О нас | Архив новостей | Библиотека | Партнеры | Форум

Непрерывное дополнительное образование

МЕНЮ РАЗДЕЛА

Сотрудники проекта

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ Методы решения математических задач. 5 класс

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ "Приключения в математической стране". Для дошкольников

Главная / Непрерывное дополнительное образование / УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ Методы решения математических задач. 5 класс

В рамках проекта "Непрерывное дополнительное образование", реализуемого Фондом "Вольное Дело", вышло в свет первое учебное пособие "Методы решения математических задач. 5 класс"

Учебное пособие предназначено для организации дополнительных занятий по математике для учеников 5 класса, а также будет полезно для учащихся 6 классов и всех тех, кто хочет самостоятельно восполнить пробелы в решении текстовых задач по математике.

Учебное пособие может использоваться как для организации индивидуальных занятий, так и для организации работы математического кружка.

Дополнительные занятия по теме «Методы решения задач» будут полезны ученикам, которым не только интересно решать отдельно взятые задачи, но и важно научиться выделять типы задач, а также методы решения задач, относящихся к одному типу.

Отличительная особенность учебного пособия заключается в том, что в нем представлен подробный анализ следующих методов решения математических задач:

- арифметический метод;
- метод перебора;
- метод исключений невозможных наборов значений неизвестных;
- метод подбора;
- метод «от противного»;
- метод возвращения к меньшему значению.

Содержание книги распределено в 21 занятие. Тематика занятий определяется их целевой направленностью: подготовка к изучению метода решения задач; изучение метода решения задач; изучение способа выбора метода решения задач; тренировка навыков решения задач изученными методами.

Применение перечисленных методов к решению математических задач демонстрируется на примерах, которые предлагались в различных учебных пособиях для дополнительных занятий, на математических кружках для пятиклассников, математических праздниках и олимпиадах. В учебное пособие включены также задачи, составленные автором.

СКАЧАТЬ КНИГУ

НОВОСТИ

» Архив новостей

ВХОД ДЛЯ УЧАСТНИКОВ

Имя:

Пароль:

Регистрация » Войти

Распечатать страницу В начало страницы

Россия, 125047, Москва, ул. 3-я Тверская-Ямская, д.58, стр. 5, подъезд 4 | Тел.: +7 495 728 4954 (вн. 2220), факс. (2217)

Кудряшова Т. Г.

Методы решения математических задач
5 класс

Учебное пособие рекомендовано к изданию научно-методическим советом
Инновационного центра информационных технологий и форм
образования ФГУ ФИРО

Москва, 2008

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
К-88

Кудряшова Т. Г.

К-88 Методы решения математических задач. 5 класс / Кудряшова Т. Г. — М.: Вольное Дело, 2008. — 208 с.: ил.

ISBN 978-5-90415-801-9

Рецензенты: доктор психологических наук, профессор кафедры акмеологии РАГС Олег Сергеевич Анисимов, кандидат педагогических наук Ольга Викторовна Муравина.

Данное учебное пособие предназначено для пятиклассников, которым не только интересно решать задачи, но и важно научиться выделять типы задач, а также методы решения задач каждого типа. Учителям математики эта книга поможет организовать работу математического кружка для учащихся 5 классов. С методическими особенностями организации учебного процесса в таком кружке педагоги смогут познакомиться на курсах, которые автор учебного пособия планирует проводить в ФГУ ФИРО.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

Учебное пособие создано в рамках проекта «Непрерывное дополнительное образование» при поддержке Фонда «Вольное Дело».

ISBN 978-5-90415-801-9

Оглавление

Предисловие

Эта книга адресована пятиклассникам, которые решили потратить часть своего свободного времени на изучение методов решения задач. Изучение математики — сложный и продолжительный процесс. Мы предлагаем вам сделать первые шаги на этом нелёгком, но увлекательном пути, и познакомиться с методами решения задач, в которых каждое неизвестное может принимать конечное число значений.

В этой книге рассматриваются следующие методы:

- арифметический метод;
- метод перебора;
- метод исключения невозможных наборов значений неизвестных;
- метод подбора;
- метод «от противного»;
- метод возвращения к меньшему значению.

В этой книге 21 занятие. На некоторых занятиях изучается новый метод решения задач, а на других — способ оптимизации известного метода. Большинство занятий состоит из теоретического введения, перечня задач, ответов, подсказок и решений.

Каждое занятие включает:

- вводную часть, в которой перечисляются цели занятия и приводится несколько примеров задач нового типа;
- контрольную часть, в которой приведены авторский вариант выполнения заданий, указанных в вводной части, и примеры решения предложенных задач.

При изучении нового метода решения задач вам следует:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Под *планом краткой записи* мы понимаем текст, в котором указаны существенные свойства задач, относящихся к новому типу.

При изучении способов оптимизации известных методов следует:

- выявить свойства, отличающие задачи этого класса от задач, которые решались изученным методом, и указать причину, по которой применять известный метод в рассматриваемом случае неудобно;
- указать свойства задач, которые позволяют сократить затраты времени при их решении известным методом;
- придумать общий метод решения предложенных задач.

Теоретическое введение может быть полезным для тех читателей, которым интересно не только решать отдельные задачи, но и систематизировать выполненные решения, а также анализировать идеи и методические подходы. Кроме того, введение поможет учащимся, которые при самостоятельном решении задач получили неправильные ответы. В этом случае следует ознакомиться с теорией, после чего вернуться к решению задач. Если знакомство с теорией не приводит к успеху, то рекомендуется воспользоваться подсказкой.

Читать авторское решение задачи имеет смысл в двух случаях:

- многократные попытки самостоятельного решения задачи не привели к получению правильного ответа;
- правильный ответ получен самостоятельно, но есть желание сравнить свой способ решения со способом, предлагаемым автором книги.

Если ваше решение отличается от приведённого в книге, это ещё не значит, что вы допустили ошибку. Как правило, задачи имеют множество способов решения, каждый из которых интересен собственной идеей. Знакомство с авторским решением позволяет увидеть идею, до которой вы, может быть, не догадались.

Несколько слов о тематическом содержании книги.

На первых восьми занятиях рассматривается арифметический метод решения задач в трактовке Н. Я. Виленкина.

На занятиях 9–11 вам предлагается освоить метод полного перебора и различные способы его оптимизации.

На двенадцатом занятии рассматривается метод удаления невозможных наборов значений неизвестного. Несмотря на внешнее сходство с методом полного перебора, этот метод имеет существенные отличия, позволяющие рассматривать его как отдельный, самостоятельный метод.

В том же разделе рассматриваются приёмы, позволяющие оптимизировать процедуру удаления невозможных значений.

Тринадцатое занятие посвящено методу подбора. Задачи этого раздела иногда называют задачами на смекалку. При их решении не следует указывать все возможные значения неизвестной, удовлетворяющие условию задачи. Достаточно указать одно из них и доказать, что оно соответствует требованиям задачи.

На четырнадцатом занятии вы познакомитесь с процедурой выбора метода решения задачи и потренируетесь в её применении при определении метода решения предложенных в этом разделе задач.

На пятнадцатом занятии рассматривается частный случай метода удаления невозможных значений неизвестного — метод «от противного».

Занятия 16–19 посвящены изучению способов построения противоречий при доказательстве утверждений методом от противного.

В заключение вам будет предложен список задач, которые сопровождаются указаниями и ответами. Ваша цель: определить метод решения каждой из предложенных задач и решить её выбранным методом.

Будем считать, что первое знакомство с этой книгой состоялось. Желаем успеха! Уверены, что он будет.

Занятие 1

Соединение частей в целое

На первых занятиях домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении текстовых задач средствами арифметики. Как отмечалось в предисловии, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Мастер изготавливает 12 деталей в час, а его ученик изготавливает 8 деталей в час. Сколько деталей за 1 час изготовят мастер и ученик при их совместной работе?*

Пример 2. *Из пунктов A и B навстречу друг другу движутся грузовой и легковой автомобили. Скорость грузового автомобиля — 70 км в час, скорость легкового — 100 км в час. На какое расстояние уменьшится расстояние между автомобилями за 1 час?*

Авторские ответы

Общие свойства

В каждой из задач говорится о соединении частей в целое.

Под *целым* мы понимаем совокупность объектов, имеющих общее свойство. Эти объекты мы называем *элементами* целого.

Частью целого мы называем любой набор элементов из этого целого.

В этой терминологии каждая из перечисленных задач имеет вид: известно количество элементов в частях некоторого целого, при этом никакие две части не имеют общих элементов; требуется найти количество элементов в целом. Задачи, имеющие указанную структуру, называются *элементарными задачами на соединение частей в целое*.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на соединение частей в целое — схематический:

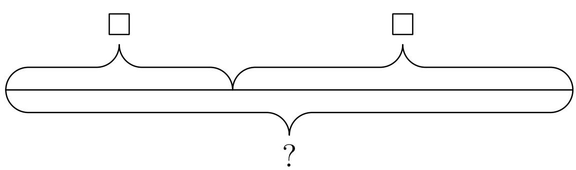


Рис. 1.1. Схематическое изображение элементарных задач на соединение частей в целое

Пустыми квадратами мы обозначаем места для известных значений, а знаком вопроса — для неизвестных.

Метод решения

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о соединении частей в целое.
- Изобразить это соединение частей в целое схематически.

- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.
- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на соединение частей в целое.

Примеры решений

Пример 1. *Мастер изготавливает 12 деталей в час, а его ученик изготавливает 8 деталей в час. Сколько деталей за 1 час изготовят мастер и ученик при их совместной работе?*

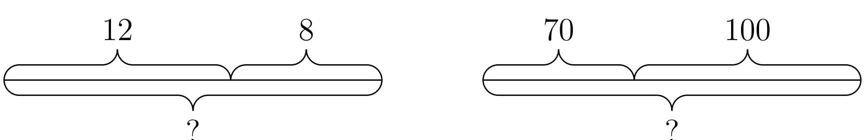
Решение. В задаче рассматривается соединение в целое «детали, изготовленные за 1 час совместной работы» частей: «детали, изготовленные за 1 час мастером» и «детали, изготовленные за 1 час его учеником».

Условие задачи схематически изображено на рисунке 1.2а.

Количество деталей, изготовленных за 1 час мастером и учеником при их совместной работе, находится как значение числового выражения:

$8 + 12 = 20$ (деталей).

Ответ. За час совместной работы мастер и ученик изготовят 20 деталей.



(а) Схема примера 1 (б) Схема примера 2

Рис. 1.2. Схематические изображения примеров

Пример 2. *Из пунктов А и В навстречу друг другу движутся грузовой и легковой автомобили. Скорость грузового автомобиля — 70 км в час, скорость легкового — 100 км в час. На какое расстояние уменьшится расстояние между автомобилями за 1 час?*

Решение. В задаче рассматривается соединение в целое «уменьшение расстояния между автомобилями за 1 час» частей: «расстояние, пройденное за 1 час легковым автомобилем» и «расстояние, пройденное за 1 час легковым автомобилем».

Условие задачи схематически изображено на рисунке 1.2б.

Искомое сокращение расстояния находится как значение числового выражения:

$70 + 100 = 170$ (км).

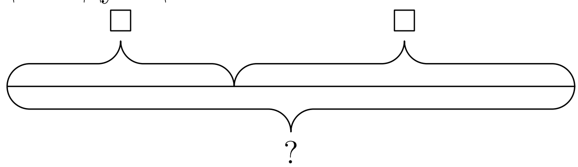
Ответ. За 1 час расстояние между автомобилями уменьшится на 170 км.

Задачи

Задача 1.1. Выберите задачи на соединение частей в целое:

1) За первый день пути туристы прошли по маршруту 40 км. За второй — 30 км. Какое расстояние прошли туристы за два дня?
2) По плану рабочему следует изготавливать в час 20 деталей. За первые 30 минут работы он успел изготовить 12 деталей. Сколько деталей ему следует изготовить за оставшееся время?
3) Мастер изготовил за 1 час 30 деталей, а ученик — на 10 деталей меньше. Сколько деталей изготовил ученик за этот час?
4) Рецепт приготовления взбитых сливок: сливки — 200 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Сливки взбивать с помощью миксера не менее 3 минут, после чего добавить в них сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Какой будет масса взбитых сливок? (Технические потери не учитывать.)
5) Ученик изготовил за 1 час 30 деталей, а мастер — на 10 деталей больше. Сколько деталей изготовил мастер за этот час?

Задача 1.2. Отметьте номер задачи, краткая запись которой может быть представлена в виде следующей схемы:



1) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Какой будет масса белкового крема? (Технические потери не учитывать.)
2) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Определить время приготовления белкового крема. (Время на отделение белков не учитывать.)
3) В зверинце 8 хищных животных, а травоядных на 10 животных больше. Сколько травоядных животных в этом зверинце?

Задача 1.3. Изобразите схематически тексты следующих задач:

1) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Какой будет масса белкового крема? (Технические потери не учитывать.)

2) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Определить время приготовления белкового крема. (Время на отделение белков не учитывать.)

Задача 1.4. В каждом из приведённых текстов выделите фрагмент, в котором говорится о соединении частей в целое, или укажите, что такого фрагмента нет. Укажите соединяемые части и целое:

1) В чашку с чёрным кофе добавили молоко. При этом получили 68 граммов кофе с молоком. Известно, что чёрного кофе на 56 граммов больше, чем молока. Сколько чёрного кофе было в чашке перед добавлением в него молока?

2) В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица стоит в четыре раза дороже маленькой. Одна дама купила 5 больших птиц и 3 маленьких, а другая — 5 маленьких и 3 больших. При этом первая дама заплатила на 20 рублей больше. Сколько стоит каждая птица?

3) Кружки английского и французского языка посещают 12 учеников начальных классов. Английский язык изучают 9 учеников, французский — 8 учеников. Сколько учеников изучают два языка?

4) Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера — на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?

5) За книгу заплатили 100 рублей, и осталось заплатить ещё столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за неё заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит эта книга?

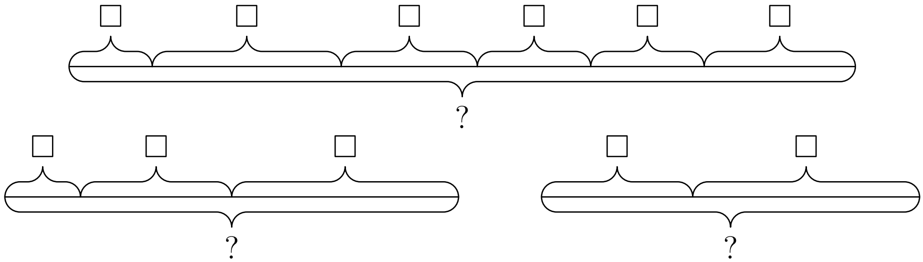


Рис. 1.3. Схемы для задач 1.5 и 1.6

Задача 1.5. Краткая запись задачи имеет вид:

белки	— 150 граммов,
сахарная пудра	— 20 граммов,
ванильный сахар	— 10 граммов,
выдержка белков в морозильной камере	— 3 минуты,
взбивание белков	— 2 минуты,
взбивание белков с сахаром и ванильным сахаром	— 1 минута.
время приготовления белкового крема	— ? минут.

Из схем на рис. 1.3 выберите подходящую и заполните её в соответствии с условием задачи.

Задача 1.6. Краткая запись задачи имеет вид:

белки	— 150 граммов,
сахарная пудра	— 20 граммов,
ванильный сахар	— 10 граммов,
выдержка белков в морозильной камере	— 3 минуты,
взбивание белков	— 2 минуты,
взбивание белков с сахаром и ванильным сахаром	— 1 минута.
общая масса белкового крема	— ? граммов.

Из схем на рис. 1.3 выберите подходящую и заполните её в соответствии с условием задачи.

Задача 1.7. Придумайте несколько элементарных задач на соединение частей в целое.

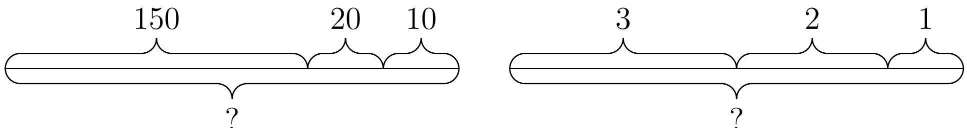
Ответы

1.1. 1, 4. **1.2**. 2. **1.3**. Условия задач схематически изображены на рис. 1.4.
1.4. Ниже выписаны только требуемые фрагменты текста:

1) «В чашку с чёрным кофе добавили молоко». Соединяемые части: чёрный кофе, молоко. Целое: кофе с молоком.
2) «Одна дама купила 5 больших птиц и 3 маленьких. . . ». Соединяемые части: стоимость больших птиц, купленных первой дамой, стоимость маленьких птиц, купленных первой дамой. Целое: общая стоимость покупки первой дамы.

   «. . . другая — 5 маленьких и 3 больших. . . ». Соединяемые части: стоимость больших птиц, купленных второй дамой, стоимость маленьких птиц, купленных второй дамой. Целое: общая стоимость покупки второй дамы.
3) «кружки английского и французского языка посещают 12 учеников начальных классов.» Соединяемые части: ученики, посещающие кружок английского языка и ученики, посещающие кружок французского языка. Обратите внимание, что у этих частей есть общие элементы.
4) «. . . позавчера и сегодня вместе. . . » Соединяемые части: масса макулатуры, собранной школьниками позавчера и масса макулатуры, собранной школьниками сегодня.
5) В тексте задачи нет требуемого фрагмента.

1.5. См. рис. 1.4а. **1.6**. См. рис. 1.4б.



(а) Схема к задачам 1.3.1) и 1.5 (б) Схема к задачам 1.3.2) и 1.6

Рис. 1.4. Схемы к задачам 1.3, 1.5 и 1.6

Занятие 2

Выделение части из целого

На этом занятии домашнего математического кружка будет построен метод решения элементарных задач нового типа. При изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Из одной трубы в бассейн поступает 25 литров воды в минуту, а из другой трубы вытекает 20 литров воды в минуту. Сколько литров воды прибывает в бассейн за 1 минуту при совместной работе труб?*

Пример 2. *В киоске по продаже свежеиспечённых булочек работают пекарь и продавец. Пекарь выпекает каждый час по 60 булочек, а продавец продаёт каждый час по 50 булочек. Сколько булочек остаётся в киоске после первого часа работы, если перед началом работы в киоске булочек не было?*

Пример 3. *Расстояние между пунктами А и В 60 км. Из пункта А в пункт В выехал велосипедист со скоростью 20 км в час. На каком расстоянии от пункта В он будет через час?*

Авторские ответы

Общие свойства

Каждая из перечисленных задач имеет вид: известно количество единиц в целом и одной из его частей. В вопросе требуется найти количество единиц в части, дополняющей известную часть до целого. Задачи, имеющие такую структуру, называются элементарными задачами на выделение части из целого.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на выделение части из целого — схематический:

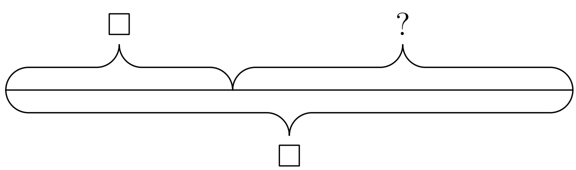


Рис. 2.1. Схематическое изображение элементарных задач на выделение части из целого

Метод решения

Метод решения элементарных задач на выделение части из целого аналогичен методу решения элементарных задач на соединение частей в целое:

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о выделении части из целого.

- Изобразить это выделение части из целого схематически.
- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.
- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на выделение части из целого.

Примеры решений

Пример 1. *Из одной трубы в бассейн поступает 25 литров воды в минуту, а из другой трубы вытекает 20 литров воды в минуту. Сколько литров воды прибывает в бассейн за 1 минуту при совместной работе труб?*

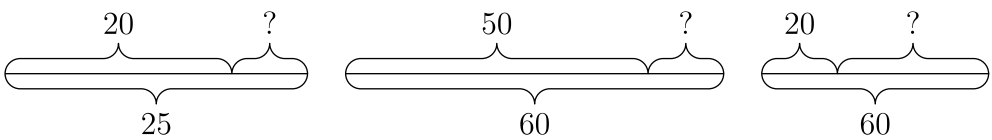
Решение. В задаче рассматривается выделение из целого «вода, поступающая в бассейн за 1 минуту» части «вода, вытекающая из бассейна за ту же минуту». Выделенную часть дополняет часть «вода, прибывающая в бассейне за рассматриваемую минуту». Условие задачи схематически изображено на рисунке 2.2а.

Количество воды, прибывающей в бассейне за 1 минуту, находится как значение числового выражения:

$25 - 20 = 5$ (м^3)

Ответ. За одну минуту в бассейн прибывает 5 м^3 воды.

Пример 2. *В киоске по продаже свежеиспечённых булочек работают пекарь и продавец. Пекарь выпекает каждый час по 60 булочек, а продавец продаёт каждый час по 50 булочек. Сколько булочек остаётся в киоске после первого часа работы, если перед началом работы в киоске булочек не было?*



(а) К примеру 1 (б) К примеру 2 (в) К примеру 3

Рис. 2.2. Схематические изображения условий примеров

Решение. В задаче рассматривается выделение из целого «испечённые за первый час работы булочки» части «булочки, проданные за первый час работы». Выделенную часть дополняет часть «булочки, оставшиеся в киоске после первого часа работы». Условие задачи схематически изображено на рисунке 2.2б.

Количество булочек, которые остались в киоске после первого часа работы, находится как значение числового выражения:

$60 - 50 = 10$ (булочек).

Ответ. Осталось 10 булочек.

Пример 3. *Расстояние между пунктами A и B 60 км. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 20 км в час. На каком расстоянии от пункта B он будет через час?*

Решение. В задаче рассматривается выделение из целого «расстояние между пунктами A и B» части «расстояние, пройденное велосипедистом за 1 час». Выделенную часть дополняет часть «расстояние, которое осталось проехать велосипедисту». Условие задачи схематически изображено на рисунке 2.2в.

Расстояние, которое осталось проехать велосипедисту после первого часа пути, находится как значение выражения:

$60 - 20 = 40$ (км).

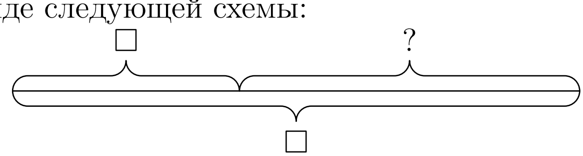
Ответ. 40 км осталось проехать велосипедисту.

Задачи

Задача 2.1. Отметьте номера задач на выделение части из целого:

1) За первый день пути туристы прошли по маршруту 40 км. За второй — 30 км. Какое расстояние прошли туристы за два дня?
2) По плану рабочему следует изготавливать в час 20 деталей. За 30 минут работы он успел изготовить 12 деталей. Сколько деталей ему следует изготовить за оставшееся время?
3) Мастер изготавливает за 1 час 30 деталей, а его ученик — на 10 деталей меньше. Сколько деталей изготовил ученик за первый час их совместной работы?
4) Рецепт приготовления взбитых сливок: сливки — 200 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Сливки взбивать с помощью миксера не менее 3 минут, после чего добавить в них сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё 1 минуту. Какой будет масса взбитых сливок? (Технические потери не учитывать.)
5) Расстояние между городами 120 км, 60 км турист проехал на велосипеде, а остальной путь он проехал в автомобиле. Какое расстояние он проехал в автомобиле?

Задача 2.2. Отметьте номер задачи, краткая запись которой может быть представлена в виде следующей схемы:



1) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Какой будет масса белкового крема? (Технические потери не учитывать.)

2) Рецепт приготовления белкового крема: белки 3 яиц — 150 граммов, сахарная пудра — 20 граммов, ванильный сахар — 10 граммов. Белки отделить от желтков и поставить в морозильную камеру на 3 минуты. Затем охлаждённые белки взбить с помощью миксера 2 минуты до образования густой пены. Добавить в пенистую массу сахарную пудру и ванильный сахар и взбивать ещё минуту. Определить время приготовления белкового крема. (Время на отделение белков не учитывать.)
3) Из 120 испечённых в течение 2 часов булочек продали 110. Сколько булочек осталось?
4) В зверинце 8 хищных животных, а травоядных на 10 животных больше. Сколько травоядных животных в этом зверинце?

Задача 2.3. Изобразите схематически тексты следующих задач:

1) В течение восьмичасового рабочего дня рабочий изготовил 60 деталей. 40 деталей он изготовил за первые 6 часов работы. За какое время он изготовил остальные детали?
2) В течение восьмичасового рабочего дня рабочий изготовил 60 деталей. 40 деталей он изготовил за первые 6 часов работы. Сколько деталей он изготовил за оставшееся время?

Задача 2.4. В каждом из приведённых текстов выделите фрагмент, в котором говорится о выделении части из целого, или укажите, что такого фрагмента нет. Укажите целое, выделяемую часть и остающуюся часть:

1) По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На одном канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы, а на другом канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше и на сколько минут?
2) За книгу заплатили 100 рублей, и осталось заплатить ещё столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за неё заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит эта книга?

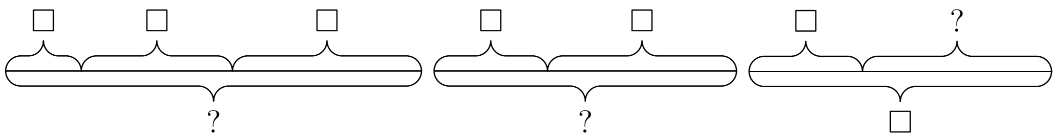


Рис. 2.3. К задачам 2.5 и 2.6

3) Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?

4) Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 1236. Найдите уменьшаемое.

Задача 2.5. Краткая запись задачи имеет вид:

изготовлено деталей	— 60 штук;
часть деталей	— 40 штук;
продолжительность рабочего дня	— 8 часов;
первая часть рабочего дня	— 6 часов;
вторая часть рабочего дня	— ? часов.

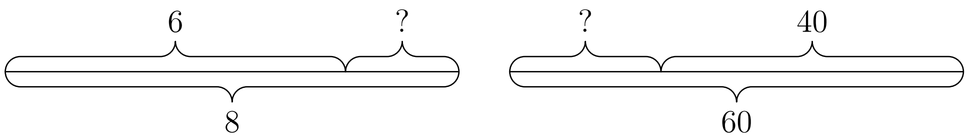
Из схем на рис. 2.3 выберите подходящую и заполните её в соответствии с условием задачи.

Задача 2.6. Краткая запись задачи имеет вид:

изготовлено деталей	— 60 штук;
часть деталей	— 40 штук;
продолжительность рабочего дня	— 8 часов;
первая часть рабочего дня	— 6 часов;
оставшаяся часть деталей	— ? штук.

Из схем на рис. 2.3 выберите подходящую и заполните её в соответствии с условием задачи.

Задача 2.7. Придумайте несколько элементарных задач на выделение части из целого.



(а) Схема к задачам 2.3.1) и 2.5 (б) Схема к задачам 2.3.2) и 2.6

Рис. 2.4. Схемы к задачам 2.3, 2.5 и 2.6

Ответы

2.1. 2, 5. **2.2**. 3. **2.3**. Условия задач схематически изображены на рис. 2.4.
2.4. Ниже требуемые фрагменты текста выделены *курсивом*:

1) В тексте нет требуемого фрагмента.

2) *За книгу заплатили 100 рублей, и осталось заплатить ещё столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за неё заплатили столько, сколько осталось заплатить.* Сколько стоит эта книга?

   Целое: сколько заплатили за книгу. Выделяемая часть: уже заплаченные 100 рублей. Оставшаяся часть: сколько осталось заплатить.

   Целое: сколько заплатили за книгу. Выделяемая часть: сколько осталось заплатить. Оставшаяся часть: сколько осталось бы заплатить, если заплатили бы столько, сколько осталось заплатить.

3) В тексте нет требуемого фрагмента.

4) В тексте нет требуемого фрагмента.

2.5. См. рис. 2.4а. **2.6**. См. рис. 2.4б.

Занятие 3

Разностное сравнение

На этом занятии домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении нового типа элементарных задач. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *В зоопарке* 12 *хищных животных и* 18 *травоядных. На сколько хищных животных меньше, чем травоядных?*

Пример 2. *В классе* 6 *хорошистов, а отличников на* 2 *меньше. Сколько отличников в классе?*

Пример 3. *В оранжерее* 8 *кустов роз, а жасмина на* 4 *куста больше. Сколько кустов жасмина в оранжерее?*

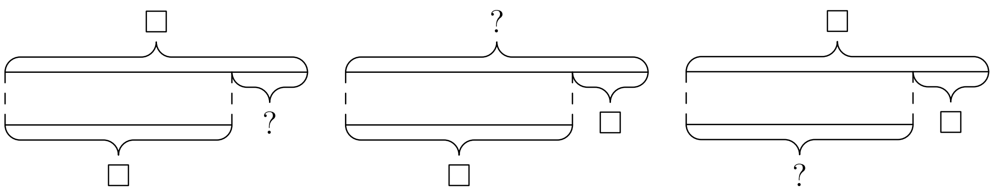
Авторские ответы

Общие свойства

В каждой из задач рассматривается сравнение вида «на столько-то больше» или «на столько-то меньше». У такого сравнения есть три компоненты: большее целое, меньшее целое, разность. В каждой из приведённых задач известны две из этих компонент и требуется найти третью. Такие задачи называются *элементарными задачами на разностное сравнение*.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на разностное сравнение — схематический:



(а) Неизвестна разница (б) Неизвестно большее (в) Неизвестно меньшее

Рис. 3.1. Схемы элементарных задач на разностное сравнение

Метод решения

Метод решения этого типа задач аналогичен уже рассмотренным:

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о разностном сравнении.
- Изобразить это разностное сравнение схематически.
- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.
- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на разностное сравнение.

Примеры решений

Пример 1. *В зоопарке* 12 *хищных животных и* 18 *травоядных. На сколько хищных животных меньше, чем травоядных?*

Решение. В этой задаче рассматривается разностное сравнение количества хищников и количества травоядных в зоопарке. При этом известны количества хищников и травоядных и спрашивается, на сколько первых меньше, чем вторых. Условие задачи схематически изображено на рисунке 3.2а.

Искомая разность находится как значение числового выражения:

$18 - 12 = 6$ (животных).

Ответ. В зоопарке хищников на 6 меньше, чем травоядных.

Пример 2. *В классе* 6 *хорошистов, а отличников на* 2 *меньше. Сколько отличников в классе?*

Решение. В этой задаче рассматривается разностное сравнение количеств хорошистов и отличников в классе. При этом известно количество хорошистов и известно, на сколько отличников меньше, чем хорошистов. Условие задачи схематически изображено на рисунке 3.2б.

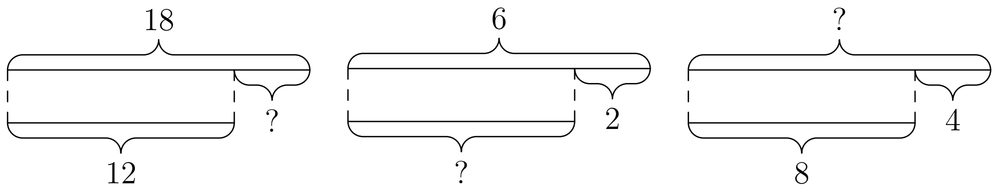
Количество отличников находится как значение числового выражения:

$6 - 2 = 4$ (отличника).

Ответ. В классе четыре отличника.

Пример 3. *В оранжерее* 8 *кустов роз, а жасмина на* 4 *куста больше. Сколько кустов жасмина в оранжерее?*

Решение. В этой задаче рассматривается разностное сравнение числа кустов роз и числа кустов жасмина в оранжерее. При этом известно число



(а) Схема примера 1 (б) Схема примера 2 (в) Схема примера 3

Рис. 3.2. Схематические изображения условий примеров

кустов роз и известно, на сколько кустов жасмина больше, чем кустов роз. Условие задачи схематически изображено на рисунке 3.2в.

Число кустов жасмина находится как значение числового выражения: $8 + 4 = 12$ (кустов).

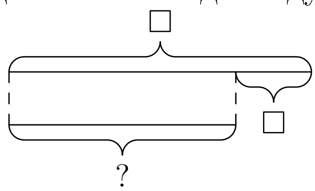
Ответ. В оранжерее 12 кустов жасмина.

Задачи

Задача 3.1. Выберите номера задач на разностное сравнение целых по количеству элементов:

1) За первый день пути туристы прошли по маршруту 40 км. За второй — 30 км. Какое расстояние прошли туристы за два дня?
2) По плану рабочему следует изготавливать в час 20 деталей. За 30 минут работы он успел изготовить 12 деталей. Сколько деталей ему следует изготовить за оставшееся время?
3) Мастер изготавливает за 1 час 30 деталей, а его ученик — на 10 деталей меньше. Сколько деталей изготовил ученик за первый час их совместной работы?
4) Папа старше мамы на 4 года. Сколько лет исполнится маме, когда папе будет 50 лет?
5) Расстояние между городами 120 км, 60 км турист проехал на велосипеде, а остальной путь он проехал в автомобиле. Какое расстояние он проехал в автомобиле?

Задача 3.2. Из перечисленных выше задач выберите те, краткая запись которых может быть представлена в виде следующей схемы:



Задача 3.3. Изобразите схематически тексты следующих задач:

1) В течение восьмичасового рабочего дня рабочий выполнил заказ по изготовлению деталей. 40 деталей он изготовил за первые 6 часов работы. После этого он сделал 30-минутный перерыв. За оставшиеся 1,5 часа он изготовил на 20 деталей меньше, чем до перерыва. Сколько деталей изготовил рабочий за последние 1,5 часа работы?
2) В течение восьмичасового рабочего дня рабочий выполнил заказ по изготовлению деталей. 40 деталей он изготовил за первые 6 часов работы. После этого он сделал 30-минутный перерыв. За оставшиеся 1,5 часа он изготовил на 20 деталей меньше, чем до перерыва. На сколько часов рабочее время до перерыва продолжительнее рабочего времени после перерыва?
3) В течение восьмичасового рабочего дня рабочий выполнил заказ по изготовлению деталей. 40 деталей он изготовил за первые 3 часа работы. После этого он сделал 30-минутный перерыв. Время его работы между первым и вторым перерывом было на 30 минут больше, чем рабочее время до первого перерыва. Однако за это время он изготовил на 20 деталей меньше, чем до первого перерыва. Сколько времени (в часах) прошло между первым и вторым перерывом?

Задача 3.4. В каждом из приведённых текстов выделите фрагмент, в котором говорится о разностном сравнении, или укажите, что такого фрагмента нет:

1) На лужайке босоногих мальчиков столько же, сколько обутых девочек. Кого на лужайке больше: девочек или босоногих детей?

2) Пакет кефира на 50 копеек дороже пакета молока. Вася купил 7 пакетов кефира и 6 пакетов молока, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет молока?
3) Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?
4) Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 1236. Найдите уменьшаемое.

Задача 3.5. Придумайте несколько элементарных задач на разностное сравнение.

Ответы

3.1–3.2. 3, 4. **3.3**. См. рис. 3.3. **3.4**. Ниже выписаны только требуемые фрагменты текста:

1) «На лужайке босоногих мальчиков столько же, сколько обутых девочек», «Кого на лужайке больше...».
2) «Пакет кефира на 50 копеек дороже пакета молока».
3) «Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера...», «...вчера на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе».
4) В тексте нет требуемого фрагмента.

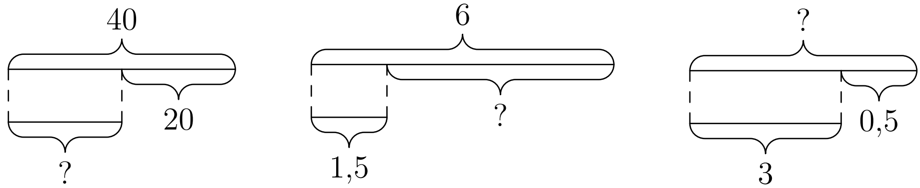


Рис. 3.3. К задаче 3.3

Занятие 4

Соединение частей с пересечением

На этом занятии домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении задач нового типа. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:

   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Кружки английского и французского языка посещают 12 учеников начальных классов. Английский язык изучают 9 учеников, французский — 8 учеников. Сколько учеников изучают два языка?*

Пример 2. *На спортивную базу приехали спортсмены, занимающиеся стрельбой и лыжным спортом. Стрельбой занимаются 8 спортсменов, лыжным спортом — 9 спортсменов. И лыжным спортом и стрельбой занимаются 5 спортсменов. Сколько спортсменов приехали на спортивную базу?*

Пример 3. *Двести школьников участвовали в олимпиадах по физике и химии. Известно, что в обеих олимпиадах участвовали* 50 *школьников, а в олимпиаде по химии —* 100 *школьников. Сколько школьников участвовали в олимпиаде по физике?*

Авторские ответы

Общие свойства

В приведённых выше задачах говорится о соотношении между целым и его частями, причём части целого имеют общие элементы. Другими словами, в каждой из задач рассматривается целое, которое образовано при соединении двух частей. При этом в целом есть объекты, которые являются элементами первой и второй части одновременно.

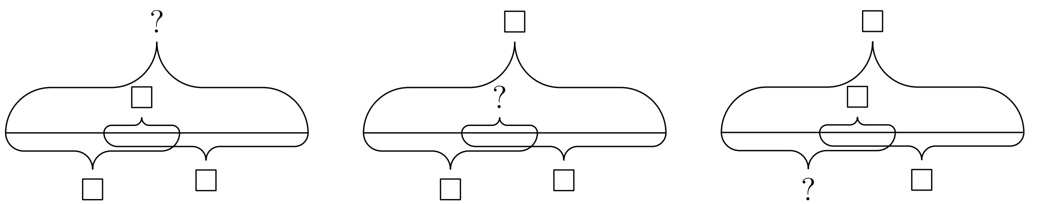
Так, в первом примере рассматривается целое «ученики начальных классов, изучающие иностранный язык». Это целое образовано в результате соединения частей «ученики начальных классов, изучающие английский язык» и «ученики начальных классов, которые изучают французский язык». При этом среди учеников начальных классов, изучающих иностранный язык, есть те, которые изучают оба языка. Эти ученики являются элементами как первой, так и второй части. Выделить целое и части во втором и третьем примерах мы предлагаем читателям самостоятельно.

В приведённых выше задачах известны значения трёх компонент процесса соединения в целое частей, имеющих общие элементы, а найти предлагается значение четвёртой компоненты.

Задачи, имеющие такую структуру, называются *задачами на соединение в целое частей, имеющих общие элементы.* В зависимости от того, какая из компонент процесса неизвестна, задачи можно отнести к одному из трёх типов: неизвестно количество элементов в целом, количество элементов в части, количество элементов, входящих в обе части одновременно.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи задач на соединение в целое частей, имеющих общие элементы — схематический:



(а) Неизвестно целое (б) Неизвестно пересечение (в) Неизвестна часть

Рис. 4.1. Схемы задач на соединение в целое частей, имеющих общие элементы

Задачи, рассматриваемые на этом занятии, не являются элементарными, так как в них в неявной форме содержится последовательное выполнение двух процессов.

Метод решения

При решении задач на соединение в целое частей, имеющих общие элементы, мы предлагаем:

- Изобразить схематически соотношение между первой частью (будем рассматривать её как вспомогательное целое), объектами, принадлежащими обеим частям одновременно (одна часть вспомогательного целого), и объектами, принадлежащими только первой части (другая часть вспомогательного целого). Мы получим схему элементарного процесса. Она содержит три компоненты.
- Изобразить схематически соотношение между исходным целым, объектами, принадлежащими только первой части (одна часть исходного целого), и объектами, принадлежащими второй части (другая часть исходного целого). Мы получим схему элементарного процесса. Она содержит три компоненты.

- Выбрать схему, в которой известны две компоненты из трёх, и найти значение неизвестной компоненты. Если такой схемы не нашлось, то повторить первые два шага, заменив всюду первую часть на вторую, и наоборот.
- Подставить найденное значение во вторую схему и решить полученную при этом элементарную задачу.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении задач на соединение в целое частей, имеющих общие элементы.

Примеры решений

Пример 1. *Кружки английского и французского языка посещают* 12 *учеников начальных классов. Английский язык изучают* 9 *учеников, французский —* 8 *учеников. Сколько учеников изучают два языка?*

Решение. В задаче рассматривается целое «ученики, посещающие кружки иностранных языков». Выделим в этом целом следующие части:

- ученики, посещающие только кружок английского языка;
- ученики, посещающие только кружок французского языка;
- ученики, посещающие кружки английского и французского языка.

В задаче требуется найти количество учеников в последней из перечисленных частей. Схематически условие задачи изображено на рисунке 4.2а.

Рассмотрим следующие вспомогательные процессы:

1. Соединение в целое «ученики, посещающие кружок английского языка» частей «ученики, посещающие только кружок английского языка» и «ученики, посещающие оба кружка» (см. рис. 4.2б).

2. Соединение в целое «ученики, посещающие хотя бы один из кружков» частей «ученики, посещающие только кружок английского языка» и «ученики, посещающие кружок французского языка» (см. рис. 4.2в).

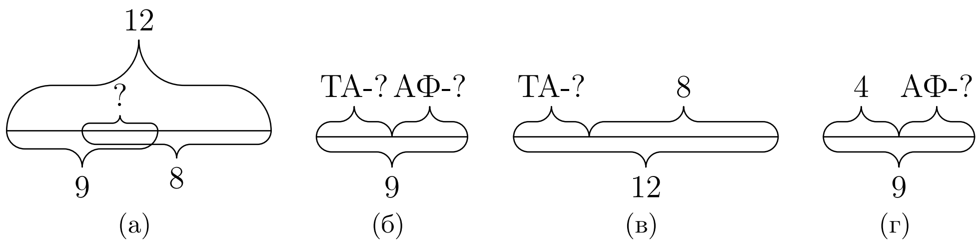


Рис. 4.2. Схематическое изображение решения примера 1

Заметим, что во втором процессе известны две компоненты, а значит, можно найти третью: только кружок английского языка посещают $12 - 8 = 4$ ученика. Перенесём полученное значение на первую схему (см. рис. 4.2г).

Теперь в первом процессе известны две компоненты (количество учеников, посещающих только кружок английского языка, и количество учеников, посещающих кружок английского языка), значит, можно найти третью: оба кружка посещают $9 - 4 = 5$ учеников.
Ответ. Оба кружка посещают 5 учеников.

Пример 2. *На спортивную базу приехали спортсмены, занимающиеся стрельбой и лыжным спортом. Стрельбой занимаются 8 спортсменов, лыжным спортом — 9 спортсменов. И лыжным спортом и стрельбой занимаются 5 спортсменов. Сколько спортсменов приехали на спортивную базу?*

Решение. В этой задаче рассматривается целое «спортсмены, приехавшие на базу». Выделим в этом целом следующие части:

- спортсмены, занимающиеся только стрельбой;
- спортсмены, занимающиеся только лыжным спортом;
- спортсмены, занимающиеся и стрельбой и лыжным спортом.

В задаче требуется найти общее количество спортсменов. Схематически условие задачи изображено на рисунке 4.3а.

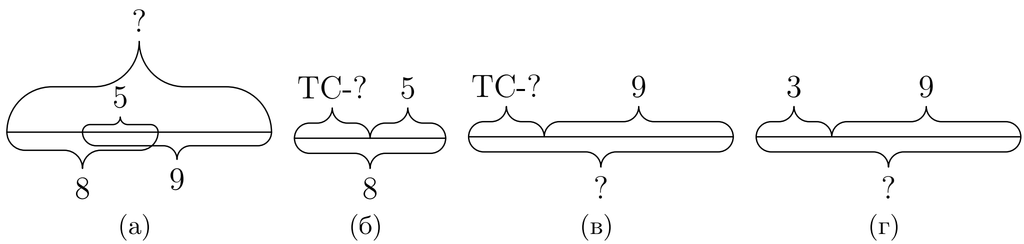


Рис. 4.3. Схематическое изображение решения примера 2

Рассмотрим следующие вспомогательные процессы:

1. Соединение в целое «спортсмены, занимающиеся стрельбой» частей «спортсмены, занимающиеся только стрельбой» и «спортсмены, занимающиеся и стрельбой и лыжным спортом» (см. рис. 4.3б).

2. Соединение в целое «все спортсмены, приехавшие на станцию» частей «спортсмены, занимающиеся только стрельбой» и «спортсмены, занимающиеся лыжным спортом» (см. рис. 4.3в).

Заметим, что в первом процессе известны две компоненты, значит, можно найти третью: только стрельбой занимаются $8 - 5 = 3$ спортсмена. Перенесём полученное значение на вторую схему (см. рис. 4.3г).

Теперь во втором процессе известны количества элементов в обеих частях, значит, можно найти целое: всего спортсменов $3 + 9 = 12$.

Ответ. Всего приехало 12 спортсменов.

Пример 3. *Двести школьников участвовали в олимпиадах по физике и химии. Известно, что в обеих олимпиадах участвовали* 50 *школьников, а в олимпиаде по химии —* 100 *школьников. Сколько школьников участвовали в олимпиаде по физике?*

Решение. В задаче рассматривается целое «школьники, участвовавшие в одной из олимпиад». Выделим в этом целом следующие части:

- школьники, участвовавшие только в олимпиаде по химии;
- школьники, участвовавшие только в олимпиаде по физике;
- школьники, участвовавшие в обеих олимпиадах.

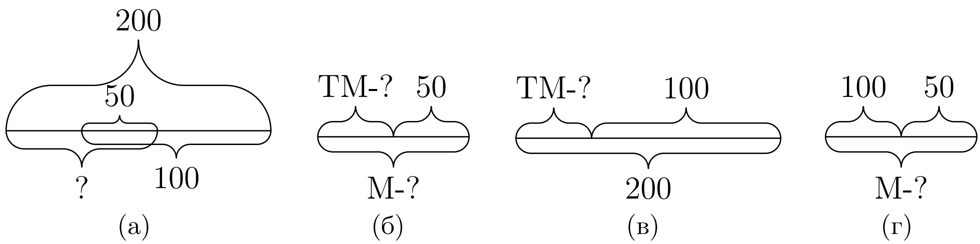


Рис. 4.4. Схематическое изображение решения примера 3

В задаче требуется найти количество школьников, участвовавших в олимпиаде по физике. Схематически условие задачи изображено на рисунке 4.4а.

Если в этой задаче первые два шага проводить, считая первой соединяемой частью школьников, участвовавших в олимпиаде по химии, то на третьем шаге не получится схемы, в которой известны две компоненты из трёх (проверьте!). Поэтому мы рассмотрим следующие вспомогательные процессы:

1. Соединение в целое «школьники, участвовавшие в олимпиаде по физике» частей «школьники, участвовавшие в обеих олимпиадах» и «школьники, участвовавшие только в олимпиаде по физике» (см. рис. 4.4б).

2. Соединение в целое «школьники, участвовавшие в одной из олимпиад» частей «школьники, участвовавшие только в олимпиаде по физике» и «школьники, участвовавшие в олимпиаде по химии» (см. рис. 4.4в).

Заметим, что во втором процессе известны две компоненты, а значит, можно найти третью: только в олимпиаде по физике участвовали $200 - 100 = 100$ школьников. Перенесём полученное значение на вторую схему (см. рис. 4.4г).

Теперь в первом процессе известны две компоненты, значит, можно найти третью: в олимпиаде по физике участвовали $100 + 50 = 150$ школьников.

Ответ. 150 школьников.

Поскольку решения всех задач этого занятия полностью аналогичны решениям этих примеров, мы приведём только условия и ответы.

Задачи

Задача 4.1. В деревне в каждом дворе есть корова или лошадь, причём в 20 дворах есть коровы, в 25 — лошади, а в 15 — и коровы, и лошади. Сколько в деревне дворов?

Задача 4.2. В книжном магазине продаются книги со сказками и приключениями. За час работы в магазине приобрели книги 10 покупателей. Из них 8 выбрали сказки, а 7 — приключения. Сколько покупателей приобрели и сказки, и приключения?

Задача 4.3. На дне рождения детей угощали яблоками и грушами. Восьмерым достались яблоки, шесть человек выбрали груши, а четверо выбрали и яблоки, и груши. Сколько детей было на дне рождения, если никто из них не отказался от предложенного угощения?

Задача 4.4. У 28 человек 5 класса на собрание пришли папы и мамы. Мам было — 24, пап — 18. У скольких учеников на собрание пришли одновременно и папа и мама?

Задача 4.5. Работникам предприятия выдали заработную плату тысячными или пятитысячными купюрами. 120 человек получили заработную плату тысячными купюрами, 80 человек получили заработную плату пятитысячными купюрами и 30 — тысячными и пятитысячными купюрами. Сколько человек работают на этом предприятии?

Задача 4.6. В магазине женской одежды продаются юбки и кофты. За один день в этом магазине сделали покупки 85 покупателей. Из них приобрели юбки 47 покупателей, а кофты — 54 покупателя. Сколько покупателей приобрели юбки и кофты?

Задача 4.7. Футбольная команда состоит из 11 игроков. На финальную встречу между футбольными командами 5 «А» и 5 «Б» класса пришли родители всех игроков. Пришли 10 пап игроков из 5 «А» класса, 9 пап игроков из 5 «Б» класса, 6 мам игроков из 5 «А» класса и 4 мамы игроков из 5 «Б» класса. У скольких игроков 5 «А» и 5 «Б» класса на матче присутствовали папа и мама одновременно?

Задача 4.8. Родители всех учеников класса пришли на родительское собрание. При этом пап было 18, мам — 20. У 10 учеников на родительское собрание пришли папа и мама одновременно. Сколько учеников в классе?

Задача 4.9. Родители всех учеников класса пришли на родительское собрание. При этом пап было 18, мам — 20. У 10 учеников на родительское собрание пришли папа и мама одновременно. У скольких учеников пришли только мамы? Только папы? Сколько учеников в этом классе?

Задача 4.10. Занятия по английскому и французскому языку посещают 20 человек. Из них 5 человек не изучают английский язык, а 8 человек не изучают французский. Сколько человек в этой группе изучают оба языка?

Задача 4.11. Занятия по английскому и французскому языку посещают 20 человек. Из них 15 человек изучают английский язык, а 7 человек изучают оба языка. Сколько человек изучают французский язык?

Задача 4.12. В одной из школ все ученики начальных классов изучают иностранный язык. Для этого работают кружки английского, французского и немецкого языков. Известно, что кружок английского языка посещают 25 учеников, французского — 28 учеников, немецкого — 27 учеников. Английский и французский языки изучают 13 учеников, французский и немецкий — 5 учеников. При этом никто из учеников не изучает английский и немецкий. Сколько учеников начальных классов в этой школе?

Задача 4.13. Придумайте несколько задач на соединение в целое частей, имеющих общие элементы.

Ответы

4.1. Тридцать дворов. **4.2**. Пять покупателей. **4.3**. Десять детей. **4.4**. У четырнадцати учеников. **4.5**. Сто семьдесят человек. **4.6**. Шестнадцать покупателей. **4.7**. У семи игроков. **4.8**. Двадцать восемь учеников. **4.9**. У десяти учеников; у восьми учеников; двадцать восемь учеников. **4.10**. Семь человек. **4.11**. Двенадцать человек. **4.12**. Шестьдесят два ученика.

Занятие 5

Соединение количественно равных частей

На этом занятии домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении элементарных задач нового типа. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Автомобиль движется со скоростью 100 км в час. Какое расстояние он пройдёт за 4 часа?*

Пример 2. *Производительность труда рабочего 45 деталей в час. Сколько деталей он изготовит за восьмичасовой рабочий день?*

Пример 3. *Сколько квадратов со стороной 1 см следует взять, чтобы замостить ими прямоугольник* 3×4 *см?*

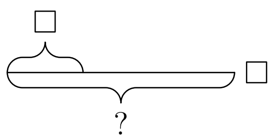
Авторские ответы

Общие свойства

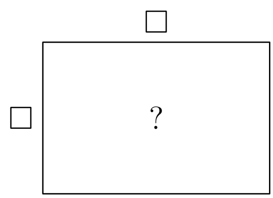
Каждая из перечисленных задач имеет вид: известно количество элементов в каждой из равных частей некоторого целого, при этом никакие две части не имеют общих элементов; в вопросе требуется найти количество элементов в целом. Задачи, имеющие указанную структуру, называются *элементарными задачами на соединение равных частей в целое*.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на соединение в целое равных частей — схематический:



(а) Первый способ



(б) Второй способ

Рис. 5.1. Схемы задач на соединение в целое равных частей

Метод решения

Метод решения элементарных задач на соединение равных частей в целое аналогичен ранее рассмотренным методам:

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о соединении в целое равных частей.
- Изобразить это соединение в целое равных частей схематически.
- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.

- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на соединение в целое равных частей.

Примеры решений

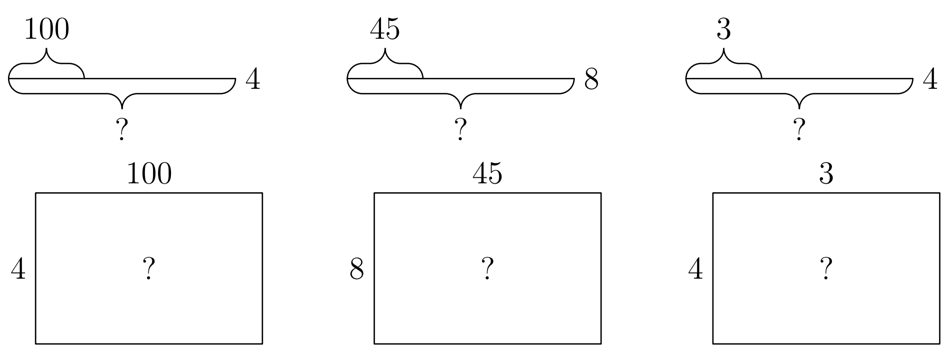
Пример 1. *Автомобиль движется со скоростью 100 км в час. Какое расстояние он пройдёт за 4 часа?*

Решение. В этой задаче идёт речь о соединении в целое «пройденное расстояние» четырёх равных частей «расстояние, пройденное за очередной час». Схематически условие задачи изображено на рисунке 5.2а.

Искомое расстояние находится как значение числового выражения:

$100 \cdot 4 = 400$ (км).

Ответ. Он проедет 400 км.



(а) К примеру 1 (б) К примеру 2 (в) К примеру 3

Рис. 5.2. Схематические изображения условий примеров

Пример 2. *Производительность труда рабочего 45 деталей в час. Сколько деталей он изготовит за восьмичасовой рабочий день?*

Решение. В этой задаче идёт речь о соединении в целое «изготовленные за рабочий день детали» восьми равных частей «детали, изготовленные за очередной час работы». Схематически условие задачи изображено на рисунке 5.2б.

Искомое количество деталей находится как значение числового выражения:

$45 \cdot 8 = 360$ (деталей).

Ответ. Он изготовит 360 деталей.

Пример 3. *Сколько квадратов со стороной 1 см следует взять, чтобы замостить ими прямоугольник* 3×4 *см?*

Решение. В этой задаче идёт речь о соединении в целое «общее число квадратов» трёх равных частей «квадраты, расположенные вдоль длинной стороны прямоугольника». Схематически условие задачи изображено на рисунке 5.2в.

Искомое количество квадратов находится как значение числового выражения:

$4 \cdot 3 = 12$ (квадратов).

Ответ. Следует взять 12 квадратов.

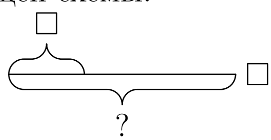
Задачи

Задача 5.1. Отметьте номера задач на соединение в целое количественно равных частей:

1) Скорость движения автомобиля 140 км в час. Какое расстояние проедет автомобиль за 3 часа?
2) По плану рабочему следует изготавливать в час 20 деталей. За 30 минут работы он успел изготовить 12 деталей. Сколько деталей ему следует изготовить за оставшееся время?

3) Мастер изготавливает за 1 час 30 деталей. Сколько деталей изготовил мастер за восьмичасовой рабочий день?
4) Цена яблок — 50 рублей за 1 кг. Сколько стоит покупка из 2 кг яблок?
5) Расстояние между городами 120 км, 60 км турист проехал на велосипеде, а остальной путь он проехал в автомобиле. Какое расстояние он проехал в автомобиле?

Задача 5.2. Отметьте номера задач, краткая запись которых может быть представлена в виде следующей схемы:



1) За первый день пути туристы прошли по маршруту 40 км. За второй — 30 км. Какое расстояние прошли туристы за два дня?
2) По плану рабочему следует изготавливать в час 20 деталей. За 30 минут работы он успел изготовить 12 деталей. Сколько деталей ему следует изготовить за оставшееся время?
3) Мастер изготавливает за 1 час 30 деталей, а его ученик — на 10 деталей меньше. Сколько деталей изготовил ученик за первый час их совместной работы?
4) Папа старше мамы на 4 года. Сколько лет исполнится маме, когда папе будет 50 лет?
5) Расстояние между городами 120 км, 60 км турист проехал на велосипеде, а остальной путь он проехал в автомобиле. Какое расстояние он проехал в автомобиле?

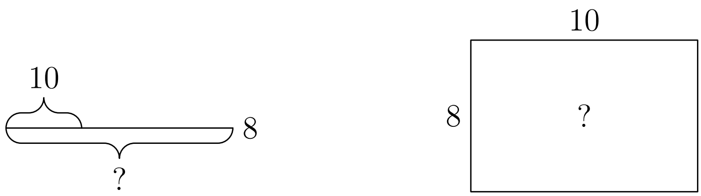
Задача 5.3. Изобразите схематически текст задачи:

В течение восьмичасового рабочего дня мастер работал с производительностью 10 деталей в час. До перерыва он изготовил 40 деталей. После этого он сделал 30-минутный перерыв. За оставшееся время он выполнил остаток дневной нормы. Сколько деталей изготовил мастер за рабочий день?

Задача 5.4. В каждом из приведённых текстов выделить фрагмент, в котором говорится о соединении в целое количественно равных частей, или указать, что такого фрагмента нет:

1) Два землекопа выкапывают 2 м канавы за 2 часа. Сколько землекопов за 5 часов выкопают 5 м канавы?
2) Доктор Айболит раздал четырём заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон — на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону?
3) Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 1226. Найдите уменьшаемое.
4) Пакет кефира на 50 копеек дороже пакета молока. Вася купил 7 пакетов кефира и 6 пакетов молока, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет молока?
5) Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?
6) Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка–2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка–2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

Задача 5.5. Придумайте несколько элементарных задач на соединение в целое равных частей.



(а) Первый способ (б) Второй способ

Рис. 5.3. Схема задачи 5.3

Ответы

5.1. 1, 3, 4. **5.2**. В предложенном списке таких задач нет. **5.3**. Условие задачи изображено на рис. 5.3. **5.4**. Ниже выписаны только требуемые фрагменты текста:

1) «Два землекопа выкапывают 2 м канавы за 2 часа», «Сколько землекопов за 5 часов выкопают 5 м канавы?»
2) В тексте нет требуемого фрагмента.
3) В тексте нет требуемого фрагмента.
4) «Вася купил 7 пакетов кефира. . . », «. . . 6 пакетов молока. . . ».
5) В тексте нет требуемого фрагмента.
6) «Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами».

Занятие 6

Выделение одной из равных частей

На этом занятии домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении элементарных задач нового типа. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Велосипедист за 4 часа проехал 100 км. С какой скоростью двигался велосипедист?*

Пример 2. *Мастер изготовил 360 деталей. Сколько времени он затратил на работу, если его производительность труда — 45 деталей в час?*

Пример 3. *Площадь прямоугольника 12 см^2. Сколько квадратов со стороной 1 см поместится вдоль его длины, если ширина прямоугольника равна 3 см?*

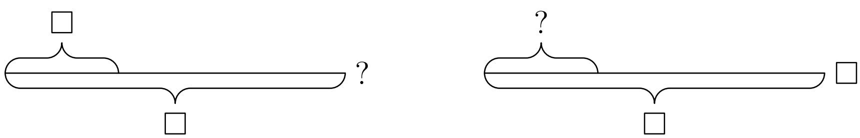
Авторские ответы

Общие свойства

В каждой из перечисленных выше задач рассматривается процесс распределения целого в части с одинаковым количеством элементов. При этом из трёх компонент — целого, числа частей и размера каждой части — известны целое и ещё одна, а оставшуюся требуется найти. Задачи, имеющие указанную структуру, называются элементарными задачами на выделение из целого одной из равных частей.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на выделение из целого одной из равных частей — схематический:



(а) Неизвестно количество частей

(б) Неизвестно количество элементов в одной части

Рис. 6.1. Схематическое изображение элементарных задач на выделение из целого одной из равных частей

Метод решения

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о выделении из целого одной из равных частей.
- Изобразить это выделение из целого одной из равных частей схематически.
- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.

- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на выделение из целого одной из равных частей.

Примеры решений

Пример 1. *Велосипедист за 4 часа проехал 100 км. С какой скоростью двигался велосипедист?*

Решение. В задаче идёт речь об объединении в целое «расстояние, которое проехал велосипедист» четырёх равных частей «расстояние, которое проехал велосипедист в очередной час». При этом известно целое и количество частей, а найти требуется размер одной части. Схематически условие задачи изображено на рисунке 6.2а.

Искомая скорость находится как значение числового выражения:

$100 : 4 = 25$ (км/ч).

Ответ. Велосипедист двигался со скоростью 25 км/ч.

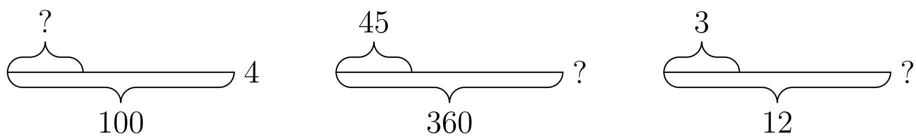
Пример 2. *Мастер изготовил 360 деталей. Сколько времени он затратил на работу, если его производительность труда — 45 деталей в час?*

Решение. В задаче идёт речь об объединении в целое «детали, изготовленные мастером» равных частей «детали, изготовленные мастером в очередной час», каждая из которых равна производительности труда. При этом известно целое и размер одной части, а найти требуется количество частей. Схематически условие задачи изображено на рисунке 6.2б.

Искомое время находится как значение числового выражения:

$360 : 45 = 8$ (часов).

Ответ. Мастер затратил 8 часов.



(а) К примеру 1 (б) К примеру 2 (в) К примеру 3

Рис. 6.2. Схемы условий примеров

Пример 3. *Площадь прямоугольника* 12 *см*^{2}. *Сколько квадратов со стороной 1 см поместится вдоль его длины, если ширина прямоугольника равна 3 см?*

Решение. В задаче идёт речь об объединении в целое «площадь прямоугольника» трёх равных частей «число квадратов, помещающихся вдоль длины прямоугольника». При этом известно целое и количество частей, а найти требуется размер одной части. Схематически условие задачи изображено на рисунке 6.2в.

Искомое количество квадратов находится как значение числового выражения:

$12 : 3 = 4$ (квадрата).

Ответ. Помещается 4 квадрата со стороной 1 см.

Задачи

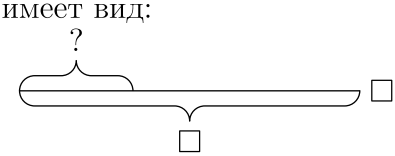
Задача 6.1. Выберите задачи, в которых неизвестно количество элементов в равных частях:

1) Мастер в течение восьмичасового рабочего дня изготовил 160 деталей. Определите производительность труда этого мастера.
2) В бассейн 1500 м^3 поступает вода со скоростью 5 м^3 в час. За какое время будет заполнен бассейн?
3) Автомобиль движется по трассе со скоростью 150 км в час. За какое время он проедет расстояние 300 км?
4) В магазине взвешивали упаковку, в которой было 50 коробок шоколадных конфет. Упаковка весит 5 кг. Сколько весит каждая коробка?

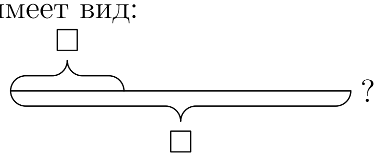
5) За какое время автомобиль доедет от Москвы до Рязани (200 км), если он будет ехать со скоростью 80 км в час?
6) Какое расстояние между Москвой и Петербургом, если поезд, который движется со скоростью 110 км в час, проезжает это расстояние за 6 часов?

Задача 6.2. Из перечисленных выше задач выберите те, в которых неизвестно, на сколько равных частей разделено целое.

Задача 6.3. Из перечисленных выше задач выберите те, схематическое изображение которых имеет вид:



Задача 6.4. Из перечисленных выше задач выберите те, схематическое изображение которых имеет вид:



Задача 6.5. Изобразите схематически тексты задач:

1) Пассажирский состав из 12 вагонов и локомотива проезжал мимо столба 52 секунды. При этом скорость его движения не изменялась. За какое время проезжал мимо этого столба каждый вагон и локомотив, если они имеют длину 14 метров каждый? (Промежутками между вагонами пренебречь.)
2) Пассажирский состав проезжал мимо столба с постоянной скоростью. Скорость движения состава не изменялась. Длина каждого вагона и локомотива по 14 метров. Пятый вагон проехал мимо столба за 5 секунд, а весь состав — за 75 секунд. Сколько вагонов в составе? (Локомотив считать одним из вагонов.)

Задача 6.6. Придумайте несколько элементарных задач на выделение из целого одной из равных частей.

Рис. 6.3. Схемы к задаче 6.5

Ответы

6.1. 1, 4. **6.2**. 2, 3, 5. **6.3**. 1, 4. **6.4**. 2, 3, 5. **6.5**. Условия задач схематически изображены на рисунке 6.3.

Занятие 7

Кратное сравнение

На этом занятии домашнего математического кружка будет построена последовательность действий, выполняемых при решении элементарных задач нового типа. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *В зверинце 10 хищников и 30 травоядных животных. Во сколько раз хищных животных меньше, чем травоядных?*

Пример 2. *Скорость велосипедиста 30 км в час, а пешехода в 6 раз меньше. Какова скорость пешехода?*

Пример 3. *Среди выпускников средней школы 10 отличников, а хорошистов в 3 раза больше. Сколько хорошистов среди выпускников этой школы?*

Авторские ответы

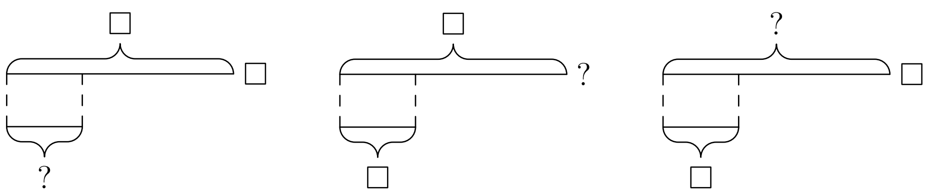
Общие свойства

В приведённых выше задачах рассматривается процесс сравнения вида «во столько-то раз больше», «во столько-то раз меньше». В таком сравнении можно выделить три компоненты: количество элементов в большем целом, количество элементов в меньшем целом, во сколько раз в большем целом элементов больше, чем в меньшем целом. Такое сравнение называется кратным.

Задачи, в которых известны две компоненты процесса кратного сравнения и требуется найти третью, называются элементарными задачами на кратное сравнение.

Краткая запись

Наиболее удобный способ краткой записи элементарных задач на кратное сравнение — схематический:



(а) Неизвестно меньшее целое

(б) Неизвестно отношение

(в) Неизвестно большее целое

Рис. 7.1. Схематические изображения задач на кратное сравнение

Метод решения

- Выделить в тексте задачи фрагмент, в котором говорится о кратном сравнении.
- Изобразить это кратное сравнение схематически.

- Указать на схеме известные значения и отметить знаком вопроса компоненту с неизвестным значением.
- Записать числовое выражение, позволяющее найти неизвестное значение, и вычислить значение этого выражения.
- Записать ответ задачи.

Границы применимости

Указанный метод применяется только при решении элементарных задач на кратное сравнение.

Примеры решений

Пример 1. *В зверинце 10 хищников и 30 травоядных животных. Во сколько раз хищных животных меньше, чем травоядных?*

Решение. В задаче идёт речь о кратном сравнении количества хищников и количества травоядных в зверинце. При этом известны количества хищников и травоядных и требуется найти, во сколько раз первых меньше, чем вторых. Условие задачи схематически изображено на рисунке 7.2а.

Искомое отношение находится как значение числового выражения:

$30 : 10 = 3$.

Ответ. Хищников в зверинце в три раза меньше, чем травоядных.

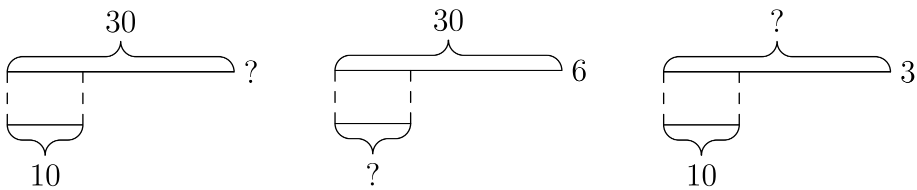
Пример 2. *Скорость велосипедиста 30 км в час, а пешехода в 6 раз меньше. Какова скорость пешехода?*

Решение. В задаче идёт речь о кратном сравнении скорости велосипедиста и скорости пешехода. При этом известна скорость велосипедиста и во сколько раз она больше скорости пешехода, а требуется найти скорость пешехода. Условие задачи схематически изображено на рисунке 7.2б.

Искомая скорость находится как значение числового выражения:

$30 : 6 = 5$ (км/ч).

Ответ. Скорость пешехода 5 км/ч.



(а) К примеру 1 (б) К примеру 2 (в) К примеру 3

Рис. 7.2. Схемы условий примеров

Пример 3. *Среди выпускников средней школы 10 отличников, а хорошистов в 3 раза больше. Сколько хорошистов среди выпускников этой школы?*

Решение. В задаче идёт речь о кратном сравнении количества отличников и количества хорошистов. При этом известно количество отличников и во сколько раз оно меньше количества хорошистов, а найти требуется количество хорошистов. Условие задачи схематически изображено на рисунке 7.2в.

Количество хорошистов находится как значение числового выражения: $10 \cdot 3 = 30$ (хорошистов).

Ответ. Среди выпускников 30 хорошистов.

Задачи

Задача 7.1. Выберите задачи, в которых неизвестно отношение между сравниваемыми целыми:

1) Мастер в течение восьмичасового рабочего дня изготовил 160 деталей. Его ученик изготовил за это же время деталей в 2 раза меньше. Сколько деталей изготовил ученик?
2) В бассейн поступает вода из двух труб. Производительность работы первой трубы 5 м^3 в час, второй — 7,5 м^3 в час. Во сколько раз вторая труба работает быстрее, чем первая?

3) Автомобиль движется по просёлочной дороге со скоростью 50 км в час, а по трассе в три раза быстрее. Определить скорость движения автомобиля по трассе.

4) В магазин привезли упаковки с шоколадными конфетами и зефиром. Упаковка с шоколадными конфетами вдвое тяжелее упаковки с зефиром. Сколько весит упаковка с шоколадными конфетами, если упаковка с зефиром весит 3 кг?

5) Из городов Рязань и Москва навстречу друг другу выехали два поезда: грузовой и пассажирский. Скорость пассажирского поезда — 100 км в час, скорость грузового — 80 км в час. Во сколько раз скорость движения пассажирского поезда больше скорости движения товарного поезда?

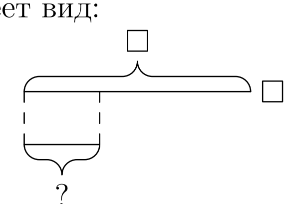
6) Мальчик с пальчик и Дюймовочка соревновались в собирании цветочной пыльцы. Мальчик с пальчик собрал 10 граммов пыльцы, а Дюймовочка — в два раза меньше. Сколько граммов пыльцы собрала Дюймовочка?

Задача 7.2. Из перечисленных выше задач выберите те, в которых неизвестно количество элементов в меньшем целом.

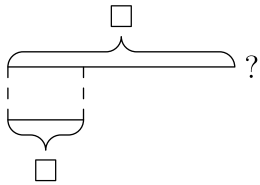
Задача 7.3. Из перечисленных выше задач выберите те, в которых неизвестно количество элементов в большем целом.

Задача 7.4. Из перечисленных выше задач выберите те, в которых неизвестно отношение количеств элементов в целых.

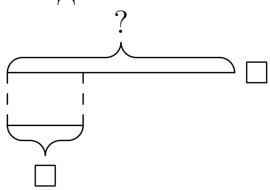
Задача 7.5. Из перечисленных выше задач выберите те, схематическое изображение которых имеет вид:



Задача 7.6. Из перечисленных выше задач выберите те, схематическое изображение которых имеет вид:



Задача 7.7. Из перечисленных выше задач выберите те, схематическое изображение которых имеет вид:



Задача 7.8. Изобразите схематически тексты задач:

1) В бассейн поступает вода из двух труб. Диаметр первой трубы 0,5 м, а второй — 0,8 метра. Трубы работают последовательно, то есть вторая труба начинает работать после того, как первая уже завершила свою работу. Производительность работы первой трубы — 6 м^3 в час, а второй — 8 м^3 в час. Во сколько раз вторая труба работает быстрее, чем первая?

2) Ученик и мастер работали совместно в течение 8 часов с двумя получасовыми перерывами. За это время мастер изготовил 160 деталей, а ученик — в 2 раза меньше. Сколько деталей изготовил ученик за указанное время работы?

3) В магазин привезли 3 одинаковых упаковки с шоколадными конфетами и 5 одинаковых упаковок с зефиром. Упаковка с шоколадными конфетами вдвое тяжелее упаковки с зефиром. Сколько весит каждая упаковка с шоколадными конфетами, если каждая упаковка с зефиром весит 3 кг?

Задача 7.9. В следующем тексте выделите фрагмент, в котором идёт речь о кратном сравнении.

> Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные Репку вытащить не могут, а с ней могут. Сколько нужно Мышек, чтобы они сами вытащили Репку?

Задача 7.10. Придумайте несколько задач на кратное сравнение.

Ответы

7.1. 2, 5. **7.2**. 1, 6. **7.3**. 3, 4. **7.4**. 2, 5. **7.5**. 1, 6. **7.6**. 2, 5. **7.7**. 3, 4. **7.8**. Схемы задач изображены на рисунке 7.3. **7.9**. Ниже выписаны только требуемые фрагменты текста:

> «Дедка вдвое сильнее Бабки...», «...Бабка втрое сильнее Внучки...», «...Внучка вчетверо сильнее Жучки...», «...Жучка впятеро сильнее Кошки...», «...Кошка вшестеро сильнее Мышки».

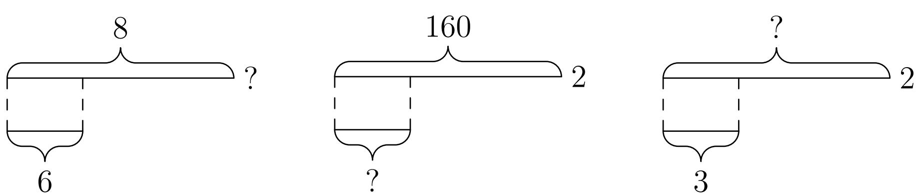


Рис. 7.3. Схемы к задаче 7.8

Занятие 8

Арифметический метод

На этом занятии домашнего математического кружка будет уточнена последовательность действий, выполняемых при решении задач арифметическим методом. Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
    - выявить общие свойства предложенных задач;
    - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
    - придумать общий метод решения предложенных задач;
    - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера — на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?*

Пример 2. *Яблоки в упаковке стоят 68 рублей. Известно, что яблоки дороже упаковки на 56 рублей. Сколько стоят яблоки без упаковки?*

Пример 3. *Один апельсин стоит, как одно яблоко и одна груша вместе. Яблоко на рубль дороже груши. Купили 13 апельсинов, 13 яблок и 13 груш. Потратили 390 рублей. Сколько стоит одно яблоко?*

Авторские ответы

Общие свойства

В каждой из перечисленных задач находится неизвестная компонента в одном из процессов: соединения частей в целое, выделения части из целого, сравнения (разностного или кратного). При этом процессы, указанные в тексте задачи, можно представить как цепочку перечисленных выше элементарных процессов.

Краткая запись

Наиболее удобным способом краткой записи задач, представимых в виде последовательности элементарных задач, является схематический. При этом схема составной задачи — последовательность схем элементарных задач.

Такая запись задач позволяет увидеть элементарную схему, в которой известны все компоненты процесса, кроме одной. Нахождение этой компоненты и будет первым действием в решении задачи. Найденное в первом действии значение подставляется с цепочку схем, после чего в ней появляется следующая схема с одной неизвестной компонентой. Значение этой компоненты находится во втором действии задачи, и т. д.

Метод решения

Метод решения предложенных на этом занятии задач принято называть арифметическим. Арифметический метод для Вас не является новым. С ним вы знакомы из курса математики начальной школы. Однако тот способ его объяснения, который предлагается в нашей книге, известен далеко не всем. Его предложил известный математик и методист Н.Я. Виленкин. При решении задач арифметическим методом в трактовке Н.Я. Виленкина следует:

- Изобразить схематически процессы, о которых говорится в тексте задачи (соединения частей в целое, выделение части из целого, разностного или кратного сравнения).

- Указать на каждой схеме известные значения компонент.
- Если среди выделенных процессов есть процессы кратного сравнения с известным отношением, то в каждом из них большее целое представить в виде соединения частей, равных меньшему. При этом получатся дроблёные целые. Заменить ими большие целые на всех других схемах.
- Если среди выделенных процессов есть процессы разностного сравнения, то в каждом большем целом выделить часть, равную меньшему целому и разницу. При этом получатся целые с выделенной разницей. Поместить эти целые во все другие процессы.
- Найти элементарный процесс с одной неизвестной компонентой. При этом можно несколько частей целого воспринимать как одну. Вычислить значение этой компоненты.
- Поместить найденное значение в схематическое изображение задачи.
- Повторять предыдущие два шага, пока не будет найден ответ в задаче.

Примеры решений

Пример 1. *Позавчера школьники собрали макулатуры на 3 кг больше, чем вчера, а вчера — на 40 кг меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько килограммов макулатуры собрали школьники сегодня?*

Решение. В задаче рассматриваются следующие процессы (см. рис. 8.1):

- Разностного сравнения макулатуры, собранной вчера и позавчера.
- Соединения в целое макулатуры, собранной позавчера и макулатуры, собранной сегодня.
- Разностного сравнения целого из предыдущего процесса и макулатуры, собранной вчера.

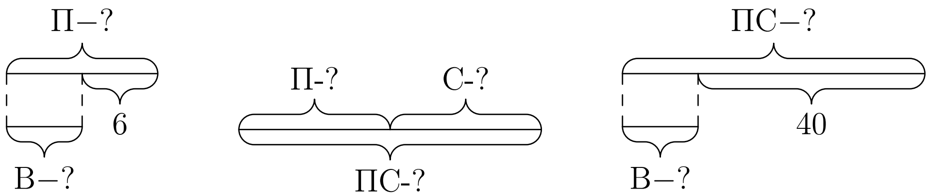
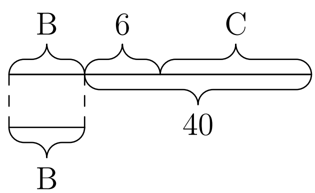


Рис. 8.1. Элементарные процессы, рассматривающиеся в примере 1

Подставим дроблёные целые из первых двух схем в третью:



Видно, что в правой части полученной схемы находится схема выделения части из целого. Из этой схемы находим, что сегодня собрали $40 - 6 = 34$ кг макулатуры.

Задачи

Задача 8.1. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные Репку вытащить не могут, а с ней могут. Сколько нужно Мышек, чтобы они сами вытащили Репку?

Задача 8.2. Камень весит 5 кг, ещё треть камня и ещё половину камня. Сколько весит камень?

Задача 8.3. На окраску кубика $2 \times 2 \times 2$ требуется 12 г краски. Сколько краски потребуется, чтобы окрасить кубик $6 \times 6 \times 6$?

Задача 8.4. Три охотника сварили кашу. Первый дал 2 кружки крупы, второй — одну, третий — ни одной, но он расплатился 5 патронами. Как должны поделить эти патроны первые два охотника?

Задача 8.5. У Ивана было 3 лепёшки, а у Петра — 4. Прохожий присоединился к их трапезе, заплатив 7 копеек. Все ели поровну. Как следует распределить деньги между Петром и Иваном?

Задача 8.6. Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600 \$. По истечении 8 месяцев он уволился и при расчёте получил «Запорожец» и 1000 \$. Сколько стоил «Запорожец»?

Задача 8.7. Кот в сапогах поймал четырёх щук и ещё половину улова. Сколько щук поймал Кот в сапогах?

Задача 8.8. Петя и Федя пошли в буфет. Петя взял себе стакан яблочного сока, а Федя взял себе такой же стакан виноградного сока. Петя решил пошалить и налил в Федин сок одну ложку своего сока. Федя отплатил ему тем же. Он зачерпнул ложкой смесь своего сока с ложкой яблочного сока, и ложку смеси положил в Петин стакан. Чего оказалось больше: яблочного сока в виноградном или виноградного в яблочном?

Задача 8.9. Два землекопа выкапывают 2 м канавы за 2 часа. Сколько землекопов за 5 часов выкопают 5 м канавы?

Задача 8.10. Три слона за 3 дня съедают 18 вёдер отрубей. Сколько слонов за 7 дней съедят 28 вёдер отрубей?

Задача 8.11. Разделите 25 рублей на две части так, чтобы одна часть была больше другой в 49 раз.

Задача 8.12. На лужайке босоногих мальчиков столько же, сколько обутых девочек. Кого на лужайке больше: девочек или босоногих детей?

Задача 8.13. Три карандаша и ластик стоят столько же, сколько два карандаша и шесть ластиков. Во сколько раз карандаш дороже ластика?

Задача 8.14. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

Задача 8.15. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше и на сколько минут?

Задача 8.16. Волк вместе с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка–2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

Ответы

8.1. 1237. **8.2**. 30 кг. **8.3**. 108. **8.4**. Отдать все патроны первому охотнику. **8.5**. Ивану — 2 копейки, а Петру — 5 копеек. **8.6**. 2200 $. **8.7**. 8. **8.8**. Поровну. **8.9–8.10**. 2. **8.11**. 50 копеек и 24 рубля 50 копеек. **8.12**. Поровну. **8.13**. В 5 раз. **8.14**. 32. **8.15**. На первом на 1 минуту раньше. **8.16**. 700.

Занятие 9

Метод полного перебора

Как отмечалось в предисловии, при изучении нового метода вам следует:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *В записи* $4\,\square\,4\,\square\,4$ *вместо каждого из пустых квадратов разрешается поставить один из знаков «+», «−», «×», «:». Сколькими способами можно это сделать так, чтобы полученное выражение было равно* 4*?*

Пример 2. *В записи* $1\,\square\,2\,\square\,3\,\square\,4$ *каждый из пустых квадратов заменили на один из знаков «+», «×», после чего нашли значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло получиться в результате? А какое наименьшее?*

Пример 3. *Коля загадал однозначное число, возвёл его в квадрат, из результата вычел загаданное число, и получил* 20*. Какое число мог загадать Коля?*

Пример 4. *Коля загадал однозначное число, возвёл его в квадрат, прибавил к результату* 10, *и трижды вычел из полученного числа загаданное. Какое наибольшее число он мог получить?*

Авторские ответы

Общие свойства

Указанные задачи удовлетворяют требованиям:

- в условии задачи говорится о конечном числе неизвестных, каждая из которых принимает конечное число значений;
- в задаче требуется определить все наборы значений неизвестных, при которых выполняется некоторое условие.

Краткая запись

Краткая запись этих задач может быть составлена, например, по следующему плану:

Дано:

- Условие: ____________________
- Неизвестные:

  x_1 — ____________________

  ...

  x_n — ____________________

- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения ____________________

  ...

  x_n может принимать значения ____________________

Найти: все наборы значений неизвестных, удовлетворяющие условию.

Метод решения

Предложенные выше задачи можно решить методом полного перебора, который заключается в следующем:

- выбрать набор неизвестных;
- для каждой неизвестной указать все возможные значения;
- составить все списки значений, в каждом из которых на первом месте стоит одно из возможных значений первой неизвестной, на втором — второй, ...;
- каждый из этих списков проверить на соответствие условию задачи.

Границы применимости

Если в задаче идёт речь о большом количестве переменных или часть переменных может принимать большое количество значений, то применение метода полного перебора приводит к большим временны́м затратам. Типичными примерами практической применимости этого метода без привлечения компьютера являются задачи, в которых речь идёт не более, чем о трёх неизвестных, каждая из которых принимает не более трёх значений, причём проверка каждого набора значений производится быстро.

Примеры решений

Пример 1. *В записи* $4\square 4\square 4$ *вместо каждого из пустых квадратов разрешается поставить один из знаков «+», «−», «×», «:». Сколькими способами можно это сделать так, чтобы полученное выражение было равно* 4*?*

Краткая запись этой задачи имеет вид:
Дано:

- Условие: значение числового выражения, полученного в результате подстановки в запись $4\square 4\square 4$ знаков арифметических действий, равно 4.

- Неизвестные:

  x_1 — знак в первом слева квадрате;

  x_2 — знак во втором слева квадрате.

- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения «$+$», «$-$», «$\times$», «:»;

  x_2 может принимать значения «$+$», «$-$», «$\times$», «:».

Найти: общее количество наборов из значений неизвестных, удовлетворяющих условию, указанному в задаче.

Решение.

Составим все возможные списки значений переменных. Для этого воспользуемся таблицей, каждая строка которой соответствует значению первого пропущенного знака, а каждый столбец — второго. В каждую клетку таблицы запишем список из знаков, первый из которых соответствует строке, а второй — столбцу, содержащему эту клетку (см. таблицу справа).

	$+$	$-$	$:$	$\times$
$+$	$+,+$	$+,-$	$+,:$	$+,\times$
$-$	$-,+$	$-,-$	$-,:$	$-,\times$
$:$	$:,+$	$:,-$	$:,:$	$:,\times$
$\times$	$\times,+$	$\times,-$	$\times,:$	$\times,\times$

Выпишем выражения, получающиеся при подстановке этих пар знаков в исходную запись. При этом выражения, значения которых равны 4, выделим **полужирным** шрифтом.

	$+$	$-$	$:$	$\times$
$+$	$4+4+4$	$\mathbf{4+4-4}$	$4+4:4$	$4+4\times 4$
$-$	$\mathbf{4-4+4}$	$4-4-4$	$4-4:4$	$4-4\times 4$
$:$	$4:4+4$	$4:4-4$	$4:4:4$	$\mathbf{4:4\times 4}$
$\times$	$4\times 4+4$	$4\times 4-4$	$\mathbf{4\times 4:4}$	$4\times 4\times 4$

Из таблицы видно, что значение 4 получается ровно в 4 выражениях.

Ответ. 4.

Аналогичной таблицей удобно пользоваться, когда число неизвестных в задаче равно двум. Это позволяет перебрать все возможные пары значений неизвестных, не пропустив ни одной.

Если неизвестных 3 и более, то при выполнении полного перебора удобно использовать дерево возможностей. Оно строится следующим образом:

- занумеруем неизвестные;
- отметим кружком корень дерева;
- изобразим отрезками первый ряд ветвей, выходящих из корня дерева; каждая ветвь в этом ряду соответствует определённому значению первой неизвестной;
- отметим кружками свободные концы ветвей первого ряда и назовём их вершинами;
- изобразим отрезками второй ряд ветвей, выходящих из вершин первого ряда; из каждой вершины первого ряда выходит столько ветвей второго ряда, сколько значений может принимать вторая неизвестная;
- отметим вершины второго ряда; каждая вершина второго ряда соответствует набору из значения первой неизвестной и значения второй неизвестной;

  и т. д.
- изобразим отрезками последний ряд ветвей, выходящих из вершин предпоследнего ряда; из каждой вершины предпоследнего ряда выходит столько же ветвей последнего ряда, сколько значений может принимать последняя неизвестная;
- отметим вершины последнего ряда.

Таким образом, каждой вершине последнего ряда (они называются *листьями*) соответствует единственная последовательность ветвей, связывающих его с корнем дерева. Эта последовательность задаёт определённый список значений неизвестных. При этом разным листьям соответствуют разные списки, и каждый список соответствует какому-нибудь листу.

Применим дерево возможностей для решения следующего примера.

Пример 2. *В записи* $1\square 2\square 3\square 4$ *каждый из пустых квадратов заменили на один из знаков «+», «×», после чего нашли значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло получиться в результате? А какое наименьшее?*

Краткая запись этой задачи имеет вид:
Дано:

- Условие: значение числового выражения, полученного в результате подстановки в запись $1\square 2\square 3\square 4$ знаков $+$ и $\times$, должно быть наибольшим из всех возможных.
- Неизвестные:

  x_1 — знак в первом слева квадрате;

  x_2 — знак во втором слева квадрате;

  x_3 — знак в третьем слева квадрате.

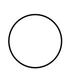
- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения $+$, $\times$;

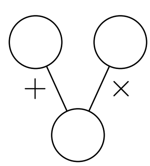
  x_2 может принимать значения $+$, $\times$;

  x_3 может принимать значения $+$, $\times$.

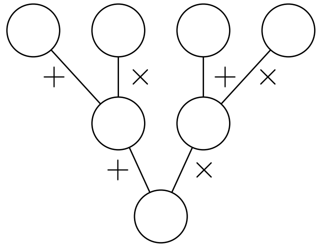
Найти: все наборы из значений неизвестных, удовлетворяющие условию.
Решение. Выберем следующий порядок неизвестных: x_1, x_2, x_3. Отметим корень дерева:



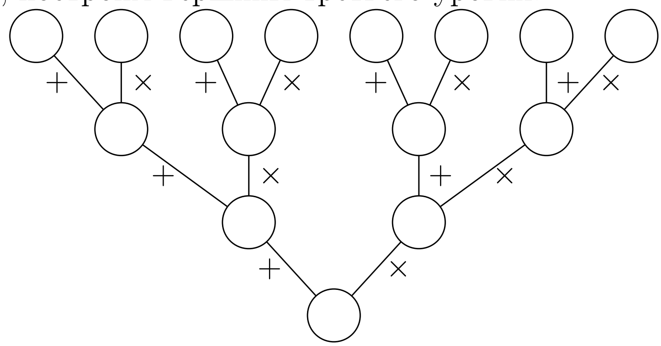
Теперь построим вершины первого уровня, соответствующие неизвестной x:



Далее построим вершины второго уровня:



И наконец, построим вершины третьего уровня:



Выпишем в таблицу выражения, соответствующие листьям дерева:

$1+2+3+4$	$1\times 2+3+4$
$1+2+3\times 4$	$1\times 2+3\times 4$
$1+2\times 3+4$	$1\times 2\times 3+4$
$1+2\times 3\times 4$	$1\times 2\times 3\times 4$

Теперь для каждого из этих выражений вычислим его значение:

$1+2+3+4=10$	$1\times 2+3+4=\ 9$
$1+2+3\times 4=15$	$1\times 2+3\times 4=14$
$1+2\times 3+4=11$	$1\times 2\times 3+4=10$
$1+2\times 3\times 4=25$	$1\times 2\times 3\times 4=24$

Из таблицы видно, что наименьшим является значение 9, а наибольшим — 25.

Ответ. Наименьшее возможное значение — 9; наибольшее — 25.

Замечание 1. Конечно, найти эти 8 выражений можно было и без дерева возможностей, но дерево возможностей позволяет доказать, что *других выражений получиться не могло.*

В рассмотренном выше случае дерево возможностей было построено последовательным определением вершин для каждого уровня. Приведём другое решение этого примера, в котором дерево возможностей строится последовательным определением ветвей. В целях экономии времени и места откажемся от графического изображения дерева возможностей.

Пример 3. *В записи* $1\square 2\square 3\square 4$ *каждый из пустых квадратов заменили на один из знаков* $+$, $\times$, *после чего нашли значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло получиться в результате? А какое наименьшее?*

Решение. Выберем те же неизвестные, что и в первом решении. Разберём случаи, соответствующие возможным значениям неизвестных:

1) В первом квадрате стоит знак «+».

   а) Во втором квадрате стоит знак «+».

      i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $1 + 2 + 3 + 4$, значение которого равно 10.

      ii) В третьем квадрате стоит знак «×». Тогда получается выражение $1 + 2 + 3 \times 4$, значение которого равно 15.

   б) Во втором квадрате стоит знак «×».

      i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $1 + 2 \times 3 + 4$, значение которого равно 11.

      ii) В третьем квадрате стоит знак «×». Тогда получается выражение $1 + 2 \times 3 \times 4$, значение которого равно 25.

2) В первом квадрате стоит знак «×».

   а) Во втором квадрате стоит знак «+».

      i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $1 \times 2 + 3 + 4$, значение которого равно 9.

      ii) В третьем квадрате стоит знак «×». Тогда получается выражение $1 \times 2 + 3 \times 4$, значение которого равно 14.

б) Во втором квадрате стоит знак «×».

   i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $1 \times 2 \times 3 + 4$, значение которого равно 10.

   ii) В третьем квадрате стоит знак «×». Тогда получается выражение $1 \times 2 \times 3 \times 4$, значение которого равно 24.

Итак, наименьшее возможное число равно 9, а наибольшее — 25.

Задачи

Задача 9.1. Коля загадал однозначное число, возвёл его в квадрат, из результата вычел загаданное число, и получил 20. Какое число мог загадать Коля?

Задача 9.2. Коля загадал однозначное число, возвёл его в квадрат, прибавил к результату 10, и трижды вычел из полученного числа загаданное. Какое наибольшее число он мог получить?

Задача 9.3. Найдите все однозначные числа n, для которых выполнено равенство $n^3 + n^2 - 1 = 10$.

Задача 9.4. Найдите все однозначные числа n, для которых число $2^n + 5$ делится на 9.

Задача 9.5. Найдите все однозначные числа n, для которых число $2^n + 3$ делится на 5.

Задача 9.6. На площади собрались рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Вася спросил у Пети: «Ты рыцарь?» Петя что-то быстро ответил, и сразу убежал по делам. Проходивший мимо Коля переспросил Васю: «Что ответил тебе Петя?» Вася сказал: «Петя ответил, что он — лжец». Кем является Вася: рыцарем или лжецом?

Задача 9.7. На острове три деревни: Правда, Кривда и Серединка. Жители Правды всегда говорят правду, жители Кривды всегда лгут, а жители

Серединки через раз то лгут, то говорят правду. Пожарника разбудили звонком по телефону, после чего произошёл следующий диалог:

— Что случилось?

— У нас пожар!

— Откуда звонок?

— Из Серединки!

Что делать пожарнику?

Задача 9.8. Найдите все пары натуральных чисел m и n, не превосходящих 5, для которых выполнено равенство $m^2 + n^2 = 2mn + 9$.

Задача 9.9. Сколько существует равнобедренных треугольников, длины сторон которых — однозначные целые числа, а периметр не превосходит 20?

Задача 9.10. В записи $20\square 4\square 5\square 9$ каждый из пустых квадратов заменили на один из знаков $+$, $-$, после чего нашли значение полученного выражения. Сколько различных чисел могли получить в результате?

Ответы

9.1. 5. **9.2**. 64. **9.3**. Таких однозначных чисел нет. **9.4**. 2, 8. **9.5**. 1, 5, 9. **9.6**. Лжец. **9.7**. Продолжать спать: вызов ложный. **9.8**. $m = 1, n = 4$; $m = 2, n = 5$; $m = 4, n = 1$; $m = 5, n = 2$. **9.9**. 45. **9.10**. 7.

Подсказки

9.1–9.2. Рассмотрите неизвестную «число, которое загадал Коля». **9.3–9.5**. Рассмотрите неизвестную n. **9.6**. Рассмотрите неизвестную «рыцарь ли Петя». **9.7**. Рассмотрите неизвестную «деревня, из которой звонили». **9.8**. Рассмотрите переменные m и n. **9.9**. Рассмотрите неизвестные a — длину боковой стороны треугольника, и b — длину основания. **9.10**. Воспользуйтесь деревом возможностей в одном из рассмотренных видов.

Решения

9.1. Рассмотрим неизвестную «число, которое загадал Коля». Эта неизвестная может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для каждого возможного значения неизвестной проделаем Колины вычисления, и выясним, мог ли Коля загадать это число. Результат запишем в виде таблицы:

n	0	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9
$n^2 - n$	0	0	2	6	12	**20**	30	42	56	72

Видно, что Коля мог загадать только число 5.

9.2. Аналогично предыдущей задаче, проделаем Колины вычисления для каждого из возможоных значений неизвестной «число, которое загадал Коля» и запишем результаты в виде таблицы:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
$n^2 + 10 - 3n$	10	8	8	10	14	20	28	38	50	**64**

Итак, Коля мог получить числа 8, 10, 14, 20, 28, 38, 50, 64. Наибольшее из этих чисел — 64.

9.3. Неизвестная n может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для каждого возможного значения неизвестной n вычислим значение выражения $n^3 + n^2 - 1$; результат запишем в виде таблицы:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^3 + n^2 - 1$	-1	1	11	35	79	149	251	391	575	809

Из таблицы видно, что равенство $n^3 + n^2 - 1 = 10$ не выполнено ни для одного из возможных значений неизвестной n.

9.4. Неизвестная n может принимать следующие значения: $1, 2, \ldots, 9$. Для каждого возможного значения неизвестной n вычислим $2^n + 5$ и проверим, делится ли это число на 9:

n	1	**2**	3	4	5	6	7	**8**	9
$2^n + 5$	7	**9**	13	21	37	69	133	**261**	517

Из таблицы видно, что подходят только числа 2 и 8.

9.5. Неизвестная n может принимать следующие значения: $1, 2, \ldots, 9$. Для каждого возможного значения неизвестной n вычислим 2^n+3 и проверим, делится ли это число на 5:

n	**1**	2	3	4	**5**	6	7	8	**9**
2^n+3	**5**	7	11	19	**35**	67	131	259	**515**

Отсюда видно, что подходят только числа 1, 5 и 9.

9.6. В этой задаче можно рассматривать все возможные значения пары неизвестных «рыцарь ли Петя» и «рыцарь ли Вася». Но мы приведём более короткое решение.

Заметим, что независимо от того, рыцарь ли Петя, он ответил Васе, что он — рыцарь. Действительно, рыцарь правдиво отвечает, что он — рыцарь, а лжец врёт, что он — рыцарь. Следовательно, Вася неправильно передал Петин ответ Коле, то есть Вася — лжец.

9.7. Рассмотрим все возможные значения неизвестной «деревня, из которой звонили»:

1) *Правда.* Тогда на вопрос «Откуда звонок?» не ответили бы «Из Серединки». Следовательно, этот случай невозможен.

2) *Серединка.* Тогда на второй вопрос пожарника ответили правду. Следовательно, предыдущее утверждение было ложным, и пожара нет.

3) *Кривда.* Тогда первое утверждение ложно, то есть пожара нет.

Итак, вызов ложный, и пожарник может продолжать спать дальше.

9.8. Каждая из неизвестных m и n может принимать значения от 1 до 5. Составим таблицу, строки которой соответствуют возможным значениям неизвестной m, а столбцы — неизвестной n. В клетки таблицы впишем левую и правую части равенства, получающегося после подстановки соответствующей пары значений, и выделим клетки, в которых написаны верные равенства:

	1	2	3	4	5
1	$2 \neq 11$	$5 \neq 13$	$10 \neq 15$	$\mathbf{17 = 17}$	$26 \neq 19$
2	$5 \neq 13$	$8 \neq 17$	$13 \neq 21$	$20 \neq 25$	$\mathbf{29 = 29}$
3	$10 \neq 15$	$13 \neq 21$	$18 \neq 27$	$25 \neq 33$	$34 \neq 39$
4	$\mathbf{17 = 17}$	$20 \neq 25$	$25 \neq 33$	$32 \neq 41$	$41 \neq 49$
5	$26 \neq 19$	$\mathbf{29 = 29}$	$34 \neq 39$	$41 \neq 49$	$50 \neq 59$

Из таблицы видно, что равенство выполнено для следующих пар чисел: $m = 1, n = 4$; $m = 2, n = 5$; $m = 4, n = 1$; $m = 5, n = 2$.

9.9. Рассмотрим следующие неизвестные:

a — длина боковой стороны треугольника;

b — длина основания.

Составим таблицу, строки которой соответствуют значениям неизвестной a, а столбцы — значениям неизвестной b. Выделим **жирным** клетки таблицы, для которых выполнено неравенство треугольника $2a > b$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**1, 1**	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1, 8	1, 9
2	**2, 1**	**2, 2**	**2, 3**	2, 4	2, 5	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9
3	**3, 1**	**3, 2**	**3, 3**	**3, 4**	**3, 5**	3, 6	3, 7	3, 8	3, 9
4	**4, 1**	**4, 2**	**4, 3**	**4, 4**	**4, 5**	**4, 6**	**4, 7**	4, 8	4, 9
5	**5, 1**	**5, 2**	**5, 3**	**5, 4**	**5, 5**	**5, 6**	**5, 7**	**5, 8**	**5, 9**
6	**6, 1**	**6, 2**	**6, 3**	**6, 4**	**6, 5**	**6, 6**	**6, 7**	**6, 8**	**6, 9**
7	**7, 1**	**7, 2**	**7, 3**	**7, 4**	**7, 5**	**7, 6**	**7, 7**	**7, 8**	**7, 9**
8	**8, 1**	**8, 2**	**8, 3**	**8, 4**	**8, 5**	**8, 6**	**8, 7**	**8, 8**	**8, 9**
9	**9, 1**	**9, 2**	**9, 3**	**9, 4**	**9, 5**	**9, 6**	**9, 7**	**9, 8**	**9, 9**

Теперь в клетки, соответствующие треугольникам, впишем их периметры, а остальные оставим пустыми; выделим клетки, соответствующие искомым треугольникам:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**3**								
2	**5**	**6**	**7**						
3	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**				
4	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**		
5	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
6	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	21
7	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	21	22	23
8	**17**	**18**	**19**	**20**	21	22	23	24	25
9	**19**	**20**	21	22	23	24	25	26	27

Из таблицы видно, что искомых треугольников ровно 45.

9.10. Как и в примере 3, в качестве неизвестных выберем знаки, поставленные вместо квадратов. Каждая из этих неизвестных может принимать значения «+» или «−». Разберём случаи, соответствующие различным значениям неизвестных.

1) В первом квадрате стоит знак «+».

   а) Во втором квадрате стоит знак «+».

      i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $20 + 4 + 5 + 9$, значение которого равно 38.

      ii) В третьем квадрате стоит знак «−». Тогда получается выражение $20 + 4 + 5 - 9$, значение которого равно 20.

   б) Во втором квадрате стоит знак «−».

      i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $20 + 4 - 5 + 9$, значение которого равно 28.

      ii) В третьем квадрате стоит знак «−». Тогда получается выражение $20 + 4 - 5 - 9$, значение которого равно 10.

2) В первом квадрате стоит знак «−».

   а) Во втором квадрате стоит знак «+».

   i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $20 - 4 + 5 + 9$, значение которого равно 30.
   ii) В третьем квадрате стоит знак «−». Тогда получается выражение $20 - 4 + 5 - 9$, значение которого равно 12.

б) Во втором квадрате стоит знак «−».

   i) В третьем квадрате стоит знак «+». Тогда получается выражение $20 - 4 - 5 + 9$, значение которого равно 20.
   ii) В третьем квадрате стоит знак «−». Тогда получается выражение $20 - 4 - 5 - 9$, значение которого равно 2.

Видно, что получается 7 различных чисел.

Занятие 10

Оптимизации полного перебора

На этом занятии вам предлагается придумать способ упрощения процедуры полного перебора. Для этого вы должны решить две задачи и выполнить письменно следующие задания:

1) выявите свойства, отличающие задачи этого класса от задач, которые вы решали методом полного перебора, и укажите причину, по которой применять метод перебора в этом случае неудобно;
2) укажите свойства задач, которые позволяют сократить затраты времени при их решении методом полного перебора;
3) придумайте общий метод решения предложенных задач.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *У Коли есть три рублёвые, две двухрублёвые и три пятирублёвые монеты. Сколькими способами он может разменять десятирублёвую купюру?*

Пример 2. *На карточках написаны числа* 11, 12, 21, 22, 31 *и* 32. *Разрешается взять две карточки и составить из них четырёхзначное число. Сколько из получающихся таким способом чисел делятся на* 3*?*

Пример 3. *Вася загадал число и разделил его на* 7 *с остатком. При этом в частном получилось то же самое число, что и в остатке. Какое число мог загадать Вася?*

Авторские ответы

Свойства, отличающие от задач предыдущего занятия

В предложенных задачах количество переменных находится на границе применимости метода полного перебора, а количество значений одной из переменных находится за границами применимости этого метода. По этой причине применение метода полного перебора в рассматриваемом случае приведёт к большим временны́м затратам и в этом смысле является нерациональным.

Свойства, позволяющие сократить перебор

Для предложенных задач выполняется одно из следующих требований:

- существует способ, позволяющий установить несоответствие набора условию, указанному в задаче, по значениям не всех, а части неизвестных, входящих в набор;
- существует способ, позволяющий по значениям части рассматриваемых неизвестных определить значения оставшихся.

Метод решения

В случае выполнения одного из указанных требований процедуру полного перебора с использованием дерева возможностей можно оптимизировать, отбрасывая заведомо неподходящие наборы значений на промежуточных этапах. При этом метод решения задач примет вид:

- выбрать набор неизвестных;
- указать возможные значения для каждой из неизвестных;
- составить вариант дерева возможностей, в котором при построении каждого уровня удаляются заведомо неподходящие вершины.

Примеры решений

Пример 1. *У Коли есть три рублёвые, две двухрублёвые и три пятирублёвые монеты. Скольками способами он может разменять десятирублёвую купюру?*

Решение. Выделим неизвестные, о которых говорится в условии задачи:

x — количество пятирублёвых монет, использованных при размене;

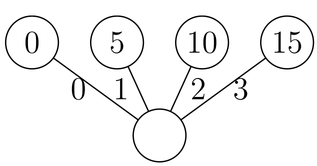
y — количество двухрублёвых монет, использованных при размене;

z — количество рублёвых, использованных при размене.

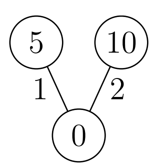
Неизвестная x может принимать значения 0, 1, 2, 3, неизвестная y — значения 0, 1, 2, а неизвестная z — значения 0, 1, 2, 3.

Будем составлять дерево возможностей, параллельно исключая заведомо невозможные варианты.

Запишем в вершинах первого уровня, сколько набрано пятирублёвыми монетами (см. рис. 10.1а). В четвёртой вершине этого уровня стоит число $15 > 10$, то есть пятирублёвыми монетами набрано больше, чем всего надо разменять. Следовательно, этот вариант невозможен. Заметим теперь, что общее достоинство оставшихся монет равно $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ рублей. Следовательно, пятирублёвыми монетами должно быть набрано как минимум $10 - 7 = 3$ рубля, то есть первая вершина (в которой пятирублёвыми монетами набрано 0 рублей) не подходит. Удалим невозможные вершины (см. рис. 10.1б).



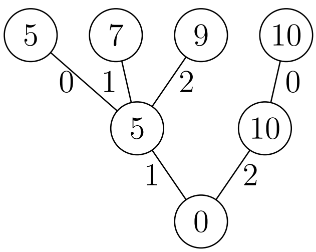
(а) До оптимизации



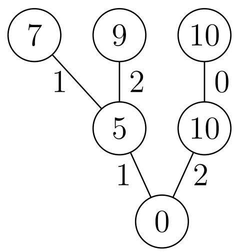
(б) После оптимизации

Рис. 10.1. Построение первого уровня дерева возможностей

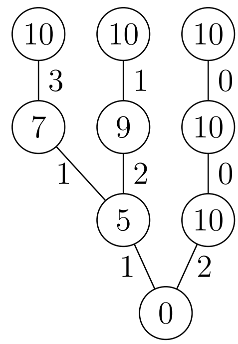
Далее вершины, в которых набрано больше 10 рублей, мы будем удалять без дополнительных пояснений. Построим вершины второго уровня и запишем в них суммы, набранные двухрублёвыми и пятирублёвыми монетами (см. рис. 10.2а). Общее достоинство оставшихся монет равно $3 \cdot 1 = 3$ рубля, то есть уже должно быть набрано $10 - 3 = 7$ рублей, а значит, первая вершина не подходит (см. рис. 10.2б).



(а) Второй до оптимизации



(б) Второй после оптимизации



(в) Третий

Рис. 10.2. Построение второго и третьего уровней дерева возможностей

Осталось заметить, что рублёвыми монетами приходится «добирать» оставшуюся до 10 рублей сумму, то есть для каждой из вершин второго уровня значение неизвестной z определяется однозначно. Окончательное дерево возможностей изображено на рисунке рис. 10.2в.

Итак, продавец сможет разменять десятирублёвую купюру тремя способами:

1) 2 пятирублёвые монеты;

2) 1 пятирублёвая монета, 2 двухрублёвых и 1 рублёвая;

3) 1 пятирублёвая монета, 1 двухрублёвая и 3 рублёвых.

Ответ. Продавец может разменять 10-рублёвую купюру тремя способами.

Задачи

Задача 10.1. Сколько существует прямоугольных параллелепипедов объёма 12 м^3, длины сторон которых (в метрах) — целые числа?

Задача 10.2. На карточках написаны числа 11, 12, 21, 22, 31 и 32. Разрешается взять две карточки и составить из них четырёхзначное число. Сколько из получающихся таким способом чисел делятся на 3?

Задача 10.3. Эстафета состоит из трёх участков длины 150 км, 300 км и 450 км. В распоряжении команды есть машины со скоростями 100 км/ч, 150 км/ч и 200 км/ч. Как им распределить машины по участкам эстафеты, чтобы пройти её за наименьшее время (ставить одну машину на два участка не разрешается)?

Задача 10.4. К бассейну подведено 4 трубы. Через первые две вода поступает в бассейн, а через другие две — сливается из бассейна. Из первой трубы бассейн наполняется за 20 минут, из второй — за 30 минут. Через третью трубу вся вода вытекает из бассейна за 40 минут, а через четвёртую — за 60 минут. Сколькими способами можно перекрыть часть труб так, чтобы бассейн наполнился не более, чем за 22 минуты?

Задача 10.5. Сколько существует треугольников, длины сторон которых — однозначные числа, одно из которых равно 2?

Задача 10.6. Вася загадал число и разделил его на 7 с остатком. При этом в частном получилось то же самое число, что и в остатке. Какое число мог загадать Вася?

Задача 10.7. У Коли есть 3 красных, 2 синих и 2 зелёных ручки. Сколькими способами он может составить набор из 5 ручек (ручки одного цвета неотличимы)?

Задача 10.8. Решите уравнение $2^x + 3^y = 91$ в натуральных числах.

Ответы

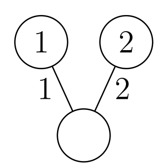
10.1. 4. **10.2**. 10. **10.3**. Машину со скоростью 100 км/ч надо поставить на участок длины 150 км, со скоростью 150 км/ч — на участок длины 300 км, а со скоростью 200 км/ч — на участок длины 450 км. **10.4**. Пятью способами. **10.5**. 16. **10.6**. 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48. **10.7**. 6. **10.8**. $x = 6$, $y = 3$.

Подсказки

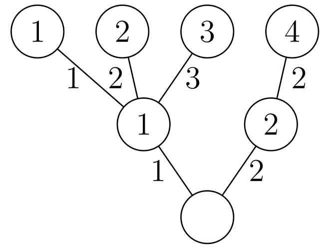
10.1. В качестве неизвестных выберите стороны параллелепипеда a, b, c, причём $a \leq b \leq c$. **10.2**. Используйте признак делимости на 3. **10.3**. При составлении дерева возможностей учтите, что нельзя ставить одну машину на два участка эстафеты. **10.4**. При составлении дерева возможностей вписывайте в вершины скорость наполнения бассейна через уже учтённые трубы. **10.5**. В качестве неизвестных выберите длины a и b двух других сторон треугольника, причём $a \leq b$. **10.6**. Заметьте, что загаданное число полностью определяется своим остатком при делении на 7. В качестве неизвестной, значения которой перебираются, выберите этот остаток. **10.7**. Задача аналогична рассмотренной во введении. **10.8**. В качестве первой неизвестной выберите y.

Решения

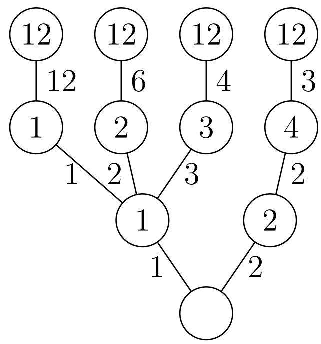
10.1. Рассмотрим неизвестные a, b, c — длины сторон параллелепипеда (в метрах), причём $a \leq b \leq c$. Поскольку объём параллелепипеда равен 12 м^3, каждая из неизвестных a, b, c является делителем числа 12, то есть может принимать одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Далее, число a не может быть больше 2. Действительно, если $a \geq 3$, то $b \geq 3$, $c \geq 3$, откуда $V = abc \geq 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 > 12$. Следовательно, неизвестная a может принимать одно из значений 1, 2. Первый уровень дерева возможностей изображён на рисунке справа.



При составлении второго уровня дерева возможностей учтём, что число b не может быть больше 3. Действительно, если $b \geq 4$, то $c \geq 4$, и $abc \geq 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16 > 12$. Более того, при $a = 2$ значение $b = 3$ также невозможно: иначе $abc \geq$ $\geq 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 > 12$. Кроме того, $b \geq a$. Второй уровень дерева возможностей изображён на рисунке справа.



Значение c вычисляется по формуле $c = \frac{12}{ab}$:



Таким образом, существует 4 прямоугольных параллелепипеда, удовлетворяющих условию задачи.

10.2. По признаку делимости на 3, число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Но сумма цифр получающегося четырёхзначного числа равна сумме сумм цифр чисел на взятых карточках. Вычислим суммы цифр всех написанных на карточках чисел:

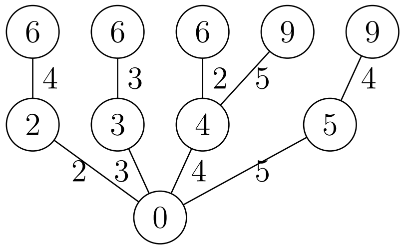
число	11	12	21	22	31	32
сумма цифр	2	3	3	4	4	5

Рассмотрим следующие неизвестные:

x — сумма цифр числа, написанного на первой карточке;

y — сумма цифр числа, написанного на второй карточке.

Каждая из этих неизвестных может принимать значения 2, 3, 4, 5. Изобразим дерево возможностей рассматриваемых неизвестных. При этом в каждой вершине будем писать сумму уже учтённых неизвестных.



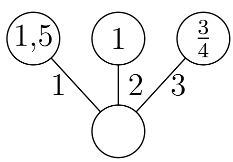
Таким образом, мы нашли все пары значений неизвестных x и y, удовлетворяющие условию задачи. Осталось для каждой из этих пар выбрать все пары карточек, для которых сумма цифр на первой карточке равна x, а на второй — y:

x	y	кар. 1	кар. 2	x	y	кар. 1	кар. 2
2	4	11	22	4	2	31	11
2	4	11	31	4	5	22	32
3	3	12	21	4	5	31	32
3	3	21	12	5	4	32	22
4	2	22	11	5	4	32	31

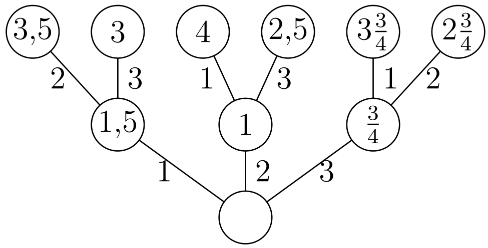
Итак, всего получится 10 чисел, делящихся на 3.

10.3. В качестве неизвестных выберем машины, поставленные на первый, второй и третий участки.

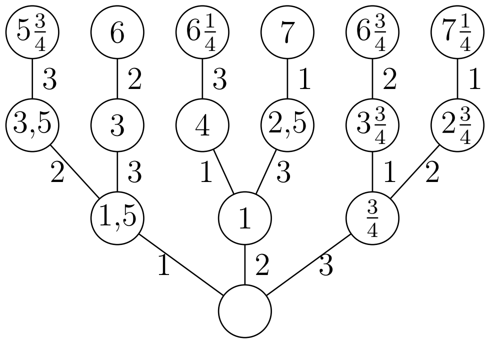
Мы будем записывать в вершинах дерева возможностей время, затраченное уже поставленными машинами. Составим первый уровень дерева возможностей:



Составим второй уровень дерева возможностей, учитывая, что на первый и второй участок поставлены разные машины:



Составим последний (третий) уровень дерева возможностей, учитывая, что на последний участок эстафеты обязательно ставить ту единственную машину, которая не поставлена ни на первый, ни на второй участки:



Наименьшее возможное время — $5\frac{3}{4}$ часа — написано в самой левой вершине последнего уровня дерева возможностей. Следовательно, машину со скоростью 100 км/ч надо поставить на участок длины 150 км, со скоростью 150 км/ч — на участок длины 300 км, а со скоростью 200 км/ч — на участок длины 450 км.

До этого ответа можно было догадаться, например, следующим образом: «ясно», что лучше ставить медленную машину на короткий участок, а быструю — на длинный. Позже (не в рамках этого курса) вы узнаете, как можно формализовать такое рассуждение, а сейчас оно не имеет доказательной силы, и приходится перебирать все имеющиеся возможности.

10.4. Рассмотрим следующие неизвестные:

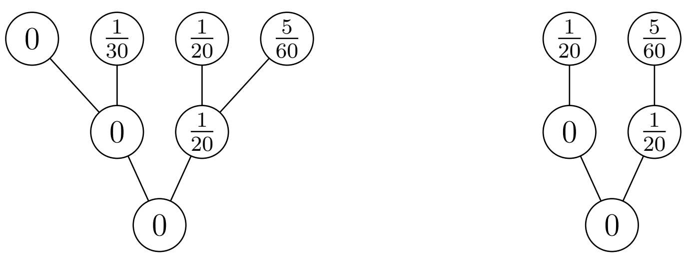
x_1 — открыта ли первая труба;

x_2 — открыта ли вторая труба;

x_3 — открыта ли третья труба;

x_4 — открыта ли четвёртая труба.

Будем составлять дерево возможностей, вписывая в вершины скорость наполнения бассейна через уже учтённые трубы (в бассейнах за минуту). Первые два уровня дерева возможностей изображены на рис. 10.3а.



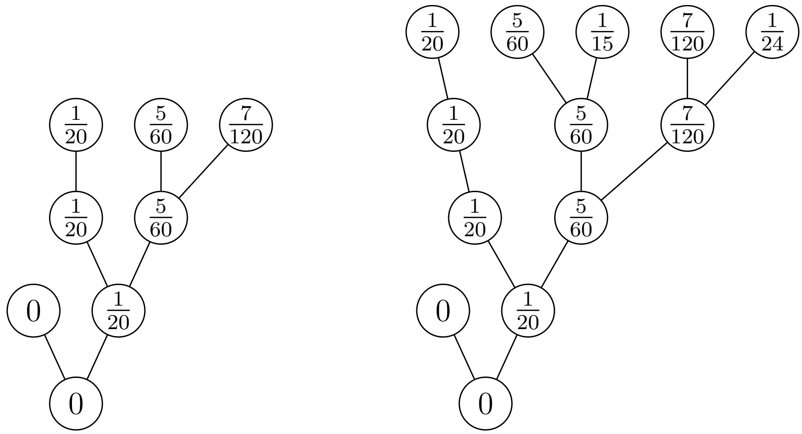
(а) До оптимизации (б) После оптимизации

Рис. 10.3. Первые два уровня дерева возможностей

Для того, чтобы набор значений неизвестных удовлетворял условию задачи, необходимо и достаточно, чтобы суммарная скорость наполнения бассейна через все трубы была не меньше, чем $\frac{1}{22}$ бассейна за минуту. Поскольку через все неучтённые трубы вода выливается из бассейна, скорость наполнения через уже учтённые трубы должна быть не меньше $\frac{1}{22}$ бассейна за минуту. Следовательно, первые две вершины не подходят. На рисунке 10.3б эти вершины удалены.

Построим теперь третий уровень дерева возможностей, удаляя сразу вершины, в которых скорость наполнения бассейна меньше, чем $\frac{1}{22}$ бассейна за минуту. Результат изображён на рис. 10.4а.

Осталось аналогичным образом построить последний (четвёртый) уровень дерева возможностей (см. рис. 10.4б), и посчитать количество листьев



(а) 3-й уровень (б) 4-й уровень

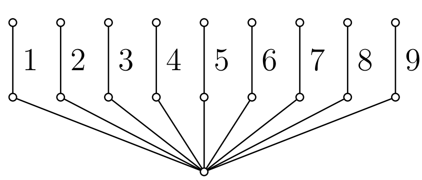
Рис. 10.4. Третий и четвёртый уровни дерева возможностей

у получившегося дерева. Итак, существует ровно пять способов открыть трубы так, чтобы выполнялось требование задачи.

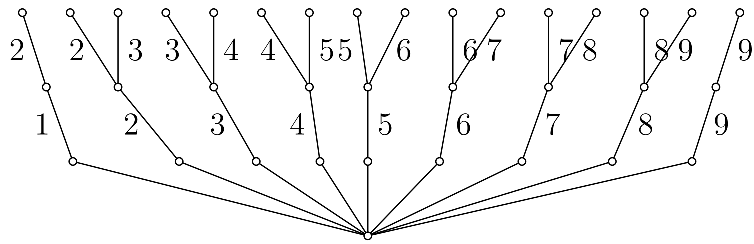
10.5. У каждого такого треугольника, кроме стороны длины 2, есть ещё две стороны. Обозначим их длины через a и b, где $a \le b$. Тогда каждая из неизвестных a, b может принимать значения 1, …, 9. Набор значений этих неизвестных соответствует треугольнику тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} a &\le b; \\ a + 2 &> b; \\ a + b &> 2. \end{aligned}$$

В качестве первой неизвестной выберем a и нарисуем первый уровень дерева возможностей:



Во втором уровне будем изображать только те значения неизвестной b, которые удовлетворяют указанным неравенствам.



Отсюда видно, что треугольников, удовлетворяющих требованиям задачи, ровно 16.

10.6. По определению деления с остатком, число n, дающее при делении на 7 в частном и в остатке число q, равно $n = 7q + q = 8q$. Следовательно, для решения задачи достаточно перебрать все возможные значения q, и для каждого из них вычислить число $n = 8q$. Поскольку q является остатком при делении на 7, $0 \le q < 7$, то есть неизвестная q может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, неизвестная n может принимать значения 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48.

10.7. Рассмотрим неизвестные:

r — количество выбранных красных ручек;

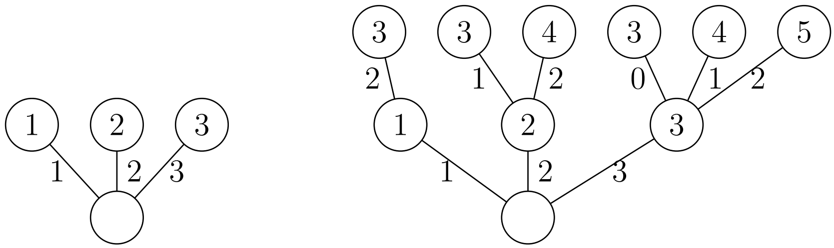
g — количество выбранных зелёных ручек;

b — количество выбранных синих ручек.

Неизвестная r может принимать значения 0, 1, 2, 3, а неизвестные g и b — значения 0, 1, 2. В вершины дерева возможностей будем вписывать общее число ручек уже учтённых цветов.

Построим первый уровень дерева возможностей (соответствующий возможным значениям неизвестной r). Учтём при этом, что всего ручек оставшихся цветов 4, а значит, среди выбранных должна быть хотя бы одна красная ручка, Таким образом, неизвестная r не может принимать значение 0. Первый уровень дерева возможностей изображён на рисунке 10.5а.

Построим теперь второй уровень дерева возможностей (соответствующий возможным значениям неизвестной g). Учтём при этом, что число

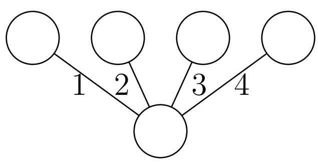


(а) Первый уровень (б) Второй уровень

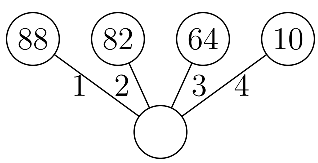
Рис. 10.5. Построение дерева возможностей

красных и зелёных ручек в наборе не менее $5 - 2 = 3$ (см. рис. 10.5б). Для каждого из этих вариантов значение неизвестной b определяется однозначно. Следовательно, Коля может составить набор шестью способами.

10.8. Выберем в качестве первой неизвестной y. Эта неизвестная может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Действительно, если $y \geq 5$, то $3^y \geq 3^5 = 243$, а значит, левая часть уравнения заведомо больше правой. Нарисуем теперь первый уровень дерева возможностей:



Для каждого из найденных вариантов вычислим 2^x по формуле $2^x = 91 - 3^y$:



Из полученных чисел ровно одно (а именно, 64) является степенью двойки. Следовательно, $y = 3$, $x = 6$ — единственное решение.

Занятие 11

Математические ребусы

На этом занятии математического кружка вы познакомитесь с новым способом оптимизации полного перебора. Как отмечалось выше, при построении способа оптимизации следует:

1) выявить свойства, отличающие задачи этого класса от задач, которые вы решали методом полного перебора, и указать причину, по которой применять метод перебора в этом случае неудобно;

2) указать свойства задач, которые позволяют сократить затраты времени при их решении методом полного перебора;

3) придумать общий метод решения предложенных задач.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Найдите все способы заменить в записи* $WIND \cdot OF = CHANGE$ *разные буквы разными цифрами, а одинаковые — одинаковыми так, чтобы получилось верное равенство.*

Пример 2. *Найдите все способы заменить в приведённой ниже записи разные буквы разными цифрами, а одинаковые — одинаковыми так, чтобы получилось верное равенство.*

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} СОРОК \\ ОДИН \end{array} \\ \hline ТРИСТА \end{array}$$

Пример 3. *Найдите все способы заменить в приведённой ниже записи звёздочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.*

$$
\begin{array}{r@{\,}cccccc}
\times & & & & * & 1 & * \\
 & & & & 3 & * & 2 \\
\cline{5-7}
 & & & & * & * & * \\
+ & & 3 & * & 2 & * & \\
 & * & 2 & * & 5 & & \\
\cline{2-7}
 & 1 & * & 8 & * & 3 & *
\end{array}
$$

Пример 4. *Найдите все способы заменить в приведённой ниже записи звёздочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.*

$$
\begin{array}{r@{\,}ccc}
\times & & 2 & 7 \\
 & & * & * \\
\cline{2-4}
 & & 5 & * \\
+ & * & * & \\
\cline{2-4}
 & 8 & * & *
\end{array}
$$

Авторские ответы

В каждом из приведённых примеров указана запись, в которой цифры заменены буквами или звёздочками. В вопросе требуется найти все способы подставить цифры вместо букв и звёздочек так, чтобы получилось верное равенство. Задания такого типа называют *математическими ребусами*. Существует два типа математических ребусов.

Ребусы первого типа — это задачи, удовлетворяющие следующим требованиям:

- в тексте задачи приведена буквенная запись;
- в вопросе задачи требуется определить цифры, при подстановке которых в эту запись вместо букв выполняется условие, сформулированное в тексте задачи.

При решении ребусов этого типа следует помнить, что разные буквы заменяются разными цифрами, а одинаковые буквы — одинаковыми цифрами.

Ребусы второго типа — это задачи, удовлетворяющие следующим требованиям:

- дана запись, в которой встречаются звёздочки;
- в вопросе задачи требуется определить набор цифр, при подстановке которых вместо звёздочек выполнится условие, сформулированное в тексте задачи. При этом звёздочку можно заменять любой цифрой, независимо от того, использована ли она в другом месте.

Решить ребус означает найти все возможные наборы цифр, удовлетворяющие условию задачи.

Очевидно, что решение даже самого простого ребуса методом полного перебора приведёт к большим временны́м затратам. Основная причина — большое количество неизвестных, каждая из которых может принимать до десяти значений.

Для того, чтобы найти свойство, позволяющее упростить процедуру полного перебора, рассмотрим отдельно ребусы первого и второго типов. В ребусах первого типа каждая буква заменяет свою цифру. Следовательно, выполнено следующее утверждение:

Утверждение 1. *Если в записи используется* 10 *различных букв, значит, в числовом выражении использованы все* 10 *цифр; если используется более* 10 *букв, то ребус не имеет решения.*

Это утверждение позволяет ограничить варианты перебора по количеству переменных. Отметим, что для ребусов второго типа это ограничение неприменимо, так как звёздочки в разных местах можно заменять одной и той же цифрой.

Перечислим несколько простых утверждений, позволяющих ограничить перечень значений, которые может принимать каждая из переменных. Эти утверждения используют расположение буквы или звёздочки в записи.

Утверждение 2. *Если в записи числа буква расположена в старшем разряде, то её значение не может равняться нулю.*

Следующие утверждения выполнены для ребусов, в которых зашифрованы компоненты сложения двух слагаемых.

Утверждение 3. *Если A и B — количество единиц в некотором разряде в слагаемых, а C — количество единиц в сумме, то возможны следующие варианты:*

- $A + B = C$, *в этот разряд нет переноса; из этого разряда нет переноса;*
- $A + B + 1 = C$, *в этот разряд есть перенос; из этого разряда нет переноса;*
- $A + B = C + 10$, *в этот разряд нет переноса; из этого разряда есть перенос;*
- $A + B + 1 = C + 10$, *в этот разряд есть перенос; из этого разряда есть перенос.*

Это утверждение удобно применять, если известно, есть ли перенос в рассматриваемый разряд, или известно, есть ли перенос из рассматриваемого разряда.

Утверждение 4. *Если количество разрядов в сумме больше количества разрядов в каждом из двух слагаемых, то старший разряд в сумме содержит 1 единицу.*

Утверждение 5. *Если буква в каком-то разряде суммы совпадает с буквой в том же разряде одного из слагаемых, то в этом разряде второго слагаемого 0 или 9 единиц. Если это разряд единиц, то в разряде единиц второго слагаемого 0 единиц.*

Утверждение 6. *Если количество разрядов в сумме больше числа разрядов в одном из слагаемых и на 2 больше числа разрядов в другом слагаемом, то:*

- *вторая слева цифра суммы равна 0;*
- *у большего слагаемого в старшем разряде 9 единиц.*

Доказательство этих утверждений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Аналогичные утверждения можно сформулировать для ребусов, в которых зашифрованы компоненты вычитания. С другой стороны, ребус на вычитание всегда можно заменить ребусом на сложение, перенеся вычитаемое в другую часть равенства.

Следующие утверждения выполнены для ребусов, в которых зашифрованы компоненты умножения.

Утверждение 7. *Если в одном из слагаемых, получаемых при умножении, все буквы совпадают с буквами в множимом, то соответствующий разряд множителя содержит 1 единицу.*

Утверждение 8. *Если отсутствует одно из слагаемых, получаемых при умножении, то соответствующий разряд множителя содержит 0 единиц.*

Если вы будете внимательны, то вам удастся самостоятельно сформулировать общие утверждения, позволяющие провести оптимизацию при решении ребусов. Заметим, что большинство из приведённых утверждений легко придумать заново, поэтому специально их запоминать не целесообразно.

Итак, процесс оптимизации метода полного перебора при решении математических ребусов распадается на два этапа.

1) Соотношения между значениями букв и положением буквы в предложенной записи позволяют выделить группы невозможных значений переменных (см., например, утверждения 1–8).
2) На втором этапе выбор значений из оставшихся вариантов выполняется с помощью дерева возможностей.

Примеры решений

Соглашение. *Далее вместо полной формулировки задания к ребусу мы будем просто писать «Решите ребус».*

Пример 1. *Решите ребус:* $WIND \cdot OF = CHANGE$.

Решение. Заметим, что в записи ребуса использовано 11 различных букв. Следовательно, заменить их различными цифрами невозможно.
Ответ. Нет решений.

Пример 2. *Решите ребус:*

$$+\begin{array}{r} СОРОК \\ ОДИН \\ \hline ТРИСТА \end{array}$$

Решение. По утверждению 4, Т = 1, а по утверждению 6, Р = 0, С = 9. Подставим полученные значения в ребус: 9О0ОК + ОДИН = 10И91А.

Применим утверждение 3 к разряду сотен. Варианты 0 + Д = 10 + 9 и 0 + Д + 1 = 10 + 9 невозможны, так как в этих случаях Д > 9. Остаются варианты 0 + Д = 9 и 0 + Д + 1 = 9. Первый из них невозможен, так как в этом случае Д = 9 = С. Итак, Д = 8.

Применим теперь утверждение 3 к разряду тысяч. При этом учтём, что из разряда сотен в разряд тысяч переноса нет, а из разряда тысяч в разряд десятков тысяч — есть. Следовательно, О + О = 10 + И, откуда О $\geq$ 5. Поскольку цифры 8 и 9 уже использованы, О = 5 или О = 6, или О = 7. Разберём эти случаи:

1) О = 5. Тогда И = О + О − 10 = 0 = Р, что невозможно.
2) О = 6. Тогда И = О + О − 10 = 2, и ребус примет вид: 9606К + 682Н = = 10291А. Заметим, что в разряде десятков не выполнено ни одно из соотношений утверждения 3. Следовательно, этот случай невозможен.
3) О = 7. Тогда И = О + О − 10 = 4, и ребус примет вид: 9707К + 784Н = = 10491А. Неиспользованными остались цифры 2, 3, 5 и 6. Буквы К, Н и А надо заменить на какие-то из этих цифр так, чтобы выполнялось равенство К + Н = А. Очевидно, это можно сделать двумя способами: 2+3 = 5 и 3+2 = 5. Итак, получаем два решения ребуса: 97072+7843 = 104915 и 97073 + 7842 = 104915.

Ответ. 97072 + 7843 = 104915 и 97073 + 7842 = 104915.

Задачи

Задача 11.1. Решите ребусы:

(а) $$\begin{array}{r} A\\ +\quad A\,B\\ A\,B\,C\\ \hline B\,C\,B \end{array}$$

(б) $$\begin{array}{r} A\,B\\ +\,B\,C\\ C\,A\\ \hline A\,B\,C \end{array}$$

(в) $$\begin{array}{r} \text{Б Р А}\\ +\,\text{Б А Р}\\ \hline \text{Р А Б} \end{array}$$

(г) $$\begin{array}{r} X\\ +YY\\ X\\ \hline ZZZ \end{array}$$

(д) $$\begin{array}{r} \times\; A\,A\,A\,A\\ A\,A\,A\\ \hline B\,B\,B\,B\\ +\quad B\,B\,B\,B\\ B\,B\,B\,B\\ \hline B\,C\,D\,A\,E\,B \end{array}$$

(е) $$\begin{array}{r} A\,B\,A\,B\,A\\ +\;C\,B\,C\,B\,C\\ \hline C\,B\,C\,B\,C\,B \end{array}$$

(ж) $$\begin{array}{l|l} -\,\text{М У Х А} & \text{Х А}\\ \cline{2-2} \,\text{Х А} & \text{У Х А}\\ \cline{1-1} \quad -\,\text{Н Х} & \\ \quad\,\text{А Р} & \\ \cline{1-1} \quad -\,\text{У Х А} & \\ \quad\,\text{У Х А} & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & \end{array}$$

(з) $$\begin{array}{r} \text{О З О Р Н И К}\\ \text{З О Р Н И К}\\ \text{О Р Н И К}\\ +\qquad\qquad \text{Р Н И К}\\ \text{Н И К}\\ \text{И К}\\ \text{К}\\ \hline 5\;5\;5\;3\;3\;2\;1 \end{array}$$

(и) $$\begin{array}{ccccccc} AB & + & 8 & = & 3C\\ - & & - & & -\\ DE & + & C & = & DC\\ \hline DB & + & 3 & = & AE \end{array}$$

(к) $AAA - AA - A = BB.$

Задача 11.2. Найдите значение дроби $\dfrac{F\cdot A\cdot V\cdot O\cdot R\cdot I\cdot T\cdot E}{F\cdot O\cdot R\cdot T\cdot U\cdot N\cdot E}$.

Задача 11.3. Может ли быть верным равенство К·О·Т = У·Ч·Ё·Н·Ы·Й?

Задача 11.4. Решите ребусы:

(а)
$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} *1* \\ 3*2 \end{array} \\
\hline
*** \\
+\begin{array}{r} 3*2* \\ *2*5 \end{array} \\
\hline
1*8*3*
\end{array}
$$

(б)
$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 27 \\ ** \end{array} \\
\hline
5* \\
+\begin{array}{r} ** \end{array} \\
\hline
8**
\end{array}
$$

(в)
$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} 7*7* \\ *6*5 \end{array} \\
\hline
4357
\end{array}
$$

(г)
$$
\begin{array}{l|l}
-1***1** & 1* \\
\cline{2-2}
\underline{**1} & ***** \\
1* & \\
\underline{**} & \\
1** & \\
\underline{**1} & \\
1 &
\end{array}
$$

(д)
$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} **7 \\ 3** \end{array} \\
\hline
*0*3 \\
+\begin{array}{r} *1* \\ *5* \end{array} \\
\hline
*7**3
\end{array}
$$

Ответы

11.1. (а) $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$; (б) $A = 1$, $B = 9$, $C = 8$; (в) А = 5, Б = 4, Р = 9; (г) $X = 6$, $Y = 1$, $Z = 9$; (д) $A = 2$, $B = 4$, $C = 9$, $D = 3$, $E = 8$;(е) $A = 9$, $B = 0$, $C = 1$; (ж) А = 5, М = 3, У = 1, Х = 2; (з) З = 7, И = 5, К = 3, Н = 2, О = 4, Р = 8; (и) $A = 2$, $B = 7$, $C = 5$, $D = 1$, $E = 0$; (к) $A = 1$, $B = 9$. **11.2**. 0. **11.3**. Не может. **11.4**. (а) $415 \cdot 382 = 158530$. (б) $27 \cdot 32 = 864$. (в) $7972 - 3615 = 4357$. (г) $1729172 : 19 = 91009$. (д) $117 \cdot 319 = 37323$.

Подсказки

11.1. (а)Установите, в каких разрядах есть переносы, а в каких нет. (б)Заметьте, что $ABC = A00 + BC$. (в)Докажите, что случай Р + А = Б невозможен. (г)Сначала найдите Z. (д)Сначала найдите A.(е)Установите, в каких разрядах есть переносы. (ж)Воспользуйтесь тем, что произведение А·А оканчивается цифрой А. (з)Сначала найдите К и И. (и)Найдите C.

(к)Сначала найдите A. **11.2**. Подсчитайте, сколько использовано букв. **11.3**. Докажите, что ни одна из использованных цифр не может быть равна ни нулю, ни пяти, ни семи. **11.4**. (а)Рассмотрите произведение первого сомножителя на первую цифру второго и найдите последнюю цифру первого сомножителя. (б)Докажите, что второй сомножитель оканчивается на цифру 2. (в)Восстанавливайте неизвестные цифры справа налево. (г)Докажите, что первая цифра каждого вычитаемого равна 1. (д)Рассмотрите отдельно произведения первого сомножителя на количество единиц в каждом разряде второго.

Решения

11.1. (а) Заметим сначала, что есть перенос из разряда десятков в разряд сотен (иначе $A = B$). Следовательно, $A + 1 = B$. Рассмотрим теперь разряд единиц. Поскольку одно из слагаемых совпадает с последней цифрой суммы, сумма остальных слагаемых оканчивается на 0, то есть число $A+C$ оканчивается нулём. Но $0 < A + C < 20$, откуда $A + C = 10$, и из разряда единиц в разряд десятков переносится 1. Следовательно, $A+B+1 = 10+C$. Таким образом, получили следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A + 1 &= B; \\ A + C &= 10; \\ A + B &= C + 9. \end{aligned}$$

Число, обозначенное буквой A, можно найти методом полного перебора. Предложим другой способ нахождения A. Из второго уравнения $C = 10 - A$. Подставив полученные выражения для B и C в третье уравнение, получим $A + A + 1 = 10 - A + 9$, откуда $3 \cdot A = 18$, $A = 6$, $B = A + 1 = 7$, $C = 10 - A = 4$.

(б) Заметим, что $ABC = A00 + BC$. Следовательно, $AB + CA = A00$. По утверждению 4, $A = 1$, и ребус принимает вид: $1B + C1 = 100$. Применяя утверждение 3 сначала к разряду единиц, а потом к разряду десятков, получим $B = 9$, $C = 8$.

(в) Применим утверждение 3 к разряду единиц. Поскольку в разряд единиц переноса быть не может, возможны только два варианта: Р+А = Б и Р + А = Б + 10. Рассмотрим эти случаи:

- Р + А = Б. Тогда переноса из разряда в разряд десятков нет, следовательно, А = Р + А = Б, что невозможно.
- Р + А = Б + 10. Тогда есть перенос из разряда единиц в разряд десятков. Поскольку в разряде десятков складываются те же числа, перенос из разряда десятков в разряд сотен тоже есть. Следовательно, по утверждению 3, Р + А + 1 = А + 10, откуда Р = 9. Применяя то же утверждение к разряду сотен, получаем Б + Б + 1 = Р, откуда Б = 4. Теперь применим это утверждение к разряду единиц: А + 9 = 10 + 4, откуда А = 5. Решение найдено: А = 5, Б = 4, Р = 9.

(г) Заметим, что $ZZZ = X + YY + X \leq 9 + 99 + 9 = 117$, откуда $Z = 1$. Далее, $YY = ZZZ - X - X \geq 111 - 9 - 9 = 93$, откуда $Y = 9$. Следовательно, $X + X = ZZZ - YY = 111 - 99 = 12$, $X = 6$.

(д) Заметим, что число A не может быть больше 3. Действительно, при $A \geq 4$ произведение $AAAA \cdot A$ как минимум пятизначно, а в ребусе оно четырёхзначно. Осталось перебрать 3 варианта значения A: 1, 2 и 3.

1) $A = 1$. В этом случае $AAAA \cdot A = 1111 \cdot 1 = 1111 = BBBB$, откуда $B = 1 = A$, что невозможно.
2) $A = 2$. В этом случае ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2222 \\ 222 \end{array} \\ \hline 4444 \\ + \; 4444 \\ 4444 \\ \hline 493284 \end{array}$$

Таким образом, $A = 2$, $B = 4$, $C = 9$, $D = 3$, $E = 8$ — решение ребуса.

3) $A = 3$. В этом случае $AAAA \cdot AAA = 1109889$, откуда $A = E = 8$, что невозможно.

Итак, $A = 2$, $B = 4$, $C = 9$, $D = 3$, $E = 8$ — единственное решение данного ребуса.

(е) По утверждению 4, $C = 1$. Ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} A\,B\,A\,B\,A \\ 1\,B\,1\,B\,1 \end{array} \\ \hline 1\,B\,1\,B\,1\,B \end{array}$$

Применяя утверждение 3 к разряду единиц, получим, что $A + 1 = B$ или $A + 1 = 10 + B$. Применяя это утверждение к разряду десятков тысяч, получим, что из разряда тысяч переноса не было. Учитывая, что при этом из разряда десятков тысяч перенос был, получаем $A+1 = 10+B$, откуда $A = B + 9$. Поскольку A и B — однозначные числа, $A = 9$, $B = 0$.

(ж) Поскольку ХА $\cdot$ У $=$ ХА, У $= 1$. Заметим теперь, что произведение А $\cdot$ А оканчивается цифрой А. Таким свойством обладают три цифры: 0, 5 и 6. Поскольку число АР начинается с цифры А, А $\neq 0$.

Рассмотрим оставшиеся варианты:

1) А $= 5$. В этом случае ребус принимает вид:

$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{l} \mathrm{M\,1\,X\,5} \\ \mathrm{X\,5} \end{array} & \begin{array}{|r} \mathrm{X\,5} \\ \hline \mathrm{1\,X\,5} \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} \mathrm{H\,X} \\ \mathrm{5\,P} \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} \mathrm{1\,X\,5} \\ \mathrm{1\,X\,5} \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Заметим, что произведение Х5$\cdot$Х5 оканчивается на Х5. Перебором легко убедиться, что любое произведение вида Х5$\cdot$Х5 оканчивается на 25. Следовательно, Х $= 2$. Таким образом, известно частное и делитель. После этого ребус легко восстанавливается.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3125 & 25 \\ \cline{2-2}
25 & 125 \\ \cline{1-1}
-\,62 & \\
50 & \\ \cline{1-1}
-\,125 & \\
125 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2) А = 6. Аналогично предыдущему случаю, находим Х = 7. Но тогда АР = $76 \cdot 7$ — трёхзначное число. Следовательно, этот случай невозможен.

(з) Из последнего столбца видно, что число $7 \cdot$ К оканчивается цифрой 1. Следовательно, К = 3, и перенос из разряда единиц в разряд десятков составляет 2. Из разряда десятков следует, что число $6 \cdot$И оканчивается цифрой 0, откуда И = 0 или И = 5. В случае И = 0 переноса в разряд сотен нет, а значит, число $5 \cdot$ Н оканчивается цифрой 3, что невозможно. Итак, И = 5.

$$
\begin{array}{r}
\text{О З О Р Н 5 3} \\
\text{З О Р Н 5 3} \\
\text{О Р Н 5 3} \\
+\qquad \text{Р Н 5 3} \\
\text{Н 5 3} \\
\text{5 3} \\
\text{3} \\ \hline
\text{5 5 5 3 3 2 1}
\end{array}
$$

При этом перенос в разряд сотен составляет 3 единицы, а значит, число $5 \cdot$ Н оканчивается нулём, то есть число Н чётно.

Из первого столбца видно, что О — либо 3, либо 4, либо 5. Но цифра 5 уже использована. Следовательно, О = 4:

$$\begin{array}{rr} & 4\text{З}4\text{РН}53 \\ & \text{З}4\text{РН}53 \\ & 4\text{РН}53 \\ + & \text{РН}53 \\ & \text{Н}53 \\ & 53 \\ & 3 \\ \hline & 5553321 \end{array}$$

Видно, что переносы из разрядов десятков тысяч и сотен тысяч равны 1. Следовательно, число З + З равно 14, откуда З = 7. Заметим теперь, что перенос из разряда тысяч равен 3. Следовательно, сумма числа $4 \cdot \text{Р}$ и переноса из разряда сотен равна 33, откуда $\text{Р} \leq 8$. С другой стороны, если $\text{Р} \leq 6$, то $4 \cdot \text{Р} \leq 24$, а перенос из разряда сотен не больше 4, то есть $24 + 4 \geq 33$, что неверно. Итак, Р = 7 или Р = 8. Но цифра 7 уже использована. Следовательно, Р = 7. Далее несложно восстановить последнюю неизвестную букву: Н = 2.

$$\begin{array}{rr} & 4748253 \\ & 748253 \\ & 48253 \\ + & 8253 \\ & 253 \\ & 53 \\ & 3 \\ \hline & 5553321 \end{array}$$

(и) Заметим, что в среднем столбце написано $8-C = 3$. Следовательно, $C = 5$. Теперь в первой строке написано $AB+8 = 35$, откуда $A = 2$, $B = 7$. Наконец, в третьем столбце написано $35 - D5 = 2E$, откуда $E = 0$, $D = 1$.

(к) Заменим сначала вычитание сложением: $AAA = BB + AA + A$. Учитывая, что $AAA = A00 + AA$, получим $A00 = BB + A$. В силу утверждения 6, $A = 1$, $B = 9$.

11.2. В записи ребуса использовано 10 букв, следовательно, использованы все цифры, включая 0. Но в знаменателе 0 стоять не может. Значит, он стоит в числителе, и значение дроби равно 0.

11.3. Заметим, что ни одна из букв не может быть равна нулю, так как иначе одна из частей равенства равна нулю, а другая не равна. Поскольку всего использовано 9 букв, использованы все цифры от 1 до 9. Следовательно, одна из букв равна 7. Таким образом, одна из частей делится на 7, а другая не делится. Получили противоречие. Значит, равенство не может быть верным.

11.4. (a) Поскольку при умножении первого сомножителя на 3 получается число, оканчивающееся на 5, последняя цифра первого сомножителя равна 5. Ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *15 \\ 3*2 \end{array} \\ \hline ***\\ +\;\; 3*2* \\ *2*5 \\ \hline 1*8*3* \end{array}$$

Восстановим те цифры в слагаемых, которые однозначно определяются по правилу умножения в столбик:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *15 \\ 3*2 \end{array} \\ \hline *30\\ +\;\; 3*2* \\ *245 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

При умножении первой цифры первого сомножителя на 3 получается число, оканчивающееся на 2. Следовательно, эта цифра равна 4:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 415 \\ 3*2 \end{array} \\ \hline *30\\ +\;\; 3*2* \\ *245 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

При умножении числа 415 на вторую цифру второго сомножителя получается число вида $3*2*$. Несложным перебором убеждаемся, что для этого вторая цифра второго сомножителя должна быть равна 8. Дальше ребус восстанавливается умножением «в столбик»:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}415\\382\end{array}\\
\hline
830\\
+\quad 3320\\
1245\\
\hline
158530
\end{array}
$$

(б) Заметим, что при умножении числа 27 на последнюю цифру второго сомножителя получается двузначное число, начинающееся с 5. Следовательно, второй сомножитель оканчивается на цифру 2, и ребус принимает вид:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}27\\*2\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}54\\**\end{array}\\
\hline
8*4
\end{array}
$$

Далее, при умножении числа 27 на первую цифру второго сомножителя получается двузначное число, начинающееся либо с 7, либо с 8. Следовательно, первая цифра второго сомножителя равна 3, и ребус принимает вид:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}27\\32\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}54\\81\end{array}\\
\hline
864
\end{array}
$$

(в) Заменим сначала вычитание сложением:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} *\,6*5 \\ 4357 \\ \hline 7*7* \end{array}
\end{array}
$$

Будем теперь восстанавливать неизвестные цифры справа налево. Поскольку $5+7=12$, в разряде единиц суммы стоит цифра 2, и есть перенос в разряд десятков. Применяя утверждение 3 к разряду десятков, получаем, что в первом слагаемом в этом разряде стоит 1. Далее, применяя это утверждение к разрядам сотен и тысяч, полностью восстанавливаем запись:

$$
+\begin{array}{r} 3615 \\ 4357 \\ \hline 7972 \end{array}
$$

Осталось вернуться к вычитанию:

$$
-\begin{array}{r} 7972 \\ 3615 \\ \hline 4357 \end{array}
$$

(г) Рассмотрим первое вычитание. Поскольку вычитаемое не больше уменьшаемого, первая цифра вычитаемого равна 1. Кроме того, третья цифра уменьшаемого равна $1+1=2$. Аналогично, первые цифры второго и третьего вычитаемых также равны 1, а последняя цифра третьего уменьшаемого равна 2.

Из того, как спускались цифры из делимого, следует, что в разрядах десятков и сотен частного стоят нули. Ребус принимает вид:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l}
1*2*1*2 \\
\underline{1*1} \\
\,1* \\
\,\underline{1*} \\
1*2 \\
\underline{1*1} \\
1
\end{array}
&
\begin{array}{|l}
\;1* \\ \hline **00*
\end{array}
\end{array}
$$

При умножении количества тысяч в частном на делитель получается двузначное число, начинающееся на 1. Следовательно, в частном в разряде тысяч стоит единица.

Первое вычитаемое получается при умножении однозначного числа на двузначное число, начинающееся с 1. Полным перебором вариантов для цифры, стоящей в разряде десятков делимого, находим единственное число, удовлетворяющее этому требованию: $171 = 19 \cdot 9$. Следовательно, делитель равен 19, а первая и последняя цифры частного равны 9. Дальше ребус легко восстанавливается:

$$\begin{array}{r|l}
-\,1729172 & 19 \\ \cline{2-2}
171 & 91009 \\ \cline{1-1}
19 & \\
19 & \\ \cline{1-1}
172 & \\
171 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

(д) Рассмотрим произведение первого сомножителя на количество сотен второго:

$$\begin{array}{r}
\times\; * * 7 \\
3 \\ \hline
* 5 *
\end{array}$$

Поскольку $3 \cdot 7 = 21$, последняя цифра произведения равна 1, и перенос из разряда единиц составляет 2 единицы. Далее, произведение числа 3 на количество десятков первого сомножителя оканчивается на $5 - 2 = 3$. Следовательно, в разряде десятков первого сомножителя стоит единица.

$$\begin{array}{r}
\times\; * 1 7 \\
3 \\ \hline
* 5 1
\end{array}$$

Подставим полученные результаты в исходный ребус:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} *\,1\,7 \\ 3\,*\,* \end{array} \\
\hline
\,0\,\,3 \\
+\quad *\,1\,*\;\, \\
*\,5\,1\;\;\;\, \\
\hline
\,7\,\,*\,3
\end{array}
$$

Рассмотрим теперь произведение первого сомножителя на количество единиц второго:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} *\,1\,7 \\ * \end{array} \\
\hline
\,0\,\,3
\end{array}
$$

Поскольку произведение числа 7 на второй сомножитель оканчивается цифрой 3, второй сомножитель равен 9. Выполняя умножение в столбик, найдём предпоследнюю цифру произведения:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} *\,1\,7 \\ 9 \end{array} \\
\hline
*\,0\,5\,3
\end{array}
$$

При этом перенос из разряда десятков составляет 1. Следовательно, произведение числа 9 на количество сотен первого сомножителя оканчивается на 9, а значит, первая цифра первого сомножителя равна 1:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 1\,1\,7 \\ 9 \end{array} \\
\hline
1\,0\,5\,3
\end{array}
$$

Подставим полученные результаты в исходный ребус:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 117 \\ 3{*}9 \end{array} \\
\hline
1053 \\
+\quad {*}1{*} \\
351 \\
\hline
{*}7{*}{*}3
\end{array}
$$

Рассмотрим разряд тысяч при сложении. Поскольку переноса из разряда сотен быть не может, единственная неизвестная цифра в разряде тысяч равна 1. Следовательно, в разряде десятков второго сомножителя стоит цифра 1. Далее ребус восстанавливается умножением в столбик:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 117 \\ 319 \end{array} \\
\hline
1053 \\
+\quad 117 \\
351 \\
\hline
37323
\end{array}
$$

Занятие 12

Исключение невозможных значений

На этом занятии вы познакомитесь с новым методом решения задач, поэтому, как было указано в предисловии, вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:

   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *В Стране чудес проводилось расследование по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл бульон?*

Пример 2. *Когда Аня, Валя и Маша вышли гулять, на них были белое, красное и синее платья. Туфли их были тех же трёх цветов, но только* *у Ани цвета туфель и платья совпадали. При этом у Маши ни платье, ни туфли не были синими, а Валя была в красных туфлях. Определите цвет платьев и туфель каждой из девочек.*

Пример 3. *В ряд стоят Иванов, Петров, Николаев и Алексеев. Их зовут Иван, Пётр, Николай и Алексей, но не известно, кого как. Известно, что Иванова зовут не Алексей и не Иван; Пётр стоит между Николаевым и Николаем; Алексеев — не Пётр и не Алексей; Петров стоит между Алексеевым и Иваном. Кого как зовут?*

Авторские ответы

Общие свойства

Предложенные задачи обладают следующими свойствами:

- в условии идёт речь о конечном наборе неизвестных, каждая из которых может принимать конечное число значений;
- по условию задачи существует некоторый фиксированный набор значений неизвестных;
- перечислены требования, которым удовлетворяет этот набор значений;
- в вопросе требуется восстановить этот набор значений.

Краткая запись

Краткая запись текста задачи может быть составлена по плану.

Дано:

- Требования:____
- Неизвестные:

x_1 —____

$\ldots$

x_n —____

- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения____________________________

  ...

  x_n может принимать значения____________________________

- Существует единственный набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Найти: набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Метод решения

Суть рассматриваемого метода очень точно выражена в словах Шерлока Холмса: «Если отбросить всё совершенно невозможное, то именно то, что останется — каким бы невероятным оно ни казалось — и есть истина!».

Точнее, метод решения предложенных задач состоит в следующем:

- определить возможные значения неизвестных;
- полным перебором отбросить значения, которые заведомо не могут быть решением задачи;
- если осталось ровно одно значение, то оно и есть решение задачи.

Границы применимости

Этот метод применим, если при подстановке в условие задачи всех, кроме одного, наборов значений неизвестных получается противоречие.

Примеры решений

Пример 1. *В Стране чудес проводилось расследование по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?*

Краткая запись этой задачи имеет вид:
Дано:

- Требование: бульон украл тот, кто сказал правду.
- Неизвестные:

  x — имя того, кто украл бульон,

- Значения неизвестных:

  x может принимать значения «Соня», «Мартовский Заяц», «Болванщик».

- Существует единственное значение неизвестного x, удовлетворяющее данному требованию.

Найти: значение неизвестного, удовлетворяющее требованию.
Решение. В этой задаче рассматривается одна неизвестная x — тот, кто украл бульон. Она может принимать одно из трёх значений: Соня, Болванщик, Мартовский Заяц. В задаче требуется установить значение этой неизвестной.

Рассмотрим возможные значения неизвестной x:

1) Бульон украла Соня. Тогда Мартовский Заяц дал ложные показания, что не противоречит условию задачи. Итак, в этом случае противоречий не обнаружено.
2) Бульон украл Болванщик. Тогда Мартовский Заяц дал правдивые показания, но по условию задачи правдивые показания дал только тот, кто украл бульон. Следовательно, этот случай невозможен.
3) Бульон украл Мартовский Заяц. Тогда Мартовский Заяц дал ложные показания, но по условию задачи подсудимый, укравший бульон, дал правдивые показания. Следовательно, этот случай невозможен.

Итак, возможен только один случай: бульон украла Соня. Следовательно, это и есть ответ.

Ответ. Бульон украла Соня.

На практике часто используются различные оптимизации описанного метода. Один из возможных путей сокращения перебора — удаление заведомо невозможных наборов значений неизвестных на ранних этапах построения дерева возможностей — был подробно рассмотрен на втором занятии. Иногда такое удаление невозможных наборов удобно выполнять с помощью таблицы.

Пример 2. *Когда Аня, Валя и Маша вышли гулять, на них были белое, красное и синее платья. Туфли их были тех же трёх цветов, но только у Ани цвета туфель и платья совпадали. При этом у Маши ни платье, ни туфли не были синими, а Валя была в красных туфлях. Определите цвет платьев и туфель каждой из девочек.*

Краткая запись этой задачи имеет вид:
Дано:

- Требования:
  1) только у Ани туфли и платье одинакового цвета;
  2) у Маши ни платье, ни туфли не были синими;
  3) Валя была в красных туфлях.
- Неизвестные:
  x_1 — цвет платья у Ани; x_2 — цвет платья у Вали;
  x_3 — цвет платья у Маши; x_4 — цвет туфель у Ани;
  x_5 — цвет туфель у Вали; x_6 — цвет туфель у Маши.
- Значения неизвестных: каждая из неизвестных может принимать одно из значений «белый», «красный», «синий».
- Существует набор значений неизвестных, удовлетворяющий требованиям.

Найти: набор значений неизвестных, удовлетворяющий требованиям.
Решение. Нарисуем таблицу, строки которой соответствуют цвету ту-

	б	к	с
б	А	ВМ	ВМ
к	ВМ	А	ВМ
с	ВМ	ВМ	А

(а) Первое требование

	б	к	с
б	А	ВМ	В
к	ВМ	А	В
с	В	В	А

(б) Второе требование

	б	к	с
б	А	М	
к	В		В
с			А

(в) Третье требование

Рис. 12.1. Таблицы, соответствующие поочерёдному учёту требований

фель, а столбцы — цвету платьев. При этом мы будем писать первую букву имени девочки во всех клетках, отвечающих возможным сочетаниям цветов для этой девочки.

Учтём сначала первое требование. Оно означает, что буква «А» может стоять только на диагонали, а остальные буквы, наоборот, на диагонали стоять не могут (см. рис. 12.1а).

Второе условие означает, что буква «М» не может стоять ни в третьей строке, ни в третьем столбце (см. рис. 12.1б).

По условию, Валя была в красных туфлях, значит, буква «В» может стоять только во второй строке. Так как только одна из девочек была в красных туфлях, других букв во второй строке быть не может (см. рис. 12.1в).

Заметим, что в третьей строке стоит только буква «А», значит, в синих туфлях была Аня, и буква «А» встречается только в правом нижнем углу таблицы, а в правом столбце других букв нет:

	б	к	с
б		М	
к	В		
с			А

Теперь каждая из букв встречается в таблице только один раз, то есть мы однозначно установили цвета туфель и платьев девочек: Валя была в красных туфлях и белом платье, Маша — в белых туфлях и красном платье, а Аня — в синих туфлях и синем платье.

Задачи

Задача 12.1. Любой житель острова принадлежит ровно одному из двух племён: Д и Н. Люди из племени Д задают вопросы, на которые правильный ответ — «да», а люди из племени Н — вопросы, на которые правильный ответ — «нет». Путешественник встретил двух аборигенов Васю и Петю. Вася спросил его: «Мы с Петей из племени Н?» К какому племени принадлежит Вася?

Задача 12.2. Двум мудрецам показали три колпака: белый и два чёрных. После этого им завязали глаза, надели два из этих колпаков на головы и разрешили снять повязки. Каждый мудрец видит колпак, который надели на другого мудреца, но не видит свой. На вопрос «Какого цвета ваш колпак?» мудрецы хором ответили: «Я не могу определить цвет своего колпака». Какого цвета были их колпаки?

Задача 12.3. Трёх мудрецов поставили в ряд так, что первый мудрец видит только второго и третьего, второй — только третьего, а третий никого не видит. После этого им показали пять колпаков: два белых и три чёрных, завязали глаза, надели каждому на голову один из этих колпаков и разрешили снять повязки. Первый мудрец сказал: «Я не знаю, какого цвета мой колпак», на что второй ответил: «Я тоже». Какого цвета колпак третьего мудреца?

Задача 12.4. На острове живут рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (которые всегда лгут). За столиком в кафе между четырьмя жителями этого острова состоялась следующая беседа:

- 1-й. За этим столиком нет ни одного рыцаря.
- 2-й. За этим столиком не более одного рыцаря.
- 3-й. За этим столиком не более двух рыцарей.
- 4-й. За этим столиком не более трёх рыцарей.

Сколько рыцарей сидело за столиком?

Задача 12.5. Один из трёх братьев разбил стекло. Когда мать спросила, кто это сделал, они ответили следующее:

- Вася: «Это не я. И Коля не разбивал»;
- Петя: «Я не разбивал. Это Вася разбил»;
- Коля: «Вася не виноват. Это Петя разбил».

Позже выяснилось, что один из них оба раза сказал правду, другой — один раз сказал правду и один раз солгал, а третий оба раза солгал. Кто на самом деле разбил стекло?

Задача 12.6. Один из четырёх братьев сломал замок. На вопрос матери, кто это сделал, они ответили следующее:

- Андрей: «Замок сломал Витя»;
- Витя: «Это сделал Марат»;
- Денис: «Я не виноват»;
- Марат: «Витя лжёт».

Позже выяснилось, что только один из них сказал правду. Кто же сломал замок?

Задача 12.7. Витя, Коля и Серёжа участвовали в математической олимпиаде. Двое из них получили дипломы, а один — похвальную грамоту (ПГ). Кроме того, известны следующие утверждения:

1) Если Коля получил диплом, то Серёжа получил ПГ.
2) Если Серёжа получил диплом, то Витя получил ПГ.

Кто из мальчиков получил ПГ?

Задача 12.8. Один из пяти братьев испёк маме пирог. Никита сказал: «Это Глеб или Игорь». Глеб сказал: «Это сделал не я и не Дима». Игорь сказал: «Вы оба шутите». Андрей сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой обманул». Дима сказал: «Нет, Андрей, ты заблуждаешься». Мама знает, что трое из её сыновей всегда говорят правду. Кто испёк пирог?

Задача 12.9. Среди неравенств $a > 2$, $a > 5$, $a > 8$, $a > 10$ три ложных и одно верное. Какое?

Задача 12.10. На полке стоят три сосуда с молоком, водой и маслом. На одном из них написано «молоко», на другом — «вода», а на третьем — «масло». Известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности, молоко находится в бутылке, а «масло» написано на фляге. Что написано на сосуде с водой?

Задача 12.11. Пять мудрецов поставили в ряд так, что каждый видит только стоящих впереди его. Потом им показали пять колпаков: четыре белых и пять чёрных, завязали глаза, надели каждому на голову один из этих колпаков, и разрешили снять повязки. После этого мудрецов по порядку, начиная с заднего, спросили: «Какого цвета ваш колпак?» Все, кроме мудреца, стоящего впереди остальных, ответили: «Не знаю». Что ответил оставшийся мудрец?

Задача 12.12. В кафе собрались Ваня, Коля и Петя. Известно, что один из них — рыцарь (то есть всегда говорит правду), другой — лжец (то есть всегда лжёт), а третий — нормальный человек (то есть может говорить как правду, так и ложь).

- Ваня: «Я — нормальный человек».
- Коля: «Ваня и Петя иногда говорят правду».
- Петя: «Коля — нормальный человек».

Кто из них лжец, кто — рыцарь, а кто — нормальный человек?

Задача 12.13. В ряд стоят Иванов, Петров, Николаев и Алексеев. Их зовут Иван, Пётр, Николай и Алексей, но не известно, кого как. Известно, что Иванова зовут не Алексей и не Иван; Пётр стоит между Николаевым и Николаем; Алексеев — не Пётр и не Алексей; Петров стоит между Алексеевым и Иваном. Кого как зовут?

Задача 12.14. Из утверждений «число b чётно», «число b делится на 3», «число b делится на 5», «число b делится на 30» три верны, а одно ложно. Какое?

Задача 12.15. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, трапеция и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный. Известно, что красная фигура лежит между синей и зелёной; справа от жёлтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и жёлтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.

Ответы

12.1. К племени Н. **12.2**. На обоих мудрецах чёрные колпаки. **12.3**. Чёрного. **12.4**. Два. **12.5**. Вася. **12.6**. Денис. **12.7**. Серёжа. **12.8**. Игорь. **12.9**. Верно неравенство «$a > 2$». **12.10**. «масло». **12.11**. Чёрного. **12.12**. Ваня — лжец, Коля — нормальный человек, а Петя — рыцарь. **12.13**. Иванов Пётр, Петров Николай, Николаев Алексей и Алексеев Иван. **12.14**. Ложно утверждение «число a делится на 30» **12.15**. Жёлтая трапеция, зелёный ромб, красный треугольник и синий круг.

Подсказки

12.1. Рассмотрите неизвестную «племя, к которому принадлежит Вася». **12.2**. Рассмотрите неизвестную «количество белых колпаков на головах у мудрецов». **12.3**. Используйте, что второй мудрец слышал, что сказал первый. **12.4**. Рассмотрите неизвестную «количество рыцарей за столиком». **12.5**. Рассмотрите неизвестную «имя мальчика, разбившего окно». **12.6**. Рассмотрите или неизвестную «имя мальчика, сломавшего замок», или неизвестную «имя мальчика, сказавшего правду». **12.7**. Рассмотрите неизвестную «имя мальчика, получившего ПГ». **12.8**. Рассмотрите неизвестную «имя мальчика, испёкшего пирог». **12.9**. Рассмотрите неизвестную «верное неравенство, приведённое в условии». **12.10**. Что может находиться во фляге? **12.11**. Аналогично задачам 12.2 и 12.3. **12.12**. Выясните, кем может быть Коля. **12.13**. Воспользуйтесь тем, что человек и его сосед — разные люди. **12.14**. Рассмотрите неизвестную «ложное утверждение, приведённое в условии». **12.15**. Определите сначала, как расположены фигуры по цвету, не обращая внимания на форму.

Решения

12.1. Разберём сначала случай, когда Вася принадлежит племени Н. В этом случае ответ на заданный вопрос должен быть «нет», то есть либо Вася, либо Петя не из племени Н. Это возможно, если Вася из племени Н, а Петя из племени Д. Следовательно, этот случай возможен.

Теперь разберём случай, когда Вася принадлежит племени Д. В этом случае ответ на заданный вопрос должен быть «да», то есть Вася с Петей должны быть из племени Н. Следовательно, этот случай невозможен: Вася не может быть одновременно и из племени Д, и из племени Н.

Итак, Вася принадлежит к племени Н.

12.2. Рассмотрим возможные значения неизвестной «количество белых колпаков на головах у мудрецов».

- 2. Этот случай невозможен, поскольку есть всего один белый колпак.
- 1. В этом случае тот мудрец, на котором чёрный колпак, может определить цвет своего колпака (поскольку предыдущий случай невозможен). Следовательно, и этот случай невозможен.
- 0. В этом случае на обоих мудрецах чёрные колпаки, и ни один не может определить цвет своего колпака. Этот случай возможен.

Итак, возможен только случай, когда на обоих мудрецах чёрные колпаки.

12.3. Выясним сначала, при каких сочетаниях цветов колпаков на втором и третьем мудрецах первый мудрец может определить цвет своего колпака. Если среди цветов второго и третьего мудрецов есть чёрный, то на первом может быть колпак любого цвета, и он не может определить цвет своего колпака. Если же на втором и третьем мудреце белые колпаки, то первый мудрец может определить, что на нём чёрный колпак. Следовательно, случай, когда на втором и третьем мудрецах белые колпаки, невозможен.

Теперь выясним, при каком цвете колпака на третьем мудреце второй мудрец не может определить цвет своего колпака. Если на третьем мудреце белый колпак, то второй мудрец может следующим образом определить цвет своего колпака: «Пусть на мне тоже белый колпак. Но тогда первый мудрец смог бы определить цвет своего колпака, а он не смог. Следовательно, на мне чёрный колпак». Но второй мудрец не смог определить цвет своего колпака, а значит, этот случай невозможен.

Итак, возможен только случай, когда на третьем мудреце чёрный колпак.

12.4. Рассмотрим возможные значения количества рыцарей за столиком. Для каждого из значений определим, кто из сидящих за столиком солгал, и посчитаем количество человек, сказавших правду. Результат запишем в виде таблицы:

Количество рыцарей	0	1	**2**	3	4
1-й житель сказал	П	Л	Л	Л	Л
2-й житель сказал	П	П	Л	Л	Л
3-й житель сказал	П	П	П	Л	Л
4-й житель сказал	П	П	П	П	Л
Итого правду сказали	4	3	**2**	1	0

Заметим теперь, что только в случае, когда за столом сидят два рыцаря, количество рыцарей совпадает с количеством жителей, сказавших правду. Следовательно, остальные случаи невозможны, и за столом сидят только два рыцаря.

12.5. Для каждого из возможных значений неизвестной «имя мальчика, разбившего окно», найдём, сколько раз сказал правду каждый из братьев:

Разбил	Раз сказал правду		
	Вася	Петя	Коля
Вася	1	2	0
Петя	2	0	2
Коля	1	1	1

Поскольку только в строчке Вася встречается 0, 1 и 2, стекло разбил Вася.

12.6. При выборе неизвестной «имя мальчика, сломавшего замок», эта задача решается аналогично предыдущей. Предлагаем читателям решить задачу этим способом самостоятельно. Мы приведём более короткое решение, получающееся при выборе неизвестной «имя мальчика, сказавшего правду».

Заметим, что Витя и Марат противоречат друг другу, а значит, не могут оба лгать. Следовательно, правду сказал один из них. Но тогда Денис солгал, то есть замок сломал он.

12.7. Разберём все возможные значения неизвестной «имя мальчика, получившего ПГ»:

- ПГ получил Витя. Тогда Коля и Серёжа получили дипломы, и первое утверждение неверно.
- ПГ получил Коля. Тогда Витя и Серёжа получили дипломы, и второе утверждение неверно.
- ПГ получил Серёжа. В этом случае все приведённые утверждения выполнены.

Итак, возможен только случай «ПГ получил Серёжа».

12.8. Разберём случаи, соответствующие возможным значениям неизвестной «имя мальчика, испёкшего пирог». В каждом случае выясним, кто сказал правду, а кто солгал. Результат представим в виде таблицы:

Пирог испёк	Н.	Г.	И.	А.	Д.
Никита сказал	Л	И	И	Л	Л
Глеб сказал	И	Л	И	И	Л
Игорь сказал	Л	Л	Л	Л	И
Андрей сказал	И	И	Л	И	Л
Дима сказал	Л	Л	И	Л	И
Сказали правду	2	2	3	2	2

По условию задачи, трое сыновей всегда говорят правду. Но во всех строках таблицы, кроме третьей, буква «И» встречается не более двух раз. Следовательно, соответствующие этим строкам случаи невозможны, то есть возможен только случай, когда пирог испёк Игорь.

12.9. Заметим, что если верно одно из неравенств $a > 5$, $a > 8$, $a > 10$, то верно также неравенство $a > 2$. Следовательно, в этих случаях верно более одного из приведённых в условии неравенств, то есть эти случаи невозможны. Таким образом, возможен только случай, когда верно неравенство $a > 2$, а остальные ложны.

12.10. Так как молоко находится в бутылке, а «масло» написано на фляге, надпись «масло» сделана не на сосуде с молоком. Но эта надпись не может быть сделана и на сосуде с маслом. Следовательно, «масло» написано на сосуде с водой.

12.11. Будем решать аналогично задаче 12.3. Поскольку мудрец, стоящий позади всех, не смог определить цвет своего колпака, на ком-то из остальных мудрецов чёрный колпак.

Таким образом предпоследний мудрец знал, что либо у него, либо у одного из впереди стоящих чёрный колпак. Если у первых трёх мудрецов белые колпаки, то предпоследний мудрец определил бы цвет своего колпака. Аналогично, у одного из первых двух мудрецов колпак чёрного цвета. Если бы у первого мудреца был белый колпак, второй смог бы определить цвет своего колпака. Следовательно, у первого мудреца чёрный колпак.

12.12. Заметим, что иногда говорят правду только рыцари и нормальные люди. Следовательно, Коля фактически сказал, что Ваня и Петя — рыцарь и нормальный человек (в каком-то порядке). Другими словами, Коля сказал, что он — лжец. Но ни рыцарь, ни лжец не могли о себе этого сказать. Следовательно, Коля — нормальный человек.

Теперь видно, что Ваня солгал (а значит, лжец), а Петя сказал правду (а значит, рыцарь).

12.13. Составим таблицу, строки которой соответствуют возможным фамилиям, а столбцы — именам.

В условии сказано, что Иванов — не Алексей и не Иван, а Алексеев — не Пётр и не Алексей. Отметим это знаками «$-$» в соответствующих клетках.

	И	П	Н	А
И	–			–
П				
Н				
А		–		–

Из условия следует, что Пётр, Николаев и Николай — три разных человека, и Петров, Алексеев и Иван — три разных человека:

	И	П	Н	А
И	–			–
П	–			
Н	–	–	–	
А		–		–

В первом столбце и третьей строке таблицы осталось по одной свободной клетке, следовательно, фамилия Ивана — Алексеев, а имя Николаева — Алексей.

	И	П	Н	А
И	–			–
П	–			–
Н	–	–	–	+
А	+	–	–	–

Поскольку у Петра и Петрова разные соседи, фамилия Петра — не Петров. Следовательно, фамилия Петра — Иванов, а Николая — Петров.

	И	П	Н	А
И	–	+	–	–
П	–	–	+	–
Н	–	–	–	+
А	+	–	–	–

12.14. Рассмотрим возможные значения неизвестной «ложное утверждение, приведённое в условии». Заметим, что если ложно одно из утверждений «число b чётно», «число b делится на 3», «число b делится на 5», то ложно также утверждение «число b делится на 30». Следовательно, в этих случаях из приведённых в условии утверждений хотя бы два ложны, то есть эти случаи невозможны. Таким образом, возможен только случай, когда ложно утверждение «число b делится на 30», а остальные верны.

12.15. Для удобства изложения повторим все условия задачи:

1) красная фигура — между синей и зелёной;
2) справа от жёлтой фигуры — ромб;
3) круг — правее и треугольника и ромба;
4) треугольник — не с краю;
5) синяя и жёлтая фигуры — не рядом.

Поскольку красная фигура лежит между синей и зелёной (условие 1), а жёлтая — не рядом с синей (условие 5), то возможны только два варианта расположения фигур по цвету: «синяя, красная, зелёная, жёлтая» или «жёлтая, зелёная, красная, синяя». Первый из приведённых вариантов неверен, поскольку по условию 2 жёлтая фигура не может лежать на правом крае. Остаётся только одна возможность расположения фигур по цветам: «жёлтая, зелёная, красная, синяя». Из условия 2 сразу же определяется, что ромб зелёный. Отсюда и из условия 4 следует, что треугольник красный. В свою очередь, отсюда и из условия 3 следует, что круг синий. Значит, трапеция может быть только жёлтой. Окончательный ответ: жёлтая трапеция, зелёный ромб, красный треугольник, синий круг.

Занятие 13

Подбор ответа

На этом занятии будет рассматриваться метод решения задач нового типа. При этом вам, как обычно, предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Вася никогда не лжёт. Ему задали один и тот же вопрос два раза подряд. В первый раз он ответил «нет», а во второй раз — «да». Какой это мог быть вопрос?*

Пример 2. *Найдите двузначное число, при возведении которого в квадрат получается число, последние две цифры которого образуют исходное число.*

Пример 3. *Расставьте скобки и знаки действий так, чтобы получились верные равенства:*

$$4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 4 \qquad 4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 40$$

$$4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 24 \qquad 4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 240$$

Авторские ответы

Общие свойства

В этих задачах требуется найти только один набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию задачи. При решении таких задач не обязательно указывать способ, которым был найден требуемый набор, требуется только показать, что предлагаемый набор удовлетворяет условию, сформулированному в тексте задачи.

Краткая запись

Краткую запись перечисленных задач предлагается составлять по следующему плану:

Дано:

- Требования:______________________________
- Неизвестные:

x_1 —______________________________

$\dots$

x_n —______________________________

Найти: хотя бы один набор значений неизвестных, который удовлетворяет требованиям.

Метод решения

Решить такую задачу означает:

- указать значение неизвестной;
- показать, что это значение удовлетворяет требованиям, перечисленным в тексте задачи.

Границы применимости

Метод подбора применяется в тех случаях, когда требуется только указать хотя бы одно значение неизвестного, удовлетворяющее требованиям, перечисленным в тексте задачи.

Примеры решений

Пример 1. *Вася никогда не лжёт. Ему задали один и тот же вопрос два раза подряд. В первый раз он ответил «нет», а во второй раз — «да». Какой это мог быть вопрос?*

Краткая запись этой задачи имеет вид:
Дано:

- Условие: «Вопрос задаётся 2 раза. Первый раз ответ «нет», второй раз ответ «да»».
- Неизвестное:

  x — формулировка вопроса

Найти: хотя бы одно значение неизвестного, которое удовлетворяет условию.
Решение. Например, это мог быть вопрос «Сейчас вечер?». Докажем, что этот вопрос удовлетворяет условиям задачи. Действительно, если в первый раз задать его утром, а во второй — вечером, то получим в первый раз Вася честно ответит «нет», а во второй раз — «да». При решении задач методом подбора не всегда удаётся быстро угадать её ответ. В таких случаях для подбора ответа применима следующая модификация метода перебора с оптимизациями:

- следовать основным этапам второго способа перебора с оптимизациями (см. занятие 10);
- найти первое значение неизвестного, соответствующее условию задачи;
- указать его как угаданный ответ.

Пример 2. *Найдите двузначное число, при возведении которого в квадрат получается число, последние две цифры которого образуют исходное число.*

Краткая запись этой задачи имеет вид:

Дано:

- Условие: «Последние две цифры у квадрата двузначного числа образуют исходное число».
- Неизвестное:

  x — исходное двузначное число.

Найти: хотя бы одно значение неизвестного, которое удовлетворяет условию.

Решение. Например, $25^2 = 625$ (или $76^2 = 5776$).

Замечание 1. Для решения задачи *достаточно* привести и проверить один из этих примеров: объяснять, как он был придуман, не требуется.

Замечание 2. Объясним, как можно было догадаться до ответа. Заметим, что последняя цифра квадрата числа зависит только от последней цифры исходного числа. Следовательно, искомое число может оканчиваться только на 0, 1, 5 или 6. Если бы искомое число оканчивалось на 0, его квадрат оканчивался бы на два нуля, что противоречит требованиям задачи. Осталось три варианта: 1, 5 и 6, для которых перебираем возможные варианты первой цифры, пока не найдём ответ (25 или 76).

Задачи

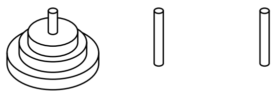
Задача 13.1. Расставьте скобки и знаки действий так, чтобы получились верные равенства:

$$4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 4 \qquad 4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 40$$

$$4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 24 \qquad 4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4\,\square\,4 = 240$$

Задача 13.2. В компании из четырёх человек у любых двух совпадает либо имя, либо фамилия, либо отчество. При этом в этой компании нет ни трёх человек с одинаковым именем, ни трёх человек с одинаковой фамилией, ни трёх человек с одинаковым отчеством. Как такое может быть?

Задача 13.3. Перенесите все диски с левого стержня на правый. Одним ходом разрешается перекладывать только один диск. Запрещается класть больший диск на меньший.



Задача 13.4. Составьте из чисел 1, 2, ..., 9 магический квадрат, то есть расположите их в клетках таблицы 3×3 так, чтобы суммы чисел во всех строках, столбцах и на диагоналях были одинаковы.

Задача 13.5. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как крестьянину перевезти свой груз?

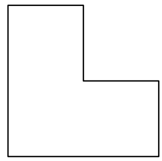
Задача 13.6. Расставьте на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

Задача 13.7. Разрежьте прямоугольник 6×11 на прямоугольники 2×3.

Задача 13.8. На левом берегу реки стоят полицейский, папа, мама, 2 девочки и 2 мальчика. У них есть лодка, в которую помещаются два человека. При этом преступника нельзя оставлять вместе с каким-нибудь персонажем без надзора полицейского; папу нельзя оставлять с девочкой без мамы, а маму — с мальчиком без папы. Кроме того, мальчика нельзя оставлять с девочкой без родителей, и лодку может вести только взрослый. Как им переехать на правый берег?

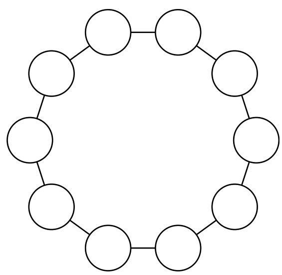
Задача 13.9. Разрежьте прямоугольник 69×55 на прямоугольники 5×11.

Задача 13.10. Разрежьте «уголок» (см. рисунок ниже) на (а) 4; (б) 9 равных «уголков».



Задача 13.11. У Пети есть полная 12-литровая канистра бензина и две пустые канистры: 8-литровая и 5-литровая. Помогите ему разделить бензин на две равные части?

Задача 13.12. Расположите в кружочках числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме чисел, симметричных им:



Задача 13.13. Сложите два квадрата из 25 единичных квадратов.

Задача 13.14. Найдите семь натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Задача 13.15. Из 29 единичных квадратиков сложите три квадрата.

Задача 13.16. Расставьте по кругу четыре нуля, три единицы и три двойки так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих чисел не делилась на три.

Задача 13.17. Андрей, Борис и Володя несколько раз совершили забег на 100 метров. При подведении результатов оказалось, что Андрей обогнал Бориса больше, чем в половине забегов, Борис обогнал Володю больше, чем в половине забегов, а Володя обогнал Андрея больше, чем в половине забегов. Как такое могло случиться?

Задача 13.18. Напишите в строку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних была отрицательна, а сумма всех пяти — положительна.

Задача 13.19. На острове Невезения всего два города: город рыцарей, жители которого всегда говорят правду, и город лжецов, жители которого всегда лгут. При этом жители острова часто ходят в гости в другой город. Вы находитесь в одном из этих городов, но не знаете, в каком именно. Как это выяснить, задав только один вопрос первому встречному?

Задача 13.20. На поле для игры в морской бой (в квадрате 10×10) расставьте 12 кораблей 1×4 так, чтобы они не соприкасались друг с другом даже вершинами.

Задача 13.21. Отец сына профессора говорит с сыном отца профессора, причём сам профессор в разговоре не участвует. Как такое может быть?

Подсказки

13.2. Постарайтесь найти ответ, в котором будет всего два имени, две фамилии и два отчества. **13.3**. Перенесите сначала два верхних диска на средний стержень. **13.4**. Поставьте в центр квадрата число 5. Суммы чисел во всех строках, столбцах и на диагоналях равны 15. **13.5**. При первой переправе можно взять с собой только козу. **13.6**. В каждой строке и в каждом столбце должен быть только один ферзь. **13.7**. Сложите сначала прямоугольники 6×2 и 6×3. **13.9**. Разрежьте сначала прямоугольники 5×55 и 11×55. **13.11**. Выполняйте все возможные переливания, не приводящие к ранее встречавшимся распределениям воды по сосудам. **13.12**. Постройте пример, в котором разность симметричных чисел равна 1. **13.13**. Представьте число 25 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. **13.14**. Найдите сначала два таких числа, а потом каждый раз добавляйте к набору сумму уже имеющихся чисел. **13.15**. Воспользуйтесь задачей 13.13. **13.18**. Первое число должно быть положительным. **13.21**. У человека может быть несколько детей, и у каждого человека есть два родителя.

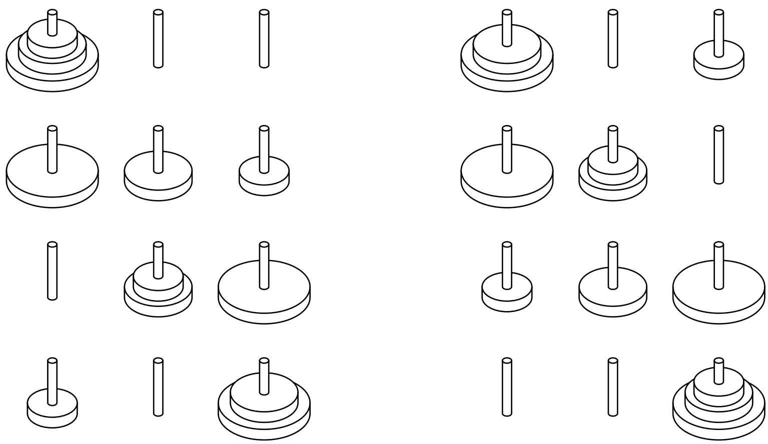
Решения

13.1. Например,

$$4+4-4+4-4=4 \qquad 4\times(4+4)+4+4=40$$
$$(4:4+4)\times 4+4=24 \qquad (4\times 4\times 4-4)\times 4=240$$

13.2. Например, Иванов Иван Иванович, Иванов Пётр Петрович, Петров Пётр Иванович и Петров Иван Петрович. Несложно проверить, что все требования задачи выполнены.

13.3. Например, можно действовать следующим образом:

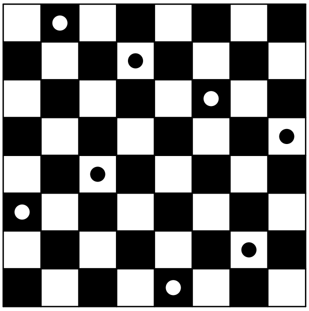


13.4. Приведём одну из возможных расстановок:

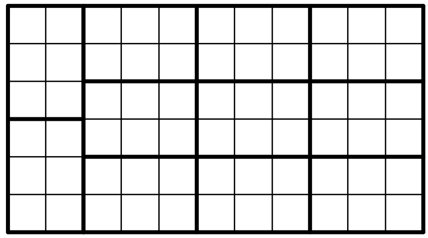
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Несложно проверить, что все перечисленные в условии суммы равны 15.

13.5. Крестьянин может действовать следующим образом: сначала перевезти на другой берег козу. Потом перевезти волка, а на обратном пути взять с собой козу. Затем перевезти капусту, после чего снова козу.



(а) 8 ферзей



(б) Разрезание прямоугольника 6×11

Рис. 13.1. К задачам 13.6 и 13.7

13.6. Одна из возможных расстановок приведена на рис. 13.1а.

13.7. Один из возможных способов показан на рис. 13.1б: сначала прямоугольник разрезан на прямоугольники 6×2 и 6×3, а потом каждый из них разрезан на прямоугольники 2×3.

13.8. Приведём таблицу перемещений персонажей задачи:

Лодка	Левый берег	Правый берег
Л	Пол., Пр., папа, мама, 2 Д, 2 М	
П	папа, мама, 2 Д, 2 М	Пол., Пр.
Л	Пол., папа, мама, 2 Д, 2 М	Пр.
П	папа, мама, 2 Д, 1 М	Пол., Пр., 1 М
Л	Пол., Пр., папа, мама, 2 Д, 1 М	1 М
П	Пол., Пр., мама, 2 Д	папа, 2 М
Л	Пол., Пр., папа, мама, 2 Д	2 М
П	Пол., Пр., 2 Д	папа, мама, 2 М
Л	Пол., Пр., мама, 2 Д	папа, 2 М
П	мама, 2 Д	Пол., Пр., папа, 2 М

Лодка	Левый берег	Правый берег
Л	папа, мама, 2 Д	Пол., Пр., 2 М
П	2 Д	Пол., Пр., папа, мама, 2 М
Л	мама, 2 Д	Пол., Пр., папа, 2 М
П	1 Д	Пол., Пр., папа, мама, 2 М, 1 Д
Л	Пол., Пр., 1 Д	папа, мама, 2 М, 1 Д
П	Пр.	Пол., папа, мама, 2 М, 2 Д
Л	Пол., Пр.	папа, мама, 2 М, 2 Д
П		Пол., Пр., папа, мама, 2 М, 2 Д

13.9. Аналогично задаче 13.7, прямоугольник 69×55 можно разрезать на прямоугольники 5×55 и 11×55. Действительно, $69 = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 5$, и можно резать линиями, перпендикулярными стороне 69. Каждый из прямоугольников 5×55 и 11×55 уже легко разрезать на прямоугольники 5×11.

13.10. (а) См. рис. 13.2а; (б) см. рис. 13.2б.

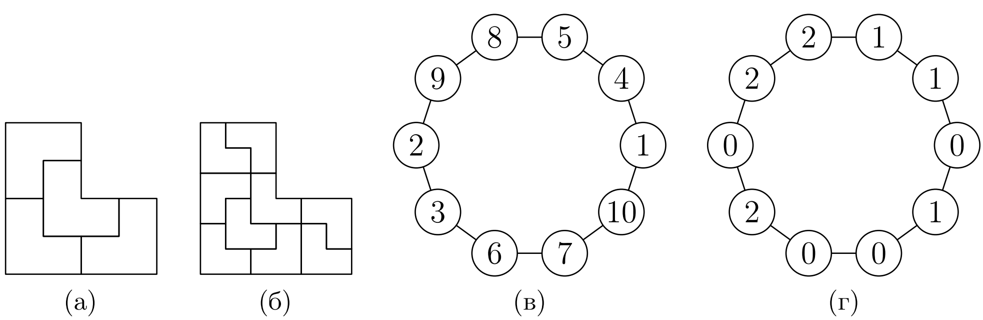


Рис. 13.2. К задачам 13.10, 13.12 и 13.16

13.11. Можно, например, действовать следующим образом. Заполним сначала 8-литровую канистру из 12-литровой, затем заполним 5-литровую из 8-литровой. В результате в 12-литровой канистре будет 4 литра, в 8-литровой — 3 литра, а в 5-литровой — 5 литров. Теперь выльем всё из 5-литровой канистры в 12-литровую, а из 8-литровой — в 5-литровую. В результате 8-литровая канистра будет пуста, в 5-литровой будет 3 литра, а оставшиеся 9 — в 12-литровой.

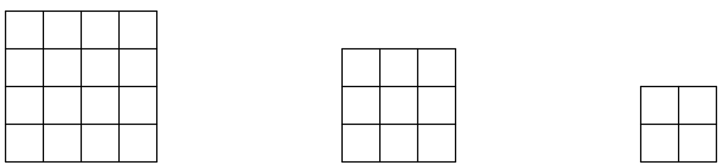
Снова наполним 8-литровую канистру из 12-литровой, а потом 5-литровую из 8-литровой. В результате в 8-литровой канистре будет 6 литров, в 12-литровой — 1 литр, а 5-литровая будет полна. Осталось перелить всё из 5-литровой в 12-литровую.

13.12. Одно из возможных расположений приведено на рисунке 13.2в.

13.13. Например, это можно сделать так:

13.14. Например, 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48. Действительно, их сумма $1 + 2 + 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 96$ делится на каждое из них.

13.15. Например, это можно сделать так:



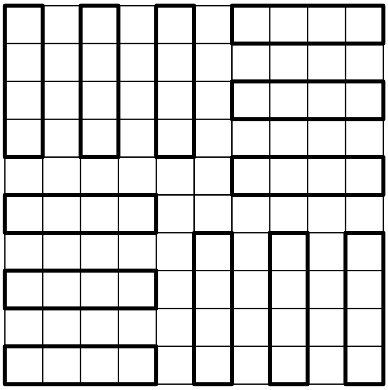
13.16. Один из возможных примеров изображён на рисунке 13.2г.

13.17. Это могло случиться, например, если в первом забеге они пришли к финишу в порядке Андрей, Борис, Володя, во втором — в порядке Борис, Володя, Андрей, а в третьем — в порядке Володя, Андрей, Борис.

13.18. Например, 3, -4, 3, -4, 3. Здесь сумма любых двух соседних равна -1, а сумма всех пяти чисел равна 1.

13.19. Например, можно задать вопрос: «Это ваш родной город?» Если вопрос задан в городе рыцарей, то и рыцарь, и лжец ответит «да», а если в городе лжецов, то любой житель ответит «нет».

13.20. Например, это можно сделать следующим способом:



13.21. Такое может быть, если профессор — женщина, а разговаривают её муж и брат.

Занятие 14

Выбор метода

На предыдущих занятиях домашнего математического кружка вы познакомились с тремя методами решения математических задач: методом полного перебора, методом исключения невозможных значений и методом подбора. Знакомство с каждым методом сопровождалось решением задач, метод решения которых был предопределён их местом в изучаемом разделе.

Однако не только в учебном процессе, но и в жизни, метод решения задачи заранее не известен, поэтому очень важно научиться выбирать метод решения для каждой предлагаемой вам задачи.

На этом занятии домашнего математического кружка вам будут предложены задачи, метод решения каждой задачи заранее не указан. При этом вам предлагается:

1) перечислить действия, выполняемые при выборе метода решения задач;
2) выполнить эти действия для каждой из предложенных задач;
3) решить каждую из предложенных задач выбранным методом.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Переложите одну палочку так, чтобы получилось верное равенство:*

$$\mathrm{XXIV}+\mathrm{V}=\mathrm{XX}$$

Пример 2. *Перед вами выдержка из прайс-листа некоторого магазина:*

1	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x*	*39.00*
2	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x*	*46.00*
3	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x 10 шт*	*260.00*
4	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x 10 шт*	*386.00*

Вася хочет купить на 1000 *рублей как можно больше дисков, а при равном количестве он предпочитает диски с пометкой «6x» (это означает, что компьютер может работать с такими дисками быстрее). Помогите Васе.*

Пример 3. *У Пети, Васи, Коли и Мити куртки и башмаки одного из четырёх цветов: красного, жёлтого, зелёного или синего, причём у всех куртки разных цветов и башмаки разных цветов. У Пети цвет куртки и башмаков совпадает. У Васи жёлтые башмаки и куртка другого цвета. Коля всегда ходит во всём зелёном, а Митя не носит красного. Кто из них во что одевается?*

Авторские ответы

Последовательность действий

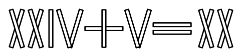
При выборе метода решения задачи целесообразно выполнить следующие действия:

1) выбрать план, по которому можно составить краткую запись предложенной задачи, при этом следует использовать планы, построенные на предыдущих занятиях;
2) составить краткую запись задачи в соответствии с выбранным планом;
3) соотнести краткую запись задачи с методом, соответствующим плану, по которому была составлена эта запись;
4) решить задачу методом, соответствующим плану, по которому была составлена её краткая запись.

Так как нами рассматривалось только три метода решения задач, то краткая запись задачи может составляться либо по плану, построенному на занятии 9, либо по плану, построенному на занятии 12, либо по плану, построенному на занятии 13.

Краткие записи примеров

Пример 1. *Переложите одну палочку так, чтобы получилось верное равенство:*



Поскольку в задаче требуется указать хотя бы один способ перекладывания, приводящий к верному равенству, то краткую запись этой задачи целесообразно составлять по плану, рассмотренному на занятии 13:

Дано:

- Требования:
- Неизвестные:

  x_1 —

  ...

  x_n —

Найти: хотя бы один набор значений неизвестных, который удовлетворяет требованиям.

Краткая запись имеет вид:

Дано:

- Требования:
  - можно переложить только одну спичку;
  - должно получиться верное равенство.
- Неизвестные:

x_1 — перекладываемая спичка;

x_2 — способ перекладывания этой спички.

Найти: хотя бы один набор значений неизвестных, который удовлетворяет требованиям.

Пример 2. *Перед Вами выдержка из прайс-листа некоторого магазина:*

1	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x*	*39.00*
2	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x*	*46.00*
3	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x 10 шт*	*260.00*
4	*Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x 10 шт*	*386.00*

Вася хочет купить на 1000 *рублей как можно больше дисков, а при равном количестве он предпочитает диски с пометкой «6x» (это означает, что компьютер может работать с такими дисками быстрее). Помогите Васе.*

Так как в этой задаче требуется указать набор значений неизвестных, удовлетворяющий условиям «общая стоимость не превосходит 1000 рублей, количество дисков максимально», то для составления краткой записи к этой задаче предлагаем выбрать следующий план:

Дано:

- Условие: ____
- Неизвестные:

  x_1 — ____

  ...

  x_n — ____
- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения ________________________

  ...

x_n может принимать значения ____________________

Найти: все наборы значений неизвестных, удовлетворяющие условию.
Краткая запись имеет вид:
Дано:

- Условия:
  1) Общая стоимость дисков не более 1000 рублей.
  2) Общее количество дисков — наибольшее возможное.
  3) При равном количестве дисков предпочитаются диски с пометкой «6х».
- Прайс-лист:

1	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x	39.00
2	Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x	46.00
3	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x 10 шт	260.00
4	Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x 10 шт	386.00

- Неизвестные:

  x_1 — количество покупок по п. 1;

  x_2 — количество покупок по п. 2;

  x_3 — количество покупок по п. 3;

  x_4 — количество покупок по п. 4.

- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения $0, 1, \ldots, 25$;

  x_2 может принимать значения $0, 1, \ldots, 21$;

  x_3 может принимать значения $0, 1, 2, 3$;

  x_4 может принимать значения $0, 1, 2$.

Найти: наборы значений неизвестных, удовлетворяющие перечисленным условиям.

Пример 3. *У Пети, Васи, Коли и Мити куртки и башмаки одного из четырёх цветов: красного, жёлтого, зелёного или синего, причём у всех куртки разных цветов и башмаки разных цветов. У Пети цвет куртки и башмаков совпадает. У Васи жёлтые башмаки и куртка другого цвета. Коля всегда ходит во всём зелёном, а Митя не носит красного. Кто из них во что одевается?*

Так как в тексте примера указано, что существует набор значений, удовлетворяющий перечисленным требованиям, а в вопросе к задаче требуется найти этот набор значений неизвестных, то для составления краткой записи к этой задаче имеет смысл выбрать следующий план:

Дано:

- Требования:____
- Неизвестные:

  x_1 —____

  ...

  x_n —____
- Значения неизвестных:

  x_1 может принимать значения__________________________

  ...

  x_n может принимать значения__________________________
- Существует единственный набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Найти: набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Краткая запись имеет вид:

Дано:

- Требования:
  - У Пети цвет куртки и башмаков совпадает.

- У Васи жёлтые башмаки.
- У Васи не жёлтая куртка.
- У Коли башмаки и куртка зелёные.
- Митя не носит красного.

- Неизвестные:

  x_1 — цвет куртки Пети;

  x_2 — цвет куртки Васи;

  x_3 — цвет куртки Коли;

  x_4 — цвет куртки Мити;

  x_5 — цвет башмаков Пети;

  x_6 — цвет башмаков Васи;

  x_7 — цвет башмаков Коли;

  x_8 — цвет башмаков Мити.

- Значения неизвестных: каждая из переменных может принимать значения красный, жёлтый, зелёный, синий.
- Существует единственный набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Найти: набор значений неизвестных, удовлетворяющий условию.

Поскольку плану краткой записи соответствует определённый метод решения, то выбор плана, по которому будет составляться краткая запись к задаче, влечёт за собой выбор метода решения этой задачи.

Итак, первый пример решается методом подбора (см. занятие 13), второй — методом перебора (см. занятия 9, 10), а третий — методом исключения невозможных значений (см. занятие 12). С применением каждого из перечисленных методов вы знакомы, поэтому решение задач мы оставляем вам в качестве упражнения.

Задачи

Задача 14.1. Перед вами выдержка из прайс-листа некоторого магазина:

1	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x	39.00
2	Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x	46.00
3	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x 10 шт	260.00
4	Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x 10 шт	386.00

Вася хочет купить на 1000 рублей как можно больше дисков, а при равном количестве он предпочитает диски с пометкой «6x» (это означает, что компьютер может работать с такими дисками быстрее). Помогите Васе.

Задача 14.2. Площадь прямоугольника с целыми сторонами равна 20. Найдите минимальный возможный периметр такого прямоугольника.

Задача 14.3. У Пети, Васи, Коли и Мити куртки и башмаки одного из четырёх цветов: красного, жёлтого, зелёного или синего, причём у всех куртки разных цветов и башмаки разных цветов. У Пети цвет куртки и башмаков совпадает. У Васи жёлтые башмаки и куртка другого цвета. Коля всегда ходит во всём зелёном, а Митя не носит красного. Кто из них во что одевается?

Задача 14.4. В трёх квартирах разной площади живут три человека разного веса (каждый в своей квартире). Самый худой из них не живёт в самой большой квартире. Средний по весу живёт не в средней квартире, а в самой маленькой квартире живёт не самый худой и не средний по весу. Кто из них где живёт?

Задача 14.5. За круглым столом сидели лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду, всего 12 человек. Каждый из них произнёс: «Вы все лжецы!». Сколько за столом лжецов и сколько правдолюбцев?

Задача 14.6. На судебном процессе по делу об украденном бульоне было трое подсудимых: Соня, Мартовский Заяц и Болванщик. Каждый из них обвинял одного из двух остальных. Правду сказала только Соня. Если бы каждый обвинял не того, кого он обвинял, а другого, то Болванщик был бы единственным, кто сказал правду. Кто виноват?

Задача 14.7. Найдите (а) тройку; (б) четвёрку чисел, в которой сумма чисел равна их произведению.

Задача 14.8. Найдите такую тройку натуральных чисел x, y, z, что $29x + 30y + 31z = 366$.

Задача 14.9. У Васи есть полная 14-литровая канистра бензина и две пустые: 9-литровая и 5-литровая. Как ему разделить бензин на две равные части?

Задача 14.10. Замените буквы в слове ТРАНСПОРТИРОВКА так, чтобы выполнялись неравенства: Т $>$ Р $>$ А $>$ Н $<$ С $<$ П $<$ О $<$ Р $<$ Т $>$ И $>$ Р $>$ О $<$ В $<$ К $<$ А.

Задача 14.11. Коля всегда говорит правду, а Вася всегда лжёт. Какой вопрос можно им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы?

Задача 14.12. Найдите все двузначные числа, в два раза большие суммы своих цифр.

Задача 14.13. Переложите одну спичку так, чтобы получилось верное равенство:

$$\mathrm{XV} + \mathrm{II} = \mathrm{XV}$$

Задача 14.14. Переложите одну спичку так, чтобы получилось верное равенство:

$$\mathrm{XXIV} + \mathrm{V} = \mathrm{XX}$$

Задача 14.15. Решите ребус: $AB \cdot BA = QUEEN$.

Задача 14.16. Найдите все способы расставить четырёх ферзей на доске 4×4 так, чтобы они не били друг друга.

Ответы

14.1. 35 дисков: 3 упаковки по п. 3 и 2 диска по п. 1 и 3 диска по п. 2. **14.2**. 18. **14.3**. Петя ходит во всём красном, Коля — во всём зелёном, Вася — в синей куртке и жёлтых башмаках, а Митя — в жёлтой куртке и синих башмаках. **14.10**. 976012379873456.

Подсказки

14.2. Переберите все возможные длины одной из сторон прямоугольника. **14.7**. В качестве одного из чисел возьмите 1. **14.8**. Вспомните календарь. **14.10**. Докажите, что Н $=0$. **14.11**. Придумайте вопрос, правильный ответ на который зависит от отвечающего.

Решения

14.1. Заметим, что покупать диски по п. 4 невыгодно: можно вместо этого купить упаковку дисков по п. 3 и несколько дисков по п. 1. Итак, нас могут интересовать только следующие пункты прайс-листа:

1	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x	39.00
2	Диск DVD-RW 4.7 Gb 6x	46.00
3	Диск DVD-RW 4.7 Gb 4x 10 шт	260.00

Теперь заметим, что на этапе оптимизации количества (без учёта скорости) п. 2 тоже можно не учитывать: вместо покупки диска по п. 2 можно купить диск по п. 1. Осталось купить как можно больше упаковок по п. 3, а на оставшиеся деньги купить по одному диску по п. 1. Это получится 3 упаковки по 10 дисков ($3 \cdot 260 = 780$ рублей) и 5 отдельных дисков ($5 \cdot 39 = 195$ рублей). Остаётся $1000 - 780 - 195 = 25$ рублей на оптимизацию скорости. Замена одного диска «4x» на диск «6x» стоит $46 - 39 = 7$ рублей, то есть можно заменить 3 диска.

14.2. Воспользуемся методом полного перебора с оптимизациями. Будем перебирать возможные значения одной из сторон прямоугольника, вычисляя каждый раз другую сторону. Ясно, что площадь прямоугольника должна делиться на каждую из его сторон. Следовательно, возможные значения длины стороны — это 1, 2, 4, 5, 10 и 20. Вычисляя для каждого из этих значений длину второй стороны, а затем периметр, получаем периметры 42, 24, 18, 18, 24 и 42 соответственно. Итак, минимальный возможный периметр — 18.

14.3. Воспользуемся методом исключения невозможных значений. Нарисуем таблицу, в которой строки соответствуют цветам курток, а столбцы — цветам башмаков. При этом на пересечении строки и столбца будем ставить первую букву имени мальчика, если соответствующее сочетание цветов для него пока возможно.

Запишем сначала данные задачи:

	К	Ж	З	С
К	П	В		
Ж		МП	М	М
З		МВ	МКП	М
С		МВ	М	ПМ

Поскольку у Коли куртка и башмаки зелёные, у остальных не может быть ни зелёной куртки, ни зелёных башмаков. Аналогично, жёлтые башмаки только у Васи.

	К	Ж	З	С
К	П	В		
Ж				М
З			К	
С		В		ПМ

Теперь видно, что у Мити синие башмаки, а значит, ни у кого другого синих башмаков нет.

	К	Ж	З	С
К	П	В		
Ж				М
З			К	
С		В		М

Таким образом, Петя ходит во всём красном, Коля — во всём зелёном, Вася — в синей куртке и жёлтых башмаках, а Митя — в жёлтой куртке и синих башмаках.

14.4. Заметим сначала, что самый худой не живёт ни в самой большой, ни в самой маленькой квартире. Следовательно, он живёт в средней квартире. Аналогично, средний по весу живёт в самой большой квартире. Таким образом, самый толстый живёт в самой маленькой квартире.

14.5. Будем решать задачу методом исключения невозможных значений неизвестной. В качестве переменной выберем количество рыцарей за столом. Случай, когда за столом 0 рыцарей, невозможен: в этом случае все лжецы сказали бы правду. Также невозможен случай, когда за столом хотя бы два рыцаря: в этом случае оба рыцаря солгали бы. Следовательно, возможен только случай, когда за столом ровно один рыцарь (который справедливо назвал остальных лжецами), и 11 лжецов (которые солгали, сказав, что все остальные — лжецы).

14.6. Поскольку Соня сказала правду, бульон украла не она. Аналогично, бульон украл не Болванщик. Следовательно, бульон украл Мартовский Заяц.

14.7. (а) Например, 1, 2 и 3: $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; (б) например, 1, 1, 2, 4: $1 + 1 + 2 + 4 = 8 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$.

14.8. В високосном году 4 месяца по 30 дней, 7 месяцев по 31 день и один месяц из 29 дней, всего 366 дней: $29 \cdot 1 + 30 \cdot 4 + 31 \cdot 7 = 366$.

14.9. Можно, например, действовать следующим образом:

Наполним 9-литровую канистру из 14-литровой, затем наполним из 9-литровой 5-литровую. Потом выльем всё из 5-литровой в 14-литровую, а из 9-литровой — в 5-литровую. В результате в 14-литровой канистре будет 10 литров, в 5-литровой — 4 литра, а в 9-литровая будет пуста.

Повторим операции из предыдущего абзаца. В результате в 14-литровой канистре будет 6 литров, в 9-литровой — 3 литра, а в 5-литровой — 5 литров. Выльем снова всё из 5-литровой в 14-литровую, а затем из 9-литровой в 5-литровую. В результате в 5-литровой будет 3 литра, а в 14-литровой — оставшиеся 11 литров.

Снова наполним 9-литровую канистру из 14-литровой, а затем 5-литровую из 9-литровой. Осталось перелить всё из 5-литровой в 14-литровую.

14.10. Мы приведём два варианта решения.

Первое решение. Заметим сначала, что использованы 10 букв, а значит, все цифры. Из условия задачи следует, что Т > И > Р > А > К > > В > О > П > С > Н, следовательно, Т = 9, И = 8, Р = 7, А = 6, К = 5, В = 4, О = 3, П = 2, С = 1, Н = 0.

Второе решение. В задаче 10 неизвестных, каждое из которых может принимать не более 10 значений. Очевидно, что для решения этой задачи следует использовать метод перебора с оптимизациями. В данном случае инструментом, позволяющим удалять заведомо невозможные значения неизвестных, является числовой отрезок. Расположим буквы на числовом отрезке.

Так как Т > Р > А > Н, то

Н А Р Т

Выбираем буквы, которые расположены на отрезке между буквами Н и А, этот отрезок является первым слева, поэтому перебор естественно начинать именно с него. Так как О < В < К < А, то

Н О В К А

Выбираем буквы, которые расположены между буквами Н и О, теперь этот отрезок является первым слева. Так как Н < С < П < О, то

Н С П О В

Получили

Н С П О В К А Р Т

Осталось определить расположение последней буквы И. Так как Т >

> И > Р, то

Н С П О В К А Р И Т

Так как все буквы являются цифрами, то Н = 0. С = 1, П = 2, О = 3, В = 4, К = 5, А = 6, Р = 7, И = 8, Т = 9.

14.11. Например, можно задать вопрос: «Ты Коля?». Оба ответят на этот вопрос «да».

14.12. Воспользуемся перебором с оптимизациями. Сначала исключим слишком большие значения переменной. Для этого заметим, что сумма цифр любого двузначного числа не превосходит $9+9=18$. Следовательно, любое из искомых чисел не больше $18 \cdot 2 = 36$. Но у любого такого числа сумма цифр не превосходит $2+9=11$, а значит, искомые числа не больше $11 \cdot 2 = 22$. Аналогично, у чисел от 10 до 22 суммы цифр не превосходят $1+9=10$, откуда сами искомые числа не превосходят $10 \cdot 2 = 20$.

Кроме того, число, в два раза большее суммы своих цифр, обязательно чётно. Таким образом, остались только числа 10, 12, 14, 16, 18 и 20. Проверяя каждое из этих чисел, получаем, что условиям задачи удовлетворяет только число 18.

14.13.

XIV + I = XV

14.14.

XXIV − V = XIX

14.15. Заметим, что левая часть ребуса меньше, чем $100 \cdot 100 = 10\,000$, а правая заведомо больше этого числа. Следовательно, ребус не имеет решений.

14.16. Поскольку двух ферзей в один столбец ставить нельзя, при любой такой расстановке в каждом из четырёх столбцов таблицы должен стоять ровно один ферзь. Следовательно, можно рассмотреть следующие неизвестные:

x — номер строки, в которой стоит ферзь в первом столбце;

y — номер строки, в которой стоит ферзь во втором столбце;

z — номер строки, в которой стоит ферзь в третьем столбце;

t — номер строки, в которой стоит ферзь в четвёртом столбце.

Перебор возможных значений этих переменных удобно производить при помощи дерева возможностей. Мы приведём только окончательное дерево, а обоснование его построения оставляем читателю в качестве упражнения.

Занятие 15

Метод «от противного»

На этом занятии домашнего математического кружка будет рассмотрен метод доказательства утверждений, который принято называть методом «от противного». Традиционно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Докажите, что не существует числовой таблицы размером 5×5, в которой сумма чисел в каждой строке равна 5, а в каждом столбце — 4.*

Пример 2. *Докажите, что число 32 невозможно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.*

Пример 3. *Докажите, что нельзя расставить 9 ладей на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга.*

Авторские ответы

Общие свойства

В каждом из приведённых примеров требуется доказать справедливость некоторого утверждения.

Краткая запись

Краткая запись каждого из приведённых примеров может быть составлена по следующему плану:

Дано: Утверждение «_____».

Доказать: Утверждение «_____» верно.

Метод решения

Предложенные задачи решаются методом «от противного», суть которого заключается в следующем:

1) Предположить, что утверждение «_____» неверно.
2) Заменить предположение эквивалентным утверждением, то есть построить новое утверждение, противоположное тому, которое требуется доказать.
3) Из построенного утверждения получить противоречие с условием задачи, ранее известным фактом или самим построенным утверждением.
4) Сделать вывод об ошибочности предположения, то есть о справедливости доказываемого утверждения.

Несложно заметить, что при доказательстве утверждений методом «от противного» показывают, что из двух возможных ответов (утверждение верно и утверждение неверно) один противоречит условию задачи, а следовательно, должен быть исключён. В этом случае оставшийся второй вариант является искомым ответом. Следовательно, метод «от противного» является частным случаем метода исключения невозможного значения неизвестного.

Границы применимости

Метод «от противного» применяется для доказательства уже сформулированных утверждений.

При доказательстве утверждений метод «от противного» применять никогда не вредно. Действительно, без использования этого метода вы располагаете только условиями задачи, а при его использовании — ещё и утверждением, противоположным к доказываемому.

Примеры решений

Пример 1. *Докажите, что не существует числовой таблицы размером* 5×5*, в которой сумма чисел в строках равна* 5*, а в столбцах —* 4*.*

Решение. Будем доказывать требуемое утверждение методом «от противного». Предположим, что доказываемое утверждение неверно, то есть существует таблица размером 5×5, в которой сумма чисел в каждой строке равна 5, а в каждом столбце — 4. Вычислим сумму чисел, стоящих в одной из таких таблиц двумя способами. С одной стороны, для вычисления этой суммы можно сложить суммы чисел во всех строках. При этом получим $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$. С другой стороны, для вычисления суммы всех чисел можно сложить суммы чисел во всех столбцах и получить $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$. Таким образом, сумма всех чисел в таблице одновременно равна и 25 и 20, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и требуемой таблицы не существует, что и требовалось доказать.

Задачи

Задача 15.1. Сформулируйте утверждения, противоположные к следующим:

1) все крокодилы не летают;
2) Коля никогда не выезжал из родного города;

3) в Москве больше 10 000 000 жителей;
4) сумма двух чисел всегда меньше их произведения;
5) Вася каждый день делает зарядку;
6) кто нибудь заметит: «А ведь клоуны правы...»;
7) мы бредём, отсырели от пота;
8) ещё темны леса, ещё тенисты кроны;
9) все кошки, все коты и все котята когда-то уважали всех собак;
10) детство кончится когда-то;
11) время есть, а денег нет;
12) всё знает он;
13) есть, с кем поговорить;
14) пришёл, увидел, победил;
15) все обезьяны любят бананы;
16) некоторые обезьяны любят бананы;
17) Коля ничего не знает;
18) все Васи — блондины.

Задача 15.2. Докажите, что число 32 нельзя представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

Задача 15.3. Каждая точка прямой окрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Докажите, что найдётся отрезок, концы и середина которого окрашены в один цвет.

Задача 15.4. Докажите, что число 23 невозможно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

Задача 15.5. Докажите, что нельзя расставить 9 ладей на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга.

Ответы

15.1. Приведём по одному варианту формулировки противоположного утверждения:

1) существует крокодил, который летает;
2) Коля хотя бы раз выезжал из родного города;
3) в Москве не более 10 000 000 жителей;
4) существуют два числа, сумма которых больше или равна их произведения;
5) Вася не каждый день делает зарядку;
6) никто не заметит: «А ведь клоуны правы...»;
7) мы не бредём *или* не отсырели от пота;
8) уже не темны леса *или* уже не тенисты кроны;
9) в каждый момент какая-то кошка или какой-то кот или какой-то котёнок не уважал(а) какую-то собаку;
10) детство никогда не кончится;
11) времени нет или деньги есть;
12) он чего-то не знает;
13) не с кем поговорить;
14) не пришёл или не увидел или не победил;
15) не все обезьяны любят бананы;
16) все обезьяны не любят бананы;
17) Коля что-то знает;
18) какой-то Вася — не блондин.

Решения

15.2. Предположим, что число 32 можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел. Тогда каждый из этих кубов не превосходит наибольшего куба, меньшего 32, то есть не превосходит $27 = 3^3$. Таким образом, каждое из слагаемых — либо $1^3 = 1$, либо $2^3 = 8$, либо $3^3 = 27$. Если оба слагаемых — 1 или 8, то сумма не больше $9 < 32$. Значит, одно из слагаемых равно 27, а другое равно $32 - 27 = 5$ — противоречие. Следовательно, число 32 нельзя представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

15.3. Допустим, можно так окрасить прямую, чтобы искомого отрезка не нашлось. Рассмотрим какие-нибудь две одноцветные точки на прямой. Выбрав новое начало отсчёта на прямой, можно считать, что это точки -1 и 1, а переименовав при необходимости цвета — что они белые. Если одна из точек -3, 0, 3 — белая, то эта точка вместе с точками -1 и 1 образует искомую тройку. Если же все эти точки чёрные, то они образуют искомую тройку. Итак, получили противоречие с предположением. Значит, предположение ложно, и при любой раскраске прямой в два цвета требуемый отрезок найдётся.

15.4. Предположим, что число 23 можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел. Тогда каждый из этих квадратов не превосходит $16 = 4^2$, то есть каждое слагаемое — одно из чисел 1, 4, 9, 16. Разберём несколько случаев:

1) Наибольшее слагаемое равно 16. Тогда сумма остальных двух слагаемых равна $23 - 16 = 7$. Но $4 + 4 = 8$, а остальные суммы с использованием 1 и 4 не превосходят $4 + 1 = 5 < 7$.

2) Наибольшее слагаемое равно 9. Тогда сумма остальных двух слагаемых равна $23 - 9 = 14$. Но $9 + 9 = 18$, а остальные суммы с использованием 1, 4 и 9 не превосходят $9 + 4 = 13 < 14$.

Итак, получили противоречие с предположением. Следовательно, противоречие неверно, и число 23 невозможно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

15.5. Допустим, можно так расставить 9 ладей. Поскольку они не бьют друг друга, на каждой вертикали стоит не более одной ладьи. Но вертикалей всего 8, а значит, и ладей не более восьми. Получили противоречие. Значит, так расставить 9 ладей нельзя.

Занятие 16

Верно ли?

На этом занятии домашнего математического кружка вы познакомитесь с методом решения задач, в которых предлагается проверить справедливость некоторого утверждения. В формулировках этих задач часто используются речевые обороты: «Верно ли...», «Существует ли...», «Может ли...» и т. д. Как обычно, при изучении нового метода решения задач вам предстоит:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выявить общие свойства предложенных задач;
   - построить план краткой записи для рассматриваемых задач;
   - придумать общий метод решения предложенных задач;
   - указать границы применимости нового метода.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Существует ли таблица* 5×5*, в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?*

Пример 2. *Существует ли таблица* 5×4 *(5 столбцов и 4 строки), в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?*

Авторские ответы

Общие свойства

Разнообразие формулировок, которые могут использоваться при построении текста задач рассматриваемого типа, затрудняет составление их краткой записи, а это, в свою очередь, осложняет выбор метода их решения. Так задача, приведённая в первом примере, может быть сформулирована следующими способами:

«Можно ли составить числовую таблицу размерами 5×5, в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?»

«Можно ли расположить числа в таблице размерами 5×5 так, чтобы выполнялось следующее свойство: сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?»

«Верно ли, что существует квадратная числовая таблица размерами 5×5, в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?».

Однако любую формулировку таких задач можно заменить следующей формулировкой: «Существует ли «_____», обладающий следующими свойствами: _____?»

Краткая запись

Краткая запись задач указанного типа имеет вид:

Дано: Утверждение: «Существует «_____», обладающий следующими свойствами: _____»

Найти: верно ли данное утверждение.

Метод решения

При решении задач такого типа следует попеременно пытаться

- строить пример «_____» с указанными свойствами;
- доказывать, что «_____» с указанными свойствами не существует.

Если вы достаточно долго безуспешно пытаетесь строить пример, попытайтесь переключиться на попытку доказательства, что его не существует, и наоборот.

Достаточно часто доказывать, что «_____» с указанными свойствами не существует, бывает удобно методом «от противного». В соответствии с этим методом, из предположения о том, что «_____» с указанными свойствами существует, получают противоречие с ранее известными фактами, условием задачи или самим предположением.

Итак, при решении задач, в которых требуется проверить справедливость некоторого утверждения, следует попеременно:

1) пытаться методом «от противного» доказать отсутствие «_____» с указанными свойствами, для чего:

   - сформулировать предположение о том, что «_____» с указанными свойствами существует;
   - исходя из этого предположения, пробовать получить утверждение, которое противоречит ранее известным фактам, условию задачи или сформулированному предположению;
   - если это удалось, сделать вывод о том, что «_____» с указанными свойствами не существует;

2) пытаться построить пример «_____» с указанными свойствами.

Следует чередовать эти подходы, пока один из них не приведёт к решению задачи.

Границы применимости

Указанную схему рассуждений полезно применять во всех задачах, в которых требуется проверить справедливость некоторого утверждения. Однако предугадать, который подход (метод «от противного» или подбор) приведёт к успеху, достаточно сложно.

Примеры решений

Пример 1. *Существует ли таблица* 5×5, *в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?*

Решение. Решение дословно повторяет решение первого из предыдущего занятия: в том примере как раз требовалось доказать, что такой таблицы не существует.

Пример 2. *Существует ли таблица* 5×4 *(5 столбцов и 4 строки), в которой сумма чисел в каждой строке равна пяти, а в каждом столбце — четырём?*

Решение. Достаточно поставить в каждую клетку таблицы число 1.

Задачи

Задача 16.1. За день до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня он чихнул. Обязательно ли завтра пойдёт дождь?

Задача 16.2. За день до дождя Петин кот всегда чихает. Вчера он не чихал. Может ли сегодня пойти дождь?

Задача 16.3. За день до дождя Петин кот всегда чихает, а Васин кот если и чихает, то только на следующий день после дождя. Вчера Петин кот не чихал. Может ли Васин кот завтра чихнуть?

Задача 16.4. За день до дождя Петин кот всегда чихает, а Васин кот если и чихает, то только на следующий день после дождя. Сегодня не было дождя. Мог ли Васин кот вчера чихать?

Задача 16.5. В стране рыцарей и лжецов все лжецы смотрят программу «Лжецам о рыцарях», а все рыцари — программу «Рыцарям о лжецах». Сейчас Вася смотрит программу «Лжецам о рыцарях». Может ли он быть рыцарем?

Задача 16.6. В стране рыцарей и лжецов все лжецы смотрят программу «Лжецам о рыцарях», а все рыцари — программу «Рыцарям о лжецах». Вася никогда не видел программы «Лжецам о рыцарях». Может ли он быть лжецом?

Задача 16.7. Если у жителя острова Невезения ловится крокодил и растёт кокос, то он родился не в понедельник. Если же у жителя растёт кокос и он родился не в понедельник, то у него не ловится крокодил. Наконец, если житель родился в понедельник, а у него ловится крокодил, то кокос у него тоже растёт. Может ли у рождённого в понедельник жителя острова ловиться крокодил? а расти кокос?

Ответы

16.1–16.3. Нет. **16.4–16.5**. Да. **16.6**. Нет. **16.7**. Нет; да.

Решения

16.1. В условии только сказано, что Петин кот обязательно чихает за день до дождя, однако ситуация, когда кот чихнул просто так, не противоречит условию.
16.2. Предположим, что сегодня будет дождь. Поскольку за день до дождя Петин кот всегда чихает, вчера он обязан был чихнуть. Но это противоречит условию задачи, так что сделанное предположение ложно, и сегодня не может пойти дождь.
16.3. По предыдущей задаче, сегодня не может быть дождя. Но Васин кот может чихать только на следующий день после дождя, так что завтра он чихать не может.
16.4. Например, если позавчера шёл дождь, то вчера Васин кот мог чихнуть.
16.5. Вася может быть рыцарем и смотреть обе программы.

16.6. Если бы Вася был лжецом, он бы смотрел программу «Лжецам о рыцарях», однако по условию он никогда её не видел, так что сделанное предположение неверно, и Вася не может быть лжецом.
16.7. Предположим, у одного из рождённых в понедельник жителей острова ловится крокодил. В силу третьего предложения условия кокос у него тоже растёт. Но эта ситуация противоречит первому предложению условия: если у кого-то ловится крокодил и растёт кокос, то он родился не в понедельник. Значит, сделанное предположение ложно, и у рождённого в понедельник жителя острова не может ловиться крокодил.

Ситуация, когда у рождённого в понедельник жителя острова не ловится крокодил и растёт кокос, не противоречит условию задачи: ни в одном из предложений не выполнена часть «если».

Занятие 17

Подсчёт двумя способами

При решении задач, предложенных на предыдущих двух занятиях, вы, наверное, отметили, что наиболее сложным этапом в их решении является построение противоречия. По этой причине отдельные занятия математического кружка будут посвящаться изучению различных способов построения противоречий. На этом занятии вы познакомитесь с первым из таких способов.

В процессе знакомства с новым способом построения противоречий вам предлагается:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выделить общий для предложенных задач способ построения противоречия;
   - указать границы применимости нового способа.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Существует ли таблица такая, что сумма чисел в каждом столбце равна 1, а сумма чисел в каждой строке — нулю?*

Пример 2. *Можно ли расставить числа в таблице (а)*4×5*; (б)*3×5 *так, что сумма чисел в каждой строке равнялась пяти, а сумма чисел в каждом столбце — трём?*

Авторские ответы

Способ построения противоречия

В каждом из перечисленных выше примеров построение противоречия выполняется в следующем порядке:

- выбирается некоторая величина;
- находится её значение первым способом;
- находится её значение вторым способом;
- сравниваются результаты, полученные первым и вторым способом;
- если результаты различны, искомое противоречие построено;
- если результаты совпадают, эта попытка решения неудачна, и следует предпринять новую.

При этом следует отметить, что значением выбираемой величины может быть не только число, но и некоторая характеристика (чётность, последняя цифра и т. д.) какой-то другой величины.

Границы применимости

По условию задачи сложно определить, применим ли данный способ построения противоречия. Можно попытаться (например, арифметическим методом) искать различные величины, пока какая-нибудь из них не будет найдена двумя способами. Как обычно, для того, чтобы научиться применять подсчёт двумя способами в более сложных ситуациях, полезно потренироваться в его применении на большом количестве задач.

Примеры решений

Пример 1. *Существует ли таблица такая, что сумма чисел в каждом столбце равна 1, а сумма чисел в каждой строке — нулю?*

Решение. Докажем методом «от противного», что такой таблицы не существует. Для этого предположим, что она существует. Заметим, что сумму всех чисел в таблице можно найти двумя способами: с одной стороны, она равна сумме сумм чисел в каждом столбце, а с другой — сумме сумм чисел в каждой строке.

Поскольку сумма чисел в каждой строке равна 0, при подсчёте первым способом получаем, что сумма всех чисел в таблице тоже равна нулю. С другой стороны, сумма чисел в каждом столбце равна 1, а значит, при подсчёте вторым способом получаем, что сумма всех чисел в таблице равна числу столбцов.

Итак, мы нашли сумму всех чисел в таблице двумя способами, и получили различные результаты (ведь в таблице должен быть хотя бы один столбец!), то есть получили противоречие, и таблицы с указанными в условии свойствами не существует.

Ответ. Не существует.

Задачи

Задача 17.1. Коля, Вася и Петя соревновались в беге на различные дистанции. В каждом забеге пришедший первым получал 5 баллов, вторым — 3 балла, а последним — 1 балл. Известно, что они ни разу не приходили к финишу одновременно. Могло ли так случиться, что каждый набрал (а) ровно 25 баллов? (б) ровно 24 балла?

Задача 17.2. Можно ли расставить числа в таблице (а) 4×5; (б) 3×5 так, что сумма чисел в каждой строке равнялась пяти, а сумма чисел в каждом столбце — трём?

Задача 17.3. Поезд ехал так, что за любой час проезжал ровно 100 км. Могло ли случиться так, что за некоторые 6,5 часов этот поезд проехал (а) более 650 км? (б) 700 км? (в) 800 км?

Задача 17.4. Можно ли расставить числа в таблице (а) 8×8; (б) 3×3; (в) 7×7 так, что сумма чисел в каждом квадратике 2×2 — натуральное число, а сумма всех чисел в таблице — дробное?

Задача 17.5. В классе 12 мальчиков и 13 девочек. Могло ли так случиться, что на дискотеке этого класса каждый мальчик потанцевал ровно с пятью девочками, а каждая девочка — ровно с пятью мальчиками?

Задача 17.6. На бумаге написано десять чисел. Известно, что сумма любых трёх из них равна нулю. Докажите, что все написанные числа — нули.

Ответы

17.1–17.2. (а) Нет; (б) да. **17.3**. (а) Да; (б) да; (в) нет. **17.4**. (а) Нет; (б) да; (в) да. **17.5**. Нет.

Подсказки

17.1. Найдите двумя способами общее число набранных участниками баллов. **17.2**. Найдите двумя способами сумму всех чисел, записанных в таблице. **17.3**. Используйте, что поезд мог ехать неравномерно. **17.4**. Выразите сумму всех чисел в таблице через суммы чисел в квадратах 2×2. **17.5**. Найдите двумя способами общее число пар (мальчик, девочка), танцевавших вместе на этой дискотеке.

Решения

17.1. (а) Найдём двумя способами общее число набранных участниками баллов. С одной стороны, в каждом забеге всего начислялось $5 + 3 + 1 = 9$ баллов, то есть всего баллов было начислено в 9 раз больше, чем было забегов. С другой стороны, каждый участник набрал 25 баллов, а значит, всего было набрано $25 \cdot 3 = 75$ баллов. Но число 75 не делится на девять. Полученное противоречие доказывает, что описанная в условии задачи ситуация невозможна.

(б) Такое могло случиться, например, если было 8 забегов, причём в чётных забегах мальчики финишировали в порядке Коля, Вася, Петя, а в нечётных — в порядке Петя, Коля, Вася.

17.2. (а) Найдём двумя способами сумму всех чисел в таблице. С одной стороны, сумма чисел в каждой из четырёх строк равна пяти, поэтому сумма всех чисел равна $5 \cdot 4 = 20$. С другой стороны, считая суммы по столбцам, получим $3 \cdot 5 = 15$. Полученное противоречие доказывает, что расставить числа требуемым в задаче способом невозможно.

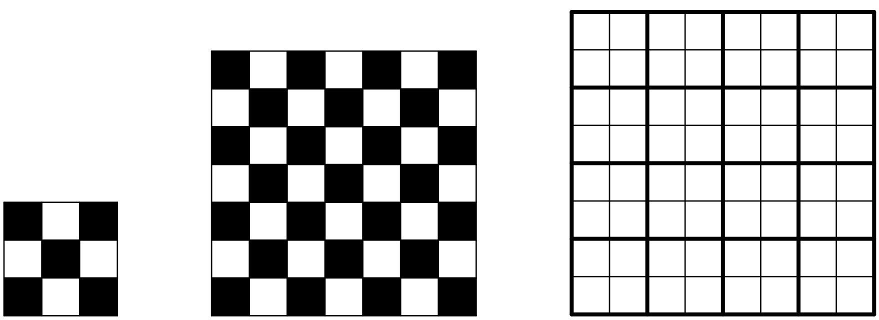
(б) Достаточно поставить в каждую клетку таблицы число 1.

17.3. (а), (б) Он мог первые полчаса ехать со скоростью 200 км/ч, вторые — стоять, третьи — опять ехать со скоростью 200 км/ч и т. д.

(в) За первые 6 часов пути он проехал не более 600 км, а за последние полчаса — не более 100 км. Значит, всего он проехал не более 700 км.

17.4. (а) Предположим, что расставить числа в таблице требуемым в задаче способом возможно. Заметим, что сумма всех чисел в таблице равна сумме сумм чисел в квадратиках 2×2, выделенных жирным на рисунке 17.1в. Следовательно, эта сумма должна быть натуральным числом. С другой стороны, в условии задачи требуется, чтобы эта сумма была дробным числом. Полученное противоречие доказывает, что расставить числа в таблице требуемым способом невозможно.

(б), (в) Примеры расстановок изображены на рисунках 17.1а и 17.1б. Чёрным цветом обозначены клетки, в которые следует поставить число 0,5, а белым — клетки, в которые следует поставить число 1.



(а) 3×3 (б) 7×7 (в) 8×8

Рис. 17.1. К задаче 17.4

17.5. Найдём двумя способами общее число пар (мальчик, девочка), танцевавших вместе на этой дискотеке. С одной стороны, каждый мальчик танцевал ровно с пятью девочками, поэтому таких пар ровно в пять раз больше, чем мальчиков в классе, то есть $12 \cdot 5 = 60$. С другой стороны, каждая девочка танцевала ровно с пятью мальчиками, поэтому таких пар ровно $13 \cdot 5 = 65$. Полученное противоречие доказывает, что описанная в условии задачи ситуация невозможна.

17.6. Предположим, что не все написанные числа — нули. Тогда среди них есть одно ненулевое, обозначим его a, а какие-нибудь три другие написанных числа — через b, c и d. Тогда $a+b+c=0$, $a+b+d=0$, $b+c+d=0$, $a+c+d=0$. Складывая эти равенства, получаем $3a+3b+3c+3d=0$, откуда $a+b+c+d=0$. Но $b+c+d+d=0$, а значит, $a=a+(b+c+d)=0$. Полученное противоречие доказывает, что все написанные числа — нули.

Занятие 18

Чётность

На этом занятии вам предлагается познакомиться с частным случаем способа подсчёта двумя способами — чётностью. Как было сказано на предыдущем занятии, при изучении нового способа построения противоречия вам предлагается:

1) решить задачи, относящиеся к новому типу;
2) выполнить письменно задания:
   - выделить общий для предложенных задач способ построения противоречия;
   - указать границы применимости нового способа.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *В конференции участвовали* 19 *учёных. После конференции каждый из них отправил* 2 *или* 4 *письма участникам этой конференции. Могло ли случиться так, что каждый участник получил ровно* 3 *письма? (Письма на почте не теряют.)*

Пример 2. *Парламент состоит из двух одинаковых палат. После некоторого голосования спикер объявил, что решение принято с преимуществом в* 13 *голосов, причём воздержавшихся не было. Прав ли спикер?*

Пример 3. *Незнайка загадал два натуральных числа, вычислил их сумму и произведение, перемножил результаты и получил* 12 154 854 973. *Докажите, что Незнайка где-то ошибся в вычислениях.*

Авторские ответы

Способ построения противоречия

В перечисленных выше примерах для построения противоречия применяется подсчёт двумя способами, причём в качестве искомой величины выбирается чётность некоторой другой величины. Более подробно, при построении противоречия с помощью чётности выполняются следующие действия:

- выбирается некоторая величина;
- находится её чётность первым способом;
- находится её чётность вторым способом;
- сравниваются результаты, полученные первым и вторым способом;
- если результаты различны, искомое противоречие построено;
- если результаты совпадают, эта попытка решения неудачна, и следует предпринять новую.

Границы применимости

Как и для подсчёта двумя способами, применимость этого метода по условию задачи определить сложно.

Примеры решений

Пример 1. *В конференции участвовали* 19 *учёных. После конференции каждый из них отправил* 2 *или* 4 *письма участникам этой конференции. Могло ли случиться так, что каждый участник получил ровно* 3 *письма? (Письма на почте не теряют.)*

Решение. Докажем методом от противного, что так случиться не могло. Для этого предположим, что описанная в условии задачи ситуация возможна. Рассмотрим общее количество отправленных писем. С одной стороны, оно равно сумме количеств писем, отправленных каждым из участников конференции. Поскольку каждое из слагаемых в этой сумме чётно, общее количество отправленных писем также чётно. С другой стороны, поскольку письма на почте не теряют, общее количество отправленных писем равно общему количеству полученных писем, то есть равно $19 \cdot 3 = 57$.

Итак, общее количество писем и чётно и нечётно одновременно. Следовательно, описанная ситуация невозможна.
Ответ. Не могло.

Задачи

Задача 18.1. Какой — чётной или нечётной — будет сумма (а) чётного и нечётного чисел? (б) двух нечётных чисел? (в) чётного числа нечётных чисел? (г) нечётного числа нечётных чисел?

Задача 18.2. Парламент состоит из двух одинаковых палат. После некоторого голосования спикер объявил, что решение принято с преимуществом в 13 голосов, причём воздержавшихся не было. Прав ли спикер?

Задача 18.3. Незнайка загадал два натуральных числа, вычислил их сумму и произведение, перемножил результаты и получил 12 154 854 973. Докажите, что Незнайка где-то ошибся в вычислениях.

Задача 18.4. Можно ли так расставить числа в квадрате (а) 7×7; (б) 8×8, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётной, а в каждом столбце — нечётной?

Задача 18.5. Каким — чётным или нечётным будет произведение (а) двух чётных чисел? (б) чётного и нечётного чисел? (в) двух нечётных чисел?

Задача 18.6. Существует ли такой набор из 20 натуральных чисел, что сумма любых трёх из них нечётна, а сумма любых пяти чётна?

Задача 18.7. Можно ли (а) доску 7×7; (б) доску 8×8; (в) доску 8×8 без угловой клетки; (г) доску 7×7 без угловой клетки разрезать на домино 2×1?

Задача 18.8. Можно ли соединить 11 телефонов проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими?

Задача 18.9. На олимпиаде было предложено 7 задач. При подведении итогов олимпиады выяснилось, что каждый участник олимпиады решил нечётное количество задач, и каждую задачу решило нечётное количество школьников. Докажите, что в олимпиаде участвовало нечётное количество школьников.

Задача 18.10. В некоторой стране из каждого города, кроме столицы и Гадюкино выходит 100 дорог в другие города, а из Гадюкино выходит всего одна дорога. Докажите, что из Гадюкино можно доехать до столицы.

Задача 18.11. Докажите, что в любой компании число людей, сделавших нечётное число рукопожатий с другими людьми этой компании, чётно.

Задача 18.12. При подведении итогов олимпиады выяснилось, что каждый участник олимпиады решил чётное количество задач, а каждую задачу решило нечётное количество школьников. Докажите, что в олимпиаде участвовало чётное количество школьников.

Задача 18.13. Можно ли покрасить некоторые клетки квадрата (а) 5×5; (б) 6×6 в чёрный цвет так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было чётное число чёрных клеток, а во всём квадрате — нечётное?

Ответы

18.1. (а) Нечётной; (б) чётной; (в) чётной; (г) нечётной. **18.2**. Не прав. **18.4**. (а) Нельзя; (б) можно. **18.5**. (а) Чётным; (б) чётным; (в) нечётным. **18.6**. Нет. **18.7**. (а) Нельзя; (б) можно; (в) нельзя; (г) можно. **18.8**. Нельзя. **18.13**. (а) Можно; (б) нельзя.

Подсказки

18.1. Решайте аналогично примеру. **18.3**. Найдите чётность суммы и произведения загаданных чисел. **18.4**. (а)Докажите, что сумма всех чисел таблицы должна быть и чётной, и нечётной одновременно. (б)Постройте пример. **18.6**. Найдите двумя способами чётность суммы первых пятнадцати чисел набора. **18.7**. (а), (в) Используйте нечётность общего числа клеток; (б), (г) Постройте пример. **18.8**. Найдите двумя способами чётность количества концов проводов. **18.9**. Найдите двумя способами чётность количества пар вида «школьник, решённая им задача». **18.13**. (а)Постройте пример. (б)Докажите, что число чёрных клеток в такой таблице должно быть чётным.

Решения

18.1. (а) Аналогично примеру, сумма имеет вид $2k+2l-1 = 2(k+l)-1$, то есть нечётна.

(б) Аналогично примеру, сумма имеет вид $2k-1+2l-1 = 2(k+l-1)$, то есть чётна.

(в) Сгруппируем слагаемые по парам. Тогда в каждой паре сумма чётна по предыдущему пункту. Следовательно, вся сумма равна сумме чётных слагаемых, а значит, чётна.

(г) Сумма нечётного числа нечётных чисел есть сумма чётного числа нечётных чисел и ещё одного нечётного числа. По предыдущему пункту, первая сумма чётна. Следовательно, по пункту (а) вся сумма нечётна.

18.2. Предположим, что спикер прав. Обозначим через x число депутатов, проголосовавших «против». Тогда «за» проголосовало $(x+13)$, и всего в парламенте $x + (x + 13) = 2x + 13$ депутатов, то есть нечётно. С другой стороны, по условию задачи парламент состоит из двух одинаковых палат, а значит, общее число депутатов чётно. Полученное противоречие доказывает, что спикер ошибся.

18.3. Допустим, Незнайка нигде не ошибся. Поскольку произведение может быть нечётным только когда оба сомножителя нечётны, сумма и произведение загаданных Незнайкой чисел нечётны. Далее, произведение загаданных Незнайкой чисел нечётно, следовательно, оба загаданных числа нечётны, и их сумма чётна. Получили противоречие: с одной стороны, сумма загаданных чисел чётна, а с другой — нечётна. Следовательно, предположение неверно, и Незнайка где-то ошибся.

18.4. (а) Допустим, можно расставить числа описанным в условии задачи способом. Поскольку сумма всех чисел в таблице равна сумме всех сумм по строкам, она чётна. С другой стороны, сумма всех чисел в таблице равна сумме всех сумм по столбцам, то есть сумме пяти нечётных чисел, а значит, нечётна. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, то есть расставить числа указанным способом невозможно.

(б) Достаточно поставить в клетки первой строки единицы, а в остальные клетки таблицы — нули.

18.5. Все пункты этой задачи решаются аналогично примеру:

(а) произведение имеет вид $2k \cdot 2l = 2 \cdot (2kl)$, то есть чётно;

(б) произведение имеет вид $2k \cdot (2l - 1) = 2 \cdot (k(2l - 1))$, то есть чётно;

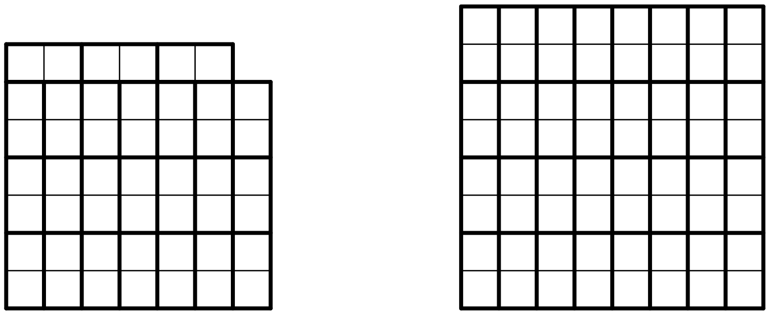
(в) произведение имеет вид $(2k - 1) \cdot (2l - 1) = 4kl - 2k - 2l + 1 = 2(2kl - k - l + 1) - 1$, то есть нечётно.

18.6. Допустим, такой набор существует. С одной стороны, сумма S_{15} первых пятнадцати чисел такого набора есть сумма пяти сумм по три числа, то есть сумма пяти нечётных чисел, а значит, нечётна. С другой стороны, сумма S_{15} есть сумма трёх сумм по пять чисел набора, то есть сумма трёх чётных чисел, а значит, чётна. Таким образом, сумма S_{15} чётна и нечётна одновременно, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, а значит, такого набора не существует.

18.7. Докажем, что ни доску 7×7, ни доску 8×8 без угловой клетки разрезать на домино невозможно. Предположим, что одну из этих досок можно разрезать на домино. Тогда общее число клеток доски ровно в два раза больше числа получившихся домино, а значит чётно. Но числа $7 \times 7 = 49$ и $8 \times 8 - 1 = 63$ нечётны. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, то есть ни доску 7×7, ни доску 8×8 без угловой клетки разрезать на домино невозможно.

Примеры разрезания для доски 7×7 без угловой клетки и доски 8×8 приведены на рис. 18.1.

18.8. Докажем, что так соединить нельзя. Предположим, так соединить можно. Рассмотрим общее количество n концов проводов. Поскольку оно ровно в два раза больше количества проводов, число n чётно. Но оно равно $11 \cdot 3 = 33$, то есть нечётно. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, то есть так соединить телефоны невозможно.



(а) Доска 7×7 без угловой клетки (б) Доска 8×8

Рис. 18.1. Примеры к задаче 18.7

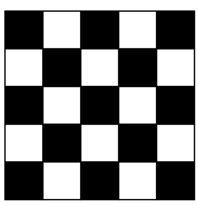
18.9. Допустим, в олимпиаде участвовало чётное количество школьников. Вычислим двумя способами чётность числа пар вида «школьник, решённая им задача». С одной стороны, число таких пар можно вычислить, сложив количества школьников, решивших каждую задачу. Следовательно, количество таких пар равно сумме семи нечётных чисел, то есть нечётно. С другой стороны, то же число можно вычислить, сложив количества задач, решённых каждым школьником. При таком способе подсчёта получаем, что количество таких пар равно сумме чётного числа нечётных чисел, а значит, чётно. Итак, мы получили, что число пар вида «школьник, решённая им задача» и чётно, и нечётно, что невозможно. Следовательно, сделанное нами предположение о чётности количества школьников ложно, то есть в олимпиаде участвовало нечётное количество школьников.

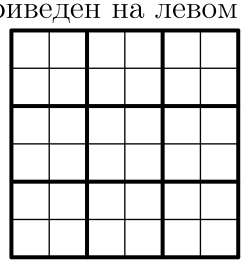
18.10. Предположим, что из Гадюкино нельзя доехать до столицы. Рассмотрим все города, до которых можно добраться из Гадюкино и посчитаем двумя способами количество «выходов дорог» из этих городов. С одной стороны, это количество в два раза больше числа дорог, соединяющих эти города, то есть чётно. С другой стороны, оно равно сумме числа дорог, выходящих из каждого из этих городов, то есть сумме некоторого числа сотен и одной единицы, а значит, нечётно. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и из Гадюкино можно доехать до столицы.

18.11. Рассмотрим все пары вида «рукопожатие, один из участников этого рукопожатия». С одной стороны, количество таких пар в два раза больше количества рукопожатий, а значит, чётно. С другой стороны, это количество равно сумме количеств рукопожатий, сделанных каждым человеком. Поскольку сумма чётна, количество нечётных слагаемых, участвующих в этой сумме, тоже чётно, ч. т. д.

18.12. Допустим, в олимпиаде участвовало нечётное количество школьников. Вычислим двумя способами чётность числа пар вида «школьник, решённая им задача». С одной стороны, число таких пар можно вычислить, сложив количества школьников, решивших каждую задачу. Следовательно, количество таких пар равно сумме нескольких чётных чисел, то есть нечётно. С другой стороны, то же число можно вычислить, сложив количества задач, решённых каждым школьником. При таком способе подсчёта получаем, что количество таких пар равно сумме нечётного числа нечётных чисел, а значит, нечётно. Итак, мы получили, что число пар вида «школьник, решённая им задача» и чётно, и нечётно, что невозможно. Следовательно, сделанное нами предположение о нечётности количества школьников ложно, то есть в олимпиаде участвовало чётное количество школьников.

18.13. (а) Пример требуемой раскраски приведён на левом рисунке:





(б) Допустим, можно окрасить клетки описанным в условии задачи способом. Поскольку количество чёрных клеток в таблице равно сумме количеств чёрных клеток в девяти отмеченных на правом рисунке квадратиках 2×2, это количество должно быть чётно. С другой стороны, в условии задачи требуется, чтобы оно было нечётно. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, то есть окрасить клетки указанным способом невозможно.

Занятие 19

Принцип Дирихле

На этом занятии домашнего математического кружка вы продолжите решение задач, в которых требуется проверить справедливость некоторого утверждения. С краткой записью таких задач и методом их решения вы познакомились ранее. Традиционно, на этом занятии будут предложены задачи, общий способ решения которых вам предстоит найти. При этом вам следует письменно выполнить следующие действия:

- решить предложенные задачи;
- записать их общий вид;
- предложить метод их решения.

Предлагаемые задачи

Пример 1. *Верно ли, что при распределении 10 кроликов в 5 клеток найдётся хотя бы одна клетка, в которой не меньше, чем два кролика, и найдётся клетка, в которой не больше, чем 2 кролика?*

Пример 2. *В институте обучаются более* 1000 *студентов. Докажите, что хотя бы трое из них родились в один день.*

Пример 3. *Верно ли, что при распределении* 9 *кроликов в* 5 *клеток найдётся хотя бы одна клетка, в которой не больше одного кролика?*

Авторские ответы

Прежде, чем приступить к выделению общей структуры задач и метода их решения, рассмотрим решение первой задачи.

Пример 1. *Верно ли, что при распределении 10 кроликов в 5 клеток найдётся хотя бы одна клетка, в которой не меньше, чем два кролика, и найдётся клетка, в которой не больше, чем 2 кролика?*

Решение. Преобразуем условие приведённой выше задачи в условие двух задач.

- Верно ли, что при распределении 10 кроликов в пять клеток найдётся хотя бы одна клетка, в которой не меньше, чем два кролика?
- Верно ли, что при распределении 10 кроликов в пять клеток найдётся хотя бы одна клетка, в которой не больше, чем 2 кролика?

Первую из этих задач будем решать в соответствии с последовательностью действий, перечисленных в теоретической части занятия «Верно ли…». Составим краткую запись этой задачи.

Дано: Утверждение: «Существует распределение кроликов по клеткам, обладающее следующими свойствами: всего кроликов — 10; количество клеток — 5; количество кроликов в каждой клетке больше 2».

Найти: верно ли данное утверждение.

При этом ответ на исходную задачу противоположен ответу на переформулированную.

Докажем методом «от противного», что такого распределения кроликов по клеткам не существует. Предположим, что распределение кроликов по клеткам, удовлетворяющее перечисленным требованиям, существует. Так как в каждой клетке больше двух кроликов, то в двух клетках больше четырёх кроликов, в трёх — больше шести, в четырёх — больше восьми, а в пяти — больше десяти. Это противоречит условию задачи. Следовательно, сделанное предположение ошибочно, и искомого распределения кроликов по клеткам не существует.

Вторая часть задачи решается аналогично.

В общем случае приведённые выше задачи могут быть записаны в виде следующего принципа.

Принцип Дирихле. Если n объектов распределены в k групп, то существует группа, в которой не меньше, чем $\frac{n}{k}$ объектов, и существует группа, в которой не больше, чем $\frac{n}{k}$ объектов.

Представим принцип Дирихле в виде двух утверждений.

Д1. Если n объектов распределены в k групп, то существует группа, в которой не меньше, чем $\frac{n}{k}$ объектов.

Д2. Если n объектов распределены в k групп, то существует группа, в которой не больше, чем $\frac{n}{k}$ объектов.

Доказательство утверждения **Д1** проведём методом «от противного». Для этого предположим, что можно распределить n объектов в k групп так, что в каждой группе будет меньше, чем $\frac{n}{k}$ объектов. Так как в каждой группе меньше, чем $\frac{n}{k}$ объектов, а количество групп k, то общее количество объектов меньше, чем $\frac{n}{k} \cdot k = n$, что противоречит условию задачи. Следовательно, сделанное предположение ложно, и распределить n объектов в k групп так, что в каждой будет меньше, чем $\frac{n}{k}$ объектов, невозможно.

Утверждение **Д2** доказывается аналогично.

Принцип Дирихле применяется при решении задач, текст которых может быть представлен в следующем виде:

Дано:

- Количество единиц в целом — _____;
- Количество частей — _____;

Доказать: Существует часть, в которой _____ единиц.

Задачи

Задача 19.1. Одиннадцать шаров распределили по трём корзинам. Обязательно ли найдётся корзина, в которой лежит (а) не менее трёх шаров? (б) не менее четырёх шаров? (в) не менее пяти шаров? (г) не более трёх шаров? (д) ровно четыре шара?

Задача 19.2. В классе 28 человек. В диктанте Вовочка сделал 13 ошибок, а все остальные ученики — меньше. Докажите, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

Задача 19.3. В квадратном ковре 5×5 моль проела 24 дырки. Верно ли, что можно вырезать квадратный коврик 1×1 без дырок внутри (дырки считаются точечными)?

Задача 19.4. Докажите, что из 555 трёхзначных чисел всегда найдутся два, сумма которых равна 1000.

Задача 19.5. В классе 30 человек. Докажите, что в нём найдутся два ученика, имеющие одинаковое число друзей в этом классе. Считается, что если А дружит с Б, то и Б дружит с А.

Задача 19.6. Докажите, что во время шахматной партии всегда найдётся вертикаль, на которой занято не более половины клеток.

Задача 19.7. Семь гномов съели двадцать порций мороженого. Докажите, что какие-то два гнома съели одинаковое число порций.

Задача 19.8. Докажите, что из 11 натуральных чисел всегда найдутся два, запись разности которых заканчивается нулём.

Задача 19.9. Докажите, что из трёх натуральных чисел всегда найдутся два, сумма которых чётна.

Задача 19.10. В классе учится 26 человек. Докажите, что какие-то трое из них родились в одном месяце.

Решения

19.1. Для решения пунктов (а), (б) и (г) достаточно применить принцип Дирихле. В данной задаче из него следует, что в какой-то корзине лежит не менее $\frac{11}{3} > 3$ шаров, а в какой-то корзине — не более $\frac{11}{3} < 4$

шаров. Но тогда в первой из этих корзин лежит не менее четырёх шаров, а во второй — не более трёх.

(в) Корзины, в которой лежит не менее пяти шаров, может не найтись: например, можно положить в одну корзину три шара, а в остальные — по четыре.

(д) Корзины, в которой лежит ровно четыре шара, может не найтись: например, можно положить все шары в одну корзину.

19.2. Распределим всех учеников класса кроме Вовочки в группы по тому, сколько ошибок они сделали. Всего получим 13 групп (возможно, некоторые из них окажутся пустыми): 0 ошибок, 1 ошибка, ..., 12 ошибок. Следовательно, в какой-нибудь группе не менее $\frac{27}{13} > 2$ учеников, то есть какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

19.3. Разрежем ковёр на 25 ковриков 1×1. Поскольку моль проела только 24 дырки, один из этих ковриков — целый.

19.4. Распределим все числа от 1 до 999 в группы следующим способом: число 500 образует отдельную группу, а остальные числа разбиваются на пары так, чтобы в каждой паре сумма чисел равнялась 1000. Другими словами, разбиение выглядит следующим образом: $1 \leftrightarrow 999$, $2 \leftrightarrow 998$, ..., $499 \leftrightarrow 501$, 500 — всего 500 групп. Каждое из данных 555 трёхзначных чисел попадает в одну из этих групп. По принципу Дирихле, в какую-то группу попадёт хотя бы два числа. Это и означает, что найдутся два числа, сумма которых равна 1000.

19.5. Рассмотрим два случая:

- В классе есть ученик А, который дружит со всеми остальными. Тогда у каждого ученика в этом классе есть хотя бы один друг (а именно, А). Следовательно, у каждого ученика этого класса может быть от 1 до 29 друзей — всего 29 вариантов.

- В классе нет ученика, который дружит со всеми остальными. Тогда у каждого ученика этого класса от 0 до 28 друзей — всего 29 вариантов. Осталось применить принцип Дирихле.

Итак, в обоих случаях число друзей каждого ученика принимает одно из 29 значений. Осталось применить принцип Дирихле.

19.6. Заметим, что в процессе партии число шахматных фигур не увеличивается. Следовательно, в каждый момент их не более 32, откуда по принципу Дирихле следует утверждение задачи.

19.7. Допустим, все гномы съели разное число порций. Упорядочим их по числу съеденных порций. Тогда первый гном съел не менее нуля порций, а каждый следующий — как минимум на одну порцию больше, чем предыдущий. То есть второй гном съел хотя бы одну порцию, третий — хотя бы две, $\ldots$, седьмой — хотя бы шесть. Таким образом, все вместе съели хотя бы $0+1+2+3+4+5+6 = 21$ порцию, что противоречит условию задачи. Следовательно, сделанное нами предположение ложно, и какие-то два гнома съели одинаковое количество порций.

19.8. Распределим числа в группы по последней цифре: в группу «0» поместим числа, запись которых заканчивается нулём, в группу «1» — единицей и т. д. Поскольку чисел 11, а групп 10, какие-то два числа попадут в одну и ту же группу. Запись разности этих чисел заканчивается нулём.

19.9. Распределим числа в две группы: в первую — чётные, а во вторую — нечётные. Тогда какие-то два числа попадут в одну группу. Сумма этих двух чисел чётна: сумма двух чётных чисел чётна, и сумма двух нечётных тоже чётна.

19.10. В данной задаче роль «кроликов» играют ученики класса, а роль «клеток» — их месяцы рождения. По принципу Дирихле в какой-то месяц родились как минимум $\frac{26}{12} > 2$ человек, а значит, как минимум трое.

Занятие 20

Возвращение к меньшему значению

На этом занятии вы познакомитесь с новым методом решения задач, который применим как при доказательстве утверждений, так и при нахождении значения неизвестного параметра. Традиционно при изучении нового метода вам следует:

1) решить аналогичные задачи, объединенные в две серии;
2) выполнить письменно следующие задания:
   - придумать общий метод решения задач в каждой серии.

Первая серия задач

Пример 1. *Из двух монет одна фальшивая: она легче настоящей. Найдите фальшивую монету за одно взвешивание на чашечных весах без гирь.*

Пример 2. *Из трёх монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за одно взвешивание на чашечных весах без гирь.*

Пример 3. *Из четырёх монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь.*

Пример 4. *Из пяти монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь.*

Пример 5. *Из шести монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь.*

Пример 6. *Из семи монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь.*

Вторая серия задач

Пример 7. *Докажите, что число 111 делится на 3.*

Пример 8. *Докажите, что девятизначное число, записанное единицами, делится на 9*

Пример 9. *Докажите, что 27-значное число, записанное единицами, делится на 27.*

Пример 10. *Докажите, что 81-значное число, записанное единицами, делится на 81.*

Авторские ответы

Общий вид задач первой серии

Каждая из задач, предложенных в первой серии, может быть записана в виде: «Из ______ монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие монеты весят одинаково). Найдите фальшивую монету за ______ взвешиваний на чашечных весах без гирь».

Общий вид краткой записи для задач первой серии:

Дано.

- Выполняемое действие: выбор лёгкой монеты.

- Инструмент: чашечные весы без разновесов.
- Требование: количество взвешиваний должно быть не более ____.
- Количество предметов: ____.

Найти. Способ — ?

Из приведённого плана краткой записи следует, что ответ к задачам должен содержать описание способом, при котором выбор фальшивой монеты гарантировано происходит за указанное количество взвешиваний.

В качестве упражнения предлагаем построить краткие записи задач первой серии самостоятельно.

Общий вид задач второй серии

Каждая из задач, предложенных в этой серии, может быть записана в виде: «Докажите, что 3^n-значное число, записанное единицами, делится на 3^n».

Общий вид краткой записи для задач второй серии:

Дано.

- Выполняемое действие: проверка делимости.
- Делимое: 3^n-значное число, записанное единицами.
- Делитель: 3^n.

Докажите, что остаток при таком делении равен 0.

В качестве упражнения предлагаем построить краткие записи задач второй серии самостоятельно.

Метод решения

Общий метод решения задач, объединённых в серии:

- решить первые одну-две задачи серии как отдельные задачи;
- найти способ, позволяющий перейти от решения задачи с заданным значением выбранного параметра к решению задачи из этой серии, в которых значение этого параметра меньше заданного;

- считая ответ к задачам с меньшим значением параметра известным, решить задачу с заданным значением параметра.

Например, при решении четвёртой задачи первой серии следует:

- выбрать в качестве изменяющегося параметра общее количество монет, в данном случае значение этого параметра равно 4;
- найти способ, позволяющий перейти от решения задачи с общим количеством монет, равным 4, к решению задач из этой серии, в которых общее количество монет меньше 4, то есть 3 или 2;
- считая ответы к задачам со значениями параметра 2 или 3 известными, решить задачу, в которой значение параметра равно 4.

Границы применимости

Метод возвращения к меньшему значению применим только в случаях, когда в текстах задач существует параметр, значение которого увеличивается на 1 при переходе к следующей задаче из этой серии.Если такого параметра найти не удалось, то рассматриваемый метод применять нельзя. Если такой параметр существует, то можно попробовать применить метод возвращения к меньшему значение, однако, гарантировать успех при его применении нельзя.

Примеры решений

Решения задач первой серии

Первые две задачи решим методом подбора.

Для определения фальшивой монеты из двух данных достаточно положить на левую чашу весов одну монету, а на правую — другую монету и посмотреть, которая чаша окажется легче.

Для определения фальшивой монеты из трёх данных положим на левую чашу одну монету, а на правую — другую монету. Если одна из монет оказалась легче, то она — фальшивая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — та, которая не участвовала во взвешивании.

Рассмотрим решение задачи в примере 3. Как отмечалось выше, в этой задаче выбираем параметр «общее количество монет». Значение этого параметра равно 4. Объясним, как в данном случае осуществляется переход к задачам со значением параметра 2 и 3.

Заменим взвешивание монет по одной на каждой чашке весов взвешиванием монет кучками. При этом, что после первого взвешивания возникает одна из следующихситуаций:

- одна из чаш перевесила;
- весы оказались в равновесии.

В первом случае фальшивая монета лежит на той чаше весов, которая оказалась легче, а во втором фальшивая монета не участвовала во взвешивании. Таким образом, при первом взвешивании мы узнаём, в какой из трёх куч находится фальшивая монета: на левой чаше весов, на правой чаше весов или не на весах. Это означает,что после первого взвешивания нам остаётся решить аналогичную задачу (найти одну фальшивую монету в данной куче), но количество монет в этой куче меньше, чем общее количество монет. Очевидно, что количество монет на каждой чаше весов должно быть одинаково, а количество монет, которые не попали на весы, должно мало отличаться от количества монет на каждой чаше весов.

Таким образом, для того, чтобы перейти к решению задачи с меньшим значением выбранного параметра, следует:

- распределить 4 монеты в 3 кучки: 1 монета, 1 монета, 2 монеты;
- положить на каждую чашу весов по одной монете и сравнить их по весу;
- если фальшивая монета на весах, то она определяется одним взвешиванием, если она не попала на весы, то по результату решения первой задачи для ее определения понадобится еще одно взвешивание.

Следовательно, при таком способе взвешивания фальшивая монета может быть определена не больше, чем за два взвешивания.

Решение остальных задач этой серии остаётся читателю в качестве упражнения.

При решении задач этой серии сведение к меньшему значению выражалось в том, что мы не описывали заново, как находить одну фальшивую монету из двух данных. Конечно, при рассмотренных количествах монет выгода от использования предыдущих задач не очень велика: возможно, проще было бы просто описать способ нахождения одной фальшивой монеты из двух или трёх данных. Однако, продолжая действовать аналогичным образом, легко решить, например, следующую задачу:

Пример. *Из трёхсот монет одна фальшивая: она легче настоящих, а настоящие весят одинаково. Найдите фальшивую монету за шесть взвешиваний на чашечных весах без гирь.*

Задачи

Задача 20.1. Укажите общий метод решения задач в следующей серии:

1) Докажите, что число 111 делится на 3.
2) Докажите, что число 111 111 111 делится на 9.
3) Докажите, что число, записываемое 27 единицами, делится на 27.
4) Докажите, что число, записываемое 81 единицами, делится на 81.
5) Докажите, что число, записываемое 243 единицами, делится на 243.
6) Докажите, что число, записываемое 729 единицами, делится на 729.

Задача 20.2. Укажите общий метод решения задач в следующей серии:

1) На плоскости проведены 2 пересекающиеся прямые. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
2) На плоскости проведены 3 прямые так, что среди них нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
3) На плоскости проведены 4 прямые так, что среди них нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

4) На плоскости проведены 5 прямых так, что среди них нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
5) На плоскости проведены 6 прямых так, что среди них нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
6) На плоскости проведены 7 прямых так, что среди них нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

Задача 20.3. Укажите общий метод решения задач в следующей серии:

1) На плоскости проведены 2 прямые. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
2) На плоскости проведены 3 прямые. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
3) На плоскости проведены 4 прямые. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
4) На плоскости проведены 5 прямых. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
5) На плоскости проведены 6 прямых. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
6) На плоскости проведены 7 прямых. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.
7) На плоскости проведены 8 прямых. Докажите, что полученные части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что соседние по стороне части окрашены в разные цвета.

Задача 20.4. Укажите общий метод решения задач в следующей серии:

1) Коля загадал натуральное число от 1 до 4. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за два вопроса?
2) Коля загадал натуральное число от 1 до 8. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за три вопроса?
3) Коля загадал натуральное число от 1 до 16. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за четыре вопроса?
4) Коля загадал натуральное число от 1 до 32. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за пять вопросов?
5) Коля загадал натуральное число от 1 до 64. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за шесть вопросов?
6) Коля загадал натуральное число от 1 до 128. Вася может задавать Коле вопросы, на которые тот честно отвечает «да» или «нет». Как Васе угадать Колино число за семь вопросов?

Ответы

20.1. Общий метод решения:

1) Выбрать параметр — количество цифр n и решаем задачу для $n = 3$.
2) При переходе от решения задачи с заданным значением выбранного параметра к решению задач с меньшим значением этого параметра можно разделить $3n$-значное число, записанное единицами, на n-значное число, записанное единицами.
3) Воспользоваться ответом задачи, в которой значение параметра в три раза меньше.

Заметим, что в этой серии будут встречаться не все значения параметра, а только степени тройки, то есть числа вида $3^n = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3}_{n \text{ сомножителей}}$.

20.2. Общий метод решения:

1) Выбранный параметр — количество проведённых прямых. При $n = 2$ количество частей, на которые они делят плоскость, равно 4.
2) При переходе к меньшему значению проводим следующую прямую и считаем, сколько частей она добавит к имеющимся.
3) Складываем количество имеющихся частей и количество дополнительных частей.

20.3. Общий метод решения:

1) Выбранный параметр — количество проведённых прямых.
2) При переходе к меньшему значению предполагаем, что возможность раскраски в предыдущей задаче этой серии уже доказана. После этого проводим следующую прямую и с одной из сторон от этой прямой меняем все цвета наоборот.
3) Делаем вывод, что и в этой задаче раскрасить возможно.

20.4. Общий метод решения:

1) Выбираем параметр — показатель степени 2^n количества чисел, из которых выбирал Коля.
2) При переходе к меньшему значению выбранного параметра отрезок, на котором осуществляется выбор задуманного числа, делится пополам: от 1 до 2^{n-1} и от $2^{n-1}+1$ до 2^n. Из двух отрезков выбрать один помогает вопрос «Ты задумал число от 1 до 2^{n-1}?»
3) Воспользоваться ответом к предыдущей задаче серии.

Подсказки

20.1. При переходе от решения задачи с заданным значением выбранного параметра к решению задач с меньшим значением этого параметра можно разделить $3n$-значное число, записанное единицами, на n-значное число, записанное единицами. **20.2**. При переходе к меньшему значению проводим следующую прямую и считаем, сколько частей она добавит к имеющимся. **20.3**. При переходе к меньшему значению предполагаем, что возможность раскраски в предыдущей задаче этой серии уже доказана. После этого проводим следующую прямую и с одной из сторон от этой прямой меняем все цвета наоборот. **20.4**. При переходе к меньшему значению выбранного параметра отрезок, на котором осуществляется выбор задуманного числа, делится пополам: от 1 до 2^{n-1} и от $2^{n-1}+1$ до 2^n. Из двух отрезков выбрать один помогает вопрос «Ты задумал число от 1 до 2^{n-1}?»

Решения

20.1. Приведём решение третьей задачи этой серии.

Разделим число $\underbrace{11\ldots1}_{27}$ на число $\underbrace{11\ldots1}_{9}$:

$$\underbrace{11\ldots1}_{27} = \underbrace{11\ldots1}_{9} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{8}1\underbrace{00\ldots0}_{8}1.$$

В силу предыдущей задачи этой серии, первый сомножитель делится на 9. Поскольку сумма цифр второго сомножителя равна 3, он делится на 3. Следовательно, произведение делится на $3 \cdot 9 = 27$.

20.2. Приведём решение для случая 10 проведённых прямых.

Будем проводить прямые по одной. Каждая следующая прямая пересекает все остальные прямые и делится точками пересечения на столько частей, каков номер проводимой прямой. Следовательно, эта прямая пересекает столько же частей, на которые делят плоскость предыдущие прямые, и увеличивает число частей, на которые разделена плоскость, на свой номер. Итак, общее число частей равно

$$1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 56.$$

20.3. Приведём решение для случая трёх прямых.

Уберём временно одну из данных прямых. В силу предыдущей задачи этой серии, оставшуюся карту можно раскрасить в два цвета. Теперь вернём убранную прямую и поменяем с одной из сторон от неё все цвета наоборот. Ясно, что при этом получится правильная раскраска для трёх прямых.

20.4. Приведём решение задачи, в которой Коля загадывает число от 1 до 64.

Первый вопрос: «Число, которое ты задумал, от 1 до 32?» Если ответ «да», то в силу предыдущей задачи определить это число можно за 5 вопросов. Если ответ «нет», то следует действовать, как предписывает алгоритм из предыдущей задачи, заменяя всюду «число, которое ты задумал» на «разность задуманного тобой числа и 32». Другими словами, надо попросить Колю мысленно вычесть из загаданного им числа 32 и на дальнейшие вопросы отвечать как будто он загадал полученную разность.

Занятие 21

От изучения методов к решению задач

На последнем занятии математического кружка естественно попробовать свои силы в решении задач. Чтобы предоставить вам такую возможность, мы составили подборку задач, метод решения которых не указан. Однако любая из предлагаемых здесь задач может быть решена одним из рассмотренных в этой книге методов. При подготовке к решению этих задач вам будет полезно повторить изученные методы, а также способ выбора метода решения конкретной задачи. В процессе повторения целесообразно ответить письменно на следующие вопросы.

1) Какие методы решения задач были рассмотрены в этой книге? Какие из этих методов для вас были новыми?

2) Перечислите последовательность действий, выполняемых при решении задач арифметическим методом. Какие из этапов решения задач арифметическим методом оказались для вас новыми?

3) Перечислите последовательность действий, выполняемых при решении задач методом перебора. Какие из этапов решения задач методом перебора оказались для вас новыми?

4) Перечислите последовательность действий, выполняемых при решении задач методом исключения невозможных значений неизвестного. Какие из этапов решения задач методом исключения невозможных значений неизвестного оказались для вас новыми?

5) Перечислите последовательность действий, выполняемых при решении задач методом подбора. Какие из этапов решения задач методом подбора оказались для вас новыми?
6) Перечислите последовательность действий, выполняемых при доказательстве утверждений методом «от противного». Какие из этапов доказательства утверждений методом «от противного» являются для вас наиболее сложными:
   - построение противоположного утверждения;
   - построение противоречия?
7) Перечислите последовательность действий, выполняемых при решении задач методом перехода к меньшему значению неизвестного.
8) Перечислите последовательность действий, выполняемых при определении метода решения конкретной задачи.
9) Считаете ли вы необходимым для себя продолжить изучение методов решения математических задач?

Ответы на перечисленные вопросы будут полезны не только вам, но и автору книги, поэтому мы убедительно просим читателей прислать свои варианты ответов по электронной почте `methods.books@gmail.com`.

Теперь можно приступать к решению задач. Желаю вам успеха!

С уважением, Т. Г. Кудряшова.

Задачи

Задача 21.1. Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алёша Попович пили мёд. Добрыня Никитич и Алёша Попович вместе выпили 11 чарок мёда. Илья Муромец и Алёша Попович — 14, а Илья Муромец и Добрыня Никитич — 15. Сколько чарок выпили все три богатыря вместе?

Задача 21.2. У сестры в четыре раза больше братьев, чем сестёр. А у брата братьев на одного больше, чем сестёр. Сколько в семье братьев и сколько сестёр?

Задача 21.3. Банк имеет неограниченное число купюр достоинством 3 и 5 рублей. Докажите, что он может выдать без сдачи любое число рублей, начиная с восьми.

Задача 21.4. В доме, который был заселён только супружескими парами с детьми, проводилась перепись населения. Человек, проводивший перепись, в отчёте указал: «Взрослых в доме больше, чем детей. У каждого мальчика есть сестра. Мальчиков больше, чем девочек. Бездетных семей нет». Докажите, что отчёт неверен.

Задача 21.5. У отца было 3 сына. Он написал такое завещание: оставляю старшему сыну половину моих золотых монет и ещё полмонеты, второму сыну оставляю половину остатка и ещё полмонеты, также третьему отец оставил по завещанию половину того, что осталось после выдачи наследства старшим сыновьям и ещё полмонеты. Оказалось, что это завещание можно выполнить, и при этом каждый сын получает целое количество монет, и все монеты оказываются розданными. Сколько было монет?

Задача 21.6. Решите ребус $AABC - CBA = 20BB$.

Задача 21.7. В двух комнатах было 76 человек. Когда из одной комнаты вышло 30 человек, а из другой 40, то людей в комнатах осталось поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?

Задача 21.8. Решите ребус $AB + AD = 157$.

Задача 21.9. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45, но не делилось бы на 90.

Задача 21.10. Книга стоит 4 рубля и ещё треть книги. Сколько рублей стоит книга?

Задача 21.11. Двадцать пять дачников получили садовые участки. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1, и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый дачник враждует не более, чем с тремя другими дачниками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки враждующих дачников не были бы соседними (по стороне).

Задача 21.12. Два пакета молока и пачка творога стоят 94 рубля. Две пачки творога и пакет молока стоят 80 рублей. Что дороже: пачка творога или пакет молока, и на сколько?

Задача 21.13. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

Задача 21.14. На двух кустах сидело 25 воробьёв. После того как с первого куста перелетело на второй 5, а со второго улетело 7 воробьёв, на первом кусте осталось вдвое больше воробьёв, чем на втором. Сколько воробьёв было на каждом кусте первоначально?

Задача 21.15. Зайцы пилили брёвна. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Сколько брёвен они распилили?

Задача 21.16. В коробке лежат красные и синие карандаши. Сколько карандашей нужно вынуть из коробки в темноте (не видя карандашей), чтобы среди них обязательно было бы три одного цвета?

Задача 21.17. Решите ребус $AAB \times C \times D = 2007$.

Задача 21.18. Из пунктов А и Б, находящихся на расстоянии 50 км друг от друга, одновременно выезжают навстречу друг другу выезжают два велосипедиста: первый со скоростью 12, а второй — со скоростью 13 км/час. В этот же момент вместе с первым из велосипедистов вылетает муха со скоростью 20 км/час и летит на встречу со вторым велосипедистом, встретившись со вторым велосипедистом, она разворачивается и летит к первому велосипедисту. Затем она снова разворачивается, и так она летает между велосипедистами до момента их встречи, потом останавливается и отдыхает. Сколько километров пролетела эта муха?

Задача 21.19. В записи $32{*}35717{*}$ замените звёздочки цифрами так, чтобы полученное девятизначное число делилось на 72.

Задача 21.20. В огороде из грядки торчали палки. И в огород прилетели галки. Сначала они хотели сесть по одной на палку, но тогда одной палки не хватило. Потом они сели по две на палку, тогда одна палка осталась лишней. Сколько было палок и сколько было галок?

Задача 21.21. Решите ребус: $ABC \times D = 2008$.

Задача 21.22. Хозяин обещал работнику за 40 дней 99 рублей и кафтан. Через четыре дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

Задача 21.23. Найдите число n, если известно, что число не превышает 765, и сумма двух его простых делителей равна 193.

Задача 21.24. Можно ли 65 телефонов соединить между собой проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с тринадцатью другими?

Задача 21.25. В классе число отсутствующих учеников в пять раз меньше числа присутствующих. Когда один ученик из класса вышел, то число отсутствующих стало в четыре раз меньше числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Задача 21.26. Составьте сумму в 35 копеек из 15 монет достоинством в 2, 3 и 5 копеек.

Задача 21.27. Четверо детей — Аня, Боря, Варя и Гриша — живут на одной улице в четырёх рядом стоящих домах на одной стороне улицы. Эти дома белого, жёлтого, голубого и серого цветов. Известно, что Аня и Гриша живут не в белом доме. Боря живёт между голубым домом и Вариным. В сером доме живёт не Боря и не Гриша. Жёлтый дом стоит рядом с серым и не является крайним. Аня живёт не в жёлтом доме. Кто живёт в каком доме?

Задача 21.28. Мачеха дала Золушке два ведра, одно ёмкостью в 7 л, другое — в 4 л. И отправила её на источник с требованием принести ровно 2 л воды. Как Золушке это выполнить?

Задача 21.29. Докажите, что среди произвольных шести натуральных чисел всегда найдутся 2, разность которых делится на 5.

Задача 21.30. Отец купил сыну одежду и потратил на покупку 7 280 рублей. Половину этой суммы он заплатил за пальто. Четверть — за костюм, а на оставшиеся деньги он купил 4 одинаковые по цене рубашки. Сколько стоила одна рубашка?

Задача 21.31. Покупатель израсходовал в одном магазине $\frac{2}{7}$ имевшихся у него денег, во втором магазине $\frac{3}{5}$ от остатка. Сколько денег было у покупателя, если после покупки во втором магазине у него осталось 60 рублей?

Задача 21.32. Привезённый на базу картофель распределили между тремя магазинами. Первый магазин получил $\frac{3}{8}$ привезённого картофеля, второй $\frac{1}{4}$ привезённого картофеля, а третий — оставшуюся 21 тонну картофеля. Сколько тонн картофеля было привезено на базу?

Задача 21.33. Серёжа потратил $\frac{2}{7}$ своих денег на покупку книги и $\frac{5}{14}$ своих денег на покупку альбома. Сколько денег было у Серёжи, если альбом дешевле книги на 7 рублей?

Задача 21.34. Сумма двух чисел равна 177. При делении большего числа на меньшее в неполном частном получается 3, а в остатке — 9. Чему равны эти числа?

Задача 21.35. От причала вниз по реке отправили плот, который двигался со скоростью 4 км в час. Спустя 3 часа вслед за ним вышла лодка, собственная скорость которой 8 км в час. На каком расстоянии от пристани лодка догонит плот?

Задача 21.36. Два мастера при совместной работе могут выполнить заказ за 8 дней. За сколько дней второй мастер может выполнить этот заказ самостоятельно, если первый мастер выполняет его за 12 дней?

Задача 21.37. Масло из бака перелили в 3 бидона. В первый бидон вошло 0,3 всего масла, во второй — половина всего масла, а в третий — на 6 литров меньше, чем в первый бидон. Сколько литров масла было в баке?

Задача 21.38. На стройку доставили кирпич. Первая бригада уложила $\frac{3}{8}$ всего привезённого кирпича, а другая — $\frac{2}{5}$ от привезённого кирпича. Сколько кирпичей доставили на стройку, если первая бригада уложила на 84 кирпича меньше, чем вторая?

Задача 21.39. Грузовая и легковая машины выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов, расположенных на расстоянии 169 км друг от друга. При встрече оказалось, что путь, пройденный грузовой машиной, составляет $\frac{5}{8}$ пути, пройденного легковой машиной. Сколько км проехала каждая машина до встречи?

Ответы

21.1. 20. **21.2**. 4 брата, 2 сестры. **21.5**. 7 монет. **21.6**. $A = 2$, $B = 9$, $C = 1$. **21.7**. В первой комнате было 33 человека, а в другой — 43 человека. **21.8**. $A = 7$, $B = 8$, $D = 9$ или $A = 7$, $B = 9$, $D = 8$. **21.9**. 7155. **21.10**. 6 рублей. **21.12**. Пакет молока дороже на 14 рублей. **21.13**. Запустить часы одновременно, через 7 минут поставить вариться яйцо, а через $2{\cdot}11 = 22$ минуты снять. Пройдёт как раз $22-7 = 15$ минут. **21.14**. На первом кусте было 18 воробьёв, а на втором — 7. **21.15**. 6 брёвен. **21.16**. 5 карандашей. **21.17**. $A = 6$, $B = 9$, $C = 1$, $D = 3$ или $A = 6$, $B = 9$, $C = 3$, $D = 1$. **21.18**. 40 км. **21.19**. 322357176. **21.20**. Было 3 палки и 4 галки. **21.21**. $A = 2$, $B = 5$, $C = 1$, $D = 8$ или $A = 5$, $B = 0$, $C = 2$, $D = 4$. **21.22**. 11 рублей. **21.23**. 382. **21.24**. Нет, нельзя. **21.25**. 30 учеников. **21.26**. 12 монет достоинством в 2 копейки, две монеты достоинством в 3 копейки и одна монета достоинством в 5 копеек. **21.27**. Аня живёт в сером доме, Боря — в белом, Варя — в жёлтом, а Гриша — в голубом. **21.28**. Набрать 7 л, отлить 4 в маленькое ведро, вылить из маленького ведра, перелить туда 3 л из большого, набрать большое, отлить из него 1 л в маленькое, опустошить маленькое и заново наполнить его из большого. В большом осталось 2 л. **21.30**. Рубашка стоила 450 рублей. **21.31**. У покупателя было 2100 рублей. **21.33**. У Серёжи было 98 рублей. **21.34**. 135 и 42. **21.35**. Через 18 км. **21.36**. За 24 дня. **21.37**. В баке было 60 л. **21.38**. На стройку доставили 3360 кирпичей. **21.39**. 65 км и 104 км.

КУДРЯШОВА Татьяна Георгиевна

Методы решения математических задач
5 класс

Ответственный за издание А. С. Шуруп
Вёрстка Ю. Г. Кудряшов
Оформление обложки И. В. Кудряшова

Подписано в печать 26.09.08. Формат 70x90/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Объём 13 п. л. Тираж 1000 экз.
Заказ №

НФ «Вольное Дело»
125047, Москва, ул. 3-я Тверская-Ямская, д. 58, стр. 5
Тел.: (495) 728-49-54, факс: (495) 728-72-39

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93