремы Ролля, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой $F'(x)$ равна нулю,

$$F'(\xi) = 0.$$

Но

$$F'(a) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

так что в точке ξ имеем

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \xi \in (a, b). ▶$$

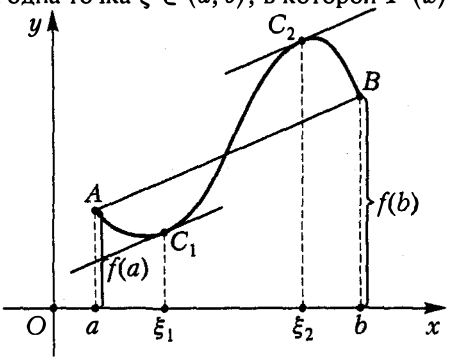


Рис. 5

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, когда $f(a) = f(b)$.

Обращаясь к геометрическому истолкованию теоремы Лагранжа, заметим, что отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = \xi$ (рис. 5). Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа сводится к следующему: на дуге $\smile AB$ непрерывной кривой, к которой можно провести касательную в любой точке, лежащей на кривой между точками A и B, всегда найдется по крайней мере одна точка $C(\xi, f(\xi))$, в которой касательная параллельна хорде AB.

Доказанная формула $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, или

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b,} \tag{2}$$

носит название *формулы Лагранжа* или *формулы конечных приращений*. Она, очевидно, сохраняет силу для случая $a > b$.

Число ξ (вообще говоря, неизвестное, промежуточное по отношению к числам a и b) иногда удобно бывает представить в виде

$$\xi = a + \theta \cdot (b - a),$$

где θ — некоторое действительное число, удовлетворяющее условию $0 < \theta < 1$. Тогда формула Лагранжа (2) примет вид

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b - a)\big)(b - a), \quad 0 < \theta < 1.} \tag{3}$$

Взяв вместо a и b соответственно x и $x + \Delta x$, формулу Лагранжа запишем так:

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'\big(x + \theta\Delta x\big)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.} \tag{4}$$

Это равенство дает точное выражение для приращения функции $f(x)$ при любом конечном приращении Δx аргумента, в противоположность приближенному равенству

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x,$$

относительная погрешность которого стремится к нулю лишь при $\Delta x \to 0$. Отсюда и название формулы (4) — формула конечных приращений. Отметим, что в (4) число θ, вообще говоря, неизвестно.

Пример. Используя теорему Лагранжа, доказать справедливость неравенства

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leqslant |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2.$$

◀ Рассмотрим функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[a, b]$. Поэтому для любых x_1 и x_2

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

или

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1),$$

где точка ξ находится между точками x_1 и x_2. Отсюда

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \frac{1}{1+\xi^2}|x_2 - x_1|$$

и

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leqslant |x_2 - x_1|,$$

поскольку $\frac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1 \ \forall \xi$. ▶

Задача. Показать, пользуясь теоремой Лагранжа, что

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

Теорема 3 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$*

1) *непрерывны на отрезке $[a, b]$;*
2) *имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ хотя бы на интервале (a, b);*
3) *производная $\varphi'(x) \neq 0$ на интервале (a, b),*

то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка ξ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad a < \xi < b. \tag{1}$$

Формула (1) называется *формулой Коши*.

◀ Из условия теоремы следует, что разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ не может равняться нулю. Действительно, если бы $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и в таком случае $\varphi'(x)$ была бы равна нулю по крайней мере в одной точке ξ интервала (a, b), что противоречит условию 3) теоремы Коши. Таким образом, равенство (1) имеет смысл. Покажем, что оно верно при некотором значении ξ из интервала (a, b).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big). \tag{2}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле:

1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, т. к. непрерывны на $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$;

2) функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$ всюду в интервале (a, b), поскольку каждое слагаемое в правой части (2) имеет производную на этом интервале;

3) $F(a) = F(b) = 0$, в чем убеждаемся непосредственной проверкой.

Применяя теорему Ролля, делаем вывод о существовании между a и b такой точки ξ, что $F'(\xi) = 0$. В силу (2)

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x),$$

так что

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(\xi) = 0.$$

Деля все части последнего равенства на $\varphi'(\xi) \neq 0$, получаем требуемое равенство

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \text{ ▶}$$

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: достаточно в теореме Коши взять $\varphi(x) \equiv x$.

Задача. Можно ли получить формулу Коши, применив к разностям $f(b) - f(a)$ и $\varphi(b) - \varphi(a)$ теорему Лагранжа?

Замечание. В теоремах Ролля, Лагранжа и Коши речь идет о существовании некоторой «средней точки» $\xi \in (a, b)$, для которой выполняется то или иное равенство. Поэтому вся эта группа теорем объединяется названием: теоремы о среднем дифференциального исчисления.

§ 2. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x = a$ и пусть $f(a)$ и $\varphi(a) = 0$. Тогда отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ теряет смысл при $x = a$. Однако предел этого отношения в точке $x = a$ может существовать. Задача отыскания предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в этом случае называется раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ значит найти предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$.

Раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$ состоит в отыскании предела $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - \varphi(x)\right]$ при условии, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty.$$

Аналогично трактуются эти понятия для случая, когда $x \to \infty$.

Теорема 4 (правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в некоторой окрестности $(a - \delta, a + \delta)$ точки a, кроме, быть может, самой точки a, причем $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности. Если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$$

и отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$ имеет конечный или бесконечный предел, то существует и предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

◀ В теореме ничего не сказано о значениях $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x = a$. Положим $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$. Так как теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут непрерывны в точке a. Поэтому на отрезке $[a, x]$ (или $[x, a]$), где x — какая угодно точка интервала $(a - \delta, a + \delta)$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, между a и x найдется по крайней мере одна точка $\xi = \xi(x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Если при некотором значении x таких точек ξ будет больше одной, то фиксируем какую-нибудь одну из них.

Величина ξ зависит от x, причем $\xi \to a$, когда $x \to a$. По условию при $x \to a$ отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел. Этот предел не зависит от способа стремления x к точке a. Поэтому при $x \to a$, когда и $\xi \to a$, отношение $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ имеет предел, совпадающий с пределом отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ (\xi\to a)}} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \blacktriangleright \tag{3}$$

Равенство (3) выражает *правило Лопиталя*, в силу которого вычисление предела отношения функций может быть заменено (при известных условиях) вычислением предела отношения производных этих функций, что иногда бывает проще.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.\ ▶$$

Замечание 1. Если условия теоремы выполнены только в интервале $(a-\delta, a)$ или $(a, a+\delta)$, то формулой (3) можно пользоваться для вычисления предела $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ соответственно при $x\to a-0$ или $x\to a+0$.

Замечание 2. Может оказаться, что предел отношения производных не существует, в то время как предел отношения функций существует.

Рассмотрим, например, функции $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ и $\varphi(x)=x$. Их отношение в точке $x=0$ имеет предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

В то же время отношение производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ предела не имеет. Таким образом, из существования $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не следует существования $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Замечание 3. При вычислении $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз. Так, если условиям теоремы Лопиталя удовлетворяют не только функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, то для вычисления $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ опять можно воспользоваться правилом Лопиталя и т. д.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.\ ▶$$

Теорема 5 (второе правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в некоторой окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ точки a, кроме, быть может, самой точки a, причем $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности. Если*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad и \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$$

и при $x\to a$ отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Здесь также можно рассматривать пределы при $x\to a-0$ или $x\to a+0$ (см. замечание 1).

Пример.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln\sin ax)'}{(\ln\sin bx)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\frac{\sin bx}{\sin ax}\right)=1 \quad (a>0, b>0).\ ▶$$

Правила Лопиталя могут быть использованы при вычислении следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

◀ В этом случае достаточно записать выражение $f(x)\varphi(x)$ в виде

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{1/\varphi(x)} \quad или \quad f(x)\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$$

и применить к правой части правило Лопиталя. ▶

Пример.

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \blacktriangleright$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-\varphi(x)\right]$, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

◀ В этом случае выражение $f(x)-\varphi(x)$ надо опять представить в виде частного

$$f(x)-\varphi(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}},$$

и затем воспользоваться правилом Лопиталя. ▶

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, $f(x)\geqslant 0$, когда имеем один из трех случаев:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (0^0);

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (1^∞);

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (∞^0).

◀ Положим

$$y = \left[f(x)\right]^{\varphi(x)},$$

логарифмируя, получим

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

Вычислим

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\left[\varphi(x)\ln f(x)\right].$$

Нетрудно заметить, что для этого в каждом из указанных трех случаев а), б), в) придется вычислять предел такого вида, который рассмотрен в случае 1.

Пусть мы нашли, что $\lim\limits_{x\to a}\ln y = A$. Тогда

$$\lim_{x\to a} y = e^A,$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^A. \blacktriangleright$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

◀ Положим $y=x^x$; тогда $\ln y = x\ln x$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

так что

$$\lim_{x\to 0+0} y = e^0 = 1. \blacktriangleright$$

Теорема 6. *Пусть*

1) *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определены для всех* x, *достаточно больших по абсолютной величине*;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$;

3) *существуют производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x) \neq 0$ *для всех* x, *достаточно больших по абсолютной величине*;

4) *существует (конечный или бесконечный) предел отношения*

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 6, достаточно преобразовать переменную x по формуле $x = \frac{1}{t}$ и воспользоваться результатами теорем 4 и 5.

Пример.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0;$$

n-кратным применением правила Лопиталя вычисляется предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0,$$

так что функция e^x при $x \to +\infty$ растет быстрее любой степени x.

Следующий пример показывает, что правило Лопиталя хотя и применимо к вычислению $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, но фактически бессильно. В самом деле, применяя это правило, будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{и т.д.}$$

Элементарными приемами этот предел вычисляется без труда:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1. \blacktriangleright$$

§ 3. Формула Тейлора

Эта формула является одной из основных формул математического анализа и имеет многочисленные приложения.

1. Начнем с того, что выведем формулу Тейлора для многочлена степени n. Рассмотрим многочлен n-ой степени

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n, \quad b_n = \text{const} \neq 0. \tag{1}$$

Каково бы ни было число a, многочлен (1) можно представить в виде суммы степеней разности $x - a$, взятых с некоторыми коэффициентами. Действительно, положим

$$x = a + t.$$

Тогда

$$P(x) = P(a+t) = b_0 + b_1(a+t) + \ldots + b_n(a+t)^n.$$

Раскрывая в правой части скобки и сгруппировав подобные члены, получим

$$P(a+t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots + A_n t^n,$$

или, выразив обратно t через x,

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots + A_n(x-a)^n, \tag{2}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — некоторые постоянные.

Взяв многочлен $P(x)$ в форме (2) и продифференцировав его n раз по x, найдем

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^{n-1} \\ P''(x) = 2\cdot 1 A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + \ldots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^n(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1A_n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Полагая в равенствах (2) и (3) $x = a$, получим

$$P(a) = A_0, \quad P'(a) = 1!A_1, \quad P''(a) = 2!A_2, \quad \ldots, \quad P^{(n)}(a) = n!A_n.$$

Откуда

$$A_0 = P(a), \quad A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Следовательно, равенство (2) может быть записано в виде

$$\boxed{P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.} \tag{4}$$

Это и есть *формула Тейлора* по степеням $x - a$ для многочлена $P(x)$ степени n. Отсюда в частном случае при $a = 0$ получим *формулу Маклорена*

$$\boxed{P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.} \tag{5}$$

Пример. Многочлен $P(x) = x^2 - 3x + 2$ разложить

а) по степеням x;

б) по степеням $x - 1$.

◀ а) Имеем

$$\begin{array}{rrcr} P(x) = x^2 - 3x + 2 & \Rightarrow & P(0) = & 2, \\ P'(x) = \quad 2x - 3 & \Rightarrow & P'(0) = & -3, \\ P''(x) = \quad 2 & \Rightarrow & P''(0) = & 2. \end{array}$$

По формуле (5)

$$P(x) = 2 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 2 - 3x + x^2,$$

т. е. получаем исходный многочлен.

б) Имеем

$$\begin{array}{rrcr} P(x) = x^2 - 3x + 2 & \Rightarrow & P(1) = & 0, \\ P'(x) = \quad 2x - 3 & \Rightarrow & P'(1) = & -1, \\ P''(x) = \quad 2 & \Rightarrow & P''(1) = & 2. \end{array}$$

По формуле (4)

$$P(x) = 0 - 1(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 = -(x-1) + (x-1)^2. \blacktriangleright$$

Заметим, что по формуле (4) мы можем вычислить значения многочлена $P(x)$ в любой точке x, если известны значения многочлена и всех его производных в одной какой-нибудь точке a.

2. Пусть теперь в окрестности точки $x = a$ задана функция $f(x)$, не являющаяся многочленом степени $n-1$, но имеющая в этой окрестности производные до n-го порядка включительно.

Вычислим величины $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ и построим функцию

$$\boxed{Q_{n-1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.} \tag{6}$$

Очевидно, $Q_{n-1}(x)$ есть многочлен степени $n-1$. Он называется *многочленом Тейлора* по степеням $x-a$ для функции $f(x)$. Если бы исходная функция $f(x)$ сама бы была многочленом степени $n-1$, то выполнялось бы тождество $f(x) \equiv Q_{n-1}(x)$ для всех значений x из рассматриваемой окрестности. В данном случае это тождество не имеет места, поскольку мы предположили, что $f(x)$ не есть многочлен степени $n-1$.

Положим

$$\boxed{f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x),} \tag{7}$$

где $Q_{n-1}(x)$ есть многочлен Тейлора степени $n-1$ для функции $f(x)$ по степеням $x-a$. Равенство (7) называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом* рассматриваемой формулы Тейлора.

Для остаточного члена R_n можно дать выражение через n-ю производную от $f(x)$. Займемся этим.

Пусть функция $f(x)$, не являющаяся многочленом степени $n-1$, на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, а в интервале (a, b) существует и производная n-го порядка. Запишем формально равенство

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n. \tag{8}$$

Будем искать R_n в виде

$$R_n = M(b-a)^n, \tag{9}$$

где величина M подлежит определению. С этой целью введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определив ее на отрезке $[a, b]$ равенством

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(b) - \Big[f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \ldots +& \\ + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + M(b-x)^n\Big].& \end{aligned} \tag{10}$$

Эта функция получается, если из $f(b)$ вычесть правую часть (8), в которой точка a заменена на x.

Функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно,

1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция $f(x)$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно;

2) функция $\varphi(x)$ имеет на интервале (a, b) производную, потому что на нем имеет производную n-го порядка исходная функция $f(x)$;

3) функция $\varphi(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ имеет равные значения: $\varphi(a) = 0$, что следует из равенства (8), и $\varphi(b) = 0$, что видно из формулы (10). Поэтому, согласно теореме Ролля, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$.

Найдем производную $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = -\left[f'(x) - \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}\cdot 2\cdot(b-x) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\cdot(n-1)\cdot(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - Mn(b-x)^{n-1}\right],$$

т. е.

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + Mn(b-x)^{n-1},$$

поскольку все члены сокращаются, кроме последних двух. Таким образом,

$$\varphi'(\xi) = -(b-\xi)^{n-1}\left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn\right] = 0.$$

Так как $\xi \neq b$ (точка ξ находится в интервале (a, b)), то отсюда следует, что

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - M\cdot n = 0,$$

а потому $M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Таким образом, для R_n (см. формулу (9)) получаем выражение

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \qquad a < \xi < b. \tag{11}$$

Подставляя найденное значение R_n в равенство (8), получим

$$\boxed{\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots +& \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n&. \end{aligned}} \tag{12}$$

Эта формула называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$. Последнее слагаемое правой части (12)

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n,}$$

где ξ — некоторая точка, находящаяся между a и b, называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*.

При $n = 1$ из формулы Тейлора (12) получаем как частный случай формулу Лагранжа

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(b-a),$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

В равенстве (12) вместо a и b можно взять любые точки x_0 и x из отрезка $[a, b]$. Поэтому формулу Тейлора для функции $f(x)$ можно записать в виде

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +& \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x),& \end{aligned}} \qquad (13)$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

(точка ξ находится между x и x_0), или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ получаем *формулу Маклорена*

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),} \qquad (14)$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Мы предполагали, что функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную $f^{(n)}(x)$. Предположим теперь, что $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда

$$f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big) = f^{(n)}(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, и остаточный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n$$

можно записать так:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!},$$

где $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Так как $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, то $\frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!}$ есть $o\big((x-x_0)^n\big)$, $x \to x_0$. Поэтому формула (13) примет вид

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots +& \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0.& \end{aligned}} \qquad (15)$$

Формулу (15) называют *формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$ с остаточным членом в форме Пеано.* Эта формула показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки x_0 ее многочленом Тейлора n-ой степени, мы совершим ошибку, которая при $x \to x_0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$. Следовательно, формула (15) представляет наибольший интерес при x, достаточно близких к x_0. Поэтому ее называют еще *локальной формулой Тейлора.*

§ 4. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

Представим формулой Маклорена

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \qquad x<\theta<1 \tag{1}$$

некоторые элементарные функции.

1. $f(x) = e^x$

Имеем

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1,\\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n-1)}(x) &= e^x, & f^{(n-1)}(0) &= 1,\\
f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(\theta x) &= e^{\theta x}.
\end{aligned}$$

По формуле (1) будем иметь

$$\boxed{e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}, \qquad 0<\theta<1.} \tag{2}$$

Полагая в равенстве (2) $x = 1$, получим

$$\boxed{e = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta}}{n!}, \qquad 0<\theta<1.} \tag{3}$$

Поскольку

$$0<\frac{e^\theta}{n!}<\frac{3}{n!},$$

сумма

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

дает приближенное значение числа e с недостатком и погрешностью, меньшей $\frac{3}{n!}$.

2. $f(x) = \sin x$

Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \end{aligned}$$

и вообще

$$f^{(m)}(x) = \sin\left(x + m \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$f^{(m)}(0) = \sin m\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad m = 2k+1, \end{cases}$$

а

$$f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, в многочлене Тейлора для $\sin x$ обращаются в нуль коэффициенты при четных степенях x, так что $(2n+1)$-й многочлен и $(2n+2)$-й многочлен тождественны между собой.

По формуле Маклорена (1), беря $n = 2k+1$, получим

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x),} \tag{4}$$

где

$$\boxed{R_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1.}$$

Очевидно,

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3. $f(x) = \cos x$

Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \end{aligned}$$

и вообще $f^{(m)}(x) = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right)$, так что

$$f^{(m)}(0) = \cos m \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad m = 2k. \end{cases}$$

Поэтому в силу формулы (1) (если взять $n = 2k+2$)

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}(x),} \tag{5}$$

где

$$\boxed{R_{2k+2}(x) = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\left[\theta x + (2k+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1.}$$

Очевидно,

$$|R_{2k+2}(x)| \leqslant \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Формулами (4) и (5) можно пользоваться для вычисления приближенных значений $\sin x$ и $\cos x$ с любой степенью точности. На рис. 6 и 7 показано приближение функций $\sin x$ и $\cos x$ в окрестности точки $x = 0$ многочленами Тейлора этих функций.

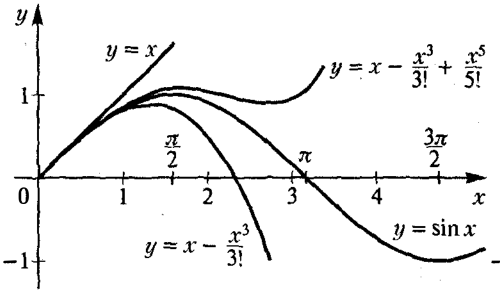


Рис. 6

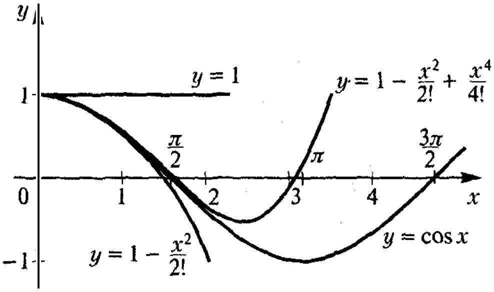


Рис. 7

4. $f(x) = \ln(1 + x)$

Эта функция определена и дифференцируема любое число раз для $x > -1$. Имеем

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad f(0) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 2!,$$

. . . .

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^n\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}, \qquad f^{(n-1)}(0) = (-1)^n(n-2)!,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}.$$

В силу формулы Маклорена (1)

$$\boxed{\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x),} \tag{7}$$

где

$$\boxed{R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n(1+\theta x)^n}x^n, \quad 0 < \theta < 1.}$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α — действительное, $x > -1$)

Имеем

$$\begin{aligned}
&f(x)=(1+x)^\alpha, && f(0)=1,\\
&f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, && f'(0)=\alpha,\\
&f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, && f''(0)=\alpha(\alpha-1),\\
&\dots\dots\dots\dots && \\
&f^{(n-1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(1+x)^{\alpha-n+1}, && f^{(n-1)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2),\\
&f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, && f^{(n)}(\theta x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),} \tag{8}$$

где

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n, \quad 0<\theta<1.$$

Если $\alpha = m$ — натуральному числу, то все члены формулы (1) начиная с $(m+1)$-го исчезают, и формула Маклорена превращается в известную формулу бинома Ньютона

$$\boxed{(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+x^m \quad \forall x.}$$

§ 5. Использование формулы Маклорена для получения асимптотических оценок элементарных функций и вычисления пределов

В свое время мы установили асимптотические формулы для элементарных функций (глава VIII, § 17).

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x)\\
e^x &= 1 + x + o(x)\\
\ln(1+x) &= x + o(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x)
\end{aligned}\right\} \quad x \to 0. \tag{1}$$

Формулы (1) дают представление элементарных функций при малых значениях $|x|$. Мы пользовались ими при вычислении простейших пределов. Для вычисления более тонких пределов, когда определяющую роль играют члены высокого порядка относительно x при $x \to 0$, формулы (1) оказываются недостаточными. Поэтому возникает необходимость получить более точные асимптотические оценки для элементарных функций. Такие оценки легко получаем из формулы Маклорена, если в этой формуле взять остаточный член в форме Пеано. Приведем эти оценки:

$$\left.\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}\right\} \quad x \to 0. \qquad (2)$$

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

◀ При помощи формул (1) предел этот найти невозможно, поскольку по виду знаменателя можно заключить, что определяющую роль играют члены 3-го порядка относительно x ($x \to 0$). Поэтому воспользуемся оценками (2). Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}. \text{ ▶}$$

Упражнения

Применяя правило Лопиталя, найдите пределы

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$. 8. $\lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{\ln x}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

10. Разложите многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.

11. Разложите многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ по степеням двучлена $x - 2$.

12. Разложите по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = -1$.

13. Разложите по формуле Тейлора функцию $f(x) = xe^x$ в окрестности точки $x_0 = 0$ (формула Маклорена).

14. Разложите по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x) = e^{\frac{x}{2}+2}$.

15. Тяжелая нить под действием собственного веса провисает по цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (a – const). Покажите, что для малых $|x|$ форма нити приближенно выражается параболой.

Используя формулу Маклорена, найдите пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4}$. 17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

Ответы

1. $\frac{10}{7}$. **2.** $-\frac{1}{3}$. **3.** 3. **4.** $-\frac{1}{2}$. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 0. **8.** 1. **9.** 1. **10.** $(x+1)^3-5(x+1)+8$. **11.** $(x-2)^3+4(x-2)^2+7(x-2)+11$. **12.** $f(x)=-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^{n-1}+(-1)^n\frac{(x+1)^n}{[-1+\theta\cdot(x+1)]^{n+1}}$, $0<\theta<1$. **13.** $f(x)=x\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}+\frac{x^n}{n!}(\theta x+n)e^{\theta x}$, $0<\theta<1$. **14.** $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^2}{2^k\cdot k!}x^k+o(x^n)$. **16.** $\frac{1}{24}$. **17.** $\frac{4}{3}$. **18.** -1. **19.** $\frac{8}{15}$.

Глава XI

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Признаки возрастания и убывания функции

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *неубывающей на* $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей на* $[a, b]$.

Если на отрезке $[a, b]$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей на отрезке* $[a, b]$. Если из условия $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *убывающей на* $[a, b]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *монотонной на* $[a, b]$, если она на $[a, b]$ только неубывающая (в частности, возрастающая) или только невозрастающая (в частности, убывающая). Возрастающие и убывающие функции часто называют также *строго монотонными*.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b). Для того, чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была неубывающей, необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geqslant 0$ для всех точек x из интервала (a, b).*

◄ **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неубывающая (рис. 1). Докажем, что на интервале (a, b) производная $f'(x) \geqslant 0$. Возьмем точки x и $x + \Delta x$ в интервале (a, b). Так как по условию $f(x)$ неубывающая, то при любом Δx (положительном или отрицательном) знаку Δx и $f(x + \Delta x) - f(x)$ один и тот же, и поэтому

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Учитывая, что по условию в каждой точке x интервала (a, b) существует производ-

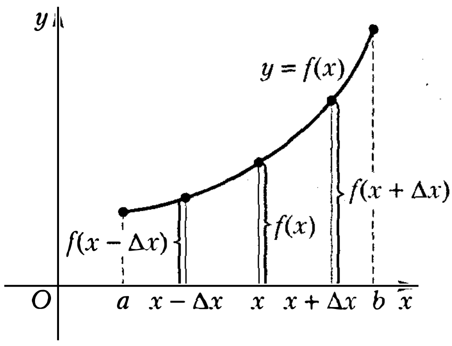


Рис. 1

ная $f'(x)$, из последнего неравенства получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Итак, в любой точке $x \in (a, b)$ имеем $f'(x) \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b). Докажем, что функция $f(x)$ неубывающая на отрезке $[a, b]$. Действительно, пусть $x_1 < x_2$ — любые две точки отрезка $[a, b]$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Так как по условию $f'(x) \geqslant 0$ в каждой точке x интервала (a, b), то и $f'(\xi) \geqslant 0$. Кроме того, $x_2 > x_1$. Поэтому

$$f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, а это и означает, что на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ неубывающая. ▶

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере на интервале (a, b). Для того, чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была невозрастающей, необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \leqslant 0$ для всех точек x из интервала (a, b).*

Таким образом, интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$ являются интервалами монотонности функции $f(x)$. Справедливо следующее утверждение (достаточное условие возрастания функции):

если $f'(x) > 0$ на интервале (a, b), то $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает.

Однако если $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то отсюда не следует, что $f'(x) > 0$ всюду на интервале (a, b).

Пример. Функция $f(x) = x^3$ возрастает на отрезке $[-1, 1]$, однако ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль в точке $x = 0$. ▶

Принято говорить также о возрастании или убывании функции в точке.

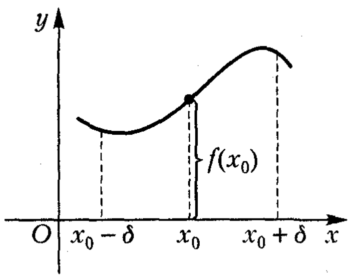


Рис. 2

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке $x = x_0$*, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой для всех $x < x_0$ имеем $f(x) < f(x_0)$, а для всех $x > x_0$ верно $f(x) > f(x_0)$ (рис. 2).

Функция $f(x)$ называется *убывающей в точке $x = x_0$*, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x < x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$, а для всех $x > x_0$ имеем $f(x) < f(x_0)$.

Следующая теорема выражает достаточные условия возрастания и убывания функции в точке.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет производную $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает; если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 убывает.*

◀ Пусть $f'(x_0) > 0$. Это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

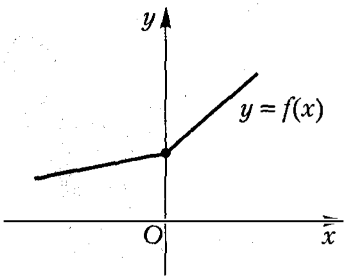


Рис. 3

Но тогда существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $0 < |\Delta x| < \delta$, верно неравенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Отсюда следует, что при $0 < |\Delta x| < \delta$ величины Δx и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеют один и тот же знак: если $\Delta x < 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$; если же $\Delta x > 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$. Согласно определению, это означает, что функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает.

Подобными рассуждениями можно доказать, что если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 убывает. ▶

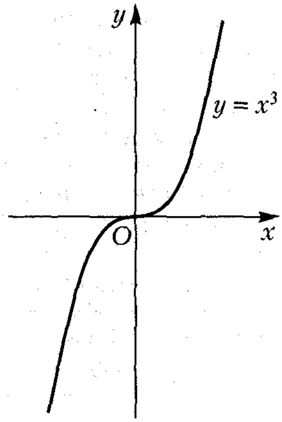


Рис. 4

Замечание. Теорема дает *достаточные условия* возрастания и убывания функции в точке. Так, функция, график которой представлен на рис. 3, возрастает в точке $x = 0$, но в этой точке производная функции не существует. Функция $f(x) = x^3$ (рис. 4) возрастает в точке $x = 0$, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ обращается в нуль.

§2. Экстремум функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму точку x_0.

Определение. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно неравенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \leqslant 0$$

(рис. 5). Если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ верно неравенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \geqslant 0,$$

то точка x_0 называется точкой *локального минимума* функции $f(x)$ (рис. 6).

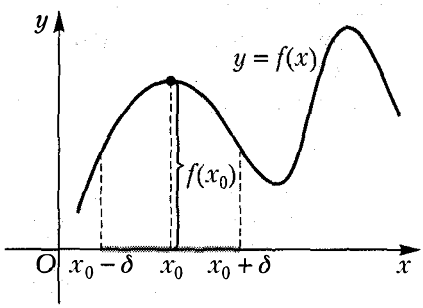


Рис. 5

Значение функции $f(x)$ в точке максимума называется *локальным максимумом*, значение функции в точке минимума — *локальным минимумом* данной функции. Максимум и минимум функции называются ее *локальными экстремумами*.

Эти определения означают, что $f(x_0)$ есть локальный максимум функции $f(x)$, если существует такой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором $f(x_0)$ является наибольшим

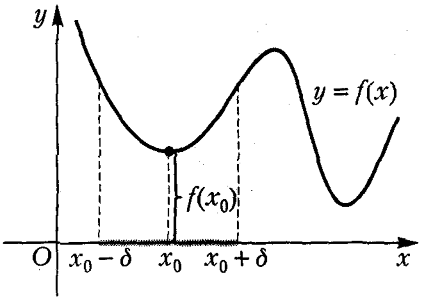


Рис. 6

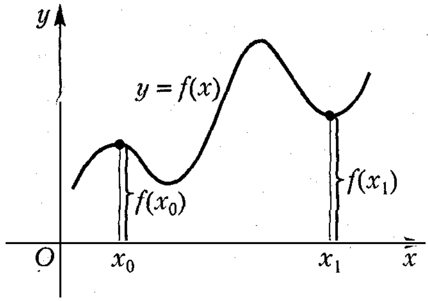


Рис. 7

значением функции $f(x)$, и $f(x_0)$ есть локальный минимум функции $f(x)$, если существует интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором $f(x_0)$ является наименьшим значением функции $f(x)$ на этом интервале.

Термин *локальный* (*относительный*) *экстремум* обусловлен тем, что введенное понятие экстремума связано с окрестностью данной точки в области определения функции, а не со всей этой областью. Так, для функции $y = f(x)$, график которой представлен на рис. 7, точка x_0 есть точка локального максимума, а точка x_1 — локального минимума, но $f(x_0) < f(x_1)$. В дальнейшем слово «локальный» будем для краткости опускать.

Мы будем рассматривать лишь точки строгого максимума и минимума.

Определение. Точка x_0 называется точкой *строгого максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

верно строгое неравенство

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ (соответственно } f(x) - f(x_0) > 0).$$

В приведенном определении локального экстремума мы не предполагаем непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример. Так, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$, но имеет в этой точке максимум. В самом деле, существует $\delta > 0$ (например, $\delta = 1$) такое, что для всех $x \neq 0$ из интервала $(-1, 1)$ верно неравенство (рис. 8)

$$f(x) - f(0) = f(x) - 1 < 0. \blacktriangleright$$

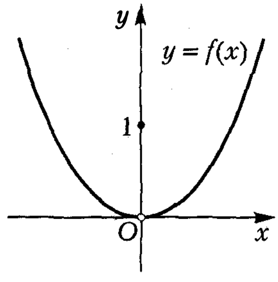


Рис. 8

Задача 1. Исходя из определения максимума и минимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума.

Задача 2. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) = (x-x_0)^n\varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) \neq 0$, n — натуральное число.

2.1. Необходимое условие экстремума

Теорема 4. *Функция $f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, в которых ее производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.*

◀ Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производную и $f'(x_0) \neq 0$. Для определенности пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 будет возрастающей. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для всех x из интервала $(x_0, x_0 + \delta)$ верно неравенство $f(x_0) < f(x)$ (рис. 9). Из этого следует, что не существует окрестности точки x_0, в которой величина $f(x_0)$ была бы наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$, и поэтому точка x_0 не будет ни точкой максимума, ни точкой минимума функции $f(x)$.

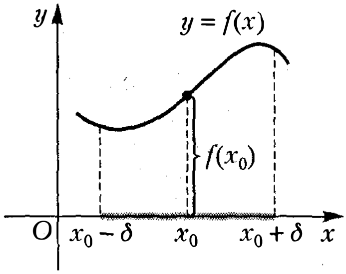


Рис. 9

Аналогичными рассуждениями придем к тому же выводу при $f'(x_0) < 0$.

Итак, если в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 не может быть ни максимума, ни минимума функции $f(x)$. Следовательно, экстремум функции $f(x)$ может быть только в такой точке, в которой производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует. ▶

Геометрическую иллюстрацию теоремы дает рис. 10. Функция $y = f(x)$, график которой представлен на этом рисунке, имеет экстремумы в точках x_1, x_2, x_3, x_4; при этом в точках x_1 и x_4 производная $f'(x)$ не существует, а в точках x_2 и x_3 она равна нулю.

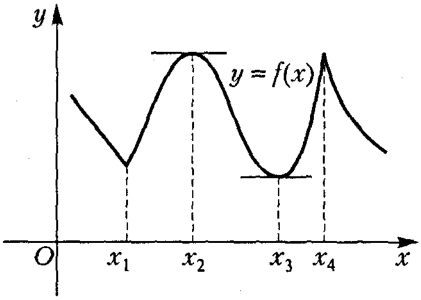


Рис. 10

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для функции $f(x)$, называются *критическими точками* этой функции. Они определяются как корни уравнения

$$f'(x) = 0$$

и как точки, где $f'(x)$ не существует (в частности, где $f'(x)$ — бесконечно большая функция). Корни уравнения $f'(x) = 0$ называют *стационарными точками* функции $f(x)$: скорость изменения $f(x)$ в такой точке равна нулю.

Теорема выражает лишь необходимое условие экстремума, и не в каждой своей критической точке функция $f(x)$ обязательно имеет максимум или минимум.

Пример. Так, например, для функции $f(x) = x^3$ имеем $f'(0) = 0$. Поэтому точка $x = 0$ является критической для данной функции. Но функция $f(x) = x^3$ в точке $x = 0$ экстремума не имеет, т. к. $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ для $x < 0$ и $f(x) > 0$ для $x > 0$, так что в точке $x = 0$ данная функция возрастает. ▶

2.2. Достаточные условия максимума и минимума

Теорема 5. *Пусть $x = x_0$ есть критическая точка для функции $f(x)$, т. е. либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует, но сама функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Пусть существует такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ производная $f'(x) > 0$, а для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$ имеем $f'(x) < 0$, т. е. при переходе x через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

◀ Так как по условию $f'(x) > 0$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, то на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ возрастает; так как $f'(x) < 0$ в интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, то на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, $f(x_0)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 (рис. 11), а это означает, что $f(x_0)$ есть локальный максимум функции $f(x)$. ▶

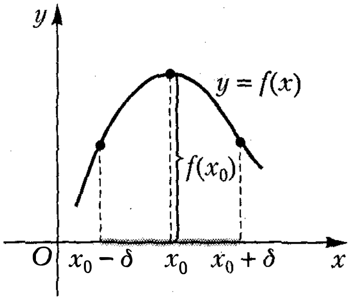


Рис. 11

Аналогично доказывается

Теорема 6. *Пусть $x = x_0$ есть критическая точка для функции $f(x)$, т. е. либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует, но сама $f(x)$ в точке x_0 непрерывна. Пусть существует такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ имеем $f'(x) < 0$, а для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$ $f'(x) > 0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе x через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Тогда точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$.*

Если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 и слева и справа от точки x_0 знак производной $f'(x)$ один и тот же, то в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$. Так, если $f'(x) > 0$ как для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, так и для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то $f(x)$ будет возрастающей как слева, так и справа от точки x_0. Поэтому каким бы малым интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ни был, $f(x_0)$ не будет ни наибольшим, ни наименьшим значением $f(x)$ в этом интервале, т. е. в точке x_0 не будет ни максимума, ни минимума функции $f(x)$.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в самой точке x_0 является существенным. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

(рис. 12). В точке $x = 0$ производная $f'(x)$ не существует. При переходе x через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, но в точке $x = 0$ функция $f(x)$ экстремума не имеет: не существует окрестности точки $x = 0$, в которой $f(0) = 1$ было бы наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$. Здесь нарушено условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = 0$.

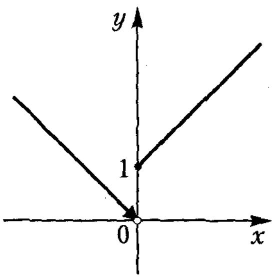


Рис. 12

Правило 1 (отыскания экстремумов функции). Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо:

1) найти производную $f'(x)$, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение $f'(x) = 0$;

2) найти точки, в которых производная $f'(x)$ не существует. Эти точки и корни уравнения $f'(x) = 0$ будут критическими точками для функции $f(x)$.

3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе x через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если при переходе x через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ не меняется, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума.

Примеры.

1. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^2 e^{-x}.$$

◀ 1) Находим производную:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2 - x)x.$$

2) Приравнивая y' нулю, находим критические точки функции $y(x)$: $x = 0$, $x = 2$.

3) Исследуем знак производной слева и справа от каждой из критических точек:

$y' < 0$		$y' > 0$		$y' < 0$	
$-$	0 $+$		$+$ 2	$-$	x

Таким образом, точка $x = 0$ есть точка минимума, точка $x = 2$ — точка максимума данной функции (рис. 13). ▶

2. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^{2/3}.$$

◀ 1) Находим производную:

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

2) Производная нигде не обращается в нуль, но не существует в точке $x = 0$:

$$y'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \infty.$$

3) Исследуем знак y' слева и справа от точки $x = 0$:

$y' < 0$		$y' > 0$	
$-$	0 $+$		x

Таким образом, точка $x = 0$ есть точка минимума данной функции (рис. 14). ▶

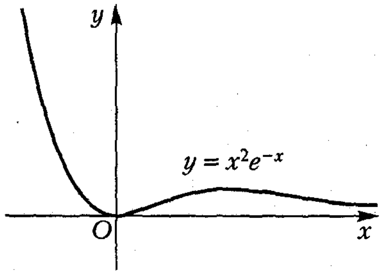


Рис. 13

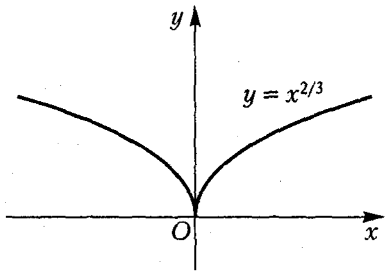


Рис. 14

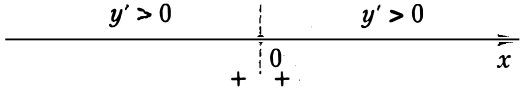
3. Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^3.$$

◀ 1) Находим производную: $y' = 3x^2$.

2) Приравнивая y' нулю, находим критические точки функции $y(x)$: $x = 0$.

3) Исследуем знак производной y' слева и справа от точки $x = 0$:



Производная $y'(x) = 3x^2 > 0$ как слева, так и справа от точки $x = 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ экстремума нет, функция возрастает в точке $x = 0$. ▶

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, например, минимум, то это еще не значит, что справа от точки x_0 функция возрастает, а слева убывает. Это показывает следующий пример. Пусть функция $f(x)$ задана равенством

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(рис. 15). Нетрудно видеть, что в точке $x = 0$ данная функция непрерывна и имеет минимум. Производная функции $f'(x) = 2x\left(2 - \sin\frac{1}{x}\right) + \cos\frac{1}{x}$ в любой окрестности точки $x = 0$, исключая саму точку $x = 0$, непрерывна и меняет знак бесконечно много раз. А сама функция $f(x)$ не монотонна ни слева, ни справа от точки $x = 0$.

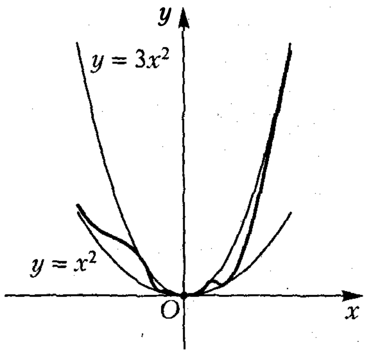


Рис. 15

2.3. Исследование функций на максимум и минимум при помощи второй производной

Следующая теорема опять выражает достаточные условия максимума и минимума функции.

Теорема 7. *Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в точке x_0 данная функция $f(x)$ имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.*

◀ Прежде всего заметим, что точка x_0 является критической точкой для данной функции $f(x)$, т. к. $f'(x_0) = 0$.

Пусть $f''(x_0) < 0$. Из этого следует, что в точке x_0 первая производная $f'(x)$ убывает, т. е. существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ верно неравенство $f'(x) > f'(x_0) = 0$, а для всех x из интервала $(x_0, x_0 + \delta)$ верно $f'(x) < f'(x_0) = 0$. Таким образом, при переходе x через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум.

Подобными же рассуждениями доказывается, что если в критической точке x_0 вторая производная $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум. ▶

Отсюда получаем второе правило отыскания точек экстремума функции.

Правило 2 (отыскания экстремумов функции). Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо найти критические точки $f(x)$. Для этого поступаем так, как указано в правиле 1. Затем ищем вторую производную $f''(x)$. Если она в критической точке x_0 существует и меньше нуля: $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если же $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если в критической точке x_0 вторая производная равна нулю или не существует, то такую точку x_0 можно исследовать с помощью первой производной.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$y = e^{-x^2}.$$

◀ Имеем $y' = -2xe^{-x^2}$, откуда $x = 0$ — критическая точка. Далее находим $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Отсюда

$$y''(0) = -2 < 0,$$

так что точка $x = 0$ — точка максимума функции (рис. 16). ▶

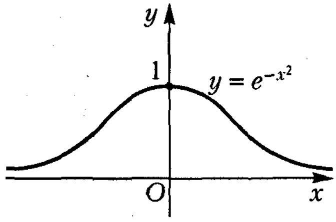


Рис. 16

§ 3. Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке принимает наибольшее и наименьшее значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$, т. е. когда $a < x_0 < b$, то $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, т. к. в этом случае существует окрестность точки x_0 такая, что значения $f(x)$ для всех точек x из этой окрестности будут не больше $f(x_0)$ как в точках слева от точки x_0, так и в точках справа от точки x_0.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a, b]$.

Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции $f(x)$ в интервале (a, b) и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, и выбрать среди них наибольшее число. Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ будет наименьшее число среди всех минимумов функции $f(x)$ в интервале (a, b) и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Для функции, график которой изображен на рис. 17, имеем $M = f(b)$, $m = f(x_0)$.

Пример. Из квадратного листа жести со стороной a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края, составляют прямоугольную открытую коробку. Как получить коробку наибольшей вместимости?

◀ Объем v коробки, как функция x, определяется формулой (см. рис. 18):

$$v(x) = x(a-2x)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}.$$

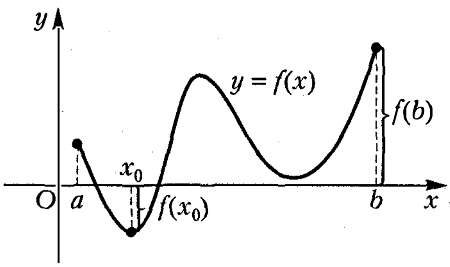


Рис. 17

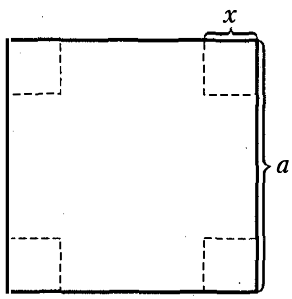


Рис. 18

Имеем

$$\frac{dv}{dx} = (a-2x)^2 - 4x(a-2x) = (a-2x)(a-6x).$$

Отсюда критические точки функции $v(x)$: $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$. В интервале $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ лежит критическая точка $x_1 = \frac{a}{6}$.

Находим вторую производную функцию $v(x)$:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -2(a-6x) - 6(a-2x).$$

При $x = \frac{a}{6}$ имеем $\frac{d^2v}{dx^2} < 0$, так что в точке $x_1 = \frac{a}{6}$ функция $v(x)$ имеет максимум:

$$v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6}\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2a^3}{27}.$$

На концах отрезка $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ имеем $v(0) = v\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.

Таким образом, наибольшее значение функции $v(x)$ — наибольшая вместимость коробки — будет, если выбрать $x = \frac{a}{6}$; при этом вместимость коробки будет равна $\frac{2a^3}{27}$. ▶

§ 4. Направление выпуклости и точки перегиба кривой

Пусть дана кривая уравнением $y = f(x)$ и пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, т. е. в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная к данной кривой, не параллельная оси Oy.

Определение. Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что все точки данной кривой, абсциссы которых содержатся в этой окрестности, расположены над касательной к кривой в точке M_0, то говорят, что *выпуклость* данной кривой в точке M_0 *направлена вниз* (рис. 19).

Если все точки кривой с абсциссами из некоторой окрестности точки x_0 находятся под касательной к этой кривой в точке M_0, то говорят, что *выпуклость* данной кривой в точке M_0 *направлена вверх* (рис. 20).

Определение. Будем говорить, что график функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале (a, b), имеет на этом интервале *выпуклость, направленную вверх* (*вниз*), если график этой функции в пределах интервала (a, b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

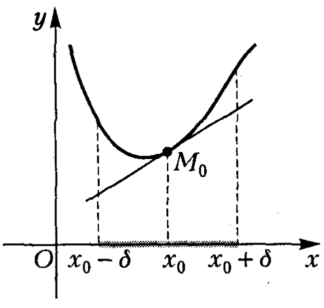


Рис. 19

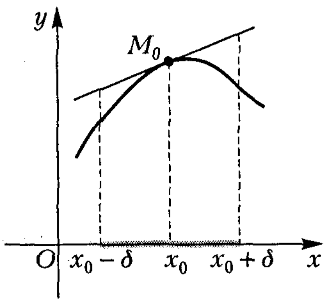


Рис. 20

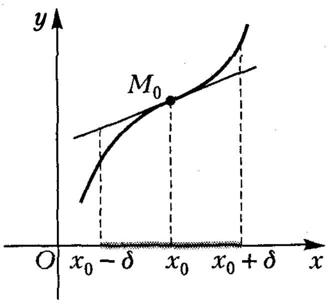


Рис. 21

Определение. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* кривой $y = f(x)$, если существует окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такая, что для $x < x_0$ из этой окрестности выпуклость кривой направлена в одну сторону, а при $x > x_0$ — в противоположную (рис. 21).

Иными словами, точка M_0 — точка перегиба кривой, если в этой точке кривая переходит с одной стороны касательной на другую, меняя направление выпуклости.

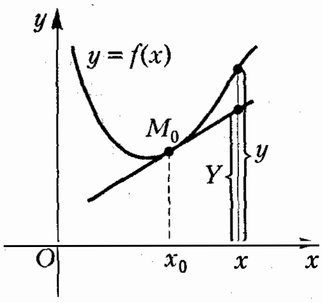


Рис. 22

Укажем аналитический способ для определения направления выпуклости кривой и отыскания точек перегиба. Обозначим через y ординату точки кривой $y = f(x)$, а через Y — ординату точки касательной, проведенной к этой кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, отвечающие одной и той же абсциссе x (рис. 22). Очевидно, что если $y - Y > 0$ для всех $x \neq x_0$ в достаточно малой окрестности точки x_0, то выпуклость кривой в точке M_0 направлена вниз, а если $y - Y < 0$ для указанных значений x, то выпуклость кривой в точке M_0 направлена вверх. Таким образом, вопрос о направлении выпуклости кривой в точке M_0 сводится к вопросу о знаке разности $y - Y$ в окрестности точки x_0.

Учитывая, что уравнение касательной к данной кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ есть

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

имеем

$$y - Y = f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big]. \tag{1}$$

Пусть функция $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет производную второго порядка, непрерывную в точке x_0. Воспользовавшись формулой Тейлора, будем иметь

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''\big[x_0 + \theta\cdot(x - x_0)\big]}{2!}(x - x_0)^2, \quad 0 < \theta < 1. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$y - Y = \frac{f''\big[x_0 + \theta\cdot(x - x_0)\big]}{2}(x - x_0)^2. \tag{3}$$

Если $f''(x_0) \neq 0$, то в силу устойчивости знака непрерывной функции в достаточно малой окрестности точки x_0 знак $f''\big[x_0 + \theta\cdot(x - x_0)\big]$ совпадает со знаком $f''(x_0)$.

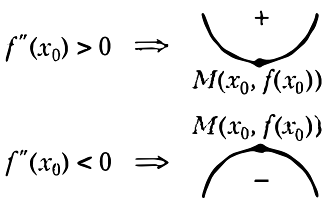


Рис. 23

Таким образом, из равенства (3) следует, что знак разности $y - Y$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. Поэтому, если $f''(x_0) > 0$, то $y - Y > 0$ для всех точек $x \neq x_0$, достаточно близких к точке x_0, и в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ выпуклость кривой $y = f(x)$ направлена вниз, а если $f''(x_0) < 0$, то выпуклость кривой в точке M_0 направлена вверх (рис. 23). Отсюда получаем необходимое условие точки перегиба.

Теорема 8. *Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ может быть точкой перегиба кривой $y = f(x)$ только если $f''(x_0) = 0$ (или $f''(x_0)$ не существует).*

Это условие не является достаточным. Так, например, для функции $f(x) = x^4$ имеем $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$, но точка $O(0, 0)$ не есть точка перегиба кривой $y = x^4$: в этой точке выпуклость кривой направлена вниз (рис. 24).

Достаточный признак точки перегиба выражается следующей теоремой

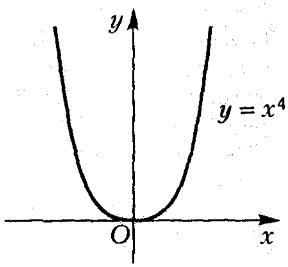


Рис. 24

Теорема 9. *Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, непрерывную в точке x_0. Если $f''(x_0) = 0$ и при переходе x через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.*

◀ Пусть для функции $y = f(x)$ условие $f''(x_0) = 0$ выполнено и пусть существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что в этой окрестности для всех $x < x_0$ знак $f''(x)$ один, а для всех $x > x_0$ знак $f''(x)$ противоположный. Тогда при переходе через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ направление выпуклости кривой меняется. Поэтому точка M_0 будет точкой перегиба данной кривой.

Если же $f''(x_0) = 0$, но в некоторой окрестности точки x_0 знак $f''(x)$ один и тот же как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, то точка M_0 не будет точкой перегиба: в этой точке выпуклость кривой направлена вниз, если $f''(x) > 0$ как слева, так и справа от точки x_0, и выпуклость кривой направлена вверх, если $f''(x) < 0$ как слева, так и справа от точки x_0. ▶

Задача. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную третью производную и удовлетворяет условиям $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Может оказаться, что в точке перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ касательная вертикальна, и поэтому $f''(x)$ в точке x_0 не существует.

Пример. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Имеем $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$. Очевидно, нет ни одной точки, в которой $f''(x) = 0$. Но есть точка $x = 0$, в которой $f''(x)$ не существует.

Исследуем знак $f''(x)$ в окрестности этой точки. Нетрудно видеть, что $f''(x) > 0$ в интервале $(-\delta, 0)$ и $f''(x) < 0$ в интервале $(0, \delta)$, где $\delta > 0$. Таким образом, слева от точки $O(0, 0)$ выпуклость кривой направлена вниз, справа от точки $O(0, 0)$ — вверх. Следовательно, точка $O(0, 0)$ есть точка перегиба кривой $y = x^{\frac{1}{3}}$. Касательная в точке $O(0, 0)$ к этой кривой перпендикулярна оси Ox. ▶

Окончательно достаточный признак точки перегиба может быть сформулирован так.

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную, хотя бы и параллельную оси Oy. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, имеет непрерывную вторую производную. Если $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе x через точку x_0 производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

§ 5. Асимптоты графика функции

Определение. *Асимптотой* кривой с бесконечной ветвью называется такая прямая, что расстояние δ точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по бесконечной ветви от начала координат (рис. 25).

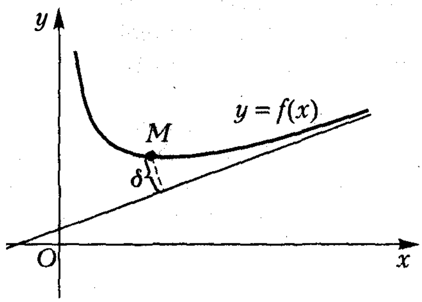


Рис. 25

Вертикальные асимптоты

Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

равно $+\infty$ или $-\infty$. Действительно, при этом расстояние $\delta = |x - x_0|$ от точки $M(x, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ до прямой $x = x_0$ стремится к нулю, а сама точка M неограниченно удаляется от начала координат.

Так, график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$$

(рис. 26).

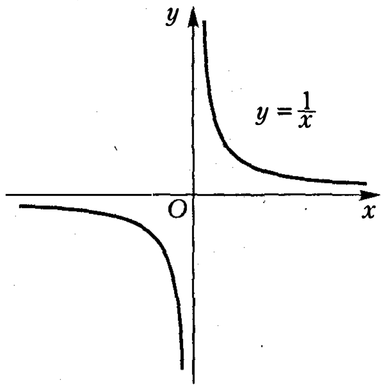


Рис. 26

Кривая $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

На рис. 27 представлены возможные случаи взаимного расположения кривой и вертикальной асимптоты.

Для разыскания вертикальных асимптот кривой $y = f(x)$ поступаем так:

1) находим на оси Ox точки разрыва функции $f(x)$;

2) выделяем те из них, в которых хотя бы один из пределов функции $f(x)$ (слева или справа) равен $+\infty$ или $-\infty$. Пусть это будут точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда

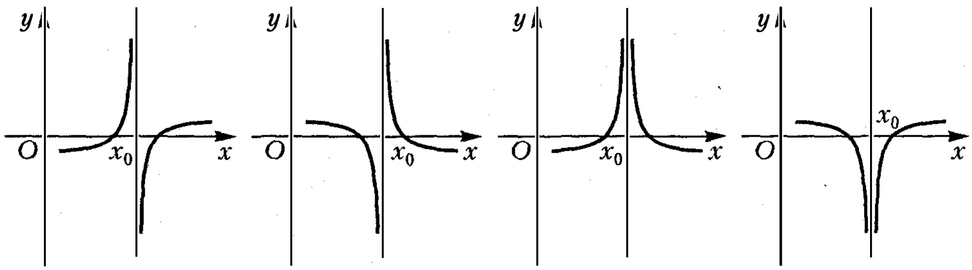


Рис. 27

прямые $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_m$ будут вертикальными асимптотами графика функции $y = f(x)$.

Например, для кривой $y = \frac{1}{x^2-1}$ вертикальными асимптотами будут прямые $x = -1$ и $x = 1$ (рис. 28).

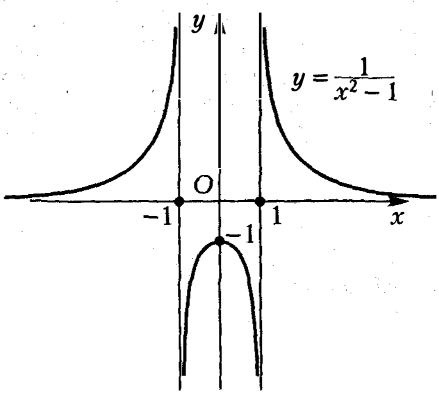


Рис. 28

Вертикальная прямая $x = x_0$ может оказаться асимптотой графика функции $y = f(x)$ и в том случае, когда точка x_0 является концом интервала, в котором определена функция $f(x)$. Это будет тогда, когда x_0 — левый конец интервала и

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad -\infty,$$

либо когда x_0 — правый конец интервала и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad -\infty.$$

Например, функция $y = \ln x$ определена в интервале $0 < x < +\infty$, и для нее

$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty,$$

так что прямая $x = 0$ (ось Oy) *является* вертикальной асимптотой графика функции $y = \ln x$.

Наклонные асимптоты

Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$ (или $x \leqslant a$). И пусть прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$. Такую асимптоту называют *наклонной*.

Для определенности будем рассматривать сколь угодно большие значения аргумента x положительного знака. Тот факт, что прямая $y = kx + b$ является асимптотой кривой $y = f(x)$, означает, согласно определению асимптоты, что расстояние δ от точки $M(x, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$. Обозначим через α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) угол, образованный асимптотой с осью Ox. Из рис. 29 видно, что $\delta = |MN| \cos\alpha$. Поскольку $\cos\alpha \neq 0$, стремление к нулю величины δ при $x \to +\infty$ влечет за собой стремление к нулю величины $|MN|$, и наоборот. Замечая, что $|MN| = |f(x) - kx - b|$, приходим к выводу: прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда

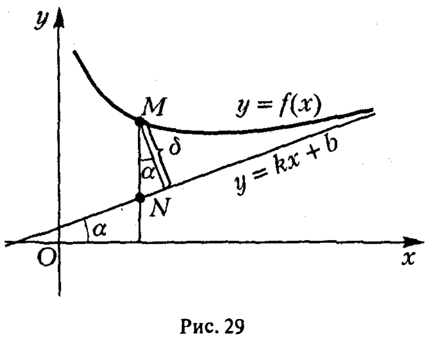


Рис. 29

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx - b\big) = 0,$$

т. е. когда функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{1}$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Существование асимптоты $y = kx + b$ у кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ означает, что при $x \to +\infty$ функция $y = f(x)$ ведет себя «почти как линейная функция», т. е. отличается от линейной функции $y = kx + b$ на бесконечно малую функцию при $x \to +\infty$.

Теорема 10. *Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad и \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{2}$$

◀ **Необходимость.** Пусть график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет асимптоту $y = kx + b$, т. е. для $f(x)$ справедливо представление (1):

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k, \quad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - kx\big] = \lim_{x\to+\infty} \big[b + \alpha(x)\big] = b,$$

т. е. существуют оба предела (2).

Достаточность. Пусть существуют оба предела (2). Существование второго из этих пределов дает право утверждать, что разность $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$. Обозначив эту разность через $\alpha(x)$, получим

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Это означает, что график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. ▶

Аналогично исследуется случай $x \to -\infty$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \frac{x^2}{x-1}$.

◀ Ее график имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. Запишем функцию $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ в виде

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

Величина $\frac{1}{x-1}$ стремится к нулю при $x \to \infty$. Таким образом, функция $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ допускает представление

$$f(x) = x + 1 + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) = \frac{1}{x-1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отсюда следует, что график данной функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$ (рис. 30). ▶

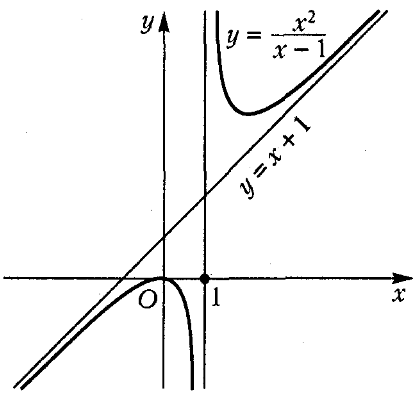


Рис. 30

Полезно исследовать знак разности

$$\Delta = f(x) - kx - b.$$

Если $\Delta > 0$, то кривая расположена над асимптотой; если $\Delta < 0$, то под асимптотой.

Горизонтальная асимптота (частный случай наклонной, $k = 0$)

Если при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный числу b:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad (\text{соответственно} \lim_{x\to-\infty} f(x) = b),$$

то прямая $y = b$ есть *горизонтальная асимптота* соответственно для правой или левой ветви графика функции $y = f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $y = \frac{1}{x}$. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

так что график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, правая ветвь графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$, а левая ветвь — асимптоту $y = -\frac{\pi}{2}$ (рис. 31).

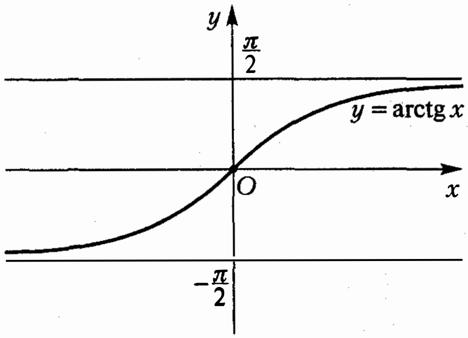


Рис. 31

3. Пусть $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$. Поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{\sin x}{x}$ (рис. 32).

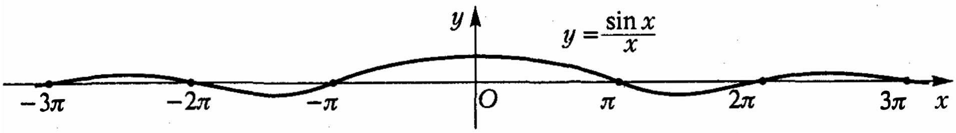


Рис. 32

Последний пример показывает, что кривая $y = f(x)$ может пересекать свою асимптоту, и даже бесконечное множество раз.

Задача. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

§ 6. Схема построения графика функции

Одна из возможных схем исследования функции и построения ее графика разлагается на следующие этапы решения задачи:

---

1. Область определения функции (О.О.Ф.).
2. Точки разрыва функции, их характер. Вертикальные асимптоты.
3. Четность, нечетность, периодичность функции.
4. Точки пересечения графика с осями координат.
5. Поведение функции на бесконечности. Горизонтальные и наклонные асимптоты.

6. Интервалы монотонности функции, точки максимума и минимума.
7. Направления выпуклости кривой. Точки перегиба.
8. График функции.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{(\textit{верзиера} или \textit{локон Марии Аньези})}.$$

◀ 1. О.О.Ф. — вся числовая ось.

2. Точек разрыва нет; вертикальных асимптот нет.

3. Функция четная: $f(-x) = f(x)$, так что график ее симметричен относительно оси Oy; непериодическая. Из четности функции следует, что достаточно построить ее график на полупрямой $x \geqslant 0$, а затем зеркально отразить его в оси Oy.

4. При $x = 0$ имеем $y = 1$; $y \neq 0$, $y > 0$ $\forall x$, так что график функции лежит в верхней полуплоскости $y > 0$.

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, так что график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$; наклонных асимптот нет.

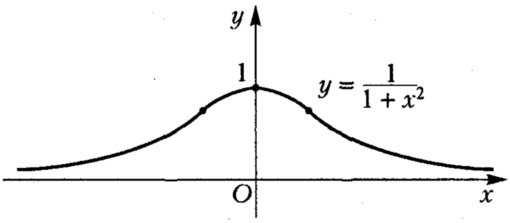


Рис. 33

6. $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Так что функция $f(x)$ возрастает при $x<0$ и убывает, когда $x>0$. Точка $x = 0$ — критическая. При переходе x через точку $x = 0$ производная $y'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 1$. Результат этот достаточно очевиден: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ $\forall x$.

7. $y'' = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$. Вторая производная обращается в нуль в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Исследуем точку $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (далее соображение симметрии). При $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ имеем $y'' > 0$, т. е. кривая выпукла вниз; при $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $y'' < 0$ (кривая выпукла вверх). Следовательно, точка $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точка перегиба графика функции.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−2	−	0	+
$f(x)$	↗	Точка перегиба	↗	max	↘	Точка перегиба	↘

В таблице стрелка «↗» указывает на возрастание функции, стрелка «↘» — на ее убывание. График функции изображен на рис. 33. ▶

Пример 2. Построить график функции

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{(\textit{трезубец Ньютона})}.$$

◀ 1. О.О.Ф. — вся числовая ось, исключая точку $x = 0$.

2. Точка разрыва функции $x = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0+0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

так что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной (*функция общего положения*); непериодическая.

4. Полагая $y = 0$, получаем $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ или $\frac{x^3+1}{x} = 0$, откуда $x = -1$, т. е. график функции пересекает ось Ox в точке $(-1, 0)$.

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \pm\infty$ — наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. $y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — критическая точка. Вторая производная функции $y'' = 2 + \frac{2}{x^3} > 0$ в точке $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, так что $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — точка минимума.

7. Вторая производная $y'' = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$ обращается в нуль в точке $x = -1$ и меняет свой знак с «+» на «−» при переходе через эту точку. Следовательно, точка $(-1, 0)$ — точка перегиба кривой. Для $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (0, +\infty)$ имеем $y'' > 0$, т. е. выпуклость кривой направлена вниз; для $-1 < x < 0$ имеем $y'' < 0$, т. е. выпуклость кривой направлена вверх.

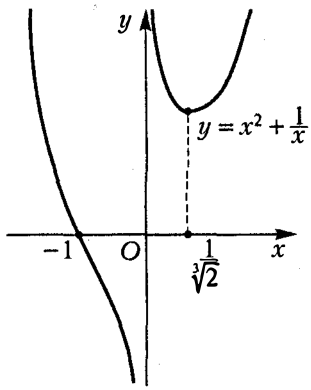


Рис. 34

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	−	−	−	Не существует	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	Не существует	+	+	+
$f(x)$	↘	Точка перегиба $f(-1) = 0$	↘	Не существует. Вертикальная асимптота $x = 0$	↘	$\min f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 1{,}89$	↗

График функции изображен на рис. 34. ▶

Пример 3. Построить график функции

$$y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

◀ 1. О.О.Ф. — полупрямая $x > 0$.

2. В области определения функции точек разрыва нет. При $x \to 0 + 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0+0} \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty,$$

так что прямая $x = 0$, проходящая через граничную точку области определения функции $y(x)$, является вертикальной асимптотой графика функции.

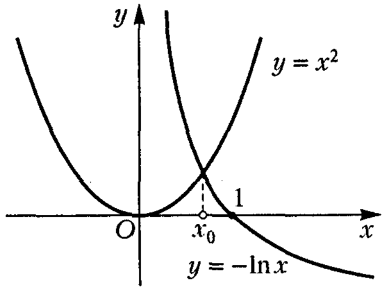


Рис. 35

3. Функция общего положения, непериодическая.

4. Полагая $y = 0$, получаем $x + \frac{\ln x}{x} = 0$, или $x^2 + \ln x = 0$. Приближенное решение этого уравнения можно получить графически (рис. 35).

5.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 = k.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 = b.$$

Отсюда $y = x$ — наклонная асимптота графика.

6.

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

Из рис. 36 видно, что $x^2+1 > \ln x$ $\forall x > 0$ и, значит $y' > 0$ $\forall x$, т. е. функция $f(x)$ возрастает на $(0, +\infty)$. Экстремумов нет.

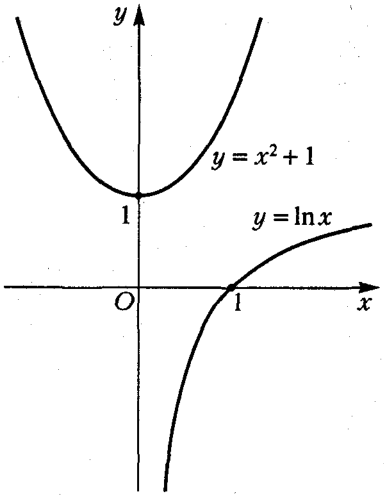


Рис. 36

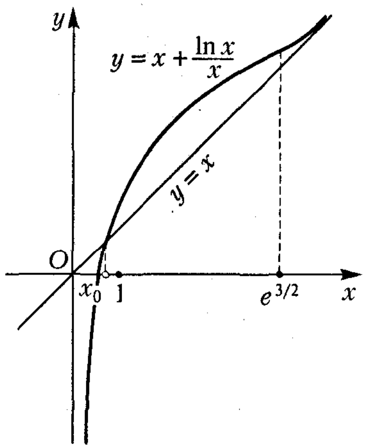


Рис. 37

7.

$$y'' = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Вторая производная обращается в нуль при $x = e^{3/2}$, и при переходе x через эту точку y'' меняет знак с «$-$» на «$+$». Следовательно, $x = e^{3/2}$ — абсцисса точки перегиба кривой.

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Точка перегиба. $f(e^{3/2}) \approx 4{,}82$	$\nearrow$

График функции изображен на рис. 37. ►

Пример 4. Построить график функции

$$y = x + \frac{1}{x^2}.$$

◄ 1. О.О.Ф. — вся числовая ось, исключая точку $x = 0$.

2. Точка $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода функции. Так как $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, то прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции.

3. Функция общего положения, непериодическая.

4. Полагая $y = 0$, имеем $x^3 + 1 = 0$, откуда $x = -1$, так что график функции пересекает ось Ox в точке $(-1, 0)$.

5.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1 = k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = b.$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.

6. $y' = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}$. Из условия $y' = 0$ получаем $x^3 - 2 = 0$, т. е. $x = \sqrt[3]{2}$ — критическая точка. Вторая производная функции $y'' = \frac{6}{x^4} > 0$ всюду в области определения, в частности, в точке $x = \sqrt[3]{2}$. Так что $x = \sqrt[3]{2}$ — точка минимума функции.

7. Поскольку $y'' = \frac{6}{x^4} > 0$ $\forall x$, $x \neq 0$, то всюду в области определения функции выпуклость ее графика направлена вниз.

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	Не существует	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	Не существует	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Не существует. $x = 0$ — вертикальная асимптота	$\searrow$	$\min f(\sqrt[3]{2}) \approx 1{,}89$	$\nearrow$

График функции изображен на рис. 38. ▶

Пример 5. Построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}.$$

◀ 1. О.О.Ф. — вся числовая ось.
2. Непрерывна всюду. Вертикальных асимптот нет.
3. Общего положения, непериодическая.
4. Функция обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 3$.
5.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}{x} = 1 = k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x(x-3)^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(x-3)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} = -2 = b.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x - 2$.

6.

$$y' = \frac{(x-3)^2 + 2x(x-3)}{3\left[x(x-3)^2\right]^{2/3}} = \frac{x-1}{x^{2/3}(x-3)^{1/3}}.$$

Производная $y'(x)$ обращается в нуль в точке $x = 1$ и не существует при $x = 0$ и $x = 3$. При переходе x через точку $x = 0$ $(x < 1)$ производная $y'(x)$ не меняет знак, так что в точке $x = 0$ экстремума нет. При переходе точки x через точку $x = 1$ $(0 < x < 3)$ производная $y'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$». Значит в точке $x = 1$ функция имеет максимум. При переходе x через точку $x = 3$ $(x > 1)$ производная $y'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$», т. е. в точке $x = 3$ функция имеет минимум.

7. Находим вторую производную

$$y'' = -\frac{2}{x^{5/3}(x-3)^{4/3}}.$$

Вторая производная $y''(x)$ не существует в точке $x = 0$ и при переходе x через точку $x = 0$ y'' меняет знак с «$+$» на «$-$», так что точка $(0, 0)$ кривой — точка перегиба с вертикальной касательной. В точке $x = 3$ перегиба графика нет. Всюду в полуплоскости $x > 0$ выпуклость кривой направлена вверх.

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	Не существует	+	0	−	Не существует	+
$f''(x)$	+	Не существует	−	−	−	Не существует	−
$f(x)$	↗	Точка перегиба $(0, 0)$ с вертикальной касательной	↗	$\max f(1) \approx 1{,}59$	↘	$\min f(3) = 0$	↗

График функции представлен на рис. 39. ►

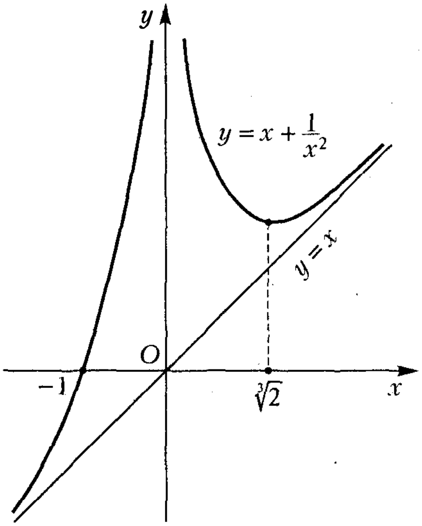


Рис. 38

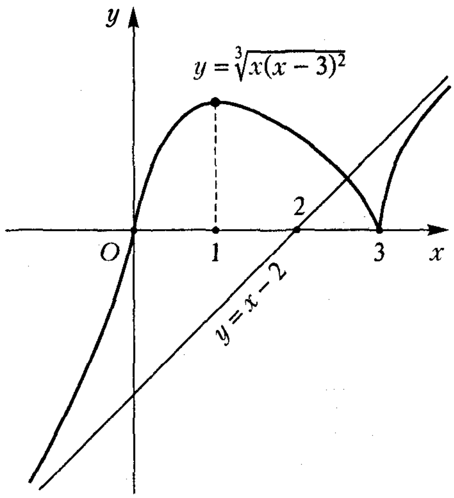


Рис. 39

§ 7. Исследование функций на экстремум с помощью производных высшего порядка

Для отыскания точек максимума и минимума функций может быть использована формула Тейлора.

Теорема 11. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную n-го порядка, непрерывную в точке x_0. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если число n — нечетное, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума; когда же n — четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

◄ В силу определения точек максимума и минимума вопрос о том, имеет ли функция $f(x)$ в точке x_0 экстремум, сводится к тому, существует ли такое $\delta > 0$, что в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак. По формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}x_0}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n \quad (0<\theta<1). \qquad (1)$$

Так как по условию $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, то из (1) получаем

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (2)$$

По условию $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Поэтому в силу устойчивости знака непрерывной функции существует такое $\delta>0$, что в интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ знак $f^{(n)}(x)$ не меняется и совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) n — четное число и $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда

$$\frac{f^{(n)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n \geqslant 0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

и потому в силу (2)

$$f(x)-f(x_0)\geqslant 0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Согласно определению это означает, что точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$.

2) n — четное и $f^{(n)}(x_0)<0$. Тогда будем иметь

$$\frac{f^{(n)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n \leqslant 0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

а вместе с этим и $f(x)-f(x_0)\leqslant 0 \; \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Поэтому точка x_0 будет в этом случае точкой максимума функции $f(x)$.

3) n — нечетное число, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда при $x>x_0$ знак

$$\frac{f^{(n)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n$$

будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $x<x_0$ будет противоположным. Поэтому при сколь угодно малом $\delta>0$ знак разности $f(x)-f(x_0)$ не будет одним и тем же для всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Следовательно, в этом случае функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет. ▶

Пример. Рассмотрим функции 1) $y=x^4$; 2) $y=x^3$.

◀ Легко видеть, что точка $x=0$ является критической точкой обеих функций. Для функции $y=x^4$ первая из отличных от нуля производных в точке $x=0$ есть производная 4-го порядка: $f^{(4)}(0)=24>0$. Таким образом, здесь $n=4$ — четное и $f^{(4)}(0)>0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция $y=x^4$ имеет минимум.

Для функции $y=x^3$ первая из отличных от нуля в точке $x=0$ производных есть производная 3-го порядка. Так что в этом случае $n=3$ — нечетное, и в точке $x=0$ функция $y=x^3$ экстремума не имеет. ▶

Замечание. С помощью формулы Тейлора можно доказать следующую теорему, выражающую достаточные условия точки перегиба.

Теорема 12. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную n-го порядка, непрерывную в точке x_0. Пусть $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,* *но* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда, если* n *— нечетное число, то точка* $M_0(x_0, f(x_0))$ *есть точка перегиба графика функции* $y = f(x)$.

Простейший пример доставляет функция $f(x) = x^3$.

§ 8. Вычисление корней уравнений методами хорд и касательных

Задача состоит в нахождении действительного корня уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) числа $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку: $f(a) \cdot f(b) < 0$;
3) на отрезке $[a, b]$ существуют производные $f'(x)$ и $f''(x)$, сохраняющие на этом отрезке постоянный знак.

Из условий 1) и 2) в силу теоремы Больцано—Коши (с. 220) следует, что функция $f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in (a, b)$, т. е. уравнение (1) имеет по крайней мере один действительный корень ξ в интервале (a, b).

Так как в силу условия 3) производная $f'(x)$ на $[a, b]$ сохраняет постоянный знак, то $f(x)$ монотонна на $[a, b]$ и поэтому в интервале (a, b) уравнение (1) имеет только один действительный корень ξ.

Рассмотрим метод вычисления приближенного значения этого единственного действительного корня $\xi \in (a, b)$ уравнения (1) с любой степенью точности. Возможны четыре случая (рис. 40):

1) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$,
2) $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$,
3) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$,
4) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$

на отрезке $[a, b]$.

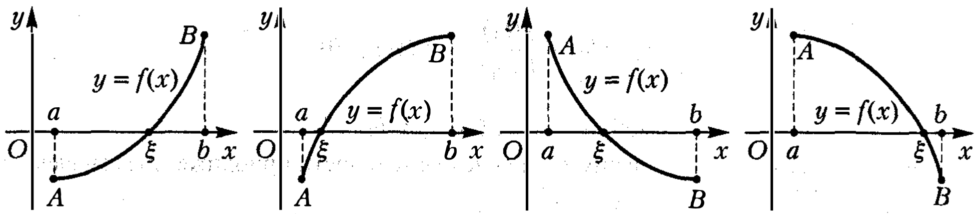


Рис. 40

Возьмем для определенности случай, когда $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 41). Соединим точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ хордой AB. Это отрезок прямой, проходящей через точки A и B, уравнение которой

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \tag{2}$$

Точка a_1, в которой хорда AB пересекает ось Ox, расположена между a и ξ и является лучшим приближением к ξ, чем a. Полагая в (2) $y = 0$, найдем

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}.$$

Из рис. 41 нетрудно заметить, что точка a_1 будет всегда расположена с той стороны от ξ, в которой знаки $f(x)$ и $f''(x)$ противоположны.

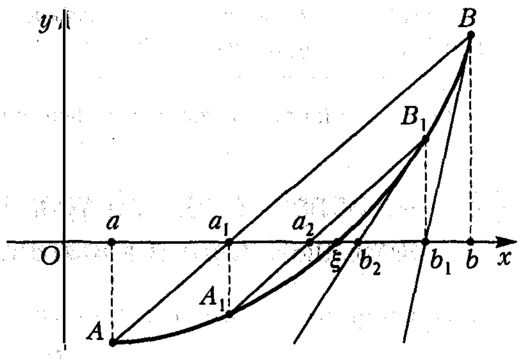


Рис. 41

Проведем теперь касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B(b, f(b))$, т. е. в том конце дуги $\smile AB$, в котором $f(x)$ и $f''(x)$ имеют один и тот же знак. Это существенное условие: без его соблюдения точка пересечения касательной с осью Ox может вовсе не давать приближение к искомому корню. Точка b_1, в которой касательная пересекает ось Ox, расположена между ξ и b с той же стороны, что и b, и является лучшим приближением к ξ, чем b. Касательная эта определяется уравнением

$$y - f(b) = f'(b)(x - b). \tag{3}$$

Полагая в (3) $y = 0$, найдем b_1:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (f'(b) \neq 0).$$

Таким образом, имеем

$$a < a_1 < \xi < b_1 < b.$$

Пусть абсолютная погрешность приближения ξ^* корня ξ задана заранее. За абсолютную погрешность приближенных значений a_1 и b_1 корня ξ можно взять величину $|b_1 - a_1|$. Если эта погрешность больше допустимой, то, принимая отрезок $[a_1, b_1]$ за исходный, найдем следующие приближения корня ξ:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

и

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} \quad (f'(b_1) \neq 0),$$

где

$$a < a_1 < a_2 < \xi < b_2 < b_1 < b.$$

Продолжая этот процесс, получим две последовательности приближенных значений

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < \xi$$

и

$$b > b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots > \xi,$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} & a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})(b_{n-1} - a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots ; \\ & a_0 = a, \end{aligned}} \tag{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots; \\ &b_0 = b. \end{aligned}} \tag{5}$$

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонные и ограниченные и, значит, имеют пределы. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Можно показать, что если выполнены сформулированные выше условия 1)–3), то $\alpha = \beta = \xi$ — единственному корню уравнения $f(x) = 0$.

Пример. Найти корень ξ уравнения $x^2 - 1 = 0$ на отрезке $[0, 2]$.

◀ Результат очевиден: $\xi = 1$. Попытаемся его получить методом хорд. Функция $f(x) = x^2 - 1$

1) непрерывна на отрезке $[0, 2]$;
2) $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$, так что $f(0) \cdot f(2) < 0$;
3) $f'(x) = 2x$ и $f''(x) = 2$ сохраняют знак на отрезке $[0, 2]$.

Таким образом, выполнены все условия, обеспечивающие существование единственного корня ξ уравнения $x^2 - 1 = 0$ на отрезке $[0, 2]$, и метод должен сработать. В нашем случае $a = 0$, $b = 2$. При $n = 1$ из (4) и (5) находим

$$a_1 = 0 - \frac{(-1)\cdot 2}{4} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad b_1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

При $n = 2$ получаем

$$a_2 = 1 - \frac{1}{14}, \quad b_2 = 1 + \frac{1}{40},$$

что дает приближение к точному значению корня ξ с абсолютной погрешностью $\Delta(\xi^*) < 0,1$. ▶

Упражнения

Постройте графики функций:

1. $y = x - x^3$. **2.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. **3.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. **4.** $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$.
5. $y = xe^{-x}$. **6.** $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$. **7.** $y = 2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1$. **8.** $y = \dfrac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.
9. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$. **10.** $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$. **11.** $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках:

12. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ на $[1, 4]$. **13.** $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ на $[-2, 4]$. **14.** $y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на $[-1, 2]$.

Исследуйте поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков:

15. $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$, $x_0 = 1$. **16.** $y = \cos x + \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$.
17. $y = x^2 + 2\ln(x+2)$, $x_0 = -1$. **18.** $y = x^2 - 2e^{x-1}$, $x_0 = 1$.

Ответы

1. Рис. 42. **2.** Рис. 43. **3.** Рис. 44. **4.** Рис. 45. **5.** Рис. 46. **6.** Рис. 47. **7.** Рис. 48. **8.** Рис. 49. **9.** Рис. 50. **10.** Рис. 51. **11.** Рис. 52. **12.** $M = 1$, $m = -1$. **13.** $M = 0$, $m = -4$. **14.** $M = 5$, $m = 0$. **15.** Рис. 53. **16.** Рис. 54. **17.** Рис. 55. **18.** Рис. 56.

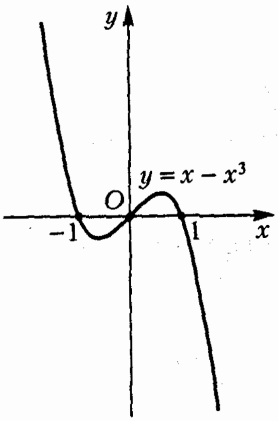


Рис. 42

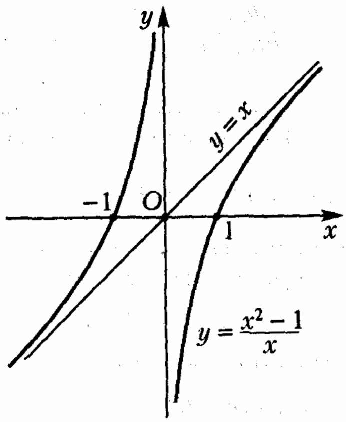


Рис. 43

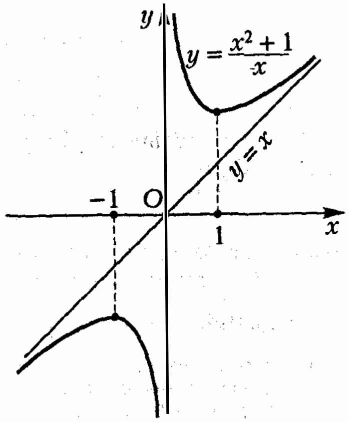


Рис. 44

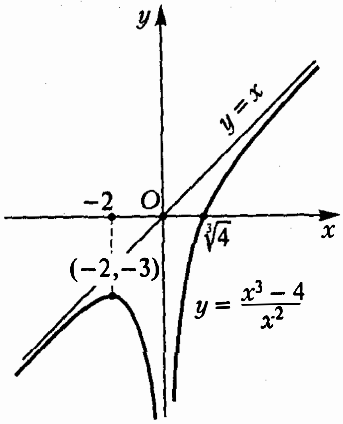


Рис. 45

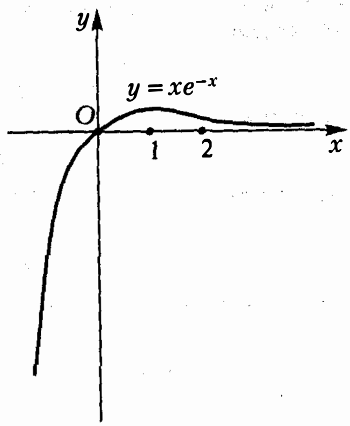


Рис. 46

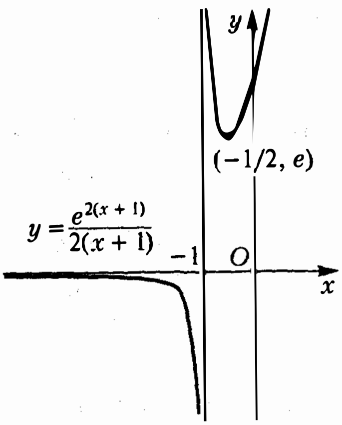


Рис. 47

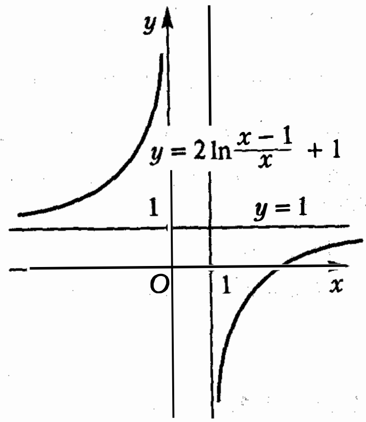


Рис. 48

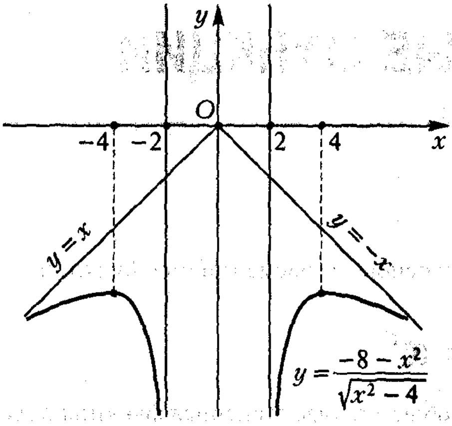


Рис. 49

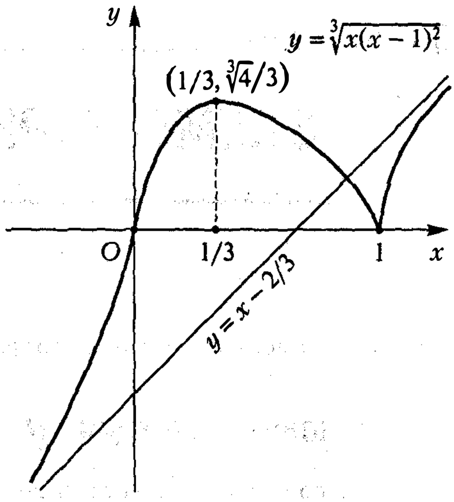


Рис. 50

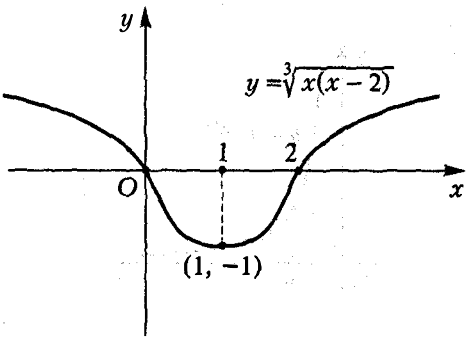


Рис. 51

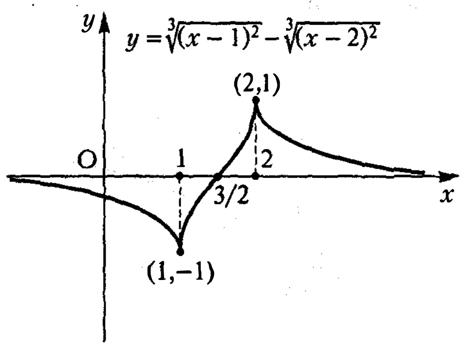


Рис. 52

Рис. 53

Рис. 54

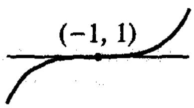


Рис. 55

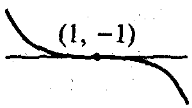


Рис. 56

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим области определения и графики основных элементарных функций.

§ 1. Степенная функция $y = x^\alpha$

Здесь α — любое действительное число. В общем случае степенная функция определена при $x > 0$; она монотонно возрастает, если $\alpha > 0$, и монотонно убывает, если $\alpha < 0$ (рис. 1 и 2).

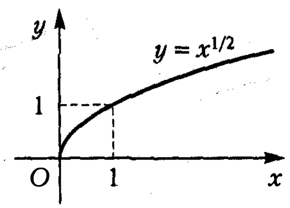


Рис. 1

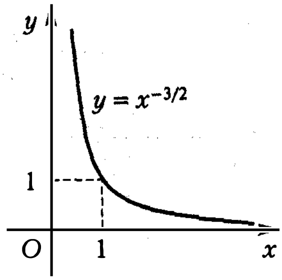


Рис. 2

Частные случаи

1. Если α — целое положительное число, то функция $y = x^\alpha$ определена на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$. Графики степенной функции при $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$ изображены на рис. 3 и 4.

2. Если α — целое отрицательное число, то функция x^α определена при всех значениях x, кроме $x = 0$ (рис. 5 и 6).

3. Если $\alpha = \frac{p}{q} > 0$ — рациональное число, где q — нечетное, то функция x^α определена на всей вещественной оси, а при четном q функция x^α определена для $x \geqslant 0$.

§ 2. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Область определения — вся числовая прямая $\mathbb{R}$. Число a называется *основанием* степени. При $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ монотонно убывает (рис. 7).

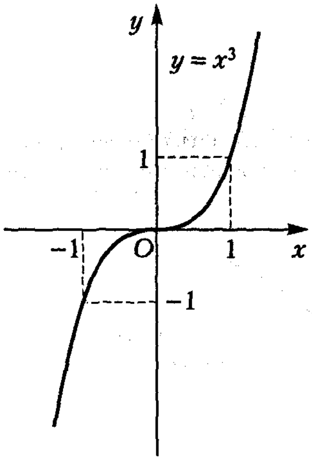


Рис. 3

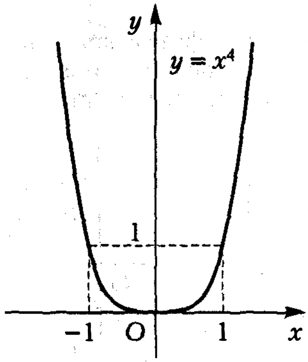


Рис. 4

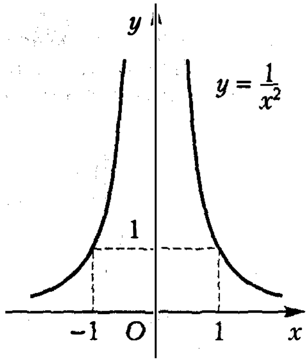


Рис. 5

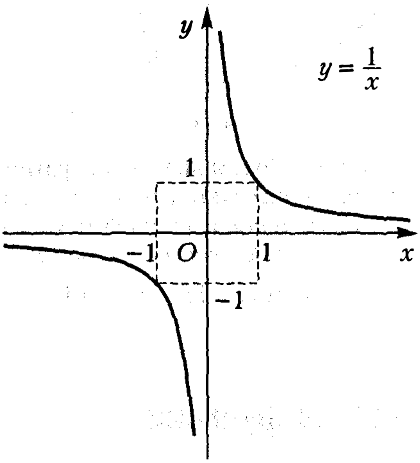


Рис. 6

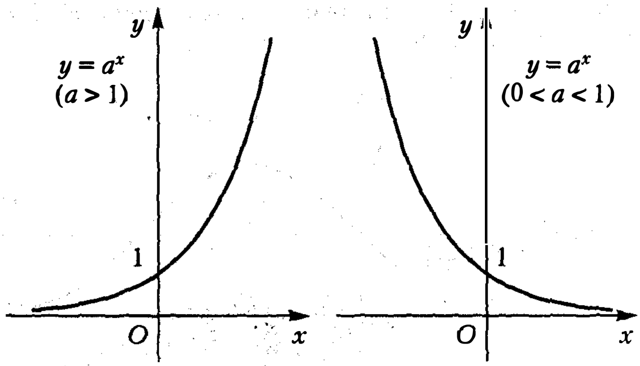


Рис. 7

§ 3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Число a называется *основанием* логарифмической функции. Область определения — бесконечный промежуток $(0, +\infty)$. При $a > 1$ логарифмическая функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ монотонно убывает (рис. 8).

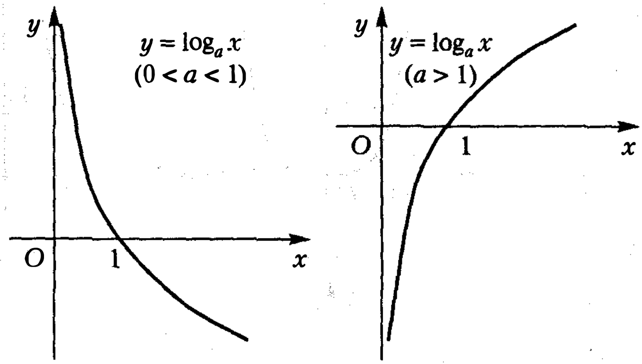


Рис. 8

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной функцией для показательной функции $y = a^x$. Логарифмическую функцию с основанием $a = e$ обозначают $\ln x$ и называют *натуральным логарифмом*, а логарифмическую функцию с основанием $a = 10$ обозначают $\lg x$ и называют *десятичным логарифмом*, т. е.

$$\log_e x = \ln x, \qquad \log_{10} x = \lg x.$$

§ 4. Тригонометрические функции

1. Функция синус $y = \sin x$

Функция определена для всех x, она периодическая с периодом $T = 2\pi$. График синуса называют *синусоидой* (рис. 9).

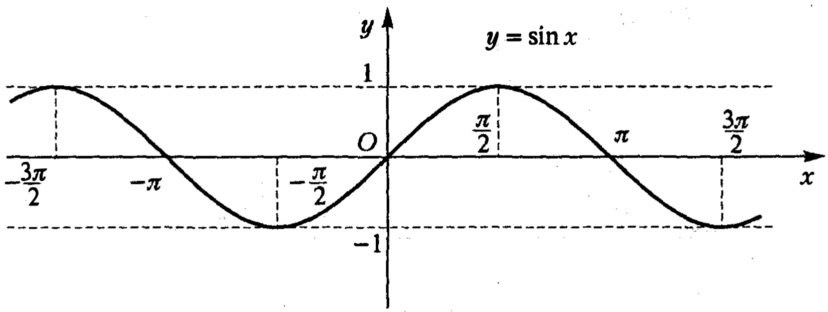


Рис. 9

2. Функция косинус $y = \cos x$

Функция определена для всех x, ее период $T = 2\pi$, график изображен на рис. 10. График функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ смещением его вдоль оси Ox влево на отрезок $\frac{\pi}{2}$.

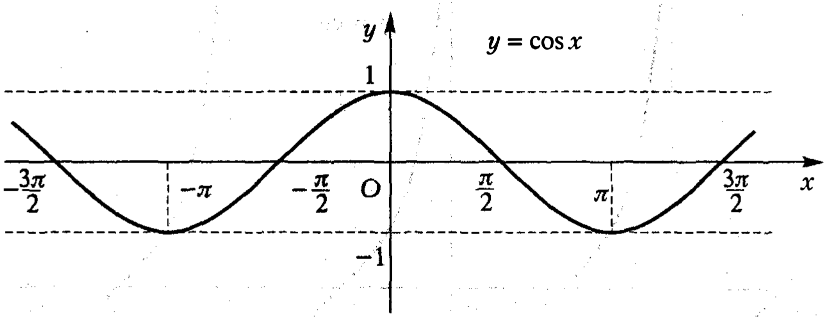


Рис. 10

3. Функция тангенс $y = \operatorname{tg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Она периодическая с периодом $T = \pi$. Ее график изображен на рис. 11.

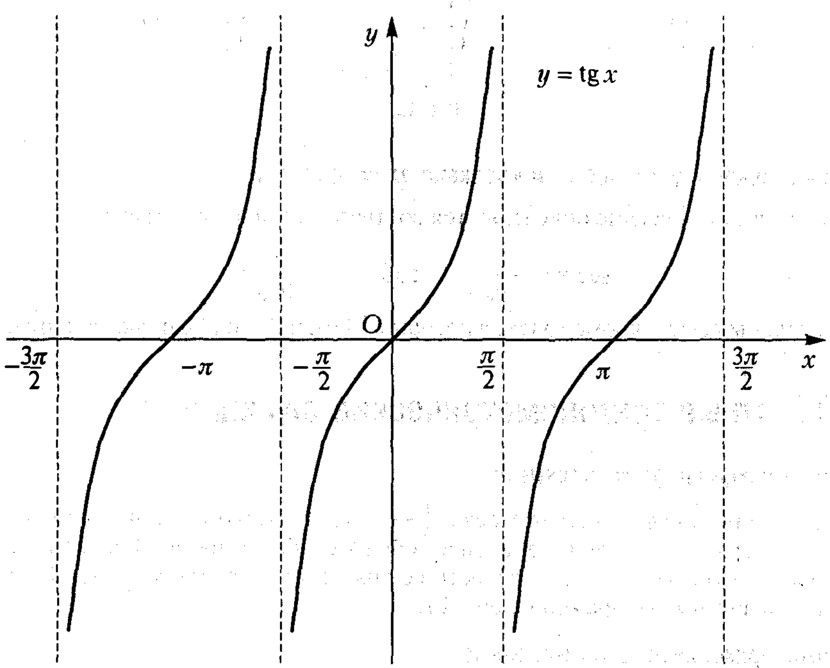


Рис. 11

4. Функция котангенс $y = \operatorname{ctg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Функция периодическая, $T = \pi$ (рис. 12).

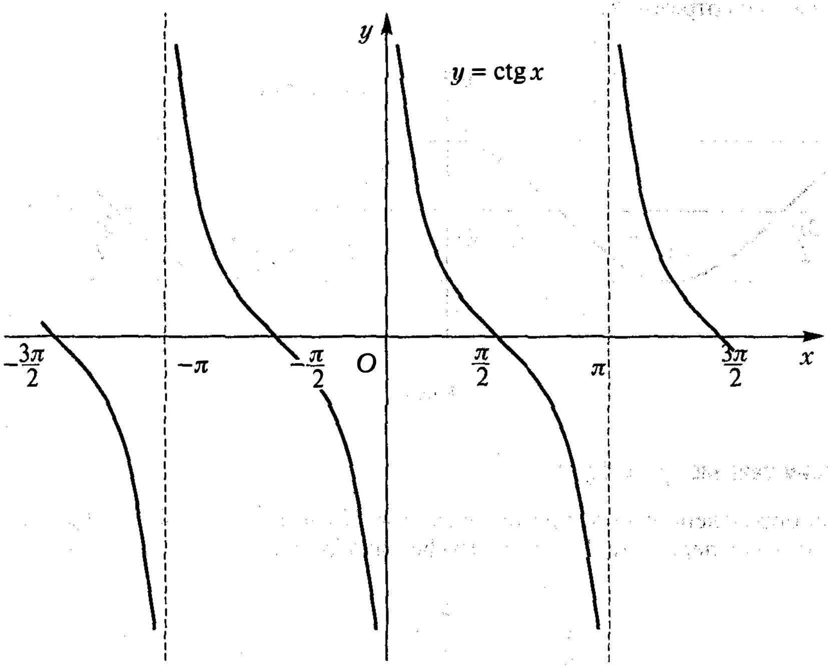


Рис. 12

5. Функции секанс $y = \sec x$ и косеканс $y = \operatorname{cosec} x$

Функции секанс и косеканс определяются соответственно равенствами

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x};$$

они определены всюду, кроме точек, в которых знаменатели обращаются в нуль.

§ 5. Обратные тригонометрические функции

1. Функция арксинус $y = \arcsin x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Значит, она имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, которая определена на отрезке $[-1, 1]$, а область ее значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 13.

2. Функция арккосинус $y = \arccos x$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$. На отрезке $[0, \pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает, так что она имеет обратную функцию $x = \arccos y$, которая

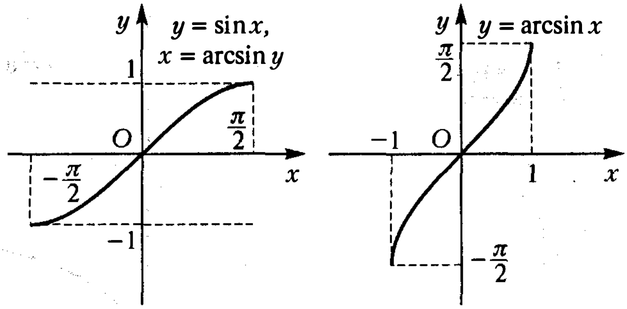


Рис. 13

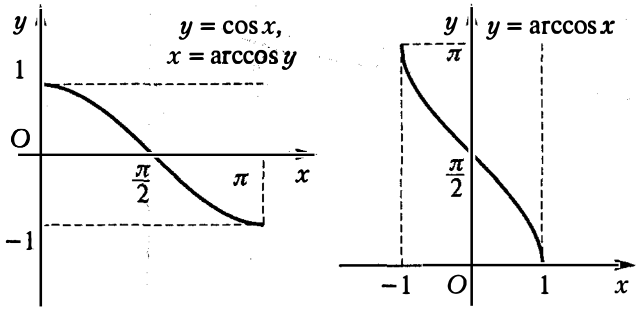


Рис. 14

определена на отрезке $[-1, 1]$, а ее значения заполняют отрезок $[0, \pi]$. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 14.

3. Функция арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этих значениях x функция $\operatorname{tg} x$ монотонно возрастающая и ее значения заполняют интервал $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную, которая обозначается $x = \operatorname{arctg} y$. Она определена на всей числовой оси, а ее значения заполняют интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ см. на рис. 15.

4. Функция арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$. При этих значениях x функция $\operatorname{ctg} x$ убывает, а ее значения заполняют интервал $(-\infty, +\infty)$. Поэтому она имеет обратную, которая обозначается так: $x = \operatorname{arcctg} y$. Эта функция определена на всей числовой оси, а ее значения заполняют интервал $(0, \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 16.

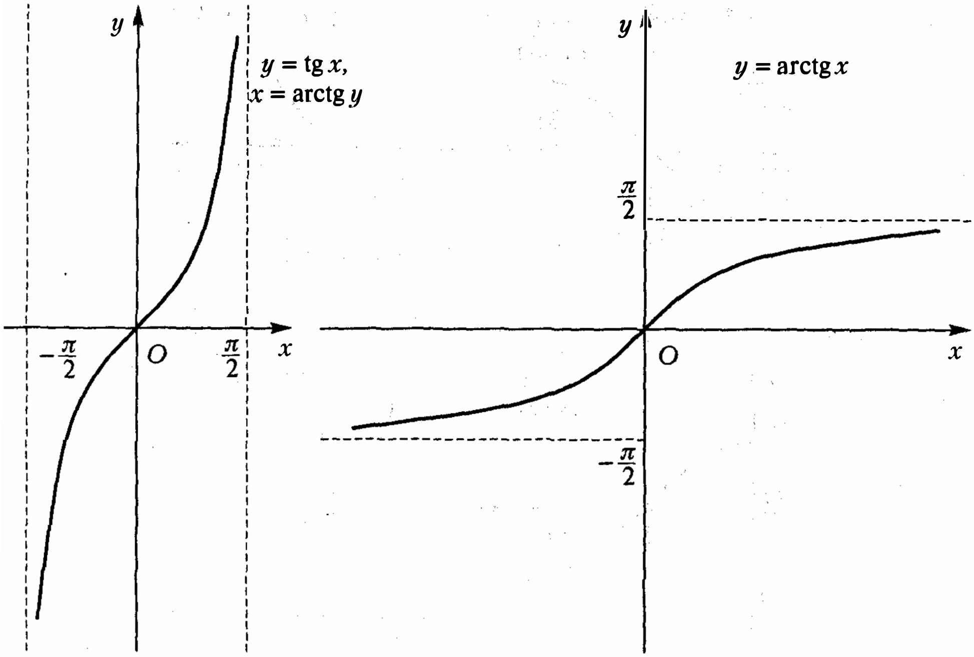

y
y = tg x,
x = arctg y
−π/2
O
π/2
x
y
y = arctg x
π/2
O
x
−π/2

Рис. 15

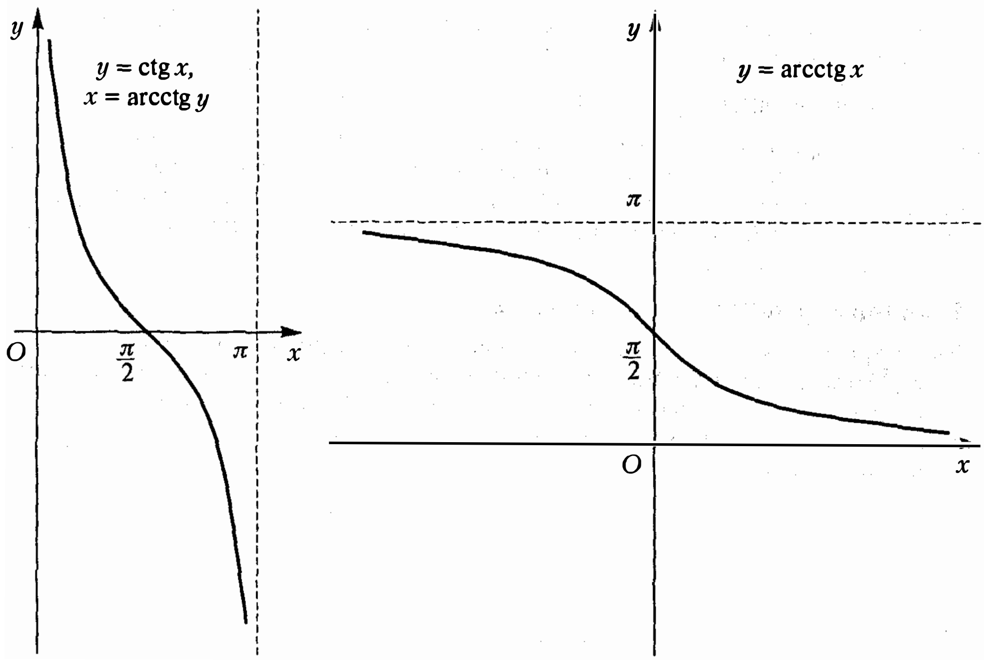

y
y = ctg x,
x = arcctg y
O
π/2
π
x
y
y = arcctg x
π
π/2
O
x

Рис. 16

§ 6. Гиперболические функции

1. Гиперболический синус $\mathbf{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (1)

Область определения: $(-\infty, +\infty)$.
Область значений: $(-\infty, +\infty)$.
Функция $\operatorname{sh} x$ нечетная, т. к. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$.
График функции $y = \operatorname{sh} x$ представлен на рис. 17.

2. Гиперболический косинус $\mathbf{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (2)

Область определения: $(-\infty, +\infty)$.
Область значений: $[1, +\infty)$.
Функция $\operatorname{ch} x$ четная, свое минимальное значение принимает при $x = 0$.
График функции $y = \operatorname{ch} x$ представлен на рис. 18.

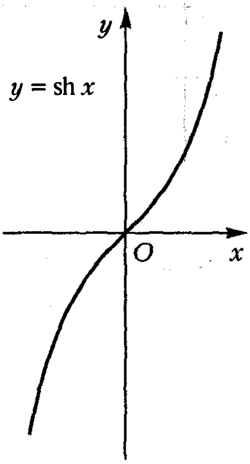


Рис. 17

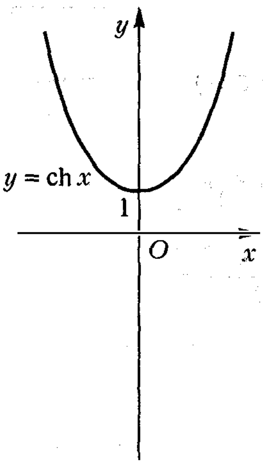


Рис. 18

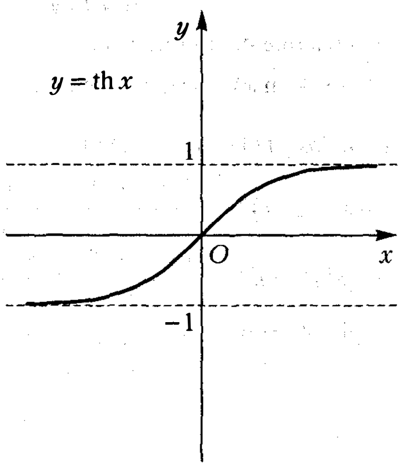


Рис. 19

3. Гиперболический тангенс $\mathbf{th}\, x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (3)

Область определения: $(-\infty, +\infty)$.
Область значений: $(-1, 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$.
Функция $y = \operatorname{th} x$ нечетная, ее график изображен на рис. 19.

4. Гиперболический котангенс $\mathbf{cth}\, x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (4)

Область определения: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Область значений: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, т. е. $|\operatorname{cth} x| > 1$.
Функция $y = \operatorname{cth} x$ нечетная, ее график представлен рис. 20.

5. Соотношения между гиперболическими функциями

Гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \text{ т.е. } \operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}, \quad \operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1};$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \text{ в частности } \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \text{ в частности } \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \text{ в частности } \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

Все эти формулы вытекают из формул (1)–(4). Пользуясь нечетностью функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{th} x$, из формул (6)–(8) получаем

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

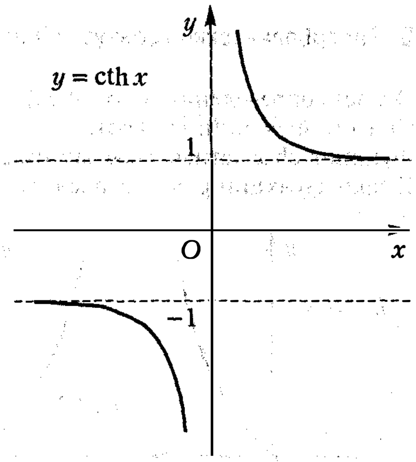


Рис. 20

В заключение покажем, что

$$(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx \quad (n \in N).$$

◄ Из формул (1) и (2) следует

$$(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n =$$

$$= (e^x)^n = e^{nx} = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} =$$

$$= \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx. \ ►$$

Предметный указатель

М

Н

О

П

Р

С

Ф

Ц

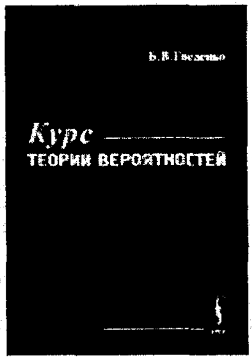
Ч

Э

Я

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:



Гнеденко Б. В.

Курс теории вероятностей.

Дается систематическое изложение основ теории вероятностей, проиллюстрированное большим числом подробно рассмотренных примеров, в том числе и прикладного содержания. Серьезное внимание уделено рассмотрению вопросов методологического характера. Новые теоретические результаты открывают новые возможности для естественнонаучного использования метода теории вероятностей. Всестороннее изучение явлений природы толкает теорию вероятностей на разыскание новых закономерностей, порождаемых случаем. Теория вероятностей не отмежевывается от запросов других наук, а идет в ногу с общим развитием естествознания. Следует подчеркнуть, что за последние три десятилетия теория вероятностей превратилась в стройную математическую дисциплину с собственными проблемами и методами доказательств.

Теория вероятностей, подобно другим разделам математики, развилась из потребностей практики: в абстрактной форме она отражает закономерности, присущие случайным событиям массового характера. Эти закономерности играют исключительно важную роль в физике и в других областях естествознания, военном деле, разнообразнейших технических дисциплинах, экономике и т. д.

Для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов.

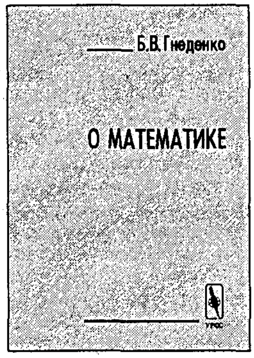
Гнеденко Б. В.

О математике.

В настоящее издание включены две небольшие книги, написанные классиком теории вероятностей Борисом Владимировичем Гнеденко (1912–1995) в последние годы его жизни.

Первая книга предназначена в первую очередь старшеклассникам. В ней на основании своего богатого педагогического, научного и человеческого опыта Борис Владимирович объясняет, что такое математика, в чем ее познавательная сила, говорит о математическом творчестве и математических способностях.

Во второй книге рассматриваются педагогические и методологические вопросы математики, говорится о профессии преподавателя, о высоких требованиях к нему.



Гамов Г., Стерн М.

Логические задачи.

Данная книга представляет собой сборник интересных математических и физических задач-головоломок из различных областей науки. Каждая задача изложена в форме короткой истории.

Все задачи представлены в такой беллетризованной форме, что их с удовольствием могут (и, несомненно, будут) читать даже те, кто не любит математику. Никакой назидательности — полная благожелательность по отношению к читателю, юмор и блеск изложения отличают всю книгу от первой до последней страницы.

Сборник интересен не только школьникам старших классов, но и студентам младших курсов самых различных специальностей.