Е. Д. Куланин, С. Н. Федин

Геометрия треугольника в задачах

URSS

Е. Д. Куланин
С. Н. Федин

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЗАДАЧАХ

*Издание второе,
исправленное и дополненное*

URSS
МОСКВА

ББК 22.151

Куланин Евгений Дмитриевич,
Федин Сергей Николаевич

Геометрия треугольника в задачах: Учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 208 с.

Книга представляет собой переиздание хорошо известного любителям математики сборника задач, ставшего уже библиографической редкостью. В нем собрано несколько сотен наиболее интересных и полезных задач, относящихся к геометрии треугольника, разного уровня сложности — среди них есть как классические, так и составленные в последние годы. Существенная их часть приводится с решениями или указаниями.

Книга, несомненно, будет полезна старшеклассникам и преподавателям гимназий и физико-математических спецшкол, а также всем ценителям и знатокам элементарной геометрии.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 13. Бумага типографская. Зак. № 2563.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00786-3

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
URSS
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

5195 ID 58301

9 785397 007863

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

Глава 1

Равнобедренный треугольник

§ 1. Задачи

1.1 Докажите, что если

а) две высоты;

б) две медианы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

1.2 Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC сумма расстояний от произвольной точки D, лежащей на основании AC, до двух боковых сторон постоянна и равна высоте, проведенной к боковой стороне.

1.3 Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых также является равнобедренным.

1.4 Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине максимальную площадь имеет равнобедренный треугольник.

1.5 Положительные числа a, b, c таковы, что для каждого натурального n существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n. Докажите, что все эти треугольники равнобедренные.

1.6 На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной его основанию.

1.7 В равнобедренном треугольнике основание равно a, боковая сторона b. Найдите:

а) медиану, проведенную к боковой стороне;

б) биссектрису, проведенную к боковой стороне;

в) высоту, опущенную на боковую сторону треугольника.

1.8 Найдите углы равнобедренного треугольника, если основание относится к биссектрисе угла при основании как 5 : 6.

1.9 В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию треугольника, делится точкой пересечения высот пополам. Найдите углы этого треугольника.

1.10 Докажите, что если стороны a, b и противолежащие им углы A, B связаны соотношением: $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$, то треугольник равнобедренный.

1.11* Пусть AE и CD — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что если $\angle BDE : \angle EDC = \angle BED : \angle DEA$, то треугольник ABC равнобедренный.

1.12 Боковая сторона равнобедренного треугольника в два раза больше основания. Найдите радиус вписанной окружности, если радиус описанной окружности равен R.

1.13 Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника равен R, расстояние между центрами вписанной и описанной окружности — d. Найдите углы треугольника.

1.14* Докажите, что для равнобедренного треугольника справедливо равенство $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, а r и R — радиусы этих окружностей.

1.15 Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что отношение радиусов вписанной и описанной окружностей $r/R = k$.

1.16 Сколько существует неподобных равнобедренных треугольников с заданным отношением радиусов вписанной и описанной окружностей $r/R = k$?

1.17 Докажите, что треугольник, в который можно вписать два равных, но различных по положению, квадрата является равнобедренным.

1.18 Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, в которые вписаны окружности. Докажите, что если радиусы этих окружностей равны, то исходный треугольник равнобедренный.

1.19 Основание равнобедренного треугольника равно a, боковые стороны — b. Докажите, что биссектриса угла при основании этого треугольника делится точкой пересечения с высотой, опущенной на основание в отношении $(a + b) : b$, считая от вершины.

1.20 Постройте такой равнобедренный треугольник, у которого периметр всякого вписанного прямоугольника со стороной, лежащей на основании, является постоянной величиной.

1.21 Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием, вписанных в окружность данного радиуса, равнобедренный треугольник имеет максимальный радиус вписанной окружности.

1.22 Докажите, что если две высоты остроугольного треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, считая от вершин треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

1.23 Докажите, что если две биссектрисы треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, считая от вершин треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

1.24* Докажите, что если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный (Задача Штейнера—Лемуса).

Равносторонний треугольник

1.25 (Устно). Докажите, что если в равнобедренном треугольнике хотя бы один из углов равен $60°$, то этот треугольник равносторонний.

1.26 На основании равностороннего треугольника как на диаметре построена окружность. Докажите, что точки пересечения этой окружности с боковыми сторонами треугольника совпадают с серединами этих сторон.

1.27 Докажите, что если в треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то этот треугольник равносторонний.

1.28 Докажите, что если в равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности вдвое меньше радиуса окружности, описанной около него, то этот треугольник является равносторонним.

1.29 Докажите утверждение задачи 1.28 для произвольного треугольника.

1.30 В правильный треугольник со стороной a вписан другой правильный треугольник так, что его вершины лежат на сторонах исходного треугольника и делят эти стороны в отношении $m : n$. Найдите площадь вписанного треугольника.

1.31 В правильный треугольник ABC вписан правильный треугольник $A_1B_1C_1$ так, что его вершины A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$, $C_1B = A_1C = B_1A$.

1.32 На сторонах правильного треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1, делящие стороны треугольника ABC в равном отношении. Будет ли треугольник $A_1B_1C_1$ правильным?

1.33 В правильный треугольник ABC, сторона которого равна a, вписан правильный треугольник $A_1B_1C_1$, причем $\dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k$. Найдите отрезки, на которые точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA, AB треугольника ABC.

1.34 Дан правильный треугольник ABC, около которого описана окружность. Дуга AC этой окружности, на которой не лежит вершина B, симметрично отражается относительно основания AC треугольника ABC. На полученной таким образом дуге окружности берется точка M. Пусть D — точка пересечения прямой AM со стороной BC, а E — прямой CM со стороной AB. Докажите, что $AD = CE$.

1.35 На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяты точки E и D соответственно, M — точка пересечения отрезков AD и CE. Найдите геометрическое место точек пересечения M, для которых $\angle AEC + \angle ADC = 180^\circ$.

1.36 Из произвольной точки M, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MD, ME, MF на его стороны AB, BC, CA соответственно. Докажите, что сумма $MD + ME + MF$ постоянна и равна высоте треугольника.

1.37 Докажите, что наибольшее из расстояний точки окружности до вершин вписанного в эту окружность правильного треугольника равно сумме расстояний этой точки до двух оставшихся вершин треугольника.

1.38 Докажите, что сумма квадратов расстояний произвольной точки окружности до вершин вписанного в эту окружность правильного треугольника постоянна, т. е. не зависит от положения точки на окружности.

1.39 На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 так, что вершины A_1, B_1, C_1 лежат вне треугольника ABC. Окружности, описанные около построенных правильных треугольников, называются окружностями Торричелли. Докажите, что окружности Торричелли пересекаются в одной точке, которая называется точкой Торричелли.

1.40 Исходя из условия предыдущей задачи, докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1:

а) пересекаются в точке Торричелли;

б) равны между собой.

1.41 Докажите, что если точка Торричелли M лежит внутри треугольника, то сумма расстояний точки M от вершин треугольника минимальна, т. е. эта сумма меньше суммы расстояний любой точки, лежащей внутри треугольника, от его вершин.

1.42 На сторонах произвольного треугольника ABC как на основаниях построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 так, что вершины A_1, B_1, C_1 лежат вне треугольника ABC. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры треугольников BCA_1, CAB_1, ABC_1 соответственно. Треугольник $O_1O_2O_3$ называется внешним треугольникам Наполеона. Докажите, что внешний треугольник Наполеона правильный (Задача Наполеона).

1.43 Найдите площадь внешнего треугольника Наполеона треугольника ABC, если стороны треугольника ABC равны a, b, c.

1.44 На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 так, что вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1 лежат по одну сторону от прямых BC, AC и AB соответственно. Центры O_1, O_2, O_3 треугольников BCA_1, CAB_1, ABC_1 являются вершинами треугольника, который называется внутренним треугольником Наполеона. Докажите, что внутренний треугольник Наполеона правильный (Задача Наполеона).

1.45 Найдите площадь внутреннего треугольника Наполеона треугольника ABC, если стороны треугольника ABC равны a, b, c.

1.46 Докажите, что разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона треугольника ABC (см. задачи 1.42–1.45) равна площади самого треугольника ABC.

1.47 Дан правильный треугольник. Найти множество точек плоскости, из которых:

а) все стороны данного треугольника видны под тупыми углами;

б) хотя бы одна сторона данного треугольника видна под тупым углом.

1.48 Докажите, что среди всех треугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

1.49 Пусть h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника ABC, r — радиус вписанной окружности. Известно, что $h_1+h_2+h_3=9r$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

1.50 Пусть в треугольнике ABC длины сторон AB, BC, CA равны c, a, b соответственно, а длины высот, проведенные к этим сторонам — h_c, h_a, h_b. Докажите, что если $a+h_a=b+h_b=c+h_c$, то треугольник ABC правильный.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если в треугольнике биссектриса является также медианой, то такой треугольник равнобедренный.

2. Окружность радиуса, равного высоте некоторого равнобедренного треугольника, катится по основанию этого треугольника. Докажите, что величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника, остается при этом постоянной.

3. Докажите, что если высоты остроугольного треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, считая от вершин треугольника, то этот треугольник правильный.

4. Докажите, что если биссектрисы треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, считая от вершин треугольника, то этот треугольник правильный.

5. Вершины правильного треугольника лежат на трех параллельных прямых так, что на каждой из этих прямых находится по одной из вершин треугольника. Найдите сторону этого треугольника, если расстояние от нижней прямой до средней равно a, а от средней до верхней — b.

6. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых по одной вершине на каждой прямой.

7. Из произвольной точки M, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MC_1, MA_1, MB_1 на стороны AB, BC, CA соответственно. Докажите, что

$$AC_1 + BA_1 + CB_1 = C_1B + A_1C + B_1A.$$

8. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного треугольника до прямой, проходящей через его центр, постоянна, т. е. не зависит от выбора этой прямой.

9. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

10. Может ли быть правильным треугольник, расстояния вершин которого до двух данных взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами?

§ 3. Ответы. Указания. Решения

1.2. Решение. Пусть ABC — остроугольный равнобедренный треугольник (рис. 1), DK и DL — перпендикуляры, опущенные из точки D на боковые стороны AB и BC соответственно, AM — высота, проведенная к боковой стороне. Проведем через точку D прямую $DN \parallel BC$. Тогда $PMLD$ — прямоугольник и, значит, $DL = PM$. Прямоугольные треугольники AKD и APD равны по гипотенузе

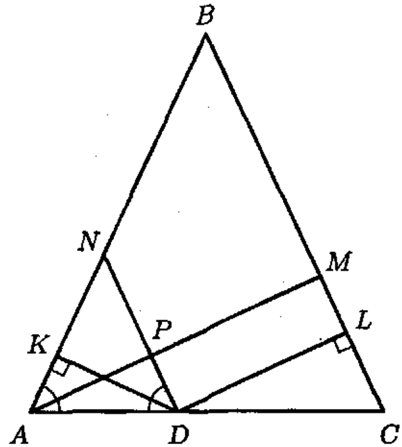


Рис. 1

и острому углу (гипотенуза AD общая, $\angle KAD = \angle PDA$, так как $DN \parallel BC$ и $\triangle ABC$ равнобедренный), поэтому $DK = AP$. Итак, $DK + DL = AP + PM = AM$.

Случай тупоугольного треугольника разбирается аналогично.

1.3. Указание. Рассмотреть два случая, показанных на рис. 2. Тогда

в случае а) углы треугольника равны $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$;

в случае б) $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$.

1.5. Решение. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$. Предположим, что $b < c$. Для существования треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n для каждого натурального n необходимо, чтобы для каждого натурального n выполнялось неравенство

$$a^n + b^n > c^n, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n > 1,$$

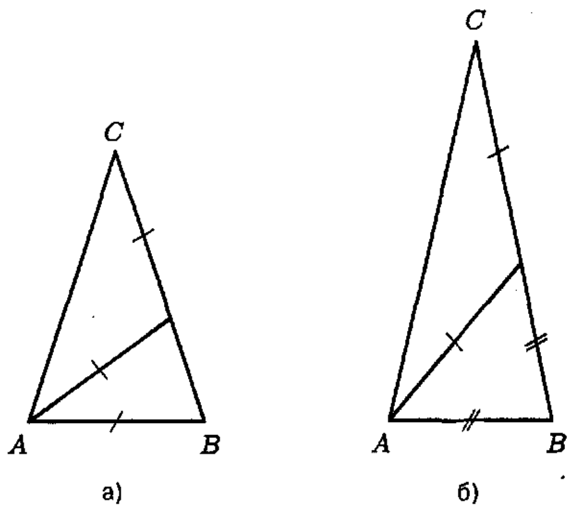


Рис. 2

но левая часть этого неравенства становится сколь угодно малой при достаточно больших n, так как

$$\frac{a}{c} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} < 1.$$

Отсюда вытекает, что предположение $b < c$ неверно и, следовательно, $b = c$.

1.6. Решение. Через точку N проведем $NF \parallel AB$ (рис. 3). Тогда $\angle NFC = \angle BAC$ и треугольник FNC равнобедренный, откуда $MB = NC = NF$, т. е. $MB = NF$. Соединим точки M и F. Полученный четырехугольник $MBNF$ — параллелограмм, поскольку $MB = FN$ и $MB \parallel FN$. Так как в параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам, то точка O — середина отрезка MN — является также серединой отрезка BF и, следовательно, лежит на средней линии KL треугольника ABC.

1.7. Ответ. а) $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}$.

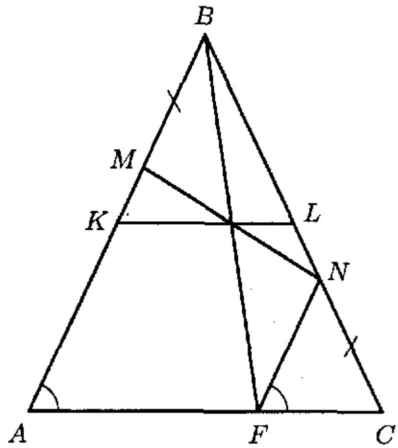


Рис. 3

б) **Решение.** Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BAD = \angle DAC = \dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 4).

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB},$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}al\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}lb\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(a+b),$$

$$2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(a+b), \quad l = \frac{2ab\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Осталось найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Поскольку

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \text{ а } \cos\alpha = \frac{a}{2b} \text{ (из } \triangle\ ABM),$$

то

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{a}{2b}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+2b}{b}}$$

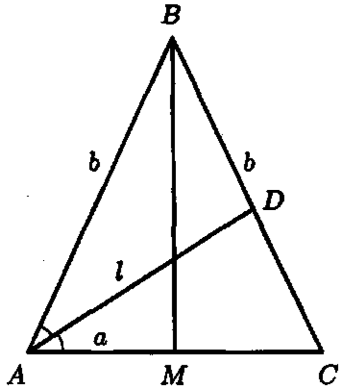


Рис. 4

и

$$l = \frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{a+2b}{b}} = \frac{a}{a+b}\sqrt{ab+2b^2}.$$

в) $\frac{a}{2b} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2}$.

1.8. Ответ. $2\arccos\frac{3}{4}$, $\pi - 4\arccos\frac{3}{4}$.

Указание. Из $\triangle ADC$ (рис. 4) по теореме синусов $\dfrac{\sin\frac{3A}{2}}{\sin A} = \dfrac{5}{6}$, откуда после преобразований получим

$$\frac{4\cos^2\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{5}{6} \quad \text{или} \quad 12\cos^2\frac{A}{2} - 5\cos\frac{A}{2} - 3 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно $\cos\frac{A}{2}$, найдем значение A.

1.9. Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Указание. Составьте уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}.$$

1.10. Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов.

1.11*. Указание. Обозначим $\dfrac{\angle BDE}{\angle EDC} = k$. Покажите, что

$$\frac{\angle AEB + \angle CDB}{\angle BDE + \angle BED} = \frac{3}{2} = \frac{k+1}{k}, \text{ откуда } \quad k = 2.$$

1.12. Решение. Пусть основание AB треугольника ABC равно a (рис. 5). Тогда $AC = BC = 2a$. Обозначим через O центр вписанной окружности, через O_1 — описанной, тогда радиус вписанной окружности $r = OD$ и OA — биссектриса угла CAB. Известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (см. задачи 1.19, 4.26). Поэтому в $\triangle ACD$

$$\frac{CO}{OD} = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 4,$$

$$CO = 4OD = 4r \quad \text{и} \quad CD = CO + OD = 4r + r = 5r.$$

Пусть $CD = h$. Из $\triangle ACD$ по теореме Пифагора

$$h = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Так как точка O_1 центр описанной окружности, то она лежит на серединном перпендикуляре EO_1 боковой стороны AC $\triangle ABC$

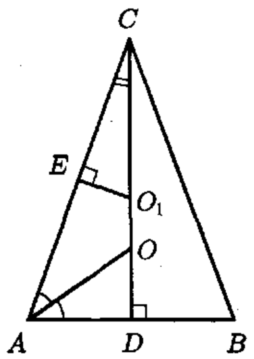


Рис. 5

и $CE = \frac{1}{2}AC = a$. Прямоугольные треугольники CEO_1 и ACD подобны, поскольку $\angle ACD$ у них общий, поэтому

$$\frac{CE}{CO_1} = \frac{a}{R} = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{2a},$$

откуда

$$h = \frac{2a^2}{R} = 5r \quad \text{и} \quad r = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{R},$$

но

$$a^2 = \frac{Rh}{2} = \frac{Ra\sqrt{15}}{2 \cdot 2}, \quad \text{т. е.} \quad a = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

Окончательно,

$$r = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{R} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15R^2}{16} \frac{1}{R} = \frac{3}{8}R.$$

1.13. Решение. Предположим, что центр описанной окружности O_1 лежит на отрезке CO, где C — вершина ABC и O — центр вписанной окружности (рис. 6). Обозначим $AB = a$, $AC = b$. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Тогда $AP = AD = a/2$ как отрезки касательных к данной окружности, проведенных из одной точки. Найдем площадь прямоугольного

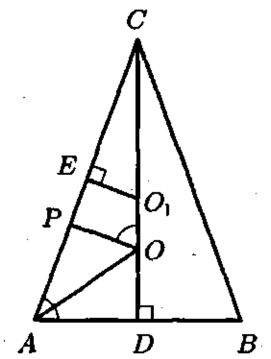


Рис. 6

треугольника COP двумя способами. Пусть $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тогда $\angle COP = \angle CAB = \alpha$.

$$S_{\triangle COP} = \frac{1}{2} PO \cdot OC \cdot \sin \angle POC = \frac{1}{2} r(R+d)\sin\alpha,$$

так как

$$CO = CO_1 + O_1O = R + d.$$

С другой стороны, $S_{\triangle COP} = \frac{1}{2} CP \cdot PO = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{2}\right) r$. Итак,

$$\frac{1}{2} r(R+d)\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{2}\right) r. \qquad (1)$$

По теореме синусов $b = 2R\sin\alpha$, $a = 2R\sin(\pi - 2\alpha) = 2R\sin 2\alpha$. Подставим эти значения в правую часть равенства (1):

$$(R+d)\sin\alpha = 2R\sin\alpha - R\sin 2\alpha = 2R\sin\alpha - 2R\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$
$$= 2R\sin\alpha(1 - \cos\alpha),$$

$$R + d = 2R - 2R\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{R-d}{2R} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{d}{R} < \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\alpha > 60^\circ.$$

В случае $\alpha < 60^\circ$ центр описанной окружности O_1 лежит на отрезке OD. Этот случай разбирается аналогично рассмотренному выше и $\cos\alpha = \dfrac{R+d}{2R}$. Окончательно получаем, что углы равны

$$\arccos\left(\frac{R-d}{2R}\right),\quad \arccos\left(\frac{R-d}{2R}\right),\quad 180^\circ - 2\arccos\left(\frac{R-d}{2R}\right)$$

при $\alpha > 60^\circ$ и

$$\arccos\left(\frac{R+d}{2R}\right),\quad \arccos\left(\frac{R+d}{2R}\right),\quad 180^\circ - 2\arccos\left(\frac{R+d}{2R}\right)$$

при $\alpha < 60^\circ$. При $\alpha = 60^\circ$ треугольник равносторонний, в этом случае $d = 0$.

1.14*. Решение. Пусть $\alpha > 60^\circ$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{R-d}{2R}$ (см. решение предыдущей задачи). С другой стороны, из ΔCOP имеем

$$\cos\alpha = \frac{PO}{OC} = \frac{r}{R+d} = \frac{R-d}{2R},$$

откуда

$$R^2 - d^2 = 2Rr,\quad d^2 = R^2 - 2Rr.$$

В случае $\alpha < 60^\circ$ получаем

$$\cos\alpha = \frac{R+d}{2R} = \frac{r}{R-d}$$

и снова

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

1.15. Ответ. $\arccos\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}\right)$,

$$\pi - 2\arccos\left(\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}\right).$$

Указание. $d^2 = R^2 - 2Rr$, $\left(\dfrac{d}{R}\right)^2 = 1 - 2\dfrac{r}{R} = 1 - 2k$. Далее воспользуйтесь результатом задачи 1.13.

1.16. Ответ. Два при $0 < k < 1/2$, один (правильный) при $k = 1/2$, ни одного при $k > 1/2$.

1.17. Указание. Покажите, что

$$(b-a)\cdot\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0,$$

a и b — длины тех сторон треугольника, на которых лежат стороны квадрата, S — площадь треугольника. Тогда или

$$b = a, \quad \text{или} \quad 1 - \frac{2S}{ab} = 0,$$

т. е. $S = \dfrac{ab}{2}$ и треугольник прямоугольный.

Последний случай отпадает, так как прямоугольный треугольник не удовлетворяет условию задачи (в него можно вписать только один квадрат).

1.18. Указание. Пусть AB — та сторона треугольника, к которой проведена биссектриса, O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей, тогда $O_1O_2 \parallel AB$.

1.19. Решение. Покажем, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ (рис. 7). Действительно,

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AC}{AB},$$

где $\alpha = \angle CAB$.

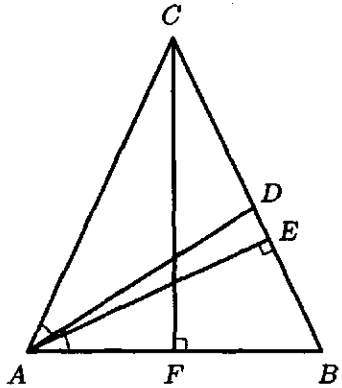


Рис. 7

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot AE}{\frac{1}{2}DB \cdot AE} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

(AE — высота треугольника ABC).

Обозначим $CD = x$, $DB = y$. Тогда

$$\frac{x}{y} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a},$$

$$x + y = \frac{b}{a}y + y = y\left(\frac{b}{a} + 1\right) = y\left(\frac{a+b}{a}\right) = b,$$

$$y = \frac{ab}{a+b}.$$

Высота CF равнобедренного треугольника ABC является также биссектрисой, поэтому точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC и BO — биссектриса угла B. Из $\triangle ADB$ находим

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{DB} = \frac{a}{\frac{ab}{a+b}} = \frac{a+b}{b}.$$

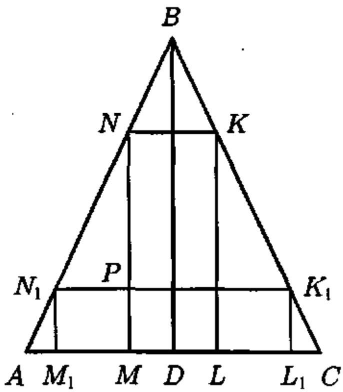


Рис. 8

1.20. Решение. Положим $ML = x$, $MN = y$, $M_1L_1 = x_1$, $M_1N_1 = y_1$ (рис. 8). Тогда

$$x + y = x_1 + y_1 \quad \text{и} \quad x_1 - x = y - y_1.$$

Треугольники N_1NP и ABD подобны, поэтому

$$\frac{BD}{AD} = \frac{NP}{N_1P} = \frac{y - y_1}{\frac{x_1}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{2(y - y_1)}{x_1 - x} = 2,$$

т. е. $BD = 2AD = AC$ и для решения задачи достаточно построить равнобедренный треугольник, у которого высота равна основанию.

1.21. Решение. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC (рис. 9). Тогда

$$\angle AOB = \pi - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \pi - \frac{\pi - \angle C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle C,$$

т. е. для всех треугольников с основанием AB, вписанных в данную окружность, сторона AB видна из центра вписанной в этот треугольник окружности под постоянным углом равным

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle C.$$

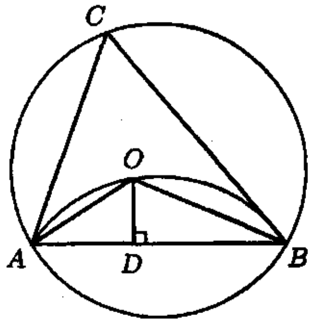


Рис. 9

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, является дуга окружности, проходящая через концы этого отрезка. Понятно, что радиус вписанной окружности $R = OD$ максимален, когда точка O лежит в середине дуги AB, откуда следует, что $\angle A = \angle B$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

1.22. Первое решение. Пусть высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 10) и $\dfrac{AH}{HA_1} = \dfrac{BH}{HB_1}$.

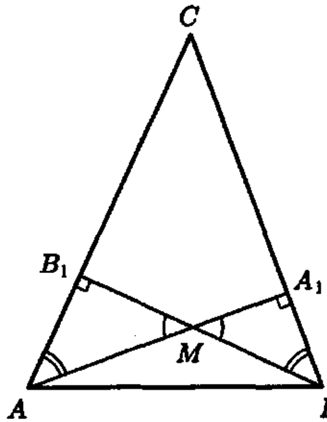


Рис. 10

Так как прямоугольные треугольники AHB_1 и BHA_1 подобны ($\angle AHB_1 = \angle BHA_1$ как вертикальные), то

$$\frac{AH}{BH} = \frac{HB_1}{HA_1} = \frac{BH}{AH},$$

т. е.

$$\left(\frac{AH}{BH}\right)^2 = 1, \quad \frac{AH}{BH} = 1, \quad AH = BH,$$

но тогда из равенства $\dfrac{AH}{HA_1} = \dfrac{BH}{HB_1}$ следует, что

$$HA_1 = HB_1 \quad \text{и} \quad AA_1 = BB_1,$$

а если в треугольнике равны две высоты, то этот треугольник равнобедренный (см. задачу 1.1 а)).

Второе решение. Соединим точки B_1 и A_1 отрезком прямой и рассмотрим треугольники B_1HA_1 и AHB (рис. 11). Эти треугольники подобны, так как $\angle B_1HA_1 = \angle AHB$ и $\dfrac{AH}{HA_1} = \dfrac{BH}{HB_1}$ по условию. Поэтому

$$\angle B_1A_1A = \angle A_1AB \text{ и } B_1A_1 \parallel AB,$$

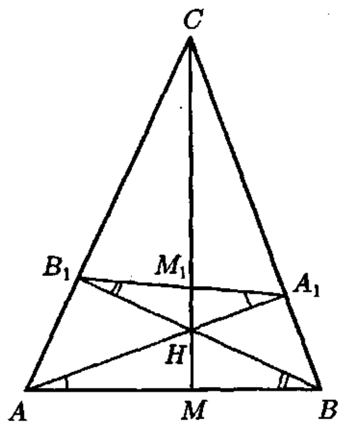


Рис. 11

т. е. четырехугольник ABA_1B_1 — трапеция. Точка H является точкой пересечения диагоналей трапеции, поэтому прямая CH проходит через середины оснований M_1 и M трапеции (докажите это сами), т. е. CM — медиана $\triangle ABC$. Но, так как высоты треугольника пересекаются в одной точке H, то CM — высота $\triangle ABC$. Таким образом, CM является высотой и медианой одновременно в $\triangle ABC$, поэтому этот треугольник равнобедренный.

1.23. Первое решение. Пусть стороны AB, BC, CA треугольника ABC равны c, a, b соответственно, а биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O (рис. 12). Так как биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}, \quad B_1A = \frac{bc}{a+c} \quad \text{(см. решение задачи 1.19).}$$

BO является также биссектрисой треугольника ABA_1, поэтому

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{c}{\dfrac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

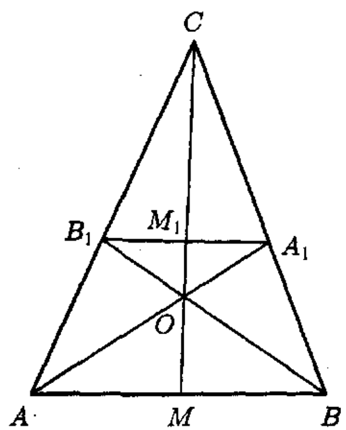


Рис. 12

аналогично,

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{c}{\dfrac{bc}{a+c}} = \frac{a+c}{b}.$$

Поскольку по условию $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{BO}{OB_1}$, то

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}, \quad b^2 + bc = a^2 + ac,$$

$$a^2 - b^2 = bc - ac, \quad (a+b)(a-b) = c(b-a),$$

$$(a-b)(a+b+c) = 0.$$

Так как $a+b+c > 0$, то $a-b=0$, $a=b$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Второе решение. Из второго решения предыдущей задачи следует, что четырехугольник ABA_1B_1 — трапеция и третья биссектриса CO треугольника ABC проходит через середины M_1 и M ее оснований, т. е. биссектриса CM $\triangle ABC$ является также его медианой и, следовательно, треугольник ABC равнобедренный (см. задачу 1.1 для самостоятельного решения).

1.24*. Первое решение. Пусть AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC, причем $AA_1 = BB_1 = l$ (рис. 13). Обозначим $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$ и предположим, что $\angle CBA > \angle CAB$, т. е. $\beta > \alpha$. Через точки A_1 и B_1 проведем отрезки $MA_1 \parallel AB$ и $B_1N \parallel AB$.

Тогда $\angle MA_1A = \angle A_1AM = \alpha$, $\angle NB_1B = \angle B_1BN = \beta$ т. е. треугольники AMA_1 и BNB_1 равнобедренные. Опустим из точек A_1 и B_1 перпендикуляры A_1D и B_1E на AB. Из прямоугольных треугольников AA_1D и BB_1E находим $A_1D = l\sin\alpha$, $B_1E = l\sin\beta$. Так как $\beta > \alpha$, то $B_1E > A_1D$ и точка B_1 лежит между точками M и C, т. е. $CB_1 < CM$, но треугольники B_1CN и MCA_1 подобны, поэтому

$$\frac{B_1N}{MA_1} = \frac{CB_1}{CM} < 1,$$

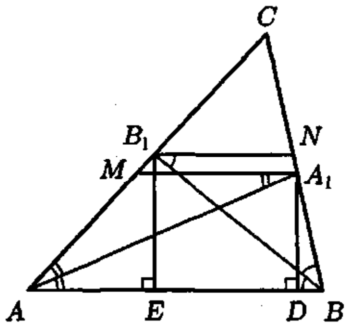


Рис. 13

откуда
$$B_1N < MA_1. \qquad (1)$$

С другой стороны, если провести высоты в равнобедренных треугольниках AMA_1 и B_1NB, то легко найти
$$MA_1 = \frac{l}{2\cos\alpha}, \quad B_1N = \frac{l}{2\cos\beta}.$$

Поскольку $\beta > \alpha$, то $\cos\beta < \cos\alpha$ и $B_1N > MA_1$, что противоречит полученному выше неравенству (1). Итак, предположение $\beta > \alpha$ привело нас к противоречию. Понятно, что случай $\beta < \alpha$ совершенно аналогичен уже рассмотренному. Остается единственная возможность $\alpha = \beta$ и $\triangle ABC$ равнобедренный.

Второе решение. Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Тогда
$$AA_1 = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}, \quad BB_1 = \frac{2ac\cos\beta}{a+c}$$
(см. решение задачи 1.7 б)), и так как $AA_1 = BB_1$, то
$$\frac{2bc\cos\alpha}{b+c} = \frac{2ac\cos\beta}{a+c} \text{ и } \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)}. \qquad (1)$$

Предположим, что $\alpha < \beta$, тогда
$$a < b \quad \text{и} \quad \cos\alpha > \cos\beta, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} > 1,$$

но

$$\frac{ab + ac}{ab + bc} < 1,$$

что противоречит равенству (1). Случай $\alpha > \beta$ разбирается аналогично. Итак, $\alpha = \beta$.

1.28. Указание. Справедливость данного утверждения следует из задач 1.14 и 1.27.

1.29. Решение. Предположим, что данный треугольник ABC неравнобедренный. Опишем около него окружность (рис. 14). Пусть AB_1C — равнобедренный треугольник с тем же основанием AC, вписанный в ту же окружность. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольников ABC и AB_1C, r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$ и r_1 — в $\triangle AB_1C$. Тогда

$$r = \frac{R}{2}, \quad r_1 > r = \frac{R}{2} \quad \text{(см. задачу 1.21)}, \quad \text{или} \quad 2r_1 > R,$$

но для равнобедренного $\triangle AB_1C$ имеем

$$d^2 = R^2 - 2Rr_1 \geqslant 0,$$

откуда

$$R \geqslant 2r_1 \quad \text{(см. задачу 1.14)},$$

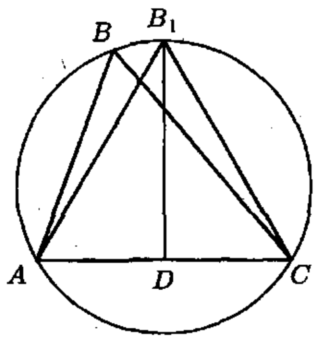


Рис. 14

что противоречит полученному неравенству $2r_1 > R$. Полученное противоречие показывает, что $\triangle ABC$ должен быть равнобедренным, т. е. точка B должна совпадать с B_1 и $r = r_1$. Поскольку для равнобедренного треугольника

$$d^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{и} \quad r = \frac{R}{2},$$

то

$$d^2 = R^2 - 2R \cdot \frac{R}{2} = 0, \quad d = 0,$$

т. е. центры вписанной и описаной окружностей совпадают и из задачи 1.27 следует, что $\triangle ABC$ равносторонний.

1.30. Ответ. $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4(m+n)^2}\,(m^2 + n^2 - mn)$.

Указание. Примените теорему косинусов.

1.31. Решение. Обозначим углы треугольников AB_1C_1, C_1BA_1, A_1CB_1 не равные 60°, через $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ так, как показано на рис. 15. Так как $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, то

$$\alpha_1 + \beta_3 = \beta_1 + \alpha_2 = \beta_2 + \alpha_3 = 120^\circ.$$

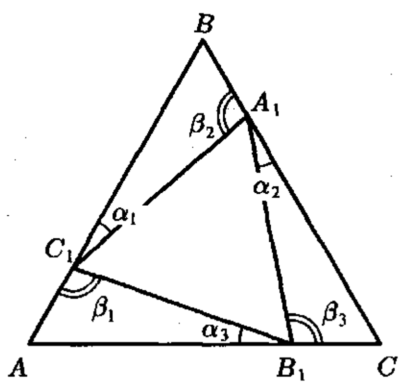


Рис. 15

но

$$\angle C_1A_1B_1 = \angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60^\circ$$

и, поэтому

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_3 = 120^\circ,$$

Из полученных равенств следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Тогда, учитывая, что $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$, выводим, что треугольники AB_1C_1, C_1BA_1, A_1CB_1 равны по первому признаку равенства треугольников и $AC_1 = BA_1 = CB_1$, $C_1B = A_1C = B_1A$.

1.32. Ответ. Да.

1.33. Решение. Обозначим $B_1C_1 = a_1$, $AB_1 = x$ (рис. 16). Тогда

$$CA_1 = BC_1 = AB_1 = x \quad \text{(см. задачу 1.31)}$$

и

$$B_1C = A_1B = C_1A = a - x.$$

По условию $\dfrac{S_1}{S} = k$, но

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = k,$$

откуда $a_1 = \sqrt{k} \cdot a$, где $a = AC$.

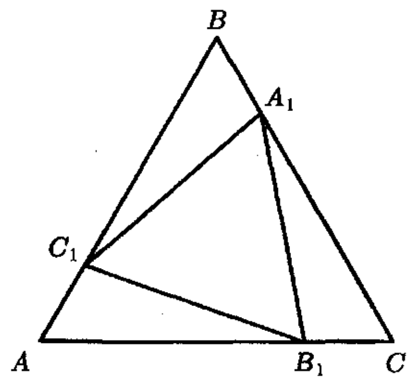


Рис. 16

Из треугольника AB_1C_1 по теореме косинусов находим:

$$a_1^2 = ka^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\cos 60^\circ = x^2 + (a-x)^2 - x(a-x),$$

или

$$3x^2 - 3ax + a^2(1-k) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm a\sqrt{12k-3}}{6} = \frac{a}{6}\left(3 \pm \sqrt{12k-3}\right),$$

т. е.

$$AB_1 = \frac{a}{6}\left(3+\sqrt{12k-3}\right), \quad B_1C = \frac{a}{6}\left(3-\sqrt{12k-3}\right)$$

или

$$AB_1 = \frac{a}{6}\left(3-\sqrt{12k-3}\right), \quad B_1C = \frac{a}{6}\left(3+\sqrt{12k-3}\right).$$

Так как $12k - 3 \geqslant 0$, то попутно получаем, что

$$k \geqslant \frac{1}{4}.$$

1.34. Решение. Обозначим $\angle AEC = \beta$, $\angle ADC = \beta_1$, $\angle DAC = \alpha$, $\angle ECA = \alpha_1$ (рис. 17). Возьмем на дуге AC точку M_1, симметричную точке M относительно AC. Тогда $\angle AMC = \angle AM_1C = 120^\circ$

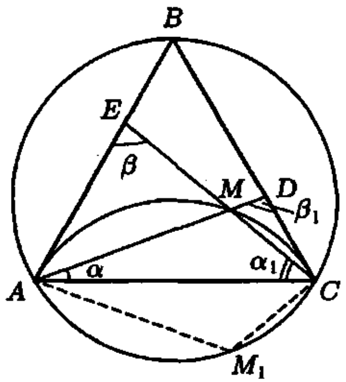


Рис. 17

и из $\triangle AMC$ получаем, что

$$\alpha + \alpha_1 = 60^\circ.$$

Но из $\triangle AEC$ имеем

$$\beta = 180^\circ - \angle BAC - \alpha_1 = 120^\circ - \alpha_1,$$

аналогично, из $\triangle ADC$ находим

$$\beta_1 = 120^\circ - \alpha.$$

Таким образом,

$$\beta + \beta_1 = 240^\circ - (\alpha + \alpha_1) = 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ.$$

Из $\triangle AEC$ по теореме синусов

$$CE = \frac{AC}{\sin\beta} \cdot \sin 60^\circ$$

и из $\triangle ADC$ аналогично

$$AD = \frac{AC}{\sin\beta_1} \sin 60^\circ = \frac{AC \cdot \sin 60^\circ}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{AC \cdot \sin 60^\circ}{\sin\beta} = CE,$$

что и требовалось доказать.

1.36. Указание. Используйте то, что

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah,$$

где $a = AB$, h — высота треугольника ABC. С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC} \text{ (рис. 18).}$$

1.37. Решение. Обозначим $AM = d_1$, $MC = d_2$, $MB = d_3$ (рис. 19). Отложим на отрезке MB отрезок $MK = AM = d_1$. Поскольку $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$, то треугольник AMK равносторонний и $AK = AM = d_1$. Рассмотрим треугольники AMC и AKB. В этих

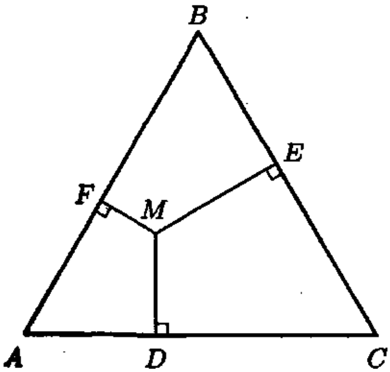


Рис. 18

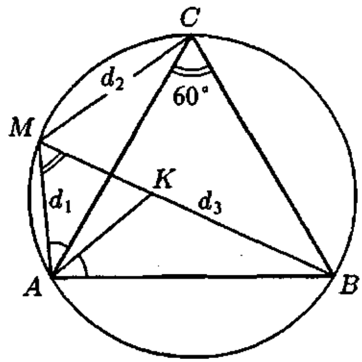


Рис. 19

треугольниках $AC = AB$ как стороны равностороннего треугольника ABC, $AM = AK$ как стороны равностороннего треугольника AMK, $\angle MAC = \angle KAB$ как углы, дополняющие угол CAK до углов MAK и CAB равных 60°. Итак, $\triangle AMC = \triangle AKB$, поэтому

$$KB = MC = d_2 \quad \text{и} \quad d_3 = MB = MK + KB = d_1 + d_2.$$

1.38. Решение. Из треугольника AMC по теореме косинусов

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot AM \cdot MC \cdot \cos 120^\circ \text{ (рис. 19)},$$

или

$$a^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2,$$

поэтому учитывая результат задачи 1.37, получаем

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 + (d_1 + d_2)^2 = 2(d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2) = 2a^2,$$

т. е. сумма $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ не зависит от положения точки M на окружности.

1.39. Решение. Пусть M — точка пересения окружностей, описанных около треугольников BCA_1 и CAB_1 (рис. 20). Покажем, что эта точка лежит и на окружности, описанной около треугольника ABC_1. В самом деле, $\angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$, но тогда

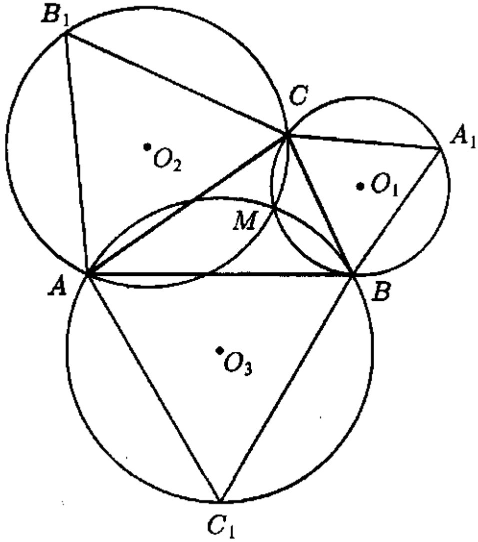


Рис. 20

и $\angle AMB = 120^\circ$, а это и означает, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC_1, т. е. данные три окружности пересекаются в одной точке M.

1.40. Решение. а) Соединим точку M с точками A и A_1 и покажем, что точки A, M, A_1 лежат на одной прямой (рис. 20). Справедливость этого утверждения следует из того, что $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle A_1MB = \angle A_1CB = 60^\circ$, откуда $\angle AMB + \angle A_1MB = 180^\circ$ т. е. угол AMA_1 развернутый и точки A, M, A_1 лежат на одной прямой.

Аналогично доказываем то, что точка M лежит на прямых BB_1 и CC_1.

б) Рассмотрим треугольники ABA_1 и BCC_1. Эти треугольники равны так как у них $AB = BC_1$, $BA_1 = BC$ как стороны равносторонних треугольников ABC_1 и BCA_1, $\angle ABA_1 = \angle ABC + \angle CBA_1 = \angle ABC + 60^\circ = \angle ABC + \angle ABC_1 = \angle CBC_1$. Из равенства треугольников ABA_1 и BCC_1 вытекает, что $AA_1 = CC_1$. Аналогично доказывается то, что $BB_1 = CC_1$, поэтому

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

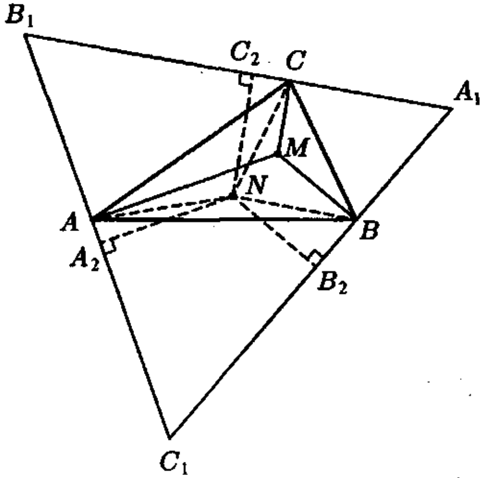


Рис. 21

1.41. Первое решение. Соединим точку M с вершинами треугольника ABC и проведем через точки A, B, C прямые, перпендикулярные прямым AM, BM, CM соответственно (рис. 21). Докажем, что полученный треугольник $A_1B_1C_1$ правильный. Рассмотрим четырехугольник BA_1CM. В этом четырехугольнике $\angle MCA_1 = \angle MBA_1 = 90°$.

Сумма внутренних углов четырехугольника равна $360°$ (как сумма внутренних углов двух треугольников, на которые он разбивается диагональю), поэтому $\angle BA_1C = 180° - \angle BMC = 180° - 120° = 60°$. Аналогично, $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60°$ и, таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ правильный. Сумма расстояний $MA + MB + MC$ равна высоте правильного треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 1.36). Возьмем внутри треугольника ABC точку N, соединим ее с вершинами треугольника ABC, а затем опустим из точки N перпендикуляры NA_2, NB_2, NC_2 на стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно. Тогда

$$NA_2 + NB_2 + NC_2 = MA + MB + MC,$$

но

$$NA + NB + NC > NA_2 + NB_2 + NC_2$$

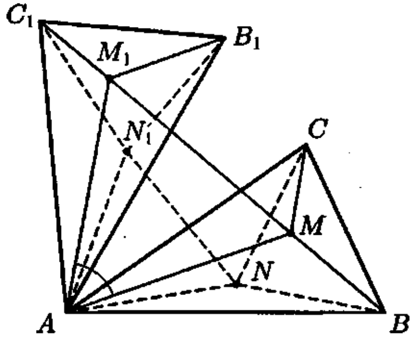


Рис. 22

(NA, NB, NC — гипотенузы прямоугольных треугольников AA_2N, BB_2N, CC_2N соответственно), поэтому

$$NA + NB + NC > MA + MB + MC.$$

Второе решение. Повернем треугольник ABC на угол 60° против часовой стрелки вокруг вершины A. Тогда треугольник ABC примет положение треугольника AB_1C_1, а точка M — точки M_1 (рис. 22). Рассмотрим треугольник M_1AM. В нем $AM = AM_1$, $M_1AM = 60^\circ$ поэтому треугольник M_1AM равносторонний, $AM = MM_1$ и $AM + MB + MC = MB + MM_1 + M_1C_1$. Поскольку $\angle AMB = \angle C_1M_1A = 120^\circ$, то точки B, M, M_1, C_1 лежат на одной прямой. Для любой точки N, лежащей внутри треугольника ABC сумма расстояний этой точки до вершин треугольника равна длине ломаной BNN_1C_1, которая больше длины отрезка прямой BC_1, т.е. $AN + NB + NC > AM + MB + MC$.

1.42. Решение. Рассмотрим окружности, описанные около треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 (рис. 23). Эти окружности пересекаются в одной точке M, называемой точкой Торричелли (см. 1.39). Соединим точку M с вершинами треугольника ABC, а точки O_1, O_2, O_3 — между собой. Точки пересечения соответствующих отрезков обозначим через A_2, B_2, C_2 (рис. 23). Так как $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$, то для доказательства правильности треугольника $O_1O_2O_3$ достаточно показать, что прямые AM,

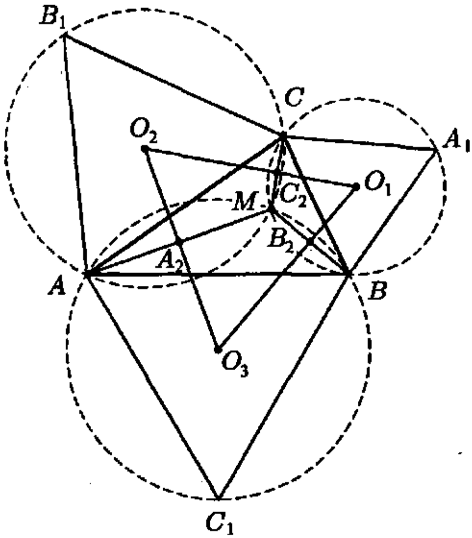


Рис. 23

BM, CM перпендикулярны соответственно прямым O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2. Тогда, рассмотрев четырехугольники $O_1B_2MC_2$, $O_2C_2MA_2$, $O_3A_2MB_2$, найдем $\angle O_2O_1O_3 = \angle O_2O_3O_1 = \angle O_1O_3O_2 = 60^\circ$.

Перпендикулярность указанных прямых следует из справедливости следующего факта: прямая O_1O_2, соединяющая центры двух окружностей пересекающихся в точках M_1 и M_2 перпендикулярна прямой M_1M_2 (рис. 24). В самом деле, $\triangle O_1M_1O_2 = \triangle O_1M_2O_2$ по трем сторонам, поэтому $\angle M_1O_1O_2 = \angle M_2O_1O_2$ и O_1O_2 является биссектрисой и, следовательно, высотой равнобедренного треугольника $M_1O_1M_2$.

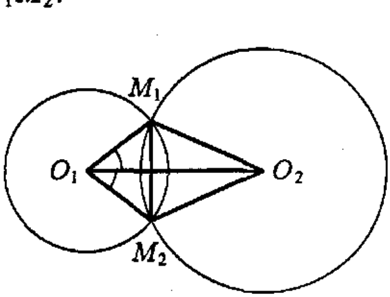


Рис. 24

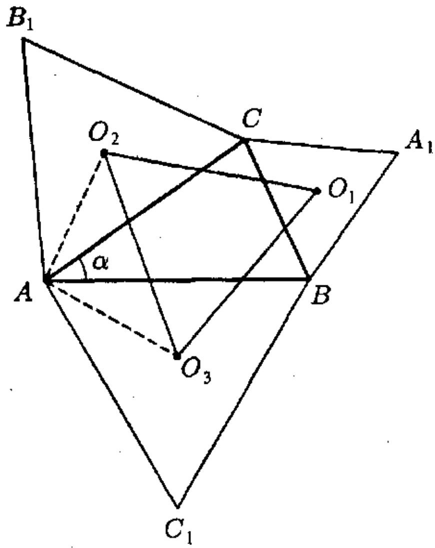


Рис. 25

1.43. Решение. Обозначим $\angle CAB = \alpha$ и рассмотрим треугольник O_2O_3A (рис. 25). Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Тогда

$$AO_2 = \frac{b}{2\cos\angle O_2AC} = \frac{b}{2\cos 30^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично, $AO_3 = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ и из треугольника O_2O_3A по теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned}(O_2O_3)^2 &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}bc\cdot\cos(\alpha + 60^\circ) = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + 2\sqrt{3}S\right),\end{aligned}$$

где $S = S_{\triangle ABC}$. Но из треугольника ABC по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

поэтому

$$b^2 + c^2 - bc\cos\alpha = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Итак,

$$(O_2O_3)^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S).$$

Поскольку треугольник $O_1O_2O_3$ правильный (см. задачу 1.42), то

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{(O_2O_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}S =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника ABC.

1.44. Указание. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Покажите, что

$$\angle O_3AO_2 = 60^\circ - \alpha \quad \text{при} \quad 0 < \alpha \leqslant 60^\circ$$

и

$$\angle O_3AO_2 = \alpha - 60^\circ \quad \text{при} \quad 60^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Тогда

$$(O_2O_3)^2 = \frac{1}{3}\left(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(60^\circ - \alpha)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S) = (O_1O_2)^2 = (O_1O_3)^2,$$

откуда

$$O_2O_3 = O_1O_2 = O_1O_3.$$

1.45. Решение. Используя значение $(O_2O_3)^2$, полученное в решении предыдущей задачи, находим:

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{(O_2O_3)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2}S =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

1.46. Решение. Пусть S_1 и S_2 площади внешнего и внутреннего треугольника Наполеона соответственно. Тогда

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{2}S, \quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2}S,$$

где S площадь треугольника ABC (см. решения задач 1.43 и 1.45) и $S_1 - S_2 = S$.

1.47. Ответ.

а) все точки заштрихованной области (рис. 26);

б) все точки принадлежащие объединению кругов, построенных на сторонах треугольника, как на диаметре (рис. 26).

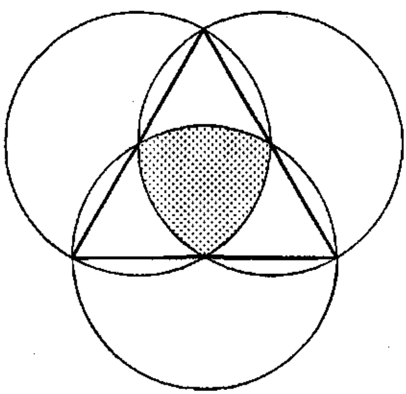


Рис. 26

1.48. Решение. Так как $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и p фиксированно, то S максимальна, если максимально произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$. Сумма сомножителей в последнем произведении постоянна

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-(a+b+c) = 3p-2p = p,$$

поэтому воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех неотрицательных чисел не превосходит среднего арифметического этих чисел:

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3},$$

причем равенство достигается в случае $x = y = z$. В нашем случае

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27},$$

или

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \frac{p^4}{27}, \quad S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

причем равенство достигается при $a = b = c$, т. е. равносторонний треугольник имеет наибольшую площадь среди всех треугольников с данным периметром.

1.49. Решение. $a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3 = 2S = 2pr = r(a_1+a_2+a_3)$, откуда

$$h_1 = \frac{r}{a_1}(a_1+a_2+a_3), \quad h_2 = \frac{r}{a_2}(a_1+a_2+a_3), \quad h_3 = \frac{r}{a_3}(a_1+a_2+a_3).$$

Итак

$$h_1+h_2+h_3 = r(a_1+a_2+a_3)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) = 9r$$

и

$$(a_1+a_2+a_3)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) = 9.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$a_1\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=6$$

или, раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые в левой части, получим:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)=6.$$

В каждой из скобок левой части последнего равенства стоит выражение вида

$$x+\frac{1}{x},$$

для которого при $x>0$ выполняется неравенство

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

(это неравенство при $x>0$ эквивалентно следующим:

$$x^2+1\geqslant 2x,\quad x^2-2x+1\geqslant 0,\quad (x-1)^2\geqslant 0,$$

заметим также, что это неравенство полезно запомнить, так как оно часто используется при решении различных алгебраических задач), причем равенство достигается при $x=1$.

Итак, равенство

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)=6$$

имеет место только при

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1}{a_3}=\frac{a_2}{a_3}=1,$$

откуда следует

$$a_1=a_2=a_3.$$

1.50. Указание. Из равенств

$$a+h_a=b+h_b=c+h_c,\quad ah_a=bh_b=ch_c=2S$$

следует

$$a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b} = c + \frac{2S}{c} = q,$$

т. е. числа a, b, c являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - qx + 2S = 0.$$

Покажите, что предположение о том, что не все числа a, b, c равны между собой, приводит к противоречию.

Глава 2

Прямоугольный треугольник

§ 1. Задачи

2.1 Один из катетов прямоугольного треугольника вдвое меньше его гипотенузы. Определите углы этого треугольника.

2.2 Зная длины сторон прямоугольного треугольника, определите:

а) радиус вписанной окружности;

б) радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов;

в) радиусы вневписанных окружностей, касающихся одного из катетов и продолжений гипотенузы и другого катета.

2.3 Определите вид треугольников, каждый из которых можно разрезать на два подобных ему.

2.4

а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

б) Докажите, что верно и обратное: если медиана, проведенная из вершины некоторого угла треугольника равна половине противоположной ему стороны, то этот угол — прямой.

2.5 Высота, опущенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна корню квадратному из произведения длин отрезков, на которые она делит гипотенузу.

2.6 Найти геометрическое место точек пересечения медиан всевозможных прямоугольных треугольников, гипотенуза AB которых зафиксирована.

2.7 Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, а c — длина его гипотенузы. Докажите, что для всех $n > 2$ выполняется неравенство:

$$a^n + b^n < c^n.$$

2.8 Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, а h — высота, опущенная из вершины прямого угла. Докажите, что:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

2.9

а) В неравнобедренном прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены медиана, биссектриса и высота. Докажите, что биссектриса делит угол между медианой и высотой пополам.

б) Покажите, что верно и обратное, т. е. если из вершины С неравнобедренного треугольника проведена биссектриса, которая делит угол между медианой и высотой, проведенными из той же вершины, пополам, то угол C — прямой.

2.10 Медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины одного и того же угла некоторого треугольника, делят этот угол на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

2.11 Постройте прямоугольный треугольник, вписанный в данную окружность так, чтобы его катеты проходили соответственно через две заданные точки внутри окружности.

2.12 Пусть стороны a, b и c треугольника ABC соответственно противоположны углам A, B и C. Докажите, что треугольник

ABC — прямоугольный в том и только том случае, когда имеет место равенство

$$ab\cos C + bc\cos A + ac\cos B = c^2.$$

2.13 (Устно). Лестница длины h вертикально приставленная к стене, начинает соскальзывать вниз. Упадет ли лестница на пол, если ее середина была привязана к полу веревкой длины $(1/2)h$?

2.14 На гипотенузе прямоугольного треугольника как на стороне во внешнюю сторону построен квадрат. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, делит этот угол пополам.

2.15 (Устно). Докажите, что из всех треугольников с двумя заданными сторонами a и b максимальную площадь имеет прямоугольный треугольник, причем эти стороны являются катетами.

2.16 Зная катеты a и b прямоугольного треугольника, найдите длину биссектрисы прямого угла.

2.17 Пусть радиус окружности, вписанной в данный прямоугольный треугольник с катетами a и b, равен r, а радиус описанной окружности R. Докажите, что $a + b = 2(R + r)$.

2.18 На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC найдите такую точку M, чтобы отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на катеты, имел наименьшую длину.

2.19 Определите углы треугольника, в котором медиана и высота, проведенные из вершины одного и того же угла, делят этот угол на три равные части.

2.20 (Устно).

а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота (соответственно биссектриса), проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы в том и только в том случае, когда треугольник равнобедренный.

б) Определите углы прямоугольного треугольника, если произведение высот этого треугольника в два раза меньше произведения его сторон.

2.21 Докажите, что данный треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда квадрат синуса одного угла этого треугольника равен сумме квадратов синусов двух других углов.

2.22 Найдите углы треугольника, две высоты которого не меньше соответствующих сторон, на которые они опущены.

2.23

а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые делит гипотенузу точка касания вписанной окружности.

б*) Докажите, что верно и обратное: если площадь треугольника равняется произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит одну из его сторон, то угол треугольника, противолежащий этой стороне, прямой.

2.24 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и точке, в которой ее касается вписанная окружность.

2.25 Постройте прямоугольный треугольник по двум его медианам m_a и m_b, проведенным к катетам.

2.26 Постройте прямоугольный треугольник по:

а) гипотенузе и сумме катетов;

б) гипотенузе и разности катетов;

в) радиусам вписанной и описанной окружностей;

г) катету и разности между гипотенузой и другим катетом;

д) катету и сумме гипотенузы и другого катета.

2.27 Найдите геометрическое место вершин C неизменяемого прямоугольного треугольника ABC, гипотенуза AB которого скользит по сторонам заданного на плоскости прямого угла O.

2.28

а) Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) сумма катетов меньше суммы гипотенузы и любого отрезка CE, где точка E принадлежит гипотенузе.

б) Докажите, что для любого прямоугольного треугольника

$$1 < \frac{c+h}{a+b} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

где a и b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу.

2.29 Докажите, что для любого прямоугольного треугольника имеют место двойные неравенства:

а) $c < a + b < 1{,}5c$; б) $0{,}4 < \dfrac{r}{h} < 0{,}5$,

где a и b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус, вписанной окружности, а h — высота, опущенная на гипотенузу.

2.30 Постройте прямоугольный треугольник ABC по гипотенузе AB и медиане AA_1, проведенной к катету BC.

2.31 (Устно). При каком положении отрезка AB, скользящего по сторонам прямого угла O, площадь треугольника AOB будет наибольшей?

2.32 Докажите, что разность квадратов отрезков, на которые разбивает гипотенузу перпендикуляр, опущенный из середины одного катета прямоугольного треугольника, равна квадрату другого катета.

2.33 (Устно). На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр EF из произвольной точки E катета AC. Докажите, что $\angle ECF = \angle EBF$.

2.34 Докажите, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° равна одной восьмой квадрата гипотенузы.

2.35 В треугольники, на которые разбивает данный прямоугольный треугольник высота, опущенная на гипотенузу, вписаны окружности радиусов r_1 и r_2.

Докажите, что:

1*) $r_1^2+r_2^2=r^2$, где r — радиус окружности, вписанной в исходный треугольник;

2) $r_1+r_2+r=h$, где h — высота, опущенная на гипотенузу.

2.36 На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что $AF=AC$ и $BE=BC$. Найдите угол ECF.

2.37 В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) проведена медиана CM. В треугольник ACM вписана окружность, которая касается отрезка AM в точке E, делящей его пополам. Найдите углы треугольника ABC.

2.38 Докажите, что для любого прямоугольного треугольника верны неравенства:

1) $r<\frac{1}{2}a$, 2) $r\leqslant\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}c<\frac{c}{4}$,

где a — катет, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

2.39 Определите углы прямоугольного треугольника, для которого отношение радиуса R описанной окружности к радиусу r вписанной окружности:

а) равно $\frac{5}{2}$; б) наименьшее.

2.40 На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH. В треугольнике ACH проведена биссектриса CE. Докажите, что $BE=BC$.

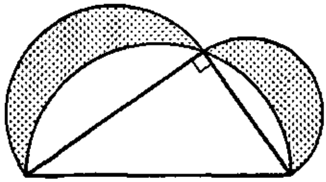


Рис. 27

2.41 (Задача о «луночках Гиппократа»). На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника, как на диаметрах, построены полуокружности так, как указано на рис. 27. Докажите, что сумма площадей двух заштрихованных «луночек» равна площади треугольника.

2.42 Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника — целые числа, то произведение катетов делится на 12.

2.43 (Устно). Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что

$$\angle AOB = 135°.$$

2.44

1) Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника являются сходственными сторонами построенных на них и подобных между собой треугольников. Докажите, что площадь треугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей треугольников, построенных на катетах.
2) Докажите, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты гипотенуз, то эти треугольники подобны.

2.45 Пусть X — произвольная точка на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, причем $AX = m$, $BX = n$, $CX = d$. Полагая $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, докажите, что

$$a^2m^2 + b^2n^2 = c^2d^2.$$

2.46 Из вершины C прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH на гипотенузу AB. В образовавшиеся треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами соответственно в точках O_1 и O_2. Пусть прямые CO_1 и CO_2 пересекают AB соответственно в точках M и K, а прямая O_1O_2, пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F.

Докажите, что:

1) $AC = AK$, $BM = BC$;
2) прямые $O'O_1$ и BC (соответ. $O'O_2$ и AC), где O' — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности гипотенузы AB, параллельны;
3) прямая O_1O_2 отсекает на катетах AC и BC отрезки, равные высоте CH, т. е. $CE = CF = CH$;
4) $EF = h\sqrt{2}$, где $h = CH$;
5) точки E, H, O_2, C (соотв. F, H, O_1, C) лежат на одной окружности;
6) $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$;
7) $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности;
8) $\angle EHF = 135^\circ$.

2.47 Построить прямоугольный треугольник, зная радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники, на которые разбивает исходный треугольник высота, опущенная на гипотенузу.

2.48 (Обобщенная теорема Пифагора). Высота CD прямоугольного треугольника ABC опущена на гипотенузу. Пусть l_a, l_b и l_c — соответственно сходственные линейные элементы в подобных треугольниках BCD, ACD и ABC. Докажите, что

$$l_a^2 + l_b^2 = l_c^2.$$

2.49 Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC и AOC равны. Докажите, что

$$OA^2 + OB^2 = 5OC^2.$$

2.50 Постройте прямоугольный треугольник ABC, зная вершину C прямого угла и центры O' и O вписанной и описанной окружностей.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что данный треугольник прямоугольный и равнобедренный тогда и только тогда, когда

$$\sin A + \cos A = \sin B + \cos B,$$

где A и B — два угла треугольника.

2. (Устно). Найдите геометрическое место точек пересечения медиан всевозможных прямоугольных треугольников, вписанных в данную окружность.

3. В условиях задачи 2.18 докажите, что площадь четырехугольника $CEMF$, где E и F — основания перпендикуляров, будет наибольшей в точности, когда точка M — середина AB.

4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC$, точки E и F делят катет AC на три равные части. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle BEC + \angle BFC = 90°.$$

5. (Устно). Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, зная сумму гипотенузы и высоты, опущенной из прямого угла.

6. Радиус описанной около данного прямоугольного треугольника окружности равен R, а его площадь — S. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

7. Постройте прямоугольный треугольник, зная его площадь и сумму катетов.

8. Докажите, что если в треугольнике ABC

$$\angle A = 2\angle B \quad \text{и} \quad AB = 2AC,$$

то $\angle C = 90°$, т. е. треугольник — прямоугольный.

9. Докажите, что высота в прямоугольном треугольнике, опущенная из вершины прямого угла, разбивает гипотенузу на отрезки, отношение которых равно отношению квадратов катетов.

10. Пусть h — высота, опущенная на гипотенузу c прямоугольного треугольника с катетами a и b. Докажите, что треугольник со сторонами $a+b$, h и $c+h$ также прямоугольный. Определите его гипотенузу.

11. Докажите, что в прямоугольном треугольнике площади S имеет место равенство

$$r = \sqrt{S + R^2} - R,$$

где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

12. Пусть S — площадь прямоугольного треугольника, p — его полупериметр, c — гипотенуза, a и b — катеты. Докажите, что

$$S = p(p-c) = (p-a)(p-b).$$

13. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.

14. Пусть r, r_a, r_b и r_c — соответственно радиусы вписанной и вневписанных для данного треугольника окружностей. Докажите, что треугольник будет прямоугольным в том и только в том случае, когда $r \cdot r_c = r_a \cdot r_b$.

15. Докажите, что если один из углов треугольника равен 120°, то треугольник с вершинами в основаниях биссектрис — прямоугольный.

§ 3. Ответы. Указания. Решения

2.1. Ответ. 30° и 60°.

2.2. Ответ. а) $\frac{1}{2}(a+b-c) = p-c$; б) $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$;

в) $\frac{1}{2}(a+c-b) = p-b$ и $\frac{1}{2}(b+c-a) = p-a$,

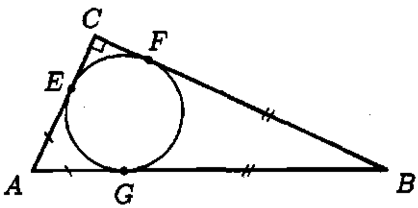


Рис. 28

где a, b и c — соответственно длины катетов и гипотенузы данного прямоугольного треугольника, а p — полупериметр.

Решение. а) Пусть

$$AB = c, \quad AC = b \quad \text{и} \quad BC = a,$$

r — радиус вписанной окружности (рис. 28), E, F и G — точки касания вписанной окружности. Тогда

$$EC = FC = r,$$

откуда

$$AE = AG = b - r.$$

Аналогично

$$BG = BF = a - r.$$

Таким образом,

$$c = AB = AG + BG = (b - r) + (a - r),$$

т. е.

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

б), в) Решение аналогично пункту а).

2.3. Ответ. Прямоугольные треугольники.

Решение. Покажем, что этим свойствам обладают только прямоугольные треугольники. Всякий прямоугольные треугольник высотой, проведенной из вершины прямого угла, разрезается на два подобных ему треугольника.

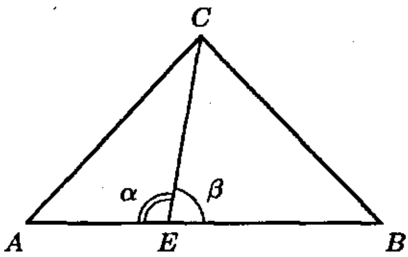


Рис. 29

Обратно, пусть отрезок CE делит $\triangle ABC$ на подобные ему треугольники ACE и BCE (рис. 29). Если углы α и β не равны между собой, то в силу подобия соответствующих треугольников они равны разным углам $\triangle ABC$, что противоречит тому, что углы α и β — смежные, т. е. условию

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Таким образом,

$$\angle\alpha = \angle\beta = 90^\circ,$$

откуда $\triangle ABC$ — прямоугольный.

2.4. Решение.

а) Очевидно в силу того, что центром описанной около прямоугольного треугольника окружности является середина его гипотенузы.

б) Обратно, если медиана делит соответствующую сторону треугольника на равные ей отрезки, то, очевидно, основание медианы является центром описанной около треугольника окружности. Отсюда следует, что угол из вершин которого проведена медиана, опирается на диаметр и, стало быть, является прямым.

2.5. Указание. Рассмотрите подобные треугольники, на которые высота разбивает данный прямоугольный треугольник.

2.6. Ответ. Окружность с центром в середине O гипотенузы AB и радиуса, равного $\frac{1}{6}AB$, без двух точек этой окружности, принадлежащих отрезку AB.

Указание. Воспользуйтесь задачами 2.4 а и 4.3 (для самостоятельного решения).

2.7. Решение. В силу теоремы Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

откуда

$$a^n + b^n = a^{n-2} \cdot a^2 + b^{n-2} \cdot b^2 < c^{n-2} \cdot a^2 + c^{n-2} \cdot b^2 =$$
$$= c^{n-2} \cdot (a^2 + b^2) = c^{n-2} \cdot c^2 = c^n.$$

2.8. Решение. Из подобия треугольников ACH и ABC, где H — основание высоты, опущенной из вершины C прямого угла (рис. 30), получим пропорцию:

$$\frac{AC}{CH} = \frac{AB}{BC},$$

откуда

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CH^2} = \frac{AB^2}{AC^2 \cdot BC^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

2.9. Решение. а)–б). Обозначим через O — центр описанной около треугольника ABC окружности, а через F — точку пересечения

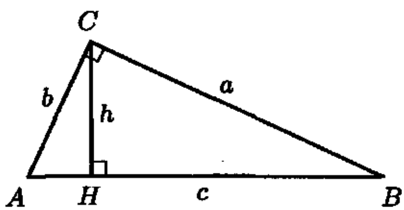


Рис. 30

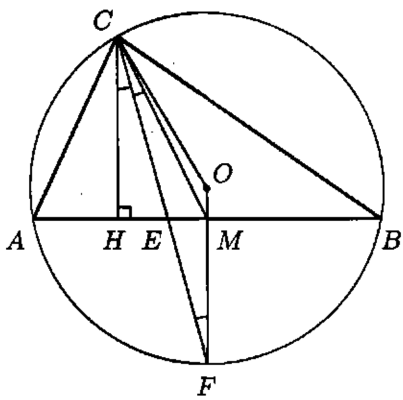


Рис. 31

биссектрисы CE угла C с этой окружностью (рис. 31). Пусть, кроме того, CH — высота, а CM — медиана, проведенная из вершины C.

Биссектриса угла C делит дугу AB пополам, поэтому $OF \perp AB$ и, следовательно, $OF \parallel CH$.

Отсюда

$$\angle FCH = \angle OFC,$$

но, очевидно,

$$\angle OFC = \angle OCF.$$

Биссектриса CE делит угол между высотой CH и медианой CM пополам в том и только в том случае, когда $\angle MCF = \angle FCH$. Но $\angle FCH = \angle OCF$. Таким образом, указанное условие эквивалентно равенству $\angle MCF = \angle OCF$, что означает совпадение точек M и O, т. е. прямоугольность треугольника ABC.

2.10. Ответ. $90°, 22{,}5°$ и $67{,}5°$.

Решение. В силу предыдущей задачи угол C (см. рис. 31) равен $90°$. Далее, по условию

$$\angle ACH = \frac{1}{4}\angle C = 22{,}5°, \quad \angle A = 67{,}5°.$$

Прямоугольный треугольник ACH подобен треугольнику ABC, откуда

$$\angle B = \angle ACH = 22{,}5°.$$

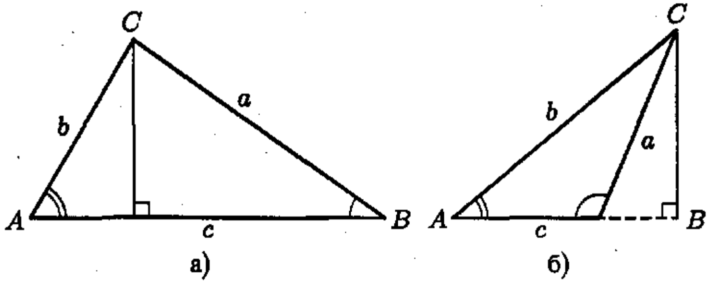


Рис. 32

2.11. Указание. Рассмотрите окружность, построенную на отрезке с концами в двух данных точках как на диаметре.

2.12. Решение. В любом треугольнике ABC верно равенство

$$c = b\cos A + a\cos B,$$

доказательство которого видно из рис. 32, *а* и рис. 32, *б*. Поэтому

$$ab\cos C + bc\cos A + ac\cos B =$$

$$= ab\cos C + c\cdot(b\cos A + a\cos B) = ab\cos C + c^2.$$

Таким образом,

$$ab\cos C + bc\cos A + ac\cos B = c^2$$

в том и только в том случае, когда

$$ab\cos C + c^2 = c^2,$$

откуда

$$\cos C = 0,$$

т. е.

$$\angle C = 90^\circ.$$

2.13. Ответ. Да.

Указание. Используя результат задачи 2.4 а), найдите траекторию середины лестницы, рассматриваемой как точка, при скольжении вниз.

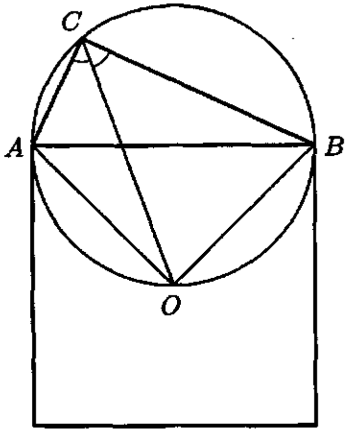


Рис. 33

2.14. Решение. Пусть $\angle C$ в треугольнике ABC (рис. 33) прямой. Центр O квадрата и точка C лежат на окружности с диаметром AB. $AO = OB$, поэтому углы ACO и BCO равны, как опирающиеся на равные хорды.

2.15. Указание. Используйте формулу для площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi.$$

2.16. Ответ. $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Решение. Площадь $S = \frac{1}{2}ab$ прямоугольного треугольника равна сумме площадей S_1 и S_2 двух треугольников, на которые разбивает исходный треугольник биссектриса l. Углы между катетами и биссектрисой равны 45°, поэтому:

$$S_1 = \frac{1}{2}al\sin 45^\circ = \frac{al}{2\sqrt{2}}, \quad S_2 = \frac{bl}{2\sqrt{2}},$$

$$S = \frac{1}{2}ab = S_1 + S_2 = \frac{al}{2\sqrt{2}} + \frac{bl}{2\sqrt{2}}, \quad \text{т. е.} \quad l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

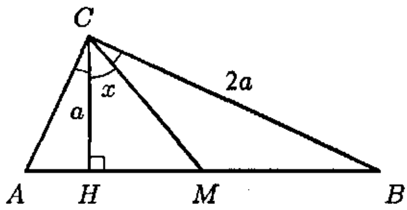


Рис. 34

2.17. Указание. Воспользуйтесь решением задачи 2.2 а).

2.18. Ответ. Точка M является основанием высоты, опущенной из вершины C на гипотенузу.

Указание. Покажите, что четырехугольник $MECF$, где E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на катеты, — прямоугольник.

2.19. Ответ. 90°, 60°, 30°.

Решение. Обозначим угол между медианой CM и высотой CH, проведенными из вершин C треугольника ABC через x (рис. 34). Тогда по условию

$$\angle ACH = \angle MCB = x.$$

Высота CH в треугольнике ACM является и биссектрисой, а значит и медианой, откуда

$$MH = HA = \frac{1}{2}MB.$$

Биссектриса CM треугольника BCH делит основание BH на части, пропорциональные прилегающим сторонам, откуда

$$\frac{CH}{CB} = \frac{MH}{MB} = \frac{1}{2}.$$

Значит, катет CH, лежащий напротив угла B, равен половине гипотенузы, что в силу задачи 2.1 означает: $\angle B = 30^\circ$. Отсюда

$$\angle BCH = 60^\circ.$$

Следовательно,

$$x = 30^\circ, \quad \text{а} \quad \angle C = 3x = 90^\circ \quad \text{и} \quad \angle A = 60^\circ.$$

2.20. Указание, Ответ.

а) **Указание.** Воспользуйтесь задачей 2.4 а).

б) **Ответ.** 45°, 45°.

2.21. Решение. Пусть треугольник ABC прямоугольный, $\angle C=90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$\sin^2 c = \sin^2 90^\circ = 1 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \sin^2 A + \sin^2 B.$$

Обратно, пусть в некотором треугольнике ABC

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B.$$

Из формулы для площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C$$

находим:

$$\sin^2 C = \frac{4S^2}{a^2b^2}.$$

Аналогично

$$\sin^2 A = \frac{4S^2}{b^2c^2}, \quad \sin^2 B = \frac{4S^2}{a^2c^2}.$$

Тогда по условию

$$\frac{4S^2}{a^2b^2} = \frac{4S^2}{b^2c^2} + \frac{4S^2}{a^2c^2}.$$

Производя сокращение и умножая обе части равенства на $a^2b^2c^2$, получим

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

т. е. треугольник ABC прямоугольный.

2.22. Ответ. 90°, 45°, 45°.

Решение. Пусть $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$ стороны треугольника ABC, а h_a и h_b соответственно высоты к сторонам a и b такие, что

$$h_a \geqslant a, \quad h_b \geqslant b.$$

Пусть, например $a \leqslant b$. Тогда для площади S треугольника ABC имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C \leqslant \frac{1}{2}b^2\sin C \leqslant \frac{1}{2}b^2.$$

Причем равенство достигается в точности, когда

$$a = b \quad \text{и} \quad \angle C = 90^\circ.$$

С другой стороны, по условию

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b \geqslant \frac{1}{2}b^2,$$

т. е.

$$S = \frac{1}{2}b^2$$

и в силу вышесказанного, треугольник ABC — равнобедренный прямоугольный.

2.23. Решение. а) Пусть гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 35) разбивается точкой касания K вписанной окружности на отрезки AK и KB длиной x и y соответственно. Касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны. Поэтому

$$AE = x, \quad BF = y,$$

откуда

$$AC = b = x + r, \quad BC = a = y + r,$$

где r — радиус вписанной окружности. Тогда

$$2S = ab = (y+r)(x+r) = xy + r(x+y+r) =$$
$$= xy + r\frac{1}{2}(a+b+c) = xy + pr = xy + S,$$

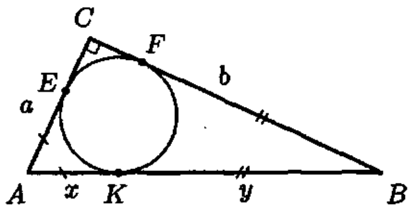


Рис. 35

где $c = x + y$ — гипотенуза, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр, а S — площадь треугольника ABC. Таким образом,

$$2S = xy + S$$

и значит

$$S = xy.$$

б) Пусть $S = x_1x_2$, где S — площадь треугольника ABC (рис. 36), $AF = AD = x_1$, $BF = BE = x_2$. Покажем, что $\angle C = 90^\circ$.

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2}(x_1 + y)(x_2 + y) \cdot \sin C,$$

где $CD = CE = y$. Таким образом,

$$(x_1 + y)(x_2 + y) \cdot \sin C = 2x_1x_2,$$

или, раскрывая скобки и деля обе части равенства на $\sin C$:

$$x_1x_2 + y(x_1 + x_2 + y) = \frac{2x_1x_2}{\sin C}.$$

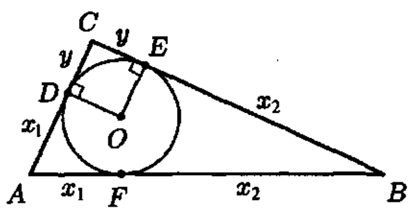


Рис. 36

Но

$$x_1x_2 = S, \quad x_1 + x_2 + y = \frac{S}{r},$$

где r — радиус вписанной окружности.

Отсюда

$$S + \frac{S}{r}y = \frac{2S}{\sin C}, \quad \text{или} \quad 1 + \frac{y}{r} = \frac{2}{\sin C},$$

т. е.

$$\sin C = \frac{2r}{r+y}.$$

Далее, $\angle CDO + \angle CEO = 180^\circ$, а значит четырехугольник $CDOE$ вписанный. Для площади S_1 этого четырехугольника имеем:

$$S_1 = \frac{1}{2}y^2 \sin C + \frac{1}{2}r^2 \sin(180^\circ - C) = \frac{1}{2}(r^2 + y^2)\sin C.$$

С другой стороны,

$$S_1 = S_{\triangle CDO} + S_{\triangle CEO} = 2 \cdot \frac{1}{2}ry = ry.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}(r^2 + y^2)\sin C = ry,$$

откуда

$$\sin C = \frac{2ry}{r^2 + y^2}.$$

Приравнивая $\frac{2ry}{r^2+y^2} = \frac{2r}{r+y}$, получим

$$ry + y^2 = r^2 + y^2,$$

или

$$r(y - r) = 0.$$

Отсюда $y = r$, т. е. $\angle C = 90^\circ$.

2.24. Указание. Используя предыдущую задачу, найдите высоту h, опущенную из вершины C прямого угла на гипотенузу. Отсюда следует, что вершина C находится на расстоянии h от гипотенузы AB и, кроме того, на окружности с диаметром AB.

2.25. Указание. Покажите, что

$$m_a^2 + m_b^2 = \frac{5}{4}c^2,$$

где c — гипотенуза.

2.26. Решение, указание.

а) **Решение.** Продлим катет $BC = a$ за вершину C до точки E так, чтобы $CE = AC = b$ (рис. 37). Тогда треугольник AEC — равнобедренный, откуда $\angle AEB = 45^\circ$. Теперь, зная $AB = c$, $BE = a + b$ и $\angle AEB = 45^\circ$, легко построить треугольник AEB. Восстановив перпендикуляр из середины H стороны AE до пересечения с отрезком BE, найдем точку C.

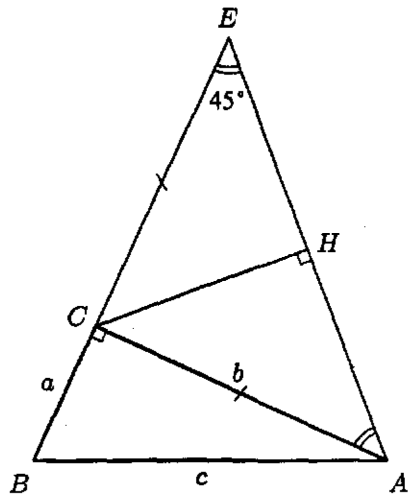


Рис. 37

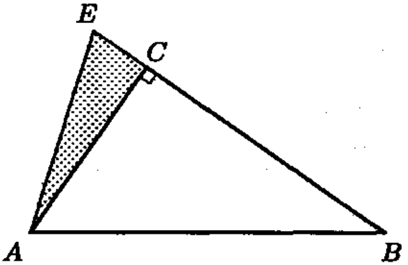


Рис. 38

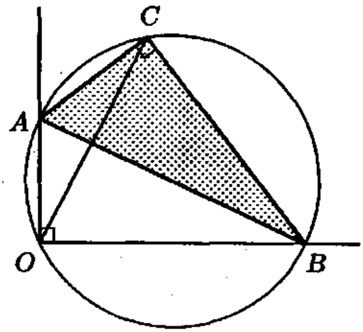


Рис. 39

б) **Указание.** Пусть даны гипотенуза $AB = c$ и разность катетов BC и AC, т.е. $a - b$. На отрезке BC отложите отрезок $EC = AC$. Постройте треугольник AEB.

в) **Указание.** Используйте пункт а) и задачу 2.17

г) **Решение.** Пусть в прямоугольном треугольнике ABC известны катет $AC = b$ и разность $AB - BC = c - a$. На продолжении BC за вершину C отложим точку E так, чтобы $BE = AB$ (рис. 38). Тогда в прямоугольном треугольнике AEC катеты $AC = b$ и $CE = c - a$ известны. Построив треугольник AEC легко построить и треугольник ABC.

д) **Указание.** Продлив неизвестный катет BC за вершину B, отложите точку E так, чтобы отрезок BE равнялся гипотенузе AB. Постройте прямоугольный треугольник ACE.

2.27. Ответ. Отрезок EF на прямой, составляющей с лучом OA угол, равный углу ABC, причем $OF = AB$, OE равняется минимальному из катетов.

Указание. $\angle C + \angle O = 180°$, поэтому вокруг четырехугольника $AOBC$ можно описать окружность (рис. 39). Отсюда

$$\angle ABC = \angle AOC$$

и, значит, угол AOC неизменен.

2.28. Решение. Указание.

а) **Решение.** Достаточно доказать, что $a + b < h + c$, где a и b — катеты, c — гипотенуза, а h — высота, опущенная из вершины прямого угла. Возводя обе части неравенства в квадрат, получим:

$$a^2 + 2ab + b^2 < h^2 + 2hc + c^2,$$

т. е.

$$2ab < h^2 + 2hc,$$

но

$$2ab = 2hc = 4S.$$

Таким образом, получили верное неравенство, а значит было верно и исходное неравенство.

б) **Указание.** Неравенство $\dfrac{c+h}{a+b} > 1$ вытекает из а). Для доказательства второго неравенства выразите, например, c, a и h через b и угол α. Равенство достигается при $a = b$.

2.29. Первое решение. Достаточно показать, что $a + b < 1{,}5c$. В самом деле, очевидно,

$$2ab \leqslant a^2 + b^2,$$

откуда

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2) = 2c^2,$$

т. е.

$$a + b \leqslant \sqrt{2} \cdot c < 1{,}5c.$$

Второе решение. В силу задачи 2.28

$$a + b < m_c + c = \frac{1}{2}c + c = \frac{3}{2}c,$$

где m_c — медиана, проведенная к гипотенузе.

Третье решение. а) Пусть катет a противоположный углу A. Тогда

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A,$$

откуда:

$$a + b = c(\sin A + \cos A) = c\sqrt{2}\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} \cdot c,$$

причем равенство достигается в точности, когда

$$\angle A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$\angle A = \frac{\pi}{4}.$$

б) $S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}r(a + b + c)$, откуда

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a + b + c}.$$

В силу пункта а) $c < a + b < 1{,}5c$, т. е.

$$2c < a + b + c < 2{,}5c, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2c} > \frac{1}{a + b + c} > \frac{2}{5c},$$

откуда

$$\frac{1}{2} > \frac{c}{a + b + c} > \frac{2}{5},$$

что и требовалось.

2.30. Указание. Сначала постройте треугольник AOM, где O — точка пересечения медиан, а M — середина гипотенузы.

2.31. Ответ. В случае, когда $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ$.

Первое решение. Рассмотрите площадь прямоугольника $AKBO$, где точка K симметрична точке O относительно середины AB.

Второе решение. Рассмотрите эквивалентную задачу: из всех прямоугольных треугольников AOB о заданной гипотенузой AB найти треугольник наибольшей площади.

2.32. Решение. Пусть точка E — середина катета BC длины a, а точка O — середина гипотенузы AB (рис. 40). Обозначим также

$$AC = b, \quad AF = x, \quad BF = y,$$

где

$$EF \perp AB.$$

Кроме того, очевидно,

$$OF = AF - AO = x - \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2}.$$

OE — средняя линия, т. е.

$$OE = \frac{b}{2}.$$

Далее, треугольник OEF подобен треугольнику ABC, откуда:

$$\frac{OE}{AB} = \frac{OF}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{b}{2}}{x+y} = \frac{x-y}{2b},$$

т. е.

$$x^2 - y^2 = b^2,$$

что и требовалось.

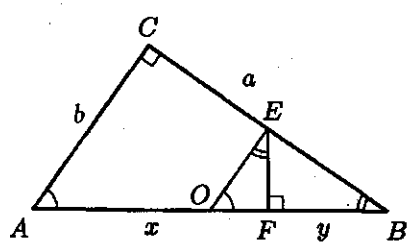


Рис. 40

2.33. Указание. Покажите, что точки E, F, C и B лежат на одной окружности.

2.34. Указание. Из вершин угла в $75°$ проведите прямую под углом $15°$ к гипотенузе до пересечения с катетом. Примените теорему Пифагора к образовавшемуся малому прямоугольному треугольнику.

2.35. Решение. 1. Пусть центрами окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC, AHC и BHC (рис. 41), являются точки O, O_1 и O_2. $\angle ACH = \angle B$, откуда

$$\angle ACO_1 = \angle ABO.$$

Таким образом, треугольники ACO_1 и ABO подобны по двум углам.

Аналогично подобны треугольники BCO_2 и ABO. Радиусы r_1, r_2 и r окружностей являются высотами соответственно в треугольниках ACO_1, BCO_2 и ABO, поэтому из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{r_1}{r} = \frac{AC}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{r} = \frac{BC}{AB},$$

т. е.

$$\frac{r_1^2}{r^2} = \frac{AC^2}{AB^2}, \quad \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 1, \quad \text{или} \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

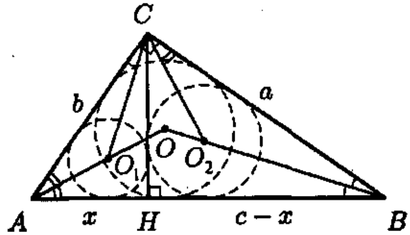


Рис. 41

2. Обозначим высоту CH (рис. 41) через h, $AH = x$, $BH = c - x$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

Применим ответ задачи 2.2 а) к прямоугольным треугольникам ACH, BCH и ABC соответственно:

$$r_1 = \frac{1}{2}(x + h - b), \quad r_2 = \frac{1}{2}(c - x + h - a), \quad r = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

откуда

$$r_1 + r_2 + r = h,$$

что и требовалось.

2.36. Ответ. 45°.

Указание. Выразите углы CEF и CFE через углы A и B треугольника ABC.

2.37. Ответ. 30°, 60°, 90°.

Указание. Используя равенство касательных, проведенных к окружности из одной точки, покажите, что треугольник ACM равносторонний.

2.38. Решение. 1. Используя результат задачи 2.2 а), имеем

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c) < \frac{1}{2}(a + c - c) = \frac{1}{2}a.$$

2. В силу результата, доказанного в решении задачи 2.29 а),

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}$$

(равенство лишь в случае равнобедренного треугольника), откуда:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c) \leqslant \frac{1}{2}(c\sqrt{2} - c) = \frac{c(\sqrt{2} - 1)}{2} < \frac{c}{4}$$

причем равенство достигается лишь когда острые углы треугольника равны 45°.

2.39. Ответ. а) $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$; б) 45°, 45°, 90°.

Решение. а) Пусть катеты a и b противоположны соответственно углам A и B. В силу задачи 2.17:

$$a+b=2(R+r)=2\left(R+\frac{2}{5}R\right)=\frac{14}{5}R.$$

С другой стороны

$$a^2+b^2=c^2=4R^2,$$

откуда

$$a^2+\left(\frac{14}{5}R-a\right)^2=4R^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$a=\frac{3}{5}c,\quad \text{т. е.}\quad \sin A=\frac{3}{5}.$$

Аналогично $\sin B=\frac{4}{5}$.

Таким образом, $\angle A=\arcsin\frac{3}{5}$, $\angle B=\arcsin\frac{4}{5}$.

б) В силу задачи 2.38 п.2) имеем

$$r\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}c,$$

откуда

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{c}{2}}{r}\geqslant\frac{\frac{c}{2}}{(\sqrt{2}-1)\frac{c}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

Так как $r=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot c$ в точности когда треугольник равнобедренный, то и наименьшее возможное значение отношения R/r, равное $\sqrt{2}+1$, достигается лишь в этом случае.

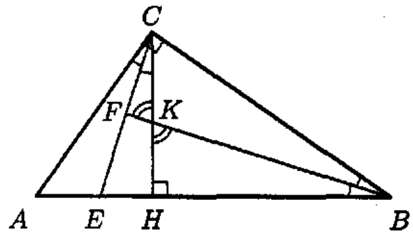


Рис. 42

2.40. Решение. В треугольнике CBE (рис. 42) проведем биссектрису BF. Пусть отрезки BF и CH пересекаются в точке K. Тогда в треугольниках FCK и KBH два угла попарно равны: $\angle FCK = \angle KBH$, $\angle FKC = \angle BKH$, откуда

$$\angle CFK = \angle BHK = 90^\circ.$$

Итак, биссектриса BF в треугольнике CBE является и высотой, а значит этот треугольник равнобедренный, т. е. $BE = BC$.

2.41. Решение. Пусть катеты треугольника — a и b, гипотенуза — c.

Сумма S площадей «луночек» получается вычитанием площади большего полукруга из суммы площадей двух меньших полукругов и площади треугольника. Таким образом,

$$S = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{1}{2}ab - \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi}{8}(a^2 - b^2 - c^2) + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab,$$

что и требовалось.

2.42. Решение. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза данного прямоугольного треугольника. Очевидно, любое целое число в квадрате делится на 3 или представимо в виде $3n+1$. Поэтому, если a и b не делятся на 3, то $c^2 = a^2+b^2 = (3n+1)+(3k+1) = 3(k+n)+2$ — противоречие с вышесказанным. Таким образом, ab делится на 3.

Покажем теперь, что ab делится на 4. Если a и b — четные, то утверждение очевидно. Так как любое нечетное число в квадрате имеет вид $4n+1$, то a и b не могут быть нечетными одновременно (в этом случае $c^2 = a^2 + b^2 = (4k+1) + (4l+1) = 4(k+l) + 2$ —

противоречие). Пусть одно из чисел, например b, нечетное, т. е. имеет вид $4n \pm 1$, а другое — соответственно a — четное. Тогда c тоже нечетное и, стало быть, $c = 4m \pm 1$, откуда одно из чисел $c-b$ и $c+b$ делится на 4, а другое — на 2. Таким образом, $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ делится на 8, т. е. a делится по крайней мере на 4, что и требовалось.

Окончательно, ab делится на 12.

2.44. Решение. 1) Пусть h_1, h_2 и h — высоты треугольников, опущенные соответственно на катеты a, b и гипотенузу c. Треугольники подобны, поэтому

$$\frac{h_1}{h} = \frac{a}{c}, \quad \frac{h_2}{h} = \frac{b}{c}.$$

В силу теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, т. е., используя полученные равенства

$$a \cdot \frac{ch_1}{h} + b \cdot \frac{ch_2}{h} = c^2.$$

Отсюда, после очевидных преобразований $ah_1 + bh_2 = ch$, или

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch, \quad \text{т. е.} \quad S_1 + S_a = S,$$

где S_1, S_2 и S — соответствующие площади подобных треугольников, что и требовалось.

Указание. 2) Пусть c_1, h_1 и c_2, h_2 — гипотенузы и высоты к ним в соответствующих треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. По условию

$$\frac{\frac{1}{2}c_1h_1}{\frac{1}{2}c_2h_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2},$$

откуда

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \text{т. е.} \quad h_2 = \frac{c_2h_1}{c_1}.$$

Но точно так же находится высота h_2 прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой c_2, подобного треугольнику $A_1B_1C_1$.

Покажите далее, что гипотенузой и высотой к ней, опущенной из вершины прямого угла, прямоугольный треугольник определяется однозначно.

2.45. Решение. Так как $n = c - m$, то

$$a^2m^2 + b^2n^2 = a^2m^2 + b^2(c-m)^2 = a^2m^2 + b^2c^2 - 2b^2cm + b^2m^2 =$$
$$= m^2(a^2+b^2) + b^2c^2 - 2b^2cm = m^2c^2 + b^2c^2 - 2b^2cm =$$
$$= c^2\left(m^2 + b^2 - 2mb\cdot\frac{b}{c}\right).$$

Но, очевидно, $\dfrac{b}{c} = \cos A$, откуда в силу теоремы косинусов, примененной к треугольнику ACX,

$$m^2 + b^2 - 2mb\cos A = d^a,$$

что и доказывает нужное равенство.

2.46. Решение. 1) $\angle AKC$ (рис. 43) — внешний к углу BKC треугольника BKC, откуда

$$\angle AKC = \angle B + \angle BCK.$$

Но $\angle BCK = \angle HCK$, а $\angle ACH = \angle B$ и, значит, $\angle AKC = \angle ACH + \angle HCK = \angle ACK$. т. е. треугольник ACK равнобедренный и $AC = AK$. Аналогично доказывается, что $BM = BC$.

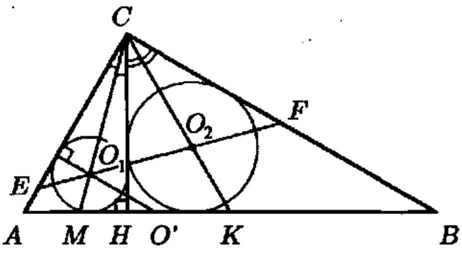


Рис. 43

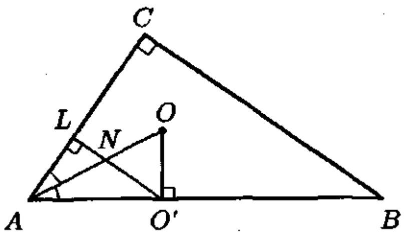


Рис. 44

2) Опустим перпендикуляр $O'L$ (рис. 44) на катет AC. Пусть N — точка пересечения $O'L$ с отрезком AO, где O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямоугольные треугольники ALN и AOO' подобны, в силу чего

$$\frac{LN}{OO'} = \frac{LA}{AO'}.$$

Рассматривая прямоугольный треугольник ALO', заметим что

$$\frac{LA}{AO'} = \cos A.$$

Кроме того, $OO' = r$ — радиус вписанной окружности, откуда

$$LN = r \cdot \cos A.$$

Но из подобия прямоугольных треугольников ACH и ABC имеем

$$\frac{r_1}{r} = \frac{AH}{AC} = \cos A,$$

где r_1 — радиус вписанной в треугольник ACH окружности, т. е.

$$r_1 = r \cdot \cos A.$$

Таким образом, $LN = r_1$ и, следовательно, точка N, лежащая на биссектрисе угла A, совпадает с центром O_1, вписанной в треугольник ACH окружности. А это и значит, что прямая $O'O_1$, параллельна прямой BC. Аналогично доказывается параллельность прямых AB и $O'O_2$.

3) На катетах AC и AB отметим соответственно точки E и F так, чтобы $CE = CF = CH$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что центры вписанных в треугольники ACH и BCH окружностей лежат на EF. Пусть O_1 — точка пересечения биссектрис угла ACH с отрезком EF. Тогда треугольники ECO_1 и HCO_1 равны, откуда

$$\angle O_1HC = \angle O_1EC = 45^\circ.$$

Так как

$$\angle AHC = 90^\circ,$$

то значит

$$\angle O_1HC = \angle AHO_1 = 45^\circ,$$

т. е. HO_1 — биссектриса угла AHC. А это и значит, что O_1 — точка пересечения биссектрис треугольника AHC, т. е. центр вписанной в него окружности. Аналогично доказывается, что центр второй окружности лежит на BF.

4) Легко следует из пункта 3).

5) В силу 3) точки E, H и F лежат на окружности с центром в точке C, откуда

$$\angle HEF = \frac{1}{2}\angle HCF = \angle HCO_2.$$

Итак, углы HEO_2 и HCO_2, опирающиеся на отрезок HO_2, равны, а это и значит, что все четыре точки H, O_2, E и C лежат на одной окружности.

6) $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, т. е. $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$.

7) Пусть A_1 и B_1 — соответственно точки касания окружностей радиусов r_1 и r_2 гипотенузы AB (рис. 45). Тогда очевидно,

$$A_1B_1 = r_1 + r_2.$$

Опустим перпендикуляр O_1N на O_2B_1. Тогда

$$O_1N = r_1 + r_2, \quad O_2N = r_2 - r_1$$

и по теореме Пифагора

$$O_1O_2 = \sqrt{(O_1N)^2 + (O_2N)^2} = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)}.$$

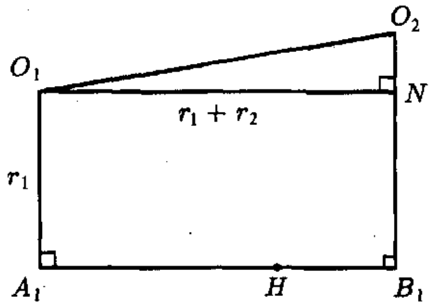


Рис. 45

В силу задачи 2.35 $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, откуда

$$O_1O_2 = r\sqrt{2}.$$

2.47. Указание. Используйте задачи 2.35 и 2.46

2.48. Решение. Стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ являются сходственными в указанных в условии треугольниках, откуда

$$\frac{a}{l_a} = \frac{b}{l_b} = \frac{c}{l_c}.$$

Обозначим эти отношения через k, откуда

$$a = kl_a, \quad b = kl_b, \quad c = kl_c.$$

Теперь в силу теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, т. е.

$$l_a^2 + l_b^2 = l_c^2.$$

2.49. Решение. Опустим из точки O (рис. 46) соответствующие высоты

$$OA_1 = h_1, \quad OC_1 = h_2 \quad \text{и} \quad OB_1 = h_3$$

на стороны прямоугольного треугольника ABC. Положим также $AC = b$, $BC = a$.

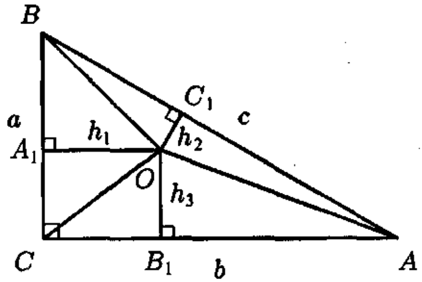


Рис. 46

Тогда из рассмотрения прямоугольных треугольников OB_1A и OA_1B получим соответственно

$$(b-h_1)^2+h_3^2=OA^2 \quad \text{и} \quad (a-h_3)^2+h_1^2=OB^2,$$

откуда

$$OA^2+OB^2=(a-h_3)^2+(b-h_1)^2+h_1^2+h_3^2=$$
$$=a^2+b^2-2ah_3-2bh_1+2(h_1^2+h_3^2).$$

Но в силу условия

$$\frac{1}{2}h_1a=\frac{1}{2}h_3b=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}ab,$$

т. е.

$$b=3h_1, \quad a=3h_3.$$

Таким образом,

$$OA^2+OB^2=9h_3^2+9h_1^2-6h_3^2-6h_1^2+2(h_1^2+h_3^2)=5(h_1^2+h_3^2).$$

Но $h_1^2+h_3^2=OC^2$, откуда окончательно

$$OA^2+OB^2=5OC^2.$$

2.50. Указание. Учитывая, что $\angle ACO'=\angle BCO'=45^\circ$, постройте сначала прямые AC и BC.

Глава 3

Вписанные, описанные и вневписанные окружности

§ 1. Задачи

3.1 (Устно). Докажите, что любое из нижеприведенных условий эквивалентно равносторонности данного треугольника:

а) центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности;

б) точки касания вписанной окружности делят соответствующие стороны пополам.

3.2*

а) (Формула Эйлера). Докажите, что для любого треугольника расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей находится по формуле:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

б) Докажите, что если расстояние d между центрами двух данных окружностей радиусов R и r находится по формуле Эйлера (см. пункт а)), то найдется бесконечно много различных треугольников, для которых одна из этих окружностей является описанной, а другая — вписанной.

3.3 Докажите, что
$$r \leqslant \frac{1}{2}R,$$
причем равенство имеет место лишь для равностороннего треугольника.

3.4 (Теорема Мансиона). Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, лежат на описанной окружности.

3.5 Докажите, что:

а) треугольник $O_1O_2O_3$, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей данного треугольника ABC, остроугольный;

б) вершины A, B и C треугольника ABC являются основаниями высот треугольника $O_1O_2O_3$ (O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей).

3.6 Постройте треугольник ABC по трем точкам O_1, O_2 и O_3, являющимся соответственно:

а) центрами вписанной, описанной и вневписанной окружностей;

б) центрами описанной и двух вневписанных окружностей;

в) центрами вневписанных окружностей;

г) центрами вписанной и двух вневписанных окружностей.

3.7 Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности, лежащие соответственно напротив вершин A, B и C.

Докажите, что:

а) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 делят углы треугольника ABC на острые углы;

б)* треугольник ABC правильный, если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны между собой.

3.8 Докажите, что прямая соединяющая центры вписанной в данный треугольник ABC окружности и описанной около него окружности, проходит через центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, в том и только в том случае, когда $AB = AC$.

3.9 Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей соответственно сторон $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ треугольника ABC. Докажите, что:

а) $AB_1 = p - c$; б) $AB_1 + AC_1 = a$.

3.10 (Устно). Верно ли, что при неограниченном уменьшении всех сторон треугольника будет неограниченно уменьшаться и радиус:

а) описанной окружности;

б) вписанной окружности?

3.11 Докажите, что центр описанной около треугольника окружности, лежит вне этого треугольника в том и только в том случае, когда треугольник тупоугольный.

3.12 Докажите, что центры вневписанных для данного треугольника окружностей лежат вне описанной окружности.

3.13 Докажите, что отношение произвольной стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

3.14 (Устно). Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения продолжений медиан треугольника ABC с описанной окружностью. Верно ли, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC?

3.15 Пусть a, b и c — стороны произвольного треугольника, h_a, h_b и h_c — соответствующие им высоты, R — радиус описанной окружности, S — площадь треугольника. Докажите, что:

а) $R = \dfrac{abc}{4S}$;

б) $ab = 2h_cR$;

в) $h_a + h_b + h_c = \dfrac{ab+bc+ca}{2R}$;

г) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

3.16 Используя обозначения задачи 3.15, докажите, что для произвольного треугольника ABC:

а) $S = (p-a)r_a$, где p — полупериметр;

б) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$, где r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей;

в) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$;

г) $\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a}$;

д) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a}$;

е) $S = \dfrac{r_ar_br_c}{p}$;

ж)* $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

3.17 Постройте треугольник ABC по трем точкам P, Q, R, являющимся соответственно точками пересечения с описанной окружностью продолжений:

а) медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из одной вершины треугольника ABC;

б) биссектрис треугольника ABC;

в) высот треугольника ABC.

3.18 Постройте треугольник ABC, зная: (см. обозначения из задачи 3.15):

а) R, r, $\angle A$;

б) a, R, h_b;

в) $\angle A$, r, b;

г) m_a, h_a, R (m_a — медиана к стороне a);
д) $\angle A$, l_a, r (l_a — биссектриса из вершины A).

3.19 Найдите углы треугольника, если центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из его сторон.

3.20 Используя обозначения из условия задачи 3.16, докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ равны, если у них соответственно равны:

а) радиусы вневписанных окружностей; т. е. $r_a = r_a'$, $r_b = r_b'$, $r_c = r_c'$;
б) $r = r'$, $r_a = r_a'$, $r_b = r_b'$;
в) $R = R'$, $r_a = r_a'$, $r_b = r_b'$;
г) $R = R'$, $r = r'$, $r_a = r_a'$.

3.21 Докажите, что радиусы вневписанных для данного треугольника окружностей совпадают тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний, т. е.

$$r_a = r_b = r_c \Leftrightarrow a = b = c.$$

3.22 Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей данного треугольника, расположенные в порядке неубывания ($r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$), r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{3}r_a \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}r_c,$$

причем, оба равенства достигаются одновременно лишь в случае равностороннего треугольника.

3.23

а) Докажите, что для любого треугольника

$$r_a + r_b + r_c \geqslant h_a + h_b + h_c \geqslant 9r,$$

причем равенства достигаются лишь для равностороннего треугольника;

б) Существует ли такое $\alpha > 0$, что для любого треугольника

$$h_a + h_b + h_c \leqslant \alpha \cdot r?$$

3.24 Докажите, что для произвольного треугольника:

а) $\dfrac{1}{2r} < \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} < \dfrac{1}{r}$; б) $\dfrac{1}{r_c} < \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b}$.

3.25 Докажите, что радиус описанного около треугольника круга, проведенный к одной из его вершин, и высота, опущенная из той же вершины, образуют равные углы с боковыми сторонами.

3.26 (Теорема Лемуана). Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что произведение расстояния от M до любой вершины треугольника (отличной от M) на расстояние от M до стороны, противоположной этой вершине, есть величина постоянная.

3.27 (Теорема Карно). Из центра O описанной около треугольника ABC окружности опущены перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 соответственно на стороны BC, AC и AB. Докажите, что:

а) если треугольник ABC остроугольный, то
$OA_1 = R\cos A$, $OB_1 = R\cos B$,
$OC_1 = R\cos C$ и $OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$
(R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей);

б) если угол C тупой, то
$OA_1 = R\cos A$, $OB_1 = R\cos B$,
$OC_1 = -R\cos C$ и $OA_1 + OB_1 - OC_1 = R + r$.

3.28 Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, AC и BC соответственно в точках E, F и G. Докажите, что

$$AE = AF = p - a = R(\sin B + \sin C - \sin A),$$

$$BE = BG = p - b = R(\sin A + \sin C - \sin B),$$

$$CF = CG = p - c = R(\sin A + \sin B - \sin C).$$

3.29* Докажите, что для любого треугольника расстояние d_a между центрами описанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны a, находится по формуле

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a,$$

где R — радиус описанной, r_a — радиус вневписанной окружности.

3.30 Постройте треугольник ABC по трем точкам, симметричным центру описанной около этого треугольника окружности относительно его сторон.

3.31 Пусть P, Q, R — точки пересечения биссектрис треугольника ABC со вписанной окружностью, ближайшие к соответствующим вершинам этого треугольника. Построить треугольник ABC, зная точки P, Q, R.

3.32 (Устно). Каждая из сторон треугольника ABC больше любой стороны треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть R, R_1 и r, r_1 — соответственно радиусы описанных и вписанных в эти треугольники окружностей. Всегда ли верно, что:

а) $R > R_1$; б) $r > r_1$?

3.33 Используя стандартные обозначения (см. задачу 3.15), докажите следующие соотношения для радиуса вписанной в треугольник ABC окружности:

1) $$r = \frac{a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}};$$

2) $$r = \frac{h_a \sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{h_b \sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{h_c \sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}};$$

3) $$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

4) $r = p \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$;

5) $r^2 = S \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

3.34 Докажите, что прямая, соединяющая основания двух высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B, перпендикулярна прямой, соединяющей вершину C с центром описанной окружности.

3.35 В треугольнике ABC $\angle A > \angle B > \angle C$.

1) (Устно). Какая из сторон треугольника ABC находится ближе к центру описанной окружности?
2) Какая из вершин треугольника ABC находится ближе к центру вписанной окружности?

3.36 Докажите, что если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, r — ее радиус, а R — радиус описанной окружности, то:

1) $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$; 2) $OA\cdot OB\cdot OC = 4Rr^2$.

3.37 Найдите множество точек на плоскости, являющихся центрами

а) вписанных,

б) вневписанных окружностей, касающихся стороны AB, для всевозможных треугольников ABC с заданным основанием AB и углом C.

3.38 Постройте треугольник ABC по стороне AB, углу C и радиусу

а) вписанной окружности;

б) вневписанной окружности, касающейся AB.

3.39 Докажите, что сумма квадратов расстояний от центра O описанной около данного треугольника окружности до центров вписанной и вневписанных окружностей равна $12R^2$ (R — радиус описанной окружности).

3.40 При каких условиях на числа a, b и R существует треугольник со сторонами a, b и радиусом описанной окружности R?

3.41 Выразить через стороны a, b и c треугольника ABC стороны треугольника, с вершинами в точках касания вписанной окружности.

3.42 Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Докажите, что отрезок, соединяющий середину стороны AB с серединой отрезка CH, равен радиусу описанного около треугольника ABC круга.

3.43 Пусть m_a, m_b и m_c — соответствующие медианы треугольника ABC, R — радиус описанной окружности. Докажите, что

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leqslant \frac{27R^2}{4},$$

причем равенство возможно лишь в случае равностороннего треугольника.

3.44 Пусть a, b и c — стороны треугольника, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что

$$6\sqrt{3}r \leqslant a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}R,$$

причем равенства достигаются лишь в случае равностороннего треугольника.

3.45 Из всех треугольников ABC с заданными основанием BC и углом A найдите треугольник с наибольшим радиусом вписанной окружности.

3.46 Докажите, что радиусы

а) вписанных;

б) описанных;

в) соответствующих вневписанных окружностей

для подобных треугольников пропорциональны сходственным сторонам этих треугольников.

3.47 На основании AB треугольника ABC найдите такую точку M, чтобы окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM, касались отрезка CM в одной и той же точке.

3.48 Всегда ли из радиусов r_a, r_b и r_c вневписанных для данного треугольника окружностей можно составить треугольник?

3.49 Из точки A вне окружности проведены две касательные AB и AC к ней. Докажите, что на этой окружности расположен центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

3.50 Докажите, что:

1) точки, симметричные ортоцентру (точка пересечения высот) треугольника относительно его сторон, лежат на описанной окружности;

2) окружность, проходящая через ортоцентр треугольника и любые две его вершины (в случае прямоугольного треугольника — две другие вершины) равна описанной около этого треугольника окружности.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя обозначения из условия задач 3.15 и 3.16, докажите справедливость следующих равенств для произвольного треугольника ABC:

а) $4Rrp = abc$;

б) $p^2r = r_ar_br_c$;

в) $r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = p^2$;

г) $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$;

д) $S = \sqrt{\dfrac{1}{2} R h_a h_b h_c}$;

е*) $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2$;

ж) $\left(\dfrac{a}{r_a} + \dfrac{b}{r_b} + \dfrac{c}{r_c}\right) \cdot \dfrac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c} = 4$.

2. Пусть O, O_1 и O_2 соответственно центры описанной и двух вневписанных окружностей для данного треугольника. Докажите, что если $OO_1 = OO_2$, то этот треугольник равнобедренный.

3. Пусть d_a, d_b и d_c — расстояния между центром описанной около треугольника окружности радиуса R и центрами вневписанных окружностей, касающихся соответственно сторон a, b и c, d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. Докажите, что

$$\frac{1}{R^2 - d^2} = \frac{1}{d_a^2 - R^2} + \frac{1}{d_b^2 - R^2} + \frac{1}{d_c^2 - R^2}.$$

4. Докажите, что для произвольного треугольника ABC верны следующие соотношения (обозначения см. в задачах 3.15 и 3.16):

а) $r_a = \dfrac{a \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{A}{2}} = \dfrac{b \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{C}{2}}{\sin \dfrac{B}{2}} = \dfrac{c \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2}}{\sin \dfrac{C}{2}}$;

б) $r_a = \dfrac{h_a \sin \dfrac{A}{2}}{2 \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}$;

в) $r_a = p\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = (p-b)\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = (p-c)\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$;

г) $r_a^2 = S\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$;

д) $r_a = 4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

5. Найдите множество точек на плоскости, являющихся центрами

а) вписанных;

б) описанных;

в) вневписанных

окружностей, касающихся стороны AB для всевозможных треугольников ABC с заданными основанием AB и углом A.

6. Постройте радиус вписанной в треугольник окружности, зная площадь этого треугольника и его периметр.

7. Определите углы треугольника с вершинами в точках касания вписанной в треугольник ABC окружности, зная углы A, B и C.

8. Пусть m_a, m_b и m_c — медианы треугольника, вписанного в окружность радиуса R. Докажите, что:

1) $m_a + m_b + m_c \leqslant \dfrac{9R}{2}$;

2) $m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$, если треугольник не является тупоугольным.

9. При каких условиях на числа a, r и φ можно построить треугольник, одна из сторон которого равна a, один из углов равен φ, а радиус вписанной окружности равен r?

10. Пусть R и r соответственно радиусы описанной и вписанной в данный треугольник окружностей, h — его наибольшая высота. Докажите, что если треугольник не является тупоугольным, то $R + r \leqslant h$.

11. Продолжение медианы, проведенной из вершины A треугольника ABC, пересекает описанную окружность в точке M, причем $CA = CM = 1$. Найдите CB.

12*. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Докажите, что

$$a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC} = \vec{0}.$$

13. Используя обозначения из условий задач 3.15 и 3.16, докажите что:

$$1)\ r = r_a \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \qquad 2)\ r \cdot r_a \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

14. Найдите, радиус вписанной в остроугольный треугольник окружности, если радиус описанной равен 14,5 см, а две стороны треугольника соответственно равны 20 см и 23,2 см.

15. Используя обозначения из условий задач 3.15 и 3.16, докажите, что $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

§ 3. Ответы, указания, решения

3.2*. Решение. а) Пусть O_1 — центр вписанной в треугольник ABC окружности, O — центр описанной окружности (рис. 47). Продлим биссектрису CC_1 до пересечения с описанной окружностью в точке E.

Проведем также диаметр EF и хорду BE. Если теперь опустить перпендикуляр O_1H на сторону AC треугольника, то треугольники O_1HC и BEF будут подобны по двум углам ($\angle O_1HC = \angle FBE = 90°$, $\angle ACE = \angle BCE = \angle BFE$), откуда

$$\frac{BE}{FE} = \frac{O_1H}{O_1C}.$$

Но

$$O_1H = r, \quad FE = 2R,$$

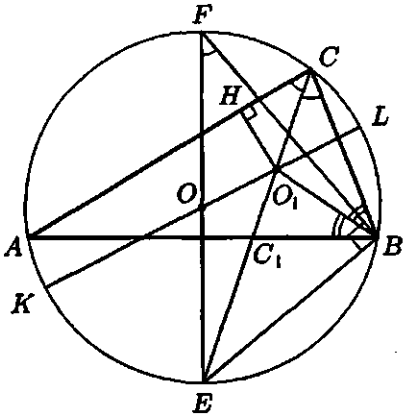


Рис. 47

т. е.

$$FE \cdot O_1H = 2Rr = BE \cdot O_1C.$$

Треугольник BEO_1 равнобедренный, так как $\angle BO_1E$, как внешний к треугольнику BO_1C, и $\angle O_1BE$, как сумма $\angle O_1BA$ и $\angle ABE = \angle ACE$, равны

$$\frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle CBA.$$

Таким образом,

$$BE = O_1E$$

и, значит,

$$2Rr = BE \cdot O_1C = O_1E \cdot O_1C.$$

Проведя через точки O и O_1 диаметр KL, и, используя свойство пересекающихся хорд окружности, получим:

$$2Rr = O_1E \cdot O_1C = O_1K \cdot O_1L = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2,$$

откуда

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Указание. б) Пусть $\angle A$ — максимальный в треугольнике ABC, а R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. В силу теоремы синусов $a = \sin A \cdot 2R$. Покажите теперь, что этими данными однозначно определяется положение центра вписанной окружности (при фиксированной стороне $BC = a$), а отсюда и всего треугольника.

3.3. Решение. В силу задачи 3.2 $d^2 = R^2 - 2Rr$, т. е.

$$R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \geqslant O.$$

Отсюда $R \geqslant 2r$, т. е.

$$r \leqslant \frac{1}{2}R.$$

Очевидно, что $r = \frac{1}{2}R$ в том и только в том случае, когда $d = 0$, т. е. центры вписанной и описанной окружностей совпадают, а это в силу задачи 3.1 а) равносильно равносторонности данного треугольника.

3.4. Решение. Достаточно доказать утверждение задачи для одной из трех середин. Пусть O_1 и O_2 — центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (рис. 48), а точка M — середина отрезка O_1O_2. Рассмотрим сначала случай $AC \neq BC$.

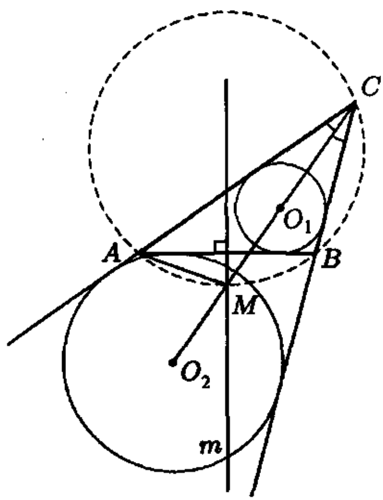


Рис. 48

Так как AO_1 и AO_2 — биссектрисы двух смежных углов при вершине A, то

$$\angle O_1AO_2 = 90^\circ$$

и, стало быть, $AM = \frac{1}{2}O_1O_2$. Аналогично

$$BM = \frac{1}{2}O_1O_2.$$

Итак, $AM = BM$ и, значит, точка M лежит на серединном перпендикуляре m к стороне AB, отличном по условию от биссектрисы CM угла C. Таким образом, точка M является единственной точкой пересечения прямых m и CM. Но обе эти прямые, деля дугу AB описанной около треугольника ABC окружности пополам, проходят и через ее середину M_1, откуда эти точки совпадают, т. е. точка M принадлежит описанной окружности.

Теперь пусть $AC = BC$ (рис. 49). Вписанная и вневписанная окружности в этом случае касаются стороны AB треугольника в некоторой точке D, откуда в силу свойств касательных $BE = BD = BF$, где E и F — точки касания обеих окружностей

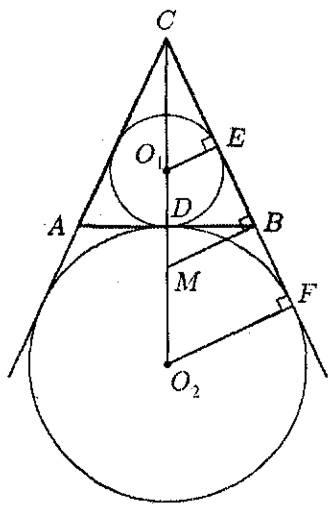


Рис. 49

прямой BC. Таким образом, отрезок MB — средняя линия прямоугольной трапеции O_1EFO_2, т. е.

$$\angle CBM = 90^\circ.$$

Аналогично $\angle CAM = 90^\circ$, откуда $\angle C + \angle AMB = 180^\circ$ и значит точки A, C, B и M лежат на одной окружности.

3.5. Решение. Центры O_1 и O_2 вневписанных окружностей (рис. 50) лежат на биссектрисе двух вертикальных углов, смежных с углом B треугольника ABC. Поэтому точка B лежит на стороне O_1O_2 треугольника $O_1O_2O_3$. Аналогично точка A лежит на стороне O_1O_3, а точка C — на стороне O_2O_3. Так как отрезок BO_3 является биссектрисой угла B, то угол O_2BO_3, образованный биссектрисами смежных углов, равен 90° (что доказывает пункт б)). Отсюда углы O_1 и O_2 в треугольнике $O_1O_2O_3$ — острые. Аналогично показывается, что угол O_3 тоже острый.

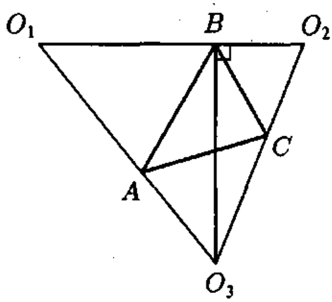


Рис. 50

3.6. Решение. а) Середина M отрезка O_1O_3 в силу задачи 3.4 принадлежит описанной окружности (рис. 51). Таким образом, окружность радиуса O_2M с центром в точке O_2 — описанная около треугольника ABC. Второй точкой пересечения прямой O_1O_3 с этой окружностью будет вершина C искомого треугольника. Далее, углы O_1AO_3 и O_1BO_3, образованные биссектрисами смежных углов, прямые. Отсюда, вершины A и B треугольника ABC получаются

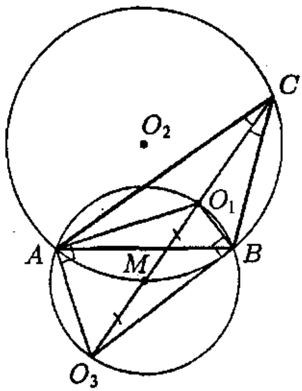


Рис. 51

пересечением описанной окружности с окружностью, построенной на отрезке O_1O_3, как на диаметре.

б) Вершины A, B и C треугольника ABC являются основаниями высот для треугольника $O_2O_3O_4$, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей. Таким образом, окружность с центром O_1, описанная около треугольника ABC, является окружностью 9-ти точек (см. задачу 4.53) для треугольника $O_2O_3O_4$ и, стало быть, проходит через середины сторон O_2O_3, O_2O_4 и O_3O_4. Отсюда вытекает метод построения. Пусть O_2 и O_3 — заданные центры вневписанных окружностей, касающихся соответственно сторон BC и AB треугольника ABC (рис. 52), O_1 — центр описанной окружности. Найдя точку M, середину отрезка O_2O_3, проведем окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1M. Вторая точка пересечения этой окружности с отрезком O_2O_3 определяет вершину B

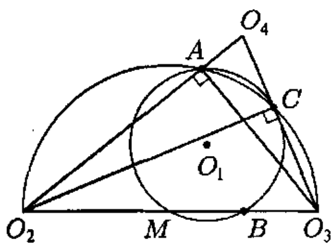


Рис. 52

треугольника ABC. Так как в силу вышесказанного углы O_2CO_3 и O_2AO_3 — прямые, то для нахождения вершин A и C треугольника ABC осталось найти точки пересечения окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, построенной на отрезке O_2O_3 как на диаметре.

в) **Указание.** Проведите высоты треугольника $O_1O_2O_3$ и воспользуйтесь решением задачи 3.5.

г) **Указание.** Опустив высоту из центра O_1 вписанной окружности на отрезок O_2O_3, найдем одну из вершин (например C) треугольника ABC. Далее, используя задачу 3.4, постройте описанную окружность.

3.7. Решение. а) Достаточно показать, что $\angle BAA_1$ острый (рис. 53). Так как

$$BC_1 = BA_1,$$

то

$$AB > A_1B.$$

Напротив большей стороны лежит и больший угол, откуда

$$\angle BA_1A > \angle BAA_1.$$

Так как в треугольнике не может быть больше одного тупового угла, то угол BAA_1 острый.

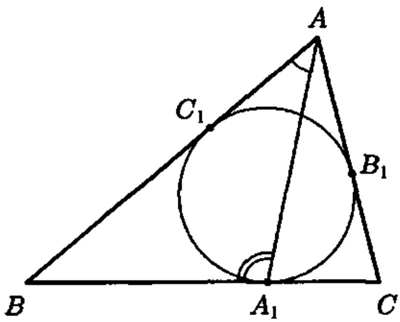


Рис. 53

б) Рассмотрим треугольники ABB_1 и ACC_1 (рис. 54). По условию $BB_1 = CC_1$, кроме того, $AB_1 = AC_1$.

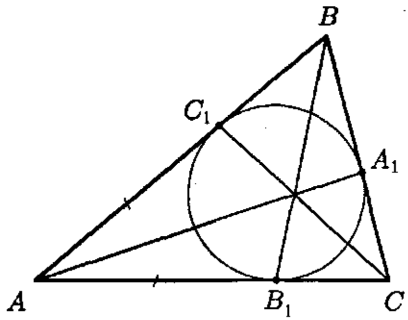


Рис. 54

Покажем, что

$$\angle ACC_1 = \angle ABB_1.$$

Оба эти угла получаются одинаково: из точки M на стороне угла A, лежащей на расстоянии $AB_1 = AC_1$ от A (т. е. из точки B_1 или C_1), как из центра проводится окружность радиуса $BB_1 = CC_1$. Возможны только две точки M_1 и M_2 пересечения этой окружности с другой стороной угла A (рис. 55), но только один из углов AM_1M и AM_2M — угол AM_2M — будет острым (случай, когда точка M_1 находится на продолжении одной из сторон угла A, очевиден).

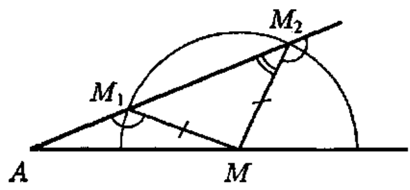


Рис. 55

Но в силу пункта а) углы ABB_1 и ACC_1 — острые. Таким образом, эти углы равны по построению и значит равны и треугольники ABB_1 и ACC_1. Отсюда $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

3.8. Решение. Все три центра лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда центр O описанной окружности лежит

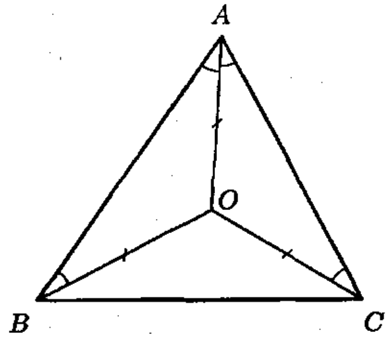


Рис. 56

на биссектрисе угла A (рис. 56). Отсюда $\angle BAO = \angle CAO$. Треугольники BAO и CAO — равнобедренные, откуда

$$\angle BOA = \angle COA,$$

т. е. треугольники BAO и CAO равны и, значит, $AB = AC$.

3.9. Ответ. а) Пусть E и F — точки касания вневписанной окружности (рис. 57) продолжений сторон AB и BC соответственно.

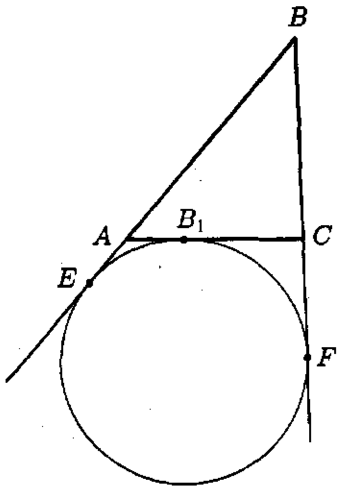


Рис. 57

Так как

$$BE = AB + AE = AB + AB_1 = c + AB_1,$$

$$BF = BC + CF = BC + CB_1 = a + CB_1 = a + b - AB_1$$

и $BE = BF$, то $c + AB_1 = a + b - AB_1$, т. е. $AB_1 = p - c$.

б) Вытекает из а).

3.10. Ответ.

а) Нет, так как на окружности сколь угодно большого радиуса можно расположить три сколь угодно близкие точки.

б) Да, так как радиус вписанной окружности меньше максимальной из высот треугольника, которая в свою очередь меньше максимальной из сторон треугольника.

3.11. Решение. Утверждение очевидно, так как вписанный в окружность угол C, опирающийся на хорду AB, — тупой, в том и только в том случае, когда точки C и O лежат по разные стороны от прямой (AB).

3.12. Первое решение. Пусть вневписанная окружность с центром O касается стороны AB треугольника ABC (рис. 58).

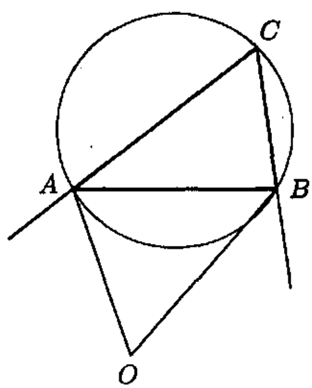


Рис. 58

Тогда

$$\angle AOB = \pi - \angle BAO - \angle ABO = \pi - \frac{\pi - \angle A}{2} - \frac{\pi - \angle B}{2} =$$

$$= \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\pi - \angle C}{2} < \pi - \angle C,$$

откуда следует, что точка O лежит вне дуги AB описанной окружности, измеряемой углом $\pi - \angle C$.

Второе решение. Легко следует из задачи 3.4.

3.13. Ответ. Пусть R — радиус описанной около треугольника ABC (рис. 59) окружности, $a = BC$. Покажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

В самом деле, проведем диаметр CD. Тогда в прямоугольном треугольнике CBD имеем

$$a = BC = CD \cdot \sin D = CD \cdot \sin A = 2R \sin A,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,$$

что и требовалось.

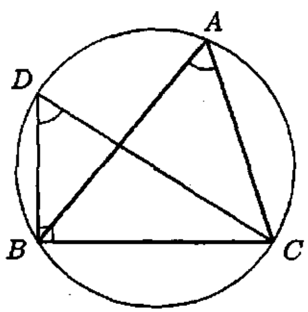


Рис. 59

3.14. Ответ. Нет. Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Центр описанной окружности будет лежать на отрезке CC_1 и, следовательно, находиться внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ не является прямоугольным.

3.15. Решение. а) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ и в силу задачи 3.13

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R},$$

откуда следует, что

$$S = \frac{abc}{4R}$$

и, следовательно,

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Первое решение. б) Положим $\angle C = \gamma$. Тогда, как известно,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}c\cdot h_c,$$

откуда

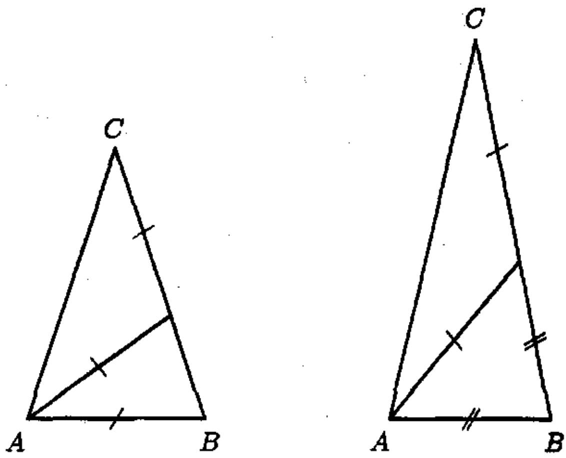
$$ab = \frac{c}{\sin\gamma}\cdot h_c.$$

Но в силу задачи 3.13 $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, т. е.

$$ab = 2h_cR,$$

что и требовалось.

Второе решение. Через вершину C треугольника ABC (рис. 60 а) проведем диаметр CD. Прямоугольные треугольники ADC и CHB ($CH = h_c$ — высота к стороне $AB = c$) будут подобны, так как



а) б)

Рис. 60

острые углы ADC и CBH, опирающиеся на дугу AC, равны. Отсюда $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{CH}{BC}$, т. е.

$$\frac{b}{2R} = \frac{h_c}{a}, \quad \text{или} \quad ab = 2h_cR.$$

Случай, когда один из углов A и B тупой рассматривается аналогично (рис. 60 б).

в) Вытекает из пункта б).

г) В силу пункта б).

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2R}{ac} + \frac{2R}{ab} + \frac{2R}{bc} = 2R\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = \frac{4Rp}{abc}.$$

В силу пункта а) $\dfrac{4R}{abc} = \dfrac{1}{S}$, кроме того $S = pr$, откуда

$$\frac{4Rp}{abc} = \frac{1}{r},$$

т. е.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

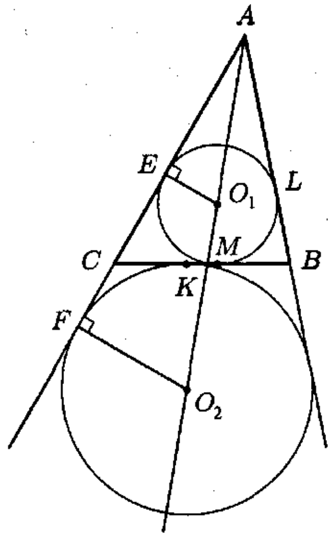


Рис. 61

3.16. Решение. а) Пусть O_2 — центр вневписанной окружности, касающийся стороны BC треугольника ABC, O_1 — центр вписанной окружности (рис. 61). Опустим перпендикуляры O_1E и O_2F на прямую AC. Треугольники AO_1E и AO_2F подобны, в силу чего

$$\frac{O_1E}{O_2F} = \frac{AE}{AF}.$$

Но $O_1E = r$, а $O_2F = r_a$. Кроме того, в силу задачи 3.9 а)

$$CF = CK = p - b$$

(K — точка касания вневписанной окружности стороны BC), т. е.

$$AF = AC + CF = b + (p - b) = p.$$

Аналогично

$$AL + AE = (AB - BL) + (AC - CE) =$$
$$= (c - BM) + (b - CM) = b + c - a,$$

где L и M — точки касания вписанной окружности соответственно сторон AB и BC треугольника ABC. Но $AL = AE$, откуда

$$AE = \frac{b+c-a}{2} = p - a.$$

Итак, окончательно

$$\frac{AE}{AF} = \frac{p-a}{p},$$

т. е.

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}, \quad \text{или} \quad (p-a)r_a = pr = S,$$

что и требовалось.

б) В силу пункта а)

$$r_a = \frac{pr}{p-a}, \quad r_b = \frac{pr}{p-b}, \quad r_c = \frac{pr}{p-c},$$

откуда

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{pr}+\frac{p-b}{pr}+\frac{p-c}{pr}=\frac{3p-(a+b+c)}{pr}=\frac{3p-2p}{pr}=\frac{1}{r}.$$

в) В силу а)

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c},$$

откуда

$$\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c} = \sqrt{r\cdot\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}} =$$

$$= S\sqrt{r\cdot\frac{S}{(p-a)(p-b)(p-c)}} = S\sqrt{\frac{pr\cdot S}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= S\sqrt{\frac{S^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{S^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Но по формуле Герона

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S,$$

что и дает требуемое равенство.

г) Выражая высоты из равенств

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

получим

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} - \frac{a}{2S} = \frac{p-a}{S}.$$

Но в силу а)

$$\frac{p-a}{S} = \frac{1}{r_a},$$

что и требовалось.

д) Складывая равенства (см. пункт г))

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c},$$

получим требуемое равенство

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Равенство $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}$ вытекает из пункта б).

е) Возведя в квадрат обе части полученного в пункте в) равенства, получим

$$S^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c,$$

или

$$S^2 = S \cdot pr = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c,$$

откуда вытекает нужное равенство.

ж) В силу а)

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Кроме того

$$4R = \frac{abc}{S}, \quad r = \frac{S}{p},$$

поэтому для доказательства утверждения нам необходимо убедиться в справедливости равенства

$$\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{abc}{S} + \frac{S}{p}.$$

Умножая обе части этого равенства на S и выражая S^2, получим

$$S^2 = \frac{abc}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}-\dfrac{1}{p}} =$$

$$= \left[p(p-a)(p-b)(p-c)abc\right]\cdot\left[p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+\right.$$
$$\left.+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)\right]^{-1}.$$

По формуле Герона

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2,$$

поэтому после сокращения на S^2 получим

$$p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) -$$
$$-(p-a)(p-b)(p-c) = abc.$$

Группируя первые 2 и последние 2 слагаемых в левой части равенства и вынося общие множители, приходим к равенству

$$p(p-c)(p-b+p-a) + (p-a)(p-b)(p-p+c) = abc,$$

т. е.

$$p(p-c)c + (p-a)(p-b)c = abc,$$

откуда

$$p^2 - pc + p^2 - ap - bp + ab = ab,$$

откуда

$$2p^2 - p(a+b+c) = 0,$$

или

$$2p^2 - 2p^2 = 0,$$

т. е. верное равенство, что и доказывает справедливость исходного равенства.

3.17. Решение. а) Пусть продолжения медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершин C треугольника ABC, пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках P, Q, R соответственно (рис. 62). Точка Q делит дугу AB окружности пополам, в силу чего отрезок OQ, где O — центр окружности, делит хорду AB пополам и перпендикулярен ей.

Теперь ясно, как строить треугольник. По точкам P, Q и R строим окружность и находим ее центр O.

Затем через точку R проводим прямую, параллельную отрезку OQ. Точка пересечения этой прямой с окружностью дает вершину C треугольника. Наконец, проведя через точку K пересечения отрезков CP и OP прямую, перпендикулярную OQ, найдем вершины A и B.

б) Покажем, что биссектрисы AP, BQ и CR треугольника ABC (рис. 63) являются высотами в треугольнике PQR.

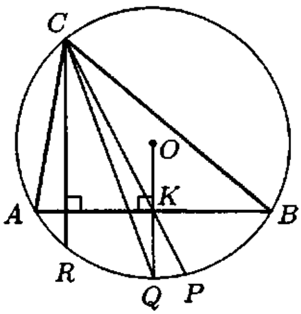


Рис. 62

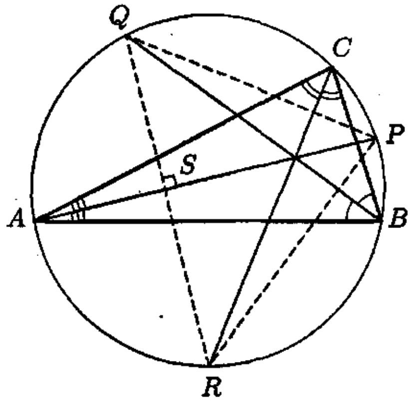


Рис. 63

Пусть S — точка пересечения прямых AP и QR. Угол ASQ измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается, т. е. величиной

$$\frac{1}{2}(\smile AQ + \smile PR) = \frac{1}{2}(\smile AQ + \smile PB + \smile BR).$$

Аналогично $\angle ASR$ измеряется величиной

$$\frac{1}{2}(\smile AR + \smile QP) = \frac{1}{2}(\smile AR + \smile CP + \smile CQ).$$

Но по условию

$$\smile AQ = \smile CQ, \quad \smile PB = \smile CP, \quad \smile BR = \smile AR,$$

в силу чего

$$\angle ASQ = \angle ASR = 90^\circ.$$

Таким образом

$$AP \perp QR.$$

Аналогично показывается, что $BQ \perp PR$ и $CR \perp PQ$.

Теперь понятно, как построить треугольник ABC по точкам P, Q и R: вершины A B и C искомого треугольника — точки пересечения продолжений высот треугольника PQR с описанной окружностью.

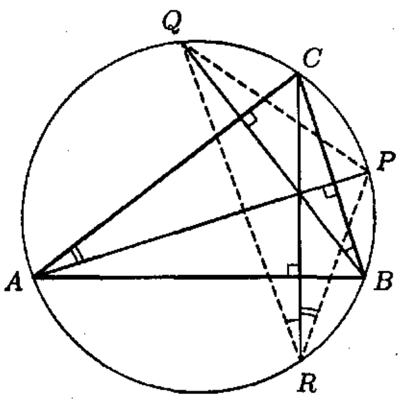


Рис. 64

в) **Указание.** Пусть треугольник ABC — остроугольный (рис. 64). Тогда

$$\angle CAP = \angle CRP, \quad \angle CRQ = \angle CBQ.$$

Кроме того,

$$\angle CAP = 90^\circ - \angle C = \angle CBQ,$$

откуда

$$\angle CRQ = \angle CRP$$

и, значит, высота CR — биссектриса угла R треугольника PQR. Аналогично рассмотрите случай тупоугольного треугольника ABC.

3.18.

а) **Указание.** Построив сторону $BC = 2R\sin A$, найдите $\angle BOC$, где O — центр вписанной окружности, и постройте точку O.

б) **Указание.** В окружности данного радиуса R постройте хорду $BC = a$, после чего постройте прямоугольный треугольник BHC (рис. 65), где $BH = h_b$ — высота, проведенная из вершины B.

в) **Указание.** Зафиксировав сторону $AC = b$ треугольника ABC постройте прямоугольный треугольник AOK, где O — центр вписанной окружности, K — точка касания этой окружности стороны AC.

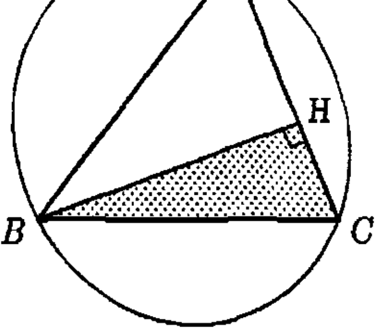


Рис. 65

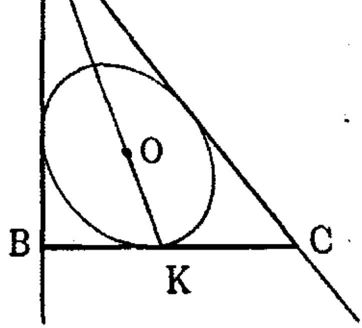


Рис. 66

казание. Сначала постройте прямоугольный треугольник AMH ще M и H — основания медианы и высоты соответственно, пущенных на сторону BC треугольника ABC), а потом найите центр O описанной около $\triangle ABC$ окружности.

усть $AK = l_a$ — биссектриса угла A (рис. 66). Проведя ые из точки A составляющие углы, равные $\frac{1}{2}\angle A$, по рямые AB и AC. Центр O вписанной окружности ожен на расстоянии r от этих прямых и, стало бы находится. Осталось провести вписанную окружно ти точки пересечения B и C касательной к этой о проведенной из точки K, с прямыми AB и AC.

). **Ответ.** $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

в силу задачи 3.16 б), д) значениями r_a, r_b и r_c однозначно определяются величины r, h_a, h_b и h_c. Далее, в силу 3.16 в)

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

также однозначно определено. Наконец,

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

откуда получаем однозначные значения для a, b и c.

б) Из формулы в условии задачи 3.16 б) определяем r_c, после чего задача сводится к предыдущему пункту.

в) В силу задачи 3.16 ж) находим сначала величину $r - r_c$, после чего, используя 3.16 д), находим $r \cdot r_c$. По этим двум величинам находим значение r_c. Теперь задача сводится к пункту а).

г) **Указание.** Воспользуйтесь задачами 3.16 б), ж).

3.21. Решение. Из равенств (см. 3.16 а))

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

вытекает

$$p - a = p - b = p - c,$$

откуда

$$a = b = c,$$

что и требовалось.

3.22. Решение. В силу задачи 3.16 ж)

$$r_c \geqslant \frac{1}{3}(r_a + r_b + r_c) = \frac{1}{3}(4R + r).$$

Но (см. 3.3) $R \geqslant 2r$, откуда

$$\frac{1}{3}(4R + r) \geqslant 3r,$$

т. е.

$$r \leqslant \frac{1}{3} r_c.$$

Далее (см. 3.16 б)),

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \leqslant \frac{3}{r_a},$$

откуда

$$r \geqslant \frac{r_a}{3}.$$

Таким образом, $\frac{1}{3}r_a \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}r_c$, что и требовалось.

Теперь пусть $r = \frac{1}{3}r_a = \frac{1}{3}r_c$. Тогда, очевидно,

$$r_a = r_b = r_c,$$

что в силу задачи 3.21 означает равносторонность данного треугольника. Нетрудно проверить, наконец, что для равностороннего треугольника

$$r = \frac{1}{3}r_a = \frac{1}{3}r_b = \frac{1}{3}r_c.$$

3.23. Решение. а) Из результата задачи 3.16 д) получим

$$h_a = \frac{2r_br_c}{r_b + r_c}, \quad h_b = \frac{2r_ar_c}{r_a + r_c} \quad \text{и} \quad h_c = \frac{2r_ar_b}{r_a + r_b}.$$

Так как, очевидно,

$$\frac{4xy}{x+y} \leqslant x + y$$

для любых положительных x и y, причем равенство достигается лишь в случае $x = y$, то

$$h_a + h_b + h_c \leqslant \frac{1}{2}(r_b + r_c) + \frac{1}{2}(r_a + r_c) + \frac{1}{2}(r_a + r_b) = r_a + r_b + r_c.$$

Равенство при этом достигается лишь в случае $r_a = r_b = r_c$, что в силу задачи 3.21 означает равносторонность треугольника, что и требовалось установить.

Докажем теперь, что

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Действительно, $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2pr}{a} = r\left(1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\right)$.

Складывая полученное выражение для h_a с аналогичными для h_b и h_c, получим

$$h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Но, как известно,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2,$$

причем равенство достигается лишь при $a = b = c$. Таким образом,

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

б) Нет, не существует. В самом деле, для любого $\alpha > 0$ построим равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 1$ и высотой $AH = \alpha$. Так как радиус вписанной окружности меньше наименьшей из высот треугольника, а, значит, и наименьшей из сторон, то $r < 1$, откуда

$$h_a + h_b + h_c > h_a = \alpha > \alpha r,$$

что и дает отрицательный ответ на поставленный вопрос.

3.24. Решение.

а) **Первое решение.** Из задачи 3.15 г) вытекает, что

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{h_c} < \frac{1}{r}.$$

Далее, из 3.16 д) имеем

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right).$$

Но по 3.16 б)

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}=\frac{1}{r_c},$$

откуда

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c}\right)>\frac{1}{2r}.$$

Окончательно

$$\frac{1}{2r}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{r}.$$

Второе решение. $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, откуда

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{a+b}{2S}=\frac{a+b}{2p\cdot r}=\frac{a+b}{(a+b+c)r}.$$

Поскольку $a+b>c$, то

$$a+b+c<2(a+b)<2(a+b+c),$$

откуда

$$\frac{1}{2}<\frac{a+b}{a+b+c}<1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2r}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{r},$$

что и требовалось установить.

б) Как и в первом решении пункта а) имеем

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c}\right),$$

а с учетом неравенства $r<r_c$, т. е. $\frac{1}{r}>\frac{1}{r_c}$, окончательно получим

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{r_c}.$$

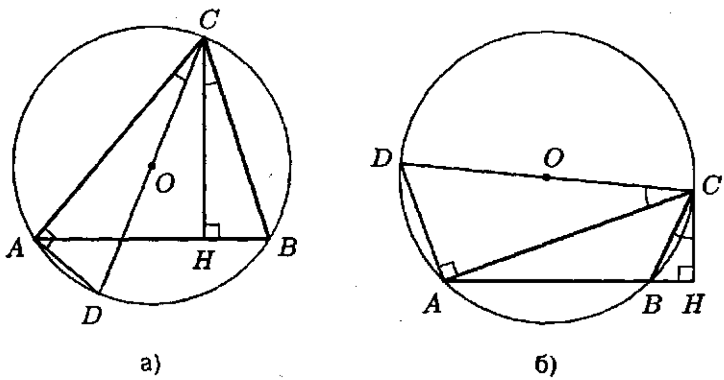


Рис. 67

3.25. Решение. Пусть CH — высота треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Предположим сначала, что углы A и B острые, т. е. $H \in AB$ (рис. 67 а)). Проведем диаметр CD. Тогда треугольники ACD и HCB — прямоугольные, причем углы D и B равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Отсюда

$$\angle ACD = \angle BCH,$$

что и требовалось.

Пусть теперь один из углов A и B, например B, тупой (рис. 67 б)). В этом случае точки O и H расположены вне треугольника ABC. Опять рассмотрим прямоугольные треугольники ACD и HCB.

$$\angle CBH = 180^\circ - \angle ABC,$$

причем $\angle ABC$ измеряется половиной дуги ADC, откуда $\angle CBH$ измеряется половиной дуги ABC. Но на эту же дугу ABC опирается и угол D, т. е.

$$\angle ADC = \angle CBH.$$

Таким образом,

$$\angle ACD = \angle BCH,$$

что и требовалось установить.

В случае, когда $\angle A$ или $\angle B$ равны 90°, углы ACD и BCH оба равны нулю, т. е. опять-таки равны между собой.

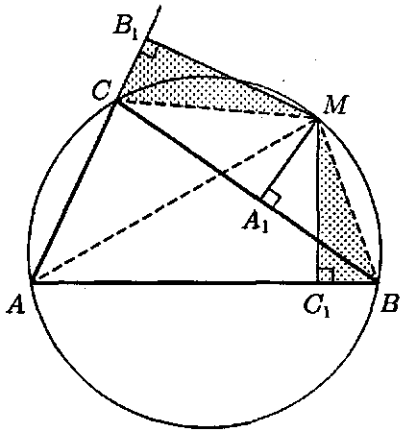


Рис. 68

3.26. Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники MBC_1 и MB_1C (рис. 68). $\angle MCB_1$ дополнительный к углу ACM, опирающемуся на дугу ABM, и значит, измеряется половиной дуги ACM, откуда следует, что углы MCB_1 и MBC_1 равны. Таким образом, треугольники MBC_1 и MB_1C подобны, т. е.

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MC_1}{MB_1},$$

или

$$MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1.$$

Аналогично из подобия прямоугольных треугольников AC_1M и MA_1C (углы MAC_1 и MCA_1 равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу BM) следует:

$$\frac{MC_1}{MA_1} = \frac{MA}{MC},$$

т. е.

$$MC \cdot MC_1 = MA \cdot MA_1.$$

Окончательно,

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1,$$

что и требовалось.

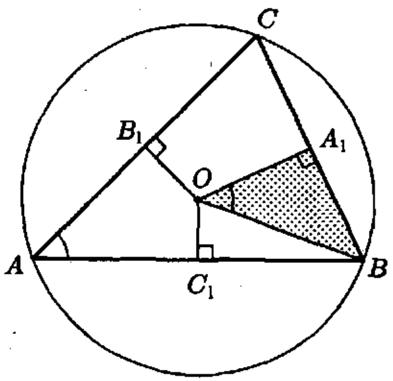


Рис. 69

3.27. Решение. а) Обозначим $OA_1=h_1$, $OB_1=h_2$, $OC_1=h_3$ (рис. 69). Поскольку

$$S_{\Delta ABC} = pr$$

и, с другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2 + ch_3),$$

то отсюда

$$r = \frac{ah_1 + bh_2 + ch_3}{a+b+c}.$$

Таким образом, нам необходимо доказать, что

$$h_1 + h_2 + h_3 = R + \frac{ah_1 + bh_2 + ch_3}{a+b+c},$$

или

$$R = h_1 \cdot \frac{b+c}{a+b+c} + h_2 \cdot \frac{a+c}{a+b+c} + h_3 \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{h_1(b+c) + h_2(a+c) + h_3(a+b)}{a+b+c}.$$

В прямоугольном треугольнике BOA_1 имеем: $OB = R$,

$$h_1 = OA_1 = OB \cdot \cos \angle A_1OB = R \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\angle BOC\right) = R\cos A.$$

Аналогично $h_2 = R\cos B$, $h_3 = R\cos C$. Учитывая еще, что в силу задачи 3.13 $a = 2R\cdot\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, получим окончательно

$$h_1(b+c)+h_2(a+c)+h_3(a+b) = 2R^2\cos A(\sin B+\sin C)+$$
$$+2R^2\cos B(\sin A+\sin C)+2R^2\cos C(\sin A+\sin B)=$$
$$=2R^2(\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos C+\cos A\sin C+$$
$$+\sin B\cos C+\cos B\sin C)=2R^2\big(\sin(A+B)+\sin(A+C)+$$
$$+\sin(B+C)\big)=2R^2(\sin C+\sin B+\sin A)=R(2R\sin A+$$
$$+2R\sin B+2R\sin C)=R(a+b+c),$$

что и требовалось доказать.

б) **Указание.** Используйте доказательство из пункта а) с учетом равенства

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}-S_{\triangle AOB}.$$

3.28. Решение. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, поэтому

$$BG = BE = AB - AE = c - AE;$$
$$CG = CF = AC - AF = AC - AE = b - AE.$$

Отсюда $a = BC = BG + CG = b + c - 2AE$, т. е.

$$AE = AF = p - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

Используя результат задачи 3.13, получим в итоге требуемое равенство.

Остальные равенства доказываются аналогично.

3.29*. Решение. Пусть O (рис. 70) — центр описанной около треугольника ABC окружности, O_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$, D — точка пересечения биссектрисы AO_1 угла A с описанной окружностью.

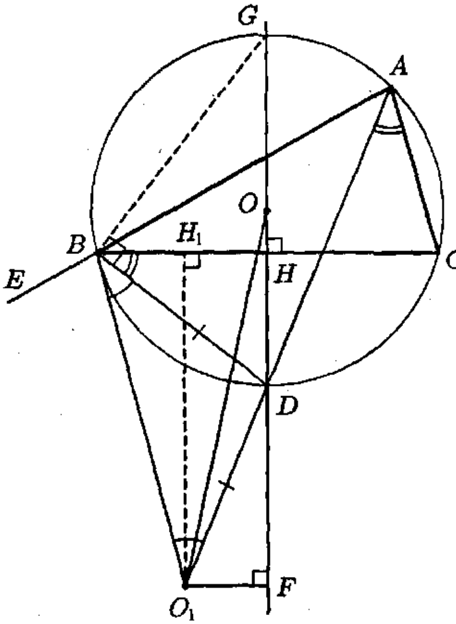


Рис. 70

Тогда, рассматривая треугольник ABO_1, получим

$$\angle AO_1B = \angle O_1BE - \angle O_1AE.$$

Кроме того,

$$\angle DBO_1 = \angle CBO_1 - \angle CBD.$$

Поскольку AO_1 и BO_1 соответственно биссектрисы углов A и CBE, а углы CAD и CBD, опирающиеся на дугу CD, равны, то

$$\angle O_1AE = \angle CAD = \angle CBD \quad \text{и} \quad \angle O_1BE = \angle CBO_1.$$

Отсюда

$$\angle DBO_1 = \angle O_1BE - \angle O_1AE = \angle AO_1B,$$

т. е. треугольник BO_1D — равнобедренный, и, значит, $BD = O_1D$.

Далее, точка D — середина дуги BC, в силу чего $OD \perp BC$.

Опустим перпендикуляр O_1F на прямую OD. Применяя теорему косинусов к тупоугольному треугольнику OO_1D, получим

$$d_a^2 = OO_1^2 = OD^2 + O_1D^2 - 2OD \cdot O_1D \cos \angle ODO_1.$$

Но

$$-O_1D\cos\angle ODO_1 = O_1D\cos(180^\circ - \angle ODO_1) = O_1D\cos\angle FDO_1 = DF,$$

т. е.

$$d_a^2 = OD^2 + O_1D^2 + 2OD \cdot DF.$$

Так как

$$O_1D = BD$$

и из подобия прямоугольных треугольников BGD и BHD (G и H — соответственно точки пересечения прямой OD с описанной окружностью и BC) имеем

$$\frac{BD}{HD} = \frac{GD}{BD},$$

т. е.

$$BD^2 = HD \cdot GD = HD \cdot 2R,$$

то

$$d_a^2 = OD^2 + HD \cdot 2R + 2OD \cdot DF = R^2 + HD \cdot 2R + 2R \cdot DF =$$
$$= R^2 + 2R(HD + DF) = R^2 + 2R \cdot HF.$$

Опустив перпендикуляр $O_1H_1 = r_a$ на BC и учитывая, что

$$HF = O_1H_1,$$

получим окончательно

$$d_a^2 = R^2 + 2R \cdot r_a,$$

что и требовалось.

3.30. Решение. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности (рис. 71), O_1, O_2 и O_3 — точки, симметричные O относительно сторон этого треугольника. Обозначим также через E, F и G — точки пересечения отрезков OO_1, OO_2 и OO_3 со сторонами треугольника. Очевидно, что точки E, F и G — середины соответствующих сторон треугольника ABC, откуда EF — средняя линия, т. е. $EF \parallel AB$. Точно так же EF является и средней

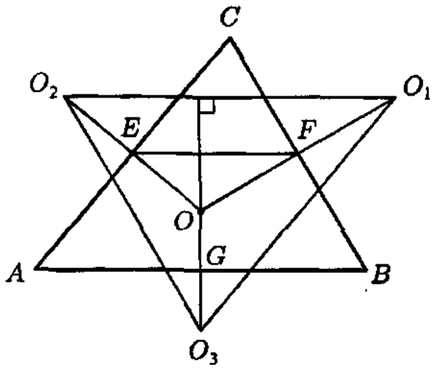


Рис. 71

линией треугольника O_1OO_2, а значит $EF \parallel O_1O_2$. Таким образом, $AB \parallel O_1O_2$ в силу чего $OO_3 \perp O_1O_2$. Аналогично показывается, что $OO_1 \perp O_2O_3$, $OO_2 \perp O_1O_3$. Из этого следует, что точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

Теперь понятно, как строить треугольник ABC, зная точки O_1, O_2 и O_3. Сначала находим ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ — точку O. Затем находим середины отрезков OO_1, OO_2 и OO_3 — соответственно точки F, E и G. Наконец, проведя через точки E, F и G прямые, параллельные соответственно O_1O_3, O_2O_3 и O_1O_2, получим искомый треугольник ABC

3.31. Решение. Ясно, что окружность, проведенная через заданные точки P, Q и R (рис. 72) будет вписанной в искомый треугольник ABC. Найдя центр O этой окружности, проведем прямые

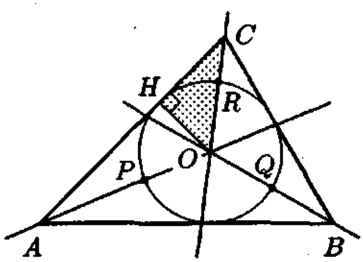


Рис. 72

PO, QO и RO, содержащие соответственно биссектрисы углов A, B и C. Далее, нетрудно показать, что

$$\angle POQ = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle C,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\angle C = \angle POQ - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда найдем

$$\angle HOC,$$

где H — основание перпендикуляра, опущенного из O на AC:

$$\angle HOC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle C = \pi - \angle POQ.$$

Таким образом, точку H найдем, проведя луч OH под углом, дополнительным к углу POQ, к лучу OC.

Построив далее касательную к окружности в точке H, получим прямую AC. Аналогично строятся прямые AB и BC.

3.32. Ответ. а), б) Нет, не всегда. Соответствующие примеры понятны из рис. 73 а и рис. 73 б.

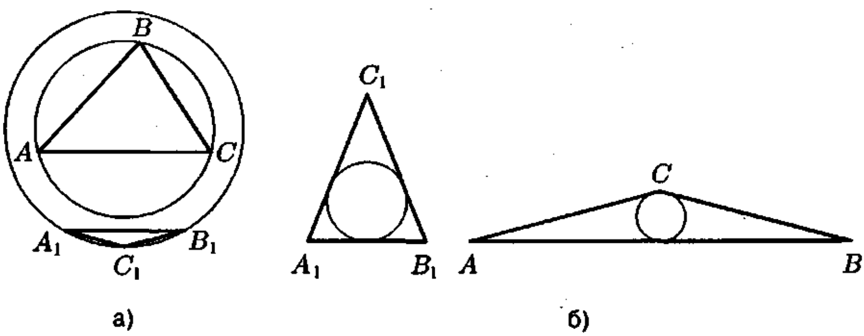


Рис. 73

3.33. Решение. 1) Из центра O вписанной в треугольник ABC (рис. 74) окружности опустим перпендикуляр $OH = r$ на BC.

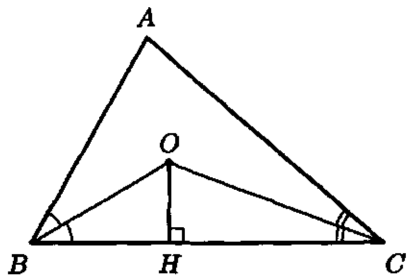


Рис. 74

Из прямоугольного треугольника OHC имеем

$$r = OC \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Но из треугольника BOC по теореме синусов и с учетом того, что

$$\angle BOC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2},$$

получим

$$\frac{OC}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)},$$

т. е.

$$OC = \frac{a \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}},$$

откуда окончательно

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}},$$

что и требовалось. Остальные равенства доказываются аналогично.

2) Покажем, что

$$r = \frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

(остальные равенства доказываются аналогично).

Для этого в силу пункта 1) достаточно показать, что

$$\frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}},$$

или производя сокращения, что

$$h_a = c \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = c \sin B.$$

Но равенство $h_a = c \cdot \sin B$ очевидно.

3) Пусть P точка касания вписанной окружности стороны AB (рис. 75), O — центр этой окружности. Поскольку в силу задачи 3.28 $AP = p - a$, то из прямоугольного треугольника AOP получим требуемое равенство

$$r = OP = AP \operatorname{tg} \angle OAP = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

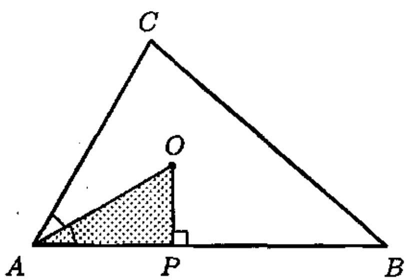


Рис. 75

4) По доказанному в пункте 3)

$$p-a=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}},\quad p-b=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}},\quad p-c=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}.$$

Учитывая, что

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=p,$$

получим

$$\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=p,$$

или приводя к общему знаменателю,

$$r\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Для доказательства нужной формулы осталось показать, что выражение в скобках равно 1. Но, действительно, учитывая, что

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}},$$

и обозначая для удобства $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\beta$ получим требуемое

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\beta(1-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}+$$

$$+\frac{\alpha(1-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}+\alpha\beta=\frac{\beta(1-\alpha\beta)+\alpha(1-\alpha\beta)+(\alpha+\beta)\alpha\beta}{\alpha+\beta}=$$

$$=\frac{\beta-\alpha\beta^2+\alpha-\alpha^2\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}=1.$$

5) **Указание.** Используйте пункт 4).

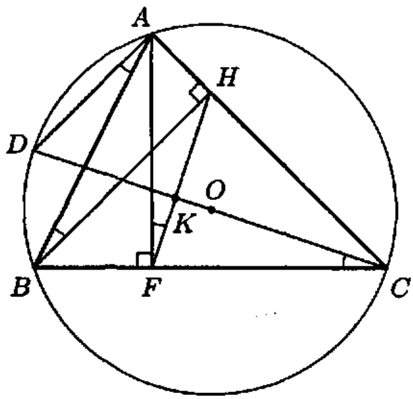


Рис. 76

3.34. Решение. Пусть треугольник ABC остроугольный (рис. 76), AF и BH — высоты, O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

Проведем диаметр CD. Тогда, очевидно $\angle BCD = \angle BAD$. Так как $AD \perp AC$, то $AD \parallel BH$ и, следовательно,

$$\angle BAD = \angle ABH.$$

Наконец, точки A, B, F и H лежат на одной окружности с диаметром AB, в силу чего

$$\angle ABH = \angle AFH.$$

Таким образом,

$$\angle BCD = \angle AFH.$$

Отсюда

$$\angle KFC = 90^\circ - \angle AFH = 90^\circ - \angle BCD$$

(K — точка пересечения прямых CD и FH), т. е.

$$\angle CKF = 90^\circ,$$

что и требовалось установить.

Случай, когда треугольник ABC тупоугольный, рассматривается аналогично.

3.35. Решение. 1) Большему углу в треугольнике соответствует и большая сторона, потому $BC > AC > AB$. Так как большая хорда расположена ближе к центру окружности, то ближайшей к центру описанной окружности будет наибольшая сторона треугольника ABC, т. е. BC.

2) Пусть O — центр, а r — радиус вписанной окружности. Тогда, опустив перпендикуляр OB_1 на AC и рассматривая прямоугольный треугольник OB_1A, получим:

$$OA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Аналогично

$$OB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad OC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Так как

$$\angle\frac{C}{2} < \angle\frac{B}{2} < \angle\frac{A}{2} < 90^\circ,$$

то

$$\sin\frac{C}{2} < \sin\frac{B}{2} < \sin\frac{A}{2},$$

откуда

$$OA < OB < OC.$$

Таким образом, ближайшей к центру вписанной окружности оказывается вершина наибольшего угла.

3.36. 1) **Решение.** Поскольку (см. задачу 3.33 1))

$$r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

то нам достаточно показать, что

$$\frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

т. е.

$$a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2R \sin A.$$

Но равенство $a = 2R \sin A$ доказано в задаче 3.13.

2) **Указание.** Используйте соотношения

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, \quad OB = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, \quad OC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \quad \text{и} \quad \text{пункт 1)}.$$

3.37. Решение. Для удобства будем считать, что вершины C рассматриваемых треугольников ABC расположены по одну сторону от прямой AB.

а) Пусть O — центр вписанной окружности в треугольник ABC. Тогда

$$\angle AOB = \pi - (\angle OAB + \angle OBA) = \pi - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) =$$
$$= \pi - \left(\frac{\pi - \angle C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle C}{2}.$$

Таким образом, точка O находится на дуге окружности, опирающейся на хорду AB и измеряемой постоянной величиной $\frac{\pi}{2} + \frac{\angle C}{2}$. Нетрудно показать, что и обратно, всякая точка указанной дуги окружности является центром вписанной окружности для некоторого треугольника ABC.

б) Дуга, окружности, опирающаяся на AB, расположенная по другую сторону от вершины C и измеряемая величиной $\frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}$.

Указание. Воспользуйтесь пунктом а).

3.38. Указание. Используя задачу 3.37, сначала постройте центр соответствующей окружности, после чего — прямые AC и BC.

3.39. Решение. Пусть O' — центр вписанной, а O_1, O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей, r, r_1, r_2 и r_3 — соответствующие радиусы. Обозначим также

$$OO' = d, \quad OO_1 = d_1, \quad OO_2 = d_2, \quad OO_3 = d_3.$$

Поскольку (см. задачи 3.2 и 3.29)

$$d^2 = R^2 - 2Rr, \quad d_i^2 = R^2 + 2Rr_i, \quad i = 1, 2, 3$$

то

$$d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 4R^2 + 2R(r_1 + r_2 + r_3 - r).$$

Но в силу задачи 3.17

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R,$$

откуда и следует нужный результат.

3.40. Ответ. Пусть $a \leqslant b$. тогда условием существования треугольника будет выполнение неравенства $b \leqslant 2R$, если $a \neq b$ и $b < 2R$, если $a = b$.

Указание. В любом треугольнике, очевидно, $a \leqslant 2R$, $b \leqslant 2R$. Покажите, что и обратно: для любых двух чисел $a < b \leqslant 2R$ (или $a = b < 2R$) найдется треугольник со сторонами a и b, вписанный в окружность радиуса R.

3.41. Решение. Пусть P и Q — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности соответственно сторон AB и AC (рис. 77), K — точка пересечения отрезка PQ с отрезком AO, где O — центр окружности. Тогда

$$PQ = 2PK = 2AP \cdot \sin \angle PAK = 2AP \sin \frac{A}{2}.$$

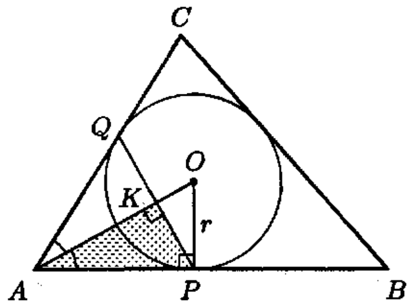


Рис. 77

Как уже было доказано в задаче 3.28 $AP = p - a$. Осталось выразить через стороны a, b и c треугольника ABC величину $\sin\frac{A}{2}$. Поскольку

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

а в силу теоремы косинусов $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, то окончательно получим

$$PQ = 2(p-a)\cdot\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = (p-a)\cdot\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}} =$$

$$= 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично находятся и другие стороны треугольника.

3.42. Решение. Пусть AF и CE (рис. 78) — высоты в треугольнике ABC, M и N — середины соответственно сторон AB и BC, O — центр описанной окружности. Для доказательства нам достаточно показать, что $MK = OC$, где K — середина отрезка CH.

Так как средняя линия MN параллельна AC и, кроме того, $ON \parallel AF$, $OM \parallel CE$, то треугольники OMN и CHA подобны, как

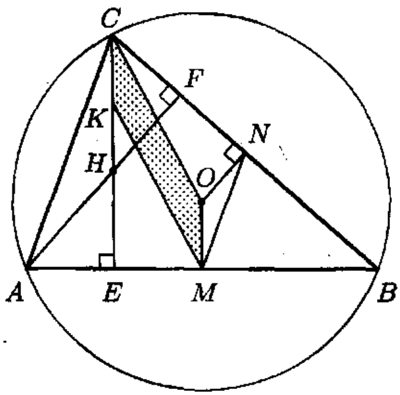


Рис. 78

треугольники с соответственно параллельными сторонами. Отсюда

$$\frac{OM}{CH} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$OM = CK.$$

К тому же $OM \parallel CK$, а значит четырехугольник $OMKC$ параллелограмм, откуда $MK = OC$, что и требовалось.

3.43. Решение. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, M — точка пересечения медиан. Тогда

$$\vec{AO}^2 + \vec{BO}^2 + \vec{CO}^2 = (\vec{AM} + \vec{MO})^2 + (\vec{BM} + \vec{MO})^2 + \\ + (\vec{CM} + \vec{MO})^2 = \vec{AM}^2 + \vec{BM}^2 + \vec{CM}^2 + \\ + 2(\vec{AM} \cdot \vec{MO} + \vec{BM} \cdot \vec{MO} + \vec{CM} \cdot \vec{MO}) + 3\vec{MO}^2.$$

Но

$$\vec{AO}^2 + \vec{BO}^2 + \vec{CO}^2 = R^2, \quad \vec{AM}^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2,$$

$$\vec{BM}^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2, \quad \vec{CM}^2 = \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2.$$

Кроме того,

$$\vec{AM}\cdot\vec{MO}+\vec{BM}\cdot\vec{MO}+\vec{CM}\cdot\vec{MO}=\left(\vec{AM}+\vec{BM}+\vec{CM},\vec{MO}\right)=0,$$

поскольку

$$\vec{AM}+\vec{BM}+\vec{CM}=\vec{O}.$$

Поэтому

$$\vec{AO}^2+\vec{BO}^2+\vec{CO}^2=3R^2=\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_c^2+$$

$$+3\vec{MO}^2\geqslant\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right),$$

т. е.

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\leqslant\frac{27}{4}R^2,$$

что и требовалось.

Равенство возможно лишь в случае $\vec{MO}=\vec{O}$, т. е. совпадения точек M и O, что эквивалентно условию $a=b=c$.

3.44. Решение. Сначала докажем, что $6\sqrt{3}r\leqslant a+b+c$.

Используя свойства среднего арифметического и равенство

$$R=\frac{abc}{4S}$$

(см. задачу 3.15), получим

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{4RS}.$$

Поскольку $S=pr$, а $R\geqslant 2r$ (см. задачу 3.3), то

$$\sqrt[3]{4RS}=\sqrt[3]{4pRr}\geqslant\sqrt[3]{8pr^2},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. Учитывая, что

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{2p}{3},$$

приходим к неравенству $\dfrac{2p}{3} \geqslant \sqrt[3]{8pr^2}$ откуда

$$\frac{p^3}{27} \geqslant pr^2, \quad \text{или} \quad p \geqslant 3\sqrt{3}r,$$

т. е.

$$a + b + c \geqslant 6\sqrt{3}r.$$

При этом, так как $\dfrac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc}$ и $R = 2r$ лишь в случае $a = b = c$, то и в полученном неравенстве равенство возможно лишь в случае равносторонности треугольника.

Далее, перейдем к неравенству $a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}R$.

Первое решение. В силу задачи 3.43

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2$$

и поэтому достаточно доказать, что

$$(a + b + c)^2 \leqslant 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2),$$

а с учетом того, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \leqslant$$
$$\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

[мы использовали неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$, $2bc \leqslant b^2 + c^2$ и $2ac \leqslant \leqslant a^2 + c^2$] доказать равенство $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

В самом деле, рассмотрим треугольник, образованный сторонами $CC_1 = m_c$, $BC = a$ и $BC_1 = \dfrac{c}{2}$. По теореме косинусов

$$a^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c \cdot \frac{c}{2} \cos \angle CC_1B.$$

Рассматривая соседний треугольник CC_1A, получим аналогично, что

$$b^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c \cdot \frac{c}{2} \cos \angle CC_1A.$$

Складывая, полученные равенства и учитывая, что

$$\cos\angle CC_1B = -\cos\angle CC_1A,$$

получим

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2},$$

откуда

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2c^2.$$

Аналогично получаются равенства

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Сложив последние три равенства, получим нужный результат.

Равенство в доказанном нестрогом неравенстве возможно лишь в случае

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{27}{4}R^2$$

и

$$2ab = a^2 + b^2, \quad 2bc = b^2 + c^2 \quad \text{и} \quad 2ac = a^2 + c^2,$$

т. е. когда $a = b = c$.

Второе решение. Указание. Зафиксируем сторону AB и угол C треугольника ABC (рис. 79) и из всех возможных треугольников ABC выберем треугольник наибольшего периметра. Пусть B' — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности с радиусом r и центром O стороны AC (рис. 80). Тогда

$$CB' = p - c$$

(см. задачу 3.28) и

$$r = OB' = CB' \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = (p - c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Отсюда для площади треугольника ABC получим

$$S = pr = p(p - c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

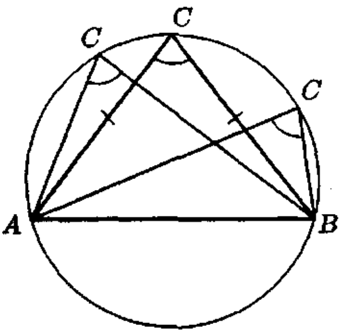


Рис. 79

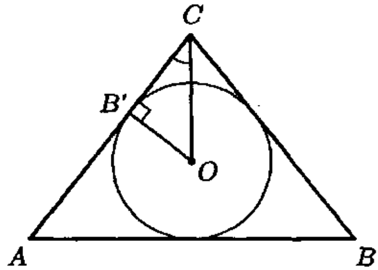


Рис. 80

По условию c и $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ — константы, и, значит, максимальному значению периметра будет соответствовать и максимальное значение площади S. Но из всех треугольников с заданными основанием и углом при вершине максимальную площадь имеет (так как $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$) равнобедренный треугольник. Далее покажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность максимальный периметр имеет равносторонний треугольник.

3.45. Ответ. Равнобедренный треугольник ($AB = AC$).

Указание. Воспользуйтесь задачей 3.37 а).

3.46. Указание. Воспользуйтесь формулой $S = pr$ и задачами 3.15 б) и 3.16 а).

3.47. Решение. Пусть E и F — соответственно точки касания вписанных в треугольники ACM и BCM окружностей (рис. 81) стороны CM (M — произвольна). Тогда (см. задачу 3.28)

$$CE = \frac{AC + CM - AM}{2}, \quad CF = \frac{BC + CM - BM}{2}.$$

Если точка M выбрана так, как требуется в условии, то $E = F$ и, следовательно, $CE = CF$, т. е.

$$AC + CM - AM = BC + CM - BM.$$

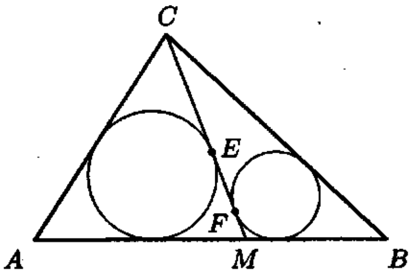


Рис. 81

Отсюда $AC - AM = BC - BM$. Учитывая, что $BM = AB - AM$, получим окончательно

$$AM = \frac{AC + AB - BC}{2} = \frac{b + c - a}{2},$$

что позволяет однозначно определить положение точки M.

3.48. Ответ. Нет, не всегда.

Решение. Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $a = b$ и гипотенузой c.

Поскольку (см. задачу 3.16 а))

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = r_a, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

то для опровержения гипотезы, сформулированной в условии задачи, достаточно показать, что

$$r_a + r_b = \frac{2S}{p-a} < \frac{S}{p-c},$$

т. е.

$$2(p-c) < p-a.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству $c > \frac{4}{3}a$, которое верно, ибо $c = \sqrt{2}a$.

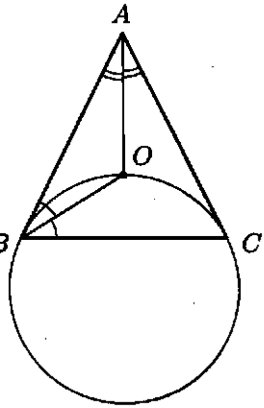


Рис. 82

3.49. Указание. Пусть O — середина дуги BC (рис. 82). Поскольку $AB = AC$, то AO — биссектриса угла BAC. Осталось показать, что OB — биссектриса угла ABC, т. е. что $\angle OBA = \angle OBC$. Для этого используйте свойства угла между касательной и хордой.

3.50. Указание. Пусть треугольник ABC — остроугольный, H — его ортоцентр и C' — точка, симметричная H относительно стороны AB (рис. 83). Поскольку $AH \perp BC$ и $C'H \perp AB$, то $\angle AHC' = \angle B$.

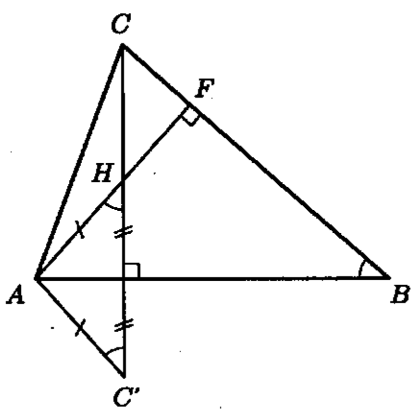


Рис. 83

С другой стороны, треугольник HAC' равнобедренный, откуда

$$\angle AHC' = \angle AC'H.$$

Таким образом,

$$\angle AC'H = \angle B$$

и, следовательно, точка C' лежит на описанной около треугольника ABC окружности. Аналогично рассматривается принадлежность описанной окружности двух других точек.

Случай тупоугольного треугольника рассмотрите самостоятельно.

2) **Указание.** В силу пункта 1) данная окружность будет симметрична описанной окружности относительно одной из сторон треугольника.

Глава 4

Замечательные точки и линии треугольников

§ 1. Задачи

4.1 Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром треугольника.

4.2 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольники AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C подобны треугольнику ABC.

4.3 Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, называется ортоцентрическим треугольником треугольника ABC. Найдите углы ортоцентрического треугольника остроугольного треугольника ABC, если углы треугольника ABC равны A, B, C.

4.4 Докажите, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника.

4.5 Найдите углы ортоцентрического треугольника тупоугольного треугольника ABC, если углы треугольника ABC равны A,B,C (угол C — тупой).

4.6 Найдите углы всех треугольников, которые подобны своим ортоцентрическим треугольникам.

4.7 Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

4.8 Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

а) треугольник $A_1B_1C_1$ подобен ортоцентрическому треугольнику треугольника ABC и коэффициент подобия равен 2;

б) высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

4.9 Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH, BCH и CAH равны между собой и равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

4.10 Дан треугольник ABC с ортоцентром H. Докажите, что расстояние от вершины треугольника ABC до его ортоцентра равно расстоянию между центрами описанной окружности треугольника ABC и окружности, проходящей через другие две вершины и ортоцентр.

4.11 Точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3, симметричные точке P относительно сторон BC, CA, AB треугольника ABC лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр этого треугольника.

4.12 Докажите, что радиус описанной окружности, проходящей через вершину треугольника и высота, опущенная из этой же вершины на противоположную сторону, образуют равные углы со сторонами треугольника, проходящими через ту же вершину.

4.13 Найдите угол между радиусом описанной окружности, проведенном через вершину C треугольника ABC и высотой, опущенной из этой же вершины на противоположную сторону, если $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$.

4.14 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3. Докажите, что радиусы, соединяющие центр описанной окружности треугольника ABC с его вершинами, перпендикулярны сторонам ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$.

4.15 Пусть R — радиус описанной окружности остроугольного треугольника ABC, p_h — полупериметр его ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$, S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $S = p_hR$.

4.16 Треугольник $A_1B_1C_1$ называется вписанным в треугольник ABC, если его вершины лежат на сторонах треугольника ABC. Докажите, что если вписанный треугольник $A_1B_1C_1$ имеет наименьший периметр среди всех вписанных в остроугольный треугольник ABC треугольников, то этот треугольник совпадает с ортоцентрическим треугольником треугольника ABC.

4.17 Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Найдите углы этого треугольника, если известно, что четырехугольник $ABCO$ ромб.

4.18 В треугольнике ABC известно, что $\angle B - \angle A = 90°$. Докажите, что $R^2 + h_c^2 = m_c^2$, где R — радиус описанной окружности, h_c и m_c — соответственно высота и медиана, проведенные из вершины C.

4.19 Дан остроугольный треугольник ABC, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр этого треугольника. Докажите, что следующие условия равносильны:

а) $\angle ACB = 60°$;

б) точка, симметричная точке O относительно стороны AB треугольника ABC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC;

в) точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABH;

г) $\angle AOB = 120°$;

д) $\angle AHB = 120°$;

е) центр окружности описанной около треугольника ABH лежит на окружности описанной около треугольника ABC;

ж) треугольник COH равнобедренный.

4.20 Назовем треугольник $A_1B_1C_1$, вписанный в треугольник ABC бильярдным, если его стороны образуют равные углы со сторонами треугольника ABC. Докажите, что у остроугольного треугольника существует единственный бильярдный треугольник, который совпадает с ортоцентрическим треугольником этого остроугольного треугольника.

4.21 (Устно). В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC, а его площадь равна 1/4 площади треугольника ABC.

4.22 Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

4.23 Найдите углы, под которыми видны стороны треугольника из центра вписанной в этот треугольник окружности.

4.24 Обозначим точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами AB, BC, CA через C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что

а) треугольники AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 равнобедренные;

б) биссектрисы треугольника ABC перпендикулярны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

4.25 Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$ из предыдущей задачи.

4.26 Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. (Если CC_1 — биссектриса треугольника ABC, то $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CB}$.)

4.27 Дан треугольник ABC, l_c — длина биссектрисы угла C треугольника ABC, a и b — длины сторон BC и CA, $\angle ACB = C$.

Докажите, что $l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

4.28 В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60°, O и I — центры описанной и вписанной окружностей, H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что

а) точка I лежит на окружности, описанной около треугольника ABH;

б) прямая OH является биссектрисой угла AHH_2 между высотами AH_1 и BH_2 треугольника ABC;

в) прямая OH перпендикулярна биссектрисе угла C;

г) прямая OH отсекает от треугольника ABC правильный треугольник.

4.29 Биссектриса CC_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Докажите, что

а) точка P является серединой дуги APB;

б) треугольники PIB и PIA равнобедренные, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC;

в) P — центр описанной окружности треугольника AIB.

4.30 Докажите, что если высота и медиана неравнобедренного треугольника, проведенные из одной его вершины, образуют равные углы со сторонами, проходящими через ту же вершину, то этот треугольник прямоугольный.

4.31 В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, C_1 — середина стороны AB. Докажите, что если треугольник COC_1 прямоугольный, то $|\angle B - \angle A| = 90^\circ$.

4.32 В треугольнике ABC, углы которого равны 40°, 60°, 80° ($\angle CAB = 40^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$) проведена высота CH.

Выясните, является ли треугольник COH прямоугольным, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

4.33 В неравнобедренном треугольнике из одной и той же вершины проведены биссектриса, медиана и высота. Докажите, что биссектриса всегда лежит между медианой и высотой.

4.34 (Устно). Могут ли

а) высота и биссектриса;

б) медиана и биссектриса, проведенные из одной и той же вершины треугольника делить его углы, на три равные части?

4.35 Найдите углы треугольника, если известно, что высота и медиана, проведенные из вершины одного из углов треугольника делят этот угол на три равные части

4.36 Верно ли следующее утверждение: если ортоцентрический треугольник $H_1H_2H_3$ треугольника ABC правильный, то сам треугольник ABC также правильный?

4.37 Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается его сторон BC, CA, AB в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис углов A, B, C треугольника ABC с описанной окружностью этого треугольника. Докажите, что:

а) точка I является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$;

б) треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику $A_2B_2C_2$;

в) ортоцентрический треугольник треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в точке I и коэффициентом гомотетии равным $1/2$.

4.38 В ортоцентрический треугольник $H_1H_2H_3$ остроугольного треугольника ABC вписана окружность, которая касается сторон треугольника $H_1H_2H_3$ в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

4.39 Из точки P, лежащей на окружности, опущены перпендикуляры на стороны вписанного в эту окружность треугольника ABC. Докажите, что

а) основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой, которая называется прямой Симсона;

б) прямая Симсона точки P делит пополам отрезок, соединяющий эту точку с ортоцентром треугольника ABC.

4.40 Точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что $PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = PC \cdot PC_1$ (теорема Лемуана).

4.41 Окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется вневписанной окружностью треугольника. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что

а) каждая из точек O_1, O_2, O_3 совпадает с точкой пересечения биссектрисы одного из углов треугольника с биссектрисами внешних углов при двух других его вершинах;

б) вершины A, B, C лежат на сторонах треугольника O_1, O_2, O_3, причем треугольник ABC является ортоцентрическим для треугольника $O_1O_2O_3$.

4.42 Пусть радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R, а его углы — A, B, C. Докажите, что $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

4.43 Докажите, что хорда описанной окружности треугольника, один из концов которой совпадает с вершиной треугольника, а второй — с точкой пересечения биссектрисы, проведенной из этой вершины, с описанной окружностью, делится центром вписанной окружности на отрезки, произведение которых равно $2Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника.

4.44 Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника и радиусы r и R вписанной и описанной окружностей удовлетворяют соотношению

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

4.45 Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $\frac{h}{l} \geqslant \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

4.46 На одной из сторон данного угла зафиксирована точка A. Рассматриваются всевозможные окружности, касающиеся этой стороны в точке A и пересекающие другую сторону в двух точках B и C (каждая окружность — в своей паре точек, обозначаемых через B и C). Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, лежат на одной прямой.

4.47 Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BMC = 90^\circ + \angle BAC/2$ и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC. Докажите, что M — центр вписанной окружности треугольника ABC.

4.48 Дан треугольник ABC ($\angle A < \angle B < \angle C$), O и I — центры его описанной и вписанной окружностей. Докажите, что если прямая OI перпендикулярна биссектрисе угла B, то длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию.

4.49 Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что если $\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{2r}{R}}$, то длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию.

4.50 В треугольнике ABC угол B — средний по величине ($\angle A < \angle B < \angle C$), O — центр описанной окружности, H —

ортоцентр. Докажите, что если прямая OH перпендикулярна биссектрисе угла B, то углы треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию.

4.51 В треугольнике ABC ($\angle A < \angle B < \angle C$) I и O — центры вписанной и описанной окружностей, прямая OH перпендикулярна биссектрисе угла B. Может ли точка I лежать на прямой OH?

4.52 В треугольнике ABC из каждой вершины проведены высота и биссектриса, их длины соответственно равны h_1, l_1, h_2, l_2, h_3, l_3; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей этого треугольника. Докажите, что если $\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2} + \frac{h_3}{l_3} = 3\sqrt{\frac{2r}{R}}$, то треугольник ABC правильный.

4.53 Докажите, что середины сторон треугольника ABC, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром лежат на одной окружности, которая называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек, причем радиус этой окружности равен половине радиуса описанной окружности треугольника ABC.

4.54 Докажите, что центр окружности девяти точек треугольника совпадает с серединой отрезка, соединяющего центр описанной окружности с ортоцентром этого треугольника.

4.55 Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр треугольника ABC. Прямая OH называется прямой Эйлера. Докажите, что точка пересечения медиан лежит на прямой Эйлера и делит отрезок OH в отношении 1:2, считая от точки O.

4.56 Докажите, что радиус описанной окружности треугольника, вершинами которого служат центры вневписанных окружностей треугольника ABC, в два раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

4.57 Докажите, что расстояния между центром окружности, вписанной в треугольник, и центрами вневписанных окружностей делятся пополам окружностью, описанной около треугольника (теорема Мансиона).

4.58 Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников, одна из вершин которых совпадает с центром вневписанной окружности треугольника ABC, а две другие — с вершинами треугольника ABC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC, а сами эти окружности имеют общую точку, совпадающую с центром вписанной в треугольник ABC окружности.

4.59 Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ (теорема Чевы).

4.60 Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины треугольника ABC с точками, лежащими на противоположных сторонах, пересекаются в точке M. Для какой точки M произведение $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$ будет максимальным?

4.61 Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей на противоположных сторонах, пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

4.62 Прямые AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины треугольника ABC с точками, лежащими на противоположных сторонах, пересекаются в точке O. Докажите, что:

а) $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$;

б) $\frac{OA}{AA_1} + \frac{OB}{BB_1} + \frac{OC}{CC_1} = 2$ (теорема Жергонна).

4.63 В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Докажите, что если центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке OH, то этот треугольник равнобедренный.

4.64 Точка, из которой все стороны треугольника видны под углами в $120°$, называется точкой Торричелли этого треугольника (см. задачу 1.39). Докажите, что точка Торричелли треугольника лежит на окружности, описанной около внутреннего треугольника Наполеона этого треугольника (см. задачу 1.44).

4.65 На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Точки A_2, B_2, C_2 — середины сторон BC, CA, AB; точки A_3, B_3, C_3 — середины B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Докажите, что

а) треугольники $A_2B_2C_3$, $B_2C_2A_3$, $C_2A_2B_3$ являются правильными;

б) $A_2A_3 = B_2B_3 = C_2C_3$;

в) прямые A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 пересекаются в одной точке;

г) перпендикуляры к AB, BC, CA, проходящие через точки C_3, A_3, B_3 соответственно, пересекаются в одной точке.

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в этот треугольник окружности.

2. Докажите, что серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, совпадающей с центром описанной около этого треугольника окружности.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

4. При пересечении высот треугольника образуется три пары равных вертикальных углов. Докажите, что эти углы равны углам треугольника.

5. Докажите, используя результат задачи 4.4, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

6. Дан треугольник, который подобен своему ортоцентрическому треугольнику. Докажите, что углы этого треугольника либо равны, либо образуют геометрическую прогрессию.

7. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, используя результаты следующих задач данного параграфа:

1) задачи 4.8 б);
2) задачи 4.9.

8. Докажите, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине С треугольника ABC равны тогда и только тогда, когда $|\angle A - \angle B| = 90^\circ$.

9. Дан треугольник ABC. Известно, что биссектриса CC_1 внутреннего угла при вершине C равна биссектрисе CC_2 внешнего угла при той же вершине. Может ли прямая CB быть биссектрисой угла C_1CC_2?

10. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности этого треугольника до противоположной стороны.

11. Три попарно пересекающиеся окружности одного и того же радиуса проходят через одну общую точку. Докажите, что эта точка является ортоцентром треугольника с вершинами во вторых точках попарного пересечения данных окружностей.

12. Дан треугольник ABC, H — его ортоцентр, O, O_1, O_2, O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABC, BCH, CAH, ABH. Докажите, что отрезки OH, AO_1, BC_2, CO_3 пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

13. Медиана треугольника ABC, проведенная к стороне AB, равна расстоянию от центра описанной окружности до основания высоты, опущенной из вершины C. Докажите, что $|\angle B - \angle A| = 90^\circ$.

14. Докажите, что расстояние от вершины остроугольного треугольника до его ортоцентра равно противоположной стороне тогда и только тогда, когда угол при этой вершине равен 45°.

15. Докажите, что точка M, лежащая внутри треугольника ABC является точкой пересечения его медиан тогда и только тогда, когда треугольники ABM, BCM, CAM равновелики.

16. Дан треугольник ABC, O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 симметричные точке O относительно сторон BC, AC, CA треугольника ABC, являются вершинами треугольника, равного треугольнику ABC, причем стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника ABC.

17. Докажите, что треугольник AOB, где O — центр описанной около треугольника ABC окружности является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 45^\circ$.

18. Может ли центр описанной окружности треугольника ABC лежать на его:

а) стороне;

б) высоте;

в) биссектрисе;

г) средней линии?

19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана и высота, проведенные из вершины прямого угла, образуют равные углы с катетами.

20. В треугольнике ABC проведены медианы AM_1, BM_2, и высота CH_3. Докажите, что если треугольник $M_1M_2H_3$ правильный, то исходный треугольник ABC также правильный.

21. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентрический треугольник треугольника $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

22. В треугольнике ABC один из углов равен 60°, h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины этого треугольника, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей. Может ли выполняться равенство $\dfrac{h}{l} = \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$?

23. Может ли выполняться равенство $\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{2r}{R}}$ для равнобедренного треугольника? (Обозначения см. в предыдущей задаче).

24. Докажите, что треугольники ABC, ABH, BCH, ACH, где H — ортоцентр треугольника ABC, имеют общую окружность девяти точек (теорема Гамильтона).

25. В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности. Около треугольников ABI, BCI, CAI описаны окружности. Докажите, что центры этих окружностей лежат на описанной окружности треугольника ABC, а точки этих окружностей диаметрально противоположные точке I, являются центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

26. При помощи теоремы Чевы, докажите, что:

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке;

в) высоты треугольника пересекаются в одной точке;

г) прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке (точка Жергонна).

§ 3. Ответы. Указания. Решения

4.1. Первое решение.

Для доказательства утверждения задачи достаточно рассмотреть остроугольный треугольник ABC, так как для тупоугольного треугольника AHB (рис. 84) точка C является точкой пересечения высот, откуда следует, что высоты тупоугольного треугольника AHB пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда пересекаются в одной точке высоты остроугольного треугольника ABC. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные сторонам, противоположным этим вершинам. Точ-

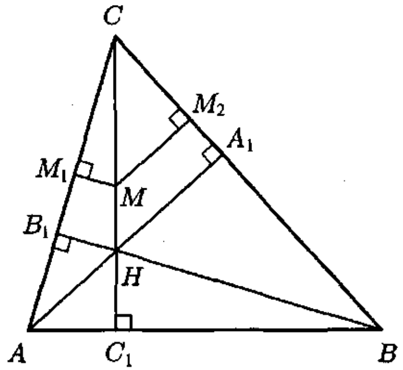


Рис. 84

ки пересечения этих прямых являются вершинами треугольника $A_2B_2C_2$ (рис. 85). Так как точки A, B, C — середины сторон B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются серединными перпендикулярами сторон этого треугольника и, следовательно, пересекаются в одной точке.

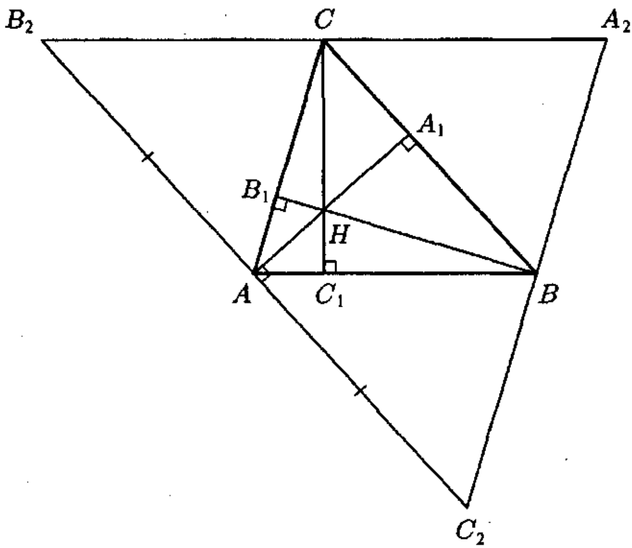


Рис. 85

Второе решение. Пусть точка M лежит на высоте CC_1, M_1 и M_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AC и BC (рис. 84). Тогда

$$MM_1 = CM \cdot \cos A, \quad MM_2 = CM \cdot \cos B, \quad \frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\cos A}{\cos B}.$$

Обратно, если

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

где

$$\alpha = \angle M_1MC, \quad \beta = \angle M_2MC,$$

то, поскольку

$$\alpha + \beta = A + B, \quad \alpha = A \quad \text{и} \quad \angle M_1CM = 90^\circ - A,$$

откуда следует, что

$$\angle CC_1A = 90^\circ.$$

Таким образом, мы показали, что высота CC_1 является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до сторон AC и BC постоянно и равно

$$\frac{\cos A}{\cos B}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для высот AA_1 и BB_1. Пусть H — точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Тогда

$$\frac{B_1H}{HA_1} = \frac{\dfrac{B_1H}{HC_1}}{\dfrac{HA_1}{HC_1}} = \frac{\dfrac{\cos C}{\cos B}}{\dfrac{\cos C}{\cos A}} = \frac{\cos A}{\cos B},$$

т. е. точка H принадлежит также высоте CC_1 и все высоты треугольника ABC пересекаются в этой точке.

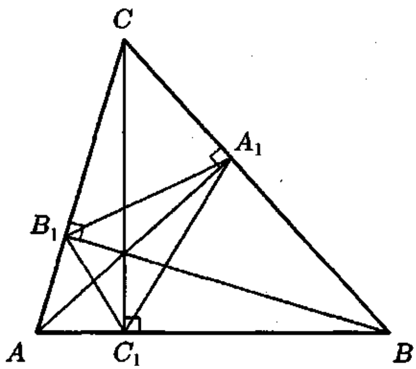


Рис. 86

4.2. Решение. Прямоугольные треугольники A_1AC и B_1BC подобны (рис. 86), так как угол B_1CA_1 у них общий, поэтому

$$\frac{A_1C}{B_1C} = \frac{AC}{BC},$$

откуда следует, что треугольники B_1CA_1 и ABC подобны. Аналогично доказывается подобие остальных треугольников.

4.3. Ответ. $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$.

Указание. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

4.4. Решение. Покажем, что высота CC_1 является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$ (рис. 86). Так как

$$\angle B_1C_1A = \angle A_1C_1B = \angle ACB,$$

то

$$\angle CC_1B_1 = 90° - \angle B_1C_1A = 90° - \angle A_1C_1B = A_1C_1C,$$

т. е. высота CC_1 делит пополам угол $B_1C_1A_1$. Аналогично доказывается, что высоты AA_1 и BB_1 являются биссектрисами углов A_1 и B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

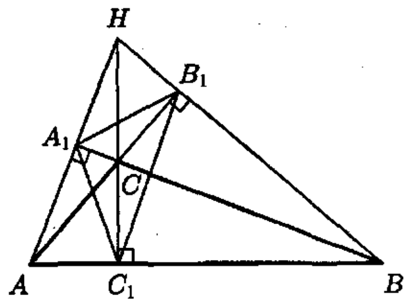


Рис. 87

4.5. Решение. Пусть высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 87). Тогда треугольник ABH остроугольный. Найдем углы этого треугольника. Поскольку $BA_1 \perp AA_1$, $BB_1 \perp AB_1$, то

$$\angle A_1HB_1 + \angle A_1CB_1 = \pi, \quad \angle A_1HB_1 = \pi - \angle A_1CB_1 = \pi - C.$$

Обозначим $\angle HAB = A_2$, $\angle HBA = B_2$, $\angle AHB = C_2$.

Из треугольников AHB_1 и BHA_1 находим

$$\angle HAB_1 = \angle HBA_1 = \frac{\pi}{2} - (\pi - C) = C - \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$A_2 = A + C - \frac{\pi}{2}, \quad B_2 = B + C - \frac{\pi}{2}.$$

Используя формулы для углов ортоцентрического треугольника $A_1B_1C_1$ остроугольного треугольника ABH (см. задачу 4.3), получим

$$C_1 = \pi - 2C_2 = \pi - 2\cdot(\pi - C) = 2C - \pi,$$

$$A_1 = \pi - 2B_2 = \pi - 2\cdot\left(B + C - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi - 2\cdot(\pi - A) = 2A,$$

$$B_1 = \pi - 2A_2 = \pi - 2\cdot\left(A + C - \frac{\pi}{2}\right) = 2B.$$

Итак,

$$A_1 = 2A, \quad B_1 = 2B, \quad C_1 = 2C - \pi.$$

4.6. Решение. Рассмотрим сначала случай остроугольного треугольника. Тогда $A_1 = \pi - 2A$, $B_1 = \pi - 2B$, $C_1 = \pi - 2C$. Если $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$, то

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Предположим теперь, что $\pi - 2A = B$, $\pi - 2B = C$, $\pi - 2C = A$, откуда

$$\pi = B + 2A = C + 2B = A + 2C \quad \text{и} \quad 2A = B + C,$$
$$2B = A + C, \quad 2C = A + B.$$

Вычтем из первого равенства (из последних трех) второе: $2(A-B) = B - A$, $3(A - B) = 0$, $A = B$. Но из последнего равенства

$$C = \frac{A+B}{2} = \frac{2A}{2} = A.$$

Итак,

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Случай $\pi - 2A = C$, $\pi - 2B = A$, $\pi - 2C = B$, очевидно, приводит к такому же результату. Тем самым установлено, что среди остроугольных треугольников только правильный треугольник удовлетворяет условию задачи. В случае тупоугольного треугольника $A_1 = 2A$, $B_1 = 2B$, $C_1 = 2C - \pi$ (считаем, что угол C тупой), поэтому

$$2C - \pi = A, \quad 2B = C, \quad 2A = B,$$

откуда следует, что

$$C = 2B = 4A, \quad 2C - \pi = 8A - \pi = A, \quad 7A = \pi,$$
$$A = \frac{\pi}{7} \quad \text{и} \quad B = 2A = \frac{2\pi}{7}, \quad C = 4A = \frac{4\pi}{7}.$$

Итак, окончательно получаем, что искомый остроугольный треугольник — правильный, а углы тупоугольного равны

$$A = \frac{\pi}{7}, \quad B = \frac{2\pi}{7}, \quad C = \frac{4\pi}{7}.$$

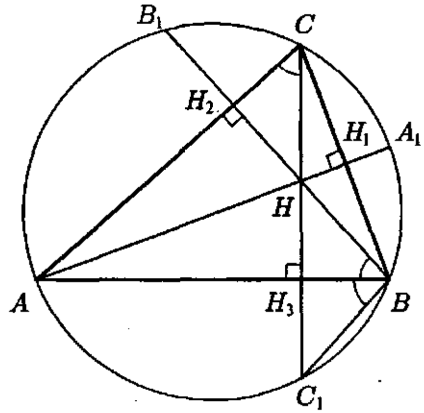


Рис. 88

4.7. Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники ACH_3 и ABH_2 (рис. 88). Так как угол CAB дополняет углы ACH_3 и ABH_2 до прямого, то

$$\angle ABH_2 = \angle ACH_3,$$

но $\angle ACH_3 = \angle ABC_1$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC_1, поэтому

$$\angle H_2BA = \angle ABC_1.$$

Поскольку $CH_3 \perp AB$, то отсюда следует, что $HH_3 = H_3C_1$, т. е. точка C_1 симметрична H относительно AB. Так же доказывается, что точки A_1 и B_1 симметричны H относительно BC и AC.

4.8. Решение.

а) Из результата предыдущей задачи вытекает, что H_1, H_2, H_3 — середины отрезков HA_1, HB_1, HC_1 (рис. 89), поэтому отрезки H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 являются средними линиями треугольников A_1B_1H, B_1C_1H, C_1A_1H и $H_1H_2 \parallel A_1B_1$, $H_2H_3 \parallel B_1C_1$, $H_3H_1 \parallel C_1A_1$, откуда следует подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $H_1H_2H_3$ с коэффициентом подобия равным 2.

б) Так как высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ (см. задачу 4), а стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно па-

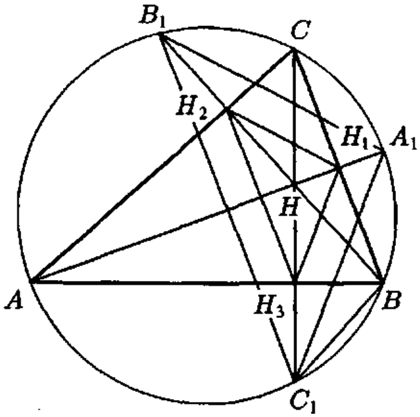


Рис. 89

раллельны сторонам треугольника $H_1H_2H_3$ (рис. 89), то высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

4.9. Решение. Так как точки H и C_1 симметричны относительно стороны AB треугольника ABC (см. задачу 4.7, рис. 88), то точка H лежит на дуге окружности, симметричной дуге AC_1B окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и ABC равны. Аналогично доказывается равенство радиусов окружностей, описанных около треугольников BCH, CAH и ABC.

4.10. Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, O_3 — центр окружности, описанной около треугольника ABH. Так как радиусы этих окружностей равны (см. предыдущую задачу), то четырехугольник AO_3BO — ромб, поэтому

$$OO_3 \perp AB \quad \text{и} \quad OM = MO_3.$$

В четырехугольнике OO_3HC имеем $OO_3 \parallel CH$, $O_3H = OC = R$. Таким образом, этот четырехугольник может быть либо параллелограммом, либо равнобочной трапецией. Последнее предположение отпадает, поскольку серединный перпендикуляр MB к стороне OO_3 не пересекает вторую сторону CH четырехугольника OO_3HC.

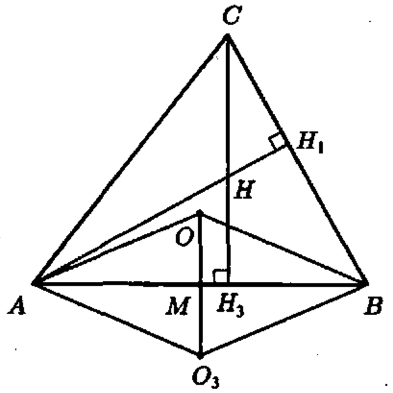


Рис. 90

Итак, OO_3HC параллелограмм и $OO_3 = CH$. Треугольник ABC на рис. 90 — остроугольный. Убедитесь самостоятельно, что утверждение задачи верно и в случае тупоугольного треугольника.

4.11. Решение. Поскольку точки P и P_3, H и H_3' симметричны относительно AB, то отрезки P_3H и PH_3' пересекаются в точке T, лежащей на AB (рис. 91). Из равенства треугольников AHT

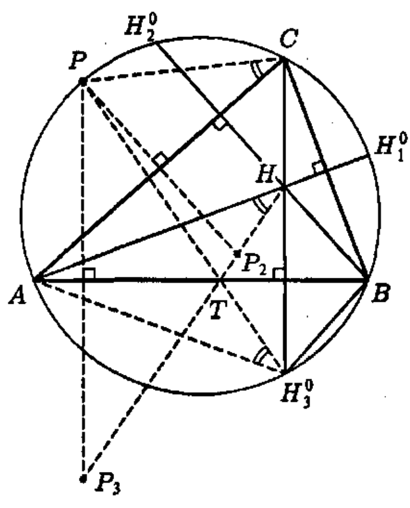


Рис. 91

и $AH_3'T$ вытекает равенство углов AHP_3 и $AH_3'P$, но

$$\angle AHP_3 = \angle ACP$$

как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично,

$$\angle AHP_2 = \angle AH_2'P = \angle ACP = \angle AHP_3,$$

т. е.

$$\angle AHP_2 = \angle AHP_3$$

и точки P_2, P_3, H лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что точки P_2, P_3, H лежат на одной прямой, откуда следует, что точки P_2, P_3, P_3 лежат на прямой, проходящей через точку H.

4.12. Решение. Рассмотрим три случая:

а) Треугольник ABC остроугольный. Пусть O — центр описанной окружности, CD — высота, $OD_1 \perp AC$ (рис. 92). Тогда

$$\angle DCB = \frac{\pi}{2} - \angle B.$$

Треугольник AOC равнобедренный,

$$\angle D_1OC = \frac{1}{2}\angle COA = \frac{1}{2}(2\angle B) = \angle B.$$

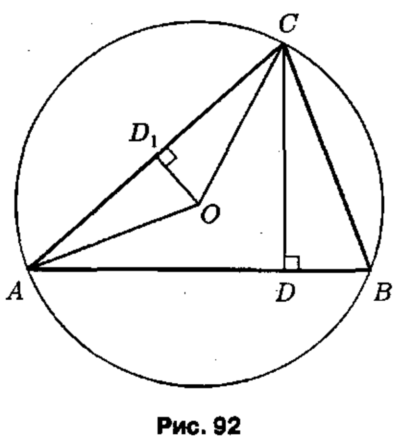


Рис. 92

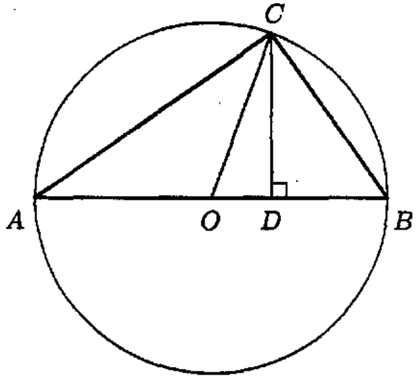


Рис. 93

Поэтому из прямоугольного треугольника CD_1O находим, что

$$\angle D_1CO = \frac{\pi}{2} - \angle B = \angle DCB.$$

б) Треугольник ABC прямоугольный $\left(\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\angle ACO = \angle DCB \quad (\text{рис. } 93).$$

Так как стороны AC и BC являются высотами треугольника ABC, а гипотенуза AB совпадает с диаметром AB, то рассматриваемые углы с вершинами в точках A и B равны нулю.

в) Треугольник ABC тупоугольный $\left(\angle ACB > \dfrac{\pi}{2}\right)$. В этом случае центр описанной окружности лежит вне треугольника (рис. 94). Угол AOB центральный, опирающийся на дугу ACB, поэтому

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 2\angle ABC + 2\angle BAC =$$
$$= 2\angle B + 2\angle A = 2(\angle A + \angle B) = 2(\pi - \angle C).$$

Так как ΔAOB равнобедренный, то

$$\angle OAB = \frac{\pi - \angle AOB}{2} = \frac{\pi - 2(\pi - \angle C)}{2} = \angle C - \frac{\pi}{2}$$

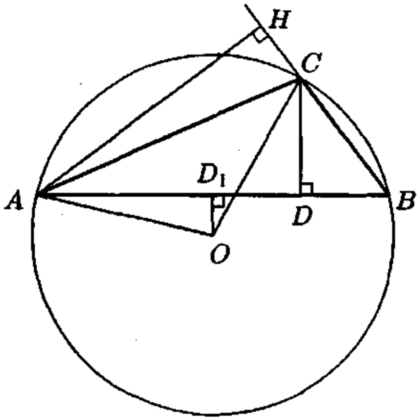


Рис. 94

и

$$\angle OAC = \angle OAB + \angle BAC = \angle C - \frac{\pi}{2} + \angle A =$$

$$= \angle A + \angle C - \frac{\pi}{2} = \pi - \angle B - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle B.$$

Поскольку $\triangle ACO$ равнобедренный, то

$$\angle ACO = \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \angle B.$$

Из прямоугольного $\triangle DCB$ находим

$$\angle DCB = \frac{\pi}{2} - \angle B = \angle ACO.$$

Аналогично, если $AH \perp BC$, то

$$\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \angle ACH = \frac{\pi}{2} - (\pi - \angle C) = \angle C - \frac{\pi}{2} = \angle OAB.$$

4.13. Указание. $|A - B|$. См. решение предыдущей задачи.

4.14. Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 95). Обозначим точку пересечения прямой AO

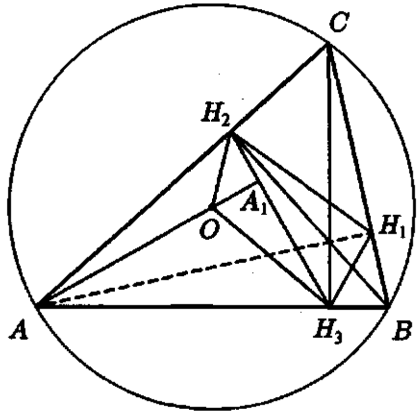


Рис. 95

с отрезком H_2H_3 через A_1. Рассмотрим треугольник A_1AH_2. В нем $\angle A_1H_2A = \angle B$ (см. задачу 4.2), $\angle A_1AH_2 = \frac{\pi}{2} - \angle C$ (см. задачу 4.12), поэтому

$$\angle AA_1H_2 = \pi - \angle A_1H_2A - \angle A_1AH_2 = \pi - \angle C - \left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$AA_1 \perp H_2H_3.$$

Перпендикулярность BO и H_3H_1, CO и H_1H_2 доказывается аналогично.

4.15. Решение. Соединим точку O с точками H_1, H_2, H_3 и рассмотрим полученные при этом четырехугольники OH_2AH_3, OH_3BH_1, OH_1CH_2 (рис. 95). Диагонали каждого из этих четырехугольников взаимно перпендикулярны, поэтому площадь каждого из них равна полупроизведению диагоналей:

$$S_{\triangle ABC} = S_{OH_2AH_3} + S_{OH_3BH_1} + S_{OH_1CH_2} =$$
$$= \frac{1}{2}R \cdot H_2H_3 + \frac{1}{2}R \cdot H_3H_1 + \frac{1}{2}R \cdot H_1H_2 =$$
$$= R \cdot \frac{H_2H_3 + H_3H_1 + H_1H_2}{2} = R \cdot p_H.$$

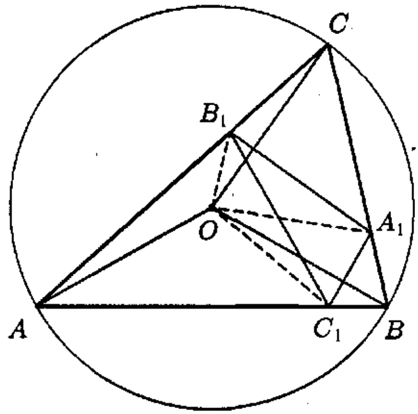


Рис. 96

4.16. Решение. Соединим точку O с точками A_1, B_1, C_1 (рис. 96) и обозначим углы между диагоналями полученных четырехугольников OB_1AC_1, OC_1BA_1, OA_1CB_1 через α, β, γ соответственно. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = S_{OB_1AC_1} + S_{OC_1BA_1} + S_{OA_1CB_1} =$$
$$= \frac{1}{2}R \cdot B_1C_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}R \cdot C_1A_1 \sin\beta + \frac{1}{2}R \cdot A_1B_1 \sin\gamma =$$
$$= R \cdot \frac{B_1C_1 \sin\alpha + C_1A_1 \sin\beta + A_1B_1 \sin\gamma}{2} = R \cdot p_H,$$

откуда

$$B_1C_1 \sin\alpha + C_1A_1 \sin\beta + A_1B_1 \sin\gamma = 2p_H,$$

но

$$B_1C_1 \sin\alpha + C_1A_1 \sin\beta + A_1B_1 \sin\gamma \leqslant B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1$$

и

$$2p_H \leqslant B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1,$$

т. е. периметр любого треугольника, вписанного в остроугольный треугольник ABC не меньше периметра ортоцентрического, откуда и следует, что ортоцентрический треугольник имеет минимальный периметр.

4.17. Решение. Так как четырехугольник $ABCO$ ромб, то

$$AB = BC,$$

т. е. ABC равнобедренный, далее

$$R = OA = AB = 2R\sin C, \quad \sin C = \frac{1}{2},$$

$$C = A = 30°, \quad B = 120°.$$

4.18. Решение. Поскольку $\angle B = \angle A + 90°$, то ΔABC тупоугольный и центр O описанной окружности лежит вне треугольника (рис. 97).

Далее $\angle OCD = \angle B - \angle A = 90°$ (см. задачу 4.13). Обозначим через точку M середину стороны AB, тогда $OM \perp AB$, так как центр описанной окружности ΔABC лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Учитывая то, что $CD \perp AD$, где D — основание высоты, опущенной из вершины C, заключаем, что четырехугольник $MDCO$ является прямоугольником, поэтому $MD = OC = R$ и из прямоугольного треугольника MDC находим

$$MD^2 + CD^2 = CM^2 \quad \text{или} \quad R^2 + h_c^2 = m_c^2.$$

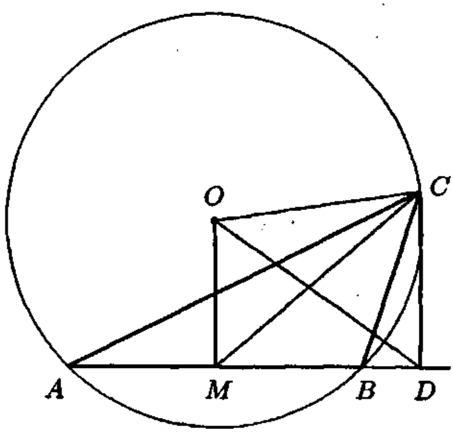


Рис. 97

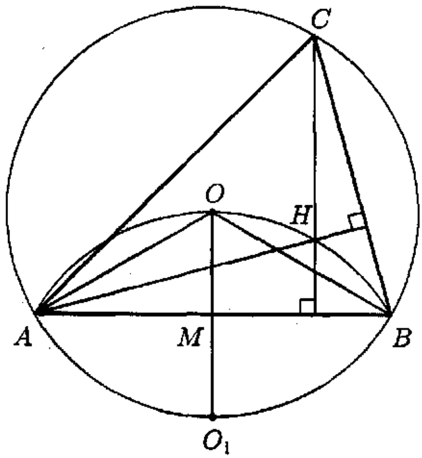


Рис. 98

4.19. Решение. Предположим, что выполняется условие а).

Выведем из него остальные условия. Так как $\angle ACB = 60^\circ$ (рис. 98), то $\angle AOB = 120^\circ$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и $\angle ACB$ (условие г)). Рассмотрим четырехугольник AO_1BO, где O_1 — точка пересечения серединного перпендикуляра OM к стороне AB с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда

$$AO = O_1O = BO = R \quad \text{и} \quad \angle AOO_1 = \angle O_1OB = 60^\circ,$$

поэтому треугольники AOO_1 и O_1OB равносторонние и четырехугольник AO_1BO — ромб. Таким образом, точка O_1, лежащая на описанной окружности треугольника ABC, симметрична точке O относительно стороны AB (условие б)). Точка O_1, очевидно, является центром окружности описанной около треугольника ABH (условие е)).

Поскольку дуги AO_1B и AOB симметричны относительно стороны AB, то точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABH (условие в)). $\angle AHB = \angle AOB = 120^\circ$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу (условие д)). Радиус окружности, описанной около $\triangle CAH$ равен R (см. задачу 4.9).

Поэтому

$$CH = 2R\sin(90^\circ - C) = 2R\cos C = 2R\cdot\cos 60^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R,$$

т. е. $\triangle COH$ равнобедренный (условие ж)). Таким образом, из условия а) следуют все остальные.

Проверьте самостоятельно, что и из каждого из условий б)–ж) вытекают все остальные условия.

4.20. Решение. Треугольники AH_3H_2, BH_1H_3, CH_2H_1 подобны треугольнику ABC (см. задачу 4.2), поэтому стороны треугольника $H_1H_2H_3$ образуют со сторонами треугольника ABC равные углы. Каждый из равных углов такой пары равен противоположному углу треугольника ABC (рис. 99). Пусть теперь в $\triangle ABC$ вписан $\triangle A_1B_1C_1$, стороны которого образуют со сторонами $\triangle ABC$ равные углы (рис. 100). Обозначим эти углы через α_1, β_1, γ_1.

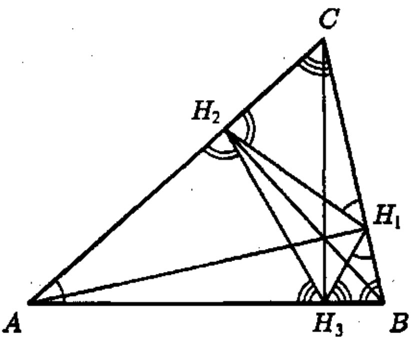


Рис. 99

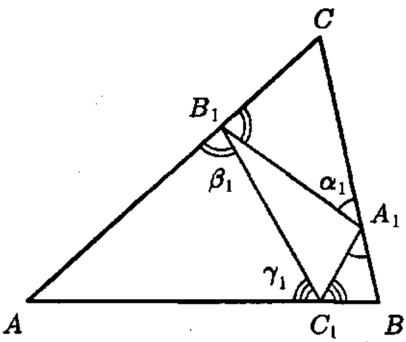


Рис. 100

Тогда, рассматривая треугольники AC_1B_1, C_1BA, A_1CB_1 можно записать:

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 = \pi - A, \\ \alpha_1 + \gamma_1 = \pi - B, \\ \alpha_1 + \beta_1 = \pi - C. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, получим

$$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 3\pi - (A+B+C) = 3\pi - \pi = 2\pi,$$

откуда

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = \pi.$$

Вычитая почленно из этого равенства уравнения записанной выше системы, установим, что

$$\alpha_1 = A, \quad \beta_1 = B, \quad \gamma_1 = C.$$

Итак, стороны вписанного треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны сторонам ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$, поэтому треугольники $A_1B_1C_1$ и $H_1H_2H_3$ совпадают. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

4.22. Решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 101). Опустим из точек M и C перпендикуляры на сторону AB, тогда

$$\triangle C_1MM_1 \sim \triangle C_1CH \quad \text{и} \quad \frac{CH}{MM_1} = \frac{CC_1}{MC_1} = 3,$$

поскольку

$$\frac{CM}{MC_1} = 2,$$

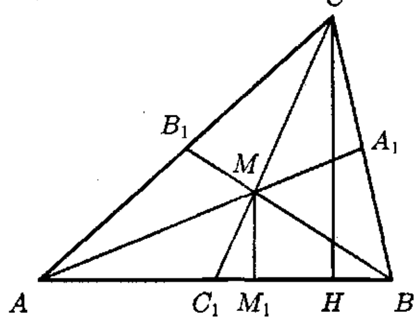


Рис. 101

откуда

$$MM_1 = \frac{1}{3}CH \quad \text{и} \quad S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MM_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

Аналогично можно показать, что

$$S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

Так как точки A_1, B_1, C_1 — середины соответствующих сторон треугольника ABC, то

$$S_{\triangle AMC_1} = S_{\triangle BMC_1} = \frac{1}{2}S_{\triangle AMB} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} =$$

$$= S_{\triangle BMA_1} = S_{\triangle A_1MC} = S_{\triangle CMB_1} = S_{\triangle B_1MA}.$$

4.23. Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC (рис. 102). Тогда AI, BI, CI — биссектрисы. Из $\triangle AIB$ находим

$$\angle AIB = \pi - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \pi - \frac{A+B}{2} = \pi - \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}.$$

Точно так же находим

$$\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}, \quad \angle CIA = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}.$$

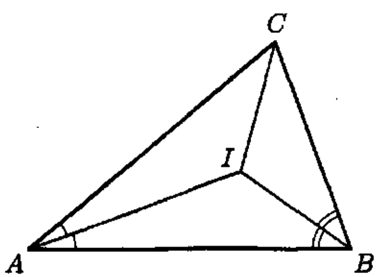


Рис. 102

4.24. Указание. Стороны треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, лежащие на сторонах треугольника ABC, являются отрезками касательных, проведенных из вершин треугольника ABC к вписанной окружности. Следовательно, окружность, вписанная в треугольник ABC, является описанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$.

4.25. Решение. Соединим центр I вписанной окружности треугольника ABC с вершинами этого треугольника и с точками касания вписанной окружности с его сторонами (рис. 103). Тогда

$$IC_1 \perp AB \quad \text{и} \quad AI \perp B_1C_1$$

(см. задачу 4.24 б)), поэтому $\angle IC_1B_1 = \angle IAC_1$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, но $\angle IAC_1 = \frac{A}{2}$, поэтому и $\angle IC_1B_1 = \frac{A}{2}$. Аналогично $\angle IC_1A_1 = \frac{B}{2}$, откуда

$$\angle B_1C_1A_1 = \angle IC_1B_1 + \angle IC_1A_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Из тех же самых рассуждений выводим, что

$$\angle C_1A_1B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \qquad \angle A_1B_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}.$$

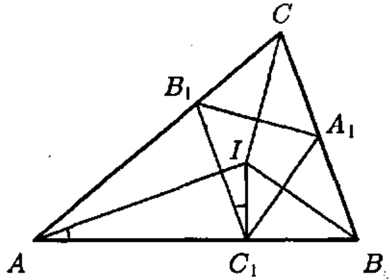


Рис. 103

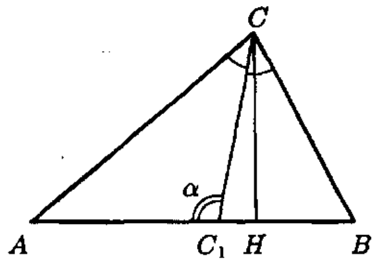


Рис. 104

4.26. Первое решение. Обозначим

$$\angle CC_1A = \alpha,$$

тогда

$$\angle CC_1B = \pi - \alpha \quad \text{(рис. 104).}$$

По теореме синусов для треугольников ACC_1 и BCC_1

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{AC_1}{\sin\frac{C}{2}}, \qquad \frac{CB}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{C_1B}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Разделив почленно первое из этих равенств на второе получим

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Второе решение. Поскольку треугольники ACC_1 и BCC_1 имеют общую высоту CH, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их оснований AC_1 и C_1B:

$$\frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

С другой стороны

$$\frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}} = \frac{\frac{1}{2}AC\cdot CC_1\cdot\sin\frac{C}{2}}{\frac{1}{2}CB\cdot CC_1\cdot\sin\frac{C}{2}} = \frac{AC}{CB},$$

поэтому

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Третье решение. Проведем через вершину B параллельно биссектрисе CC_1 до пересечения с продолжением стороны AC в точке D (рис. 105). Тогда

$$\triangle ACC_1 \sim \triangle ADB \quad \text{и} \quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CD}.$$

Так как $CC_1 \parallel DB$, то

$$\angle C_1CB=\angle CBD,$$

но

$$\angle ACB=2\cdot\angle C_1CB=\angle CDB+\angle CBD,$$

откуда

$$\angle CDB=\angle C_1CB=\angle CBD,$$

т. е. $\triangle BCD$ равнобедренный и $BC=CD$ поэтому

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CD}=\frac{AC}{CB}.$$

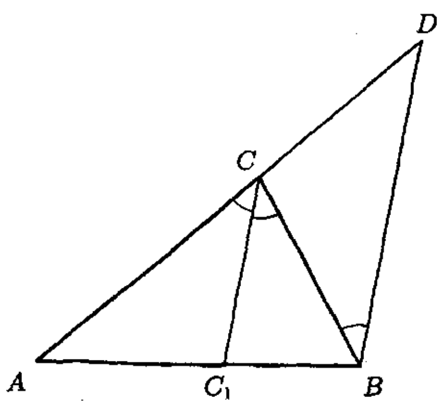


Рис. 105

4.27. Решение. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2}ab\sin C.$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACC_1} + S_{\Delta C_1CB} = \frac{1}{2}AC \cdot CC_1 \sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}CC_1 \cdot CB \cdot \sin\frac{C}{2}$$

или

$$\frac{1}{2}l_c(a+b)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Из последнего равенства можно найти l_c:

$$l_c = \frac{ab\sin C}{(a+b)\sin\frac{C}{2}} = \frac{2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)\sin\frac{C}{2}} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

4.28. Решение. а) Так как $AHB = 120°$ (см. задачу 4.19 д)), то из всех точек дуги AHB окружности, описанной около треугольника ABH сторона AB видна под углом $120°$. Поэтому достаточно доказать, что $\angle AIB = 120°$, но

$$\angle AIB = 90° + \frac{C}{2} = 90° + \frac{60°}{2} = 120° \quad \text{(см.задачу 2.23).}$$

б) Из прямоугольного треугольника AH_1C (рис. 106) находим

$$\angle CAH_1 = 90° - \angle ACB = 90° - 60° = 30°,$$

тогда из прямоугольного ΔAH_2H находим

$$\angle AHH_2 = 90° - 30° = 60°.$$

Поскольку $\angle AHB = 120°$, то угловая мера дуги AHB равна $60°$. Точка O — центр описанной окружности ΔABC, она лежит на серединном перпендикуляре OM к стороне AB и на окружности, описанной около ΔAHB (см. задачу 4.19 в), поэтому O — середина дуги AHB и $\angle OHA = 30°$.

в) Треугольник COH равнобедренный (см. задачу 4.19 ж)), а его боковые стороны CO и CH образуют равные углы со сторонами AC и BC треугольника ABC (см. задачу 4.12), поэтому

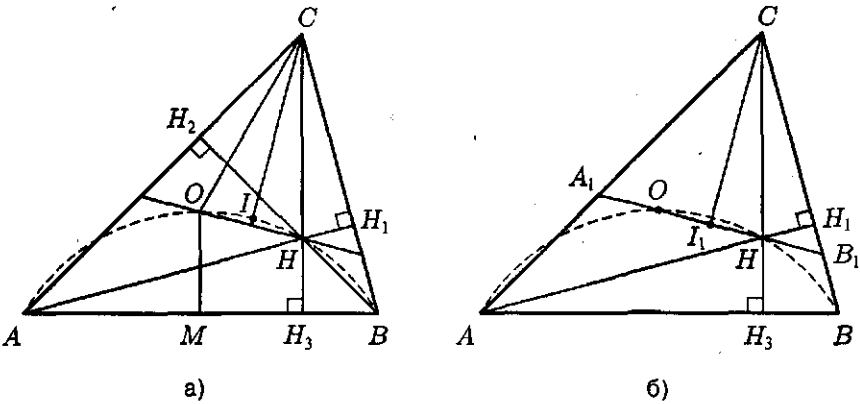


Рис. 106

биссектриса CI угла ACB является также биссектрисой угла OCH, т. е. биссектрисой угла при вершине C равнобедренного $\triangle COH$ $(CO = CH)$, откуда следует, что $CI \perp OH$.

г) Обозначим точки пересечения прямых OH и CI, OH и AC, OH и BC через I_1, A_1, B_1 соответственно (рис. 106). Тогда CI_1 является одновременно биссектрисой и высотой треугольника A_1CB_1, поэтому этот треугольник равнобедренный, а так как $\angle A_1CB_1 = 60°$, то он является правильным.

4.29. Указание. а) Использовать то, что

$$\angle ACC_1 = \angle C_1CB \quad (\text{рис. } 107).$$

б) **Решение.** $\angle ABP = \angle ACP = \dfrac{C}{2}$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AP (рис. 107)

$$\angle IBA = \frac{B}{2} \quad \text{и} \quad \angle IBP = \angle IBC_1 + \angle C_1BP = \frac{B+C}{2},$$

но

$$\angle C_1IB = \frac{B+C}{2}$$

как внешний угол треугольника BCI.

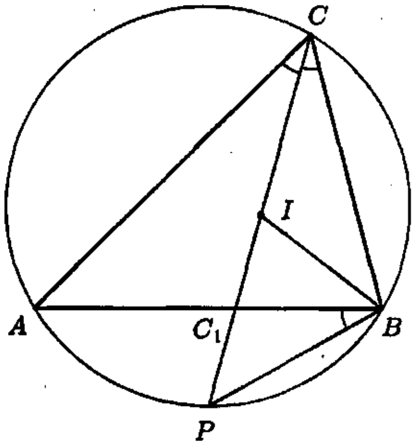


Рис. 107

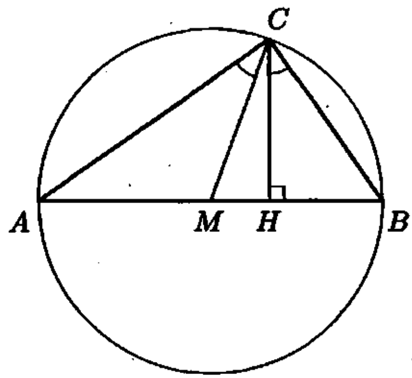


Рис. 108

Итак, треугольник BIP равнобедренный. Аналогично доказывается, что равнобедренным является и треугольник PIA.

в) **Указание.** Данное утверждение следует из пуктов а) и б) этой задачи.

4.30. Решение. Поскольку высота треугольника, опущенная из некоторой вершины треугольника и радиус описанной окружности, образуют равные углы со сторонами треугольника, выходящими из этой же вершины (см. задачу 4.12), то из условия задачи следует, что центр описанной окружности лежит на медиане CM. Так как треугольник ABC по условию неравнобедренный, то этот центр совпадает с серединой M стороны AB (рис. 108), поскольку она является точкой пересечения серединного перпендикуляра к стороне AB и медианы CM, а это и означает, что треугольник ABC прямоугольный.

4.31. Решение. Соединим точки O и C_1 (рис. 109), тогда

$$OC_1 \perp AB.$$

Опустим из точки C перпендикуляр CH на продолжение AB, тогда

$$CH \parallel OC_1 \quad \text{и} \quad \angle OCH = \angle COC_1 = 90^\circ.$$

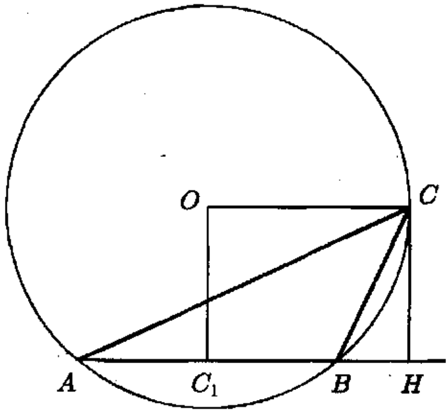


Рис. 109

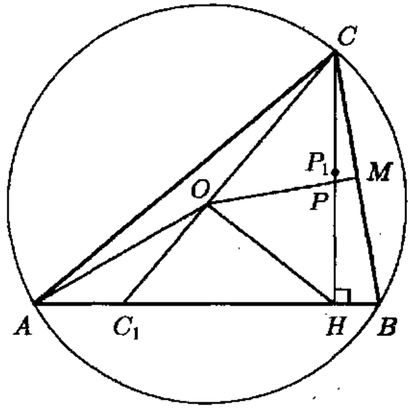


Рис. 110

Но $\angle OCH = |\angle B - \angle A|$ (см. задачу 4.13), поэтому

$$|\angle B - \angle A| = 90^\circ.$$

4.32. Решение. Пусть M — середина стороны BC, C_1 — точка пересечения прямых CO и AB, P — прямых CH и OM (рис. 110). Прямая PM не может быть параллельна AB, так как в этом случае точка O была бы серединой CC_1, что невозможно, так как из $\triangle AOC_1$ имеем:

$$CO_1 < AO = R = CO.$$

Отсюда следует, что середина P_1 высоты CH лежит на отрезке CP. Рассмотрим треугольник OPC. В нем

$$\angle OCP = \angle B - \angle A = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ \quad \text{(см. задачу 4.13)},$$

$$\angle COP = 90^\circ - \angle OCM = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

так как

$$\angle HCB = 90^\circ - \angle HBC = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ,$$

а

$$\angle OCM = \angle OCP + \angle HBC = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ.$$

Таким образом, $\triangle OPC$ равнобедренный, и $OP = CP$. Для того, чтобы установить, является ли треугольник COH прямоугольным, достаточно сравнить длины отрезков CP_1 и OP_1 (треугольник COH прямоугольный, тогда и только тогда, когда $CP_1 = OP_1$, поскольку P_1 — середина CH). Так как P_1 лежит на отрезке CP, то

$$CP_1 < CP = OP,$$

но в треугольнике OPP_1 $\angle OPP_1 > 90^\circ$ как внешний угол прямоугольного $\triangle PMC$, поэтому

$$OP_1 > OP = CP > CP_1.$$

Итак, $CP_1 < OP_1$ и точка O лежит вне окружности, построенной на CH как на диаметре, т. е. $\angle COH < 90^\circ$ и $\triangle COH$ остроугольный.

4.33. Решение. Предположим, что в треугольнике ABC $\angle B > \angle A$, CM — медиана, CC_1 — биссектриса, CH — высота (рис. 111). Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB} > 1 \quad \text{(см. задачу 4.26).}$$

Поэтому точка C_1 принадлежит отрезку MB. Далее имеем

$$\left(\angle A + \frac{\angle C}{2}\right) + \left(\angle B + \frac{\angle C}{2}\right) = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Треугольник ABC неравнобедренный, поэтому

$$\angle A + \frac{\angle C}{2} \neq \angle B + \frac{\angle C}{2} \quad \text{и} \quad \angle A + \frac{\angle C}{2} < 90^\circ,$$

так как $\angle A < \angle B$.

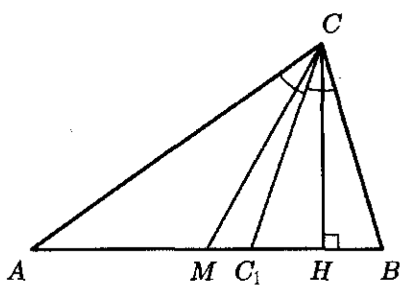


Рис. 111

Из $\triangle ACC_1$ получаем

$$\angle AC_1C = 180^\circ - \left(\angle A + \frac{\angle C}{2}\right) > 90^\circ,$$

т. е. $\triangle ACC_1$ тупоугольный и основание H высоты CH лежит на продолжении стороны AC_1. Таким образом, мы установили, что точка C_1 принадлежит отрезку MH, т. е. находится на стороне AB между точками M и H, что и требовалось доказать.

4.35. Ответ. 30°, 60°, 90°. **Указание.** Используйте решение задачи 4.30.

4.36. Решение. Предположим, что треугольник ABC является остроугольным. Тогда, используя формулу для углов ортоцентрического треугольника (см. задачу 4.3) имеем:

$$60^\circ = \angle H_1 = 180^\circ - 2\angle A,$$

откуда

$$\angle A = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Аналогично,

$$\angle B = \angle C = 60^\circ,$$

т. е. $\triangle ABC$ правильный. Треугольник $H_1H_2H_3$ является также ортоцентрическим для равнобедренного тупоугольного треугольника AHB, углы которого равны 30°, 30°, 120° (рис. 112). Итак, если

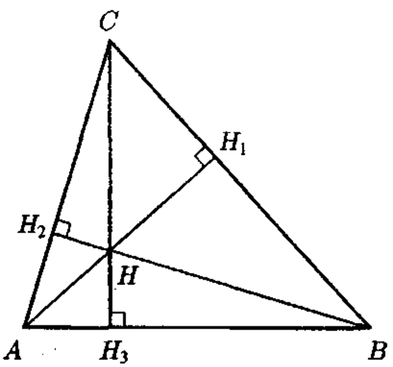


Рис. 112

ортоцентрический треугольник некоторого треугольника правильный, то исходный треугольник либо правильный, либо равнобедренный с углами 30°, 30°, 120° и, таким образом, утверждение задачи верно лишь для остроугольных треугольников.

4.37. Решение. а) Обозначим $\angle CAB=A$, $\angle ABC=B$, $\angle BCA=C$.

Тогда $\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1 = \dfrac{A}{2}$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу A_1C (рис. 113). Аналогично,

$$\angle C_1A_1B_1 = \frac{B+C}{2}.$$

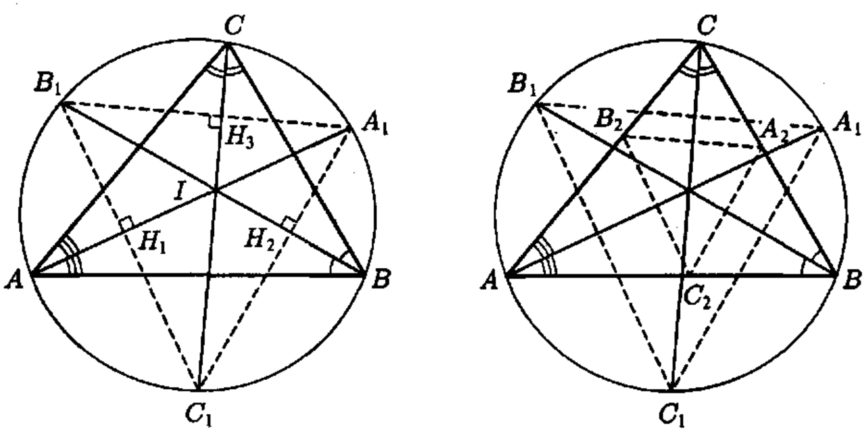
Рассмотрим треугольник $A_1H_3C_1$. В нем

$$\angle A_1H_3C_1 = 180° - \angle CC_1A_1 - C_1A_1B_1 = 180° - \frac{A}{2} - \frac{B+C}{2} =$$

$$= 180° - \frac{A+B+C}{2} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°,$$

т. е.

$$CC_1 \perp A_1B_1.$$



а) б)

Рис. 113

Точно так же доказывается, что

$$AA_1 \perp B_1C_1 \quad \text{и} \quad BB_1 \perp C_1A_1.$$

Итак, A_1H_1, B_1H_2, C_1H_3 — высоты треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому точка I является ортоцентром этого треугольника.

б) Прямая CC_1 является биссектрисой равнобедренного треугольника A_2CB_2 (рис. 113 б)), поэтому

$$CC_1 \perp A_2B_2,$$

но в предыдущем пункте доказано, что

$$CC_1 \perp A_1B_1,$$

следовательно,

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2.$$

Аналогично,

$$B_1C_1 \parallel B_2C_2, \quad C_1A_1 \parallel C_2A_2,$$

поэтому углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны как углы с соответственно параллельными сторонами и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

в) Поскольку I — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$, то точки I и C симметричны относительно стороны A_1B_1 (см. задачу 4.7), т. е. H_3 — середина отрезка IC. Аналогично, точки H_1 и H_2 — середины отрезков IA и IB. Отсюда следует, что треугольник ABC переходит в треугольник $H_1H_2H_3$ при гомотетии с центром I и коэффициентом $1/2$.

4.38. Решение. Углы треугольника $H_1H_2H_3$ (рис. 114) равны

$$\angle H_1 = 180^\circ - 2\angle A,$$

$$\angle H_2 = 180^\circ - 2\angle B,$$

$$\angle H_3 = 180^\circ - 2\angle C \quad (\text{см.задачу } 4.3).$$

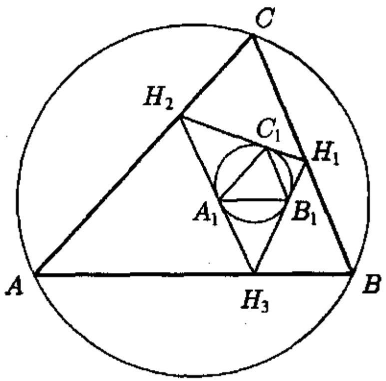


Рис. 114

Тогда можно найти углы треугольника $A_1B_1C_1$:

$$\angle A_1 = 90^\circ - \frac{\angle H_1}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle A) = \angle A,$$

$$\angle B_1 = 90^\circ - \frac{\angle H_2}{2} = \angle B,$$

$$\angle C = 90^\circ - \frac{\angle H_3}{2} = \angle C \quad \text{(см. задачу 4.25).}$$

Так как углы треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равны, то эти треугольники подобны.

4.39. Решение. Из результата задачи 4.11 следует, что точки P_1, P_2, P_3 симметричные точке P, относительно сторон BC, CA, AB треугольника ABC лежат на прямой, проходящей через ортоцентр этого треугольника. При гомотетии с центром P и коэффициентом $\frac{1}{2}$ точки P_1, P_2, P_3 перейдут в основании перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC, а ортоцентр H треугольника ABC — в середину отрезка PH. Так как при гомотетии прямая переходит в прямую, то основания указанных перпендикуляров и середина отрезка PH лежат на одной прямой.

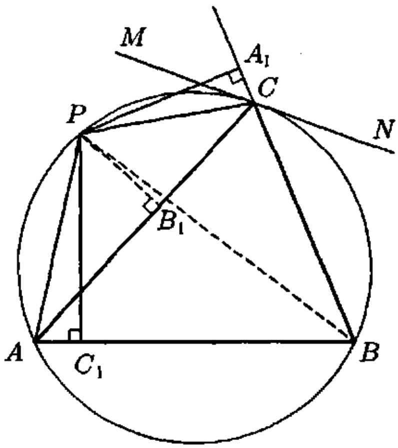


Рис. 115

4.40. Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники PC_1A и PA_1C (рис. 115). Угол PAC_1 измеряется половиной дуги PCB, как вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Проведем через точку C касательную MN. Тогда

$$\angle PCA_1 = \angle PCM + \angle MCA_1 = \angle PCM + \angle BCN,$$

но углы PCM и BCN измеряются половинами дуг PC и CB соответственно, как углы между касательной и хордой, поэтому угол PCA_1 измеряется половиной дуги PCB, т. е.

$$\angle PAC_1 = \angle PCA_1$$

и прямоугольные треугольники PC_1A и PA_1C подобны. Из подобия этих треугольников получаем:

$$\frac{PA_1}{PC_1} = \frac{PC}{PA}, \quad \text{или} \quad PA \cdot PA_1 = PC \cdot PC_1.$$

Аналогично, из подобия треугольников PA_1B и PB_1A выводим:

$$\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PB}{PA}, \quad PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1$$

откуда следует, что

$$PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = PC \cdot PC_1.$$

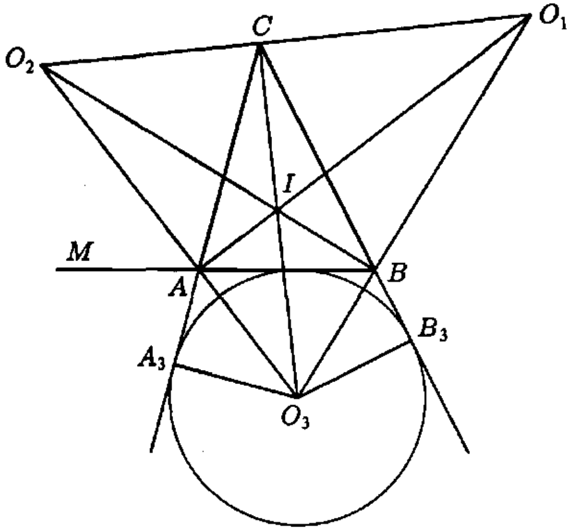


Рис. 116

4.41. Решение. а) Так как вневписанная окружность с центром в точке O_3 касается прямых CA и CB, то точка O_3 лежит на биссектрисе угла ACB (рис. 116). Эта же окружность касается и стороны AB, поэтому ее центр O_3 лежит на пересечении биссектрис внешних углов A_3AB и B_3BA треугольника ABC при вершинах A и B.

Точки O_1 и O_2 также совпадают с точками пересечения биссектрис соответствующих углов.

б) Найдем углы IAO_3 и IAO_2:

$$\angle IAO_3=\frac{1}{2}\angle CAB+\frac{1}{2}\angle BAA_3=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle BAA_3)=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ,$$

$$\angle IAO_2=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle MAC)=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ,$$

т. е. $\angle IAO_3+\angle IAO_2=180^\circ$ и поэтому точки O_3, A, O_2 лежат на одной прямой, а биссектриса AO_1 треугольника ABC является высотой O_1A треугольника $O_1O_2O_3$. Точно так же доказывается, что O_2B и O_3C являются высотами треугольника $O_1O_2O_3$ и, следовательно, треугольник ABC ортоцентрический для треугольника $O_1O_2O_3$.

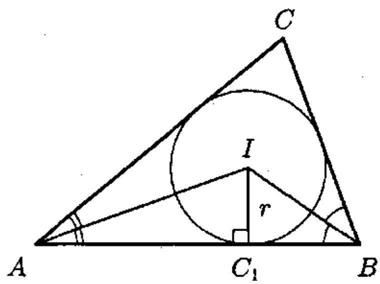


Рис. 117

4.42. Решение. Пусть $AB = c$. Тогда из треугольника ABI (I — центр вписанной окружности)

$$c = AC_1 + C_1B = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right) \quad \text{(рис. 117).}$$

С другой стороны, $c = 2R\sin C$, $R = \dfrac{c}{2\sin C}$. Поэтому

$$\frac{r}{R} = \frac{2c\sin C}{\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)c} = \frac{2\sin C}{\left(\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin C}{\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C}{\sin\frac{A+B}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C}{\sin\frac{180^\circ - C}{2}} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

откуда

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

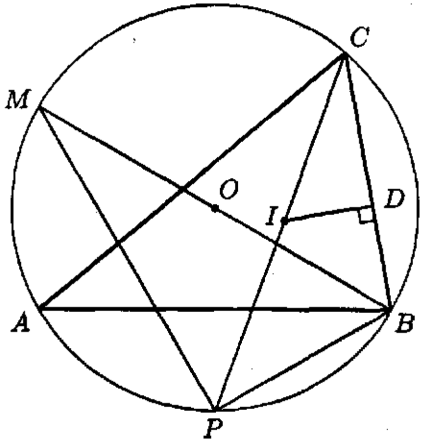


Рис. 118

4.43. Решение. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, D — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону BC (рис. 118). Проведем диаметр BM, тогда треугольники CDI и BPM подобны ($\angle ICD = \angle PMB$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу PB). Поэтому

$$\frac{CI}{MB} = \frac{CI}{2R} = \frac{ID}{PB} = \frac{r}{PB},$$

откуда $CI \cdot PB = 2Rr$. Так как треугольник BPI равнобедренный (см. задачу 4.29 б)), то $PB = PI$, откуда

$$CI \cdot IP = CI \cdot PB = 2Rr.$$

4.44. Решение. Проведем диаметр MN, проходящий через центр вписанной окружности I (рис. 119). Тогда

$$MI \cdot IN = CI \cdot IP, \quad \text{или} \quad (R+d)(R-d) = 2Rr,$$

поскольку $CI \cdot IP = 2Rr$ (см. предыдущую задачу), откуда

$$R^2 - d^2 = 2Rr \quad \text{и} \quad d^2 = R^2 - 2Rr.$$

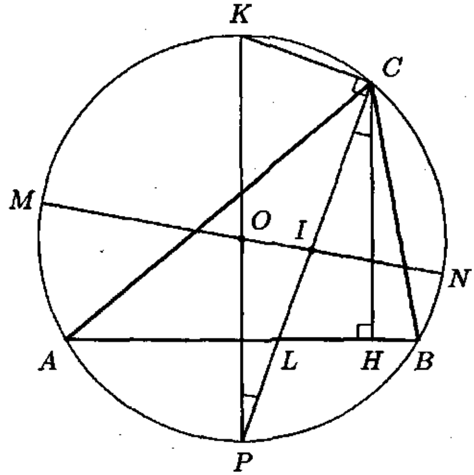


Рис. 119

4.45. Решение. Обозначим угол LCH через α (рис. 119). Тогда

$$\cos\alpha = \frac{h}{l}.$$

С другой стороны, из треугольника PKC находим

$$\cos\alpha = \frac{PC}{KP} = \frac{CI+IP}{2R} = \frac{1}{R}\cdot\frac{CI+IP}{2} \geqslant \frac{1}{R}\sqrt{CI\cdot IP},$$

откуда, используя результат задачи 4.43, получим:

$$\frac{h}{l} = \cos\alpha \geqslant \frac{1}{R}\sqrt{2rR} = \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

4.46. Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке O, касающуюся одной из сторон угла в точке A и пересекающую другую его сторону в точках B и C (рис. 120). Тогда $AP \perp MA$, O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Так как $\angle BAH = \angle PAC$ (см. задачу 4.12), то биссектриса AA_1 угла BAC является также биссектрисой угла HAP. На этой биссектрисе лежит центр I вписанной окружности треугольника ABC.

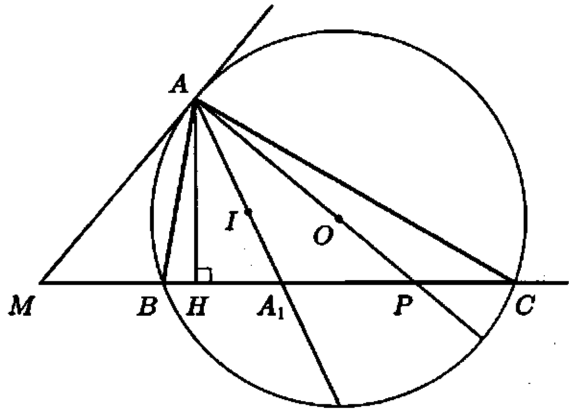


Рис. 120

Поскольку AH является высотой для всех построенных таким образом треугольников ABC, а центры их описанных окружностей лежат на прямой AP, то центры их вписанных окружностей находятся на прямой AA_1.

4.47. Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} \quad \text{(см. задачу 4.23)},$$

то

$$\angle BMC = \angle BIC$$

и точка M лежит на дуге BIC окружности, описанной около треугольника BCI (рис. 121). С другой стороны, центр описанной около треугольника BCI окружности лежит на биссектрисе угла A (см. задачу 4.29), поэтому прямая AM является биссектрисой угла A и точка M совпадает с точкой I.

4.48. Решение. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Если $OI \perp BL$, то I — середина BP (рис. 122). Поскольку треугольник PCI равнобедренный (см. задачу 4.29), то $CP = PI = IB$. Обозначим через M середину стороны BC и соединим точку I с M. Тогда

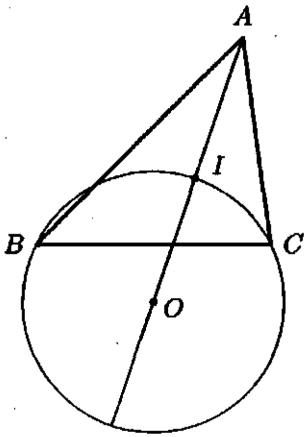


Рис. 121

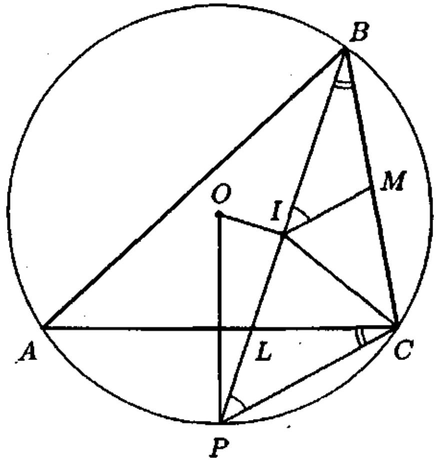


Рис. 122

$IM \parallel PC$ как средняя линия треугольника PCB,

$$\angle ACP = \angle ABP = \angle PBC \quad \text{и} \quad CP = BI,$$

поэтому $\triangle BIM = \triangle LPC$ и $CL = BM = \dfrac{a}{2}$.

Аналогично показывается, что $AL = \dfrac{c}{2}$, откуда следует

$$AC = AL + LC = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a+c}{2},$$

т. е.

$$b = \frac{a+c}{2},$$

а это и означает, что числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

4.49. Решение. Из результата задачи 4.45 следует, что $\dfrac{h}{l} \geqslant \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$ причем равенство достигается только в случае $BI = IP$ (рис. 122). Но в этом случае справедливость доказываемого утверждения вытекает из предыдущей задачи.

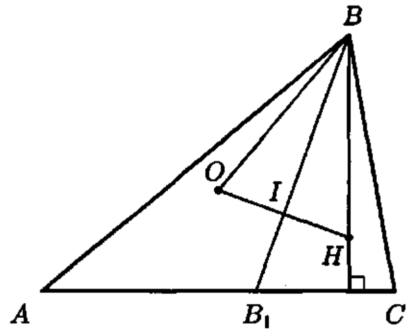


Рис. 123

4.50. Решение. Биссектриса угла B является также биссектрисой угла OBH (см. задачу 4.12), поэтому если $BB_1 \perp OH$, то треугольник OBH равнобедренный (рис. 123), но в этом случае $\angle ABC = 60^\circ$ (см. задачу 4.19). Покажем, что если один из углов треугольника равен 60°, то его углы образуют арифметическую прогрессию. В самом деле, пусть

$$\angle BAC = 60^\circ - \varphi, \quad \angle ABC = 60^\circ,$$

тогда

$$\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ - \varphi) - 60^\circ = 60^\circ + \varphi,$$

что и требовалось доказать.

4.51. Решение. Поскольку прямая OH перпендикулярна биссектрисе угла B, то углы треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию и равны $60^\circ - \varphi$, 60°, $60^\circ + \varphi$ (см. предыдущую задачу). Если точка I лежит на прямой OH, то прямая OI совпадает с прямой OH и поэтому также перпендикулярна биссектрисе угла B. В этом случае длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию (см. задачу 4.48). Итак, наша задача свелась к следующей: могут ли стороны и углы треугольника одновременно составлять арифметическую прогрессии? Пусть против углов $60^\circ - \varphi$, 60°, $60^\circ + \varphi$ лежат стороны $b - d$, b, $b + d$. Тогда по теореме косинусов

$$b^2 = (b+d)^2 + (b-d)^2 - 2(b+d)(b-d)\cos 60^\circ =$$

$$= 2(b^2 + d^2) - (b^2 - d^2) = b^2 + 3d^2,$$

$$b^2 = b^2 + 3d^2,$$

откуда $d = 0$, т. е. треугольник ABC равносторонний. Но по условию треугольник ABC разносторонний ($\angle A < \angle B < \angle C$), поэтому точка I не может лежать на прямой OH.

4.52. Решение. Так как $\frac{h}{l} \geqslant \sqrt{\frac{2r}{R}}$ (см. задачу 4.45), то в нашем случае

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3} = \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Но тогда стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, причем каждая сторона должна быть средней по величине (см. задачу 4.49). Это возможно только в том случае, если разность этой прогрессии равна нулю, т. е. треугольник ABC правильный.

4.53. Решение. Обозначим через M_3 и D_3 точки пересечения серединного перпендикуляра к стороне H_1H_2 ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ с прямыми AB и CH_3 и покажем, что эти точки лежат на окружности, описанной около треугольника $H_1H_2H_3$ и совпадают с серединами отрезков AB и CH (рис. 124). Высота H_3C является биссектрисой треугольника $H_1H_2H_3$ (см. задачу 4.4), поэтому она пересекает описаную окружность этого треугольника в точке D_3' — середине дуги H_1H_2, но серединный перпендикуляр M_3D_3 стороны H_1H_2 пересекает эту окружность также в середине дуги H_1H_2, откуда следует, что точка D_3 совпадает с точкой D_3', т. е. D_3 лежит на описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$. Поскольку точка D_3 лежит на серединном перпендикуляре стороны H_1H_2, то она равноудалена от точек H_1 и H_2 и поэтому совпадает с серединой отрезка CH (середина отрезка CH является центром окружности, описанной около четырехугольника CH_2HH_1,

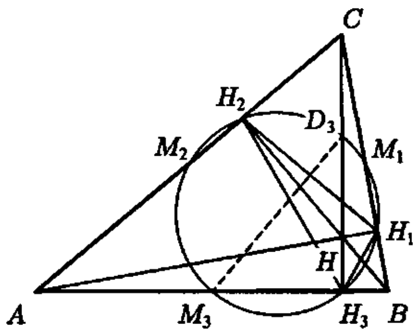


Рис. 124

так как углы CH_2H и CH_1H прямые). Так как центр описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ лежит на прямой M_3D_3 и $\angle D_3H_3M_3 = 90^\circ$, то точка M_3 также лежит на этой окружности и совпадает с серединой AB (точка M равноудалена от точек H_1 и H_2 и, следовательно, совпадает с центром окружности, описанной около четырехугольника ABH_1H_2). Аналогично показывается, что точки M_1, D_1, M_2, D_2 лежат на окружности Эйлера O_9. Треугольник $M_1M_2M_3$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия равным 1/2, окружность O_9 является описанной окружностью треугольника $M_1M_2M_3$, поэтому ее радиус равен половине радиуса описанной окружности треугольника ABC.

4.54. Решение. Пусть M_1 — середина AB, E_1 — основание высоты CE_1 (рис. 125). Тогда точки M_1 и E_1 лежат на окружности O_9, поэтому центр этой окружности лежит на серединном перпендикуляре отрезка M_1E_1. Точно так же точка O_9 лежит на серединном перпендикуляре отрезка M_2E_2 (M_2 — середина AC, E_2 — основание высоты BE_2). Данные серединные перпендикуляры являются средними линиями трапеций OM_1E_1H и OHE_2M_2, поэтому они пересекаются в середине отрезка OH.

4.55. Решение. Обозначим точку пересечения медианы CM с отрезком OH через G (рис. 126). Тогда треугольники OGM и CGH подобны. Так как $OM = 1/2CH$ (см. задачу 4.10 и задачу 4.10 для

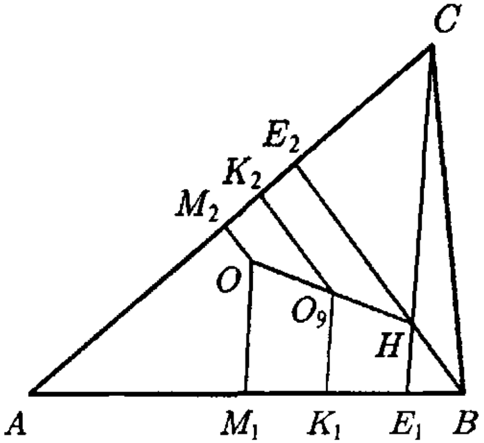


Рис. 125

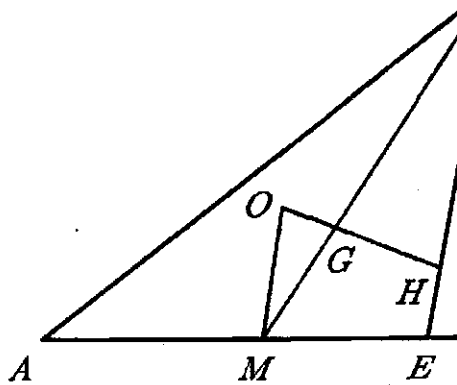


Рис. 126

самостоятельного решения), то

$$\frac{CG}{GM} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{OG}{GH} = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что G — точка пересечения медиан треугольника ABC и $OG : GH = 1 : 2$.

4.56. Решение. Обозначим через R радиус описанной окружности треугольника ABC, через I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда треугольник ABC является ортоцентрическим для треугольника $I_aI_bI_c$ (см. задачу 4.41), поэтому описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек треугольника $I_aI_bI_c$, откуда следует, что радиус описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$ равен $2R$ (см. задачу 4.53).

4.57. Указание. Использовать решение предыдущей задачи.

4.58. Решение. Треугольник ABC является ортоцентрическим для треугольника $I_aI_bI_c$ (рис. 127), поэтому центр I вписанной окружности является ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$ (см. задачу 4.41). Так как в четырехугольнике

$$I_aBIC \angle I_aBI = \angle I_aCI = 90^\circ,$$

то около него можно описать окружность, причем ее центр совпа-

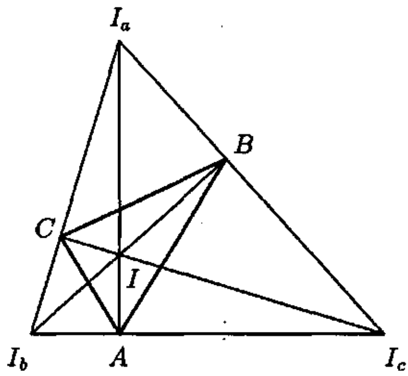


Рис. 127

четырехугольников I_bCIA и I_cAIB совпадает с серединами отрезков I_bI и I_cI. Середины указанных отрезков лежат на описанной окружности треугольника ABC, которая является окружностью девяти точек треугольника ABC, и являются центрами описанных окружностей треугольников I_aBC, I_bCA, I_cAB. Поскольку эти окружности совпадают с описанными окружностями четырехугольников I_aBIC, I_bCIA, I_cAIB, то центр I вписанной окружности треугольника ABC является их общей точкой.

4.59. Решение. Обозначим точку пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 через P (рис. 128), а через B_2 и C_2 — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и C на прямую AA_1. Тогда

$$\Delta A_1C_2C \sim \Delta A_1B_2B \quad \text{и} \quad \frac{BB_2}{CC_2} = \frac{BA_1}{A_1C},$$

поэтому

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_2}{CC_2} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot BB_2}{\frac{1}{2}AP \cdot CC_2} = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ACP}}.$$

Аналогично

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta BCP}}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABP}}.$$

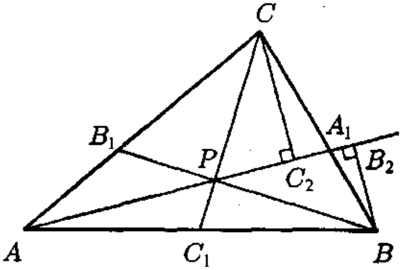


Рис. 128

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Обратно, пусть

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Покажем, что тогда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через P. Пусть прямая CP пересекает сторону AB в точке C_1'.

Тогда по доказанному

$$\frac{AC_1'}{C_1'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

но так как по условию

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то

$$\frac{AC_1'}{C_1'B}=\frac{AC_1}{C_1B},$$

т. е. точки C_1' и C_1 делят сторону AB в одном и том же отношении и потому совпадают.

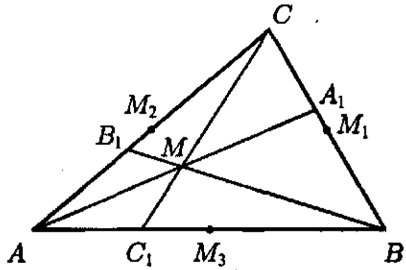


Рис. 129

4.60. Решение. Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, CA, AB (рис. 129). Используя неравенство

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0),$$

получаем:

$$\sqrt{AB_1 \cdot B_1C} \leqslant \frac{AB_1 + B_1C}{2} = AM_2, \quad \sqrt{CB_1 \cdot A_1B} \leqslant \frac{CA_1 + A_1B}{2} = CM_1,$$

$$\sqrt{BC_1 \cdot C_1A} \leqslant \frac{BC_1 + C_1A}{2} = BM_3.$$

Возведем в квадрат каждое из этих неравенств и перемножим их:

$$AB_1 \cdot B_1C \cdot CA_1 \cdot A_1B \cdot BC_1 \cdot C_1A \leqslant (AM_2 \cdot CM_1 \cdot BM_3)^2.$$

По теореме Чевы

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A \quad \text{(см. предыдущую задачу)},$$

поэтому

$$(AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1)^2 \leqslant (AM_2 \cdot CM_1 \cdot BM_3)^2,$$

или

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 \leqslant AM_2 \cdot CM_1 \cdot BM_3,$$

причем неравенство обращается в равенство только в случае совпадения точек B_1, C_1, A_1 с точками M_2, M_3, M_1 откуда следует, что тогда точка M будет точкой пересечения медиан треугольника ABC.

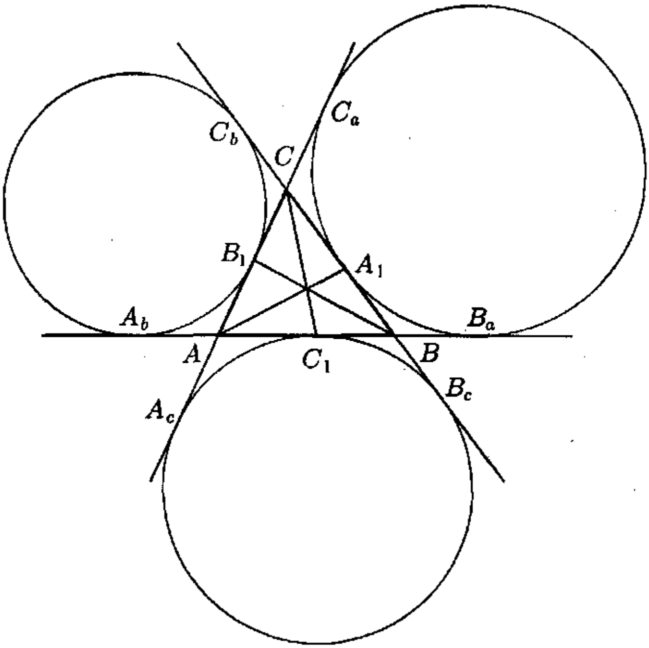


Рис. 130

4.61. Решение. Обозначим точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника ABC через A_1, B_1, C_1, а с продолжениями сторон — через A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b (рис. 130).

Покажем сначала, что длина отрезка от вершины треугольника до точки касания вневписанной окрудности, лежащей на продолжении стороны за другую вершину, равна полупериметру треугольника:

$$CA_c = CA + AA_c = b + AC_1$$

($AA_c = AC_1$ как отрезки касательных, проведенных из точки A к вневписанной окружности), точно так же $CB_c = CB + BB_c = a + C_1B$, но $CA_c = CB_c$, поэтому

$$CA_c + CB_c = 2CA_c = b + a + AC_1 + C_1B = b + a + c = 2p,$$

откуда $CA_c = p$.

Далее

$$CB_1 = CC_b = C_bB - CB = p - a.$$

Аналогично, $B_1A = p - c$, $AC_1 = p - b$, $C_1B = p - a$, $BA_1 = p - c$, $A_1C = p - b$, откуда получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{(p-b)(p-c)(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = 1,$$

т. е. по теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

4.62. Решение. а) Запишем следующие равенства (рис. 131):

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{OA_1}{AA_1}, \quad \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{OB_1}{BB_1}, \quad \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{OC_1}{CC_1}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{S_{\triangle BOC} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}} = 1.$$

б) $$\frac{AO}{AA_1} = \frac{AA_1 - OA_1}{AA_1} = 1 - \frac{OA_1}{AA_1}, \quad \frac{BO}{BB_1} = 1 - \frac{OB_1}{BB_1},$$

$$\frac{CO}{CC_1} = 1 - \frac{OC_1}{CC_1},$$

поэтому

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 3 - \left(\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1}\right) = 3 - 1 = 2.$$

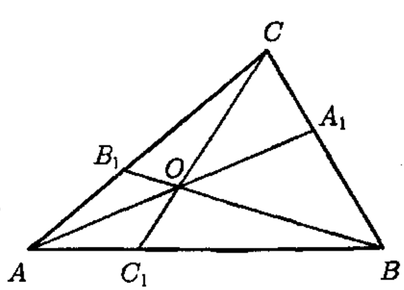


Рис. 131

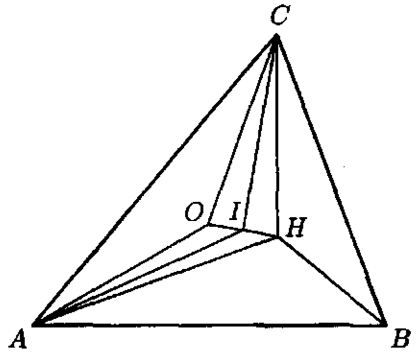


Рис. 132

4.63. Решение. Так как $\angle ACO = \angle BCH$, $\angle CAO = BAH$ (см. задачу 4.12), то биссектрисы углов A и C треугольника ABC является биссектрисами треугольников OAH и COH (рис. 132). Поэтому

$$\frac{AO}{AH} = \frac{OI}{IH} = \frac{CO}{CH} \quad \text{(см. задачу 4.26)},$$

но $AO = CO = R$, откуда следует, что

$$AH = CH.$$

Поскольку радиусы окружностей, описанных около треугольника AHB и CHB равны радиусу R описанной около треугольника ABC окружности, то

$$AH = 2R \cdot \sin(90^\circ - \angle A) = 2R \cdot \cos\angle A, \quad CH = 2R \cdot \cos\angle C$$

и из равенства $AH = CH$ вытекает

$$\cos\angle A = \cos\angle C, \quad \angle A = \angle C,$$

т. е. треугольник ABC равнобедренный.

4.64. Решение. Пусть T — точка Торричелли треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — середины дуг описанных окружностей правильных треугольников A_1BC, B_1CA, C_1AB диаметрально противоположные точкам A_1, B_1, C_1 (рис. 133). Тогда точки A_2, B_2, C_2 являются

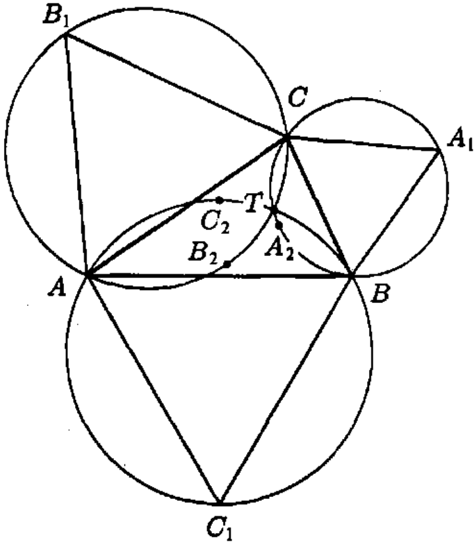


Рис. 133

вершинами внутреннего треугольника Наполеона треугольника ABC. Так как треугольник $A_2B_2C_2$ правильный (см. задачу 1.44), то

$$\angle C_2B_2A_2 = 60^\circ$$

и для доказательства того, что около четырехугольника $A_2B_2C_2T$ можно описать окружность, достаточно показать, что

$$\angle C_2TA_2 = 120^\circ.$$

Далее

$$\angle C_2TA_2 = \angle ATB + \angle C_2TA - \angle A_2TB = 120^\circ + \angle C_2TA - \angle A_2TB,$$

но поскольку C_2 и A_2 — середины дуг AC_2B и BA_2C, а углы C_2TA и A_2TB вписанные, то

$$\angle C_2TA = \frac{1}{2}\angle AC_1B = 30^\circ, \quad \angle A_2TB = \frac{1}{2}\angle BA_1C = 30^\circ$$

т. е.

$$\angle C_2TA = \angle A_2TB = 30^\circ \quad \text{и} \quad \angle C_2TA_2 = 120^\circ.$$

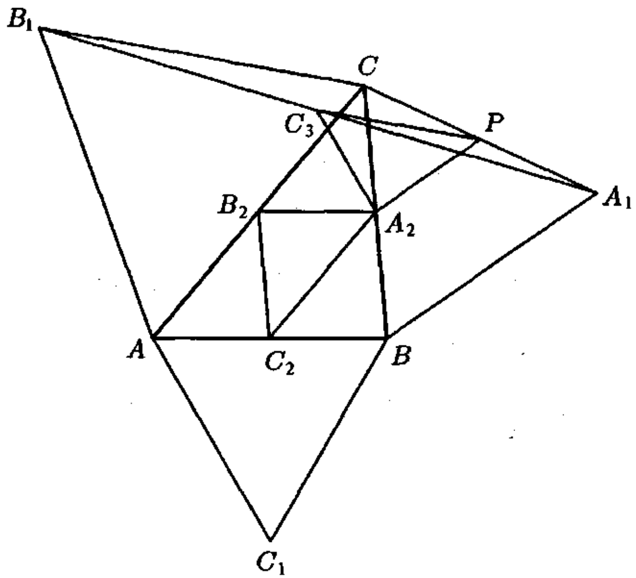


Рис. 134

4.65. Решение. а) Обозначим через P середину отрезка A_1C (рис. 134). Тогда A_2P — средняя линия треугольника BCA_1, поэтому

$$A_2P = \frac{1}{2}BA_1 = \frac{1}{2}BC = B_2C_2$$

(треугольник BCA_1 правильный, а B_2C_2 — средняя линия треугольника ABC). Аналогично,

$$C_3P = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2}AC = A_2C_2.$$

Далее

$$\angle C_3PA_2 = \angle C_3PA_1 - \angle A_2PA_1 = \angle B_1CA_1 - 120^\circ = \angle ACB = \angle A_2C_2B_2,$$

поскольку

$$\angle B_1CA_1 = \angle B_1CA + \angle ACB + \angle BCA_1 =$$
$$= 60^\circ + \angle ACB + 60^\circ = \angle ACB + 120^\circ.$$

Итак, $\triangle C_3PA_2 = \triangle A_2C_2B_2$ по двум сторонам и углу между ними, откуда следует, что $B_2A_2 = A_2C_3$. Так же можно показать, что

$B_2A_2 = B_2C_3$, т. е. треугольник $A_2B_2C_3$ правильный. Доказательство правильности треугольников $B_2C_2A_3$ и $C_2A_2B_3$ аналогично проведенному выше.

б)–в) Так как треугольники $A_2B_2C_3$, $B_2C_2A_3$, $C_2A_2B_3$ правильные, то утверждения этих пунктов вытекают из задачи 1.40.

г) Поскольку прямая A_2B_2 параллельна AB, то перпендикуляр к AB является одновременно и перпендикуляром к A_2B_2, но треугольник $A_2B_2C_3$ правильный (см. пункт а) данной задачи), поэтому перпендикуляр к A_2B_2, опущенный из точки C_3 является серединным перпендикуляром стороны A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_3$. Аналогично, перпендикуляры к BC и CA, проведенные через точки A_3 и B_3, являются серединными перпендикулярами сторон B_2C_2 и C_2A_2 треугольника $A_2B_2C_2$, и, таким образом, эти перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$.

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Популярные книги по математике

Федин С. Н. **Математики тоже шутят.**
Ушаков И. А. **История науки сквозь призму озарений.**
Гамов Г., Стерн М. **Занимательные задачи.**
Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. **Математика без формул.** Кн. 1, 2.
Босс В. **Интуиция и математика.**
Жуков А. В. **Вездесущее число «пи».**
Жуков А. В. и др. **Элегантная математика. Задачи и решения.**
Оре О. **Приглашение в теорию чисел.**
Шикин Е. В. **От игр к играм. Математическое введение.**
Ворожцов А. В. **Путь в современную информатику.**
Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. **Элементарное введение в теорию вероятностей.**
Яглом И. М. **Математика и реальный мир.**
Амелькин В. В. **Дифференциальные уравнения в приложéниях.**
Попов Г. Н. **Сборник исторических задач по элементарной математике.**
Мостеллер Ф. **Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.**
Депман И. Я. **Рассказы о старой и новой алгебре.**
Попова А. П. **Занимательная астрономия.**
Попова А. П. **Астрономия в образах и цифрах.**

Серия «НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы»

Колмогоров А. Н. **Математика — наука и профессия.**
Вольберг О. А. **Основные идеи проективной геометрии.**
Широков П. А. **Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.**
Стинрод Н., Чинн У. **Первые понятия топологии.**
Мизес Р. **Вероятность и статистика.**
Менинген Ф. **Некоторые тайны артистов-вычислителей.**
Вильямс Дж. Д. **Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.**
Юдин Д. Б., Юдин А. Д. **Математики измеряют сложность.**
Ланге В. Н. **Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи.** Кн. 1, 2.
Гарднер М. **Этот правый, левый мир.**
Гарднер М. **Теория относительности для миллионов.**
Хвольсон О. Д. **Теория относительности А. Эйнштейна и новое миропонимание.**
Сазанов А. А. **Четырехмерная модель мира по Минковскому.**
Перельман Я. И. **Занимательная астрономия.**
Кононович Э. В. **Солнце — дневная звезда.**
Липунов В. М. **В мире двойных звезд.**
Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. **Беседы о преломлении света.**
Каганов М. И. **Электроны, фононы, магноны.**
Каганов М. И., Цукерник В. М. **Природа магнетизма.**
Харкевич А. А. **Автоколебания.**
Ашкинази Л. А. **Электронные лампы: Из прошлого в будущее.**
Шейд К. **Опыты по химии для начинающих.**
Кац Е. А. **Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Теория чисел

Вейль А. **Основы теории чисел.**
Вейль Г. **Алгебраическая теория чисел.**
Хинчин А. Я. **Три жемчужины теории чисел.**
Хинчин А. Я. **Цепные дроби.**
Понтрягин Л. С. **Обобщения чисел.**
Карацуба А. А. **Основы аналитической теории чисел.**
Ожигова Е. П. **Что такое теория чисел.**
Гельфонд А. О. **Трансцендентные и алгебраические числа.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (теория чисел)»

Диофант Александрийский. **Арифметика и книга о многоугольных числах.**
Ферма П. **Исследования по теории чисел и диофантову анализу.**
Дирихле П. Г. Л. **Лекции по теории чисел.**
Дедекинд Р. **Непрерывность и иррациональные числа.**
Берман Г. Н. **Число и наука о нем: Общедоступные очерки по арифметике натур. чисел.**
Ингам А. Э. **Распределение простых чисел.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (история математики)»

Хинчин А. Я. **Великая теорема Ферма.**
Шереметевский В. П. **Очерки по истории математики.**
Беллюстин В. К. **Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики.**
Володарский А. И. **Ариабхата.**
Володарский А. И. **Очерки истории средневековой индийской математики.**
Гнеденко Б. В. **Очерки по истории математики в России.**

История математики

Гнеденко Б. В. **Очерк по истории теории вероятностей.**
Борис Владимирович Гнеденко в воспоминаниях учеников и соратников.
Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим.
Колмогоров А. Н. **Математика в ее историческом развитии.**
Мышкис А. Д. **Советские математики: Мои воспоминания.**
Жижченко А. Б. **Алгебраическая геометрия в работах советских математиков.**
Бурбаки Н. **Очерки по истории мятематики.**
Ван дер Варден Б. Л. **Пробуждающаяся наука: Математика Древнего мира.**
Башмакова И. Г. **Диофант и диофантовы уравнения.**
Александрова Н. В. **История математических терминов, понятий, обозначений.**
Яглом И. М. **Герман Вейль.**
Полякова Т. С. **Леонард Эйлер и математическое образование в России.**
Волошинов А. В. **Пифагор: Союз истины, добра и красоты.**
Медведев Ф. А. **Очерки истории теории функций действительного переменного.**
Медведев Ф. А. **Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.**
Стройк Д. Я. **Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия).**
Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт. **О квадратуре круга.**
Харди Г. Г. **Апология математика.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Другие книги нашего издательства:

URSS

Учебники и задачники по математике

Краснов М. Л. и др. **Вся высшая математика.** Т. 1–7.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. **Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.**

Боярчук А. К. и др. **Справочное пособие по высшей математике (Антидемидович).** Т. 1–5.

Тактаров Н. Г. **Справочник по высшей математике для студентов вузов.**

Босс В. **Лекции по математике.** Т. 1: **Анализ**; Т. 2: **Дифференциальные уравнения**; Т. 3: **Линейная алгебра**; Т. 4: **Вероятность, информация, статистика**; Т. 5: **Функциональный анализ**; Т. 6: **От Диофанта до Тьюринга**; Т. 7: **Оптимизация**; Т. 8: **Теория групп**; Т. 9: **ТФКП**; Т. 10. **Перебор и эффективные алгоритмы**; Т. 11. **Уравнения математической физики**; Т. 12. **Контрпримеры и парадоксы**; Т. 13. **Топология.**

Алексеев В. М. (ред.) **Избранные задачи по математике из журнала "АММ".**

Арлазаров В. В. и др. **Сборник задач по математике для физико-математических школ.**

Медведев Г. Н. **Задачи вступительных экзаменов по математике на физфаке МГУ.**

Золотаревская Д. И. **Теория вероятностей. Задачи с решениями.**

Золотаревская Д. И. **Сборник задач по линейной алгебре.**

Антоневич А. Б. и др. **Задачи и упражнения по функциональному анализу.**

Сурдин В. Г. **Астрономические задачи с решениями.**

Николаев О. С. **Физика и астрономия: Курс практических работ для средней школы.**

Яглом А. М., Яглом И. М. **Неэлементарные задачи в элементарном изложении.**

Супрун В. П. **Математика для старшеклассников.** Кн. 1, 2.

Серия «Психология, педагогика, технология обучения: математика»

Гнеденко Б. В. **Математика и жизнь.**

Гнеденко Б. В., Гнеденко Д. Б. **Об обучении математике в университетах и педвузах.**

Хинчин А. Я. **Педагогические статьи.**

Хинчин А. Я. **Основные понятия математики и математические определения в школе.**

Малыгина О. А. **Изучение математического анализа на основе системного подхода.**

Малыгина О. А. **Обучение высшей математике на основе системного подхода.**

Михеев В. И. **Моделирование и методы теории измерений в педагогике.**

Фридман Л. М. **Что такое математика.**

Фридман Л. М. **Величины и числа. Популярные очерки.**

Фридман Л. М. **Теоретические основы методики обучения математике.**

Фридман Л. М. **Основы проблемологии.**

Тел./факс: (499) 135-42-46, (499) 135-42-16,

E-mail: URSS@URSS.ru

http://URSS.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
«Дом книги на Ладожской» (м. Бауманская, ул. Ладожская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)
«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)
«У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (499) 973-4301)
«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

URSS

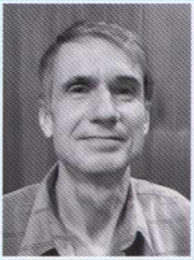
Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. **Наглядная геометрия.**
Александров И. И. **Сборник геометрических задач на построение (с решениями).**
Яглом И. М. **Как разрезать квадрат?**
Яглом И. М. **О комбинаторной геометрии.**
Яглом И. М. **Комплексные числа и их применение в геометрии.**
Яглом И. М. **Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.**
Александров П. С. **Что такое неэвклидова геометрия.**
Крыжановский Д. А. **Изопериметры. Свойства геометрических фигур.**
Радемахер Г., Теплиц О. **Числа и фигуры: Опыты математического мышления.**
Кранц П. **Сферическая тригонометрия.**
Берман Г. Н. **Циклоида. Об одной замечательной кривой.**
Егоров И. П. **Основания геометрии.**
Егоров И. П. **Геометрия. Специальный курс.**
Егоров И. П. **Об обобщенных пространствах.**
Егоров И. П. **Движения в пространствах аффинной связности.**
Позняк Э. Г., Шикин Е. В. **Дифференциальная геометрия: первое знакомство.**
Рашевский П. К. **Курс дифференциальной геометрии.**
Рашевский П. К. **Геометрическая теория уравнений с частными производными.**
Рашевский П. К. **Риманова геометрия и тензорный анализ.**
Рашевский П. К. **Теория спиноров.**
Феденко А. С. **Пространства с симметриями.**
Фиников С. П. **Проективно-дифференциальная геометрия.**
Фиников С. П. **Курс дифференциальной геометрии.**
Фиников С. П. **Аналитическая геометрия.**
Бюшгенс С. С. **Дифференциальная геометрия.**
Клейн Ф. **Неевклидова геометрия.**
Клейн Ф. **Высшая геометрия.**
Смирнов Ю. М. **Курс аналитической геометрии.**
Дарбу Г. **Принципы аналитической геометрии.**
Никифоров В. А., Шкода Б. В. **Линейная алгебра и аналитическая геометрия.**
Стинрод Н. **Топология косых произведений.**
Данфорд Н., Шварц Дж. Т. **Линейные операторы. Общая теория.**
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. **Современная геометрия.** Т. 1–3.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс **(499) 135–42–16, 135–42–46**
или ***электронной почтой*** **URSS@URSS.ru**
Полный каталог изданий представлен
в ***интернет-магазине:*** **http://URSS.ru**

Научная и учебная литература

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru



Евгений Дмитриевич КУЛАНИН

Кандидат физико-математических наук, профессор Московского городского психолого-педагогического университета. Автор и соавтор многих популярных учебных пособий, справочников и задачников по элементарной и высшей математике.

Сергей Николаевич ФЕДИН

Кандидат физико-математических наук, член Союза литераторов России. Автор и соавтор нескольких учебников по геометрии, а также задачников по элементарной и высшей математике.

Представляем другие книги нашего издательства:

5195 ID 58301

9 785397 007863 >

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7
Тел./факс: 7

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

интернет-магазин OZON.ru
30735319

Любые отзывы о настоящем издании, а т... присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Ваши за... учтены и отражены на web-странице этой книги в ... http://URSS.ru