

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА



Серия
КЛАССИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена
250-летию
Московского университета



КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Редакционный совет серии:

Председатель совета
ректор Московского университета
В.А. Садовничий

Члены совета:

Виханский О.С., Голиченков А.К., Гусев М.В.,
Добреньков В.И., Донцов А.И., Засурский Я.Н.,
Зинченко Ю.П. (ответственный секретарь),
Камзолов А.И. (ответственный секретарь),
Карпов С.П., Касимов Н.С., Колесов В.П.,
Лободанов А.П., Лунин В.В., Лупанов О.Б.,
Мейер М.С., Миронов В.В. (заместитель председателя),
Михалев А.В., Моисеев Е.И., Пушаровский Д.Ю.,
Раевская О.В., Ремнева М.Л., Розов Н.Х.,
Салешкий А.М. (заместитель председателя),
Сурин А.В., Тер-Минасова С.Г.,
Ткачук В.А., Третьяков Ю.Д., Трухин В.И.,
Трофимов В.Т. (заместитель председателя), Шоба С.А.



Предисловие к серии

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из замечательных книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает свыше 250 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов, редакционным советом серии и издаваемых к юбилею по решению Ученого совета МГУ.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования.

Высокий уровень образования, которое дает Московский университет, в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах аккумулируется бесценный опыт методики и методологии преподавания, который становится достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который вносит Московский университет в классическое образование в нашей стране и, несомненно, служит его развитию.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах науки и образования. Это служит также свидетельством того, что 250-летний юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны, мирового образовательного сообщества.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор

В. Садовничий
В.А. Садовничий

А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Издание второе, исправленное и дополненное

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по группе
направлений и специальностей «Механика»*



Москва «Логос» 2005

УДК 532
ББК 30.125
К90

Печатается по решению Ученого совета
Московского университета

Куликовский А.Г., Любимов Г.А.
К90 Магнитная гидродинамика. – Изд. 2-е, испр. и
доп. – М.: Логос, 2005. – 328 с.: ил.
ISBN 5-94010-370-7

Изложены основы магнитной гидродинамики как науки о взаимодействии движущейся электропроводящей сплошной среды с электромагнитным полем. Основное вниманиеделено исследованию качественных эффектов, возникающих при этом взаимодействии. Даётся вывод уравнений магнитной гидродинамики, оценка пределов их применимости, анализ условий на разрывах решений, а также анализ решений классических задач о волновых движениях идеально проводящих сред. Эффекты, связанные с конечной электропроводимостью среды, демонстрируются на простейших задачах (прямолинейные течения, структура ударных волн, течения в трубках тока и обтекание намагниченных тел), которые, однако, являются отправными задачами для приложений магнитной гидродинамики.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 071300 – «Гидроаэродинамика», 012700 – «Гидрология», 121100 – «Гидравлические машины и гидропневмомашины», 010451 – «Гидрофизика», 010503 – «Гидромеханика». Может быть полезна ученым и специалистам.

ББК 30.125

ISBN 5-94010-370-7

© Куликовский А.Г., Любимов Г.А., 1962, 2005
© МГУ им. М.В. Ломоносова,
художественное оформление серии, 2005
© «Логос», 2005

Оглавление

Предисловие к серии	3
Предисловие ко второму изданию	9
Предисловие к первому изданию	10
Глава 1. Основные уравнения	11
§1. Уравнения электродинамики	11
§2. Уравнения механики сплошной среды с учетом электромагнитных сил	22
§3. Закон Ома	32
§4. Уравнения магнитной гидродинамики	47
§5. Простейшие интегралы системы уравнений магнитной гидродинамики	55
Глава 2. Движения несжимаемой жидкости	60
§1. Движение вязкой электропроводной жидкости с прямолинейными линиями тока	60
§2. Стационарные движения вдоль магнитного поля .	74
§3. Волновые движения идеальной жидкости	79
Глава 3. Простые волны и малые возмущения в идеальном газе	85
§1. Слабые разрывы	85
§2. Простые волны	92
§3. Малые возмущения	103
Глава 4. Поверхности разрыва в идеальном газе	108
§1. Классификация поверхностей сильного разрыва .	108
§2. Эволюционность магнитогидродинамических ударных волн	113
§3. Разрешение условий на ударных волнах в совершенном газе	121
Глава 5. Нестационарные движения идеального газа	135
§1. Задача о плоском поршне	135
§2. Распад произвольного разрыва	141
§3. Распространение слабых ударных волн разрывов и слабых разрывов в пространстве	151

§4. Одномерные осесимметричные движения с однородной деформацией	157
Глава 6. Стационарные движения идеального газа	
§1. Характеристики уравнений магнитной гидродинамики, описывающих стационарные течения	163
§2. Линейные задачи	167
§3. Стационарные простые волны	181
Глава 7. Стационарные движения неидеального газа	
§1. Течения в трубках тока	189
§2. Структура магнитогидродинамической ударной волны	197
Глава 8. Обтекание намагниченных тел проводящей жидкостью	
§1. Обтекание намагниченных тел идеальной жидкостью	219
§2. Пример обтекания намагниченного тела жидкостью с конечной электропроводностью	224
Список литературы	235
Приложения	243

Предисловие ко второму изданию

За время, прошедшее с выхода первого издания этой книги в 1962 г., магнитная гидродинамика как наука получила дальнейшее развитие. Кроме фундаментальных исследований свойств системы уравнений магнитной гидродинамики в различных предельных ситуациях (хорошо проводящие среды, слабо проводящие среды, течения разреженных сред и др.) были достигнуты значительные успехи в решении задач в различных областях приложений магнитной гидродинамики. Отечественная и зарубежная научная литература пополнялась новыми книгами, посвященными конкретным аспектам магнитной гидродинамики.

Если же говорить о магнитной гидродинамике идеально проводящих сред, то исследования в этой классической части магнитной гидродинамики практически были завершены в 60–70-е годы прошлого столетия. При этом основы этой науки, и в первую очередь результаты исследования нелинейных волн, были достаточно полно и в законченном виде освещены в настоящей книге. Жизнь показала, что это изложение было довольно удачным, так как книга до сих пор используется в качестве основного учебника во многих учебных заведениях, в которых читается курс магнитной гидродинамики. Эти обстоятельства склонили авторов к тому, чтобы не производить сколько-нибудь существенной переработки книги при ее переиздании в серии «Классический университетский учебник».

В то же время за прошедшие с момента выхода книги десятилетия были получены некоторые результаты, в частности в области волновых движений, в той или иной степени завершившие изучение некоторых проблем, нашедших свое отражение в книге. С учетом этого авторы сочли целесообразным дать некоторые приложения, которые помещены в конце книги. Материал приложений может выходить за рамки учебных программ, но мы надеемся, что он будет полезен при более углубленном изучении дисциплины.

Неоценимую помощь в написании дополнений нам оказал профессор Е.А. Пушкарь, которому авторы приносят глубокую благодарность.

Авторы

Предисловие к первому изданию

В последние годы в ряде областей физики и техники (астрофизика, аэродинамика больших скоростей, проблемы управляемых термоядерных реакций и т. д.) все чаще возникает необходимость изучения движений сильно нагретых и ионизованных жидкостей и газов в электромагнитном поле. В связи с этим в настоящее время одной из наиболее интенсивно развивающихся областей механики и физики является магнитная гидродинамика. Магнитная гидродинамика изучает движение электропроводящих жидкостей и газов в электромагнитном поле. При такого рода движении возникают новые механические эффекты и открываются новые методы воздействия на движение жидкости.

Наличие электромагнитного поля при движении в нем проводящей среды приводит к тому, что в ней возникают электрические токи. Возникновение

в движущейся жидкости электрических токов приводит, с одной стороны, к тому, что, взаимодействуя с магнитным полем, они вызывают появление дополнительных сил, которые изменяют гидродинамическое движение жидкости. С другой стороны, возникновение электрических токов приводит к изменению электромагнитного поля. При теоретическом рассмотрении всех этих вопросов необходимо учитывать как гидродинамические, так и электродинамические эффекты. Совместное рассмотрение этих эффектов представляет предмет магнитной гидродинамики.

Несмотря на то, что магнитная гидродинамика является молодой и интенсивно развивающейся наукой, в настоящее время можно утверждать, что некоторые основные качественные закономерности, присущие магнитной гидродинамике, уже установлены и исследованы.

В связи с возросшим интересом к вопросам магнитной гидродинамики со стороны научных работников разного профиля представляется целесообразным изложить в систематизированном виде основные принципиальные вопросы магнитной гидродинамики. Мы не ставим перед собой цели изложить все имеющиеся результаты, относящиеся к вопросам магнитной гидродинамики и ее приложений.

При подборе материала книги мы стремились изложить основные результаты, связанные с выявлением новых качественных эффектов и закономерностей, возникающих при взаимодействии проводящей среды с электромагнитным полем. Особое внимание при этом уделяется получению и исследованию точных решений уравнений магнитной гидродинамики, а также качественному исследованию задач в тех случаях, когда точного решения получить не удается. Подробно выведены уравнения магнитной гидродинамики и исследованы пределы их применимости. Всюду, где это было возможно, мы стремились дать наглядное физическое объяснение рассматриваемому явлению, а также отчетливую формулировку постановки различных задач.

В связи с тем, что книга носит теоретический характер и посвящена в основном выявлению качественных особенностей магнитной гидродинамики, в ней не нашли отражения вопросы технических приложений магнитной гидродинамики, приближенные методы решения задач, а также результаты экспериментальных исследований. В книге не затронуты также вопросы, касающиеся магнитогидростатики и устойчивости, особо интересные для лиц, занимающихся проблемами управляемых термоядерных реакций. Эти вопросы, довольно хорошо разработанные в настоящее время, могли бы составить предмет самостоятельной монографии.

Как и во всякой развивающейся науке, в магнитной гидродинамике многие результаты получаются одновременно или с небольшим расхождением во времени разными авторами, причем иногда совершенно различными методами. При изложении этих результатов мы стремились выбрать самый, с нашей точки зрения, физически ощущимый и математически простой путь изложения.

В конце книги приводится список литературы, непосредственно использованной при изложении материала, а также тесно примыкающей к рассматриваемым вопросам.

Считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность М. Н. Когану и В. П. Коробейникову, сделавшим ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению книги.

Авторы

Глава 1

Основные уравнения

§ 1. Уравнения электродинамики *

Согласно современным представлениям, все тела в природе состоят из элементарных частиц. Элементарные частицы могут обладать электрическим зарядом (электроны, протоны и т. д.)**. Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством электромагнитного поля, которое они создают в пространстве вокруг себя. Хотя электромагнитное поле и его изменение связаны с движением заряженных частиц, оно обладает известного рода самостоятельностью, подчинено своим, присущим только ему закономерностям и может рассматриваться как самостоятельный материальный объект.

Электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени характеризуется двумя векторами: напряженностью электрического поля E и напряженностью магнитного поля H .

Напряженности электрического и магнитного полей в конкретной точке пространства могут быть определены по силе, действующей на пробные электрические заряды, помещенные в эту точку. Сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, имеющую заряд e и движущуюся со скоростью v , может быть найдена по формуле

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \quad (1.1)$$

*Здесь приведены основные уравнения электродинамики. Изложение основ электродинамики можно найти в [6, 17].

**Электромагнитные свойства частиц характеризуются также их магнитным моментом, связанным со спином. Этот момент является чрезвычайно малой величиной, и влиянием его в интересующих нас вопросах можно пренебречь [17].

где E и H — напряженности электрического и магнитного полей в рассматриваемой точке пространства, когда пробный заряд в этой точке отсутствует; c — константа с размерностью скорости, равная по величине скорости распространения света в пустоте $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Равенство (1.1) установлено на основании опытных фактов и будет рассматриваться как одна из основных гипотез при построении теории. Оно показывает, что силу, действующую на заряженную частицу в электромагнитном поле, можно формально разбить на две составляющие: электрическую, параллельную E , и магнитную, перпендикулярную к H и v . При движении заряженной частицы электрическая сила может производить работу, а магнитная — не может, так как она перпендикулярна скорости.

При написании соотношения (1.1) использована так называемая *абсолютная гауссова система единиц*. В этой системе напряженности полей, а также заряд частиц измеряются в механических единицах (сантиметр-грамм-секунда), причем размерности напряженностей электрического и магнитного полей считаются одинаковыми:

$$[E] = [H] = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}; \quad [e] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

При изучении физических явлений можно пользоваться различными системами координат. Так как всюду в дальнейшем изучаются нерелятивистские явления, то будут использоваться только системы координат, относительная скорость U которых много меньше скорости света ($U^2/c^2 \ll 1$). При переходе от системы координат K к системе координат K' , движущейся с постоянной скоростью U относительно K , кинематические величины преобразуются по формулам Галилея:

$$x' = x - Ut; \quad t' = t; \quad v' = v - U$$

(величины со штрихом относятся к системе K' , без штриха — к системе K). Отсюда следует, что ускорение, а следовательно, и сила не должны зависеть от системы координат, в которой они измеряются. Поэтому из (1.1) будет следовать, что величины E и H связаны с выбором системы координат. В теории относительности на основании равенства (1.1) выводятся фор-

мулы преобразования напряженностей электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы координат к другой [14]. Эти формулы с точностью до членов порядка U^2/c^2 имеют вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}}{c} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{U}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Нетрудно проверить, что при использовании преобразований (1.2) сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, инвариантна с точностью до членов порядка U^2/c^2 . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= e \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}' \right) = \\ &= e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \times \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{E} \right) \right] = \\ &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) = \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Рассмотрим движение частицы с зарядом e и массой m в однородном электромагнитном поле [15], ограничившись случаем $E^2 \ll H^2$. Предположим сначала, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} параллельны. Разложим движение частицы на продольное движение вдоль поля и поперечное движение перпендикулярно к полю, при этом скорость представится в виде суммы $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_x + v_{\perp} \mathbf{e}_y$. Сила, действующая на частицу вдоль поля, $F_{\parallel} = eE$. Движение, вызванное ею, будет равноускоренным $dv_{\parallel}/dt = eE/m$. Составляющая силы, перпендикулярная к полю, $F_{\perp} = e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} = \frac{e \mathbf{v}_{\perp}}{c} \times \mathbf{H}$.

Эта сила работы не производит. Следовательно, $m(v_{\perp}^2/2) = \text{const}$, поэтому $v_{\perp} = \text{const}$ и $F_{\perp} = \text{const}$. Так как, кроме того, $F_{\perp} \perp v_{\perp}$, то поперечное движение будет равномерным движением по окружности радиуса $R = mv_{\perp}c/(eH)$. Эта величина получается из условия равенства центробежной силы и F_{\perp} . При этом частицы, обладающие зарядом разных знаков, будут вращаться в противоположные стороны. Суммарное движение будет пред-

ставлять собой движение по винтовой линии с переменным шагом вдоль направления полей.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы при произвольном расположении векторов E и H . Если перейти к системе координат, движущейся с некоторой скоростью U , перпендикулярной E и H , то можно добиться того, чтобы E и H в этой системе координат были параллельны. В самом деле, согласно формулам перехода (1.2),

$$\begin{aligned} E &= e_i \left(E_i - \frac{U}{c} H_j \right) + e_j \left(E_j + \frac{U}{c} H_i \right) \\ H' &= e_i \left(H_i + \frac{U}{c} E_j \right) + e_j \left(H_j - \frac{U}{c} E_i \right) \end{aligned}$$

(система координат выбрана так, чтобы векторы E и H лежали в координатной плоскости x_i, x_j ; e_i и e_j — единичные векторы). Для параллельности векторов E' и H' необходимо, чтобы

$$(H_i E_j - H_j E_i) \frac{U^2}{c^2} + (E^2 + H^2) \frac{U}{c} + (H_i E_j - H_j E_i) = 0.$$

Так как, согласно предположению, $E^2 \ll H^2$, то, разыскивая корень этого уравнения, для которого $U^2/c^2 \ll 1$, получим

$$U/c = (H_j E_i - H_i E_j) / H^2. \quad (1.3)$$

Таким способом может быть найдена система координат, в которой движение частицы сводится к предыдущему случаю. Эта система координат зависит только от векторов E и H и не зависит от рассматриваемой частицы. Скорость движения данной системы координат называется *скоростью дрейфа частиц*. Существуют и другие системы координат, в которых E и H параллельны. Во всех таких системах координат векторы E и H одинаковы, а скорости этих систем отличаются на вектор, параллельный общему направлению E и H . Движение частицы в исходной системе координат будет складываться из движения в подвижной системе координат (винтовое движение с переменным шагом) и движения со скоростью подвижной системы (дрейфа).

Далее будем рассматривать движение не одной частицы, а огромного числа заряженных частиц — сплошной среды.

При этом будем интересоваться только средними характеристиками такого движения.

Пусть в пространстве, занятом средой, задано электромагнитное поле. Вычислим силу, с которой это поле действует на физически бесконечно малый объем среды $\Delta\tau$. Под физически бесконечно малым объемом будем понимать объем, протяженность которого мала по сравнению с характерной длиной задачи, но достаточно велика для возможности осреднения по этому объему.

Суммируя (1.1) по всем частицам, находящимся в указанном объеме, и считая E и H постоянными на протяжении пространства, занятого этими частицами, получим для искомой силы следующее выражение:

$$\mathbf{F} = \left[\sum_{\alpha} e_{\alpha} E + \frac{1}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha} \times H \right], \quad (1.4)$$

где v_{α} — скорость частицы, и суммирование производится по всем частицам внутри объема $\Delta\tau$.

Введем величины

$$\rho_e = \frac{\sum e_{\alpha}}{\Delta\tau}, \quad j = \frac{\sum e_{\alpha} v_{\alpha}}{\Delta\tau}, \quad (1.5)$$

которые называются соответственно *плотностью заряда* и *плотностью тока*. Если имеются частицы m сортов, то эти выражения можно представить в следующем виде:

$$\rho_e = \sum_{k=1}^m N_k e_k, \quad j = \sum_{k=1}^m N_k e_k v_k,$$

где N_k — плотность частиц k -го сорта, v_k — средняя скорость частиц k -го сорта.

Плотность силы $f = F/\Delta\tau$ с учетом (1.4) имеет вид

$$f = \rho_e E + \frac{1}{c} (j \times H). \quad (1.6)$$

Как следует из (1.5), при переходе от одной системы координат к другой системе, движущейся со скоростью U относительно исходной,

$$j' = \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha} v'_{\alpha}}{\Delta t} = \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha} (v_{\alpha} - U)}{\Delta t} = j - \rho_e U. \quad (1.7)$$

Так как заряд частицы не меняется с течением времени, то изменение заряда в каком-либо объеме может происходить только за счет входа и выхода заряженных частиц через границу объема. Через элемент поверхности $\Delta\Sigma$ с нормалью n в единицу времени проходит $\sum_k N_k (v_k \cdot n) \Delta\Sigma$ частиц, которые переносят заряд $\sum_k e_k N_k (v_k \cdot n) \Delta\Sigma = \Delta\Sigma (j \cdot n) = j_n \Delta\Sigma$. Через замкнутую поверхность (n — внешняя нормаль) втекает заряд $-\oint_{\Sigma} j_n d\Sigma$. Это количество равно изменению заряда в объеме в единицу времени $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho_e d\tau$.

Таким образом,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\oint_{\Sigma} j_n d\Sigma, \quad (1.8)$$

где $\theta = \int \rho_e d\tau$ — заряд, заключенный внутри Σ .

При изучении изменения и свойств электромагнитного поля пользуются системой уравнений Максвелла (см., например [6, 17]). Эта система, записанная в интегральной форме, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \oint_L H \cdot dI &= \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial E_n}{\partial t} d\Sigma, \\ \oint_L E \cdot dI &= -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial H_n}{\partial t} d\Sigma, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где L — контур, на который натянута поверхность Σ и который поконится в выбранной системе координат; I — ток, протекающий через Σ :

$$I = \int_{\Sigma} j_n d\Sigma.$$

Индекс n означает нормальную составляющую вектора, причем направление нормали к поверхности выбирается так, чтобы направление обхода при интегрировании по контуру L и направление нормали образовывали правовинтовую систему.

К уравнениям Максвелла относят также следующие два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\Sigma} E_n d\Sigma &= 4\pi\theta, \\ \oint_{\Sigma} H_n d\Sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Уравнения Максвелла являются обобщением опытных фактов и представляют фундаментальные постулаты электродинамики. Правильность этих постулатов проверена тем, что все выводы, следующие из (1.9), (1.10), согласуются с известными экспериментальными данными.

В ряде случаев, когда значительная часть токов или зарядов сосредоточена в областях, объем которых мал по сравнению со всем рассматриваемым объемом, удобнее использовать суммарные характеристики токов и зарядов этих областей, вводя такие понятия, как плотность поверхностного тока и плотность поверхностного заряда, линейный ток и плотность линейного заряда, точечный заряд и т. д. При этом интегральные соотношения (1.8) – (1.10) сохраняют свой вид.

Если рассматриваемая среда состоит из сложных частиц — молекул и атомов, то возможно возникновение внутримолекулярных токов, связанных с движением зарядов внутри молекулы, и зарядов, связанных с разделением зарядов внутри молекулы (поляризацией).

Чтобы избежать рассмотрения этих величин при изучении сплошной среды, наряду с векторами E и H вводятся векторы электрической и магнитной индукции D и B . Если электромагнитное поле не очень быстро меняется в пространстве и во времени, то для большинства сред в системе координат, в которой элемент среды поконится, векторы D и B пропорциональны соответственно векторам E и H :

$$D' = \epsilon E', \quad B' = \mu H'.$$

Здесь ϵ и μ — безразмерные коэффициенты, связанные с физическими свойствами среды.

Во многих случаях при рассмотрении жидких и газообразных проводников с большой степенью точности можно считать $\mu = 1^*$.

Для хорошо проводящих сред с не слишком большим ϵ можно не учитывать поляризацию среды. Это связано с тем, что поляризация среды вызывается электрическим полем E' , которое, как будет видно из дальнейшего, является малой величиной**. В связи с этим в уравнениях Максвелла (1.9) и всюду в дальнейшем будем считать $\mu = \epsilon = 1$.

Если поверхность Σ замкнута, то контур L в (1.9) можно считать стянувшимся в точку. Поэтому левые части в (1.9) выпадают и

$$\oint_{\Sigma} j_n d\Sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} E_n d\Sigma \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} H_n d\Sigma = 0.$$

Преобразуем первое уравнение, воспользовавшись равенством (1.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} E_n d\Sigma = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Таким образом, так как соотношения (1.10) выполняются в начальный момент, то в силу уравнений (1.9) и (1.8), они будут выполнятся всегда. Следовательно, в нестационарных задачах уравнения (1.10) играют роль начальных условий. В стационарных задачах эти уравнения не зависят от уравнений (1.9), и

* В рассматриваемой постановке величина B вводится так, что ее отличие от H обусловлено внутримолекулярными токами.

В некоторых случаях при изучении плазмы величина B иногда вводится так, что ее отличие от H обусловлено также токами, связанными с вращением заряженных частиц в магнитном поле. В этом случае величина μ может сильно отличаться от 1.

** Если учесть ϵ в уравнениях Максвелла, а также в выражениях для силы, с которой электромагнитное поле действует на среду, и для энергии, сообщаемой полем среде, то нетрудно убедиться в том, что при сделанных в §4 данной главы предположениях относительно величины проводимости среды все оценки, которые здесь даются, остаются в силе и все члены, содержащие ϵ , исключаются из системы уравнений магнитной гидродинамики.

совокупность уравнений (1.9), (1.10) надо рассматривать как единую систему, описывающую изменение поля. Так как уравнение (1.8) является следствием уравнений (1.9) и (1.10), при интегрировании этой системы его можно не рассматривать. Кроме того, поскольку первое из уравнений (1.10) выражает плотность заряда через напряженность электрического поля, то при интегрировании вышеупомянутой системы его тоже можно не рассматривать, а использовать как уравнение для определения величины θ .

Если все функции, входящие в (1.9) и (1.10), дифференцируемы, то эти уравнения можно записать в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho_e, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Если функции, входящие в (1.9) и (1.10), терпят разрыв на некоторой поверхности, покоящейся в выбранной системе координат, то, предполагая \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ ограниченными, получим соотношения, которым должны удовлетворять компоненты полей при переходе через поверхности разрыва [17]. Чтобы получить эти условия, поступим следующим образом. Выберем систему координат, в которой поверхность разрыва покоятся. Пусть Σ — поверхность разрыва, \mathbf{n} — нормаль к поверхности разрыва, τ и χ — единичные координатные векторы в плоскости разрыва. Выберем замкнутый контур в плоскости, нормальной к χ так, как указано на рис. 1. Примем этот контур и ограниченную им часть плоскости \mathbf{n} , τ за контур и поверхность, фигурирующие в

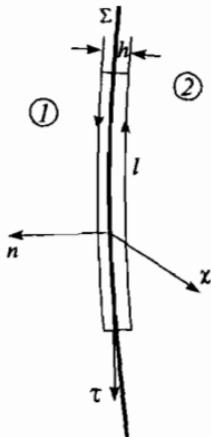


Рис. 1

уравнениях Максвелла (1.9). Тогда, если контур настолько мал, что в его пределах подынтегральные функции в (1.9) можно считать постоянными с каждой стороны от поверхности разрыва, и если $h/l \ll 1$, то получим

$$\left. \begin{aligned} (H_{\tau 1} - H_{\tau 2})l &= \frac{4\pi}{c} I_\chi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\chi}{\partial t} lh, \\ (E_{\tau 1} - E_{\tau 2})l &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\chi}{\partial t} lh. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и считая, что $\frac{\partial E}{\partial t}$ и $\frac{\partial H}{\partial t}$ ограничены, а $i_\chi l = \lim_{h \rightarrow 0} I_\chi$ (i_χ — величина, называемая *плотностью поверхностного тока в направлении χ*), найдем

$$\left. \begin{aligned} H_{\tau 1} - H_{\tau 2} &= \frac{4\pi}{c} i_\chi, \\ E_{\tau 1} - E_{\tau 2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Проделав ту же операцию в плоскости n, χ , получим

$$H_\chi l - H_{\chi 2} = \frac{4\pi}{c} i_\tau; \quad E_{\chi 1} - E_{\chi 2} = 0.$$

Эти две группы соотношений можно объединить в одну группу соотношений, которым должны удовлетворять проекции векторов напряженности полей на плоскость, касательную к поверхности разрыва, при переходе через поверхность разрыва:

$$\left. \begin{aligned} H_{\tau 1} - H_{\tau 2} &= \frac{4\pi}{c} (i \times n), \\ E_{\tau 1} - E_{\tau 2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Здесь H_τ, E_τ — проекции соответствующих векторов на плоскость разрыва, а $i = i_\tau \tau + i_\chi \chi$.

Заключим теперь некоторый «кусок» поверхности разрыва внутрь призмы высотой h с основаниями Σ , параллельными поверхности разрыва (рис. 2). Принимая поверхность призмы

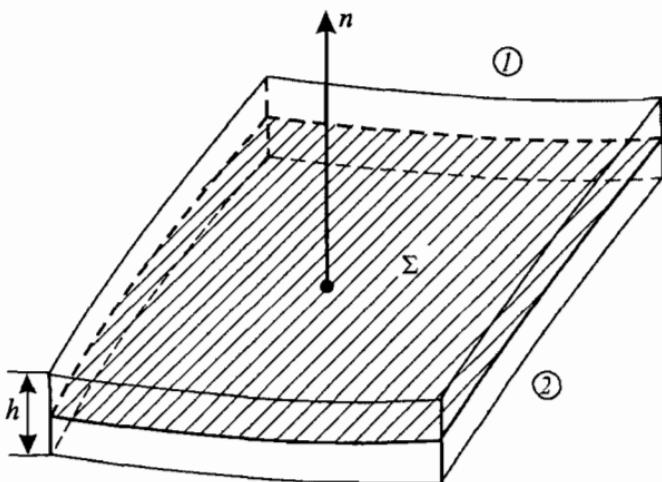


Рис. 2

за замкнутую поверхность, фигурирующую в уравнениях Максвелла (1.10), и считая призму настолько малой, что в ее пределах подынтегральные функции можно считать с обеих сторон разрыва постоянными, а $h/\sqrt{\Sigma} \ll 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} (E_{n1} - E_{n2})\Sigma &= 4\pi\theta, \\ (H_{n1} - H_{n2})\Sigma &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Переходя здесь к пределу при $h \rightarrow 0$ и вводя обозначение $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \vartheta \Sigma$, (ϑ — величина, называемая *поверхностной плотностью заряда*), найдем

$$\left. \begin{aligned} E_{n1} - E_{n2} &= 4\pi\vartheta, \\ H_{n1} - H_{n2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Условиям (1.13) и (1.14) должны удовлетворять компоненты электромагнитного поля на поверхностях разрыва.

§ 2. Уравнения механики сплошной среды с учетом электромагнитных сил

Уравнения движения сплошной среды получаются из законов сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho v d\tau &= \int_{\Sigma} p_n d\Sigma + \int_{\tau} f d\tau, \\ \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho (\epsilon + \frac{v^2}{2}) d\tau &= - \int_{\Sigma} q_n d\Sigma + \int_{\Sigma} p_n \cdot v d\Sigma + \int_{\tau} A d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Здесь v — скорость сплошной среды, равная скорости центра инерции частиц, находящихся в физически бесконечно малом объеме в окрестности рассматриваемой точки; τ — «жидкий» объем, т. е. объем, ограниченный поверхностью Σ , движущейся в направлении нормали со скоростью v_n ; ρ — плотность среды, т. е. сумма масс всех частиц, находящихся в физически бесконечно малом объеме, отнесенная к величине этого объема; q_n — поток тепла через поверхность Σ , т. е. поток энергии через «жидкую» поверхность, который возникает за счет переноса энергии молекулами, пересекающими данную поверхность, а также за счет работы сил межмолекулярного взаимодействия; p_n — плотность поверхностных сил, равная с обратным знаком потоку импульса через «жидкую» поверхность, который возникает за счет переноса импульса молекулами, пересекающими поверхность, а также за счет сил межмолекулярного взаимодействия; ϵ — внутренняя энергия единицы объема среды, т. е. сумма кинетической энергии хаотического движения и потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся в указанном объеме*; f — плотность внешних объемных сил; A —

* Изложение вопросов, связанных с этими понятиями, см.: С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.

разность полного притока энергии к выделенному объему и притока энергии за счет потока тепла через ее поверхность и работы поверхностных сил.

Так как в качестве объемных сил в дальнейшем будем рассматривать только силы воздействия электромагнитного поля на среду, то согласно (1.6)

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}).$$

Кроме того, в дальнейшем под A будем понимать только приток энергии за счет внешнего электромагнитного поля:

$$A = \mathbf{E} \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

В механике сплошных сред доказывается, что плотность поверхностных сил \mathbf{p}_n задается тензором напряжений

$$\hat{\mathbf{P}} = \{p_{ij}\}, \quad p_{ij} = p_{ji},$$

при этом p_{ij} представляет собой напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной к e_j в направлении e_i .

Суммарное напряжение, действующее на площадку, перпендикулярную к e_j , $p_j = p_{ij} e_i$; суммарное напряжение, действующее на площадку Σ с нормалью \mathbf{n} , $p_n = p_j n_j$, где n_j — проекция \mathbf{n} на ось e_j .

Поток тепла через поверхность задается вектором потока тепла \mathbf{q} , причем $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_i n_i$. Здесь и далее по повторяющимся векторным и тензорным индексам производится суммирование.

В механике сплошной среды задаются выражениями для $\hat{\mathbf{P}}$, \mathbf{q} и ϵ таким образом, чтобы система (1.15) совместно с ними представляла собой замкнутую систему уравнений. Эти выражения могут задаваться на основании опытных данных.

Всюду в дальнейшем будем считать среду двухпараметрической, т. е. считать, что все термодинамические величины (например, температура T и внутренняя энергия ϵ) и вообще все величины, характеризующие среду при термодинамическом равновесии, являются функциями двух параметров: плот-

ности ρ и давления p^* . При этом тензор напряжений будет иметь вид

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik},$$

причем τ_{ik} будем считать функциями от ρ , p , H , $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, такими,

что если все $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0$, то напряжения в рассматриваемом элементе среды должны совпадать с напряжениями в равновесном состоянии, т. е. $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, или $\tau_{ik} = 0$. Поэтому при не слишком больших градиентах скоростей можно принять линейную зависимость τ_{ik} от $\partial v_k / \partial x_m$. Тензор $\hat{\tau}$ с компонентами τ_{ij} будем называть *тензором вязких напряжений*. Аналогично, предполагая, что q зависит от ρ , p , H , $\partial T / \partial x_i$, получим, что при не слишком больших градиентах температуры зависимость q_i от $\partial T / \partial x_i$ линейная. Задание q и \hat{P} , т. е. их выражение через другие величины, связано с некоторыми предположениями относительно свойств среды.

Далее при конкретных расчетах для вектора потока тепла и тензора напряжений примем выражения, используемые в обычной гидродинамике, т. е. будем полагать, что

$$q = 0, \quad \tau_{ik} = 0 \quad (1.16)$$

или

$$\left. \begin{aligned} q &= -k \operatorname{grad} T, \\ \tau_{ik} &= \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

где T — температура, μ и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости, k — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем во многих случаях μ , ζ и k будут считаться постоянными.

* Если $\varepsilon \neq 1$ и $\mu \neq 1$, то термодинамические функции, характеризующие среду, могут зависеть также от напряженности электромагнитного поля (см. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957).

Равенства (1.16) и (1.17) могут быть оправданы с молекулярно-кинетической точки зрения следующим образом. Если в газообразной среде расстояние, на котором существенно изменяются скорость и температура, велико по сравнению с длиной свободного пробега и расстоянием, на котором электрическое поле заряженной частицы экранируется частицами другого знака*, и если, кроме того, характерное время задачи значительно больше времени между столкновениями частиц, то распределение скоростей частиц близко к изотропному. В этом случае касательные напряжения малы по сравнению с давлением и потоки тепла невелики. Поток тепла и касательные напряжения связаны с переносом количества движения и энергии хаотическим движением частиц. Если электромагнитное поле существенно искривляет пути заряженных частиц, то расстояния, на которые частицы перемещаются без столкновений, будут различны вдоль и поперек поля, что приведет к анизотропии явлений переноса. Как известно, равенства (1.17) могут быть получены при предположении об изотропности свойств среды. Следовательно, они могут быть применены, строго говоря, только в том случае, когда пути заряженных частиц слабо искривляются за время движения между двумя столкновениями. Такое положение имеет место в жидкости и плотных газах. В противном случае выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла имеют более сложный вид [1, 4, 18].

В дальнейшем при конкретных расчетах будем считать, что рассматриваемая среда является совершенным газом, т. е. температура и внутренняя энергия определяются соотношениями

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T = p/[(\gamma - 1)\rho]. \quad (1.18)$$

Здесь c_v — теплоемкость газа, соответствующая нагреванию при постоянном объеме, которую в дальнейшем будем считать постоянной; R — газовая постоянная; γ — показатель адиабаты:

$$\gamma = c_p / c_v = (R + c_v) / c_v.$$

* Это расстояние называется дебаевской длиной (см. Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа — М.: ИЛ, 1957).

В дальнейшем будем также рассматривать движения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), причем внутреннюю энергию несжимаемой жидкости будем считать пропорциональной температуре

$$\varepsilon = c_v T \quad (c_v = \text{const}). \quad (1.19)$$

Преобразуем в уравнениях (1.15) поверхностные интегралы в объемные, предполагая подынтегральные функции дифференцируемыми:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\Sigma} q_n d\Sigma &= \oint_{\Sigma} q_i n_i d\Sigma = \int_{\tau} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{q} d\tau, \\ \oint_{\Sigma} p_n d\Sigma &= e_k \oint_{\Sigma} p_{ki} n_i d\Sigma = \int_{\tau} \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} e_k d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} d\tau, \\ \oint_{\Sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} d\Sigma &= \oint_{\Sigma} p_{ki} v_k n_i d\Sigma = \int_{\tau} \frac{\partial p_{ki} v_k}{\partial x_i} d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} (\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) d\tau, \end{aligned} \right\} (1.20)$$

$$\text{где } \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} e_k, \quad \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} = p_{ki} v_k e_i.$$

Тогда если подынтегральные функции в объемных интегралах равенств (1.15) и (1.20) непрерывны, то, используя формулу Остроградского, из интегральных уравнений (1.15) можно получить дифференциальные уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} + \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}), \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \mathbf{v}^2/2 \right) &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \right\} (1.21)$$

При получении первого уравнения использовано равенство $\frac{d\tau}{dt} = \tau \operatorname{div} v$, а при выводе остальных — равенство $\frac{d}{dt}(\rho d\tau) = 0$.

На практике в разных задачах используются другие формы записи уравнения энергии, которые получаются из последнего уравнения (1.21) при помощи термодинамических соотношений и первых двух уравнений движения (1.21). Умножив уравнение импульсов на v скалярно, получим

$$\frac{1}{2}\rho \frac{dv^2}{dt} = v \cdot \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} + \rho_e v \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \cdot v.$$

Подставив это выражение в уравнение энергии, имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\operatorname{div} q + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \rho_e v \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \cdot v + \\ &+ \operatorname{div}(\hat{\mathbf{P}} \cdot v) - v \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} = -\operatorname{div} q + D - p \operatorname{div} v + \Phi, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \text{где } D &= A - \mathbf{f} \cdot v = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \rho_e v \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \cdot v = \\ &= \left(\mathbf{E} + \frac{v}{c} \times \mathbf{H} \right) (\mathbf{j} - \rho_e v) = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{j}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \tau_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \\ \tau_{ik} &= p_{ik} - p \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Величина D называется *джоулевым теплом*, Φ — *диссипативной функцией* (связана с выделением тепла за счет вязкого трения). Так как для двухпараметрических сред

$$\rho d\varepsilon + pdt \operatorname{div} v = \rho(d\varepsilon + pdV) = \rho Tds,$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем, s — энтропия среды, то можно записать уравнение

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} q + \Phi + D. \quad (1.23)$$

Так как энтропия среды не может убывать ни при каком адиабатическом ($\operatorname{div} q = 0$) процессе, то это накладывает некоторое ограничение на вид зависимостей τ_{ik} от $\frac{\partial v_i}{\partial x_m}$ и j' от E' , а именно зависимости должны быть такими, чтобы выполнялись неравенства $\Phi \geq 0$, $D \geq 0$.

Легко проверить, что если τ_{ik} выражается через $\frac{\partial v_i}{\partial x_m}$, согласно равенствам (1.17), то

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \sum_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right)^2.$$

Нетрудно убедиться, что при любых $\mu > 0$, $\zeta > 0$ условие $\Phi \geq 0$ всегда выполняется.

Для совершенного газа $\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{(\gamma-1)\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{(\gamma-1)} \operatorname{div} v = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - p \operatorname{div} v = \frac{p}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} - p \operatorname{div} v. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (1.22), получим

$$\frac{p}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = -\operatorname{div} q + \Phi + D. \quad (1.24)$$

Так как для совершенного газа энтропия $s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + \text{const}$, то уравнение (1.24) совпадает с (1.23).

Если жидкость невязкая, нетеплопроводная и $E' = 0$, то из (1.23), (1.24) следует постоянство энтропии в частице газа:

$s = \text{const}$, $p/\rho^* = \text{const}$, причем const могут быть различными для разных частиц жидкости.

Займемся преобразованием системы (1.21). В силу уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \rho_e E + \frac{1}{c} (j \times H) &= \frac{1}{4\pi} E \operatorname{div} E + \frac{1}{c} \left[\left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times H \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (E \times H) - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}(H^2 + E^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi} (H_i H_j + E_i E_j) e_j = \\ &= -\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{T}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $g = \frac{1}{4\pi c} (E \times H)$; $\hat{T} = \{T_{ik}\}$;

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (H_i H_k + E_i E_k) - \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) \delta_{ik}.$$

При преобразовании было использовано векторное тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} a^2 = a \times \operatorname{rot} a + \frac{\partial a_i a_j}{\partial x_i} e_j - a \operatorname{div} a.$$

Далее,

$$\begin{aligned} E \cdot j &= E \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(E \times H) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = \\ &= \operatorname{div} s - \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\text{где } s = \frac{c}{4\pi} (E \times H), \quad w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2).$$

При преобразовании было использовано векторное тождество

$$\operatorname{div} (a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b.$$

В электродинамике и теории относительности вектору $g = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ приписывают смысл *плотности электромагнитного количества движения*; тензору $\hat{\mathbf{T}}$ — смысл *тензора напряжений электромагнитного поля*; величине $w = \frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2)$ — смысл *плотности электромагнитной энергии*, вектору $s = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — смысл *плотности потока электромагнитной энергии* (вектор Умова—Пойнтинга) [17].

Равенство (1.25) выражает тот факт, что изменение электромагнитного количества движения в некотором объеме происходит за счет электромагнитного потока импульса через поверхность,

ограничивающую объем, и за счет силы $\left(\rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right)$, с которой среда воздействует на электромагнитное поле. Равенство (1.26) показывает, что изменение электромагнитной энергии w в объеме в единицу времени происходит за счет потока электромагнитной энергии s через поверхность, ограничивающую объем, и за счет работы $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ вещества над полем.

Используя введенные понятия, преобразуем уравнения движения (1.21) к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -\operatorname{div} \hat{\mathbf{P}}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (1.29)$$

Здесь $\mathbf{G} = \rho \mathbf{v} + \mathbf{g}$ — плотность полного количества движения; $\hat{\mathbf{P}} = \{\pi_{ij}\} = \{\rho v_i v_j - p_{ij} - T_{ij}\}$ — тензор плотности полного потока импульса; $W = \rho(\epsilon + (v^2/2) + w)$ — плотность полной энергии; $\mathbf{S} = \mathbf{s} + \mathbf{q} - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}(\epsilon + (v^2/2))$ — плотность полного потока энергии. При преобразовании уравнений импульсов и энергии использовано уравнение неразрывности.

Соотношения (1.27) – (1.29), написанные в интегральной форме, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho d\tau &= - \oint_{\Sigma} \rho v_n d\Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_v G d\tau &= - \oint_{\Sigma} \hat{P} \cdot n d\Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_v W d\tau &= - \oint_{\Sigma} S_n d\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Первое из этих соотношений выражает тот факт, что изменение массы в некотором неподвижном объеме происходит за счет потока массы $m = \rho \cdot v$ через границу объема, причем через площадку $d\Sigma$ с нормалью n протекает $\rho v_n d\Sigma$ массы в единицу времени.

Второе равенство (1.30) показывает, что изменение полного количества движения в неподвижном объеме происходит за счет потока импульса через границы объема. При этом плотность потока импульса через площадку с нормалью n задается вектором

$$\hat{P} \cdot n = P_{ik} n_i e_k = (\rho v_i v_k - p_{ik} - T_{ik}) n_i e_k.$$

Первый член в этом выражении связан с притоком импульса за счет движения жидкости через границу объема, второй связан с переносом импульса за счет внутренних напряжений в среде (если молекулы среды взаимодействуют путем столкновений, то этот член связан с переносом импульса при хаотическом движении молекул). Последний член представляет собой перенос импульса электромагнитным полем. Через площадку $d\Sigma$ в единицу времени протекает поток $P_{ik} n_k d\Sigma$ i -й компоненты импульса.

Последнее равенство (1.30) выражает тот факт, что полное изменение энергии в объеме происходит за счет потока энергии через его границу. Плотность потока энергии задается вектором S . Через площадку с нормалью n будет протекать в единицу времени количество энергии

$$S_n = \rho (\epsilon + (v^2/2)) v_n + q_n - (\hat{P} \cdot v) \cdot n + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot n.$$

Полученная выше система (1.21) уравнений движения сплош-

ной среды, состоящей из заряженных частиц, не является замкнутой, так как она содержит члены, связанные с электромагнитным полем, законы изменения которого не содержатся в законах механики. В качестве законов изменения электромагнитного поля будем пользоваться рассмотренными ранее уравнениями Максвелла. В связи с этим при решении задач о движении сплошной среды, состоящей из заряженных частиц, мы должны пользоваться совместно системой (1.21) и системой уравнений Максвелла (1.11) и (1.12). Но, как нетрудно заметить, и такая совместная система уравнений все еще оказывается незамкнутой. Действительно, уравнения механики (1.21) определяют движение и все механические характеристики среды, если известно электромагнитное поле. В свою очередь для однозначного определения электромагнитного поля из уравнений Максвелла (1.11) необходимо либо задать плотность тока как функцию координат и времени, либо связать плотность тока с остальными величинами, входящими в уравнения, причем в последнем случае система уравнений механики, уравнений Максвелла и выражение для плотности тока должны рассматриваться совместно.

Соотношение, связывающее плотность тока с остальными величинами, называемое *законом Ома* (или *обобщенным законом Ома*), зависит, вообще говоря, от свойств рассматриваемой среды.

§ 3. Закон Ома*

Законом Ома обычно называют соотношение, связывающее величину плотности тока j' с напряженностью электромагнитного поля и параметрами, определяющими свойства и движение проводящей среды. В электродинамике и магнитной гидродинамике обычно используется простейшая форма связи между плотностью тока и напряженностью электрического поля

$$j' = \sigma E', \quad (1.31)$$

где j' и E' — плотность тока и напряженность электрического

* Этот параграф посвящен выяснению границ применимости закона Ома в форме (3.1), используемой в дальнейшем при выводе уравнений магнитной гидродинамики, и при первом чтении книги может быть опущен.

поля в системе координат, в которой элемент среды покойится; σ — величина, называемая *проводимостью среды* и зависящая от свойств среды.

Для того чтобы понять смысл и определить границы применимости соотношения (1.31) к жидким и газообразным проводникам, рассмотрим простейшую молекулярно-кинетическую модель среды [10, 12, 13, 15, 22-24].

1. Уравнения движения трехкомпонентной среды, состоящей из электронов, ионов и нейтральных частиц. Пусть в единице объема среды содержится n_a нейтральных частиц, n ионов и $n+n'$ электронов. Для простоты будем считать, что электроны и ионы несут одинаковый по величине, но разного знака заряд e ; тогда плотность объемного заряда равна $\rho_e = -n'e$. Кроме того, массу иона будем считать много больше массы электрона

$$m_i \gg m_e \quad (1.32)$$

и совпадающей с массой нейтральных частиц

$$m_i = m_a \quad (1.33)$$

Назовем *степенью ионизации* величину

$$\alpha = n / (n + n_a). \quad (1.34)$$

В качестве простейшей модели примем, что каждая из компонент — электроны, ионы и нейтральные частицы — представляет собой газ, движущийся независимо от других компонент, в том смысле, что для каждой из компонент в отдельности могут быть написаны гидродинамические уравнения движения. Взаимодействие между компонентами происходит в результате столкновений и сводится к некоторой усредненной объемной силе, равной среднему изменению импульса при столкновениях частиц, принадлежащих разным компонентам. Электронный, ионный и нейтральный газы считаются идеальными, так что напряжения внутри компонент сводятся к соответствующим давлениям. Если скорости относительного движения компонент малы по сравнению с хаотическими скоростями частиц, то и смесь в целом можно считать идеальной, а суммарное давление — равным сумме парциальных давлений каждой из компонент

$$p = p_e + p_i + p_a. \quad (1.35)$$

При этом в равновесном состоянии вследствие пропорциональности давления числу частиц имеют место следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{n}{2n + n_a + n'} p, \\ p_e &= \frac{n + n'}{2n + n_a + n'} p, \\ p_a &= \frac{n_a}{2n + n_a + n'} p. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

В пространстве, занятом движущейся средой, задано электрическое поле E и магнитное поле H . При этом предполагается, что E и H определяются как внешними полями, так и зарядами и токами в самой среде.

Определим силу, действующую на каждую из компонент, возникающую за счет столкновений частиц этой компоненты с частицами другой компоненты. Силу, действующую на единицу объема v -й компоненты со стороны частиц, k -й компоненты, можно представить следующим образом:

$$f_{vk} = \Delta I_{vk} n_v \tau_{vk}^{-1}; \quad v, k = e, i, a, \quad (1.37)$$

где n_v — число частиц v -го сорта в единице объема; τ_{vk} — среднее время между столкновениями частиц v -го сорта с частицами k -го сорта, причем за среднее время между столкновениями принимается промежуток времени, за который частица v -го сорта при взаимодействии с частицами k -го сорта теряет в среднем импульс ΔI_{vk} . Обычно в качестве ΔI_{vk} выбирается величина

$$\Delta I_{vk} = -\frac{m_v m_k}{m_v + m_k} v_{vk}$$

(v_{vk} — средняя скорость частиц v -й компоненты относительно частиц k -й компоненты), которая соответствует средней потере импульса при упругом столкновении двух частиц m_v и m_k , движущихся с относительной скоростью v_{vk} , в предположении о равной вероятности любого угла отклонения частицы в результате столкновения. Согласно неравенству (1.32), для электронного газа

$$\Delta I_{vk} = -I_{vk}, \quad v = i, a, \quad k = e,$$

а для ионного и нейтрального газов

$$\Delta I_{vk} = -\frac{1}{2} I_{vk}, \quad k, v = i, a, \quad k \neq v,$$

где I_{vk} — импульс частиц v -го газа относительно частиц k -го газа.

Теперь легко написать уравнения движения для каждой из компонент среды. Пусть v — скорость движения всей среды, v_i — скорость движения ионного газа относительно среды, v_e — скорость движения электронного газа относительно ионного газа. Скорость движения нейтрального газа определяется через скорость среды и скорости ионного и электронного газов по формуле

$$v_a = v - \frac{n}{n_a} \left(v_i + \frac{m_e}{m_i} v_e \right). \quad (1.38)$$

При выводе этого соотношения считается, что скорость элемента среды совпадает со скоростью его центра масс, и используется неравенство $m_e \ll m_i$. Последний член оставлен, несмотря на малую массу электрона, в связи с тем, что соотношение между v_e и v_i неизвестно и может оказаться, что $m_e v_e \sim m_i v_i$. Кроме того, здесь и всюду в дальнейшем считается, что

$$n' \ll n. \quad (1.39)$$

(Значительные концентрации объемного заряда не могут возникнуть при отсутствии специальных внешних условий, обеспечивающих удержание этого заряда. В связи с этим членами $\sim n'/n$ всюду пренебрегаем по отношению к членам ~ 1 . Отметим, что условие (1.39) не равносильно предположению об отсутствии пространственного заряда, так как малое превышение числа электронов над числом ионов может дать заметный вклад в силу, действующую на среду со стороны электрического поля ($-n'eE = \rho_e E$), и в плотность тока за счет переноса зарядов вместе с движущейся средой ($-n'e v = \rho_e v$). Если газ полностью ионизован ($n_a = v_a = 0$), то соотношение (1.38) упрощается и дает связь v_i и v_e . Выкладки, аналогичные тем, которые будут проделаны здесь в предположении $\alpha \neq 1$ ($n_a \neq 0$), можно проделать и для случая полной ионизации (двуокомпонентная среда, $\alpha = 1$), причем, как легко проверить, получающуюся при этом форму обобщенного закона Ома можно получить из

соотношения (1.54) предельным переходом при $\alpha \rightarrow 1$ (соотношение (1.55)).

Кроме силы, обусловленной столкновениями частиц разных компонент, на электронный и ионный газы будет действовать объемная сила, обусловленная электромагнитным полем.

Так как средний импульс электронов относительно ионов $I_{ei} = m_e v_e$, а относительно нейтральных частиц

$$\begin{aligned} I_{ea} &= m_e (v + v_i + v_e - v_a) = \\ &= m_e \left[v_e + \left(1 + \frac{n}{n_a} \right) v_i + \frac{n}{n_a} \cdot \frac{m_e}{m_i} v_e \right] = m_e \left(v_e + \frac{v_i}{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

то уравнение движения электронного газа можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} m_e n \frac{d_e(v + v_i + v_e)}{dt} &= -\text{grad } p_e - ne \left[E + \frac{1}{c} (v + v_i + v_e) \times H \right] - \\ &\quad - m_e n v_e \tau^{-1} - m_e n \left(v_e + \frac{v_i}{1-\alpha} \right) \tau_e^{-1}, \\ \frac{d_e}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + [(v + v_i + v_e) \nabla] = \frac{d}{dt} + (v_i + v_e) \nabla, \\ \nabla &= e_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} (1.40)$$

Импульс ионов относительно нейтральных частиц

$$I_{ia} = m_i (v + v_i - v_a) = m_i \frac{v_i}{1-\alpha} + m_e \frac{\alpha}{1-\alpha} v_e.$$

Используя это выражение, запишем уравнение движения ионного газа в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m_i n \frac{d_i(v + v_i)}{dt} &= -\text{grad } p_i + ne \left[E + \frac{1}{c} (v + v_i) \times H \right] + \\ &\quad + m_e n v_e \tau^{-1} - \frac{1}{2} n m_i \frac{\alpha}{1-\alpha} v_e \tau_i^{-1} \frac{m_e}{m_i} - \frac{1}{2} n m_i \frac{v_i}{1-\alpha} \tau_i^{-1}, \\ \frac{d_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (v + v_i) \nabla. \end{aligned} \right\} (1.41)$$

В уравнениях (1.40) и (1.41) τ , τ_i , τ_e — соответственно время между столкновениями электронов с ионами, ионов с нейтральными частицами и электронов с нейтральными частицами. Вместо уравнения движения нейтрального газа будем пользоваться уравнением движения для смеси в целом, которое, конечно является следствием уравнения движения нейтрального газа и уравнений (1.40), (1.41), (1.35) и условия (1.32):

$$\left. \begin{aligned} m_i(n+n_a) \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\text{grad } p - n'e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [n\mathbf{v}_e + n'(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)] \times \mathbf{H}, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Здесь мы воспользовались определением плотности тока

$$j = \sum_k n_k e_k \mathbf{v}_k = -(n+n')e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) + ne(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) = -ne\mathbf{v}_e - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)$$

и неравенством (1.39).

2. Получение обобщенного закона Ома. Уравнения (1.40)–(1.42) служат для получения соотношения, связывающего плотность тока с другими величинами (обобщенного закона Ома). Прежде чем выводить это соотношение, оценим в этих уравнениях члены, содержащие производные.

Будем предполагать, что характерное время задачи много больше времени между столкновениями частиц и что скорость компонент относительно центра масс мала по сравнению с хаотическими скоростями частиц, принадлежащих данной компоненте (это условие использовано нами при получении соотношений (1.35) и (1.36)). Если T — характерное время задачи, L — характерный размер и U — характерная скорость ($U \sim (L/T)$), то эти предположения равносильны следующим:

$$\left. \begin{aligned} T &>> \max \{ \tau, \tau_i, \tau_e \}, \\ v_i &\ll v_{ix}, \quad |v_i + v_e| \ll v_{ex}, \quad |v - v_a| \ll v_{ax}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Здесь v_{ix} , v_{ex} , v_{ax} — хаотические скорости ионов, электронов и нейтральных частиц, причем если состояние равновесное (температуры электронов, ионов и нейтральных частиц равны), то $m_e v_{ex}^2 = m_i v_{ix}^2 = m_i v_{ax}^2$. Так как давление пропорционально произведению массы частиц на средний квадрат хаотической скорости,

то при условиях (1.43) членами $\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)$, $(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e)$, $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ и $\mathbf{v}_i\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)$ в левых частях уравнений (1.40) и (1.41) можно пренебречь по сравнению с последними членами в правой части этих уравнений и градиентами соответствующих давлений.

Кроме того, в силу уравнения (1.42), при условиях (1.32), (1.33), (1.36) и (1.39) имеет место соотношение

$$m_e n \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = \frac{m_e}{m_i} \frac{n}{n+n_a} \left| \left[-n'e \mathbf{E} - \operatorname{grad} p - \frac{ne}{c} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}) - \right. \right. \\ \left. \left. - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{H} \right] \right| \ll \left| -\operatorname{grad} p_e - ne \mathbf{E} - \frac{ne}{c} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) \times \mathbf{H} \right|,$$

т. е. членом $\frac{d\mathbf{v}}{dt} m_e n$ в левой части уравнения (1.40) тоже можно пренебречь. Таким образом, при условии (1.43) уравнения (1.40)–(1.42) примут вид

$$\left. \begin{aligned} & -\operatorname{grad} p_e - ne \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) \times \mathbf{H} \right] - m_e n \mathbf{v}_e \tau^{-1} - \\ & - m_e n \left(\mathbf{v}_e + \frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha} \right) \tau_e^{-1} = 0, \\ & m_i n \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p_i - ne \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{H} \right] + \\ & + nm_e \mathbf{v}_e \tau^{-1} - \frac{1}{2} nm_i \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{v}_e \tau_i^{-1} \frac{m_e}{m_i} - \frac{1}{2} nm_i \frac{\mathbf{v}_i}{1-\alpha} \tau_i^{-1}, \\ & m_i (n + n_a) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - n'e \mathbf{E} - \frac{e}{c} [n \mathbf{v}_e + n'(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)] \times \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{j} = -ne \mathbf{v}_e - n'e(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i), \quad j_i = ne \mathbf{v}_i, \quad \chi \equiv \frac{1}{\omega_e \tau} = \frac{cm_e}{eH} \tau^{-1}, \\ & \chi_e \equiv \frac{1}{\omega_e \tau_e} = \frac{cm_e}{eH} \tau_e^{-1}, \quad \chi_i \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_i \tau_i} = \frac{1}{2} \frac{cm_i}{eH} \tau_i^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Величины $\omega_e \tau$, $\omega_e \tau_e$, $2\omega_i \tau_i$ представляют собой числа витков винтовых линий, которые проходит соответствующая частица за время между двумя столкновениями с частицами других компонент (см. §1). Величины ω_e , ω_i представляют собой частоты обращения электронов и ионов в их движении по винтовой траектории.

В обозначениях (1.45) при условиях (1.39) и (1.32) уравнения (1.44) примут вид:

$$-\operatorname{grad} p_e - en \left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \frac{1}{c} \mathbf{j}_i \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} (\chi + \chi_e) H (j + n' e \mathbf{v}) - \left(\frac{H}{1-\alpha} \frac{\chi_e}{c} - \frac{\chi}{c} H \frac{n'}{n} \right) \mathbf{j}_i = 0, \quad (1.46)$$

$$-\operatorname{grad} p_i - ne \left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) + \frac{1}{c} \mathbf{j}_i \times \mathbf{H} - \left(\frac{\chi}{c} H - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \frac{\chi_i}{c} H \right) \times (n' e \mathbf{v} + \mathbf{j}) - \left(\frac{\chi}{c} H \frac{n'}{n} + \frac{H}{1-\alpha} \frac{\chi_i}{c} \right) \mathbf{j}_i = nm_i \frac{d \mathbf{v}}{dt}, \quad (1.47)$$

$$-\operatorname{grad} p + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - n' e E = \frac{m_i n}{\alpha} \frac{d \mathbf{v}}{dt}. \quad (1.48)$$

Сложим (1.46) и (1.47) и исключим $\frac{d \mathbf{v}}{dt}$ при помощи (1.48). При этом получим выражение для \mathbf{j}_i :

$$\mathbf{j}_i = \frac{(1-\alpha)c}{H(\chi_e + \chi_i)} \left[\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e + p_i) - (1-\alpha)ne E + n' e \mathbf{v} \frac{H}{c} \left(\chi_e + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \chi_i \right) + \frac{(1-\alpha)}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{H}{c} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \chi_i + \chi_e \right) \mathbf{j} \right]. \quad (1.49)$$

(В сумме уравнений (1.46) и (1.47) надо учесть член $n' e E$, так как члены $\pm ne E$, входящие в эти уравнения при сложении, сокращаются). Исключив теперь \mathbf{j}_i из уравнения (1.46), при помощи соотношения (1.49) получим соотношение, связываю-

щее плотность тока с напряженностью электромагнитного поля и параметрами, характеризующими среду и ее движение:

$$\begin{aligned}
 & -[\text{grad } p_e + \beta(\alpha \text{ grad } p - \text{grad}(p_i + p_e))] - ne \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) + \\
 & + \left[1 - 2(1-\alpha) \beta - \alpha \frac{\chi_i}{\chi_i + \chi_e} \frac{m_e}{m_i} \right] \frac{1}{c} j \times H + \beta \alpha n' e E - \\
 & - \frac{1-\alpha}{c} \left(\beta + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \frac{\chi_i}{\chi_e + \chi_i} \right) en' v \times H + \\
 & + \left[\chi + (1-\beta)\chi_e - \beta \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \chi_i \right] \frac{H}{c} (j + n' ev) - \\
 & - \frac{1-\alpha}{H(\chi_e + \chi_i)} \left\{ [\alpha \text{ grad } p - \text{grad } (p_e + p_i)] \times H + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-\alpha}{c} (j \times H) \times H - (1-\alpha)n' e E \times H \right\} = \\
 & = -\chi \frac{n'}{n} \frac{1-\alpha}{\chi_e + \chi_i} \left[\alpha \text{ grad } p - \text{grad } (p_e + p_i) - (1-\alpha)n' e E + \right. \\
 & \quad \left. + (j + n' ev) \frac{H}{c} \left(\chi_e + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{m_e}{m_i} \chi_i \right) + \frac{1-\alpha}{c} j \times H \right], \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

где $\beta = \chi_e / (\chi_i + \chi_e)$.

Соотношение (1.50) можно рассматривать как обобщенную форму закона Ома для частично ионизованных газов.

Если скорости хаотического движения велики по сравнению с относительными скоростями движения компонент, то время между столкновениями определяется хаотическими скоростями (v_{ex} , v_{ix}). Так как в равновесном состоянии электроны и ионы обладают сравнимой кинетической энергией хаотического движения, а длина свободного пробега иона между его столкновениями с нейтральными частицами l_{ia} меньше длины свободного пробега электронов между их столкновениями с нейтральными частицами l_{ea} , то

$$\frac{\tau_i}{\tau_e} \approx \frac{v_{ex}}{l_{ea}} \frac{l_{ia}}{v_{ix}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{l_{ia}}{l_{ea}} < \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}.$$

В силу (1.32) отсюда следует, что

$$\frac{\chi_e}{\chi_i} = \frac{2\omega_i \tau_i}{\omega_e \tau_e} \sim 2 \frac{m_e \tau_i}{m_i \tau_e} < 2 \frac{m_e}{m_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \ll 1, \quad (1.51)$$

т. е. электроны между двумя столкновениями с нейтральными частицами проходят значительно больше витков по винтовой траектории, чем ионы. При этом $\beta \ll 1$ и соотношение (1.50) упрощается:

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} p_e - ne \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) + \frac{1}{c} j \times H + \frac{\chi + \chi_e}{c} H (j - v \rho_e) - \\ - \frac{1-\alpha}{\chi_i H} \{ [\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e + p_i)] \times H + \frac{1-\alpha}{c} (j \times H) \times H + \\ + (1-\alpha) \rho_e E \times H \} = - \frac{\chi}{\chi_i} \frac{n'}{n} (1-\alpha) [\alpha \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e - p_i) + \\ + (1-\alpha) \rho_e E + \frac{1-\alpha}{c} j \times H]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

В правой части уравнения (1.52) опущены некоторые члены, малые в силу (1.32), (1.39) и (1.51). Членами, стоящими в правой части уравнения (1.52), можно пренебречь по отношению к соответствующим членам в левой части этого уравнения в силу (1.39), если выполняется соотношение

$$\frac{\chi}{\chi_i} = \frac{2\omega_i \tau_i}{\omega_e \tau} \sim 2 \frac{m_e \tau_i}{m_i \tau} < 2 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\tau_e}{\tau} \leq 1. \quad (1.53)$$

Время между столкновениями электронов с нейтральными частицами (τ_e) может быть больше времени между столкновениями электронов и ионов (τ) благодаря далеким столкновениям между заряженными частицами (см., например, [15]). Для не очень разреженных газов при умеренных температурах справедливо соотношение (1.53), и обобщенный закон Ома имеет вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} p_e - ne \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) + \frac{1}{c} j \times H + \frac{\chi + \chi_e}{c} H (j - \rho_e v) - \\ - \frac{(1-\alpha)^2}{H \chi_i} \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{grad} p \times H + \frac{1}{c} (j \times H) \times H + \rho_e E \times H \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Для упрощения последующих формул первый член последнего слагаемого преобразован для случая $n = \text{const}$, $n_a = \text{const}$. Если газ полностью ионизован ($\alpha = 1$), то $\chi_e = \chi_i = 0$. Кроме того, из (1.38) следует, что $j_i = \frac{m_e}{m_i} j$, т. е. при $\alpha \rightarrow 1$ величины χ_i , χ_e и $(1-\alpha)^2/\chi_i$ стремятся к нулю, и закон Ома принимает вид

$$-\operatorname{grad} p_e - ne \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) + \frac{1}{c} j \times H + \frac{\chi}{c} H (j - \rho_e v) = 0. \quad (1.55)$$

Всюду в дальнейшем неравенство (1.53) считается выполненным. Если для конкретной задачи это неравенство нарушается, то при получении закона Ома необходимо учитывать члены, стоящие в правой части уравнения (1.52).

3. Различные формы обобщенного закона Ома. Величины коэффициентов в (1.54) зависят от физических свойств рассматриваемой среды. Кроме того, величины отдельных членов в этом уравнении зависят от механических характеристик (скорости, давления и т.д.) рассматриваемой задачи и величины напряженности электромагнитного поля. В связи с этим при рассмотрении той или иной конкретной задачи может оказаться, что некоторые члены в (1.54) пренебрежимо малы. При этом можно использовать более простые формы обобщенного закона Ома. Для того чтобы выяснить, какие параметры определяют собой форму обобщенного закона Ома, оценим относительную величину членов, входящих в уравнение (1.54).

Отметим прежде всего, что если газ частично ионизован, но

$$(1-\alpha)^2/\chi_i \ll 1, \quad (1.56)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{(1-\alpha)^2}{\chi_i H} \left| \left[-\frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{grad} p \times H + \frac{1}{c} (j \times H) \times H + \rho_e E \times H \right] \right| &\ll \\ &\ll \left| \operatorname{grad} p_e + \frac{1}{c} j \times H - ne E \right|, \end{aligned} \quad (1.57)$$

и, следовательно, закон Ома для частично ионизованного газа при условии (1.56) совпадает с законом Ома для полностью

ионизованного газа (1.55) с точностью до коэффициента при плотности тока.

Если электромагнитное поле оказывает существенное влияние на движение среды (именно такие задачи представляют интерес с точки зрения магнитной гидродинамики и ее приложений), то электромагнитные силы имеют порядок величины сил инерции среды

$$\rho U^2 \sim (n + n_a) m_i U^2 = \frac{1}{\alpha} n m_i U^2 \sim \frac{1}{c} j H L \sim \frac{H^2}{4\pi} \sim p, \quad (1.58)$$

L, U — характерные длина и скорость задачи (предполагается, что конвективные токи и токи смещения не превосходят по порядку величины токов проводимости). Соотношение (1.58) показывает, что при любой степени ионизации

$$|\operatorname{grad} p_e| \leq \frac{1}{c} |j \times H|, \quad (1.59)$$

причем $\operatorname{grad} p_e$ несуществен при малой степени ионизации. Если скорость электронного газа относительно ионного много меньше характерной скорости задачи

$$U >> v_e, \quad (1.60)$$

то имеет место соотношение

$$\frac{1}{c} |j \times H| \ll \frac{ne}{c} |v \times H|. \quad (1.61)$$

Соотношению (1.60) можно придать более обозримый вид, если воспользоваться (1.58), именно:

$$U >> \frac{nev_e}{ne} \sim \frac{j}{ne} \sim \frac{m_i U^2 c}{e L H \alpha}$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \frac{U}{L} \frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1. \quad (1.62)$$

Величину $\Omega = U/L \sim 1/T$ назовем *характерной частотой задачи*. Таким образом, условие (1.60) равносильно предположению о том, что угловая частота ионов ω_i больше характерной частоты задачи. Если имеет место неравенство

$U \gg (\chi + \chi_e) v_e$ или $\Omega/\omega_i \ll \alpha/(\chi + \chi_e)$, (1.63)
то

$$\frac{\chi + \chi_e}{c} H |j - \rho_e v| \ll \frac{ne}{c} |v \times H|. \quad (1.64)$$

При выполнении неравенств (1.56) и (1.62) закон Ома будет иметь вид (1.31), обычно используемый в магнитной гидродинамике:

$$j = \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right), \quad \sigma = \frac{nec}{H(\chi + \chi_e)}. \quad (1.65)$$

Если определить время между столкновениями электронов τ^* с ионом или нейтральной частицей по формуле

$$1/\tau^* = 1/\tau_e + 1/\tau_i \quad (1.66)$$

(частота столкновений равна сумме частот столкновений разного рода), то для проводимости получим формулу

$$\sigma = ne^2 \tau^* / m_e,$$

совпадающую по форме с формулой для проводимости полностью ионизованного газа.

Если кроме неравенств (1.56) и (1.62) имеет место неравенство (1.63), то закон Ома сводится к соотношению

$$E = -\frac{1}{c} v \times H, \quad (1.67)$$

которое используется при изучении движений бесконечно проводящих сред. При этом соотношения (1.58) позволяют привести (1.62) к виду, указанному в [2]:

$$\frac{U}{v_e} \sim \frac{neU}{j} \sim \frac{e\alpha HL}{cm_i U} \sim \sqrt{\frac{4\pi\alpha ne^2 L^2}{c^2 m_i}} \gg 1. \quad (1.68)$$

При этих же условиях неравенство (1.56) можно привести к виду

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\chi_i} = \frac{2(1-\alpha)^2 \tau_i e H}{m_i c} \sim \sqrt{\frac{16\pi(1-\alpha)^4 \tau_i^2 e^2 U^2 n}{\alpha m_i c^2}} \ll 1. \quad (1.69)$$

Подчеркнем, что неравенства (1.68) и (1.69) могут быть использованы вместо (1.56) и (1.62) только при рассмотрении

движений хорошо проводящих сред, когда справедливо соотношение (1.63).

Относительная величина членов $\frac{1}{c} j \times H$ и $\frac{\chi + \chi_e}{c} H(j - \rho_e v)$ определяется числом $\omega_e \tau^*$. Если

$$\omega_e \tau^* \ll 1, \quad (1.70)$$

то имеет место соотношение

$$|j \times H| \ll (\chi_e + \chi) H |j - \rho_e v|. \quad (1.71)$$

Наконец, при выполнении неравенства

$$2(1-\alpha)^2 \tau_i / (\alpha T) \ll 1 \quad (1.72)$$

имеет место соотношение

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\chi_i H} \left| \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{grad} p \times H + \frac{1}{c} (j \times H) \times H \right\} \right| \ll \left| -\operatorname{grad} p_e - \frac{en}{c} v \times H \right|. \quad (1.73)$$

Таким образом, относительная величина членов в уравнении (1.54), представляющем собой обобщенный закон Ома, определяется величиной следующих безразмерных параметров:

$$\omega_e \tau^*, \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i}, \frac{(1-\alpha)^2}{\chi_i}, \frac{2(1-\alpha)^2 \tau_i}{\alpha T}, \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} (\omega_e \tau^*)^{-1}, \quad (1.74)$$

связанных как с физическими свойствами среды, так и с условиями рассматриваемой задачи.

Параметр $\omega_e \tau^*$, характеризующий спиральный пробег электрона между двумя столкновениями, определяет относительную величину членов $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ и j . При давлении 1 атм, температуре ~ 10000 К и умеренных магнитных полях ($H \sim 10000$ Гц) этот параметр невелик и членом $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ можно пренебречь. Однако при тех же температурах и полях, но при давлениях $\sim 0,01$ атм, величина $\omega_e \tau^* \approx 1$ и член $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ становится су-

щественным. При этом имеет место явление «анизотропии проводимости» газа.

Параметр $\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i}$ определяет относительную величину членов

$\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ и $\frac{\sigma}{c} v \times H$. Так как угловая частота ионов ω_i тяжелых газов (аргон, воздух и т. д.) при $H \sim 10^4$ Гс имеет порядок 10^6 с⁻¹, то для течений с характерной скоростью $U \sim 10^5$ см/с при характерном размере $L \sim 10$ см величина $\Omega/\omega_i \sim 10^{-2}$. Для «чистых» газов при термической ионизации параметр $\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i}$ велик вследствие малости α при температурах ниже 10000 К в широком диапазоне давлений, т. е. член $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H \gg \frac{\sigma}{c} v \times H$. Если ионизацию газа повысить при тех же условиях путем добавления легко ионизующихся присадков, член $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ становится несущественным по сравнению с $\frac{\sigma}{c} v \times H$. При более высоких температурах это же явление имеет место и для «чистых» газов.

Параметр $(1-\alpha)^2 / \chi_i$, определяющий относительную величину членов $\frac{\omega_e \tau^*}{H} j \times H$ и $\frac{\omega_e \tau^*}{H^2 \chi_i} (1-\alpha)^2 [(j \times H) \times H]$, может стать сравнимым с 1 только для разреженных газов, движущихся в сильных магнитных полях (когда не только электроны, но и ионы обладают спиральным пробегом). При умеренных полях и температурах этот параметр для плотных сред всегда много меньше единицы.

Параметр $\frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha} \frac{\tau_i}{T}$, определяющий относительную величину членов $\frac{\omega_e \tau^* (1-\alpha)^2}{H^2 \chi_i} (j \times H) \times H$ и $\frac{\sigma}{c} v \times H$, в силу условия

(1.43) может стать сравнимым с 1 только при очень низкой ионизации газа.

Параметр $\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} (\omega_e \tau^*)^{-1}$, являющийся произведением двух рассмотренных выше параметров, определяет относительную величину $\frac{\sigma}{c} v \times H$ и j .

Рассмотрим движение плотного газа в умеренном магнитном поле, так что электроны, а в силу (1.51) и (1.53), следовательно, и ионы не обладают спиральным пробегом ($\omega_e \tau^* \ll 1$, $\chi_i \gg 1$). В этих условиях имеют место неравенства (1.56) и (1.70). Если при этом степень ионизации значительна, т. е. имеет место (1.62), то (1.72) удовлетворяется автоматически и закон Ома принимает форму (1.67) при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \ll \omega_e \tau^* \quad (1.75)$$

(это преобразованное при помощи (1.66) неравенство (1.63)) и форму (1.65), если имеет место соотношение $\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \sim \omega_e \tau^*$. Эти

формы закона Ома используются в магнитной гидродинамике.

Если для рассматриваемой задачи имеют место другие соотношения между определяющими параметрами, то необходимо пользоваться той или иной формой обобщенного закона Ома, которая зависит от относительной величины параметров (1.74) [12]. Величины параметров, характеризующих состояние среды и ее физические свойства в различных условиях, оценены в работе [7].

§ 4. Уравнения магнитной гидродинамики

В магнитной гидродинамике в качестве связи плотности тока с остальными величинами используется закон Ома в форме (1.31) или, что то же самое, (1.65):

$$j = \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) + \rho_e v. \quad (1.76)$$

В дальнейшем, на основании равенства (1.76) и при некоторых дополнительных предположениях уравнения Максвелла и

уравнения механики будут упрощены и приведены к виду, используемому в магнитной гидродинамике [21].

Заменим в первом уравнении Максвелла плотность тока j выражением (1.76):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left[\sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) + \rho_e \mathbf{v} \right]. \quad (1.77)$$

Оценим порядки величин входящих сюда членов

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &\sim \frac{H_0}{L}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \sim \frac{E_0}{cT}, \quad \frac{4\pi\rho_e \mathbf{v}}{c} \sim \frac{E_0 V}{cL}, \\ \frac{4\pi\sigma \mathbf{E}}{c} &\sim \frac{\sigma E_0}{c}, \quad \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \sim \frac{\sigma VH_0}{c^2}, \end{aligned}$$

где H_0, E_0, V, L, T — характерные величины для напряженностей магнитного и электрического полей, скорости, линейного размера и времени. Если величина σ такова, что имеют место неравенства

$$1/(\sigma T) \ll 1, \quad V/(\sigma L) \ll 1, \quad (1.78)$$

то в равенстве (1.77) членами $\partial \mathbf{E}/\partial t$ и $4\pi\rho_e \mathbf{v}$ по сравнению с членом $4\pi\sigma \mathbf{E}$ можно пренебречь. Для сильно ионизованных газов критерий (1.78) выполняется для широкого класса явлений, так как проводимость газа в этом случае приближается к проводимости металлов, а для меди, например, $\sigma = 54 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$. В дальнейшем, как это всегда делается при выводе уравнений магнитной гидродинамики, неравенства (1.78) будем считать выполненными. Если (1.78) выполнены, то (1.77) можно переписать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}_m \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (1.79)$$

где $\mathbf{v}_m = c^2/(4\pi\sigma)$. Величина \mathbf{v}_m имеет такую же размерность, что кинематическая вязкость, и называется *магнитной вязкостью*.

Подставив (1.79) во второе уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_m \operatorname{rot} \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \operatorname{rot}(\mathbf{v}_m \operatorname{rot} \mathbf{H}). \quad (1.80)$$

Если $\sigma = \text{const}$, то $\operatorname{rot}(\mathbf{v}_m \operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H}$.

Уравнение (1.80) называется *уравнением индукции* и является одним из основных уравнений магнитной гидродинамики. Оценивая порядок членов в его правой части, можно прийти к выводу, что если $R_m \equiv VL/\mathbf{v}_m \equiv 4\pi\sigma VL/c^2 \gg 1$, то последним членом можно пренебречь, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Безразмерная величина R_m , составленная из размерных величин аналогично числу Рейнольдса, но с использованием магнитной вязкости вместо обычной, называется *магнитным числом Рейнольдса*.

При условии (1.78) из (1.79) следует, что

$$E \leq \max \left\{ \frac{cH}{\sigma L}, \frac{V}{c} H \right\}. \quad (1.81)$$

Отсюда находим, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &\leq \max \left\{ \frac{H}{\sigma LT}, \frac{V^2 H}{c^2 L} \right\}, \\ \frac{4\pi\rho_e v}{c} &\leq \max \left\{ \frac{HV}{\sigma L^2}, \frac{V^2 H}{c^2 L} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

Отношение каждого из этих членов к $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ имеет порядок $1/(\sigma T)$, $V/(\sigma L)$ или V^2/c^2 .

Таким образом, при условии (1.78) и $V^2/c^2 \ll 1$, которое мы считаем всегда выполненным, токами смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}$ и конвективными токами $\rho_e v$ можно всюду пренебречь также по сравнению с суммарным током $\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$. Закон Ома при этом

примет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \quad (1.83)$$

а первое уравнение Максвелла запишется следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.84)$$

Уравнениями (1.79), (1.84) и уравнением индукции (1.80) будем пользоваться в дальнейшем вместо уравнений Максвелла.

Из формул преобразования (1.7) в рамках сделанных предположений получим для магнитной гидродинамики следующее соотношение:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}', \quad (1.85)$$

а из формул преобразования (1.2), используя оценку (1.81) порядка величины \mathbf{E} , получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad (1.86)$$

т. е. в рамках магнитной гидродинамики напряженность магнитного поля и плотность тока не зависят от выбора инерциальной системы координат.

При помощи соотношений (1.79) и (1.84) можно исключить \mathbf{E} и \mathbf{j} из уравнений механики (1.21). При этом если

$$R_m > 1, \quad (1.87)$$

что предполагается в дальнейшем, то в уравнениях движения можно пренебречь электрической силой по сравнению с магнитной. Действительно,

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}^2}{L},$$

$$\rho_e \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}^2}{L} \sim \frac{\mathbf{H}^2}{L} \sim \frac{\mathbf{H}^2}{L} \max \left\{ \left(\frac{c}{\sigma L} \right)^2, \frac{V^2}{c^2} \right\} = \frac{\mathbf{H}^2}{L} \max \left\{ \frac{V}{\sigma L R_m}, \frac{V^2}{c^2} \right\}.$$

Отсюда в силу (1.78) и (1.87) следует, что

$$\mathbf{E}^2 \ll \mathbf{H}^2 \text{ и } \mathbf{f} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}. \quad (1.88)$$

Преобразуем, кроме того, выражение для джоулева тепла

$$D = E(j - \rho_e v) - \frac{1}{c} (j \times H) v = j' \cdot E' = \frac{j'^2}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{v_m}{4\pi} (\text{rot } H)^2.$$

Таким образом, предполагая выполненные неравенства (1.78) и используя закон Ома в форме (1.76), можно привести систему уравнений, описывающую движение проводящей среды в электромагнитном поле и поведение магнитного поля, к следующей системе, которая называется *системой уравнений магнитной гидродинамики*:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} \text{rot } H \times H + \text{div } \hat{\tau}, \\ \rho T \frac{ds}{dt} = -\text{div } q + \Phi + \frac{v_m}{4\pi} (\text{rot } H)^2, \end{array} \right\} \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot } (v \times H) - \text{rot } (v_m \text{rot } H),$$

$$\text{div } H = 0,$$

$$\text{где } \text{div } \hat{\tau} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} e_i, \quad \tau_{ik} = \tau_{ik} \left(\rho, p, H, \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right),$$

$$q = q \left(\rho, p, H, \frac{\partial T}{\partial x_m} \right), \quad \Phi = \frac{1}{2} \tau_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad T = T(\rho, p).$$

Если среда является совершенным газом, в котором тензор вязких напряжений и поток тепла выражаются соотношениями (1.17) с постоянными μ , ζ и k , то

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{p}{R\rho}, \quad \text{div } \hat{\tau} = \mu \Delta v + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad div } v, \\ \text{div } q = -k \Delta T, \\ \Phi = \sum_{i,k} \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) (\text{div } v)^2. \end{array} \right\} \quad (1.90)$$

Среду будем называть *идеальной*, если одновременно равны нулю \mathbf{q} , τ_{ik} и v_m .

При $v_m = \text{const}$ имеем $\text{rot}(\mathbf{v}_m \text{rot} \mathbf{H}) = -\mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H}$, и уравнение индукции принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H}.$$

Для несжимаемой среды в системе уравнений магнитной гидродинамики уравнение неразрывности необходимо заменить уравнением $\text{div } \mathbf{v} = 0$. В этом случае три уравнения (1.89) могут решаться независимо от уравнения энергии, которое может быть записано в виде

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\text{div} \mathbf{q} + \Phi + \frac{v_m}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{H})^2$$

и служит для расчета поля температур после определения поля скоростей и магнитного поля.

В §1 было показано, что уравнение $\text{div} \mathbf{H} = 0$ играет особую роль в системе уравнений электродинамики. Применив операцию дивергенции к уравнению индукции, найдем, что в магнитной гидродинамике имеет место уравнение $\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{H} = 0$. Поэтому, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению $\text{div} \mathbf{H} = 0$, достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Таким образом, равенство $\text{div} \mathbf{H} = 0$ выполняется в силу уравнения индукции, а также начальных условий. Тем не менее во многих задачах удобнее использовать это уравнение вместо одной из проекций уравнения индукции.

Уравнения движения и индукции при постоянных v_m, μ, ζ, k можно представить еще и в таком часто употребляемом виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\text{grad} \left(p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \\ &\quad + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}), \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

В систему (1.89) не входят величины E , ρ_e и j . Эти величины выражаются через H и v по формулам

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{c} [v_m \operatorname{rot} H - v \times H], \quad \rho_e = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E, \\ j &= \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times H \right) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H. \end{aligned}$$

Вследствие (1.88) в магнитной гидродинамике вид тензора напряжений электромагнитного поля упрощается, а именно:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} H_i H_j - \frac{\delta_{ij}}{8\pi} H^2. \quad (1.92)$$

Если одну из осей координат (например, x_1) направить вдоль силовой линии магнитного поля, а две другие — в плоскости, перпендикулярной к силовой линии, то тензор (1.92) можно записать в виде матрицы

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} \frac{H^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{H^2}{8\pi} \end{vmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что напряжения, обусловленные магнитным полем, сводятся к напряжению $H^2/(8\pi)$ вдоль силовой линии (T_{11} дает проекцию на нормаль напряжения на площадке, перпендикулярной к силовой линии) и к давлению $H^2/(8\pi)$ поперек силовых линий магнитного поля (так как T_{22} и T_{33} дают проекции напряжения на нормаль к площадкам, содержащим силовую линию). Можно считать также, что напряжения, обусловленные магнитным полем, представляют собой сумму равномерного по всем направлениям давления $H^2/(8\pi)$ и напряжения $H^2/(4\pi)$ в направлении магнитного поля.

В приближении магнитной гидродинамики электрическое поле напряжений в среде не создает. Кроме того, в уравнении (1.28) можно пренебречь изменением электромагнитного количества движения по сравнению с электромагнитным потоком импульса, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \ll \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}}.$$

Действительно,

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \sim \frac{1}{cT} EH < \frac{H^2}{L} \max \left\{ \frac{1}{\sigma T}, \frac{V^2}{c^2} \right\}.$$

Система уравнений (1.89) описывает движение проводящего газа или несжимаемой жидкости в тех областях, где движение непрерывно. Если в области движения существуют поверхности разрыва, то решения уравнений (1.89), описывающие движение и поведение магнитного поля в каждой из областей, не содержащих поверхностей разрыва, должны сопрягаться при помощи соотношений на поверхностях разрыва. К последним относятся уравнения (1.13) и (1.14), связывающие величины напряженности полей при переходе через поверхность разрыва, а также соотношения, полученные из интегральных уравнений движения (1.30) и представляющие собой законы сохранения массы, импульса и энергии при переходе через поверхность разрыва.

Будем рассматривать поверхность разрыва в системе координат, в которой она поконится. Соотношения (1.13) и (1.14) сводятся к условиям непрерывности касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля при переходе через поверхность разрыва:

$$\{E_\tau\} = \{H_n\} = 0, \quad (1.93)$$

где фигурные скобки обозначают, что берется разность значений соответствующей величины с одной и другой стороны разрыва. Два других соотношения из (1.13) и (1.14) служат для определения поверхностного тока и поверхностного заряда. Если в выбранной системе координат за объем и поверхность, фигурирующие в (1.30), взять такие объем и поверхность, как на рис. 1, и перейти к пределу при $h \rightarrow 0$, то из (1.30) получим следующие соотношения:

$$\{\rho v_n\} = \{\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}\} = \{S_n\} = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} \{\rho v_n\} &= 0, \\ \{\rho v_n \cdot v - \hat{P} \cdot n - \hat{T} \cdot n\} &= 0, \\ \left\{ s_n + q_n - (\hat{P} \cdot v) \cdot n + \rho v_n \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

Соотношения (1.93) и (1.94) являются в магнитной гидродинамике условиями на поверхностях разрыва. В дальнейшем, используя известные выражения для входящих сюда величин, будем приводить эти соотношения к виду, удобному для решения той или иной задачи.

§ 5. Простейшие интегралы системы уравнений магнитной гидродинамики

Полученная система уравнений движения при некоторых условиях имеет интегралы, аналогично интегралам уравнений движения идеальной жидкости в обычной гидродинамике.

Будем рассматривать движения бесконечно проводящей жидкости или газа ($v_m = 0$). Тогда уравнение индукции даст

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot}(v \times \mathbf{H}) = 0.$$

Вычислим поток вектора, стоящего в левой части этого равенства, через произвольную жидкую поверхность Σ , ограниченную контуром L . Используя теорему Стокса, получим

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial H_n}{\partial t} d\Sigma - \oint_L (v \times \mathbf{H}) d\mathbf{l} = 0. \quad (1.95)$$

Рассмотрим теперь два момента времени t_1 и t_2 . Пусть Σ_1 — положение жидкой поверхности в момент t_1 , Σ_2 — ее положение в момент t_2 , Σ_3 — поверхность, состоящая из траекторий, которые прошли частицы, составляющие контур L , за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 3). Поток вектора \mathbf{H} через любую замкнутую поверхность равен нулю. Записывая это условие в момент t_2 для поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, получим

$$\int_{\Sigma_2} H_n(t_2) d\Sigma - \int_{\Sigma_1} H_n(t_2) d\Sigma + \int_{\Sigma_3} H_n(t_2) d\Sigma = 0.$$

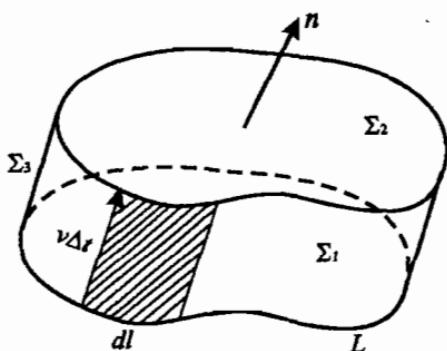


Рис. 3

Перед вторым слагаемым стоит знак минус, так как на поверхности Σ_1 взята нормаль, внутренняя по отношению к объему, ограниченному поверхностями Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 . Считая $t_2 - t_1 = \Delta t$ малым, можно переписать последнее равенство следующим образом:

$$\int_{\Sigma_2} H_n(t_2) d\Sigma - \int_{\Sigma_1} H_n(t_1) d\Sigma + \oint_{\Sigma_1} H(t_1)(\nu \Delta t \times dI) = 0.$$

Разделим это соотношение на Δt и устремим Δt к 0, тогда получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} H_n d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} H_n d\Sigma - \oint_{\Sigma} (H \times \nu) dI = 0.$$

Отсюда в силу (1.95)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} H_n d\Sigma = 0, \quad (1.96)$$

т. е. поток магнитного поля через любую жидкую поверхность с течением времени не меняется [16, 20].

Рассмотрим две жидкие поверхности, на которых в некоторый момент времени $H_n = 0$. На основании (1.96) это равенство сохраняется во все последующие моменты времени на каждой из поверхностей. Линия пересечения этих поверхностей всегда является магнитной силовой линией, так как она лежит в каждой из этих поверхностей. В то же время линия пересечения является жидкой линией, поскольку принадлежит двум жидким поверхностям. В связи с этим можно считать, что магнитные силовые линии (аналогично вихревым линиям в газовой динамике) скреплены с жидкими частицами. Это свойство называется *вмороженностью силовых линий*. Поверхность, состоящую

линий, проходящих через некоторую замкнутую кривую, будем называть *магнитной силовой трубкой*. Как следует из второго уравнения (1.10), поток магнитного поля через любое сечение магнитной силовой трубы постоянен.

Изучим деформацию жидкого элемента магнитной силовой трубы достаточно малого диаметра, возникающую при движении среды [10]. Из (1.96) и закона сохранения массы следует, что

$$\rho \Sigma dl = \rho^0 \Sigma^0 dl^0 \text{ и } H\Sigma = H^0 \Sigma^0,$$

где Σ и dl — площадь поперечного сечения и длина магнитной силовой трубы, индексом 0 обозначены значения соответствующих величин до деформации. Из последних равенств получим

$$\frac{H}{\rho dl} = \frac{H^0}{\rho^0 dl^0} = C = \text{const}, \quad (1.97)$$

т. е. величина H/ρ изменяется пропорционально длине элемента магнитной силовой линии. Так как координаты элемента $dl = e_i dx_i$ жидких линий преобразуются при деформации среды согласно равенству

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} dx_j^0, \quad (1.98)$$

то для элемента жидкой линии, совпадающего с магнитной силовой линией $\left(dx_i = \frac{H_i}{H} dl \right)$, воспользовавшись (1.97), получим

$$dx_i = H_i / (C\rho) \text{ и } dx_j^0 = H_j^0 / (C\rho^0).$$

Отсюда, используя (1.98), найдем

$$H_i = \frac{\rho}{\rho^0} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} H_j^0 = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}}{\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|} H_j^0, \quad (1.99)$$

где через $\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|$ обозначен определитель матрицы $\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|$. Соот-

ношение (1.99), следующее из (1.98), назовем *интегралом вмороженности*.

В частных случаях интегралу вмороженности можно придать более обозримый вид. Пусть, например, движение плоское и \mathbf{H} перпендикулярно к плоскости движения; тогда из (1.97) следует

$$H/\rho = b = \text{const}, \quad (1.100)$$

так как в этом случае длина элемента магнитной силовой линии не меняется. Равенство (1.100) имеет место для каждой жидкой частицы. Для различных частиц константы в (1.100) могут быть различными.

При изучении плоских движений бесконечно проводящего газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости движения, соотношения (1.100) позволяют исключить \mathbf{H} из уравнений магнитной гидродинамики (1.89). Кроме того, если вместо давления и внутренней энергии ввести функции

$$\epsilon^* = \epsilon + b^2 \rho / (8\pi), \quad p^* = p + b^2 \rho^2 / (8\pi),$$

то уравнения (1.89) для таких движений будут по форме совпадать с уравнениями обычной газовой динамики [3, 9, 16]. Отсюда ясно, что решения задач магнитной гидродинамики в данном случае могут быть получены путем пересчета соответствующих задач обычной газовой динамики. Необходимо только помнить о граничных условиях. Если граничные условия газодинамической задачи сформулированы для скоростей (задача о поршне, обтекание тел и т. д.), то они остаются неизменными и для соответствующей магнитогидродинамической задачи. Если же граничные условия сформулированы для давлений (например, в задачах истечения), то в соответствующей магнитогидродинамической задаче p^* будет обозначать суммарное напряжение. В этом случае граничные условия для магнитного поля должны быть использованы при решении задачи о поле скоростей и давлений. Заметим еще, что для совершенного газа при $\gamma = 2$ все формулы термодинамики остаются теми же, но с заменой p на p^* , ϵ на ϵ^* .

В магнитной гидродинамике при некоторых условиях оказывается верным также интеграл, аналогичный интегралу Бернуlli [11, 19]. Рассмотрим стационарные движения невязкой и

нетеплопроводной жидкости. В стационарном случае уравнение энергии (1.29) имеет вид $\operatorname{div} S = 0$. При отсутствии вязкости и теплопроводности в том случае, когда вектор $E \times H$ параллелен v , поток энергии не подтекает к трубке тока. Отсюда следует, что поток энергии вдоль трубки тока постоянен, т. е.

$$\left[\rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) v + p v + \frac{c}{4\pi v} (E \times H) \cdot v \right] \Sigma = \text{const.}$$

Так как $\rho v \Sigma = \text{const}$ из условия постоянства расхода массы, то вдоль линии тока имеем

$$\epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{c}{4\pi} \frac{(E \times H) \cdot v}{\rho v^2} = \text{const}, \quad (1.101)$$

причем постоянные, стоящие в правых частях трех последних равенств, зависят, вообще говоря, от выбора линии тока. Если $E = 0$ или $E \parallel H$, поток электромагнитной энергии отсутствует и уравнение (1.101) принимает вид

$$\epsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (1.102)$$

по форме совпадающий с интегралом Бернулли в обычной газовой динамике [11]. Если E и H перпендикулярны v , то, исключая E из равенства (1.101) при помощи (1.79), получим

$$\epsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{4\pi} \frac{H^2}{\rho} + \frac{v_m}{4\pi \rho v^2} (\operatorname{rot} H \times H) \cdot v = \text{const}. \quad (1.103)$$

Заметим, что известная в обычной гидродинамике теорема Томпсона о сохранении циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру, верна в магнитной гидродинамике только в том случае, если магнитное поле удовлетворяет условию [5, 8]

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} H \times H) = 0. \quad (1.104)$$

которое, конечно, выполняется не всегда. Условие (1.104) выполнено, если движение плоское и магнитное поле перпендикулярно к плоскости движения.

Глава 2

Движения несжимаемой жидкости

§ 1. Движение вязкой электропроводной жидкости с прямолинейными линиями тока

Из стационарных движений представляют интерес движения проводящей жидкости с прямолинейными линиями тока, так как они могут описывать движения по трубам и каналам. Предположим, что скорость v и магнитное поле H не меняются вдоль линий тока, которые мы будем считать параллельными осям x . Тогда уравнения, описывающие такие движения, примут вид [3]

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \left(H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \mu \Delta u, \quad (2.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \left(H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \left(H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (2.3)$$

$$H_y \frac{\partial u}{\partial y} + H_z \frac{\partial u}{\partial z} + v_m \Delta H_x = 0, \quad (2.4)$$

$$\Delta H_y = 0, \quad \Delta H_z = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

где u — x -я составляющая скорости (y - $, z$ -я составляющие в рассматриваемом случае равны нулю: $v=w=0$), $p^* = p + H^2/(8\pi)$ — полное давление, $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Если ввести функцию $A(y, z)$ такую, что

$$H_z = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2.7)$$

то уравнение (2.6) удовлетворяется, а уравнения (2.5) дают

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta A = \frac{\partial}{\partial y} \Delta A = 0,$$

следовательно,

$$\Delta A = \text{const} = \omega. \quad (2.8)$$

В то же время,

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = e_x \operatorname{rot} \mathbf{H} = \omega.$$

Таким образом, введенная выше постоянная ω пропорциональна x -й составляющей плотности тока. Эта величина, согласно равенству (2.8), должна быть постоянной и должна быть задана из граничных условий при $x = \pm\infty$.

Если рассматривать течение в трубе, то на поверхности трубы может быть задана величина A . Это равносильно заданию H_n . Тогда для определения A получается задача Дирихле для уравнения Пуассона, которая имеет однозначное решение. Решив эту задачу, находим H_y и H_z из равенств (2.7).

Преобразуем теперь уравнения (2.2) и (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial y} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (H_y^2 + H_z^2) - H_z \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right], \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (H_y^2 + H_z^2) - H_y \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если обозначить $p^{**} = p + H_x^2 / 8\pi$, то получим

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \frac{\partial p^{**}}{\partial y} &= -H_z \omega = -\frac{\partial A}{\partial y} \omega, \\ 4\pi \frac{\partial p^{**}}{\partial z} &= H_y \omega = -\frac{\partial A}{\partial y} \omega \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

или

$$4\pi p^{**} = -A\omega + f(x). \quad (2.10)$$

Продифференцировав (2.10) по x и учитя, что A , ω , H_x^2 и $\partial p/\partial x$ не зависят от x , получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x) = \text{const} = C_1.$$

Таким образом, $f = C_1 x + C_2$.

Соотношение (2.10) служит для определения давления в том случае, если известны функции $A(y, z)$ и $H_x(y, z)$. Для того чтобы найти u и H_x и тем самым завершить решение задачи, необходимо проинтегрировать оставшиеся уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial x} &= C_1 = \frac{1}{4\pi} \left(H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \mu \Delta u, \\ H_y \frac{\partial u}{\partial y} + H_z \frac{\partial u}{\partial z} + v_m \Delta H_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Так как функции H_y и H_z определяются из (2.7) независимо от u и H_x , то в (2.11) эти функции можно считать известными. При этом (2.11) представляет собой систему линейных уравнений. Эту систему можно преобразовать к виду, который в ряде случаев может оказаться полезным. Введем новые переменные [17]

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + \sqrt{\frac{v_m}{4\pi\mu}} H_x, \\ u_2 &= u - \sqrt{\frac{v_m}{4\pi\mu}} H_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Тогда уравнения (2.11) примут вид

$$\left. \begin{aligned} H_y \frac{\partial u_1}{\partial y} + H_z \frac{\partial u_1}{\partial z} + \sqrt{4\pi\mu v_m} \Delta u_1 - \sqrt{\frac{4\pi v_m}{\mu}} \frac{\partial p^*}{\partial x} &= 0, \\ -H_y \frac{\partial u_2}{\partial y} - H_z \frac{\partial u_2}{\partial z} + \sqrt{4\pi\mu v_m} \Delta u_2 - \sqrt{\frac{4\pi v_m}{\mu}} \frac{\partial p^*}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Таким образом, определение u_1 и u_2 производится независимо, если граничные условия сформулированы для каждой из этих функций. Кроме того, в ряде случаев оказывается, что если u_1 известна, то функция u_2 находится простым пересчетом. На границе должны быть заданы скорость u и напряженность маг-

нитного поля H_x . При этом величины u_1 и u_2 на границе оказываются известными.

Пусть течение происходит в ограниченном объеме — трубе — и магнитное поле однородно на бесконечности. Пусть вне трубы токов нет, а внутри трубы $\omega = 0$. Тогда во всем пространстве $\mathbf{H}_t = H_y \mathbf{e}_y + H_z \mathbf{e}_z = \text{const}$, так как во всем пространстве выполняются равенства $\text{rot } \mathbf{H}_t = 0$, $\text{div } \mathbf{H}_t = 0$. Поворотом осей координат всегда можно добиться выполнения равенства $H_y = 0$. При этом уравнения (2.13) превращаются в уравнения с постоянными коэффициентами. Если внешнее поле неоднородно, то уравнения (2.13) в общем случае являются уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Однако если ток вдоль оси x отсутствует ($\omega = 0$), то можно ввести новые независимые переменные так, что (2.13) перейдут в уравнения с постоянными коэффициентами при производных. Используя соотношения (2.7), перепишем (2.13) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \chi_1 \Delta u_1 + \chi_2 = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \chi_1 \Delta u_2 + \chi_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

где $\chi_1 = \sqrt{4\pi\mu\nu_m} = \text{const}$; $\chi_2 = -\sqrt{\frac{4\pi\nu_m}{\mu}} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \text{const}$.

Так как $\omega = 0$, то из (2.8) следует, что $A(y, z)$ в данном случае является гармонической функцией. Пусть $B(y, z)$ — сопряженная с $A(y, z)$ гармоническая функция. Переходим в (2.14) к новым независимым переменным [8]

$$y_1 = A(y, z), \quad z_1 = B(y, z). \quad (2.15)$$

Используя условия Коши—Римана для сопряженных гармонических функций, получим

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 \Delta_1 u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\chi_2}{D} \equiv \Phi(u_1) = 0, \\ \chi_1 \Delta_1 u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + \frac{\chi_2}{D} \equiv \Psi(u_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\text{Здесь } D = \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 = D(y_1, z_1), \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}.$$

Если в плоскости y, z задан контур трубы L и задана функция $A(y, z)$ (она определяется из решения (2.8) при заданных граничных условиях), то для определения $u_1(y, z)$ и $u_2(y, z)$ необходимо решить систему (2.16) с граничными условиями, заданными на контуре L , полученном конформным его отображением, при помощи функции $w(y + iz) = A(yz) + iB(yz)$.

Если магнитное поле в (2.13) однородно, то эти уравнения отличаются от (2.16) только тем, что у них члены, не содержащие u_1 и u_2 , постоянны, а в (2.16) они являются некоторыми функциями независимых переменных. Это обстоятельство оказывается полезным при решении задач о течении в «трубах» в неоднородных полях. Действительно, пусть известно решение u_1 и u_2 задачи о течении в «трубе» с контуром L_1 в однородном магнитном поле при заданных граничных условиях $u_1^*(L_1)$, $u_2^*(L_1)$ и $H_y = 0$. Пусть, кроме того, известно некоторое частное решение уравнений

$$\Phi(u_1^0) - \frac{\chi_2}{H_z} = 0, \quad \Psi(u_2^0) - \frac{\chi_2}{H_z} = 0.$$

Так как уравнения (2.13) и (2.16) линейны, то

$$u_1 = u_1^* + u_1^0 \quad \text{и} \quad u_2 = u_2^* + u_2^0 \quad (2.17)$$

будут являться решением системы (2.16), причем на контуре L_1 это решение будет принимать значение

$$\left. \begin{aligned} u_1(L_1) &= u_1^*(L_1) + u_1^0(L_1), \\ u_2(L_1) &= u_2^*(L_1) + u_2^0(L_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Если L_1 получено из L конформным преобразованием при помощи функции $y_1 + iz_1 = W(y + iz) = A(y, z) + iB(y, z)$, решение (2.17) после замены в нем y_1 и z_1 по формулам (2.15) будет решением задачи о течении в «трубе» с контуром L при тех же значениях констант χ_1 и χ_2 , принимающим в соответствующих точках границы значения (2.18). При этом магнитное поле определяется по формулам (2.7).

Рассмотрим теперь простейший случай течений с прямолинейными линиями тока. Пусть все величины не зависят от y и $H_y = 0$. Это может соответствовать движению жидкости между двумя плоскостями. Движение может вызываться либо градиентом давлений вдоль оси x , либо движением самих плоскостей

(всегда можно считать, что движется только одна из них). При этом уравнения (2.13) и (2.6) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + k_2 = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - k_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + k_2 = 0, \\ k_1 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\mu v_m}} = \text{const}, \\ k_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \text{const}, \\ H_z = H_0 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_1 = -\frac{k_2}{k_1} z + A_1 e^{-k_1 z} + A_2, \\ u_2 = \frac{k_2}{k_1} z + B_1 e^{k_1 z} + B_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

и зависят от шести констант: $A_1, A_2, B_1, B_2, k_1, k_2$. Все остальные величины, характеризующие течение, выражаются через u_1 и u_2 по формулам:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \\ H_x &= \sqrt{\frac{\pi\mu}{v_m}}(u_1 - u_2), \\ j_y &= \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sqrt{\frac{c^2\mu}{16\pi v_m}} \frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2), \\ cE_y &= v_m \frac{\partial H_x}{\partial z} + uH_z = \sqrt{\pi\mu v_m} \frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)H_z = -\sqrt{\pi\mu v_m} \frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{2}(A_2 + B_2)H_z = \\ &= \frac{-4\pi v_m}{H_z} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(A_2 + B_2)H_z = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Константы, входящие в решение, определяются из граничных условий, связанных с постановкой той или иной конкретной задачи. Рассмотрим три примера.

1. ЗАДАЧА ГАРТМАНА [14]. Пусть обе плоскости покоятся, а движение происходит за счет перепада давлений. Магнитное поле считаем заданным на обеих пластинах нормально к их поверхности. Выбрав систему координат так, чтобы плоскость $z = 0$ была равнодалена от стенок, можно записать граничные условия в следующем виде:

$$u = 0, \quad H_x = 0, \quad H_z = H_0 \quad \text{или} \quad u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при } z = \pm\delta.$$

Отметим, что в данной постановке E_y является определяемой величиной. Подставляя общее решение (2.20) в граничные условия, получим соотношения для определения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} -\frac{k_2}{k_1}\delta + A_1 e^{-k_1\delta} + A_2 &= 0, & \frac{k_2}{k_1}\delta + B_1 e^{k_1\delta} + B_2 &= 0, \\ \frac{k_2}{k_1}\delta + A_1 e^{k_1\delta} + A_2 &= 0, & -\frac{k_2}{k_1}\delta + B_1 e^{-k_1\delta} + B_2 &= 0. \end{aligned}$$

Сравнивая уравнения слева с уравнениями справа, получаем $A_1 = B_1, A_2 = B_2$. Из первых двух уравнений следует

$$A_1 = -\frac{k_2\delta/k_1}{\operatorname{sh} k_1\delta}, \quad A_2 = -A_1 \operatorname{ch} k_1\delta.$$

Решение задачи будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = A_1 \operatorname{ch} k_1 z + A_2 = \frac{k_2\delta/k_1}{\operatorname{sh} k_1\delta} (\operatorname{ch} k_1\delta - \operatorname{ch} k_1 z), \\ \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}} H_x &= \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = -\frac{k_2}{k_1} z - A_1 \operatorname{sh} k_1 z = -\frac{k_2}{k_1} z + \frac{k_2\delta/k_1}{\operatorname{sh} k_1\delta} \operatorname{sh} k_1 z. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Если в (2.22) перейти к безразмерной переменной z/δ , то решение будет зависеть только от безразмерной комбинации $G = k_1\delta = H_0\delta/\sqrt{4\pi\mu\nu_m}$. Эта комбинация, называемая числом Гартмана, характеризует соотношение между вязкими и маг-

нитными силами. Качественный вид профиля скоростей и магнитных силовых линий представлен на рис. 4.

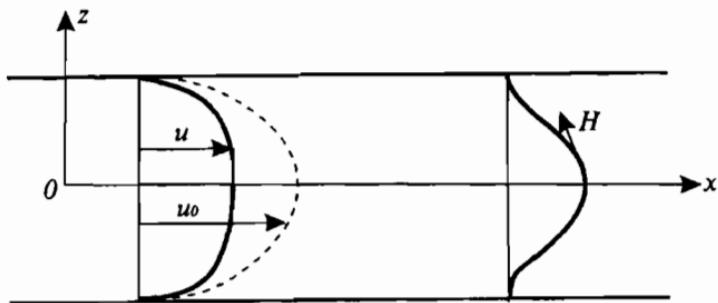


Рис. 4

Будем изменять напряженность магнитного поля H_z , оставляя μ и $\frac{\partial p}{\partial x}$ постоянными. При этом меняется величина

$k_1^2 = \frac{\sigma H_z^2}{\mu c^2}$, а величина $k_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$ остается неизменной. Нетрудно убедиться, что если $k_1 \rightarrow 0$ при $k_2 = \text{const}$, то профиль скоростей стремится, как и следовало ожидать, к пуазейлевскому $u_0(z)$:

$$u \rightarrow u_0 = \frac{1}{2} k_2 (\delta^2 - z^2).$$

Если $k_1 \rightarrow \infty$ при $k_2 = \text{const}$, то $u \rightarrow 0$ при всех z . Из равенств (2.22) видно, что при увеличении k_1 профиль скоростей становится все более и более плоским и при достаточно большом k_1 основное изменение скорости происходит в узком пристеночном слое. Для того чтобы понять это явление, рассмотрим закон Ома:

$$j_y = \sigma \left(E_y - \frac{u}{c} H_0 \right). \quad (2.23)$$

Так как

$$\int_{-\delta}^{\delta} j_y dz = \frac{c}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial H_x}{\partial z} dz = \frac{c}{4\pi} [H_x(+\delta) - H_x(-\delta)] = 0,$$

то, интегрируя (2.23), получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} E_y dz = \frac{H_0}{c} \int_{-\delta}^{\delta} u dz,$$

или, так как $E_y = \text{const}$ (что следует из уравнения $\text{rot } E = 0$),

$$E_y = \frac{H_0}{c} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u dz = \frac{u_{cp}}{c} H_0, \quad (2.24)$$

При этом из закона Ома (2.23) следует, что ток течет в одну сторону, если $u > u_{cp}$, и в другую, если $u < u_{cp}$. В первом случае поток замедляется, а во втором — ускоряется. Это приводит к уплощению профиля скоростей. Чтобы показать, что по сравнению с немагнитным случаем при том же градиенте давления скорость всюду падает, рассмотрим баланс импульса в объеме, заключенном между плоскостями $z = \pm h$ ($h < \delta$) и имеющем единичную длину в направлении осей x и y . Так как количество движения в этом объеме не изменяется, то силы, действующие на него вдоль оси x , должны уравновешиваться:

$$2h \frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} + \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-h} + \\ + \left. \frac{H_0}{4\pi} H_x \right|_{z=h} - \left. \frac{H_0}{4\pi} H_x \right|_{z=-h} = -2\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} + \left. \frac{1}{2\pi} H_x H_0 \right|_{z=h}.$$

Члены, связанные с магнитным полем, представляют собой x -е составляющие магнитных напряжений, приложенных к плоскостям $z = \pm h$. Из последнего равенства, учитя знаки входящих в него членов, находим, что при наличии магнитного поля величина $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$ в каждой точке z меньше, чем $\left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|$ при отсутствии магнитного поля:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right| \quad (2.25)$$

Исключение составляют точки $z = \pm \delta$ и $z = 0$, где $H_x = 0$ и наличие

магнитного поля не влияет на величину производной $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$ и величину вязкого трения. Из неравенства (2.25) следует, что наличие магнитного поля приводит к уменьшению скорости в каждой точке z по сравнению с немагнитным случаем:

$$u < u_0. \quad (2.26)$$

Заметим, что, кроме задачи Гартмана, можно было бы рассмотреть и другие задачи, когда жидкость приводится в движение перепадом давлений, и стеки неподвижны. При этом на стеках необходимо задать величины составляющих x напряженности магнитного поля (которые в задаче Гартмана равны нулю) или напряженность электрического поля и величину составляющей x магнитного поля на одной из стек.

2. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТИ [11]. Пусть $\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| = 0$ ($k_2 = 0$), а жидкость приводится в движение верхней стекой $z = \delta$, которая движется со скоростью U . На нижней неподвижной стеке ($z = 0$) задано $H_z = H_0$, $H_x = H_{x0}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$. Верхняя стека считается диэлектриком. Прежде чем переходить к решению задачи о течении Куэтта, остановимся несколько подробнее на ее постановке. Течение Куэтта может рассматриваться как некоторое приближение к задаче о пограничном слое. При этом неподвижная стека может трактоваться как обтекаемое тело, а движущаяся стека – как внешний поток. В отличие от задач пограничного слоя, в задаче о течении Куэтта можно выписать решение в конечном виде, и это решение может служить для выяснения различных закономерностей, присущих пограничному слою.

Отметим, что, как будет видно из дальнейшего, решение задачи Куэтта, полученное для несжимаемой жидкости, верно также и для газа, так как плотность или ее производные не входят в уравнения.

Если тело обтекается газом с большой сверхзвуковой скоростью, то газ вследствие его нагревания на ударной волне и в пограничном слое ионизуется и становится проводником. При этом появляется возможность повлиять на движение газа и получить полезные эффекты, создавая вокруг тела магнитное

поле. В ряде случаев можно считать, что газ является проводящим только вблизи тела, поскольку этот газ прошел через участок ударной волны наибольшей интенсивности и подвергается дополнительному подогреву за счет диссипативных процессов в пограничном слое. Поэтому в рассматриваемой задаче верхняя стенка считается диэлектриком. Если электромагнитное поле создается источниками, заключенными внутри тела, то вдали от тела $H = 0$ и $E = 0$ в системе координат, связанной с летящим телом. В этой системе координат движение стационарно и электрическое поле, согласно равенствам (2.21), постоянно: $E = E_y = \text{const}$. Так как $E = 0$ на бесконечности, то $E_y = 0$. Далее на неподвижной стенке $u = 0$, следовательно,

$$\frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left(E_y + \frac{1}{c} u H_0 \right) = 0.$$

Таким образом, граничные условия на нижней стенке связаны с тем, что магнитное поле создается только токами, текущими внутри тела.

После этих предварительных замечаний приступаем к решению задачи. Граничные условия имеют вид

$$H_x = H_{x0}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2.27)$$

$$u = U \quad \text{при } z = \delta.$$

Подставляя эти равенства в общее решение (2.20), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - B_1 + A_2 - B_2 &= 2H_{x0} \sqrt{\frac{V_m}{4\pi\mu}} \equiv 2C, \\ -k_1 A_1 - k_1 B_1 &= 0, \\ A_1 + B_1 + A_2 + B_2 &= 0, \\ A_1 e^{-k_1 \delta} + B_1 e^{k_1 \delta} + A_2 + B_2 &= 2U. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Из второго и третьего равенств (2.28) следует, что $A_1 = -B_1$, $A_1 = -B_1$, а из первого и четвертого получим: $-2B_1 - 2B_2 = 2C$, $2B_1 \sinh k_1 \delta = 2U$, или

$$B_1 = U / (\operatorname{sh} k_1 \delta), \quad B_2 = -B_1 - C.$$

Итак, решение задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U}{\operatorname{sh} k_1 \delta} \operatorname{sh} k_1 z, \\ \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}} (H_x - H_{x0}) &= \frac{U}{\operatorname{sh} k_1 \delta} (1 - \operatorname{ch} k_1 z). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Качественный вид профиля скорости и магнитных силовых линий представлен на рис. 5. Заметим, что если магнитное поле

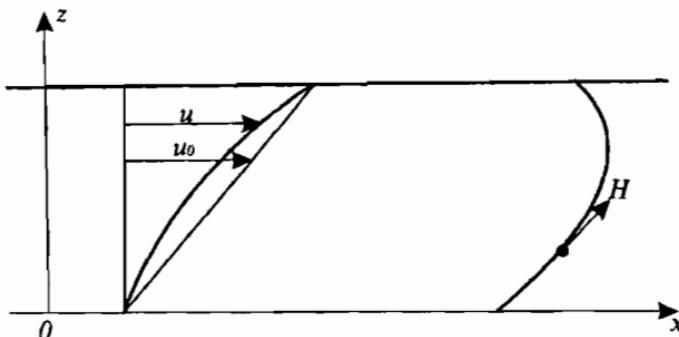


Рис. 5

отсутствует, то распределение скоростей в течении Куэтта линейно: $u_0 = U \frac{z}{\delta}$. Наличие магнитного поля приводит к торможению потока $u < u_0$, а также к тому, что напряжение трения $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$ на верхней стенке возрастает, а на нижней — падает. Однако на нижнюю стенку, которая считается источником магнитного поля, кроме силы трения действует еще магнитная сила. Чтобы найти суммарную силу, действующую на нижнюю стенку, воспользуемся тем, что она равна и противоположна по знаку силе, действующей на верхнюю стенку. Так как верхняя стенка является диэлектриком, то эта сила равна силе трения $\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\delta}$, которая при усилении магнитного поля возрастает. Физически увеличение силы, действующей на неподвижную

стенку, связано с тем, что необходимо прилагать дополнительные усилия, чтобы заставить проводящую жидкость двигаться через магнитное поле.

Пользуясь полученным решением, найдем распределение температуры $T(z)$ в течении Куэтта. Если диссипативные коэффициенты постоянны, то уравнение энергии в течении Куэтта будет иметь вид

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + k \frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= -\frac{\mu U^2 k_1^2}{\operatorname{sh}^2 k_1 \delta} [\operatorname{ch}^2 k_1 z + \operatorname{sh}^2 k_1 z] = -\frac{\mu U^2 k_1^2}{\operatorname{sh}^2 k_1 \delta} \operatorname{ch} 2k_1 z, \\ kT &= -\frac{\mu U^2}{4 \operatorname{sh}^2 k_1 \delta} \operatorname{ch} 2k_1 z + C_1 z + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Если стенка теплоизолирована, то на ней $\frac{dT}{dz} = 0$ и $C_1 = 0$. Подставив в (2.30) $z=\delta$, получим

$$C_2 = kT_\infty + \frac{\mu U^2 \operatorname{ch} 2k_1 \delta}{4 \operatorname{sh}^2 k_1 \delta},$$

где через T_∞ обозначена температура движущейся стенки $z=\delta$. Таким образом,

$$kT = kT_\infty + \frac{\mu U^2}{4 \operatorname{sh}^2 k_1 \delta} (\operatorname{ch} 2k_1 \delta - \operatorname{ch} 2k_1 z). \quad (2.31)$$

При этом температура стенки

$$T|_{z=0} = T_\infty + \frac{\mu U^2}{2k}, \quad (2.32)$$

т. е. температура стенки не зависит от величины магнитного поля.

Аналогично можно показать, что если задана температура неподвижной стенки $T|_{z=0}$, то тепловой поток на стенку

$$q|_{z=0} = k \frac{T_\infty - T|_{z=0}}{\delta} + \frac{\mu U^2}{2\delta} \quad (2.33)$$

и также не зависит от величины приложенного магнитного поля.

Если результаты, полученные при изучении течения Куэтта, считать применимыми к задаче о пограничном слое, возникающем на поверхности летящего тела, то их можно сформулировать следующим образом:

- Магнитное поле оказывает тормозящее воздействие на течение в пограничном слое. Можно ожидать, что это торможение приведет к утолщению пограничного слоя.

- Тепловой поток при заданной температуре стенки и заданной толщине пограничного слоя не меняется при наложении магнитного поля. Как видно из формулы (2.33), утолщение пограничного слоя приведет к уменьшению теплообмена.

- Наличие магнитного поля приводит к уменьшению вязкого трения на поверхности тела и к увеличению полного сопротивления летящего тела. Правда, последний эффект может несколько уменьшиться за счет утолщения пограничного слоя.

Отмеченные свойства остаются качественно справедливыми и при рассмотрении течения Куэтта для газа, у которого диссипативные коэффициенты являются функциями термодинамических параметров, а также для точного решения задачи о пограничном слое на пластине.

3. Пусть полупространство $z > 0$, занятное вязкой электропроводной жидкостью, ограничено плоскостью, движущейся со скоростью u_0 в направлении оси x . Найдем движение жидкости и распределение магнитного поля в ней, предполагая, что при $z \rightarrow \infty$ все функции ограничены и $u \rightarrow u_\infty$, $H_x \rightarrow H_{x\infty}$. Кроме того, будем считать, что изменение давления вдоль оси x отсутствует:

$$k_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Отметим, что соответствующая задача при $H_z = 0$ имеет только тривиальное решение $u = u_0$.

Используя ограниченность решения при $z \rightarrow \infty$, получим из соотношений (2.20) и (2.21) решение задачи для рассматриваемого случая.

$$u = \frac{1}{2} (A_1 e^{-k_1 z} + A_2 + B_2),$$

$$\sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}} H_x = \frac{1}{2} (A_1 e^{-k_1 z} + A_2 - B_2).$$

Константы A_1, A_2, B_2 можно определить по условиям на бесконечности и на плоскости $z=0$, при этом решение задачи примет вид

$$\left. \begin{aligned} u - u_{\infty} &= (u_0 - u_{\infty}) e^{-k_1 z}, \\ \sqrt{\frac{v_m}{4\pi\mu}} (H_x - H_{\infty}) &= (u_0 - u_{\infty}) e^{-k_1 z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Положив в этом решении $z = 0$, получим следующее соотношение, связывающее полное изменение скорости и магнитного поля в полупространстве:

$$u_0 - u_{\infty} = \sqrt{\frac{v_m}{4\pi\mu}} (H_{x0} - H_{x\infty}). \quad (2.35)$$

Из решения (2.34) следует, что основное изменение скорости и магнитного поля происходит в слое, ширина которого имеет порядок $1/k_1$. В пределе, при $k_1 = H_0/\sqrt{4\pi v_m \mu} \rightarrow \infty$, этот слой превращается в разрыв, причем предельная форма уравнения (2.35) представляет собой соотношение, которое должно выполняться на поверхности этого разрыва [18]. Это соотношение зависит от предела отношения v_m/μ , который может быть нулем, конечным числом или бесконечностью. В частности, если $v_m \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$, и при этом $v_m/\mu \rightarrow \infty$, то $H_{x0} = H_{x\infty}$.

В дальнейшем при изучении задач об обтекании тел идеальной жидкостью или газом предельная форма соотношения (2.35) будет использована в качестве граничного условия на поверхности тела.

§ 2. Стационарные движения вдоль магнитного поля

Если жидкость несжимаемая ($\rho = \text{const}$), то уравнения магнитной гидродинамики имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} - \text{rot}(\mathbf{v}_m \text{rot} \mathbf{H}), \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\text{grad} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0; \quad \text{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

В ряде случаев интегрирование уравнений магнитной гидродинамики может быть сведено к интегрированию уравнений обычной гидродинамики. Одним из таких случаев является случай стационарного движения, когда магнитное поле и скорость параллельны друг другу [3, 7, 12, 15]

$$\mathbf{H} = K \mathbf{v}. \quad (2.37)$$

Из двух последних уравнений (2.36) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} K \mathbf{v} = K \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} K = \mathbf{v} \operatorname{grad} K = 0$.

Таким образом, $\operatorname{grad} K$ не имеет составляющей вдоль скорости и K принимает постоянное значение на каждой линии тока. Будем в дальнейшем считать, что $K = \text{const}$ всюду. При этом уравнения магнитной гидродинамики для стационарных движений примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{v}_m \operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho} \right) (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\operatorname{grad} \left(p + \frac{K^2 v^2}{8\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Последние два уравнения могут быть приведены к виду уравнений обычной гидродинамики. Действительно, введем обозначения

$$\rho \left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho} \right) = \rho^*, \quad p + \frac{K^2 v^2}{8\pi} = p^*.$$

тогда два последних уравнения (2.38) примут вид уравнений движения жидкости с плотностью ρ^* , давлением p^* и вязкостью μ :

$$\begin{aligned} \rho^* (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\operatorname{grad} p^* + \mu \nabla \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Тензор потока импульса при течениях с $\mathbf{H} = K \mathbf{v}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \rho v_i v_k + p \delta_{ik} + \frac{H^2}{8\pi} \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} H_i H_k - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \rho \left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho} \right) v_i v_k + \\ &+ \left(p + \frac{K^2 v^2}{8\pi} \right) \delta_{ik} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \rho^* v_i v_k + p^* \delta_{ik} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Следовательно, поток импульса при течениях с $\mathbf{H} = Kv$ оказывается равным потоку импульса жидкости с плотностью ρ^* , давлением p^* и вязкостью μ , текущей с той же скоростью v при отсутствии магнитного поля.

Можно указать два случая, когда первое уравнение (2.38) удовлетворяется тождественно:

1. Потенциальные движения $v = \operatorname{grad}\phi$. При этом, как известно из гидродинамики, первое уравнение (2.39) служит только для определения давления, а второе — для определения потенциальной функции $\operatorname{div}v = \operatorname{div} \operatorname{grad}\phi = \Delta\phi = 0$ при заданных граничных условиях. Таким образом, любое потенциальное течение несжимаемой жидкости является решением уравнений магнитной гидродинамики, если $\mathbf{H} = Kv$.

2. Движение бесконечно проводящей жидкости $v_m = 0$. Рассмотрим прежде всего частный случай [4, 12], когда $v_m = \mu = 0$ и $1 - K^2/4\pi\rho = 0$. В этом случае в уравнениях (2.38) первое удовлетворяется автоматически, а из второго следует соотношение $p + H^2/8\pi = p + K^2v^2/8\pi = \text{const}$, служащее для определения давлений по известному полю скоростей, которое должно удовлетворять только условию несжимаемости $\operatorname{div}v = 0$.

Пусть поле скоростей удовлетворяет этому уравнению и на бесконечности скорость постоянна ($v_\infty = \text{const} = H_\infty/K$). Тогда, если перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоятся, то получим, что при отсутствии внешних сил некоторая конфигурация, образованная магнитным полем и полем скоростей, движется со скоростью $v_{A,\infty} = \pm H_\infty/\sqrt{4\pi\rho}$. Эти движущиеся конфигурации можно рассматривать как волны. Они называются *волнами Альфвена*¹.

Рассмотрим теперь движения вязкой жидкости ($\mu \neq 0$). В этом случае задача об отыскании поля скоростей сводится к интегрированию уравнений обычной гидродинамики вязкой жидкости (2.39).

Если $1 - K^2/(4\pi\rho) > 0$, то течение жидкости с плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ в магнитном поле \mathbf{H} совпадает с течением жидкости плотности ρ^* с коэффициентом вязкости μ

¹ См. также следующий параграф этой главы.

при отсутствии магнитного поля. Однако если $K^2/(4\pi\rho) > 1$, или, что то же самое, $v < H/\sqrt{4\pi\rho} = v_A$, то $\rho^* < 0$. В этом случае, введя величины [15] $\rho_1 = -\rho^*$, $v_1 = -v$, $p_1 = -p^* + \text{const}$, находим, что они удовлетворяют уравнениям гидродинамики с положительной плотностью ρ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(v_1 \nabla) v_1 &= -\text{grad } p_1 + \mu \Delta v_1, \\ \text{div } v_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

В рассматриваемом классе решений можно находить решение задач об обтекании тел. Если $v < v_A$, то скорость и градиент давления в магнитогидродинамическом течении противоположны по знаку скорости и градиенту давления в течении жидкости с плотностью $\rho_1 = -\rho^* > 0$ и вязкостью μ при отсутствии магнитного поля. Так как в обычных течениях за обтекаемым телом имеется вязкий след, то при наложении достаточно сильного магнитного поля (чтобы $v < v_A$, или $K^2 > 4\pi\rho$) этот след будет обращен вперед. Можно предположить, что возмущения переносятся в данном случае альфеновскими волнами [13, 15].

В задачах об обтекании тел гидродинамические граничные условия непротекания и прилипания удовлетворяются при нахождении поля скоростей, подчиняющегося гидродинамическим уравнениям (2.39) или (2.41). Кроме того, необходимо удовлетворить электродинамическим граничным условиям на поверхности тела:

$$\{H_n\} = 0 \quad \text{и} \quad \{E_\tau\} = 0. \quad (2.42)$$

Так как $H = Kv$, то на внешней стороне поверхности тела имеем $H_n = 0$ и $E_\tau = 0$. Тогда из (2.42) следует, что на внутренней стороне поверхности тела должны выполняться условия

$$H_n = 0 \quad \text{и} \quad E_\tau = 0, \quad (2.43)$$

которые служат для определения электрического и магнитного полей внутри тела, где они удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } H &= \frac{4\pi}{c} j, \quad \text{div } H = 0, \\ \text{rot } E &= 0, \quad \text{div } E = 4\pi\rho_e, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

причем j и ρ_e следует считать известными функциями, так как распределение токов и зарядов внутри тела может быть задано. Электромагнитное поле, удовлетворяющее уравнениям (2.44) и граничным условиям (2.43), определяется однозначно. В этом нетрудно убедиться, рассматривая разность двух решений системы (2.44), удовлетворяющих условиям (2.43).

Найдем теперь силу, действующую на тело при обтекании с $H=Kv$. Рассмотрим произвольную поверхность Σ , содержащую внутри себя обтекаемое тело. Из закона сохранения импульса следует, что действующая на тело сила

$$\mathbf{F} = -\oint_{\Sigma} \Pi_{ik} n_k e_i d\Sigma. \quad (2.45)$$

Так как поток импульса Π_{ik} в магнитогидродинамическом течении совпадает с потоком импульса при гидродинамическом течении жидкости плотности ρ^* , с коэффициентом вязкости μ , со скоростью v при $v > v_A$ и противоположен по знаку потоку импульса при течении жидкости плотности ρ_1 , с коэффициентом вязкости μ , со скоростью $v_1 = -v$ при $v < v_A$, то аналогичное заключение верно и для сил, действующих на тело со стороны жидкости:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \text{ или } \mathbf{F} = -\mathbf{F}_1. \quad (2.46)$$

Если жидкость невязкая, то поле скоростей не будет меняться при наложении магнитного поля, поскольку после исключения давления из уравнений (2.39) или (2.41) при $\mu = 0$ получаются уравнения, не зависящие от величины магнитного поля¹. Из (2.39) или (2.41) следует, что давление пропорционально ρ^* или ρ_1 . При этом тензор (2.40), а следовательно, и сила, действующая на тело, пропорциональны ρ^* или ρ_1 , т. е.

$$F/F_0 = \rho^*/\rho = -\rho_1/\rho = 1 - K/(4\pi\rho), \quad (2.47)$$

где F_0 — сила, действующая на тело со стороны жидкости плотности ρ при отсутствии магнитного поля.

¹ Решения с $H=Kv$ в невязкой жидкости использовались в [2, 7] для изучения магнитно-вихревых колец.

§ 3. Волновые движения идеальной жидкости

В предыдущем параграфе было показано, что в несжимаемой жидкости при $v=v_m=0$ существуют волны с конечной амплитудой, которые распространяются по покоящейся жидкости со скоростью

$$v_A = \pm H / \sqrt{4\pi\rho}.$$

Рассмотрим подробнее плоские волны такого типа [9, 10]. В плоских волнах все величины зависят от одной пространственной координаты и времени. Выбирая ось x перпендикулярно к фронту волны, получим из уравнений $\operatorname{div}v = 0$ и $\operatorname{div}H = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Будем считать, что на бесконечности $H_x = H_{x0}$ и $u = 0$. Тогда из последних равенств вытекает, что всюду

$$u = 0 \quad \text{и} \quad H_x = H_{x0}. \quad (2.48)$$

При этом проекция уравнения индукции на ось x превращается в тождество, а из проекции уравнения движения на ось x получим, используя равенства (2.48),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0$$

или

$$p + H^2 / (8\pi) = \text{const.} \quad (2.49)$$

Проектируя уравнения индукции и движения на плоскость, перпендикулярную к оси x , находим

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial t} = H_x \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{H_x}{4\pi\rho} \frac{\partial H_\tau}{\partial x}, \quad (2.50)$$

где $H_\tau = H_y e_y + H_z e_z$.

Отсюда следует, что каждая из величин H_τ и v удовлетворяет волновому уравнению

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial t^2} &= \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Этот факт указывает на то, что изучаемые движения носят характер волнового процесса, причем скорость распространения волн в направлении x равна проекции скорости распространения альфеновских волн на ось x : $v_{Ax} = H_x / \sqrt{4\pi\rho}$. Так как волны плоские, то можно считать скоростью их распространения вектор альфеновской скорости $v_A = H / \sqrt{4\pi\rho}$. Сами эти волны — частный случай альфеновских волн.

Рассматриваемые волны являются поперечными, поскольку приращения векторов v и H лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Общее решение уравнений (2.51) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} H_t &= H_{t1}(x - v_{Ax}t) + H_{t2}(x + v_{Ax}t), \\ v &= v_1(x - v_{Ax}t) + v_2(x + v_{Ax}t). \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.50), получим:

$$\begin{aligned} -v_{Ax} H'_{t1} + v_{Ax} H'_{t2} &= H_x(v'_1 + v'_2), \\ -v_{Ax} v'_1 + v_{Ax} v'_2 &= \frac{H_x}{4\pi\rho}(H'_{t1} + H'_{t2}). \end{aligned}$$

Штрихом обозначены производные соответствующей функции по ее аргументу.

Отсюда следует, что $v'_1 = -H'_{t1}/\sqrt{4\pi\rho}$, $v'_2 = H'_{t2}/\sqrt{4\pi\rho}$, или

$$v_1 = -\frac{H_{t1}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad v_2 = -\frac{H_{t2}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (2.53)$$

В этих равенствах векторные константы, которые появляются при интегрировании, включены в v_1 и v_2 . Таким образом, общее решение (2.52) содержит две произвольные функции H_{t1} и H_{t2} , которые в каждой конкретной задаче определяются из начальных или граничных условий.

Решение (2.52) указывает на то, что плоские волны, идущие навстречу друг другу, не взаимодействуют между собой.

Волновой характер полученных решений можно объяснить следующим образом. Согласно §4 гл. 1, тензор напряжений магнитного поля можно представить как сумму равномерного давления $H^2/(8\pi)$ по всем направлениям и натяжения $H^2/(8\pi)$ вдоль магнитных силовых линий. В найденном решении $p + H^2/(8\pi) = \text{const}$, так что

единственной силой, действующей на жидкость, является сила, возникающая за счет натяжения магнитных силовых линий. Не удивительно поэтому, что движение жидкости описывается уравнением колебаний натянутой струны. Отметим, что при выводе волнового уравнения амплитуды волн не считались малыми.

С помощью общего решения (2.52), (2.53) можно решить различные конкретные задачи. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть в начальный момент $t = 0$ в пространстве задано некоторое распределение скоростей $v_0(x)$ и магнитного поля $H_{t0}(x)$. Найдем скорость движения жидкости и напряженность магнитного поля в последующие моменты времени.

Будем искать решение задачи в виде (2.52). Тогда, используя начальные данные и (2.53) для определения функции H_{t1} и H_{t2} , находим:

$$v_0 = -H_{t1}/\sqrt{4\pi\rho} + H_{t2}/\sqrt{4\pi\rho}, \quad H_{t0} = H_{t1} + H_{t2}.$$

Так как для этой системы $D = -1/4\pi\rho$, то функции H_{t1} и H_{t2} определяются однозначно.

2. Пусть жидкость заполняет полупространство $x > 0$ и граничит с бесконечно проводящей стенкой $x = 0$, которая совершает произвольные движения параллельно самой себе со скоростью $U(t)$. При $t = 0$ в жидкости $H = H_{t0} = \text{const}$, $H_x \neq 0$, $v = 0$. Найти дальнейшее движение жидкости.

Вследствие бесконечной проводимости стенки и жидкости при $x = 0$ имеют место соотношения, которые следуют из условия непрерывности касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля на поверхности раздела двух сред:

$$H_{xx} = H_{x0} = H_x, \quad E = -(U(t)/c) \times H_x = -(v(0, t)/c) \times H_x.$$

Отсюда

$$v(0, t) = U(t), \quad (2.54)$$

т. е. скорость прилегающего слоя жидкости равна скорости стенки.

Будем снова искать решение в виде (2.52). Из начальных условий следует, что при $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} H_{t0} &= H_{t1}(x) + H_{t2}(x), \\ 0 &= v_1(x) + v_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} (-H_{t1}(x) + H_{t2}(x)). \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Отсюда для положительных значений аргумента находим, что

$$\mathbf{H}_{\tau 2}(x + v_A t) = \mathbf{H}_{\tau 1}(x - v_A t) = \frac{\mathbf{H}_{\tau 0}}{2}, \quad (2.56)$$

поэтому при $x > v_A t$ имеем $v = v_1 + v_2 = 0$, $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_{\tau 1} + \mathbf{H}_{\tau 2} = \mathbf{H}_{\tau 0}$, т. е. движение жидкости сосредоточено в области $0 < x < v_A t$. Для определения движения жидкости в этой области воспользуемся граничным условием (2.54) и равенствами (2.56):

$$\begin{aligned} U(t) = v_1(-v_A t) + v_2(v_A t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} [-\mathbf{H}_{\tau 1}(-v_A t) + \\ &+ \mathbf{H}_{\tau 2}(v_A t)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \left[-\mathbf{H}_{\tau 1}(-v_A t) + \frac{\mathbf{H}_{\tau 0}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Определив отсюда $\mathbf{H}_{\tau 1}(x)$, найдем решение задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\tau &= \mathbf{H}_{\tau 1} + \mathbf{H}_{\tau 2} = -\sqrt{4\pi\rho} U(t - x/v_A) + \mathbf{H}_{\tau 0}, \\ v &= v_1 + v_2 = U(t - x/v_A). \end{aligned}$$

Таким образом, движение представляет собой уходящую от стенки волну.

3. Рассмотрим теперь слабые возмущения в несжимаемой жидкости [16]. Будем считать отклонения v и \mathbf{h} от основного состояния $\mathbf{U} = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$ малыми и квадратами этих отклонений пренебрежем. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= (\mathbf{H}_0 \nabla) v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^* + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{h}, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \\ p^* &= p + \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}}{4\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Направим ось x параллельно H_0 , при этом $(H_0 \nabla) = H_0 \frac{\partial}{\partial x}$. Исключив из второго уравнения \mathbf{h} , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Если применить операцию rot к первому уравнению, то получим, что вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}/2$ будет удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial x^2}. \quad (2.59)$$

Поступая аналогичным образом, получим следующее уравнение для $\operatorname{rot} \mathbf{h} = 4\pi \mathbf{j}/c$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial x^2}. \quad (2.60)$$

Общие решения уравнений (2.59) и (2.60) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_1(x - v_A t, y, z) + \boldsymbol{\omega}_2(x + v_A t, y, z), \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_1(x - v_A t, y, z) + \mathbf{j}_2(x + v_A t, y, z), \quad v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Отметим, что так как $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, то $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{j}_1$ и \mathbf{j}_2 должны удовлетворять условиям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_2 = \operatorname{div} \mathbf{j}_1 = \operatorname{div} \mathbf{j}_2 = 0.$$

Подставив (2.61) в (2.57), получим

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -c^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \mathbf{j}_1 + \text{const}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = c^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \mathbf{j}_2 + \text{const}. \quad (2.62)$$

Из (2.61) и (2.62) следует, что величина

$$\boldsymbol{\omega} - c^{-1} \sqrt{\pi/\rho} \mathbf{j} = 0,5 \operatorname{rot} \left(\mathbf{v} - \mathbf{h} / \sqrt{4\pi\rho} \right)$$

зависит от $x - v_A t$, y , z , а величина

$$\omega + c^{-1} \sqrt{\pi/\rho} j = 0.5 \operatorname{rot} \left(v + h / \sqrt{4\pi\rho} \right)$$

— от $x + v_A t$, y , z . Отсюда можно сделать вывод о постоянстве циркуляции векторов $v - h / \sqrt{4\pi\rho}$ и $v + h / \sqrt{4\pi\rho}$, взятых по контурам, которые перемещаются в пространстве относительно газа со скоростью $\pm v_A$ [1].

Будем рассматривать движения в неограниченной жидкости. В этом случае поле скоростей однозначно определяется распределением вихрей и, следовательно, скорость и магнитное поле могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} v &= v_1(x - v_A t, y, z) + v_2(x + v_A t, y, z), \\ h &= -v_1(x - v_A t, y, z) / \sqrt{4\pi\rho} + v_2(x + v_A t, y, z) / \sqrt{4\pi\rho}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где v_1 , определяется по ω_1 , а v_2 по ω_2 , причем $\operatorname{div} v_1 = \operatorname{div} v_2 = 0$. В этом случае член $\operatorname{grad} \frac{\partial p^*}{\partial t}$, входящий в уравнение (2.58), равен нулю.

Равенства (2.61) — (2.63) позволяют решать задачи с начальными данными. Отсюда, в частности, следует, что если начальные возмущения сосредоточены в ограниченной области, то, так как решение имеет вид (2.61), (2.62), эта область разделится с течением времени на две возмущенные области, расходящиеся в разные стороны вдоль направления H_0 .



Глава 3

Простые волны и малые возмущения в идеальном газе *

§ 1. Слабые разрывы

В этой главе рассматриваются движения идеального совершенного газа. Система уравнений, описывающая такие движения, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \left(H_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \left(H_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

* Для удобства в этой книге среду будем называть идеальной, если в ней напряжения сводятся к давлению, отсутствует теплопроводность и проводимость равна бесконечности (см. §4 гл.1). В противном случае среду будем называть неидеальной.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^Y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^Y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho^Y} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^Y} \right) = 0, \\ & \frac{\partial H_x}{\partial t} + u \frac{\partial H_x}{\partial x} + v \frac{\partial H_x}{\partial y} + w \frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & \quad - H_y \frac{\partial u}{\partial y} - H_z \frac{\partial u}{\partial z} + H_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{\partial H_y}{\partial t} + u \frac{\partial H_y}{\partial x} + v \frac{\partial H_y}{\partial y} + w \frac{\partial H_y}{\partial z} - H_x \frac{\partial v}{\partial x} - \\ & \quad - H_y \frac{\partial v}{\partial y} - H_z \frac{\partial v}{\partial z} + H_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{\partial H_z}{\partial t} + u \frac{\partial H_z}{\partial x} + v \frac{\partial H_z}{\partial y} + w \frac{\partial H_z}{\partial z} - H_x \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & \quad - H_y \frac{\partial w}{\partial y} - H_z \frac{\partial w}{\partial z} + H_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Будем называть *поверхностью слабого разрыва* некоторой функции поверхность, на которой имеет место разрыв производных некоторого порядка этой функции при непрерывности самой функции. Если на поверхности имеет место разрыв самой функции, то такая поверхность называется *поверхностью сильного разрыва*. Поверхности, на которых возможен слабый разрыв решения некоторой системы дифференциальных уравнений, являются характеристическими поверхностями для этой системы дифференциальных уравнений. Это свойство характеристических поверхностей может быть принято за их определение.

Установим соотношения, которые должны удовлетворяться на поверхности слабого разрыва [2, 14]. Для этого возьмем некоторую точку на поверхности слабого разрыва и выберем ось x перпендикулярно к поверхности разрыва. Будем пока считать, что разрыв терпит хотя бы одна из первых производных решения. Вследствие непрерывности всех функций на поверхности слабого разрыва производные по y и z должны быть непрерывны. Рассмотрим приращение некоторой функции при смещении из некоторой точки, лежащей на поверхности слабого разрыва, в произвольную бесконечно близкую точку, также лежащую на этой поверхности. Так как в исходной и конечной точках значе-

ния функции по обе стороны от разрыва равны между собой, то приращения функции с обеих сторон от разрыва также должны быть равны между собой. Отсюда и следует равенство производных, взятых в направлениях касательных к поверхности разрыва. Таким образом, на поверхности слабого разрыва могут претерпевать разрыв только производные по x и по t .

Если выписать систему уравнений для двух точек, лежащих по обе стороны от поверхности слабого разрыва сколь угодно близко друг от друга, и затем вычесть друг из друга получившиеся уравнения, то пропадут все члены, содержащие $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, а вместо производных по x и по t будут входить разности их значений по обе стороны от разрыва. Проделав эту операцию для системы (3.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} - \frac{1}{8\pi\rho} \left\{ \frac{\partial (H_y^2 + H_z^2)}{\partial x} \right\}, \\ \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} &= \frac{1}{4\pi\rho} H_x \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\}, \\ \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} &= \frac{1}{4\pi\rho} H_x \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\}, \\ \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - \frac{\gamma p}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + u \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} - u \frac{\gamma p}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} - H_x \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + H_y \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\} - H_x \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + H_z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial x} \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где символом $\{ \}$ обозначена разность значений (скакок) соот-

ветствующей величины перед и за слабым разрывом. Из последних двух уравнений следует, что производные H_x непрерывны.

Так как для любой функции, входящей в решение, условие $\{f\} = 0$ выполняется тождественно по t , то функция f с обеих сторон от поверхности слабого разрыва получает одинаковые приращения $\{df\} = 0$, где $df = f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - f(x, y, z, t)$, причем точки с координатами $(x+dx, y+dy, z+dz)$ и (x, y, z) лежат на поверхности разрыва соответственно в моменты времени $(t+dt)$ и t . Используя равенство производных по направлениям, касательным к поверхности слабого разрыва, получим

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \frac{dx}{dt} = 0,$$

где dx — расстояние, на которое передвинулся разрыв за время dt , $\frac{dx}{dt}$ — скорость движения слабого разрыва в направлении оси x , т. е. в направлении нормали. Если обозначить через a скорость движения слабого разрыва относительно жидкости $a = \frac{dx}{dt} - u$, то

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + u \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = -a \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}.$$

При помощи аналогичных равенств исключим из уравнений (3.2) производные всех величин по времени:

$$\left. \begin{aligned} -a \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{H_y}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} + \frac{H_z}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\} &= 0, \\ -a \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - \frac{H_x}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} &= 0, \\ -a \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - \frac{H_x}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - a \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} &= 0, \\ \frac{\nu}{\rho} a \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} - a \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} &= 0, \\ H_y \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - H_x \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - a \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} &= 0, \\ H_z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - H_x \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - a \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Таким образом, скачки производных различных функций на поверхности слабого разрыва должны удовлетворять этой системе линейных однородных алгебраических уравнений. Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, т.е. существовал бы нетривиальный слабый разрыв, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$D(a) = a \left(a^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \right) \left[a^4 - a^2 \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + a_0^2 \right) + \frac{H_x^2}{4\pi\rho} a_0^2 \right] = 0,$$

где через a_0 обозначено выражение $\sqrt{\gamma p/\rho}$, равное скорости звука в газе при отсутствии магнитного поля. Корнями этого уравнения являются

$$\left. \begin{aligned} a_3 &\equiv 0, \quad a_A \equiv b_x \left(b \equiv \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \right), \\ a_{+,-} &\equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_0^2 + b^2 + 2a_0 b_x} \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2a_0 b_x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

и те же величины с обратным знаком. При этих значениях a одно из уравнений (3.3) становится линейной комбинацией остальных, а из оставшихся шести уравнений можно выразить скачки производных всех величин через скачок производной одной из них.

Слабые разрывы, имеющие скорости относительно жидкости a_3 , a_A , a_+ и a_- , называют соответственно энтропийными, альфеновскими, быстрыми магнитозвуковыми и медленными магнитозвуковыми. Смысл этих названий будет ясен из дальнейшего.

Предположим теперь, что разрыв претерпевают не первые производные функций, входящих в решение, а производные более высокого порядка. Пусть, например, это будут производные 2-го порядка. Нетрудно убедиться, что из производных 2-го порядка разрыв могут претерпевать только производные $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Продифференцировав уравнения (3.1) по t (или по x)

и вычтя полученные системы, написанные для двух точек, лежащих по обе стороны сколь угодно близко от разрыва, получим систему соотношений на разрыве. Эта система будет совпадать

с системой (3.2), только в фигурных скобках вместо $\frac{\partial}{\partial t}$ будет $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (или $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$), а вместо $\frac{\partial}{\partial x}$ будет $\frac{\partial}{\partial t \partial x}$ (или $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$), т. е. скачки производных 2-го порядка. Так как производные 1-го порядка непрерывны, то с обеих сторон они получают одинаковые приращения, и следовательно, $\left\{ d \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = 0$, $\left\{ d \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = 0$.

Аналогично предыдущему получаем

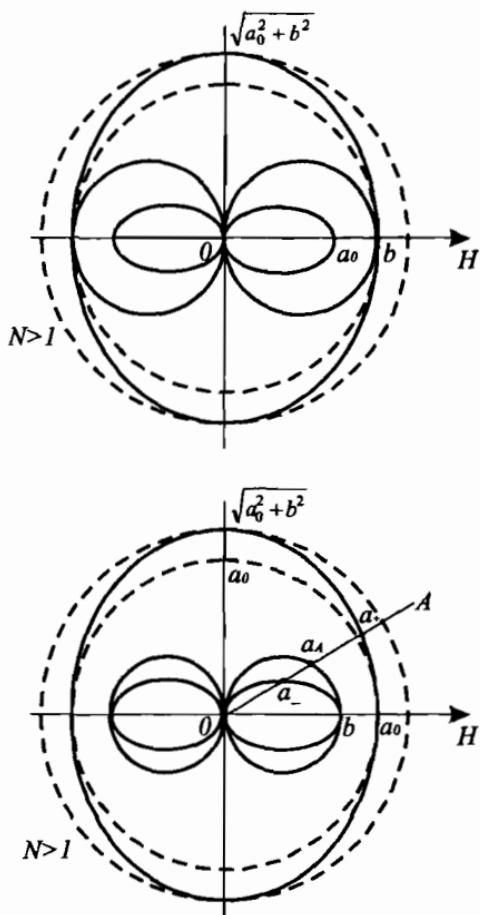


Рис. 6.

$$\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \right\} \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Это позволяет получить для скачков производных 2-го порядка систему, совпадающую с (3.3). Приравнивая нуль определитель этой системы, получим, что поверхность разрыва старших производных должна двигаться по частям газа с одной из найденных ранее скоростей: a_3 , a_4 , a_+ и a_- .

Из равенства (3.4) следует, что при фиксированной напряженности магнитного поля скорость распространения плоских поверхностей слабого разрыва зависит от ориентации этих поверхностей. Обозначая через n

нормаль к поверхности разрыва, можно переписать равенства (3.4) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 0, \quad a_A \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}, \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_0^2 + b^2 + 2a_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \pm \sqrt{a_0^2 + b^2 - 2a_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Построим теперь диаграмму скоростей распространения слабых разрывов (рис. 6), откладывая вдоль лучей ОА, выходящих из некоторой точки O скорости a_+ , a_A , a_- распространения слабых разрывов, плоскости которых нормальны к данному лучу. Из (3.5) очевидно, что так как диаграмма имеет ось симметрии, параллельную вектору \mathbf{b} , достаточно начертить эту диаграмму в одной из плоскостей, проходящих через ось симметрии. На этой плоскости диаграмма скоростей распространения альфеновских разрывов представляет собой две окружности радиуса $b/2$ с центрами на оси симметрии, касающиеся друг друга в начале координат. Установим качественный вид диаграмм скоростей распространения магнитозвуковых разрывов.

Скорости этих разрывов в направлении \mathbf{b} :

$$\left. \begin{aligned} a_+ &= \max[a_0, b], \\ a_- &= \min[a_0, b], \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

а в направлении, перпендикулярном к \mathbf{b} :

$$\left. \begin{aligned} a_+ &= \sqrt{a_0^2 + b^2}, \\ a_- &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Установим теперь некоторые неравенства, которым удовлетворяют a_+ и a_A . Из равенства (3.4) получим

$$a_{+-}^2 = \frac{1}{2} \left[a_0^2 + b^2 \pm \sqrt{(a_0^2 + b^2)^2 - 4a_0^2 b_n^2} \right], \quad (3.8)$$

или

$$a_{+-}^2 = \frac{1}{2} \left[a_0^2 + b^2 + b_n^2 \pm \sqrt{(a_0^2 + b^2 - b_n^2)^2 + 4b_n^2 b_\tau^2} \right], \quad (3.9)$$

где $b_\tau^2 = b^2 - b_n^2$.

Если в правой части (3.8) отбросить в подкоренном выражении член $-4a_0^2b_n^2$, то правая часть возрастет при знаке «+» и уменьшится при знаке «-». Поэтому

$$a_+^2 \leq a_0^2 + b^2, \quad a_-^2 \geq 0, \quad (3.10)$$

причем равенства имеют место только при $b_n = 0$.

Заменяя в подкоренном выражении правой части равенства (3.8) член $-4a_0^2b_n^2$ выражением $-4a_0^2b^2$, приходим к другой паре неравенств

$$a_+^2 \geq \max[a_0^2, b^2], \quad a_-^2 \leq \min[a_0^2, b^2], \quad (3.11)$$

которые обращаются в равенства при $b_\tau = 0$. Последние неравенства можно усилить. В самом деле, отбросив в подкоренном выражении равенства (3.9) член $4b_n^2b_\tau^2$, получим неравенства

$$a_+^2 \geq \max[a_0^2 + b_\tau^2, b_n^2], \quad a_-^2 \leq \min[a_0^2 + b_\tau^2, b_n^2]. \quad (3.12)$$

Из (3.10), (3.11) и (3.8) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \max[a_0^2 + b_\tau^2, b_n^2] &\leq a_+^2 \leq a_0^2 + b^2, \\ 0 &\leq a_-^2 \leq \min[a_0^2, b_n^2]. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Неравенства (3.9) и (3.12) и равенства (3.6) и (3.7) позволяют начертить качественно диаграмму скоростей слабых магнитозвуковых разрывов [8] (рис. 6), которая получается различной для случаев $a_0 > b$ и $a_0 < b$. Удобно ввести параметр [4] $N = b/\sqrt{a_0}$ и различать случаи $N < 1$ и $N > 1$.

§ 2. Простые волны

Рассмотрим движение идеального бесконечно проводящего газа плоскими волнами, когда все величины зависят только от x и t . Система уравнений, описывающая такое движение, будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} (H_y^2 + H_z^2), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{H_x}{4\pi\rho} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{H_x}{4\pi\rho} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\gamma p}{\rho} u \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} + u \frac{\partial H_y}{\partial x} - H_x \frac{\partial v}{\partial x} + H_y \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} + u \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_x \frac{\partial w}{\partial x} + H_z \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} + u \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Из последних двух уравнений следует, что $H_x = \text{const}$.

Будем разыскивать те решения этой системы, в которых все величины зависят от некоторой комбинации независимых переменных $\varphi(x, t)$ [1, 3, 5—7, 11]. Такие решения будем называть *простыми волнами*, или *волнами Римана*. Характерной особенностью простых волн является то, что среди непрерывных решений только они могут граничить с невозмущенной средой, в которой все параметры постоянны [7]. При этом передний фронт простой волны является слабым разрывом и движется относительно среды с одной из скоростей a_3 , a_A , a_+ и a_- . В простых волнах для производных искомых функций получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f' \varphi'_x, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f' \varphi'_t. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Функция ϕ (а вместе с ней и все остальные величины) остается постоянной, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = 0, \\ \frac{dx}{dt} &\equiv \lambda = -\frac{\phi'_t}{\phi'_x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

или

Таким образом, *фаза волны* (поверхность $\phi = \text{const}$) должна перемещаться в направлении x со скоростью $-\phi'_t/\phi'_x$. Рассмотрим скорость движения фазы волны относительно частиц жидкости:

$$a = \frac{dx}{dt} - u. \quad (3.17)$$

Если подставить равенства (3.15)–(3.17) в систему (3.14), то для производных искомых функций получим линейную однородную систему уравнений:

$$-au' + \frac{1}{\rho} p' + \frac{H_y}{4\pi\rho} H'_y + \frac{H_z}{4\pi\rho} H'_z = 0, \quad (3.18)$$

$$-av' - \frac{H_x}{4\pi\rho} H'_y = 0, \quad (3.19)$$

$$-aw' - \frac{H_x}{4\pi\rho} H'_z = 0, \quad (3.20)$$

$$\rho u' - ap' = 0, \quad (3.21)$$

$$a \frac{\gamma p}{\rho} \rho' - ap' = 0, \quad (3.22)$$

$$H_y u' - H_x v' - a H'_y = 0, \quad (3.23)$$

$$H_z u' - H_x w' - a H'_z = 0. \quad (3.24)$$

Так как определитель этой системы совпадает с определителем системы (3.3), то для того, чтобы решение этой системы было нетривиальным, необходимо, чтобы a имело одно из значений a_3, a_4, a_+, a_- . Подставляя каждое из этих значений в систему (3.18)–(3.24) и интегрируя ее, получим различные решения,

соответствующие разным типам простых волн. Рассмотрим общий случай, когда все a_3, a_4, a_+, a_- различны. Тогда все эти величины являются однократными корнями определителя системы (3.18)–(3.24). При этом для каждого из указанных значений a одно уравнение данной системы будет линейно зависеть от остальных. Отсюда следует, что все производные искомых функций пропорциональны одной из них, причем коэффициенты пропорциональности зависят от искомых функций $u, v, w, p, \rho, H_y, H_z$ и от $H_x = \text{const}$. Если проинтегрировать систему уравнений, то найдем, что в волне каждого типа все искомые функции выражаются через одну из них, которую можно принять за $\Phi(x, t)$. Зависимость этой функции от x и t будет определяться начальными или граничными условиями. Если все решение выражено, например, через ρ , то

$$-\frac{\Phi'_t}{\Phi'_x} \Big|_{\rho=\text{const}} = a(\rho) \Big|_{\rho=\text{const}} + u(\rho) \Big|_{\rho=\text{const}} = \frac{dx}{dt}. \quad (3.25)$$

Отсюда

$$x = [a(\rho) + u(\rho)]t + f(\rho), \quad (3.26)$$

где $f(\rho)$ — произвольная функция, которая определяется по начальному распределению плотности $\rho(x, 0)$.

Рассмотрим теперь различные типы простых волн.

1. $a = a_3 = 0$. В этом случае из уравнений (3.20), (3.19), (3.18) следует $H'_z = H'_y = p' = 0$, а из (3.21), (3.23), (3.24) имеем $u' = v' = w' = 0$. Отсюда

$$\rho = \text{const}, \quad \mathbf{H} = \text{const}, \quad v = \text{const}. \quad (3.27)$$

Таким образом, в волне данного типа может изменяться только функция ρ , которая в этом решении является произвольной. Полученная волна носит название *энтропийной*, так как изменение ρ при неизменном p связано с изменением энтропии. Эта волна может перемещаться в пространстве только вместе с частицами. Так как $u = \text{const}$, то все фазы перемещаются с одной скоростью и профиль волны не деформируется.

Заметим теперь, что если $a \neq 0$, то из (3.22) следует:

$$p' = \frac{\gamma p}{\rho} \rho' = a_0^2 \rho' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho'. \quad (3.28)$$

Так как вообще $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) ds$, то из (3.28) находим, что $ds = 0$ или $s = \text{const}$. Таким образом, все простые волны с $a \neq 0$ представляют собой изознтропические течения, и мы можем понизить порядок системы, подставив выражение (3.28) в (3.18).

2. $a = a_A \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$. Из уравнений (3.19) и (3.20) в этом случае получаем

$$v' + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H'_y = 0; \quad w' + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H'_z = 0.$$

Из (3.23) и (3.24) следует, что $u' = 0$. С учетом предыдущего уравнения (3.21), (3.22) и (3.18) соответственно дают: $\rho' = 0$, $p' = 0$, $H_y H'_y + H_z H'_z = 0$. Интегрируя систему получившихся соотношений, найдем:

$$\left. \begin{aligned} u &= \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad p = \text{const}, \\ H_\tau^2 &= H_y^2 + H_z^2 = \text{const}, \quad v = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Очевидно, что решение (3.29) содержит одну произвольную скалярную функцию, за которую можно принять угол θ поворота вектора $H_\tau = e_y H_y + e_z H_z$ относительно начального положения. Тогда $H_y = H_\tau \cos \theta$, $H_z = H_\tau \sin \theta$, причем $H_\tau = \text{const}$. Выбором скорости движения системы координат можно добиться того, чтобы решение имело вид $v = -H/\sqrt{4\pi\rho}$. В этой системе координат $E = -\frac{1}{c}(v \times H) = 0$, следовательно, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, т.е. движение стационарно. В такой волне касательные составляющие векторов v и H поворачиваются, не изменяя своей величины. Такие волны называются *вращательными*, или *альфеновскими простыми волнами*. Во вращательной простой волне $u = \text{const}$, $a_A = H_x/\sqrt{4\pi\rho} = \text{const}$ и, следовательно, все фазы этой волны перемещаются с одинаковыми скоростями $u + a_A$ и профиль волны не деформируется. При этом θ является произвольной функцией от $x - (a_A + u)t$:

$$\theta = \theta[x - (a_A + u)t].$$

Если θ представляет собой разрывную функцию, то вместе с θ претерпевают разрыв также H_t и v_t . Такой разрыв называется *вращательным*.

3. $a = a_{+,-}$. Выберем систему координат так, чтобы в некоторой произвольно выбранной точке выполнялись условия: $w = 0$ и $H_z = 0$. Тогда из (3.20) и (3.24) следует, что если $a^2 \neq H_x^2/4\pi\rho$, то $H'_z = w' = 0$, т. е. приращения векторов v и H лежат в плоскости (x, y) . Очевидно, что и сами векторы v и H всюду лежат в этой плоскости ($H_z \equiv 0, w \equiv 0$). При этом система уравнений упрощается и принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} -au' + \frac{a_0^2}{\rho}\rho' + \frac{H_y}{4\pi\rho}H'_y &= 0, \\ -av' - \frac{H_x}{4\pi\rho}H'_y &= 0, \\ \rho u' - a\rho' &= 0, \\ H_y u' - H_x v' - aH'_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Очевидно, что $a_{+,-}$ является корнями определителя этой системы уравнений. Из дальнейшего будет видно, что при подстановке $a = a_{+,-}$ первые три уравнения будут линейно независимыми. Следовательно, последнее уравнение можно отбросить.

Приняв ρ за независимое переменное, можно привести первые три уравнения системы (3.28) к следующему виду:

$$\frac{dH_y^2}{d\rho} = 8\pi \left(a_{+,-}^2 - a_0^2 \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{a_{+,-}}{\rho}, \quad (3.32)$$

$$\frac{dv}{dH_y} = -\frac{H_x}{4\pi\rho a_{+,-}} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{d\rho} = -\frac{H_x(a_{+,-}^2 - a_0^2)}{\rho a_{+,-} H_y}. \quad (3.33)$$

Уравнения (3.31)–(3.33) представляют собой полную систему уравнений, связывающую изменение величин в быстрой и медленной простых волнах (так мы будем называть волны, распространяющиеся соответственно со скоростями $a = a_+$ и $a = a_-$). Так как $a_{+,-}$ зависит только от ρ и H_y , то очевидно, что достаточно проинтегрировать уравнение (3.31), чтобы отыскать

ние остальных величин свелось к вычислению квадратур. Подставляя в (3.31) выражения (3.4) для $a_{+,-}$, получим [5]

$$\frac{dH_y^2}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \left[H_x^2 + H_y^2 - 4\pi a_0^2 \rho \pm \sqrt{(4\pi a_0^2 \rho + H_x^2 + H_y^2)^2 - 16\pi a_0^2 \rho H_x^2} \right] \equiv f_{+,-}. \quad (3.34)$$

Из уравнения (3.31) и неравенств (3.13) следует, что $f_+ \geq 0$ и $f_- \leq 0$, причем равенства могут иметь место только при $H_y = 0$. Следовательно, в быстрой простой волне H_y^2 при увеличении ρ растет, а в медленной — убывает.

Рассмотрим поведение функций $f_{+,-}$ при $H_y^2 \rightarrow 0$. Если $H_y = 0$, то подкоренное выражение в равенстве (3.34) равно $(4\pi \rho a_0^2 - H_x^2)^2$. Так как корень берется арифметический, то он равен $|4\pi \rho a_0^2 - H_x^2|$. При этом если $H_y = 0$ и $4\pi \rho a_0^2 > H_x^2$, то

$$f_+ = 0, \quad f_- = \frac{2}{\rho} (H_x^2 - 4\pi \rho a_0^2) < 0.$$

Если $H_y = 0$ и $4\pi \rho a_0^2 < H_x^2$, то

$$f_+ = \frac{2}{\rho} (H_x^2 - 4\pi \rho a_0^2) > 0, \quad f_- = 0.$$

Будем считать, что ρa_0^2 — возрастающая функция ρ . Тогда если $\rho > \rho^*$, то имеет место первый случай, если $\rho < \rho^*$, — второй (ρ^* определяется из равенства $4\pi \rho^* a_0^2 (\rho^*) = H_x^2$).

Пусть теперь $\rho \rightarrow 0$. Тогда если $a_0 \rho \rightarrow 0$, то

$$f_+ \rightarrow \infty; \quad f_- \rightarrow \frac{1}{\rho} \left[-8\pi \rho a_0^2 + \frac{8\pi \rho a_0^2 H_x^2}{H_x^2 + H_y^2} \right] = \frac{8\pi \rho a_0^2 H_x^2}{H_x^2 + H_y^2}.$$

Если $a_0(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, то $f_- \rightarrow 0$.

Рассмотренные свойства функций $f_{+,-}$ позволяют качественно представить картину интегральных кривых уравнений (3.34) (рис. 7). Проанализируем теперь поведение интегральных кривых уравнения (3.34) вдали от начала координат, когда выполняется хотя бы одно из неравенств $H_y^2 >> H_x^2$ или $4\pi \rho a_0^2 >> H_x^2$ (последнее неравенство можно считать эквивалентным неравенству $\rho >> \rho^*$, или $p >> H_x^2$). В этом случае

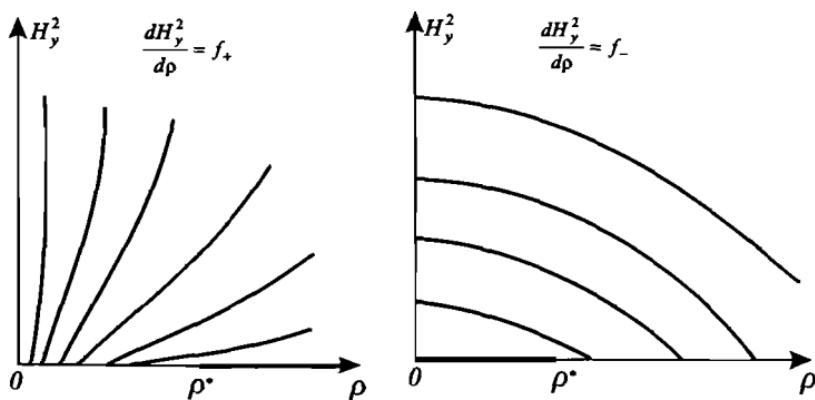


Рис. 7

$$f_+ = 2H_y^2/\rho; \quad f_- = -8\pi a_0^2 \quad (3.35)$$

и интеграция уравнения (3.34) даст для быстрой волны

$$H_y = b\rho, \quad (3.36)$$

где $b = \text{const}$, а для медленной волны —

$$p + H_y^2/(8\pi) = \text{const}, \quad (3.37)$$

так как $p = \int a_0^2 d\rho$.

Равенство (3.36) имеет вид интеграла вмороженности компоненты H_y , а равенство (3.37) выражает постоянство полного давления для этой же компоненты магнитного поля. Чтобы представить качественное поведение функций $u(\rho)$ и $v(\rho)$ в простых волнах, достаточно заметить, что знак приращения u совпадает со знаком приращения ρ , а знак приращения v противоположен знаку приращения H_y (уравнения (3.32) и (3.33)).

Особый интерес представляют простые волны в совершенном газе, когда $p = C\rho^\gamma$ и $a_0^2 = C\gamma\rho^{\gamma-1}$.

Введем безразмерные переменные согласно равенствам:

$$R = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad U = \frac{\sqrt{4\pi\rho^*}}{H_x} u, \quad V = \frac{\sqrt{4\pi\rho^*}}{H_x} v, \quad h = \frac{H_y}{H_x},$$

$$A_{+-} = \frac{\sqrt{4\pi\rho^*}}{H_x} a_{+-} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^{\gamma-1} + \frac{1+h^2}{R} + 2R^2} \pm \sqrt{R^{\gamma-1} + \frac{1+h^2}{R} + 2R^2} \right),$$

где ρ^* определяется из условия $4\pi\gamma C\rho^{*\gamma} = H_x^2$. Тогда уравнения (3.31)–(3.33) можно привести к системе

$$\frac{dh^2}{dR} = 2A_{+,-}^2 - 2R^{\gamma-1} \equiv \frac{1}{R} \left[1 + h^2 - R^\gamma \pm \sqrt{(1+h^2+R^\gamma)^2 - 4R^\gamma} \right], \quad (3.38)$$

$$\frac{dU}{dR} = \frac{A_{+,-}}{R}, \quad (3.39)$$

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{1}{RA_{+,-}} \frac{A_{+,-}^2 - R^{\gamma-1}}{h}, \quad (3.40)$$

не содержащей никаких параметров, кроме γ . Таким образом, поле интегральных кривых системы (3.38)–(3.40), описывающей простые волны в совершенном газе, зависит только от γ .

Рассмотрим, как изменяется профиль простой волны с течением времени. Скорость движения фазы равна $\lambda_{+,-}(\rho) = u(\rho) + a_{+,-}(\rho)$. Покажем, что

$$\frac{d\lambda_{+,-}}{d\rho} > 0, \quad (3.41)$$

если

$$\frac{da_0}{d\rho} + \frac{a_0}{\rho} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{d(a_0\rho)}{d\rho} > 0. \quad (3.42)$$

В самом деле, используя уравнение неразрывности, получим

$$\frac{d\lambda_{+,-}}{d\rho} = \frac{du}{d\rho} + \frac{da_{+,-}}{d\rho} = \frac{a_{+,-}}{\rho} + \frac{da_{+,-}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho a_{+,-})}{d\rho},$$

причем

$$\rho a_{+,-} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(a_0\rho)^2 + (b\rho)^2 + 2a_0\rho b\rho \cos\alpha} \pm \sqrt{(a_0\rho)^2 + (b\rho)^2 - 2a_0\rho b\rho \cos\alpha} \right). \quad (3.43)$$

где α — угол между направлением магнитного поля и осью x , который для определенности будем считать острым. Как видно из формулы (3.43), величины ρa_+ и ρa_- представляют собой соответственно полусумму и полуразность сторон параллелограмма с диагоналями l_1 и l_2 длины $l_1 = a_0\rho$ и $l_2 = b\rho$, составляющих между собой угол α (рис. 8). Значит, $\rho a_+ = (L_1 + L_2)/2$, $\rho a_- = (L_1 - L_2)/2$, где L_1 и L_2 — длины сто-

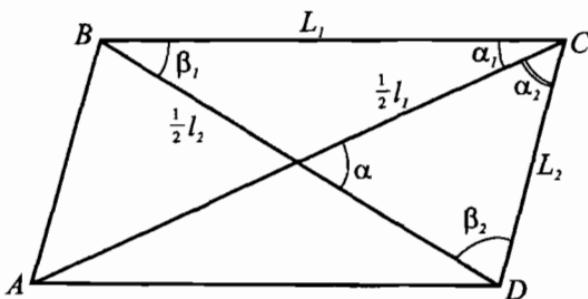


Рис. 8

рон BC и CD этого параллелограмма. Пусть в простой волне плотность увеличилась на $\Delta\rho$.

Из (3.42) и равенства $b\rho = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\rho}$ следует, что длина обеих диагоналей увеличится. Если рассматриваемая волна является быстрой, то происходит увеличение α ; в медленной волне α уменьшается. Изменение величин ρa_+ и ρa_- при бесконечно малом изменении плотности можно представить в виде

$$d(\rho a_+) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_1} + \frac{\partial L_2}{\partial l_1} \right) dl_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_2} + \frac{\partial L_2}{\partial l_2} \right) dl_2 \right],$$

$$d(\rho a_-) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_1} - \frac{\partial L_2}{\partial l_1} \right) dl_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_2} - \frac{\partial L_2}{\partial l_2} \right) dl_2 \right],$$

причем, согласно предыдущему, в первом равенстве необходимо считать $d\alpha > 0$, а во втором $d\alpha < 0$. Частные производные по α , l_1 и l_2 берутся при фиксированных значениях двух из этих переменных.

Из геометрических соображений легко получить следующие выражения для входящих в эти равенства производных:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 = -\frac{1}{2} l_2 \sin \beta_1, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_2 = \frac{1}{2} l_2 \sin \beta_2,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial l_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_1, \quad \frac{\partial L_2}{\partial l_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_2,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial l_2} = \frac{1}{2} \cos \beta_1, \quad \frac{\partial L_2}{\partial l_2} = \frac{1}{2} \cos \beta_2,$$

причем $\alpha_1 < \alpha_2 < \pi - \alpha_1$ и $\beta_1 < \beta_2 < \pi - \beta_1$. Так как $\alpha_1 < \pi/2$ и $\beta_1 < \pi/2$, то

$$\left| \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} \right| < \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} > 0; \quad \left| \frac{\partial L_2}{\partial l_1} \right| < \frac{\partial L_1}{\partial l_1} > 0; \quad \left| \frac{\partial L_2}{\partial l_2} \right| < \frac{\partial L_1}{\partial l_2} > 0.$$

Отсюда следует, что при $d\rho > 0$ имеют место неравенства $d(\rho a_+) > 0$ и $d(\rho a_-) > 0$. Таким образом, справедливость неравенств (3.41) доказана.

В газодинамической простой волне ($H = 0$) имеет место соотношение $\frac{du}{d\rho} = \frac{a_0}{\rho}$, и, следовательно, условие (3.42) записывается в виде

$$\frac{da_0}{d\rho} = \frac{a_0}{\rho} = \frac{d}{d\rho}(a_0 + u) = \frac{d\lambda_0}{d\rho} > 0,$$

где $\lambda_0 = a_0 + u$ — скорость движения фазы в простой волне при $H = 0$.

Если $\frac{d\lambda}{d\rho} > 0$, то более плотные части простой волны движутся быстрее менее плотных. Таким образом, неравенства (3.41) и (3.42) означают, что в средах, в которых при отсутствии магнитного поля более плотные части простых волн движутся быстрее менее плотных, это свойство простых волн сохранится и при наличии магнитного поля. При этом фронт волны сжатия

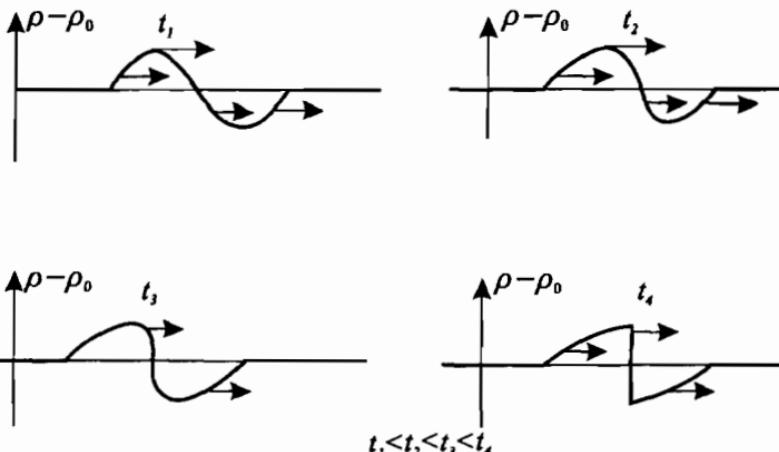


Рис. 9

становится все круче и круче, пока не образуется сильный разрыв, а фронт волны разрежения становится все более и более пологим (рис. 9).

Система (3.31)–(3.43) может быть проинтегрирована в квадратурах, если в качестве новой переменной ввести $q = a_{+,-}/a_A$ [11]. Однако это решение не упрощает качественного исследования поля интегральных кривых.

§ 3. Малые возмущения

Если считать, что отклонения всех величин от некоторого однородного состояния $v_0 = 0, p_0, \rho_0, H_0 (H_{z0} = 0)$ малы, то простые волны обращаются в малые возмущения, распространяющиеся по покоящемуся газу [9, 10, 12, 13]. В этом случае для каждого типа волн можно написать конечные соотношения, связывающие искомые величины. Отклонения величин от равновесного состояния обозначим через h, v, ρ и p , а квадратами этих величин по отношению к ним самим пренебрежем. Рассмотрим различные типы малых возмущений, являющиеся пределом соответствующих простых волн.

1. Энтропийная волна ($a = a_3$). Так как $v_0 = 0$ и $a_3 = 0$, эта волна не распространяется в пространстве и представляет собой произвольное малое отклонение в распределении энтропии от ее значения в равновесном состоянии. В энтропийной волне

$$h = v = 0, \quad p = 0, \quad \rho = \rho(x), \quad (3.50)$$

где $\rho(x)$ — произвольная функция.

2. Вращательная или альфеновская волна ($a = a_A$). Так как в простых волнах этого типа плотность и давление непрерывны, то и в малых возмущениях этого типа имеем

$$h_x = p = \rho = 0, \quad a_A = H_{x0} / \sqrt{4\pi\rho_0}, \quad (3.51)$$

Кроме того, из равенств (3.29) при $H_{z0} = 0, v_0 = 0$ получим для случая малых возмущений:

$$\left. \begin{aligned} h_y &= 0, \quad v = u = 0, \\ h_z &= h_z(x + a_A t), \quad w = h_z / \sqrt{4\pi\rho_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

где $h_z(x + a_A t)$ — произвольная функция.

3. Быстрая и медленная магнитозвуковые волны ($a = a_{+,-}$). В линейной теории скорость распространения фазы волны будет совпадать со скоростью звука, вычисленной по невозмущенному состоянию:

$$\lambda_{+,-}^2 = a_{+,-}^2 = \frac{1}{2} \left(a_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \pm \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \right)^2 - \frac{a_0^2 H_{x0}^2}{\pi\rho}} \right). \quad (3.53)$$

Эта величина является постоянной для всех точек профиля волны, поэтому в рамках линейной теории профиль звуковой волны не меняется с течением времени.

Из уравнений (3.31)–(3.33) получим следующие выражения, связывающие величины в быстрой и медленной магнитозвуковых волнах:

$$\left. \begin{aligned} h_y &= \frac{4\pi(a_{+,-}^2 - a_0^2)}{H_{y0}} \rho, \\ u &= \frac{a_{+,-}}{\rho_0} \rho, \\ v &= -\frac{H_{x0}(a_{+,-}^2 - a_0^2)}{\rho_0 a_{+,-} H_{y0}} \rho, \\ h_x = h_z &= 0, \quad w = 0, \\ p &= a_0^2 \rho. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Равенства (3.52) и (3.54) справедливы для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x . Связь величин в волнах, движущихся в противоположном направлении, получается путем замены в равенствах (3.52) и (3.54) h_z на $-h_z$ и $a_{+,-}$ на $-a_{+,-}$. В дальнейшем, кроме соотношений (3.54), будет использоваться соотношение

$$a_{+,-} h_y = -H_{x0} v + H_{y0} u. \quad (3.55)$$

Это соотношение в рамках линейной теории является интегралом последнего уравнения (3.30) и поэтому представляет собой линейную комбинацию из соотношений (3.54), что можно проверить и непосредственно. Уравнения (3.54), (3.55) преобразуем

к виду

$$\left. \begin{aligned} u \left(a_{+,-} - \frac{a_0^2}{a_{+,-}} \right) &= \frac{H_{y0}}{4\pi\rho_0} h_y, \quad -a_{+,-}v = \frac{H_{x0}}{4\pi\rho_0} h_y, \\ -a_{+,-}h_y &= H_{x0}v - H_{y0}u, \quad u = \frac{a_{+,-}\rho}{\rho_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Чтобы наглядно представить себе изменение скорости в каждой из этих волн, проделаем некоторое геометрическое построение [15]. Для этого сделаем некоторые предварительные преобразования

$$\begin{aligned} a_{+,-}^2 &= \frac{1}{2}(a_0^2 + b^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 + 2a_0^2b^2 - 4a_0^2b_x^2} = \frac{1}{2}(a_0^2 + b^2) \pm \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 + 2a_0^2b^2(1 - 2\cos^2\alpha)} = \frac{1}{2}(a_0^2 + b^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2b^2\cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

где $b = H/\sqrt{4\pi\rho}$, $b_x = b\cos\alpha$. Кроме того, исключив h_y из первого и третьего равенств (3.56), получим

$$u \left(a_{+,-} - \frac{a_0}{a_{+,-}} \right) = \frac{H_{y0}}{4\pi\rho_0} \frac{H_{y0}u - H_{y0}v}{a_{+,-}},$$

или

$$u \left(a_{+,-}^2 - a_0^2 - b^2 \sin^2\alpha \right) = -b^2 \cos\alpha \sin\alpha \cdot v.$$

Исключив h_y из второго и третьего равенств (3.56), имеем

$$a_{+,-}^2 v = \frac{H_{x0}}{4\pi\rho_0} (H_{x0}v - H_{y0}u)$$

или

$$(a_{+,-}^2 - b^2 \cos^2\alpha)v = -b^2 \cos\alpha \sin\alpha \cdot u.$$

Составим отношение

$$\operatorname{tg}^2 \psi_{+,-} \equiv \frac{v^2}{u^2} = \frac{\left(a_{+,-}^2 - a_0^2 - b^2 \sin^2\alpha \right)}{a_{+,-}^2 - b^2 \cos^2\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\cos 2\psi_{+-} &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \psi_{+-}}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{+-}} = \\ &= \frac{a_0^2 - b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{2a_{+-}^2 - a_0^2 - b^2} = \frac{a_0^2 - b^2 \cos 2\alpha}{\pm \sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2 b^2 \cos 2\alpha}}.\end{aligned}$$

Пусть OG и Ox (рис. 10) представляют соответственно направление поля H_0 в невозмущенном состоянии и направление

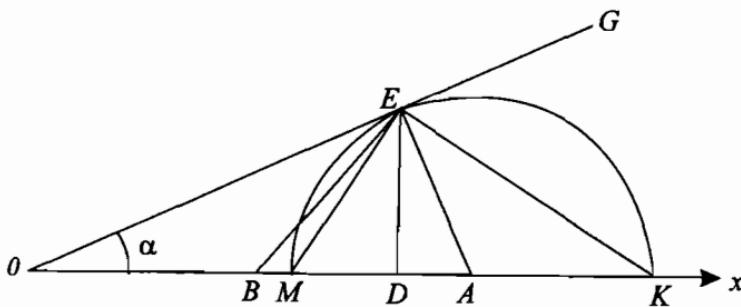


Рис. 10

распространения волны. Отложим на Ox отрезок $OB = b^2/2$ и отрезок $BA = a_0^2/2$. Построим равнобедренный треугольник OBE и соединим точки A и E . Тогда

$$OA = \frac{1}{2}(a_0^2 + b^2) \text{ и } AE = \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2 b^2 \cos 2\alpha}.$$

Если теперь из точки A провести окружность радиуса AE , то точки пересечения прямой Ox и этой окружности определяют на прямой Ox отрезки $OM = a_-^2$ и $OK = a_+^2$. Отрезок OD ($ED \perp Ox$), равный $b^2 \cos^2 \alpha$, соответствует квадрату скорости распространения альфвеновской звуковой волны. На рис. 10 непосредственно видно, что $a_- \leq a_A \leq a_+$. Так как $AD = \frac{1}{2}(a_0^2 - b^2 \cos 2\alpha)$,

$AE = \sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2 b^2 \cos^2 \alpha}$, то $\angle OAE = 2\psi_+$, а $\angle KAE = 2\psi_-$, отсюда $\angle AKE = \psi_+$, а $\angle AME = \psi_-$. Таким образом, быстрая и медленная магнитозвуковые волны различаются тем, что изме-

нение скорости в них происходит во взаимно перпендикулярных направлениях ($\angle KEM = \pi/2$, как вписанный и опирающийся на диаметр окружности).

Волны малой амплитуды могут быть использованы для построения решения задачи Коши. Пусть в момент $t = 0$ заданы начальные данные. Будем считать, что все величины при $t = 0$ являются функциями только x , и вне некоторого интервала значений x принимают постоянное значение. Кроме того, будем считать, что отклонения всех функций от этих постоянных значений малы, так что можно пользоваться линейной теорией. Решение уравнений, соответствующее заданным начальным условиям, можно представить в виде суперпозиции различного типа волн, движущихся в обе стороны. По прошествии достаточно большого времени волны разойдутся и возмущенная область будет иметь вид, представленный на рис. 11, где заштри-

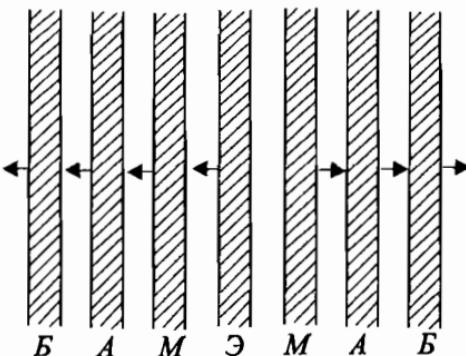


Рис. 11

хованные области соответствуют быстрым, альвеновским, медленным и энтропийной волнам, обозначенным буквами B , A , M , \mathcal{E} . Незаштрихованные участки соответствуют невозмущенному состоянию.

Глава 4

Поверхности разрыва в идеальном^{*} газе

§ 1. Классификация поверхностей сильного разрыва

В предыдущей главе было показано, что простые волны сжатия с течением времени превращаются в сильные разрывы. Разрывы являются необходимым элементом течения и во многих других случаях движения идеального газа. В связи с этим представляет интерес исследование свойств магнитогидродинамических разрывов. Для изучения этих свойств обратимся к полученным ранее соотношениям, которые должны выполняться на поверхности сильного разрыва. Для идеального газа эти соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \{H_n\} = \{E_\tau\} &= 0, \quad \{\rho v_n\} = 0, \quad \{p n + \rho v v_n - T_{ik} n_k e_i\} = 0, \\ \left\{ \rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) v_n + p v_n + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

причем $E = -\frac{1}{c} v \times \mathbf{H}$, $T_{ik} = \frac{1}{4\pi} H_i H_k - \frac{1}{8\pi} H^2 \delta_{ik}$.

Преобразуем некоторые входящие сюда члены:

$$\begin{aligned} T_{ik} n_k e_i &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_n - \frac{n H^2}{8\pi} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{H}_n + \frac{H_n^2}{8\pi} \mathbf{n} - \frac{H_\tau^2}{8\pi} \mathbf{n}; \\ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n &= -\frac{1}{4\pi} [(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{4\pi} [H_n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) - H^2 v_n] = \\ &= -\frac{1}{4\pi} [H_n (v_n H_n + \mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau) - (H_n^2 + H_\tau^2) v_n] = -\frac{1}{4\pi} [H_n (\mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau) - H_\tau^2 v_n]. \end{aligned}$$

* См. сноску на с. 85.

Соотношение $\{E_\tau\} = -\frac{1}{c}\{(v \times H)_\tau\} = 0$ равносильно

$$\{H_n v_\tau - H_\tau v_n\} = 0.$$

Подставляя полученные выражения в (4.1) и проектируя векторные соотношения на нормаль и касательную плоскость к поверхности разрыва, получим следующие условия, которые должны быть выполнены на поверхности магнитогидродинамических разрывов:

$$H_{n1} = H_{n2} \equiv H_n, \quad (4.2)$$

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \equiv m, \quad (4.3)$$

$$H_n \{v_\tau\} = \{H_\tau v_n\}, \quad (4.4)$$

$$\left\{ p + \rho v_n^2 + \frac{H_\tau^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (4.5)$$

$$\left\{ \rho v_n v_\tau - \frac{H_n}{4\pi} H_\tau \right\} = 0, \quad (4.6)$$

$$\left\{ \rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) v_n + p v_n + \frac{1}{4\pi} H_\tau^2 v_n - \frac{H_n}{4\pi} (H_\tau \cdot v_\tau) \right\} = 0. \quad (4.7)$$

Соотношения (4.2)–(4.7), как будет видно из дальнейшего, могут описывать поверхности разрыва различных типов [6, 8, 11, 13].

Прежде всего рассмотрим поверхности разрыва, через которые отсутствует поток вещества ($m = 0$). На таких разрывах должны выполняться следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_n \{v_\tau\} &= 0, \\ \{p\} &= -\frac{1}{8\pi} \{H_\tau^2\}, \\ H_n \{H_\tau\} &= 0, \quad H_n \{H_\tau \cdot v_\tau\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Из этих соотношений видно, что возможны два типа подобных разрывов. Если вектор напряженности магнитного поля параллелен поверхности разрыва ($H_n = 0$), то скорость и магнитное поле с обеих сторон разрыва параллельны поверхности

разрыва и испытывают произвольные скачки. Произвольный скачок испытывает также плотность, скачок давления же связан со скачком поля. Такая поверхность разрыва есть поверхность раздела двух жидкостей с разными термодинамическими параметрами, которые движутся друг относительно друга с некоторой скоростью, параллельной поверхности раздела. Поэтому по аналогии с обычной газодинамикой такой разрыв называют *тангенциальным*. Если же напряженность магнитного поля составляет некоторый угол с поверхностью разрыва ($H_n \neq 0$), то на поверхности разрыва скорость, магнитное поле, а также давление непрерывны. Плотность и другие термодинамические параметры, за исключением давления, могут испытывать произвольный разрыв. Такой разрыв называют *контактным*.

Если через поверхность разрыва существует поток массы ($m \neq 0$), то параметры потока и поля с обеих сторон такого разрыва должны быть связаны соотношениями (4.2)–(4.7). Заметим, что среди этих поверхностей разрыва должны содержаться вращательные разрывы, полученные нами ранее как предел вращательной волны Римана. На вращательном разрыве $m \neq 0$, $\{v_n\} = \{V\} = 0$, где $V = 1/\rho$ — удельный объем.

Рассмотрим все возможные поверхности разрыва, обладающие этим свойством. Из соотношений (4.4) и (4.6) находим, что

$$m = H_n / \sqrt{4\pi V} \quad \text{или} \quad v_n = H_n / \sqrt{4\pi \rho},$$

т. е. все поверхности разрыва, обладающие тем свойством, что $m \neq 0$, $\{V\} = 0$, распространяются по частицам жидкости со скоростью вращательного разрыва. Оставшиеся соотношения на разрыве дают:

$$\{v_\tau\} - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \{H_\tau\} = 0, \quad \left\{ p + \frac{1}{8\pi} H_\tau^2 \right\} = 0,$$

$$\{\epsilon\} + V \left\{ p + \frac{H_\tau^2}{8\pi} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(v_\tau - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} H_\tau \right)^2 \right\} = \{\epsilon\} = 0.$$

Так как $\{V\} = 0$ и $\{\epsilon\} = 0$, то на этом разрыве непрерывны все термодинамические параметры. В частности, $\{p\} = 0$, откуда следует, что $\{H_\tau^2\} = 0$, т. е. модуль вектора H непрерывен при переходе через разрыв. В системе координат, движущейся отно-

сительно исходной системы со скоростью $v_\tau - \sqrt{V} H_\tau / \sqrt{4\pi}$, векторы v и H параллельны с обеих сторон разрыва и поворачиваются вокруг нормали. Все эти свойства совпадают со свойствами вращательных разрывов. Таким образом, при $m \neq 0$, $\{V\} = 0$ не существует других разрывов, кроме вращательных.

Теперь, для того чтобы исчерпать все возможные поверхности разрыва, описываемые (4.2)–(4.7), необходимо рассмотреть поверхности разрыва, на которых

$$m \neq 0, \{V\} \neq 0.$$

Такие поверхности разрыва называются *ударными волнами*.

Отметим, что при любой скорости набегающего потока можно выбрать движущуюся систему координат так, чтобы движение было плоским и с обеих сторон от ударной волны. Действительно, из (4.4) и (4.6) следует, что векторы $H_{\tau 1} V_1 - H_{\tau 2} V_2$ и $H_{\tau 1} - H_{\tau 2}$ параллельны одному и тому же вектору $\{v_\tau\}$. Так как в ударных волнах $V_1 \neq V_2$, то отсюда следует, что $H_{\tau 2}$ и $\{v_\tau\}$ параллельны $H_{\tau 1}$. Если выбрать движущуюся систему координат так, чтобы вектор скорости v_1 лежал в плоскости, проходящей через $H_{\tau 1}$ и нормаль к поверхности разрыва, то в этой плоскости будут лежать также H_2 и v_2 . В дальнейшем при изучении ударных волн будем пользоваться такими системами координат.

Кроме того, выбором системы координат можно добиться того, чтобы векторы скорости и напряженности магнитного поля были параллельны между собой перед и за ударной волной. Действительно, выбором скорости системы координат в направлении касательной составляющей магнитного поля можно сделать векторы v_1 и H_1 параллельными. При этом из условия (4.4) следует, что

$$\{(v_\tau / v_n - H_\tau / H_n) v_n\} = 0,$$

т. е. векторы v_2 и H_2 тоже параллельны.

Приступая к исследованию ударных волн, докажем, что в магнитной гидродинамике при обычных предположениях относительно термодинамических свойств газа

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s < 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s > 0 \right] \text{энтропия может возра-}$$

стать только в волнах сжатия [3, 9]. Для этого прежде всего исключим $\{v_\tau\}$ из соотношений (4.4) и (4.6), которые в выбранной системе координат являются скалярными:

$$m^2 \{VH_\tau\} = \frac{H_n^2}{4\pi} \{H_\tau\}. \quad (4.9)$$

Из равенства (4.5) следует, что

$$m^2 = -\frac{\{p\} + \frac{1}{8\pi} \{H_\tau^2\}}{\{V\}}. \quad (4.10)$$

Равенство (4.6) можно переписать в виде

$$\left\{ v_\tau - \frac{H_n}{4\pi m} H_\tau \right\} = 0. \quad (4.11)$$

Соотношение (4.7) преобразуем следующим образом:

$$\{\epsilon\} + \{pV\} + \frac{m^2}{2} \{V^2\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(v_\tau - \frac{H_n}{4\pi m} H_\tau \right)^2 \right\} + \frac{1}{4\pi} \{VH_\tau^2\} - \frac{H_n^2}{32\pi^2 m^2} \{H_\tau^2\} = 0.$$

Подставляя сюда в третий член m^2 из (4.10), а в последний — из (4.9) и воспользовавшись (4.11), получим

$$\{\epsilon\} + \{pV\} - \frac{1}{2} \frac{\{p\} + \{H_\tau^2\}/8\pi}{\{V\}} \{V^2\} + \frac{1}{4\pi} \{VH_\tau^2\} - \frac{1}{8\pi} \frac{\{H_\tau^2\} \{VH_\tau\}}{\{H_\tau\}} = 0.$$

Сделав приведение подобных членов, получим

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{P_2 + P_1}{2} (V_2 - V_1) + \frac{1}{16\pi} (V_2 - V_1) (H_{\tau 2} - H_{\tau 1})^2 = 0. \quad (4.12)$$

Соотношение (4.12) отличается от уравнения адиабаты Гюгонио в обычной газовой динамике только последним членом. Так как последнее слагаемое при $V_2 < V_1$ отрицательно, а при $V_2 > V_1$ положительно, то в области $V_2 < V_1$ на плоскости (p, V) точки, которые могут удовлетворять уравнению (4.12) (сплошная линия на рис. 12), лежат выше адиабаты Гюгонио (штрих-пунктирная линия), а в области $V_2 > V_1$ — ниже ее (рис. 12). Нанесем на этот же чертеж адиабату Пуассона, т. е. кривую $s = s_1$ (штриховая линия). Известно, что в обычной газовой ди-

намике при принятых предположениях адиабата Гюгонио при $V < V_1$ лежит выше адиабаты Пуассона, а при $V > V_1$ ниже нее. Следовательно, точки плоскости (pV) , которые могут удовлетворять уравнению (4.12), лежат при $V < V_1$ в области $s > s_1$, а при $V > V_1$ — в области $s < s_1$.

Таким образом, при принятых предположениях в магнитной гидродинамике невозможны скачки разрежения, так как им соответствуют переходы с уменьшением энтропии. Детальному исследованию соотношений на ударных волнах будет посвящен отдельный параграф (см. §3 гл. 4).

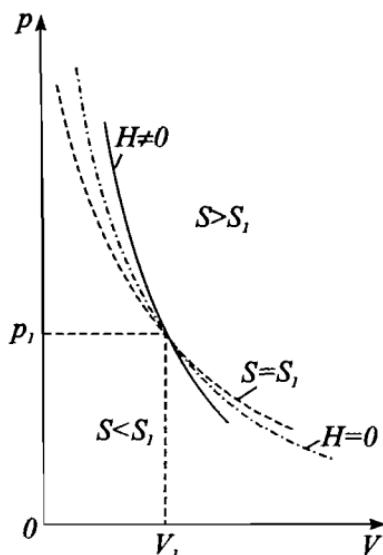


Рис. 12

§ 2. Эволюционность магнитогидродинамических ударных волн

Рассмотрим плоскую ударную волну, перемещающуюся относительно выбранной системы координат со скоростью D . Плоская ударная волна разделяет два поступательных потока газа, параметры которых связаны соотношениями на ударной волне. Эти соотношения получены в предыдущем параграфе в предположении, что ударная волна покоятся в выбранной системе координат ($D = 0$). Если $D \neq 0$, то условия на магнитогидродинамической ударной волне примут следующий вид:

$$H_{x1} = H_{x2} \equiv H_n, \quad (4.13)$$

$$\rho_1(v_{x1} - D) = \rho_2(v_{x2} - D), \quad (4.14)$$

$$H_n(v_{y1} - v_{y2}) = H_{y1}(v_{x1} - D) - H_{y2}(v_{x2} - D), \quad (4.15)$$

$$p_1 + \rho_1(v_{x1} - D)^2 + \frac{H_{1y}^2 + H_{z1}^2}{8\pi} = p_2 + \rho_2(v_{x2} - D)^2 + \frac{H_{y2}^2 + H_{z2}^2}{8\pi}, \quad (4.16)$$

$$\rho_1 v_{y1} (v_{x1} - D) - \rho_2 v_{y2} (v_{x2} - D) = \frac{H_n}{4\pi} (H_{y1} - H_{y2}), \quad (4.17)$$

$$(v_{x1} - D) \rho_1 \left[\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2} (v_{y1}^2 - v_{y2}^2) + \frac{1}{2} (v_{x1} - D)^2 - \frac{1}{2} (v_{x2} - D)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (v_{z1}^2 - v_{z2}^2) + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{H_{y1}^2 + H_{z1}^2}{\rho_1} - \frac{H_{y2}^2 + H_{z2}^2}{\rho_2} \right) \right] = \\ \frac{H_n}{4\pi} [(H_{y1} v_{y1} - H_{y2} v_{y2}) + (H_{z1} v_{z1} - H_{z2} v_{z2})], \quad (4.18)$$

$$H_n (v_{z1} - v_{z2}) = H_{z1} (v_{x1} - D) - H_{z2} (v_{x2} - D), \quad (4.19)$$

$$\rho_1 v_{z1} (v_{x1} - D) - \rho_2 v_{z2} (v_{x1} - D) = \frac{H_n}{4\pi} (H_{z1} - H_{z2}). \quad (4.20)$$

Соотношения (4.13)–(4.20) выписаны в системе координат, ось x которой направлена по нормали к поверхности ударной волны, а оси y и z лежат в плоскости волны.

Рассмотрим вопрос о взаимодействии ударной волны с малыми возмущениями [1, 10]. Положим, что ударная волна разделяет два слабовозмущенных поступательных потока, причем ограничимся случаем, когда все функции возмущенного движения зависят только от координаты x и времени t , т. е. будем рассматривать взаимодействие плоской ударной волны с плоскими малыми возмущениями. Естественно, что возмущенное движение должно удовлетворять уравнениям магнитной гидродинамики с обеих сторон от ударной волны и условиям на ударной волне (4.13)–(4.20). Так как невозмущенный поток задан и, по предположению, возмущения малы, то они должны удовлетворять линеаризованной системе уравнений магнитной гидродинамики и соотношениям на ударной волне, которые получаются путем линеаризации условий (4.13)–(4.20). Отметим, что линейные системы, описывающие возмущения с разных сторон от ударной волны, отличаются значениями коэффициентов.

Произвольное плоское (в том смысле, что все функции зависят только от x и t) малое возмущение может быть представлено в виде суммы линейных простых волн (см. разд. 3.3). Кажд-

дая из этих волн характеризуется одной величиной, которую будем называть *амплитудой волны*. Если амплитуда волны задана как функция $x \pm a_i t$, то распределение всех остальных величин в волне находится в зависимости от типа волны по формулам (3.50), (3.52) и (3.54). Скорость линейных волн относительно ударной волны зависит от их типа и скорости ударной волны относительно газа. Можно различать волны, приходящие на ударную волну, — скорость их направлена к ударной волне, и уходящие — относительная скорость их направлена от ударной волны.

Амплитуды приходящих волн определяются начальными данными. В результате взаимодействия падающих волн с ударной волной возникают уходящие линейные волны (отраженные и преломленные). Их амплитуды определяются амплитудами приходящих волн и условиями на ударной волне. Если при заданных амплитудах приходящих возмущений условия на данной ударной волне позволяют однозначно определить амплитуды расходящихся волн, то ударную волну будем называть *эволюционной*. Понятие эволюционности связано с возможностью построения решения нестационарных задач по начальным данным [2]. Если линеаризированная задача о взаимодействии малых возмущений с ударной волной не имеет решения или имеет неединственное решение, то ударную волну будем называть *неэволюционной*.

Если линеаризированная задача не имеет однозначного решения, то, следовательно, она может иметь нетривиальное решение и в том случае, когда на ударную волну не падает фактически никаких возмущений. Это соответствует самопроизвольному излучению ударной волной малых возмущений. Если же линеаризированная задача не имеет решения, то поскольку решение физической задачи должно существовать, необходимо предположить, что линейная задача плохо описывает в этом случае взаимодействие ударной волны с малым возмущением, т. е. явление взаимодействия в целом нелинейно и возникающие при взаимодействии возмущения не являются малыми [1, 7]. В этом случае при падении на ударную волну малых возмущений должны появиться конечные возмущения.

Обозначим через δq_i , (через q_i обозначены величины ρ, p, v_x, v_y, H_y и т. д.) отклонение параметров от их значений в невозмущенном потоке. Если выбрать систему координат так, чтобы

невозмущенная ударная волна покоилась относительно этой системы координат ($D = 0$) и невозмущенные векторы v и H были бы в этой системе координат параллельны и лежали в плоскости x, y (в этой системе координат компоненты скорости будем обозначать u, v, w , при этом $w = H_z = 0$), то из условий (4.13)–(4.20) можно получить следующую систему линейных соотношений, которым должны удовлетворять на ударной волне соответствующие возмущения (δq_i):

$$\delta H_{x1} = \delta H_{x2}, \quad (4.21)$$

$$\rho_1(\delta u_1 - \delta D) + u_1 \delta \rho_1 = \rho_2(\delta u_2 - \delta D) + u_2 \delta \rho_2, \quad (4.22)$$

$$H_n(\delta v_1 - \delta v_2) = u_1 \delta H_{y1} - u_2 \delta H_{y2} + H_{y1} \delta u_1 - H_{y2} \delta u_2 - \delta D(H_{y1} - H_{y2}). \quad (4.23)$$

$$\delta p_1 + 2\rho_1 u_1 \delta u_1 + u_1^2 \delta \rho_1 + \frac{H_{y1} \delta H_{y1}}{4\pi} = \delta p_2 + 2\rho_2 u_2 \delta u_2 + u_2^2 \delta \rho_2 + \frac{H_{y2} \delta H_{y2}}{4\pi}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1 v_1 \delta u_1 - \rho_2 v_2 \delta u_2 + u_1 v_1 \delta \rho_1 - u_2 v_2 \delta \rho_2 + \rho_1 u_1 (\delta v_1 - \delta v_2) - \\ & - \delta D(\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) = \frac{H_n}{4\pi} (\delta H_{y1} - \delta H_{y2}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{H_{y1}^2}{4\pi} + \rho_1 u_1^2 \right) \delta u_1 - \left(\frac{H_{y2}^2}{4\pi} + \rho_2 u_2^2 \right) \delta u_2 + \rho_1 u_1 (\delta i_1 - \delta i_2) + \\ & + \left(\rho_1 u_1 v_1 - \frac{H_n H_{y1}}{4\pi} \right) \delta v_1 - \left(\rho_2 u_2 v_2 - \frac{H_n H_{y2}}{4\pi} \right) \delta v_2 + \\ & + \frac{H_{y1} u_1}{4\pi} \delta H_{y1} - \frac{H_{y2} u_2}{4\pi} \delta H_{y2} = \delta D \left(\frac{H_{y1}^2 - H_{y2}^2}{4\pi} + \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$u_1 \delta H_{z1} - u_2 \delta H_{z2} = H_n (\delta w_1 - \delta w_2), \quad (4.27)$$

$$\rho_1 u_1 (\delta w_1 - \delta w_2) = \frac{H_n}{4\pi} (\delta H_{z1} - \delta H_{z2}). \quad (4.28)$$

В этих соотношениях $i = \epsilon + p/\rho$ — энталпия единицы массы газа. Так как в плоских линейных волнах компонента магнитного поля, нормальная к волне, не меняется, то $\delta H_{x1} = \delta H_{x2} = 0$.

Это соотношение было использовано при получении уравнений (4.22)–(4.28). Из (4.22) следует, что

$$\delta D = \frac{\rho_1 \delta u_1 - \rho_2 \delta u_2 + u_1 \delta \rho_1 - u_2 \delta \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (4.29)$$

Это равенство позволяет исключить δD из соотношений (4.23)–(4.26).

Таким образом, условия, которым должны удовлетворять возмущения параметров потока на ударной волне, представляют собой систему шести линейных уравнений (4.23)–(4.28). Эта система уравнений, как легко видеть, распадается на две системы: уравнения (4.27) и (4.28), связывающие между собой величины δH_{z1} , δH_{z2} , δw_1 , δw_2 , и уравнения (4.23)–(4.26), связывающие возмущения остальных величин.

Система (4.23)–(4.28) связывает между собой 14 величин: $\delta \rho_{1,2}$, $\delta \rho_{1,2}$, $\delta u_{1,2}$, $\delta v_{1,2}$, $\delta w_{1,2}$, $\delta H_{y1,2}$, $\delta H_{z1,2}$. Любое возмущение с каждой стороны от ударной волны может быть представлено в виде суммы, вообще говоря, семи линейных волн, каждая из которых определяется одной величиной—амплитудой. Следовательно, путем линейной замены переменных из системы (4.23)–(4.28) можно получить систему шести линейных алгебраических уравнений, связывающих между собой амплитуды 14 линейных волн. Часть из этих амплитуд, соответствующих приходящим волнам, является заданной, остальные амплитуды должны быть определены из этой системы уравнений.

Очевидно, что ударная волна может быть эволюционной только в том случае, когда система (4.23)–(4.28), записанная через амплитуды волн, имеет единственное решение. Это требование накладывает определенные условия на возможное число расходящихся волн различного типа. В то же время возможное количество волн, расходящихся от ударной волны, зависит от скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной. Последнее обстоятельство позволяет путем исследования системы (4.23)–(4.28) получить условия, которым должны удовлетворять скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной для того, чтобы данная ударная волна была эволюционной. При получении этих условий в дальнейшем будем предполагать, что скорости газа перед ударной волной ($u_1 = D - v_{x1}$) и за ней ($u_2 = D - v_{x2}$) не совпадают ни с одной из скоростей малых возмущений.

Так как в альфвеновских линейных волнах все возмущения, кроме δw и δH_z равны нулю, а в остальных волнах $\delta w = \delta H_z = 0$, то система (4.23)–(4.28), записанная относительно амплитуд волн, тоже распадается на две независимые системы, причем в уравнения (4.27) и (4.28) входят только амплитуды альфвеновских волн, а в уравнения (4.23)–(4.26) – только амплитуды магнито-звуковых и энтропийных волн. Поэтому можно рассматривать отдельно задачу о взаимодействии ударной волны с малыми альфвеновскими возмущениями и задачу о взаимодействии с малыми звуковыми и энтропийными возмущениями [10].

Рассмотрим прежде всего задачу о взаимодействии ударной волны с альфвеновскими возмущениями. В этом случае амплитуды расходящихся волн должны определяться из системы двух линейных уравнений, имеющей вид (для определенности примем, что $u_1 > 0$ и $H_n > 0$):

$$\left. \begin{aligned} (u_1 - a_{A1})\delta_{A,-}H_{z1} + (u_1 + a_{A1})\delta_{A,+}H_{z1} &= \\ &= (u_2 - a_{A2})\delta_{A,-}H_{z2} + (u_2 + a_{A2})\delta_{A,+}H_{z2}, \\ \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}[(u_1 - a_{A1})\delta_{A,-}H_{z1} - (u_1 + a_{A1})\delta_{A,+}H_{z1}] &= \\ &= [(u_2 - a_{A2})\delta_{A,-}H_{z2} - (u_2 + a_{A2})\delta_{A,+}H_{z2}]. \end{aligned} \right\}$$

В этих уравнениях символом $\delta_{A,+}H_z$ обозначено изменение магнитного поля в альфвеновской волне, движущейся по частицам газа в положительном направлении, а через $\delta_{A,-}H_z$ изменение H_z в волне, движущейся по частицам в отрицательном направлении. Легко видеть, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при амплитудах, равен двум, если скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной не совпадают с соответствующей альфвеновской скоростью. Очевидно, что эта система будет иметь однозначное решение только в том случае, если число расходящихся волн, которые в этом случае являются волнами Альфвена, равно двум.

Необходимыми и достаточными условиями существования двух расходящихся волн Альфвена являются следующие:

$$u_1 < a_{A1}, \quad u_2 < a_{A2}, \quad (4.30)$$

или

$$u_1 > a_{A1}, \quad u_2 > a_{A2}. \quad (4.31)$$

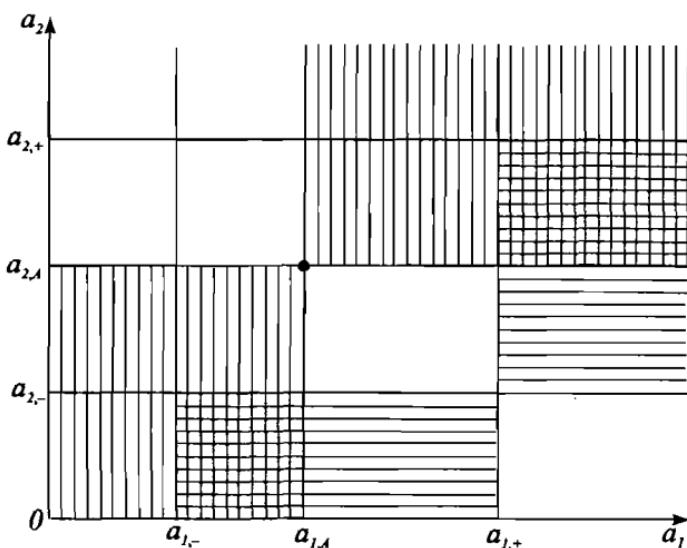


Рис. 13

В первом случае (4.30) одна альфвеновская волна распространяется по газу перед ударной волной и другая по газу за волной, во втором случае (4.31) обе альфвеновские волны распространяются по газу за ударной волной. Условия (4.30) и (4.31) являются необходимыми условиями эволюционности ударных волн.

На плоскости (u_1, u_2) (рис. 13) точки, удовлетворяющие неравенствам (4.30) и (4.31), лежат в областях, покрытых вертикальной штриховкой. Вопрос об эволюционности ударных волн, соответствующих границам этих областей, не исследован.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимодействии ударной волны со звуковыми и энтропийными возмущениями. В этом случае амплитуды расходящихся волн должны определяться из системы четырех линейных уравнений (4.23)–(4.26), записанных через амплитуды волн, после исключения из них величины δD с помощью равенства (4.22). Эта система будет иметь однозначное решение, если число расходящихся волн равно четырем. При этом предполагается, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных амплитудах, равен четырем (фактическое исследование этого вопроса в общем случае в настоящее время не проведено.) Так как среди расходящихся

волн рассматриваемого типа обязательно присутствует энтропийная волна, движущаяся вместе с газом за ударной волной, то необходимыми и достаточными условиями существования решения системы (4.23)–(4.26) является условие того, что имеются три расходящиеся магнитозвуковые волны. Легко проверить, что условие существования трех магнитозвуковых волн эквивалентно следующим условиям, наложенным на скорости газа за и перед ударной волной:

$$a_{1,-} < u_1 < a_{1,+}, \quad u_2 < a_{2,-}, \quad (4.32)$$

$$a_{1,+} < u_1, \quad a_{2,-} < u_2 < a_{2,+}. \quad (4.33)$$

В случае (4.32) одна волна распространяется по газу перед ударной волной и две по газу за ней. В случае (4.33) все три волны распространяются по газу за ударной волной. Условия (4.32) и (4.33) являются необходимыми условиями эволюционности ударной волны.

На плоскости (u_1, u_2) (см. рис. 13) точки, удовлетворяющие неравенствам (4.32) и (4.33), лежат в областях, покрытых горизонтальной штриховкой. Эволюционными ударными волнами являются волны, удовлетворяющие обеим системам неравенств (4.30)–(4.31) и (4.32)–(4.33). Точки, соответствующие эволюционным волнам, лежат на плоскости (u_1, u_2) в областях, покрытых двойной штриховкой. При этом скорости газа за и перед эволюционной ударной волной должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$a_{1,-} \leq u_1 < a_{A1}, \quad u_2 \leq a_{-,2}, \quad (4.34)$$

$$a_{+,1} \leq u_1, \quad a_{A2} < u_2 \leq a_{+,2}, \quad (4.35)$$

которые являются *необходимыми и достаточными условиями эволюционности ударной волны*. Знаки равенства в (4.34) и (4.35) соответствуют ударным волнам бесконечно малой интенсивности. Ударные волны, удовлетворяющие (4.35), будем называть *быстрыми*, а удовлетворяющие (4.34) — *медленными*.

Аналогично тому, как это сделано для ударных волн, может быть поставлен вопрос об эволюционности других поверхностей разрыва (в частности, вращательный разрыв удовлетворяет условиям эволюционности [1]).

§ 3. Разрешение условий на ударных волнах в совершенном газе

Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена по нормали к ударной волне и векторы v и H лежали бы в плоскости x, y (см. разд. 4.1). В этой системе координат систему соотношений, эквивалентную соотношениям на ударной волне в совершенном газе, можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} m = \frac{v_{x1}}{V_1} = \frac{v_{x2}}{V_2}, \quad m^2 = \frac{H_x^2}{4\pi} \frac{H_{y2} - H_{y1}}{V_2 H_{y2} - V_1 H_{y1}}, \quad m^2 = \frac{p_2 - p_1 + (H_{y2}^2 - H_{y1}^2)/8\pi}{V_1 - V_2}, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) - \frac{1}{2} (V_1 + V_2)(p_2 - p_1) + \frac{1}{16\pi} (V_2 - V_1)(H_{y2} - H_{y1})^2 = 0, \\ v_{y2} - v_{y1} = \frac{H_x}{4\pi m} (H_{y2} - H_{y1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Ниже будет показано, что можно ввести некоторую величину, характеризующую интенсивность ударной волны так, что все величины за ударной волной и скорость волны выражаются явным образом через эту величину и параметры, характеризующие состояние перед волной [12]*.

Предполагая, что $H_x \neq 0$, введем безразмерные переменные по формулам:

$$\left. \begin{aligned} h_i = \frac{H_{yi}}{H_x} = \operatorname{tg} \alpha_i, \quad \eta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad P_i = \frac{4\pi p_i}{H_x^2}, \\ v_i^* = \frac{v_i}{a_{A1}} = \frac{v_i \sqrt{4\pi \rho_1}}{H_x}, \quad v_i^{**} = \frac{v_i}{a_{A2}} = \frac{v_i \sqrt{4\pi \rho_2}}{H_x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Здесь всюду $i = 1, 2$, причем индекс 1 относится к параметрам перед волной, а индекс 2 — к параметрам за волной. Величина P связана с ранее введенным вектором $N = b/a_0$ (см. §1 гл. 3) соотношением $\gamma P = 1/N_x^2$. Вместо P_2 введем переменную

* В данном разделе излагается метод разрешения условий на ударных волнах, предложенный А. А. Барминым.

$$z = \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1} + \frac{1}{2} (h_2 + h_1). \quad (4.38)$$

Заметив, что $m^2 = \frac{\rho_1 H_x^2}{4\pi} v_{x1}^{*2}$, преобразуем соотношения (4.36) к новым переменным (4.37), (4.38):

$$v_{x2}^* / v_{x1}^* = \eta, \quad (4.39)$$

$$v_{x1}^{*2} = (h_2 - h_1) / (\eta h_2 - h_1), \quad (4.40)$$

$$v_{x1}^{*2} = (h_2 - h_1) z / (1 - \eta), \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \eta & \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} z(h_2 - h_1) + \frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 - \frac{1}{\gamma-1} (h_2 - h_1)(h_2 + \gamma h_1) \right] - \\ & - z(h_2 - h_1) - \frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 + h_1(h_2 - h_1) = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$v_{y2}^* - v_{y1}^* = \frac{h_2 - h_1}{v_{x1}^*}. \quad (4.43)$$

Перед волной будем считать заданными все величины, кроме v_{x1} , т. е. величины $h_1, P_1, H_x, \rho_1, v_{y1}$. Для определенности положим $h_1 > 0$. Интенсивность скачка будем характеризовать величиной z , что равносильно заданию одного параметра за волной. Считая z переменной, исследуем зависимость от нее остальных величин — $h_2, P_2, \eta, v_{x1}, v_{x2}, v_{y2}$. Из равенств (4.40) и (4.41) находим

$$\eta = (h_1 z + 1) / (h_2 z + 1). \quad (4.44)$$

Подставляя это выражение в (4.42), получим после деления на $h_2 - h_1$:

$$(h_2 - h_1)[(\gamma - 1)z^2 + (2 - \gamma)h_1 z + 1] - 2[h_1 z^2 - (h_1^2 + \gamma P_1 - 1)z - h_1] = 0 \quad (4.45)$$

или

$$h_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} h_1 - \frac{2}{\gamma-1} \frac{\beta z + \gamma h_1}{(\gamma-1)z^2 + (2-\gamma)h_1 z + 1}, \quad (4.46)$$

где $\beta = h_1^2 + (\gamma - 1)(\gamma P_1 - 1)$.

Так как $P_1 \geq 0$, то $\beta \geq \beta_{\min} \equiv h_1^2 - (\gamma - 1)$.

Если z задано, то по формуле (4.46) находим h_2 , затем из равенства (4.44) — η . По известным z , h и η из равенства (4.40) или (4.41) определяют v_{x1}^* , а из равенства (4.39) — v_{x2}^* . Наконец, уравнение (4.43) определяет v_{y2} . Таким образом, если ρ_1 , h_1 , P_1 , H_x , v_{y1} и z заданы, то соотношения (4.46), (4.44), (4.40), (4.39) и (4.43) являются соотношениями, разрешающими условия на ударной волне (3.1). Пользуясь равенствами (4.36), (4.37), легко найти любые параметры за и перед волной, в частности давление P_2 :

$$P_2 = P_1 + (h_2 - h_1)z - \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2).$$

Исследуем кривую $h = h_2(z)$ на плоскости z , h_2 . Для того чтобы не рассматривать большого числа различных случаев, будем в дальнейшем предполагать, что $\gamma < 2$. В случае $\gamma > 2$ исследование осуществляется аналогичным образом.

При $z \rightarrow \pm\infty$ кривая (4.46) стремится к асимптоте $h_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}h_1$,

с которой она имеет точку пересечения при $z = z^* \equiv -h_1\gamma/\beta$. Знак z^* противоположен знаку β . Кривая (4.46) пересекается с осью h_2 в точке с ординатой $h_2 = -h_1$. Отметим, кроме того, что точка $z = [\beta - \gamma(2 - \gamma)h_1^2]/[\gamma h_1(\gamma - 1)]$, $h_2 = -h_1$ также лежит на кривой (4.46). Если $h_1 > 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$, то знаменатель в правой части равенства (4.46) имеет два корня (z_1 и z_2), и кривая (4.46) имеет вертикальные асимптоты $z = z_1$ и $z = z_2$. При $h_1 < 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ кривая не имеет вертикальных асимптот. Для того чтобы было удобнее различать возможные случаи расположения кривой (4.46), введем плоскость начальных данных (P_1, h_1) (рис. 14).

На этой плоскости $\beta > 0$ для точек, лежащих правее параболы $\beta = 0$, и $\beta < 0$ для точек, лежащих левее ее. Проведем на плоскости (P_1, h_1) прямую $h_1 = 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$. Кривая $\beta = 0$ и прямая $h_1 = 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ не пересекаются при $h_1 > 0$ и $P_1 > 0$, так как $\frac{2}{2-\gamma}\sqrt{\gamma-1} > \sqrt{\gamma-1}$. Таким образом, эти кривые ограничиваются на плоскости начальных данных (P_1, h_1) три области (I—III). Положение начальной точки в одной из областей (I—III) будет определять, во-первых, наличие или отсутствие у кривой $h = h_2(z)$

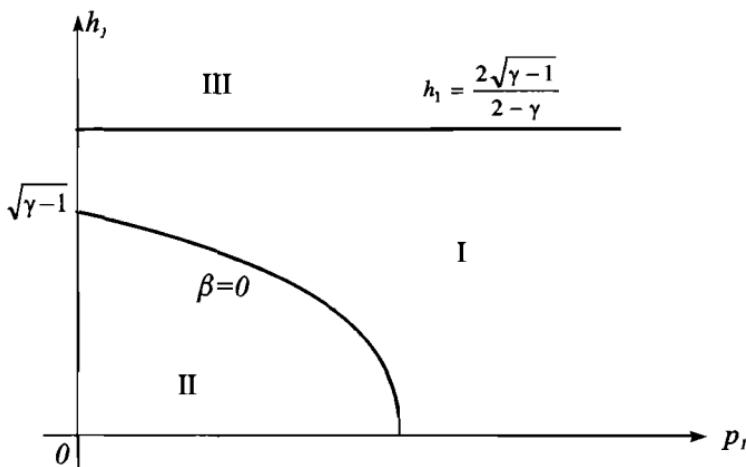


Рис. 14

вертикальных асимптот и, во-вторых, знак абсциссы ($z^* = -\gamma h_1 / \beta$) точки пересечения кривой $h = h_2(z)$ с горизонтальной асимптотой. Отметим еще, что если у кривой (4.46) имеются две вертикальные асимптоты, то

$$z_1 < z_2 < z^* < 0. \quad (4.47)$$

Действительно, z_1 и z_2 имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком

$$z_{cp} = -\frac{1}{2} \frac{2-\gamma}{\gamma-1} h_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Точка z^* при $h_1 > 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ принадлежит отрезку $z_{min} < z^* < 0$, где $z_{min} = -\gamma h_1 / \beta_{min} = -\gamma h_1 / [h_1^2 - (\gamma-1)]$.

При подстановке $z = z_{min}$ в знаменатель правой части равенства (4.46) получим

$$(\gamma-1)z_{min}^2 + (2-\gamma)h_1 z_{min} + 1 = \frac{(\gamma-1)^2(h_1^2+1)^2}{[h_1^2-(\gamma-1)]^2}.$$

Таким образом, z_{min} лежит вне отрезка $[z_1, z_2]$. Легко проверить также, что при $h_1 > 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ выполняется неравенство $z_{cp} < z_{min}$. Этим доказываются неравенства (4.47).

На основании вышеизложенного нетрудно качественно построить график функции $h_2 = h_2(z)$. Этот график будет различным в зависимости от того, в какой из областей I–III на плоскости начальных данных лежит начальная точка (рис. 15–17). Отметим, что в случаях I (см. рис. 15) и III (см. рис. 17) минимум кривой (4.46) лежит в области $z > 0$, если $\beta > \gamma(2 - \gamma)h_1^2$, и в области $z < 0$ при $\beta < \gamma(2 - \gamma)h_1^2$.

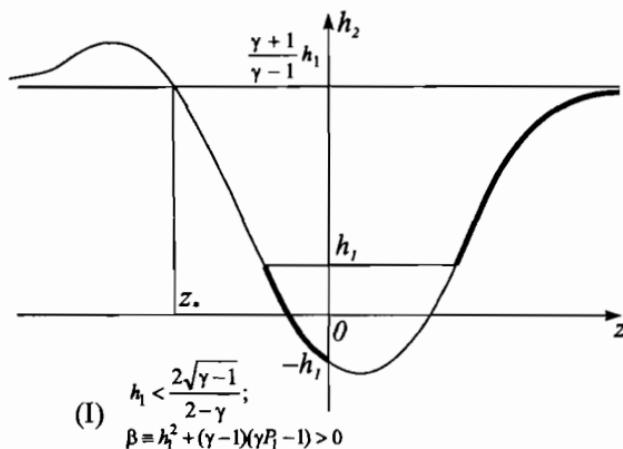


Рис. 15

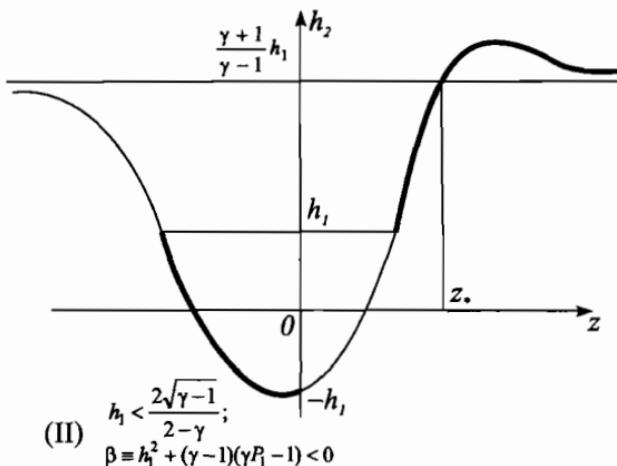


Рис. 16

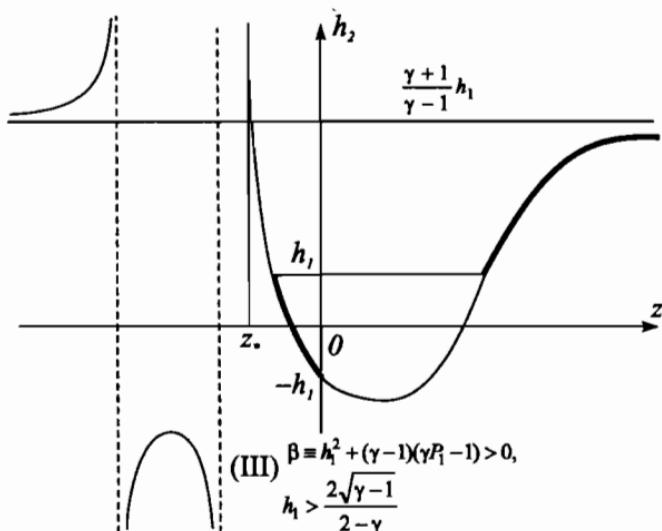


Рис. 17

Однако не все части графика $h = h_2(z)$ отвечают ударным переходам из состояния 1 в состояние 2, сопровождающимся увеличением энтропии. Как было показано в разд. 4.1, условие возрастания энтропии эквивалентно условию возрастания давления $P_2 > P_1$. В переменных z, h_2 это условие примет вид

$$\left. \begin{array}{l} z > \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \text{ при } h_2 > h_1, \\ z < \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \text{ при } h_2 < h_1. \end{array} \right\} \quad (4.48)$$

Подставляя $h_2 = 2z - h_1$ в уравнение (4.46), получим $z[(\gamma - 1)(z - h_1)^2 + \gamma P_1] = 0$.

Таким образом, единственной точкой пересечения кривой $h = h_2(z)$ с прямой $z = (h_2 - h_1)/2$ является точка $z = 0, h_2 = -h_1$. Поэтому ударным переходам $1 \rightarrow 2$ с увеличением энтропии соответствуют те части кривой $h = h_2(z)$ (выделенные на рис. 15–17 жирной линией), которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} h_2 &> h_1, & z &> 0, \\ h_2 &< h_1, & z &< 0. \end{aligned}$$

Точки остальных частей кривой соответствуют разрывам, в кото-

рых энтропия убывает при ударном переходе из состояния 1 в состояние 2. Можно считать, что они соответствуют ударным переходам $2 \rightarrow 1$, сопровождающимся увеличением энтропии.

Если известна зависимость $h = h_2(z)$, то, используя равенства (4.40), (4.44), нетрудно найти зависимости величин v_{x1}^* и v_{x2}^{**} от z или от h_2 :

$$v_{x1}^{*2} = 1 + h_2 z, \quad v_{x2}^{**2} = 1 + h_1 z.$$

Если h_2 отрицательно, то очевидно, что величины $v_{1x}^* - 1$ и $v_{x2}^{**} - 1$ имеют разные знаки, или, что то же самое, либо $v_{x1} > a_{A1}$, $v_{x2} < a_{A2}$, либо $v_{x1} < a_{A1}$, $v_{x2} > a_{A2}$. Отсюда, пользуясь результатами раздела 4.1, можно сделать вывод, что ударные волны, в которых касательная составляющая магнитного поля меняет знак, неэволюционны. В связи с этим в дальнейшем будем изучать только те части графиков, в которых $h_2 > 0$, и, следовательно, только те ударные волны, в которых $h_2 > 0$.

Качественный вид зависимостей $v_{x1}^{*2}(h_2)$ для случаев I–III (см. рис. 15–17) представлен соответственно на рис. 18–20.

При $h_2 = h_1$ имеем

$$\begin{aligned} v_{x1}^{*2} = 1 + h_1 \frac{h_1^2 + \gamma P_1 - 1 \pm \sqrt{(h_1^2 + \gamma P_1 - 1)^2 + 4h_1^2}}{2h_1} = \\ = \frac{1}{2} \left[\gamma P_1 + h_1^2 + 1 \pm \sqrt{(h_1^2 + \gamma P_1 - 1)^2 + 4h_1^2} \right] = a_{+,-}^{*2} = \frac{a_{+,-}^2}{a_{A1}^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, точки $h_2 = h_1$ соответствуют магнитозвуковым волнам.

Жирной линией на рис. 18–20 выделены отрезки кривой, точки которых соответствуют ударным переходам $1 \rightarrow 2$. Характер зависимости v_{x1}^{*2} от h_2 позволяет сделать вывод о том, что

$$v_{x1} \geq a_{+,1} \tag{4.49}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле возрастает, и

$$a_{-,1} \leq v_{x1} \leq a_{A1} \tag{4.50}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле убывает. При этом очевидно, что на отрезке $\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} h_1, 0 \right]$ скорость ударной волны v_{x1} меняется монотонно в зависимости от h_2 . Остальные части

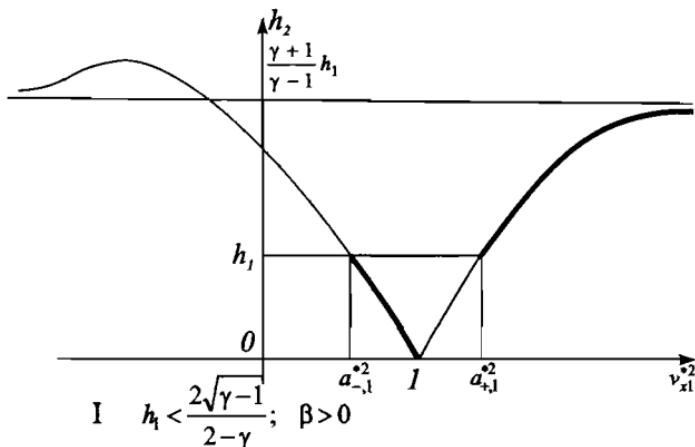


Рис. 18

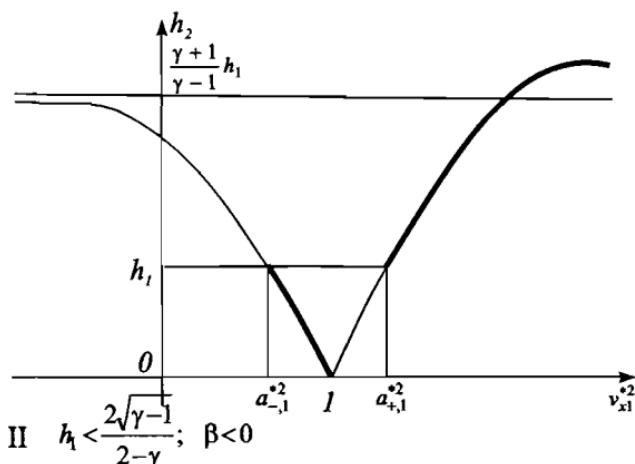


Рис. 19

кривой $v_{x1}^{*2}(h_2)$, проведенные на чертежах тонкой линией, состоят из точек, которые соответствуют ударным переходам $2 \rightarrow 1$ с возрастанием энтропии. Если в этих ударных переходах

переобозначить состояния так, чтобы 2 обозначало состояние за ударной волной (фиксированное), а 1 — состояние перед ударной волной (переменное), то непосредственно из рис. 18–20 (в этом случае ударным переходам с возрастающей энтропией соответствуют части графика $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, начерченные тонкой линией) следует неравенство

$$a_{22} < v_{x2} < a_{+,2} \quad (4.51)$$

для ударных волн, в которых магнитное поле возрастает, и

$$v_{x2} < a_{-,2} \quad (4.52)$$

для ударных волн, в которых магнитное поле убывает.

Из сопоставления неравенств (4.49) и (4.51), (4.50) и (4.52) следует, что ударные волны, в которых магнитное поле возрастает, являются быстрыми, а ударные волны, в которых магнитное поле убывает, не меняя знака, — медленными.

Рассмотрим теперь характер изменения давления в ударных волнах. Из (4.38) следует, что

$$P_2 - P_1 = (h_2 - h_1) \left[z - \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \right]. \quad (4.53)$$

Так как для эволюционных ударных волн с возрастающей энтропией выражение в квадратных скобках в (4.53) нигде не

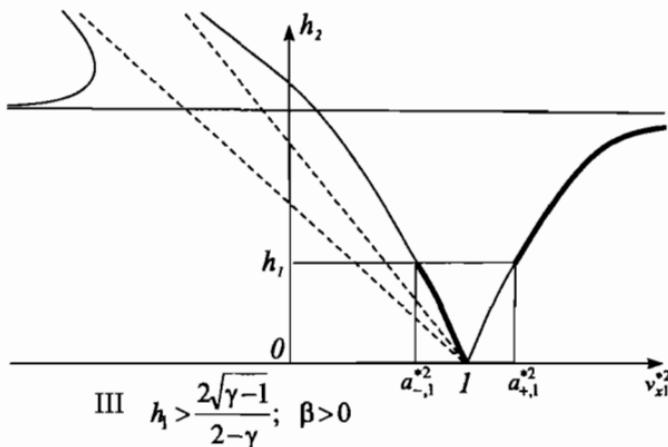


Рис. 20

обращается в нуль, то на плоскости (P, h) кривая $P_2 = P_2(h_2)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 21.

На рис. 21 показаны только те участки кривой $P_2 = P_2(h_2)$, где $P_2 > P_1$ и $h_2 > 0$, т. е. те части кривой, точки которых соответствуют эволюционным ударным волнам с возрастанием энтропии из состояния P_1, h_1 . Для быстрой ударной волны кри-

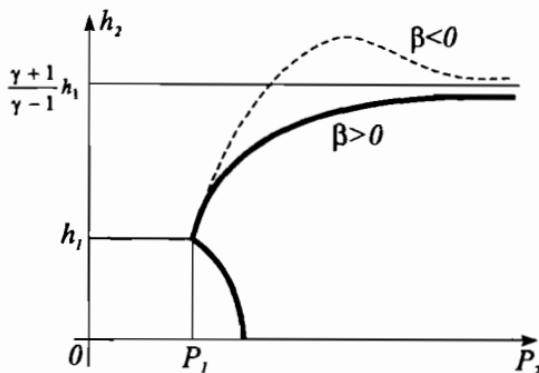


Рис. 21

вая $P_2 = P_2(h_2)$ при $\beta > 0$ не пересекает, а при $\beta < 0$ пересекает асимптоту $h_2 = \gamma + 1 / (\gamma - 1) h_1$. Первый случай изображен на рис. 21 сплошной линией, а второй — штриховой.

Пользуясь (4.44), нетрудно построить график зависимости $\eta = \eta(h_2)$. Качественный вид этой зависимости изображен на рис. 22. Сплошная линия отвечает случаю $\beta > 0$, штриховая — случаю $\beta < 0$. Используя выражения

$$\left. \begin{aligned} v_{y2}^* - v_{y1}^* &= \Delta v_y^* = \frac{h_2 - h_1}{v_{x1}^*}, \\ \Delta v_x^* &= v_{x2}^* - v_{x1}^* = -v_{x1}^*(1-\eta) = \frac{(h_2 - h_1)z}{v_{x1}^*} = z\Delta v_y^*, \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

которые следуют из (4.41), (4.43), (4.44), нетрудно графически определить общий ход изменения функций $\Delta v_x^* = \Delta v_x^*(h_2)$ и $\Delta v_y^* = \Delta v_y^*(\Delta v_x^*)$ (рис. 23 и 24). При построении графиков было принято, что $v_{x1}^* < 0$, т. е. графики построены для волн, движущихся относительно газа в положительном направлении оси x .

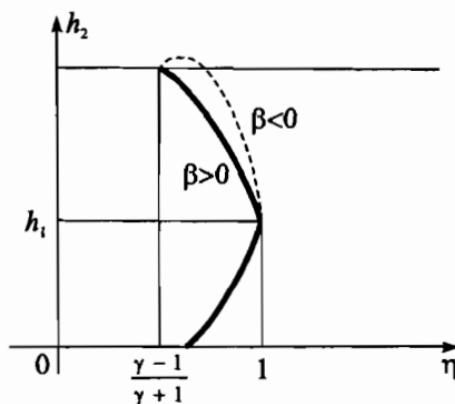


Рис. 22

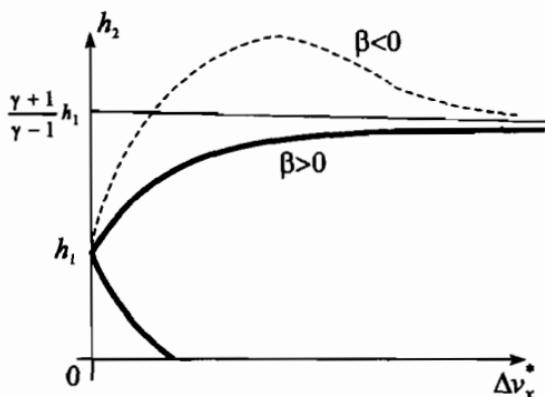


Рис. 23

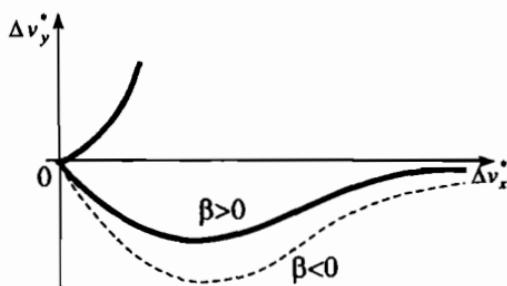


Рис. 24

Как это следует из теории малых возмущений, кривые $\Delta v_y^* = \Delta v_y^*(\Delta v_x^*)$ для быстрой и медленной волн ортогональны в начале координат.

Рассмотрим теперь, что происходит с ударными волнами, когда $h_1 \rightarrow 0$. Прежде всего изучим, как меняется при этом предельном переходе скорость ударных волн v_{xl}^* . В зависимости от знака величины $\gamma P_1 - 1$, который при $h_1 = 0$ совпадает со знаком $\beta \equiv h_1^2 + (\gamma - 1)(\gamma P_1 - 1)$, возможны два предельных случая:

1. $\gamma P_1 > 1$. Имеем

$$\left. \begin{aligned} a_{-,1}^{*2} &\rightarrow 1, \\ a_{+,1}^{*2} &\rightarrow \gamma P_1 \equiv (a_0^{*2})_1 = \frac{a_{01} 4\pi \rho_1}{H_x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

При этом отрезок кривой $v_x^{*2} = v_{xl}^{*2}(h_2)$, представляющий скорости медленных ударных волн, стягивается к точке $v_{xl}^{*2} = 1$, $h_2 = 0$, а отрезок, представляющий скорости быстрых ударных волн, стремится к совпадению с полубесконечным отрезком $[a_0^{*2}, \infty]$ оси v_{xl}^{*2} (рис. 25). Последнее утверждение вытекает из того факта, что кривая $v_x^{*2} = v_{xl}^{*2}(h_2)$ при $P_2 > P_1$ не может пересечь прямую $(\gamma+1)h_1/(\gamma-1)$. Очевидно, что быстрая ударная волна в этом случае стремится к совпадению с газодинамической ударной волной, а интенсивность медленной ударной волны должна стремиться к нулю, так как в противном случае медленная ударная волна в пределе должна была бы обратиться в газодинамическую ударную волну, что невозможно, поскольку ее скорость $a_A < a_0$.

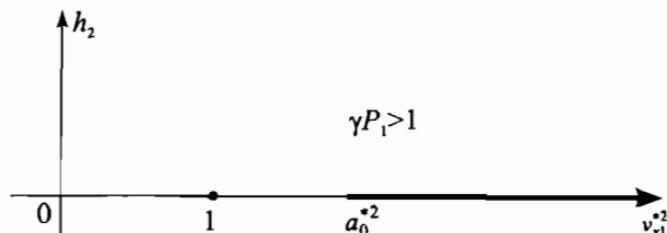


Рис. 25

2. $\gamma P_1 < 1$. Имеем

$$\left. \begin{array}{l} a_-^{*2} \rightarrow \gamma P_1 \equiv a_0^{*2}, \\ a_+^{*2} \rightarrow 1. \end{array} \right\} \quad (4.56)$$

В предельном состоянии отрезок кривой $v_x^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, представляющий медленную ударную волну, совпадает с отрезком $[(a_0^{*2})_1, 1]$ оси v_{x1}^{*2} (рис. 26). Отрезок кривой $v_x^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, соот-

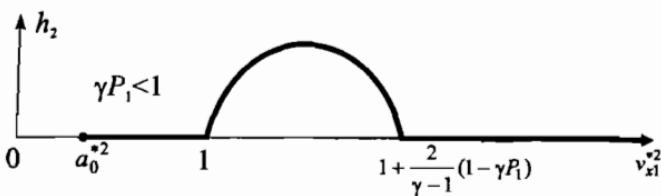


Рис. 26

ветствующий быстрой волне при $h_1 = 0$, имеет часть, не совпадающую с осью v_{x1}^{*2} . Эта часть описывается уравнением

$$v_{x1}^{*2} = 1 + h_2 z = 1 + \frac{1 - \gamma P_1 \pm \sqrt{(1 - \gamma P_1)^2 - (\gamma - 1)h_2^2}}{(\gamma - 1)}. \quad (4.57)$$

Ее концы лежат на оси v_{x1}^{*2} в точках $v_{x1}^{*2} = 1$ и $v_{x1}^{*2} = 1 + 2(1 - \gamma P_1)/\gamma - 1$.

Так как при любом h_1 кривая $v_x^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$ уходит в бесконечность, то очевидно, что при $h_1 = 0$ к кривой $v_x^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$ относится также полу бесконечный отрезок $\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1), \infty\right]$ оси v_{x1}^{*2} . Таким образом, при $h_1 = 0$ и $\gamma P_1 < 1$ медленные ударные волны совпадают с газодинамическими ударными волнами не очень большой интенсивности (такой, что их скорость относительно газа перед волной не превосходит альфеновской). Быстрые ударные волны малой интенсивности, скорость которых относительно газа перед волной не превосходит $a_A \left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1)\right]$, являются магнитогазодинамическими, и

касательная составляющая магнитного поля за ними отлична от нуля. Более мощные быстрые ударные волны совпадают с газодинамическими ударными волнами, движущимися со скоростями, превышающими $a_A \left[1 + \frac{2}{\gamma - 1} (1 - \gamma P_1) \right]$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что газодинамические ударные волны, движущиеся со скоростями $1 < v_{x1}^{*2} < 1 + \frac{2}{\gamma - 1} (1 - \gamma P_1)$, не эволюционны, так как в этом случае выполняются неравенства $v_{x1}^{*2} > 1$ и $v_{x2}^{*2} < 1$. Для обоих случаев ($\gamma P_1 > 1$ и $\gamma P_1 < 1$) нетрудно представить зависимость $\Delta v_y^* = \Delta v_y^* (\Delta v_x^*)$ (см. соответственно рис. 27 и 28), причем в

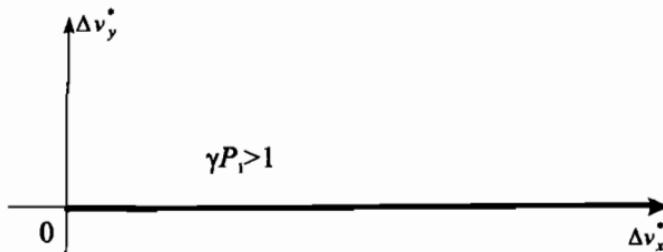


Рис. 27

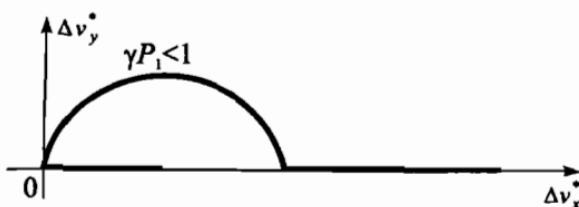


Рис. 28

первом случае отрезок кривой, представляющий медленную волну, вырождается в точку.

Пользуясь полученными соотношениями и качественными зависимостями, можно выяснить характер изменения любой величины в зависимости от интенсивности ударной волны. Например, могут быть построены поляры скорости и магнитного поля, которые были получены другим методом [4, 5].

Глава 5

Нестационарные движения идеального газа

§ 1. Задача о плоском поршне

Пусть в момент времени $t=0$ идеальный газ занимает полупространство $x > 0$ и ограничен при $x = 0$ плоским, бесконечно проводящим поршнем. В начальный момент газ поконится ($v_0=0$), давление и плотность его постоянны ($p = p_0$, $\rho = \rho_0$) и задано однородное магнитное поле ($H = H_0 = H_{x0}e_x + H_{y0}e_y$, $H_{x0} > 0$, $H_{y0} > 0$). В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью $U = U_xe_x + U_ye_y + U_ze_z$. Необходимо найти движение газа в последующие моменты времени $t > 0$ [1, 2, 3, 8, 10, 15]. На поверхности поршня должно быть выполнено условие непротекания и обычные электродинамические граничные условия.

Решение задачи о движении газа в этом случае может зависеть только от определяющих задачу параметров H_0 , U , p_0 , ρ_0 , а также от координаты x и времени t . Так как из этих величин можно составить безразмерные комбинации, в которые x и t входят только в виде отношения x/t , то решение задачи будет зависеть лишь от $\varphi(x,t)=x/t$ и рассматриваемое движение будет автомодельным. Поэтому решение задачи может состоять только из непрерывных простых волн и поверхностей разрыва. При $x/t = k = \text{const}$ все величины постоянны, и на плоскости (x, t) возмущения распространяются вдоль прямых $x = kt$. Отсюда следует, что области, занятые простыми волнами, расширяются с течением времени. А это значит, что непрерывная вращательная волна в решении задачи о поршне присутствовать не может, так как ширина этой волны не меняется с течением времени. Поскольку в простых волнах скорость фазы $k = x/t$ при фиксированном t пропорциональна x , то меньшим x должны соответ-

* См. сноска на стр. 85.

ствовать меньшие скорости фазы волны, что возможно только для волн разрежения. Следовательно, непрерывные решения не могут содержать простых волн сжатия (волны сжатия в момент $t=0$ превращаются в ударные волны). Таким образом, решения задачи о движении плоского поршня с постоянной скоростью могут содержать только простые волны разрежения, вращательные разрывы и ударные волны.

Из условия эволюционности ударных волн следует, что скорость быстрых волн относительно газа перед и за волной удовлетворяет неравенствам $u_1 > a_{1,+}$, $a_{2A} < u_2 < a_{2,+}$, а скорость медленных волн относительно газа — неравенствам $a_{1,-} < u_1 < a_{1A}$, $u_2 < a_{2,-}$. Скорость вращательного разрыва относительно газа перед и за разрывом совпадает с альфвеновской скоростью: $u_1 = u_2 = a_{A1} = a_{A2}$. Скорость движения переднего и заднего фронтов быстрой и медленной простых волн относительно газа совпадает с магнитозвуковыми скоростями, т. е. для быстрых волн $u_1 = a_{1,+}$, $u_2 = a_{2,+}$, а для медленных волн $u_1 = a_{1,-}$, $u_2 = a_{2,-}$.

Соотношения между скоростями различных волн показывают, что решение задачи может состоять только из одной быстрой волны (ударной или волны разрежения), вращательного разрыва и одной из медленных волн (ударной или волны разрежения), которые идут от поршня одна за другой в указанном порядке и разделены между собой интервалами, где параметры газа постоянны. Если последней идет медленная волна разрежения, то плотность газа в ней может упасть до нуля и тогда между поршнем и газом образуется область пустоты.

Рассмотрим пространство скоростей u , v , w . Заданной скорости поршня соответствует в этом пространстве точка. Предположим, что при любой скорости поршня задача о движении газа имеет единственное решение. Тогда каждой точке пространства скоростей соответствует определенное решение задачи, состоящее из некоторого набора волн разрежения, ударных волн и вращательного разрыва. Найдем в пространстве скоростей геометрические места точек скоростей поршня, соответствующих тому или иному набору распространяющихся от поршня волн. Невозмущенному состоянию газа в пространстве скоростей соответствует начало координат.

Сначала решим задачу при условии, что газ граничит с поршнем. В таком случае из граничных условий на поверхности поршня следует, что скорость частиц газа, прилегающих к

поршню, совпадает со скоростью поршня. Действительно, так как поршень и газ бесконечно проводящие, то в системе координат, связанной с поршнем, электрическое поле в поршне равно нулю. Из условия непрерывности касательной составляющей электрического поля на поверхности поршня следует, что в газе, прилегающем к поршню, $E'_\tau = -[c^{-1}(v - U) \times H]_\tau = 0$. Так как $v_n = U_n$ и $H_n \neq 0$, то отсюда следует, что $v = U$.

Если по невозмущенному газу распространяется быстрая волна разрежения, то скоростям газа за этой волной соответствуют в пространстве скоростей точки некоторой кривой OA (рис. 29). Эта кривая, как следует из равенств (3.32) и (3.33) гл. 3, лежит в квадранте $w = 0, u < 0, v > 0$. На плоскости ρ, H_y (см. рис. 7) этой кривой соответствует отрезок интегральной кривой от точки (ρ_0, H_{y0}) до точки, в которой $H_y = 0$. Этой точке на рис. 29 соответствует точка A . Нетрудно убедиться, что касательная к кривой OA в этой точке параллельна оси v .

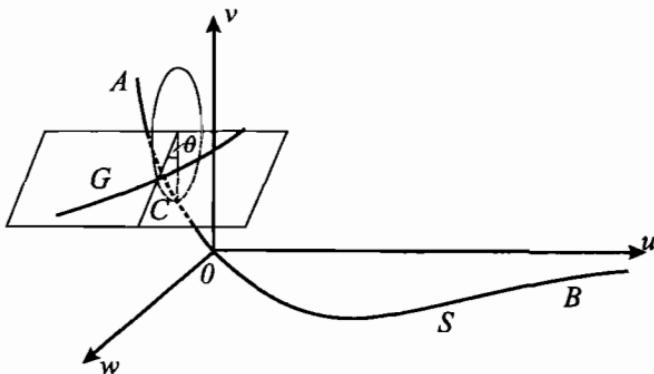


Рис. 29

Если по невозмущенному газу распространяется быстрая ударная волна, то скоростям газа за ней соответствуют точки кривой OB (см. рис. 29). Согласно § 3 гл. 4, кривая OB лежит в квадранте $w = 0, u > 0, v < 0$ и имеет вид, изображенный на рис. 29.

Таким образом, если точка пространства скоростей, соответствующая скорости поршня, лежит на кривой $S = OA + OB$ (см. рис. 29), то решение задачи о поршне содержит только одну быструю волну (разрежения или сжатия).

Если по газу, движущемуся со скоростью $ue_x + ve_y$, распространяется вращательный разрыв, то вследствие того, что во вращательном разрыве изменение касательных составляющих скорости и магнитного поля связаны соотношением

$$\{v_\tau\} = -\{H_\tau\}/\sqrt{4\pi\rho},$$

скорости газа за вращательным разрывом может соответствовать любая точка

$$\left(u, v + \frac{H_y}{\sqrt{4\pi\rho}}(1 - \cos\theta), \frac{H_y}{\sqrt{4\pi\rho}}\sin\theta \right) \quad (5.1)$$

окружности радиуса $H_y/\sqrt{4\pi\rho}$ с центром в точке $(u, v+H_y/\sqrt{4\pi\rho}, 0)$.

При этом вектор $H_\tau = e_y H_y + e_z H_z$ поворачивается на угол θ .

Таким образом, если решение задачи состоит из быстрой волны (ударной или разрежения) и вращательного разрыва, то точки, соответствующие скорости поршня, должны лежать в пространстве скоростей на поверхности Σ (рис. 30), состоящей из окружностей (5.1), построенных для каждой точки кривой S .

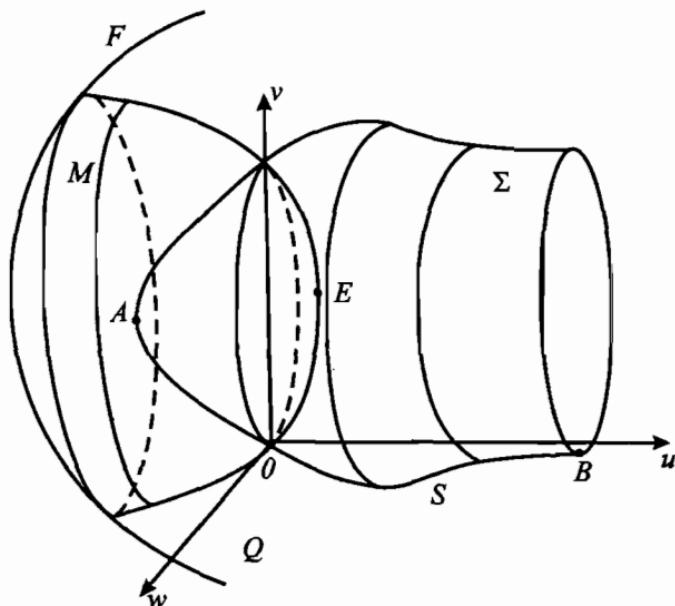


Рис. 30

Если скорость поршня не лежит на поверхности Σ , то в решении задачи должна содержаться медленная волна (ударная или волна разрежения). При этом точки, соответствующие скоростям поршня, при которых решение содержит комбинацию быстрой волны и вращательного разрыва с фиксированными интенсивностями, а также медленную волну, лежат на некоторой кривой G (см. рис. 29), проходящей через точку C на поверхности Σ , соответствующую заданной комбинации быстрой волны и вращательного разрыва. При этом вектор, проведенный из точки C в точку, соответствующую скорости поршня, представляет собой изменение скорости газа, происходящее в медленной волне. Как следует из результатов гл. 3 и 4, это изменение, следовательно, и вся кривая G лежат в плоскости, параллельной оси u и вектору $H_t = e_y H_y + e_z H_z$, направление которого в медленной волне не меняется. Эта плоскость составляет с осью u угол θ (угол, на который поворачивается магнитное поле во вращательном разрыве). Кривые G , непрерывным образом зависящие от точки C , заполняют некоторую область, которую обозначим через Q .

Так как в медленной волне разрежения плотность газа может упасть до нуля, а скорость при этом остается ограниченной, геометрическое место точек концов кривых G , соответствующих равной нулю плотности, образует поверхность F (см. рис. 30), являющуюся границей области Q . Другие концы кривых G , соответствующие медленным ударным волнам максимальной интенсивности (за которыми магнитное поле нормально к волне), сходятся к некоторой линии, лежащей внутри поверхности Σ . Для доказательства этого утверждения покажем, что все кривые G , проходящие через точки одной и той же окружности (5.1), сходятся к одной точке. Действительно, поскольку медленная ударная волна максимальной интенсивности движется с альфеновской скоростью по газу перед волной, из сохранения касательной составляющей импульса следует соотношение $\{v_t\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \{H_t\}$, которое выполняется как на удар-

ной волне, так и на вращательном разрыве. А вследствие того, что изменение касательной составляющей магнитного поля в такой волне равно половине изменения магнитного поля во вращательном разрыве, поворачивающем поле на 180° , измене-

ние v составит половину диаметра окружности (5.1) и все кривые G , вышедшие из этой окружности, сойдутся в некоторой точке, лежащей на прямой, параллельной u , и проходящей через центр окружности (5.1). Может показаться, что при скоростях поршня, соответствующих одной из точек, в которой сходятся кривые G , отсутствует единственность решения, так как интенсивность вращательного разрыва в этом случае не определена. Однако вращательный разрыв при этом фактически не входит в решение задачи, поскольку скорость его движения совпадает со скоростью медленной ударной волны и эти две поверхности разрыва представляют, по существу, одну поверхность разрыва, которая является медленной ударной волной.

Если точка, соответствующая скорости поршня, принадлежит области Q , то существует решение задачи, в котором газ граничит с поршнем; в противном случае в окрестности поршня имеется пустота.

Очевидно, что кривая G , соответствующая медленной волне, не может пересекать поверхность Σ в точке, отличной от исходной, ибо в противном случае для скорости поршня, соответствующей этой точке, существовало бы два решения: одно — содержащее медленную волну, а другое — не содержащее, что противоречит предположению о единственности решения.

Так как поверхность F не пересекается с поверхностью Σ и лежит вне поверхности Σ , то отсюда следует, что точкам области Q , лежащим вне Σ , соответствуют решения, содержащие медленные волны разрежения. Точкам же внутри поверхности Σ могут соответствовать только решения, содержащие медленные волны.

Для того чтобы при заданной скорости поршня определить характер быстрой волны, рассмотрим поверхность M (см. рис. 30), состоящую из точек, соответствующих скоростям поршня, при которых решение содержит только вращательный разрыв и медленную волну (ударную или разрежения). Очевидно, что эта поверхность является поверхностью вращения с осью симметрии

$$w = 0, \quad v = H_{y0} / \sqrt{4\pi\rho_0}.$$

Точка E поверхности M , лежащая на оси симметрии, соответствует скорости поршня, при которой в решении присутствует вращательный разрыв произвольной интенсивности и

медленная ударная волна максимальной интенсивности, слившиеся друг с другом. Если точка, соответствующая скорости поршня, лежит в ограниченной области между поверхностями M и F , то быстрая волна является волной разрежения, если же скорость поршня лежит вне этой области (но в области $\rho > 0$), то быстрая волна является ударной. Если между поршнем и газом имеется пустота, то в ней электрическое и магнитное поле постоянны, так как единственным автомодельным решением (зависящим от x/t) уравнений Максвелла в пустоте для области $x < ct$ является постоянное электромагнитное поле. Магнитное поле на границе газа с пустотой должно быть непрерывным, ибо в противном случае при $H_x \neq 0$ на этой поверхности существовал бы разрыв касательных напряжений. Поэтому скорость поршня U и скорость газа на границе с вакуумом v должны быть связаны соотношением $(U \times H)_\tau = (v \times H)_\tau$, которое выражает непрерывность касательных составляющих электрического поля на поверхности разрыва. Так как $H_x \neq 0$, то из последнего равенства следует

$$(U - v) \times H = 0. \quad (5.2)$$

Таким образом, если интенсивности всех волн зафиксированы и между газом и поршнем имеется пустота, то точки, соответствующие скорости поршня, должны лежать на прямой, параллельной магнитному полю в пустой области между поршнем и газом, выходящей из точки поверхности $\rho = 0$, характеризующей состояние газа на границе с пустотой.

Построенная диаграмма (см. рис. 30) позволяет по заданной скорости поршня определить комбинацию возникающих при его движении волн, что облегчает численное решение задачи об определении их интенсивностей.

§ 2. Распад произвольного разрыва

Пусть в момент времени $t = 0$ величины p , ρ , H , v терпят разрыв на плоскости $x = 0$. Если на этой плоскости не выполняются соотношения законов сохранения, начальный разрыв не может существовать. Необходимо определить движение газа в последующие моменты времени [4, 9, 15].

К задаче о распаде произвольного разрыва сводятся многочисленные задачи о столкновениях масс газа, движущихся

навстречу друг другу, о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов, о разлете масс газа друг от друга и др. Будем в дальнейшем предполагать, что на первоначальном разрыве $H_x \neq 0$, так как в противном случае задача сводится к газодинамической (см. § 4 гл. 1).

Из автомодельности задачи следует, что движение должно состоять из идущих в обе стороны различных комбинаций быстрых S^+ и медленных S^- ударных волн, быстрых R^+ и медленных R^- автомодельных простых волн, вращательных разрывов A и контактного разрыва T . Символы S^+ , S^- , R^+ , R^- , A , T обозначают соответствующие волны и разрывы. Скорость распространения этих волн такова, что впереди идет волна S^+ или R^+ , за ней разрыв A , за которым следует волна S^- или R^- . Таким образом, в обе стороны могут идти по три волны, а на месте первоначального разрыва остается контактный разрыв, неподвижный относительно газа. Схематически решение задачи о распаде произвольного разрыва изображено на рис. 31.

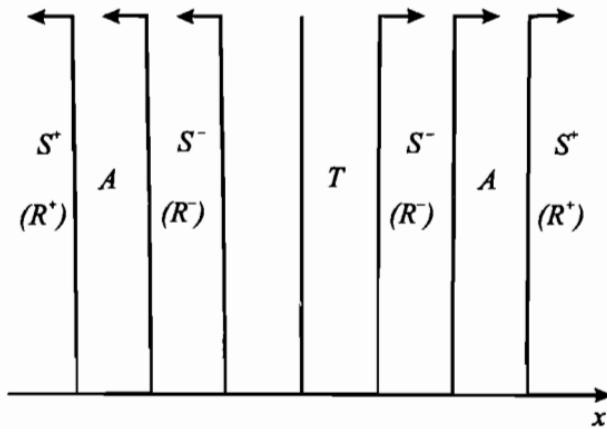


Рис. 31

Параметры, характеризующие среду, а также скорость и магнитное поле в начальный момент времени, будем обозначать индексом 0. Величины, относящиеся к области, расположенной в начальный момент справа от плоскости разрыва, а в последующие моменты времени справа от плоскости контактного разрыва, имеют штрих. Величины, относящиеся к области, расположенной слева

от контактного разрыва, не имеют штрих. Величины, относящиеся к области за быстрой волной, идущей влево или вправо, будем обозначаться индексом 1, за вращательным разрывом — индексом 2, за медленной волной — индексом 3.

В дальнейшем выясним, какие волны возникают при распаде произвольного разрыва в зависимости от величины начального разрыва скорости $\Delta u = u_0 - u'_0$, $\Delta v_0 = v_0 - v'_0$, $\Delta w = w_0 - w'_0$ при фиксированных $\rho_0, \rho'_0, p_0, p'_0, H_0, H'_0$. В результате пространство начальных разностей скоростей $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ будет разбито на ряд областей, так что комбинация волн, возникающих при распаде начального разрыва, будет зависеть от того, в какую из них попадает точка, соответствующая начальной разности скоростей.

Выясним прежде всего, при каких условиях произвольный разрыв распадается на две ударные или простые волны и контактный разрыв. На контактном разрыве должны быть непрерывны магнитное поле, скорость и давление. Так как в ударных и простых волнах движение можно считать плоским, то очевидно, что для возможности осуществления описанного выше распада начального разрыва необходимо, чтобы векторы H_0, H'_0 и Δv , лежали в одной плоскости, которую примем за плоскость (x, y) . Рассмотрим плоскость переменных H_y и p (рис. 32). Через

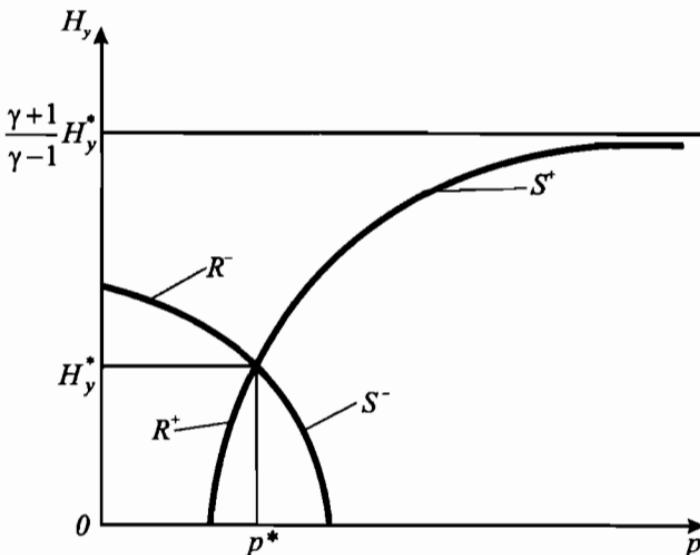


Рис. 32

каждую точку H_y^* , p^* этой плоскости можно провести кривые $p = p_{S^+}(H_y, H_y^*, p^*)$, $p = p_{R^+}(H_y, H_y^*, p^*)$, $p = p_{S^-}(H_y, H_y^*, p^*)$ и $p = p_{R^-}(H_y, H_y^*, p^*)$, изображающие зависимости p от H_y соответственно в S^+ , R^+ -, S^- - и R^- -волнах. Пары кривых $p = p_{S^+}$ и $p = p_{R^+}$, $p = p_{S^-}$ и $p = p_{R^-}$ являются продолжением одна другой. Так как на контактном разрыве p и H_y должны быть непрерывны, то на плоскости p и H_y контактному разрыву должна соответствовать либо точка пересечения двух кривых $p = p(H_y, H_y^*, p^*)$, причем одна из них имеет в качестве начальной точку (p_0, H_{y0}) , а другая — точку (p'_0, H'_{y0}) , либо одна из точек (p_0, H_{y0}) или (p'_0, H'_{y0}) (последний случай имеет место, когда обе волны распространяются в одну сторону от поверхности начального разрыва). Точки (p_0, H_{y0}) , (p'_0, H'_{y0}) на плоскости (p, H_y) могут располагаться различным образом.

Рассмотрим более подробно случай, когда

$H_{y0} > H'_{y0} > 0$, $p_0 > p_{S^+}(H_{y0}, H'_{y0}, p'_0)$, $p'_0 < p_{R^+}(H'_{y0}, H_{y0}, p_0)$, изображенный на рис. 33 (остальные случаи взаимного расположения точек (p_0, H_{y0}) и (p'_0, H'_{y0}) могут быть исследованы аналогично). Как видно из рис. 33, возможны следующие комбинации волн, решающие задачу о распаде начально-го разрыва:

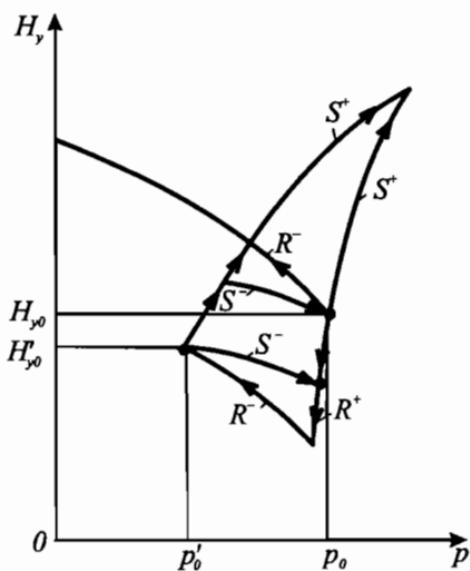


Рис. 33

$$R^-TS^+, R^+TS^-, S^+TS^+, R^+R^-T, TS^-S^+. \quad (5.3)$$

Здесь предполагалось, что кривые $p = p_{S^+}(H_y, H_{y0}, p_0)$ и $p = p_{S^-}(H_y, H_{y0}, p_0)$ не пересекаются, а кривые $p = p_{S^+}(H_y, H'_{y0}, p'_0)$ и $p = p_{S^-}(H_y, H'_{y0}, p'_0)$ пересекаются один раз. Условия для других возможных случаев не исследованы.

В комбинациях (5.3) интенсивности входящих в них волн однозначно определены значениями величин p_0 , H_{y0} , p'_0 , H'_{y0} . Поэтому каждой из рассмотренных комбинаций соответствует вполне определенная величина начального разрыва скорости Δu , Δv . Эти значения определяют на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ пять точек (рис. 34, где около каждой из этих точек написана комбинация волн (5.3), которой она соответствует).

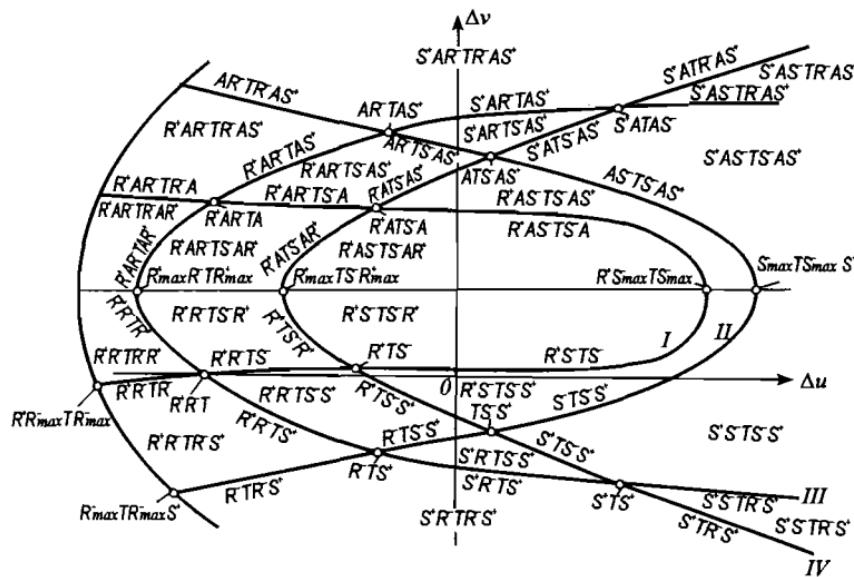


Рис. 34

Рассмотрим теперь случаи, когда решение задачи о распаде начального разрыва состоит из трех ударных или простых волн и контактного разрыва. Покажем, что в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ комбинации такого типа соответствует линия. Рассмотрим в качестве примера комбинацию $R^-TR^-S^+$.

Характер изменения давления и магнитного поля в волнах, составляющих эту комбинацию, показан на рис. 35 (ломаная линия $DBGC$). Контактному разрыву соответствует в этом случае точка B , лежащая на кривой R^- , выходящей из точки (p_0, H_{0y}) . Решение задачи о распаде начального разрыва при заданных $p_0, p'_0, H_{0y}, H'_{y0}$ возможно при любом положении точки B на кривой $p = p_R^-(H_y, H_{y0}, p_0)$. Каждому положению точки B , кото-

рое мы будем задавать значением давления $p_3 = p'_3$ в этой точке, соответствуют определенные интенсивности всех волн, составляющих рассматриваемую комбинацию, а следовательно, определенные значения Δu и Δv , т. е. точка на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$. Меняя p_3 на плоскости начальных разрывов скорости, получим кривую.

Очевидно, что сумма изменений компонент скорости в каждой из волн, составляющих комбинацию, равна начальному разрыву скоростей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= u_0 - u'_0 = -|\Delta u_{R^-}| - |\Delta u'_{R^-}| + |\Delta u'_{S^+}|, \\ \Delta v &= v_0 - v'_0 = -|\Delta v_{R^-}| - |\Delta v'_{R^-}| - |\Delta v'_{S^+}|. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

В этих выражениях знаки поставлены с учетом того, что каждый член представляет собой разность скоростей слева и справа от волны. Интенсивность ударной волны в этой комбинации фиксирована (рис. 35). Интенсивности же волн разрежения связаны

между собой и возрастают с уменьшением давления на контактном разрыве. При этом, как следует из (5.4), Δu и Δv убывают, т.е. на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ кривая, соответствующая рассматриваемой комбинации, имеет положительный наклон. Если интенсивность идущей вправо R^- -волны равна нулю, то рассматриваемая комбинация переходит в комбинацию R^-TS^+ , состоящую из двух волн и контактного разрыва. Таким образом, кривая, соответствующая комбинации $R^-TR^-S^+$, проходит на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ через точку, со-

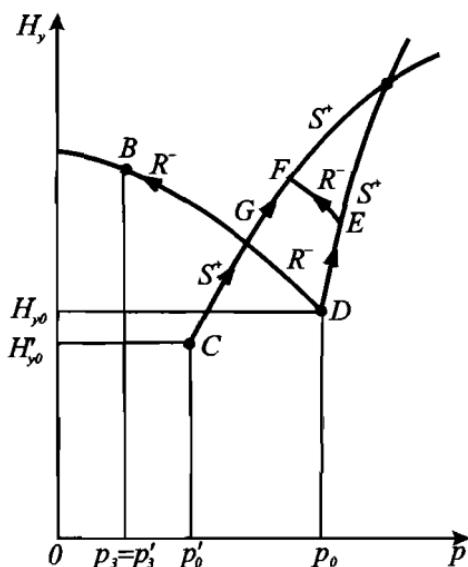


Рис. 35

ответствующую комбинации R^-TS^+ (см. рис. 34). Когда интенсивность волн разрежения максимальна ($p_3 = 0$), на плоскости

$(\Delta u, \Delta v)$ получаем точку, которой соответствует комбинация $R_{\max}^- TR_{\max}^- S^+$. При этом после прохождения волн разрежения образуется пустота.

Нетрудно видеть, что в точке $R^- TS^+$, помимо линии $R^- TR^- S^+$, оканчиваются линии, которым соответствуют комбинации $R^+ R^- TS^+, S^+ R^- TS^+, R^- TS^- S^+$, когда интенсивность соответствующих волн равна нулю. Из уравнений этих линий, составленных аналогично уравнениям (5.4), следует, что они расположены так, как показано на рис. 34.

Выясним теперь, где оканчивается линия $S^+ R^- TS^+$, выходящая из точки $R^- TS^+$. Из рис. 35 (ломаная $DEFC$) видно, что при движении по этой линии (на рис. 35 этому соответствует изменение положения точек F и E) интенсивность R^- -волны уменьшается до нуля. Таким образом, линия $S^+ R^- TS$ приходит в точку, соответствующую комбинации $S^+ TS^+$. Из аналогичных рассуждений следует, что линии $R^+ R^- TS^+$ и $R^- TS^- S^+$ оканчиваются соответственно в точках, которым соответствуют комбинации $R^+ R^- T$ и $T S^- S^+$. Во все эти точки могут приходить еще по три линии и т. д.

Из сказанного следует, что комбинациям, состоящим из трех ударных или автомодельных волн и контактного разрыва в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$, соответствуют линии. Точкам пересечения линий соответствуют рассмотренные выше комбинации, состоящие из двух ударных или автомодельных волн и контактного разрыва. Каждая такая точка отделяет одну линию от другой. Некоторые линии, например $S^+ S^- TS^+, S^+ TR^- S^+$, могут простираться до бесконечности. Кроме того, линии могут оканчиваться в точках, соответствующих максимальной интенсивности некоторых из входящих в комбинации волн. Так, например, линии $R^+ R^- TR^+, S^- TS^- S^+, R^+ TS^- R^+$ и $R^+ S^- TS^-$ оканчиваются в точках $R_{\max}^+ R^- TR_{\max}^+, S_{\max}^- TS_{\max}^- S^+, R_{\max}^+ TS^- R_{\max}^+$ и $R^+ S_{\max}^- TS_{\max}^-$, где интенсивность волн максимальна, т.е. тангенциальная составляющая магнитного поля за волнами R^+ или S^- равна нулю. Линии же $R^+ R^- TR^-$ и $R^- TR^- S^+$ заканчиваются в точках $R_{\max}^+ R^- TR_{\max}^-$ и $R_{\max}^- TR_{\max}^- S^+$, где интенсивность волн R^- максимальна и, следовательно, $\rho = 0$. Будем говорить, что точки $R_{\max}^+ R^- TR_{\max}^+$, $R_{\max}^+ TS^- R_{\max}^+$, $S_{\max}^- TS_{\max}^- S^+$, и $R^+ S_{\max}^- TS_{\max}^-$ принадлежат линии

центров, а точки $R^+ R_{\max}^- TR_{\max}^-$, $R_{\max}^- TR_{\max}^- S^+$ — линии вакуума. Смысл этих выражений станет ясен из дальнейшего.

Линии, соответствующие некоторым из рассмотренных комбинаций, являются продолжением одна другой и образуют на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ четыре кривые (I—IV на рис. 34). Например, кривая I состоит из линий, соответствующих комбинациям $R^+ R^- TR^-$, $R^+ R^- TS^-$, $R^+ S^- TS^-$. Исследуя наклон кривых I—IV, легко убедиться в том, что максимальной ординатой каждой кривой являются точки линии центров.

Нетрудно видеть, что комбинациям, состоящим из четырех волн и контактного разрыва, в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ соответствуют области, так как в каждой комбинации из четырех волн и контактного разрыва Δu и Δv зависят от двух независимых параметров. Рассмотренные ранее линии, соответствующие комбинациям из трех ударных или простых волн и контактного разрыва, являются границами этих областей. Кроме того, границами данных областей являются линии, на которых некоторые из входящих в комбинацию волн достигают максимальной интенсивности. К таким линиям относятся линия центров, на которой достигают максимальной интенсивности волны R^+ - или S^- и линия вакуума, на которой максимальной интенсивности достигают волны R^- .

На рис. 34 в каждой из областей обозначена комбинация волн, возникающая при распаде начального разрыва, когда точка, соответствующая начальному разрыву скорости, принадлежит данной области.

Для завершения качественного исследования задачи рассмотрим случаи, когда решение задачи о распаде начального разрыва содержит вращательные разрывы. Так как касательная составляющая магнитного поля H_t поворачивается только во вращательных разрывах, то углы поворота H_t во вращательных разрывах, идущих вправо и влево, связаны соотношением

$$\theta - \theta' = \alpha, \quad (5.5)$$

где α — угол между H_{t0} и H'_{t0} .

Выясним прежде всего, при каких Δu , Δv и Δw решение задачи о распаде начального разрыва содержит три ударных или простых волны, а также вращательные и тангенциальные разрывы. Рассмотрим в качестве примера комбинацию $AR^- TR^- AS^+$. Так как изменение H_t , и давления p в ударных и простых волнах

не зависит от направления вектора H_τ , то интенсивности волн R^- , S^+ , входящих в указанную комбинацию, определяются так же, как в плоском случае (см. рис. 35). Таким образом, при фиксированных p_0 , p'_0 , $H_{\tau 0}$, $H'_{\tau 0}$ интенсивность волны S^+ в рассматриваемой комбинации фиксирована, а интенсивности волн R^- связаны между собой, причем интенсивность одной из них можно считать произвольной. Кроме того, в исследуемой комбинации имеется еще один произвольный параметр, характеризующий угол поворота вектора H_τ в одном из вращательных разрывов (угол поворота вектора H_τ в другом вращательном разрыве определяется соотношением (5.4)). Следовательно, в пространстве $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ комбинации $AR^-TR^-AS^+$ соответствует некоторая поверхность. Начальный разрыв скорости складывается из изменений скоростей в каждой из волн, составляющих комбинацию:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= +|\Delta u_{R^-}| - |\Delta u'_{R^-}| + |\Delta u'_{S^+}|, \\ \Delta v_\tau &= \Delta v e_y + \Delta w e_z = \\ &= \frac{H_{\tau 2} - H_{\tau 0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} - \frac{H_{\tau 2}}{H_{\tau 2}} |\Delta v_{\tau R^-}| - \frac{H'_{\tau 2}}{H_{\tau 2}} |\Delta v'_{\tau R^-}| + \frac{H'_{\tau 1} + H'_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - \frac{H'_{\tau 0}}{H'_{\tau 0}} |\Delta v'_{\tau S^+}|. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

При фиксированных интенсивностях ударной волны и волн разрежения уравнения (5.6) определяют в пространстве $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ окружность радиуса

$$R = \frac{H_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho_1}} + \frac{H'_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - |\Delta v'_{\tau R^-}| - |\Delta v_{\tau R^-}|, \quad (5.7)$$

лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси Δu . Центр ее находится в точке

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= L_x \equiv -|\Delta u_{R^-}| - |\Delta u'_{R^-}| + |\Delta u'_{S^+}|, \\ L_\tau &\equiv -\frac{H_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho_1}} - \frac{H'_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - \frac{H'_{\tau 0}}{H'_{\tau 0}} |\Delta v'_{\tau S^+}|. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Таким образом, каждой из линий, изученных в плоском случае, в пространственном случае можно поставить в соответствие поверхности типа (5.6), отвечающие комбинациям, состо-

ящим из тех же ударных и простых волн и вращательных разрывов. Линии вакуума при этом соответствует поверхность вакуума. Эти поверхности разбивают пространство (Δu , Δv , Δw) на области, точкам которых соответствует одна и та же комбинация волн в задаче о распаде начального разрыва.

Рассмотрим случай, когда векторы H_t и H'_t параллельны ($\alpha = 0$). Выберем это направление за ось u . Тогда $L_z = 0$, т. е. центр окружности лежит в плоскости (Δu , Δv). Сечения поверхности типа (5.6) плоскостью $w = 0$ являются в данном случае линиями, соответствующими комбинациям, содержащим три ударных или простых волны, тангенциальный разрыв и, возможно, вращательные разрывы, поворачивающие касательную составляющую магнитного поля на 180° .

Если H_{t0} и H'_{t0} одинаково направлены, то в комбинации могут присутствовать либо два вращательных разрыва, либо ни одного. Кривые, соответствующие комбинациям без вращательных разрывов, исследованы ранее. Каждой кривой, отвечающей комбинации без вращательных разрывов, можно поставить в соответствие кривую, отвечающую комбинации тех же простых и ударных волн с вращательными разрывами.

Точки этих кривых при одном и том же Δu одинаково удалены от центров окружностей (5.8). Можно показать, что центры этих окружностей составляют линию центров на плоскости (Δu , Δv), рассмотренную ранее. Если $\Delta w = 0$ и векторы H_{t0} и H'_{t0} имеют противоположное направление, то в каждую комбинацию волн входит один вращательный разрыв. Исследование этого случая можно провести аналогичным образом.

Если точка в пространстве (Δu , Δv , Δw), соответствующая начальному разрыву скоростей, лежит за поверхностью вакуума, то необходимо дополнительное исследование. За идущими в обе стороны волнами R^- максимальной интенсивности образуется пустота. На границе с пустотой выполняются соотношения $p = 0$, $\{E_t\} = 0$, $\{H_t\} = 0$. Но в силу бесконечной проводимости среды $E_{t3} = -c^{-1}(v_3 \times H_3)_t$, а $E'_{t3} = -c^{-1}(v'_3 \times H'_3)_t$. В пустоте в силу автомодельности задачи векторы E и H постоянны. Аналогично изложенному в предыдущем разделе можно показать, что

$$(v_3 - v'_3) \times H_3 = 0. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.79) описывает прямую в пространстве (Δu , Δv , Δw). Из каждой точки поверхности вакуума можно провести

прямые (5.9). Таким образом, если точка, соответствующая начальному разрыву скоростей, находится за поверхностью вакуума, то в решении задачи о распаде начального разрыва возникает область пустоты и границы ее движутся со скоростями, разность которых представляется отрезком прямой (5.9) от точки, соответствующей начальному разрыву скоростей, до поверхности вакуума.

§ 3. Распространение слабых ударных волн и слабых разрывов в пространстве

Пусть имеется некоторое магнитогидродинамическое течение:

$$\begin{aligned} v_0(r, t), \quad H_0(r, t), \quad \rho_0(r, t), \quad p_0(r, t), \\ r = xe_x + ye_y + ze_z \end{aligned}$$

Исследуем распространение по этому течению фронтов слабых разрывов, а также фронтов сильных разрывов, интенсивность которых достаточно мала, так что нормальную составляющую скорости такого разрыва относительно жидкости можно считать совпадающей с одной из скоростей малых возмущений [16, 17]. Уравнение движущейся поверхности разрыва будем искать в виде

$$w(r) = t - t_0, \quad (5.10)$$

где $w(r)$ – функция, подлежащая определению. При этом поверхность $w(r) = 0$ должна совпадать с начальной поверхностью разрыва Σ , которую будем считать известной. Таким образом,

$$w(r)|_{\Sigma} = 0.$$

Обозначим

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad} w, \quad q_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}. \quad (5.11)$$

Так как нормальная составляющая скорости распространения поверхности разрыва (5.10) относительно газа равна одной из скоростей распространения малых возмущений, то

$$[v_{0n}(r, t) \pm a_i(r, t, \mathbf{n})] = 1/q. \quad (5.12)$$

Здесь $v_{0n}(r, t)$ – нормальная к поверхности составляющая скорости $v_0(r, t)$ основного течения, а $a_i(r, t, \mathbf{n})$ – одна из скоростей

малых возмущений. Скорость a_i зависит не только от параметров основного потока, но и от направления нормали n к поверхности разрыва. Так как $n = q/q$, то уравнение (5.13) может быть записано в виде

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, w + t_0) - 1 \pm qa_i(\mathbf{r}, w + t_0, q/q) = 0. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14), являющееся уравнением в частных производных первого порядка, совместно с граничным условием (5.11) служит для определения функции $w(\mathbf{r})$.

Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка [13], для решения такой задачи необходимо проинтегрировать характеристическую систему уравнений:

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dw}{ds} = \sum_\alpha q_\alpha \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dq_\alpha}{ds} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial w} q_\alpha \right), \quad (5.15)$$

где через $F(\mathbf{r}, w, q)$ обозначена функция, стоящая в левой части уравнения (5.14), а s — параметр вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, которая находится при интегрировании системы (5.15) наряду с функциями $w(s)$ и $q(s)$. В рассматриваемом случае из первой группы уравнений системы (5.15) получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{v}_0 \pm (a_i n + q \operatorname{grad}_q a_i), \quad (5.16)$$

где через $\operatorname{grad}_q a_i$ обозначен вектор $e_\alpha da_i / dq_\alpha$, который ортогонален к n (так как a_i зависит от q_α только через $n = q/q$). Вектор $q \operatorname{grad}_q a_i$ представляет собой градиент от a_i взятый по n_α , когда конец вектора n остается на поверхности единичной сферы:

$$q \operatorname{grad}_q a_i \equiv \operatorname{grad}_{|n|=1} a_i.$$

Второе равенство (5.15) в силу (5.16) и (5.14) преобразуется к виду

$$\frac{dw}{ds} = \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0 \pm qa_i = 1, \quad (5.17)$$

т. е. в качестве параметра s на интегральной кривой системы (5.15) можно принять $w = t - t_0$.

Кривые $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ могут быть проведены из каждой точки \mathbf{r}

поверхности Σ , так как координаты этой точки x_α , совместно с выражениями

$$w = 0, \quad \mathbf{q} = q \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{v_{0n}(\mathbf{r}, t_0) \pm a_i(\mathbf{r}, t_0, \mathbf{n})} \quad (5.18)$$

представляют собой начальные данные, необходимые для интегрирования системы (5.15). Для того чтобы найти положение поверхности разрыва в момент времени t , необходимо на каждой такой кривой взять точку \mathbf{r} , в которой $w = t - t_0$. Совокупность этих точек и образует поверхность разрыва в момент t , причем вектор нормали к ней в некоторой точке \mathbf{r} выражается через найденное при интегрировании системы (5.15) значение q_i в этой точке ($\mathbf{n} = \mathbf{q}/q$). Очевидно, что при этом каждый элемент поверхности разрыва перемещается независимо от остальных, причем траекторией его движения является кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(w)$, а вектор нормали к поверхности есть $\mathbf{q}(w)/q(w)$.

Если поверхность разрыва Σ в начальный момент не является волной какого-либо определенного типа, то в следующий момент времени она должна распасться на несколько поверхностей различного типа, каждая из которых будет двигаться указанным выше образом.

Рассмотрим подробнее простейший случай, а именно, пусть

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{r}, t) &= 0, & H_0(\mathbf{r}, t) &= \text{const}, \\ \rho_0(\mathbf{r}, t) &= \text{const}, & p_0(\mathbf{r}, t) &= \text{const}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

При этом уравнения (5.14) и (5.15) приобретают соответственно вид

$$qa_i \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right) = \pm 1, \quad (5.20)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dw} = \pm (a_i \mathbf{n} + \text{grad}_{|\mathbf{n}|=1} a_i), \quad \frac{d\mathbf{q}}{dw} = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом, в исследуемом случае каждый элемент поверхности разрыва перемещается, не вращаясь ($d\mathbf{q}/dw = 0$), с постоянной скоростью $\pm (a_i \mathbf{n} + \text{grad}_{|\mathbf{n}|=1} a_i)$, причем нормальная к разрыву составляющая этой скорости равна a_i . Это позволяет применять следующий способ построения поверхности

разрыва в момент времени t . Проведем всевозможные касательные плоскости к поверхности разрыва в начальный момент времени t_0 . Затем, переместив эти плоскости в направлении нормали на расстояние $a_i(t - t_0)$, найдем для них огибающую поверхность. Эта огибающая поверхность и является поверхностью разрыва в момент времени t .

Построим таким способом для момента времени $t = t_0 + 1$ поверхность разрыва, которая получается из начальной поверхности разрыва, сосредоточенной вблизи начала координат. Будем считать, что размеры начальной поверхности разрыва пренебрежимо малы по сравнению с характерным размером задачи, который при $t - t_0 = 1$ имеет порядок a_i . Так как в этом случае поверхности разрыва должны обладать осевой симметрией с осью симметрии, параллельной H , то достаточно построить линии разрыва на плоскости, проходящей через H , которые являются линиями пересечения поверхностей разрыва с этой плоскостью. Откладывая в этой плоскости от начала координат векторы $na_i(n)$ и считая, что начальная поверхность разрыва такова, что содержит всевозможные ориентированные элементы, получим, что концы этих векторов образуют кривые, совпадающие с диаграммой скоростей малых возмущений для быстрых и медленных волн (кривые l_+ и l_- на рис. 36). Для

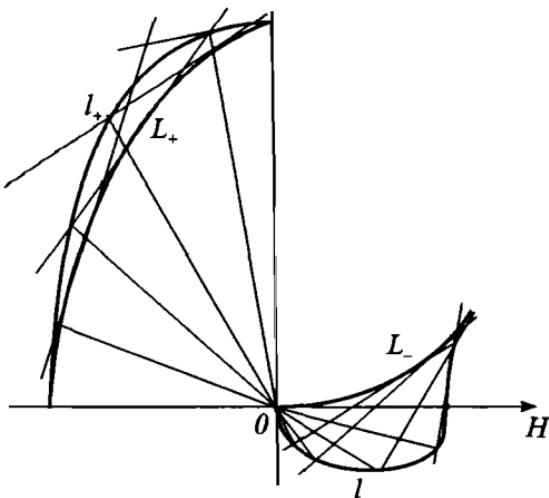


Рис. 36

построения линий разрыва необходимо через концы векторов $na_i(n)$ провести перпендикулярно к ним прямые и найти огибающую этих прямых.

Поскольку $a_3=0$, то очевидно, что линия энтропийного разрыва будет в любой момент времени совпадать с линией начального разрыва, т.е. в рассматриваемом приближении будет неподвижной точкой. Линия альфеновского разрыва будет представлять собой точки с координатами $\pm H/\sqrt{4\pi\rho}$, так как прямые, огибающими которых должны быть линии разрыва, в данном случае пересекаются в этих точках. Отсюда следует, что скорость произвольно ориентированного элемента энтропийного разрыва равна нулю, а скорость произвольно ориентированного элемента альфеновского разрыва равна $\pm H/\sqrt{4\pi\rho}$. Эти результаты следуют также непосредственно из равенства (5.21) при подстановке $a_3 = 0$ и $a_A = \pm H/\sqrt{4\pi\rho}$.

Построение линий быстрых и медленных магнитозвуковых разрывов (линии L_+ и L_-), возникающих из точечного возмущения, проведено на рис. 36. Полная картина линий разрыва, возникающих из точечного возмущения, изображена на рис. 37. Поверхности разрыва, которые являются поверхностями вращения линий разрыва вокруг H , обладают следующими свойствами [16]. Внешняя поверхность разрыва, которая является быстрой магнитозвуковой волной, представляет собой выпуклую осесимметричную поверхность. Медленный магнитозвуковой разрыв сосредоточен на поверхности, образованной вращением двух криволинейных треугольников $C DN$ и $CD'N'$ вокруг их оси сим-

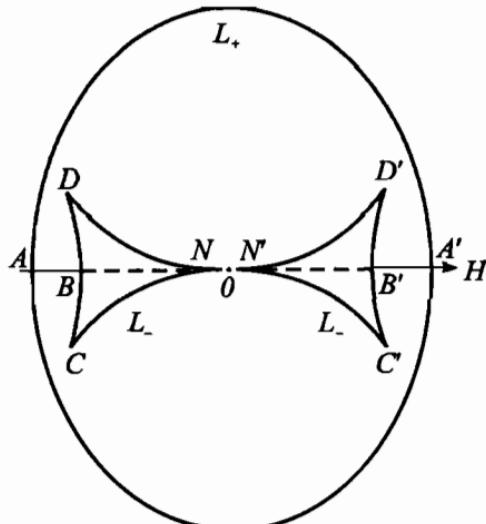


Рис. 37

метрии. Эти треугольники имеют точки возврата в вершинах и лежат целиком внутри внешней поверхности разрыва. Кривые, образующие стороны треугольников, обращены выпуклостью внутрь. Точки, представляющие альфеновские разрывы, лежат при $H/\sqrt{4\pi\rho} > a_0$ на внешней поверхности (точки A и A'), а при $a_0 > H/\sqrt{4\pi\rho}$ — на внутренних поверхностях (точки B и B'). При $a_0 \rightarrow H/\sqrt{4\pi\rho}$ поверхности, образованные вращением сторон CD и $C'D'$ треугольников CDN и $C'D'N'$, стремятся к совпадению с некоторым участком внешней поверхности разрыва. При совпадении этих поверхностей образуются куски плоскостей, ограниченные окружностями. Точки, представляющие альфеновские возмущения, лежат при этом в центрах этих окружностей.

Отметим, что приведенный метод построения поверхностей разрыва не всегда может быть применен к элементам поверхности разрыва, которые представляют собой два фронта разрывов различных типов, слившихся вследствие совпадения скорости распространения в данном направлении. В этом случае могут существовать плоские поверхности разрыва, расширяющиеся с течением времени. Выше путем предельного перехода было рассмотрено распространение разрывов в том случае, когда в направлении магнитного поля совпадают скорости быстрых, медленных и альфеновских возмущений. Кроме этого, в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, всегда совпадают скорости распространения медленных и альфеновских возмущений ($a_- = a_A = 0$). Этот случай не может быть рассмотрен путем предельного перехода. Исследование распространения поверхностей разрывов от точечного возмущения показывает [17], что на оси симметрии в направлении магнитного поля имеется разрыв между точками, соответствующими альфеновским возмущениям. В плоском случае, когда все величины зависят от двух координат, а возмущения скорости и магнитного поля в направлении третьей оси равны нулю, этот разрыв заключен между точками N и N' (см. рис. 37). Построенные выше поверхности разрыва, распространяющиеся от точечного возмущения, могут служить для определения скоро-

сти $\frac{d\mathbf{r}}{dw} = \pm (a_i \mathbf{n} + \text{grad}_{|\mathbf{n}|=1} a_i)$ движения элемента поверхности

разрыва с нормалью n . Для этого на построенной поверхности разрыва нужно найти точку с нормалью n , тогда радиус-вектор, проведенный в эту точку, даст скорость движения рассматриваемого элемента разрыва. Интересно отметить, что векторы $\frac{dr}{dw}$ и n при быстрых возмущениях образуют с магнитным полем углы одного знака, а при медленных возмущениях — углы разных знаков.

§ 4. Одномерные осесимметричные движения с однородной деформацией

В настоящем параграфе будет рассмотрено некоторое точное решение [6] уравнений магнитной гидродинамики, аналогичное известному газодинамическому решению [12]. Оно может быть полезным при решении различного рода конкретных задач [5]. Обобщения этого решения получены в [5, 7, 11, 14, 18].

Рассмотрим одномерные осесимметричные движения совершенного газа. Если за лагранжеву координату принять расстояние r^0 -частицы от оси симметрии при $t = 0$, то уравнения магнитной гидродинамики могут быть записаны в этом случае следующим образом:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial r^0} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r^0} (H_z^2 + H_\Phi^2) \right] \left(\frac{\partial r}{\partial r^0} \right)^{-1} + \frac{1}{4\pi} \frac{H_\Phi^2}{r} \right\}, \quad (5.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho^0 \frac{r^0}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial r^0} \right)^{-1}, & p &= p^0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}, \\ H_\Phi &= H_\Phi^0 \left(\frac{\partial r}{\partial r^0} \right)^{-1}, & H_z &= H_z^0 \frac{r^0}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial r^0} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Здесь H_z и H_Φ — компоненты напряженности магнитного поля в направлении, параллельном оси симметрии, и в направлении, перпендикулярном к ней; ρ — плотность; p — давление; r — координата частицы. Индекс нуль означает, что соответствующая величина взята при $t = 0$. Производная $\frac{\partial}{\partial t}$ — берется при

постоянном r^0 , а производная $\frac{\partial}{\partial r^0}$ – при постоянном t .

Первое уравнение выражает закон сохранения количества движения, а последующие представляют собой законы сохранения массы, энтропии и магнитного потока. Ниже будут рассмотрены все осесимметричные движения с однородной деформацией, т. е. такие, что

$$\frac{r}{r_0} = \mu(t), \quad (5.24)$$

где μ не зависит от r^0 . При этом

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = r^0 \mu'(t) = r \frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

т. е. скорость линейно зависит от радиуса.

Из равенств (5.23) и (5.24) непосредственно следует:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho^0 \mu^{-2}, & p &= p^0 \mu^{-2\gamma}, \\ H_\phi^2 &= H_\phi^{02} \mu^{-2}, & H_z^2 &= H_z^{02} \mu^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Подставляя равенства (5.24) и (5.25) в уравнение (5.21), получим

$$r_0 \frac{d^2 \mu}{dt^2} = -\frac{1}{\rho_0} \left[\mu^{1-2\gamma} \frac{\partial p^0}{\partial r^0} + \mu^{-1} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial H_\phi^{02}}{\partial r^0} + 2 \frac{H_\phi^{02}}{r^0} \right) + \mu^{-3} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H_z^{02}}{\partial r^0} \right]. \quad (5.26)$$

Так как левая часть равенства пропорциональна r^0 , то коэффициенты, стоящие в правой части при различных степенях μ , должны быть также пропорциональны r^0 . Отсюда при $\gamma \neq 2$ получаются следующие выражения для p^0 , H_ϕ^0 и H_z^0 через плотность r^0 , которая считается произвольной функцией r^0 :

$$p^0 = A \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0 + N, \quad (5.27)$$

$$H_\phi^{02} = \frac{4\pi B}{r^{02}} \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0 + \frac{M}{r^{02}}, \quad (5.28)$$

$$H_z^{02} = 8\pi D \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0 + L. \quad (5.29)$$

Здесь A, B, D, N, M, L — произвольные постоянные, причем $N \geq 0, M \geq 0$ и $L \geq 0$. Знаки A и D совпадают соответственно со знаками производных $\partial p / \partial r$ и $\partial H_z^2 / \partial r$. Плотность тока

$j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H$ определяется равенствами

$$\left. \begin{aligned} j_z &= \mu^{-2} j_z^0 = \frac{c}{4\pi} \mu^{-2} \frac{1}{r^0} \frac{\partial}{\partial r^0} (r^0 H_\phi^0) = \pm \mu^{-2} \frac{c}{8\pi} \frac{B\phi'(r^0)}{\sqrt{M+B\phi(r^0)}}, \\ j_\phi &= \mu^{-3} j_\phi^0 = \frac{c}{4\pi} \mu^{-3} \frac{\partial H_z^0}{\partial r^0} = \pm \mu^{-3} \frac{c}{8\pi} \frac{D\psi'(r^0)}{\sqrt{L+D\psi}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

где $\phi = 4\pi \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0$, $\psi = 8\pi \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0$. Кроме того, по оси симметрии течет концентрированный ток

$$i = \frac{c}{2} \sqrt{M}. \quad (5.31)$$

Если $B > 0$, то распределенный ток j_z совпадает по направлению с концентрированным током; если $B < 0$, то эти токи противоположны. Если же $M = 0$, т. е. концентрированного тока нет, то B должно быть обязательно положительным.

Если $\gamma = 2$, то в первый и последний члены правой части уравнения (5.26) $\mu(t)$ входит в одинаковых степенях. Поэтому (5.27) и (5.29) заменяются одним соотношением

$$p^0 + \frac{H_z^{02}}{8\pi} = A \int_0^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0 + N, \quad (5.32)$$

и решение содержит две произвольные функции $\rho^0(r^0)$ и $H_z^0(r^0)$.

Используя равенства (5.27)–(5.29), перепишем (5.26) следующим образом:

$$\frac{d^2 \mu}{dt^2} = -A\mu^{1-2\gamma} - B\mu^{-1} - D\mu^{-3}, \quad (5.33)$$

где при $\gamma = 2$ следует считать $D = 0$. Уравнение (5.33) служит для определения $\mu(t)$. Умножая равенство (5.35) на $d\mu/dt$ и интегрируя, получим уравнение

$$\left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 = \frac{A}{\gamma - 1} \mu^{2-2\gamma} - 2B \ln \mu + \frac{1}{2} D \mu^{-4} + C \equiv f(\mu), \quad (5.34)$$

или

$$t = \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, которая при заданных A, B и D определяется начальной «скоростью» $\left(\frac{d\mu}{dt} \right)_{t=0} = 0$. Постоянная C должна быть такой, что $f(1) \geq 0$.

Качественное поведение решения уравнения (5.34) зависит от вида функции $f(\mu)$, который в свою очередь зависит от постоянных A, B, C, D . Рассмотрим для простоты случай $H_2^0 = \text{const}$, когда $D = 0$. В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие случаи:

1. $A > 0, B > 0$. В этом случае $f(\mu)$ имеет вид, изображенный на рис. 38. Если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ становится равной

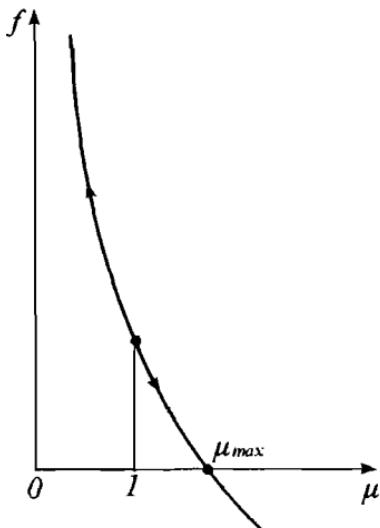


Рис. 38.

нулю через конечное время. При этом μ все время убывает и происходит сжатие всего газа к оси симметрии. Если же $d\mu/dt > 0$, то μ сначала достигает своего максимального значения в точке $\mu = \mu_{\max}$. В этой точке производная $d\mu/dt$ меняет знак, после чего за конечное время происходит уменьшение $\mu(t)$ до нуля. Таким образом, в рассматриваемом случае, если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то происходит сначала расширение газа, а затем его сжатие к оси симметрии.

2. $A < 0, B < 0$. Если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то μ возрастает до бесконечности при $t \rightarrow \infty$, т. е. происходит разлет газа. При

этом «скорость» $d\mu/dt \rightarrow \infty$. Если же $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ сначала достигает своего минимального значения, а затем возрастает до бесконечности.

3. $A > 0, B < 0$. Возможны следующие подслучаи:

а) $f(\mu)$ не имеет корней, тогда, если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то происходит разлет газа, а если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, происходит сжатие газа к оси;

б) $f(\mu)$ имеет один двойной корень μ_0 . При этом если знаки $d\mu/dt$ и $\mu_0 - 1$ совпадают, то происходят лимитационные движения газа $\mu \rightarrow \mu_0$ при $t \rightarrow \infty$. В противном случае будет происходить разлет или сжатие газа к оси в зависимости от знака $\mu_0 - 1$. Если $\mu_0 = 1$, то имеем положение неустойчивого равновесия;

в) $f(\mu)$ имеет два корня, причем единица не может лежать между ними. Если $1 \leq \mu_1 < \mu_2$, то движение газа происходит аналогично случаю 1. Если же $\mu_2 < \mu_1 \leq 1$, то движение происходит аналогично случаю 2.

4. $A < 0, B > 0$. При этом существуют либо два корня $\mu_1 < 1 < \mu_2$, либо один двойной корень $\mu_1 = \mu_2 = 1$. В случае двойного корня точка $\mu = 1$ является положением устойчивого равновесия. При $\mu_1 < 1 < \mu_2$ происходят периодические колебания μ между значениями μ_1 и μ_2 с периодом, зависящим от постоянных A, B, C , т. е. происходят пульсации газа.

Рассмотрим теперь цилиндр конечной длины и конечного радиуса $r^0 = a$. Пусть $H_z^2 = 0$. Для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, достаточно с торцов поставить проводящие стенки, а к боковой его поверхности приложить давление, равное полному давлению изнутри:

$$p^*(a, t) = p^0(a) \mu^{-2\gamma} + \frac{H_\phi^{02}(a)\mu^{-2}}{8\pi}.$$

Это давление можно создать внешним магнитным полем. Давление магнитного поля на поверхность цилиндра равно $H_b^2/8\pi$ (H_b — напряженность внешнего поля). Так как циркуляция магнитного поля вдоль некоторого контура пропорциональна полному току, протекающему через поверхность, натянутую на этот контур, то суммарная сила тока, текущего вдоль цилиндра, должна быть равна

$$I(t) = \frac{c}{2} a \mu H_b = \frac{c}{2} a \sqrt{8\pi p^0(a) \mu^{2-2\gamma} + H_\phi^{02}(a)}.$$

В частности, при $p^0(a) = 0$ суммарная сила тока получается постоянной по времени. Таким образом, для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, необходимо к концам цилиндра приложить такое напряжение, чтобы суммарный ток был равен $I(t)$. При этом ток, который течет внутри цилиндра, не зависит от приложенного напряжения, а находится из уравнений магнитной гидродинамики. Приложенное же напряжение влияет только на величину поверхностного тока.

Глава 6

Стационарные движения идеального газа

§ 1. Характеристики уравнений магнитной гидродинамики, описывающих стационарные течения

В этом параграфе будут рассмотрены свойства характеристик системы уравнений магнитной гидродинамики, описывающей плоские (в плоскости x, y) стационарные движения бесконечно проводящего газа при $w = 0$ и $H_z = 0$ [1, 2, 5–7]. Эта система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (\nu \nabla) \nu &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} H \times H, \\ \operatorname{div} \rho \nu &= 0, \quad \operatorname{div} H = 0, \\ \operatorname{rot} (\nu \times H) &= 0, \quad \nu \cdot \operatorname{grad} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Как уже указывалось ранее, характеристиками поверхностями называются поверхности, на которых возможны слабые разрывы. В случае плоских движений характеристические поверхности являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси z . Линии пересечения этих поверхностей с плоскостью (x, y) называются *характеристическими линиями*, или просто *характеристиками*. Было выяснено, что скорость распространения поверхностей слабого разрыва равна сумме нормальной составляющей скорости газа и одной из скоростей распространения малых возмущений. В случае стационарных движений, когда характеристики неподвижны, это условие принимает вид

$$\nu \cdot n \pm a_i = 0 \quad (6.2)$$

(n — единичный вектор нормали к характеристике, лежащий в

плоскости x, y) и служит для определения направления характеристик. Так как в этом параграфе рассматриваются плоские движения, при которых $H_z = 0, w = 0$, то альфеновские возмущения невозможны, потому что они нарушают это условие. Характеристики, соответствующие энтропийным разрывам, должны, очевидно, совпадать с линиями тока. Направления характеристик, соответствующих быстрым и медленным магнитозвуковым разрывам, определяются из условия

$$v_n^2 = a_{+, -}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) \pm \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right)^2 - \frac{H_n^2 a_0^2}{\pi\rho}} \right] \quad (6.3)$$

(верхний знак соответствует быстрой магнитозвуковой скорости, нижний знак — медленной).

Перейдя в (6.3) к безразмерным переменным

$$M_i = v_i/a_0 \quad \text{и} \quad N_i^2 = H_i^2/(4\pi\rho p) = H_i^2/(4\pi\rho a_0^2), \quad i = x, y, \quad (6.4)$$

и воспользовавшись тем, что

$$v_n = v_x \sin \alpha - v_y \cos \alpha, \quad H_n = H_x \sin \alpha - H_y \cos \alpha,$$

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad N^2 = N_x^2 + N_y^2,$$

где $y = y(x)$ — уравнение характеристики в плоскости течения, преобразуем (1.3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & (y')^4 [M_x^4 + N_x^2 - M_x^2(1 + N^2)] + (y')^3 [2M_x M_y (1 + N^2) - \\ & - 4M_x^2 M_y - 2N_x N_y] + (y')^2 [6M_x^2 M_y^2 - M^2 (1 + N^2) + N^2] + \\ & + y' [M_x M_y (1 + N^2) - 4M_x M_y^3 - 2N_x N_y] + \\ & + [M_y^4 - M_y^2 (1 + N^2) + N_y^2] = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Чтобы получить уравнение для тангенса угла наклона характеристики к линии тока, достаточно в (6.5) положить $M_y = 0$.

Направления характеристик можно найти также и графическим путем. Направления характеристик в точке потока r совпадают с направлениями касательных, проведенных из точки $-v(r)$ к линиям L_+ и L_- , построенным в начале координат по параметрам потока в точке r (рис. 39). Действительно, согласно результатам § 3 гл. 5, векторная скорость движения отно-

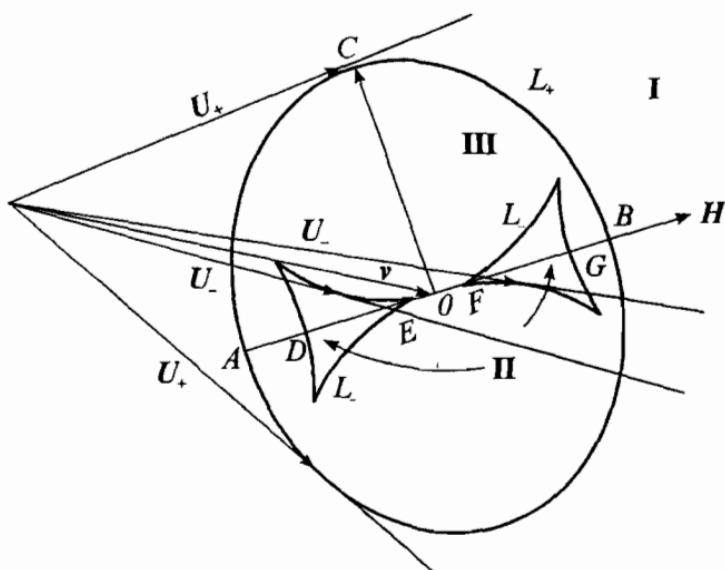


Рис. 39

сительно газа элемента поверхности разрыва, лежащего на построенной таким образом касательной, равна $a_n + \text{grad}_{|n|=1} a_i$ (n — нормаль к касательной, a_i — одна из скоростей малых возмущений) и совпадает с радиус-вектором (например, OC на рис. 39), проведенным из начала координат в точку касания. Очевидно при этом, что равенство (6.2) выполняется и, следовательно, построенное направление является характеристическим. Скорость элемента разрыва, расположенного вдоль характеристики, равная $U_i = v + a_n + \text{grad}_{|n|=1} a_i$, представляет собой вектор, проведенный из точки $-v$ в точку касания. Таким образом, элементы разрывов движутся вдоль характеристик со скоростью U_i от источника возмущения.

Проведенное исследование позволяет определить число и направление характеристик в каждой точке потока, а также показывает, что разрывы малой интенсивности, возникающие от стационарного точечного возмущения, помещенного в данную точку потока, локализуются на лучах характеристик, проведенных из этой точки в направлении векторов U_i . Эти лучи будем называть *уходящими характеристиками*, а лучи, направленные в противоположную сторону, — *приходящими в данную точку характеристиками*.

В зависимости от того, в какую из трех областей, изображенных на рис. 39, попадает конец вектора $-v$ в потоке газа, движущегося со скоростью v , будет различное число действительных характеристик. Если конец вектора $-v$ попадает в область I, то существует четыре действительные характеристики (см. рис. 39). Эту область значений параметров потока будем называть *гиперболической* (смысл названий различных областей станет ясен из дальнейшего). Если конец вектора $-v$ попадает в область II, то в потоке существуют также четыре действительные характеристики (рис. 40). В отличие от области I эту область значений параметров потока назовем *квазигиперболической*. Если же конец вектора $-v$ попадает в область III, то существуют только две

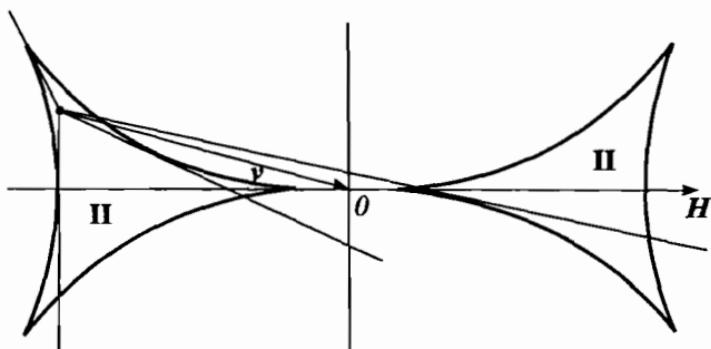


Рис. 40

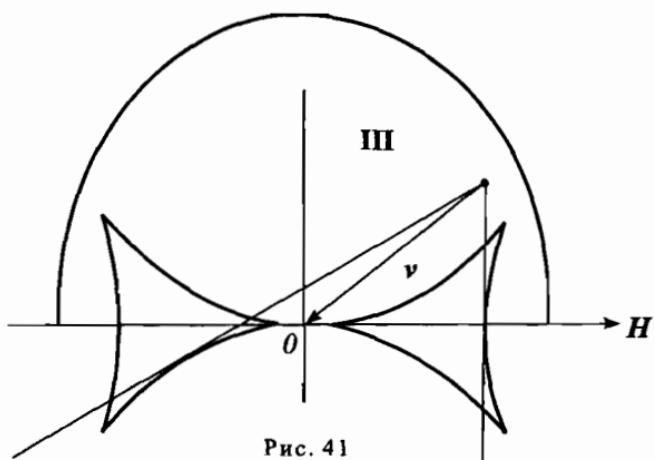


Рис. 41

действительные характеристики (рис. 41). Эта область значений параметров потока называется *эллиптико-гиперболической*.

Заметим, что если векторы v и H параллельны, то в этом случае направление двух характеристик совпадает с направлением скорости (две характеристики вырождаются в линии тока) и, следовательно, кроме линий тока, в областях I и II существуют по две действительные характеристики, а в области III — ни одной.

Характеристики плоского поступательного потока играют важную роль при решении задач об обтекании тонких тел потоком газа. Анализу этих задач посвящен следующий параграф.

§ 2. Линейные задачи

В этом параграфе рассмотрим задачу об обтекании тонких тел потоком идеального газа [1–3, 6, 7].

Пусть имеется поступательный поток идеального газа, скорость которого равна $U_0 = U_0 e_x$. В этот поток помещено тело такое, что вызванные им возмущения основного потока можно считать столь малыми, что их квадратами по сравнению с параметрами основного потока можно пренебречь. Решим задачу о стационарном обтекании рассматриваемого тела в присутствии внешнего однородного магнитного поля H_0 , составляющего с направлением скорости некоторый угол α . Линеаризируя систему (6.1), получим следующие уравнения для определения параметров возмущенного движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{N_y}{M} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{N_x}{M} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \right), \\ h_y + \frac{N_y}{M} u - v \frac{N_x}{M} &= 0, \quad p = \frac{1}{M^2} \rho, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\text{где } u = u'/U_0, \quad v = v'/U_0, \quad p = p' / (\rho_0 U_0^2), \quad \rho = \rho' / \rho_0,$$

$$h_x = h'_x / \left(\sqrt{4\pi\rho_0} U_0 \right), \quad h_y = h'_y / \left(\sqrt{4\pi\rho_0} U_0 \right), \quad M^2 = U_0^2 \rho_0 / (\gamma p_0),$$

$$N = H_0 / \sqrt{4\pi\gamma p_0},$$

p_0, ρ_0 — давление и плотность в невозмущенном потоке, а величины со штрихом означают возмущения параметров поступательного потока.

Линии разрыва решения системы (6.6) располагаются вдоль характеристик невозмущенного потока, число и направление их легко определить, пользуясь результатами предыдущего раздела. Следовательно, возникающие при обтекании тела ударные волны и волны разрежения будут, согласно линейной теории, направлены вдоль характеристик невозмущенного потока (интенсивность этих волн будет, естественно, малой, и энтропия при переходе через ударные волны не меняется). Таким образом, картина обтекания тонкого тела будет существенным образом зависеть от того, в какую из трех областей (см. рис. 39) попадает конец вектора $-U_0$ при заданных параметрах невозмущенного потока.

Если, преобразуя систему (6.6), исключить из нее все искомые функции, кроме одной, то для определения этой последней получится дифференциальное уравнение четвертого порядка, причем вид уравнения не зависит от того, какая из искомых функций определяется:

$$[(1 - M^2)(M^2 - N_x^2) + M^2 N_y^2] \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial x^4} + [M^2 - (1 - M^2) \times \\ \times (N_x^2 + N_y^2)] \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial x^2 \partial y^2} - N_y^2 \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial y^4} - 2N_x N_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \eta_i = 0, \quad (6.7)$$

где под η_i подразумевается любая из искомых функций u, v, ρ, h_x или их производные. Это уравнение легко получить, если воспользоваться следующим правилом.

Пусть система линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{ij} u_i = 0, \quad (6.8)$$

где u_i — матрица-столбец искомых функций, а $\|a_{ij}\|$ — матрица дифференциального оператора системы (6.6). Тогда каждая из искомых функций обращает в нуль оператор, представляющий собой определитель матрицы $\|a_{ij}\|$.

В частных случаях, когда коэффициенты исходной системы (6.6) таковы, что она может быть преобразована к виду, распадающемуся на независимые части, функции, входящие в каждую из подсистем, удовлетворяют уравнениям типа (6.7) более низкого порядка, а оператор уравнения (6.7) является произведением соответствующих операторов для подсистем. При этом очевидно, что все искомые функции будут удовлетворять уравнению (6.7), но не все решения уравнений (6.7) будут удовлетворять исходной системе.

Будем искать решения уравнения (6.7) в виде

$$\eta_i = f_i(y + \xi x), \quad (6.9)$$

где f_i — произвольная функция своего аргумента. Очевидно, что число решений уравнения (6.7) такого вида совпадает с числом действительных характеристик уравнения (6.7), причем ξ представляет собой тангенс угла наклона характеристики к оси x . Подставляя (6.9) в (6.7), получим:

$$\left. \begin{aligned} & (\xi^4 + a\xi^3 + b\xi^2 + a\xi + c) f_i^{IV} = 0, \\ & a = -2 \frac{N_x N_y}{(1-M^2)(M^2 - N_x^2) + M^2 N_y^2}, \\ & b = \frac{M^2 - N^2 (1-M^2)}{(1-M^2)(M^2 - N_x^2) + M^2 N_y^2}, \\ & c = -\frac{N_y^2}{(1-M^2)(M^2 - N_x^2) + M^2 N_y^2}, \quad N^2 = N_x^2 + N_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Таким образом, условием существования нетривиального решения типа (6.9) уравнения (6.7) является выполнение равенства

$$\xi^4 + a\xi^3 + b\xi^2 + a\xi + c = 0. \quad (6.11)$$

Если (6.11) имеет четыре действительных корня, то оператор (6.7) является гиперболическим и уравнение (6.7) имеет четыре действительные характеристики и четыре решения вида (6.9). Если (6.11) имеет два действительных корня, то оператор (6.7) содержит две действительные характеристики и два решения вида (6.9). В этом случае уравнение (6.7) будем называть эллиптико-гиперболическим.

Очевидно, что оператор (6.7) всегда может быть представлен как произведение двух операторов второго порядка (этот вопрос равносителен вопросу о разложении многочлена (6.11) на множители):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + Q \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + S \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta_i = 0. \quad (6.12)$$

Если (6.7) имеет гиперболический тип, то оба оператора в (6.12) гиперболические, если же (6.7) — эллиптико-гиперболический оператор, то в (6.12) один оператор эллиптический, а другой гиперболический. Так как вопрос о типе оператора (6.7) связан с вопросом о числе действительных характеристик невозмущенного потока, то при заданных параметрах невозмущенного потока тип оператора (6.7) определяется тем, в какую из областей на рис. 39 попадает конец вектора $-U_0$. В областях I и II на рис. 39 оператор (6.7) имеет гиперболический тип, а в области III — эллиптико-гиперболический.

Для того чтобы найти искомые функции, соответствующие конкретной задаче, необходимо сформулировать граничные условия для уравнения (6.7). Если все точки обтекаемого тела расположены вблизи оси x , то, как обычно в линейной теории, граничные условия ставятся на некотором отрезке оси x . С гидродинамической точки зрения граничные условия должны выражать тот факт, что обтекаемое тело является линией тока. Кроме того, должны быть выполнены электродинамические условия, определяющие разрыв электромагнитного поля в точках оси x , соответствующих обтекаемому телу. Эти условия сводятся к условию непрерывности нормальной составляющей магнитного поля (h_y) и к тому, что разрыв касательной составляющей магнитного поля определяется суммой токов, текущих в теле, и поверхностных токов, текущих в жидкости на границе с телом. Условие непрерывности касательной составляющей электрического поля выполняется автоматически, поскольку при плоских движениях во всем пространстве $E = E_z e_z$ и $E_z = \text{const}$. Кроме указанных условий, будем всюду полагать, что в потоке, кроме исследуемого тела, нет никаких других источников возмущений.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть в невозмущенном потоке магнитное поле H_0 параллельно вектору скорости ($N_y = 0$). Так как течение плоское, то в этом случае из уравнения $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = 0$ следует, что $\mathbf{U}_0 \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{v} \times \mathbf{H} = 0$, т. е. во всех точках возмущенного потока магнитное поле и скорость параллельны. Это обстоятельство вместе с условием, что поверхность тела есть линия тока, обеспечивает равенство нулю на поверхности тела нормальной составляющей магнитного поля. Таким образом, в данном случае решение задачи зависит только от гидродинамических граничных условий. Разрыв касательной составляющей магнитного поля определяется токами, текущими в теле, и поверхностными токами — в жидкости, причем токи, текущие в теле, надо считать заданными, а поверхностные токи в жидкости определяются решением задачи.

Пусть функции $y_{\pm} = f_{\pm}(x)$ задают форму обтекаемого тела, причем плюс относится к верхней поверхности тела, а минус — к нижней. Вне отрезка оси x , занятого телом, функции $f_{\pm} \equiv 0$. Так как поверхность тела есть линия тока, то задание функции $f_{\pm}(x)$ определяет значение v в точках поверхности тела, т. е. приводит к следующим граничным условиям для определения функции v :

$$v = f'_{\pm}(x) \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.13)$$

Здесь L — длина тела. Уравнение (6.7) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \eta_i = 0.$$

Величина b определена в (6.10). Однако в данном случае система легко преобразуется к виду, распадающемуся на подсистемы. При этом функция v удовлетворяет уравнению более низкого порядка, которое получается из (6.6) последовательным исключением входящих туда функций:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (6.14)$$

Для определения функции v необходимо решить это уравнение при граничном условии (6.13). Если $v(x, y)$ найдена, то остал-

ные функции находятся по формулам, получаемым путем последовательного интегрирования системы (6.6):

$$\left. \begin{aligned} h_y &= \frac{N_x}{M} v, & \rho &= -\frac{M^2}{M^2 - 1} \int_{-\infty}^x \frac{\partial v}{\partial y} dx, \\ && u &= -p, \\ p &= \frac{1}{M^2} \rho; & h_x &= \frac{N_x}{M} (1 - M^2) u. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

В этих равенствах произвольные функции y , возникающие при интегрировании системы (6.6), положены равными нулю в силу отсутствия в потоке источников возмущений, кроме обтекаемого тела, так как эти функции связаны с характеристиками исходной системы, параллельными оси x ; и не проходящими через тело.

Если конец вектора $-U_0$, лежащего на прямой AB (см. рис. 39), находится в области III, то $b > 0$ и уравнение (6.14) имеет эллиптический тип. Для определения $v(x, y)$ в этом случае надо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа с граничными условиями (6.13). Суммарная сила, действующая на тело, представляет собой сумму сил магнитного и гидродинамического давлений. Коэффициент полного давления дается формулой

$$C_p = \frac{p' + p'_m}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0'} = 2 \frac{p' + \frac{H_0}{4\pi} h'_x}{\rho_0 U_0^2} = 2 \left(p + \frac{N_x}{M} h_x \right) = -2 \frac{M^2 - N_x^2 (1 - M^2)}{M^2} u. \quad (6.16)$$

Как видно из рис. 39, возможны эллиптические области трех типов. При $N_x < 1$, в области $N_x < M < 1$ (отрезки AD и GB) добавочные скорости и коэффициент давления имеют те же знаки, что и при дозвуковом обтекании тонкого тела в обычной гидродинамике. Поэтому и характер течения в этой области аналогичен гидродинамическому. При $N_x > 1$, в области $1 < M < N_x$ (отрезки AD и GB) все величины p , ρ , u , C_p имеют знаки, обратные знакам этих величин в обычной гидродинамике. В области $0 < M < M^* = N_x / \sqrt{1 + N_x^2}$ (отрезок EF) картина скоростей аналогична гидродинамической, но сила имеет направление, противоположное направлению силы в обычной гидродинамике. В области $N_x > 1$, $1 < M < N_x$ все величины p , ρ ,

u , C_p имеют знаки, обратные знакам этих величин в обычной гидродинамике.

Если конец вектора $-U_0$, лежащего на прямой AB (см. рис. 39), находится в областях I и II, то $b < 0$ и уравнение (6.14) имеет гиперболический тип. Его общим решением будет

$$v_{\pm} = f_{1\pm}[x - (-b)^{-1/2}y] + f_{2\pm}[x + (-b)^{-1/2}y].$$

Функции $f_{1\pm}$ и $f_{2\pm}$ должны быть определены из граничных условий. Так как мы предполагаем, что кроме обтекаемого тела источников возмущения нет, то те из функций, аргумент которых связан с приходящими характеристиками, тождественно равны нулю.

В гиперболической области (см. рис. 39) приходящими являются характеристики, направленные вверх по потоку от тела, следовательно, для течений в гиперболической области $f_{2+} = f_{1-} = 0$, и решение сверху от тела имеет вид $v_+ = f_{1+}[x - (-b)^{-1/2}y]$, а снизу от тела — $v_- = f_{2-}[x + (-b)^{-1/2}y]$.

Функции f_{1+} и f_{2-} определяются из условия (6.13).

Характер течения в гиперболической области аналогичен течению при сверхзвуковом обтекании тела. Образующиеся в потоке волны сжатия и разрежения направлены вдоль уходящих от тела характеристик вниз по потоку. В область перед телом, ограниченную уходящими от передней кромки характеристиками, возмущения не проникают. Характер течения изображен на рис. 42. Жирные линии представляют собой волны сжатия, тонкие — волны разрежения. Решение (6.15) в этом случае принимает вид

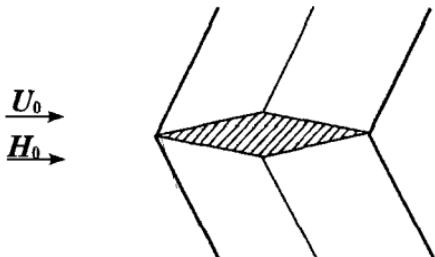


Рис. 42

$$\left. \begin{aligned} v_+ &= f'_+[x - (-b)^{-1/2}y], \quad h_{y+} = \frac{N_x}{M} v_+, \quad \rho_+ = \frac{M^2}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \\ p_+ &= -\frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \quad u_+ = -\frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \\ h_{x+} &= \frac{N_x}{M} (-b)^{-1/2} v_+, \end{aligned} \right\} (6.17)$$

$$\left. \begin{aligned} v_- &= f'_- [x + (-b)^{-1/2} y], \quad h_{y-} = \frac{N_x}{M} v_-, \quad \rho_- = -\frac{M^2}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \\ p_- &= -\frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \quad u_- = \frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \\ h_{x-} &= -\frac{N_x}{M} (-b)^{-1/2} v_-. \end{aligned} \right\} (6.18)$$

В квазигиперболической области (см. рис. 40) приходящие характеристики направлены от тела вниз по потоку, поэтому $f_{1+} = f_{2-} = 0$, и решение в квазигиперболической области выше тела имеет вид

$$v_+ = f_{2+} [x + (-b)^{-1/2} y],$$

а ниже тела

$$v_- = f_{1-} [x - (-b)^{-1/2} y].$$

Функции f_{2+} и f_{1-} определяются граничным условием (6.13). В отличие от течений в газовой динамике и в гиперболической области, волны сжатия и разрежения в этом случае направлены вдоль уходящих от тела характеристик вверх по потоку (рис. 43). Решение (6.15) в этом случае имеет вид

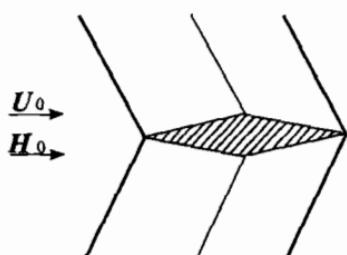


Рис. 43

$$\left. \begin{aligned} v_+ &= f'_+ [x + (-b)^{-1/2} y], \quad h_{y+} = \frac{N_x}{M} v_+, \quad \rho_+ = -\frac{M^2}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \\ p_+ &= -\frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \quad u_+ = \frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_+, \\ h_{x+} &= -\frac{N_x}{M} (-b)^{-1/2} v_+, \end{aligned} \right\} (6.19)$$

$$\left. \begin{aligned} v_- &= f'_- [x - (-b)^{-1/2} y], \quad h_{y-} = \frac{N_x}{M} v_-, \quad \rho_- = \frac{M^2}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \\ p_- &= \frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \quad u_- = -\frac{1}{M^2 - 1} (-b)^{-1/2} v_-, \\ h_{x-} &= \frac{N_x}{M} (-b)^{-1/2} v_-. \end{aligned} \right\} (6.20)$$

Сравнение соотношений (6.17), (6.18) и (6.19), (6.20) показывает, что величины ρ , p , u имеют в соответствующих точках в квазигиперболической области те же знаки, что и в гиперболической области, в частности направление силы совпадает с ее направлением при обтекании того же тела в гиперболической области. В данном случае картины течения (см. рис. 42 и 43) легко нарисовать, если знать направления уходящих характеристик и учесть характер изменения скорости в соответствующих разрывах. В нелинейной теории получающимся здесь слабым разрывам соответствуют ударные волны или волны разрежения.

Пример 2. Направление поля в невозмущенном потоке H_0 перпендикулярно к скорости ($N_x = 0$). В этом случае уравнение (6.11) превращается в биквадратное и имеет корни

$\xi = \pm (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})^{1/2} / \sqrt{2}$. При этом уравнение (6.7) может быть представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta_i = 0, \\ & A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad B = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Выражения (6.10) для b и c показывают, что невозможно одновременное выполнение неравенств $b > 0$, $c > 0$, так как при этом необходимо, чтобы $M^2[(1 - M^2) + N_y^2] < 0$ и $M^2 - N_y^2(1 - M^2) < 0$, что невозможно. Отсюда следует, что либо $A > 0$ и $B > 0$, либо A и B имеют разные знаки. В первом случае оба оператора в (6.21) имеют гиперболический тип (соответствующая точка находится в гиперболической области) (см. рис. 39) и в каждой точке имеется четыре действительные характеристики; во втором случае один оператор гиперболический, а другой — эллиптический (эллиптико-гиперболическая область — в каждой точке существуют две действительные характеристики). Если оператор (6.21) — эллиптико-гиперболический, то для определенности будем считать, что $A > 0$, а $B < 0$. Заметим, что при $N_x = 0$ квазигиперболической области не существует (см. рис. 39).

Рассмотрим в качестве примера обтекание плоской полубесконечной пластины ($x > 0$, $y = 0$), по которой течет поверх-

ностный ток плотности $i_z(x) = \frac{c}{4\pi} i(x)$. В этом случае при отсутствии поверхностных токов в жидкости граничные условия будут формулироваться следующим образом:

$$v_+ = v_- = 0, \quad h_{y+} = h_{y-}, \quad h_{x+} - h_{x-} = i(x) \quad (6.22)$$

при $y = 0, x > 0$.

Вообще говоря, плотность поверхностных токов в жидкости при $v_m = v = 0$ определяется скоростью потока на поверхности тела и отношением v_m/v (см. § 1 гл. 2), которое зависит от свойств жидкости. Условие отсутствия поверхностных токов в жидкости эквивалентно условию $v_m/v = \infty$.

Если параметры невозмущенного потока соответствуют гиперболической области и если за исковую функцию принять $v(x, y)$, то общее решение уравнения (6.21) будет иметь вид

$$v = f_1[x - (A)^{-1/2}y] + f_2[x - (B)^{-1/2}y] + f_3[x + (A)^{-1/2}y] + f_4[x + (B)^{-1/2}y],$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – произвольные функции своих аргументов. Так как кроме обтекаемого тела в потоке отсутствуют источники возмущений и, следовательно, возмущения распространяются только вдоль уходящих от тела характеристик, то решение в верхней и нижней полуплоскостях будет соответственно иметь вид

$$\left. \begin{aligned} v_+ &= f_1[x - (A)^{-1/2}y] + f_2[x - (B)^{-1/2}y], \\ v_- &= f_1[x + (A)^{-1/2}y] + f_2[x + (B)^{-1/2}y]. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Так как уходящие от тела характеристики направлены в этом случае вниз по потоку (см. рис. 39), поток впереди тела не возмущен вплоть до характеристик большего наклона, проходящих через точку $x = 0$. Произвольные функции в (6.23) должны быть определены из условий (6.22). Согласно первому условию (6.22) при $y=0$ имеем

$$f_{1+} = -f_{2+} \equiv f_+, \quad f_{1-} = -f_{2-} \equiv f_-. \quad (6.24)$$

Решение задачи, которое, воспользовавшись (6.23) и (6.24), можно получить последовательным интегрированием системы (6.6) (при $N_x = 0$), можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_+ &= f_+(\zeta_1) - f_+(\zeta_2), \quad p_+ = A^{1/2} f_+(\zeta_1) - (B)^{1/2} f_+(\zeta_2), \quad \rho_+ = M^2 p_+, \\ u_+ &= [(A)^{-1/2} - M^2(A)^{1/2}]f_+(\zeta_1) - [(B)^{-1/2} - M^2(B)^{1/2}]f_+(\zeta_2), \\ h_{y+} &= -\frac{N_y}{M} u_+, \quad \frac{N_y}{M} h_x = -\left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} \right) (1 - M^2 A) + A \right] f_+(\zeta_1) + \\ &\quad + \left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} \right) (1 - M^2 B) + B \right] f_+(\zeta_2), \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

$$\left. \begin{aligned} v_- &= f_-(\zeta_3) - f_-(\zeta_4), \quad p_- = -A^{1/2} f_-(\zeta_3) + (B)^{1/2} f_-(\zeta_4), \quad \rho_- = M^2 p_-, \\ u_- &= -(A^{-1/2} - M^2 A^{1/2}) f_-(\zeta_3) + (B^{-1/2} - M^2 B^{1/2}) f_-(\zeta_4), \\ h_{y-} &= -\frac{N_y}{M} u_-, \quad \frac{N_y}{M} h_x = -\left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} (1 - M^2 A) + A \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times f_-(\zeta_3) + \left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} \right) (1 - M^2 B) + B \right] f_-(\zeta_4), \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

где $\zeta_1 = x - A^{-1/2}y$, $\zeta_2 = x - B^{-1/2}y$, $\zeta_3 = x + A^{-1/2}y$, $\zeta_4 = x + B^{-1/2}y$. Функции f_+ и f_- определяются из оставшихся условий (6.22), причем из условия $h_{y+} = h_{y-}$ в силу (6.25) и (6.26) следует, что

$$f_+(\zeta) = -f_-(\zeta), \quad (6.27)$$

а из последнего условия заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} h_{x+} &= -h_x = \frac{1}{2} i(x), \\ f_+(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{N_y}{M} [(A - B)(M^2 - N^2 - 1)]^{-1} i(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Пользуясь выражениями (6.10), (6.21) и (6.28), легко показать, что в гиперболической области ($M^2 > N^2 + 1$)

$$A > B \text{ и } \operatorname{sign} f_+(\zeta) = \operatorname{sign} i(z), \quad (6.29)$$

$$\text{где } \operatorname{sign} a = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0, \end{cases} \quad \operatorname{sign} 0 = 0.$$

Соотношение (6.27), совместно с (6.25) и (6.26), показывает, что течение в нижней полуплоскости является в данном случае зеркальным отражением течения в верхней полуплоскости. В области между характеристиками, проходящими через точку $x = 0$, имеют место равенства $f_+(\zeta_2) = 0$ и $f_-(\zeta_4) = 0$. Из соотношений (6.29), (6.25) и (6.26) следует, что

$$\operatorname{sign} p_+ = \operatorname{sign} p_- = \operatorname{sign} i. \quad (6.30)$$

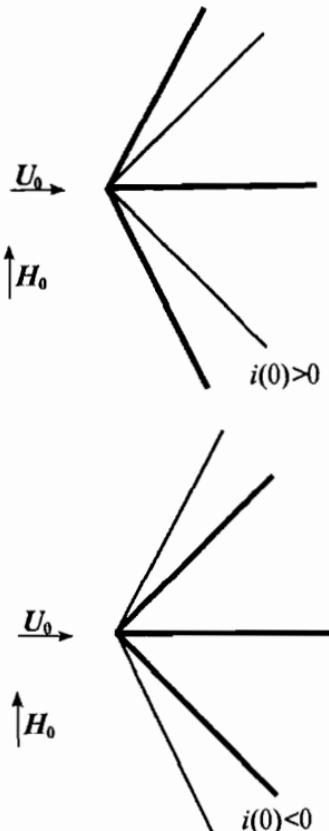


Рис. 44

Отсюда находим, что если $i(0) > 0$, то в силу (6.30) вблизи характеристики, ограничивающих область невозмущенного потока, $p_+ > 0$ и $p_- > 0$, т.е. эти характеристики являются волнами сжатия. Если же $i(0) < 0$, то характеристики, ограничивающие область невозмущенного потока, являются волнами разрежения. Так как вблизи пластины $v \rightarrow 0$, то характеристики, находящиеся внутри возмущенной области, в первом случае являются волнами разрежения, а во втором — сжатия (это легко установить, если учесть характер изменения скорости в волнах сжатия и разрежения малой интенсивности).

Проведенный анализ позволяет построить картину течения при обтекании пластины с током (рис. 44). Жирные линии на чертеже представляют волны сжатия, тонкие — разрежения. Заметим, что течение в области между пластиной и второй волной является возмущенным. При $N_y \rightarrow 0$ эта область превращается в тангенциальный разрыв.

Если параметры невозмущенного потока таковы, что оператор (6.21) имеет эллиптико-гиперболический тип, то будем искать решение задачи в виде суммы:

$$\eta_i = \eta_{ir} + \eta_{is}, \quad (6.31)$$

причем η_{ir} и η_{is} удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta_{ir} = 0, \quad A > 0, \quad (6.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta_{is} = 0, \quad B < 0. \quad (6.33)$$

Если в качестве искомой функции в уравнении (6.32) выбрать $v_r(x, y)$, ($\eta_{ir} = v_r$), то эта часть решения может быть записана в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_{r,+} &= f_+ \left(x - A^{-1/2} y \right), & p_{r,+} &= A^{1/2} f_+, \\ \rho_{r,+} &= M^2 A^{1/2} f_+, & u_{r,+} &= \left(A^{-1/2} - M^2 A^{1/2} \right) f_+, \\ h_{x,r,+} &= -\frac{M}{N_y} \left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} \right) (1 - M^2 A) + A \right] f_+ \equiv \lambda f_+, \\ h_{y,r,+} &= -\frac{N_y}{M} \left(A^{-1/2} - M^2 A^{1/2} \right) f_+, \\ v_{r,-} &= f_- \left(x + A^{-1/2} y \right), & p_{r,-} &= -A^{1/2} f_-, \\ \rho_{r,-} &= -M^2 A^{1/2} f_-, & u_{r,-} &= -\left(A^{-1/2} - M^2 A^{1/2} \right) f_-, \\ h_{x,r,-} &= -\frac{M}{N_y} \left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2} \right) (1 - M^2 A) + A \right] f_- \equiv -\lambda f_-, \\ h_{y,r,-} &= -\frac{N_y}{M} \left(A^{-1/2} - M^2 A^{1/2} \right) f_-. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Здесь, аналогично предыдущему, функции f_+ и f_- описывают решение соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Выберем за исковую функцию в уравнении (6.33) $v(x, y)$, ($\eta_{iz} = v$). Остальные функции будут выражаться через нее по формулам

$$\left. \begin{aligned} v_3 &= v(x, y), \quad h_{y,3} = -\chi \int_0^y \frac{\partial v}{\partial x} dy + h(x), \\ h(x) &= \chi \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x} dy, \quad u_3 = \frac{M}{N_y} \chi \left[\int_0^y \frac{\partial v}{\partial x} dy - h(x) \right], \\ p_3 &= M^2 p_3, \quad p_3 = \int_{-\infty}^x \frac{\partial v}{\partial y} dx, \quad h_{x,3} = \chi v, \\ \chi &= -B \left[\frac{N_y}{M} (1+B) - \frac{M}{N_y} B \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

В данном случае мы воспользовались тем, что возмущения, описываемые этой частью решения, на бесконечности должны затухать, так как уравнение (6.33) является эллиптическим.

Вид граничных условий для определения $v(x, y)$ из уравнения (6.33), а также функций f_+ и f_- в (6.34) должен быть определен из граничных условий (6.22). Используя уравнения (6.31), (6.34) и (6.35), можно записать эти граничные условия в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{r,+}(x) + v_3(x, +0) &= 0, & f_{r,-}(x) + v_3(x, -0) &= 0, \\ -f_{r,-}(x) &= f_{r,+}(x), \\ \lambda f_{r,+}(x) + \chi v_3(x, +0) - \lambda f_{r,-}(x) - \chi v_3(x, -0) &= i(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f_{r,+}(x) = \frac{i(x)}{2(\lambda - \chi)}, \quad f_{r,-}(x) = -\frac{i(x)}{2(\lambda - \chi)} \quad (6.36)$$

и

$$v(x, +0) = -\frac{i(x)}{2(\lambda - \chi)}, \quad v(x, -0) = \frac{i(x)}{2(\lambda - \chi)}. \quad (6.37)$$

Таким образом, для завершения решения задачи необходимо решить задачу Дирихле для уравнения (6.33) с граничными условиями (6.37), заданными на положительной части оси x .

После этого по формулам (6.36), (6.35), (6.34) и (6.31) можно определить все искомые функции.

Так как решение в данном случае содержит эллиптическую часть (η_3), то возмущения, вызванные пластиной с током, проникают во все пространство, затухая лишь на бесконечности. Кроме того, в области течения существуют две поверхности разрыва, совпадающие с уходящими характеристиками уравнения (6.31), проходящими через точку $x = 0$.

В заключение отметим, что решение задачи об обтекании тонких тел можно получить, используя соотношения, которые выполняются вдоль характеристик системы (6.6) [1, 2]. Выражения (6.17)–(6.20), (6.25), (6.26) и (6.34) являются, по существу, разрешением соотношений вдоль характеристик системы (6.6).

§ 3. Стационарные простые волны

В этом параграфе исследуются стационарные движения идеального газа, в которых все величины зависят только от некоторой комбинации пространственных переменных. Такие движения будем называть *стационарными простыми волнами*. Ниже будут рассмотрены простые волны, в которых все величины зависят только от угла ϕ , отсчитываемого в плоскости (x, y) , и не зависят от координаты z [4]. Эти волны могут быть использованы при решении задачи об обтекании угла.

Если перейти к цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) с осью, параллельной оси z , и учесть, что все функции зависят только от ϕ , то систему уравнений магнитной гидродинамики можно привести к виду:

$$\rho v_r + v_\phi \rho' + \rho v'_\phi = 0, \quad (6.38)$$

$$v_\phi (H'_r - H_\phi) = H_\phi (v'_r - v_\phi) - H_r (v'_\phi + v_r), \quad (6.39)$$

$$H'_\phi + H_r = 0, \quad (6.40)$$

$$v_\phi H'_z = H_\phi v'_z - H_z (v'_\phi + v_r), \quad (6.41)$$

$$v_\phi (v'_r - v_\phi) = \frac{H_\phi}{4\pi\rho} (H'_r - H_\phi), \quad (6.42)$$

$$v_\phi (v'_\phi + v_r) = -\frac{1}{\rho} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right)', \quad (6.43)$$

$$v_\phi v'_z = \frac{H_\phi}{4\pi\rho} H'_z, \quad (6.44)$$

$$p = C\rho^\gamma. \quad (6.45)$$

Штрихом обозначены производные по ϕ . Прежде всего заметим, что системе (6.38)–(6.45) должно удовлетворять решение, описывающее поступательный поток в однородном магнитном поле. В поступательном потоке отсутствует расширение частиц жидкости. Кроме того, при рассмотрении нестационарных одномерных движений газа было показано, что в магнитной гидродинамике возможны и другие движения газа, когда он ведет себя как несжимаемая жидкость (вращательные простые волны). В связи с этим изучим решения системы (6.38)–(6.45), в которых не происходит расширение газа:

$$\operatorname{div} v = v'_r + v_r = 0. \quad (6.46)$$

При этом система (6.38) – (6.44) упростится и перейдет в следующую:

$$v_\phi(H'_r - H_\phi) = H_\phi(v'_r - v_\phi), \quad (6.47)$$

$$H'_\phi = -H_r, \quad (6.48)$$

$$v_\phi H'_z = H_\phi v'_z, \quad (6.49)$$

$$v_\phi(v'_r - v_\phi) = \frac{H_\phi}{4\pi\rho}(H'_r - H_\phi), \quad (6.50)$$

$$p + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (6.51)$$

$$v_\phi v'_z = \frac{H_\phi}{4\pi\rho} H'_z, \quad (6.52)$$

$$p = C\rho^\gamma. \quad (6.53)$$

В решениях этого типа, согласно (6.46), (6.53) и (6.51), $\rho = \text{const}$, $p = \text{const}$ и $H^2 = \text{const}$.

Комбинируя (6.49) и (6.52), получим

$$\left(v_\phi^2 - \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho}\right)v'_z = 0, \quad \left(v_\phi^2 - \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho}\right)H'_z = 0. \quad (6.54)$$

Комбинируя (6.47) и (6.50), получим

$$\left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho} \right) (v'_r - v_\varphi) = 0, \quad \left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho} \right) (H'_r - H_\varphi) = 0. \quad (6.55)$$

Из (6.54) и (6.55) следует, что либо

$$v'_z = H'_z = v'_r - v_\varphi = H'_r - H_\varphi = 0, \quad (6.56)$$

либо

$$v_\varphi^2 = H_\varphi^2 / (4\pi\rho). \quad (6.57)$$

В первом случае, используя уравнения (6.50) и (6.48), находим решение в виде

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \text{const}, & H_z &= \text{const}, \\ v_r &= A \cos(\varphi - \varphi_0), & v_\varphi &= -A \sin(\varphi - \varphi_0), \\ H_r &= B \cos(\varphi - \varphi_1), & H_\varphi &= -B \sin(\varphi - \varphi_1), \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

где $A, B, \varphi_0, \varphi_1$ — постоянные. Полученное решение представляет собой поступательный поток, причем постоянные A, B, φ_0 и φ_1 определяются граничными условиями.

Из равенств (6.49) и (6.47) следует, что

$$\left. \begin{aligned} H'_z &= \frac{H_\varphi}{v_\varphi} v'_z, \\ H'_r &= \frac{H_\varphi}{v_\varphi} v'_r. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Если имеет место равенство (6.57), то $H_\varphi/v_\varphi = \sqrt{4\pi\rho} = K = \text{const}$. Интегрируя уравнения (6.59), находим, что

$$H_z = Kv_z + K_1, \quad K_1 = \text{const}, \quad H_r = Kv_r + K_2, \quad K_2 = \text{const}.$$

Из уравнений (6.46) и (6.48) при условии (6.57) следует, что

$$H'_\varphi + H'_r = Kv'_\varphi + Kv'_r + K_2 = K_2 = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{H} = Kv + K_1 \mathbf{e}_z, \quad (6.60)$$

т. е. в этом решении в системе координат, движущейся со скоростью $K_1 K^{-1} \mathbf{e}_z$, векторы v и \mathbf{H} параллельны и постоянны по абсолютной величине. Для завершения построения решения в

в этом случае необходимо найти вектор \mathbf{H} . Для его определения используются только соотношение $H^2 = \text{const}$ и уравнение (6.48), из которых следует, что

$$H_\phi'^2 = H^2 - H_\phi^2 - H_z^2. \quad (6.61)$$

Таким образом, решение задачи зависит от одной произвольной функции, за которую можно принять $H_z(\phi)$. Тогда уравнение (6.61) определяет H_ϕ , а H , находится из соотношения

$$H_r^2 = H^2 - H_\phi^2 - H_z^2.$$

Полученное решение назовем *стационарной вращательной простой волной*. Это решение может описывать движения как газа, так и несжимаемой жидкости. Выберем систему координат, движущуюся вдоль оси z , так, чтобы в равенствах (6.60) было $K_1 = 0$; тогда во всем потоке $\mathbf{v} = \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho}$. Отсюда следует, что для несжимаемой жидкости полученное решение есть частный случай решений, рассмотренных нами ранее, в которых $\mathbf{v} = \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho}$, и форма линий тока произвольна, а именно такое решение из этого класса, в котором все величины зависят только от угла ϕ и давление постоянно. Если $H_z(\phi)$ меняется разрывным образом, то решение (6.59)–(6.61) описывает стационарный вращательный разрыв. Если $H_z(\phi) = \text{const}$, то получаем частный случай решения (6.58), описывающего поступательный поток.

Рассмотрим теперь решения, в которых происходит изменение плотности. Система (6.38)–(6.45) в общем случае пока не исследована, известно только, что в области, где происходит изменение параметров потока, она имеет алгебраический интеграл вида

$$\nu_\phi^4 - \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + C\gamma\rho^{\gamma-1} \right) \nu_\phi^2 + C\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho} = 0,$$

который показывает, что решения системы (6.38)–(6.45) обладают тем свойством, что нормальная к лучу $\phi = \text{const}$ скорость равна одной из скоростей звука. Отсюда следует, что в искомом решении прямые $\phi = \text{const}$ являются характеристиками, так же как в соответствующем решении в обычной газовой динамике.

В дальнейшем будем исследовать простые волны, в которых вектор скорости v параллелен вектору напряженности магнитного поля H . В этом случае из уравнений $\operatorname{div}v = 0$ и $\operatorname{div}H = 0$ следует, что

$$H = C_1 \rho v, \quad (6.62)$$

где $C_1 = \text{const}$. При этом уравнения индукции удовлетворяются, а уравнения неразрывности и движения приводятся к виду

$$v'_\phi + v_r = -\frac{v_\phi \rho'}{\rho}, \quad (6.63)$$

$$v_\phi^2 = \frac{d}{d\rho} \left(p + \frac{C_1^2 \rho^2 v^2}{8\pi} \right), \quad (6.64)$$

$$\left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi} \rho \right) (v'_r - v_\phi) = \frac{C_1^2}{4\pi} \rho' v_r, \quad (6.65)$$

$$\left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi} \rho \right) v'_z = \frac{C_1^2}{4\pi} \rho' v_z, \quad (6.66)$$

$$p = C \rho^\gamma. \quad (6.67)$$

Уравнение (6.66) интегрируется:

$$v_z = C_2 \left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi} \rho \right)^{-1} = C_2 (1 - b\rho)^{-1}, \quad (6.68)$$

где $b = C_1^2 / 4\pi$.

Если в уравнениях (6.63)–(6.65) выразить v_z из (6.68) и p из (6.67), то получим три обыкновенных дифференциальных уравнения для определения ρ , v_ϕ , v_r . Произведем дифференцирование в правой части (6.64):

$$v_\phi^2 = C \gamma \rho^{\gamma-1} + b \rho v^2 + \frac{b}{2} \rho^2 \left[\frac{2C_2^2 b}{(1-b\rho)^3} + \frac{d}{d\rho} (v_\phi^2 + v_r^2) \right]. \quad (6.69)$$

Умножая (6.63) на v_ϕ , (6.65) на v_r , имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{dv_\phi^2}{d\rho} + \frac{v_\phi v_r}{\rho'} = -\frac{v_\phi^2}{\rho}, \quad \frac{1}{2} \frac{dv_r^2}{d\rho} - \frac{v_\phi v_r}{\rho'} = \frac{b v_r^2}{1-b\rho}.$$

Складывая эти уравнения и подставляя в (6.69), найдем конечное соотношение, связывающее v_ϕ , v_r , ρ и являющее, следовательно, интегралом системы (6.63)–(6.67):

$$\begin{aligned} v_\phi^2 &= C\gamma\rho^{\gamma-1} + \frac{b^2\rho^2C_2^2}{(1-b\rho)^3} + b\rho(v_\phi^2 + v_r^2 + v_z^2) + \\ &+ b\rho^2 \left(\frac{bv_r^2}{1-b\rho} - \frac{v_\phi^2}{\rho} \right) = C\gamma\rho^{\gamma-1} + \frac{b\rho C_2^2}{(1-b\rho)^3} + \frac{b\rho}{1-b\rho} v_r^2. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Так как $H = C_1\rho v$ и $\sigma = \infty$, то $E = -\frac{1}{2}(v \times H) = 0$ и, следовательно, система (6.63)–(6.66) имеет еще один интеграл – интеграл типа Бернуlli:

$$\frac{v_\phi^2 + v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} C\rho^{\gamma-1} = C_3. \quad (6.71)$$

Из соотношений (6.70) и (6.71) можно выразить v_ϕ и v_r , через ρ . После этого функция $\rho(\phi)$ находится квадратурой из уравнения неразрывности

$$\rho = - \int_{\phi^*}^{\phi} \frac{v_r v_\phi d\phi}{\frac{v_\phi^2}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{dv_\phi^2}{d\rho}} + C_4. \quad (6.72)$$

Убедимся в том, что $v_\phi^2 = a_{+-}^2$, т.е. что лучи $\phi = \text{const}$ являются характеристиками. Действительно,

$$a_{+-}^2 = \frac{1}{2} [(C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2) \pm \sqrt{(C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2)^2 - 4b\rho C\gamma\rho^{\gamma-1} v_\phi^2}],$$

но в силу (6.71) и (6.70)

$$\begin{aligned} C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2 &= C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho(v_\phi^2 + v_r^2 + v_z^2) = C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho \left[v_\phi^2 + \frac{C_2^2}{(1-b\rho)^2} \right] + \\ &+ (1-b\rho)v_\phi^2 - C\gamma\rho^{\gamma-1}(1-b\rho) - b\rho \frac{C_2^2}{(1-b\rho)^2} = v_\phi^2 + C\gamma b\rho^\gamma, \end{aligned}$$

следовательно, $a_{+-}^2 = \frac{1}{2} [(v_\phi^2 + C\gamma b\rho^\gamma) \pm |v_\phi^2 - C\gamma b\rho^\gamma|]$.

Таким образом,

$$a_+^2 = v_\phi^2, \quad a_-^2 = C\gamma b\rho^\gamma \text{ при } v_\phi^2 > C\gamma b\rho^\gamma,$$

$$a_+^2 = C\gamma b\rho^\gamma, \quad a_-^2 = v_\phi^2 \text{ при } v_\phi^2 < C\gamma b\rho^\gamma,$$

т.е. v_ϕ совпадает с медленной скоростью звука, если $v_\phi^2 < C\gamma b\rho^\gamma$; при обратном знаке неравенства v_ϕ совпадает с быстрой скоростью звука.

Решение содержит пять констант: C , C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Эти константы должны быть определены из граничных условий, которые могут быть заданы на одном из лучей $\phi = \phi^*$. Заметим, что если $v_z = 0$ при $\phi = \phi^*$, т. е. на начальной характеристикике движение плоское, то $C_2 = 0$ и $v_z \equiv 0$, т. е. все течение является плоским.

Так как все величины в полученном решении выражаются через ρ , то, для выяснения характера зависимости всех величин от угла ϕ в простых волнах разного типа достаточно выяснить характер зависимости ρ от угла ϕ . Из (6.72) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{1}{v_r v_\phi} \left[\frac{v_\phi^2}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{dv_\phi^2}{d\phi} \right] = -\frac{1}{v_\phi v_r} \left[\frac{\gamma+1}{2} C\gamma \rho^{\gamma-2} - \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2(\gamma-1)} C\gamma b \rho^{\gamma-1} + \right. \\ \left. + 3bC_3 \right] = -\frac{1}{v_\phi v_r} \left[\frac{\gamma+1}{2} C\gamma \rho^{\gamma-2} \left(1 - \frac{\gamma+2}{\gamma-1} b\rho \right) + 3bC_3 \right] = -\frac{F}{v_\phi v_r}. \end{aligned}$$

Для того чтобы определить характер изменения $\rho(\phi)$, надо знать знак F в последнем выражении. Так как

$$b\rho = N^2/M^2 \equiv H^2/4\pi\rho v^2,$$

то в медленных волнах ($M^{*2} \equiv N^2/(1+N^2) < M^2 < \min(1, N^2)$) имеем $1 < b\rho < 1+N^2$, а в быстрых волнах ($\max(1, N^2) < M^2 < \infty$) — $0 < b\rho < 1$. Используя (6.70), вычислим выражение F для случая $b\rho = 1$:

$$\begin{aligned} F|_{b\rho=1} = F^* = \frac{\gamma+1}{2} C\gamma \rho^{\gamma-2} \left(1 - \frac{\gamma+2}{\gamma-1} b\rho \right) + 3bC_3 = -\frac{3(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} C\gamma \rho^{\gamma-2} + 3bC_3 = \\ = \frac{3}{2} \left[-\frac{\gamma+1}{\gamma-1} C\gamma \rho^{\gamma-2} + 2bC_3 \right] = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left(v_\phi^2 - C\gamma \rho^{\gamma-1} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left(v_\phi^2 - a_0^2 \right). \end{aligned}$$

Так как для медленных волн $F < F^*$, а для быстрых волн $F > F^*$, то для быстрых волн $F > 0$, для медленных волн $F < 0$.

Отсюда следует, что в медленных волнах

$$\frac{d\phi}{dp} > 0 \text{ при } \operatorname{sign} v_r = \operatorname{sign} v_\phi$$

$$\frac{d\phi}{dp} < 0 \text{ при } \operatorname{sign} v_r = -\operatorname{sign} v_\phi,$$

а в быстрых волнах

$$\frac{d\phi}{dp} < 0 \text{ при } \operatorname{sign} v_r = \operatorname{sign} v_\phi$$

$$\frac{d\phi}{dp} > 0 \text{ при } \operatorname{sign} v_r = -\operatorname{sign} v_\phi.$$

Следовательно, медленные волны сжатия состоят из характеристик, направленных вниз по потоку, а волны разрежения — из характеристик, направленных вверх по потоку. В быстрых волнах положение обратное.

Быстрые и медленные стационарные простые волны разрежения и сжатия могут описывать решение задачи о стационарном обтекании угла, меньшего π . При этом если в потоке отсутствуют другие источники возмущений, то волна, описывающая течение газа, должна располагаться вдоль уходящих от угла характеристик. В этом случае, если в набегающем потоке $M^* < M < \min(1, N)$, то решение описывается медленной простой волной разрежения, направленной вверх по потоку. Если же $\max(1, N) < M < \infty$, то решение описывается быстрой простой волной разрежения, направленной вниз по потоку (рис. 45).

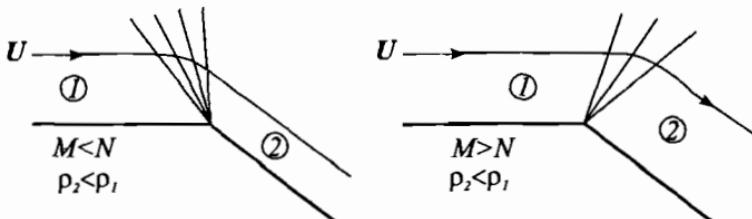


Рис. 45

При обтекании угла, большего π , возникает ударная волна. При $M^* < M < \min(1, N)$ ударная волна направлена вверх по потоку, а при $\max(1, N) < M < \infty$ — вниз по потоку.

Глава 7

Стационарные движения неидеального^{*} газа

§ 1. Течения в трубках тока

При изучении движения газа в трубах и каналах переменного сечения часто пользуются теорией одномерных стационарных движений (гидравлическое приближение).

Будем считать, что газ является невязким и нетеплопроводным и все параметры потока не меняются в плоскости сечения трубы, перпендикулярной к оси трубы, т. е. что все функции зависят только от одной координаты x , отсчитываемой вдоль оси трубы. Такой подход эквивалентен предположению о возможности осреднения потока в плоскости, перпендикулярной к оси трубы. Если рассмотреть трубу бесконечно малого сечения — трубку тока, то такое осреднение всегда возможно сделать вследствие малой пространственной протяженности сечения трубы и соответственно малого отличия функций от их значений на оси трубы. Таким образом, одномерная теория течений газа по трубам эквивалентна теории течения в трубках тока.

Рассмотрим, к каким результатам может привести воздействие внешнего электромагнитного поля на поток газа в трубке тока. При этом не будем интересоваться способами создания электромагнитного поля. Будем считать, что вдоль трубки тока задано некоторое электрическое поле $E(x)$ и магнитное поле $H(x)$, влияние которых на стационарный поток проводящей жидкости будем изучать. В связи с этим отпадает необходимость использования уравнения индукции. Задание $E(x)$ и $H(x)$ вдоль трубки тока не означает того, что E и H являются функциями только x во всем пространстве. Эти величины могут быстро меняться в направлении, перпендикулярном к трубке тока, однако внутри трубки это изменение мало, так как ее

* См. сноску на с. 85.

ширина предполагается достаточно малой. Отсюда следует, что хотя электромагнитное поле в пространстве $E(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла, значения напряженностей полей вдоль трубы тока $E(x) = E(x, y_0, z_0)$, $H(x) = H(x, y_0, z_0)$ ($y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$ — уравнение оси трубы тока), вообще говоря, не удовлетворяют системе одномерных уравнений Максвелла $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right)$.

Если канал имеет конечное сечение, то введение средних по сечению канала значений механических величин и напряженностей электрического и магнитного полей позволяет применять теорию одномерных движений для каналов конечной ширины, когда движение, строго говоря, не является одномерным (такие движения называют *квазиодномерными*).

Итак, рассмотрим одномерные стационарные движения невязкого нетеплопроводного проводящего газа в трубке тока переменного сечения $\Sigma = \Sigma(x)$ и в заданном электромагнитном поле $E(x)$ и $H(x)$ [11]. Для простоты будем считать, что E и H перпендикулярны друг к другу и лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Выберем ось x вдоль оси трубы тока, ось y — по направлению электрического поля, ось z , перпендикулярную к x и y , — вдоль направления магнитного поля (рис. 46).

Уравнения, описывающие движения в трубке тока, можно представить в виде

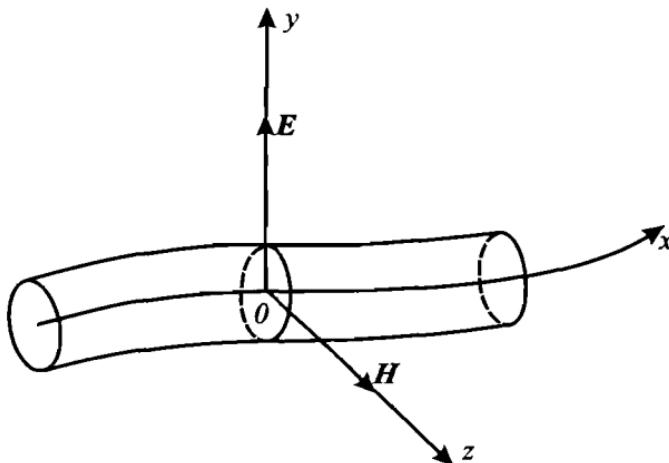


Рис. 46

$$\rho u \Sigma = m = \text{const}, \quad (7.1)$$

$$\rho uu' + p' = \frac{1}{c} [j \times H] = \frac{1}{c} j_y H = \frac{1}{c} \sigma \left(E - \frac{u}{c} H \right) H, \quad (7.2)$$

$$\rho u (c_p T' + uu') = Ej = \sigma \left(E - \frac{u}{c} H \right) E. \quad (7.3)$$

$$p = R\rho T, \quad (7.4)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x . Первое из этих уравнений выражает постоянство расхода массы вдоль трубы тока, второе — изменение количества движения, третье — изменение энергии, четвертое — уравнение состояния газа. Из этих уравнений получим соотношения, выражающие изменение скорости и числа Маха M вдоль трубы тока через параметры потока.

Дифференцируя уравнения (7.1) и (7.4) по x , получаем

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{u'}{u} + \frac{\Sigma'}{\Sigma} = 0, \quad \frac{p'}{p} + \frac{\rho'}{\rho} + \frac{T'}{T} = 0.$$

Исключив при помощи этих соотношений T' из уравнения (7.3), получим

$$p' = -p \left(\frac{u'}{u} + \frac{\Sigma'}{\Sigma} \right) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[-\rho uu' + \frac{\sigma}{u} \left(E - \frac{u}{c} H \right) E \right].$$

Подставив это соотношение в уравнение (7.2), преобразуем его к следующему виду:

$$u' = \frac{1}{M^2 - 1} \left[u \frac{\Sigma'}{\Sigma} - \frac{\sigma H^2}{c^2 p} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{c^2 E^2}{H^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} u \frac{cE}{H} - \frac{cE}{H} u + u^2 \right) \right],$$

или окончательно:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{M^2 - 1} \left[u \frac{\Sigma'}{\Sigma} - \frac{\sigma H^2}{c^2 p} (u - u_1)(u - u_3) \right], \\ u_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{cE}{H}, \quad u_3 = \frac{cE}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Аналогичным образом может быть получено следующее выражение, определяющее изменение числа M вдоль трубы тока:

$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{M^2 - 1} \left[M \frac{\Sigma'}{\Sigma} - \frac{\sigma H^2}{a_0 p c^2} (u - u_3)(u - u_2) \right], \\ a_0^2 &= \frac{\gamma p}{\rho}, \quad u_2 = \frac{1 + \gamma M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} u_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Если электромагнитное поле отсутствует, то полученные соотношения переходят в известные газодинамические соотношения для течения в каналах переменного сечения. Для того чтобы исследовать характер влияния электромагнитного поля на течение газа, рассмотрим течение в трубке тока постоянно-го сечения $\Sigma' = 0$. Характер влияния определяется знаком правых частей равенств (7.5) и (7.6). Так как при $M < 1$ выполняются неравенства $u_2 < u_1 < u_3$, а при $M > 1$ — неравенства $u_1 < u_2 < u_3$, то влияние электромагнитного поля на движение будет разным в областях $M > 1$ и $M < 1$. Кроме того, в отличие от обычной газовой динамики, характер влияния (знаки правых частей уравнений (7.5) и (7.6)) зависит от абсолютных значений u и M в данном сечении.

Линии $u = u_1$, $u = u_2$, $u = u_3$, $M = 1$ разбивают плоскость u, M (рис. 47) на области:

I. $M > 1$

$A_1: u_3 < u,$

$B_1: u_2 < u < u_3,$

$C_1: u_1 < u < u_2,$

$D_1: u < u_1.$

II. $M < 1$

$A_2: u_3 < u,$

$B_2: u_1 < u < u_3,$

$C_2: u_2 < u < u_1,$

$D_2: u < u_2.$

Характер воздействия электромагнитного поля на течение в сечении x зависит от того, в какую из этих областей попадает точка, соответствующая u и M в данном сечении. При этом надо помнить, что u_1, u_2, u_3 , вообще говоря, различны в различных сечениях трубы тока.

Пусть u и M — значения скорости и числа Маха в некотором сечении. Тогда при смещении вдоль оси x эти параметры меняются так, что точка (u, M) смещается в областях A_2, B_1, D_2 —

направо вверх, в областях A_1, B_1, D_2 – налево вниз, и в областях C_1 и C_2 – налево вверх. На линии $u = u_2(M)$ смещение происходит в вертикальном направлении. На рис. 47 направления изменения величин u и M в различных областях указаны стрелками.

Из уравнений (7.5) и (7.6) ясно, что переход через значение $M = 1$ в точках, отличных от u_3 и u_1 , невозможен (см. рис. 47). Здесь явление аналогично подобным явлениям обычной газовой динамики. Если при $M = 1$ скорость u равна u_1 или u_3 то при этих условиях возможен непрерывный разгон или замедление потока с переходом через скорость звука.

Области C_1 и C_2 соответствуют ускорению потока при уменьшении числа M . В этих областях скорость звука растет быстрее скорости потока.

Полученные результаты относительно характера изменения скорости можно пояснить, если пользоваться тем, что воздействие электромагнитного поля на течение выражается в силовом воздействии и в выделении тепла. Отношение работы механических сил $F \cdot v = \frac{1}{c} (j \times H) \cdot v$ к полной подводимой энергии $N = E \cdot j$ в данном случае имеет вид

$$\eta = \frac{F \cdot v}{N} = \frac{\sigma \left(E - \frac{u}{c} H \right) Hu}{\left(E - \frac{u}{c} H \right) cE} = \frac{u}{u_3}.$$

Если $u > u_3$, то $N < 0$, $F \cdot v < 0$ и, следовательно, механическая энергия газа при его движении переходит в энергию электромагнитного поля. Если же $u < u_3$, то энергия электромагнит-

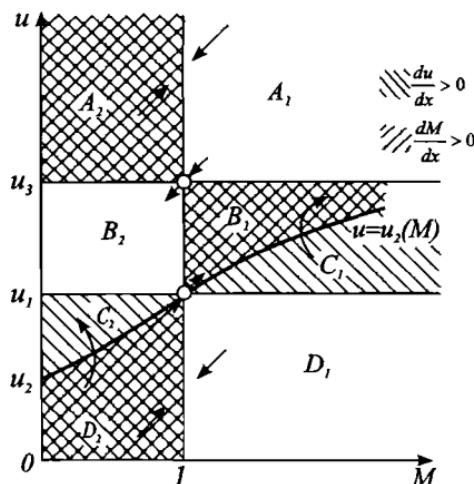


Рис. 47

нога поля передается газу в виде механической и тепловой энергии. В последнем случае при η , близких к единице (u близко к u_3), воздействие поля выражается в основном в виде работы электромагнитных сил над газом, а при малых η (u мало) — в основном в виде подвода тепла. Если воспользоваться результатами газовой динамики, то можно сделать вывод, что при η , близких к единице, дозвуковой поток газа должен замедляться, а сверхзвуковой ускоряться. При малых η , наоборот, дозвуковой поток должен ускоряться, а сверхзвуковой замедляться. Эти выводы находятся в соответствии с результатами, полученными выше. Из (7.5) следует, что $u' = 0$ при $u = u_1$ и $u = u_3$, причем при $u = u_1$ тепловое и механическое воздействия компенсируют друг друга, а при $u = u_3$ они равны нулю.

Рассмотрим теперь движение электропроводного невязкого и нетеплопроводного совершенного газа в строго одномерной постановке (поле удовлетворяет одномерным уравнениям Максвелла, сечение трубы тока постоянно) [1]. Уравнения, описывающие такие движения, можно привести к четырем конечным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= u, \\ \rho u^2 + p + \frac{H^2}{8\pi} &= \mathcal{Q}, \\ \rho u \left(i + \frac{u^2}{2} \right) + E_0 H &= \mathcal{E}, \\ \frac{c}{4\pi} E &= E_0, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

выражающим законы сохранения массы, импульса, энергии и напряженности электрического поля вдоль трубы тока, и одному дифференциальному уравнению

$$-\nu_m \frac{dH}{dx} = 4\pi E_0 - uH, \quad (7.8)$$

описывающему изменение магнитного поля вдоль трубы тока. В уравнениях (7.7)–(7.8), как и раньше, v ($u, 0, 0$), H ($0, 0, H$), E ($0, E, 0$), $i = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p}{\rho}$ — энталпия единицы массы совершенного газа, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ —магнитная вязкость. Константы ($m, \mathcal{Q}, \mathcal{E}, E_0$)

определяются заданием потоков массы, импульса, энергии и напряженности электрического поля в некотором сечении, которое можно принять за начальное.

Исключая из (7.7) давление и плотность, получим, что скорость и магнитное поле связаны вдоль трубки тока соотношением

$$u = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{m} \left(\frac{q}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right) \pm \sqrt{\left[\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{m} \left(\frac{q}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right) \right]^2 + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\frac{E_0}{m} H - \mathcal{E} \right)}. \quad (7.9)$$

В плоскости (u, H) точки, соответствующие различным сечениям трубки тока (различным x), лежат на кривой (7.9), вид которой в зависимости от определяющих констант может быть легко исследован. Для примера рассмотрим случай не очень больших E_0 , когда кривая (7.9) имеет вид, представленный на рис. 48. Исключая в (7.8) величину u при помощи (7.9) и интегрируя, получаем зависимость напряженности магнитного поля вдоль трубки тока от координаты x :

$$x = \int v_m (u(H) H - 4\pi E_0)^{-1} dH + \text{const}. \quad (7.10)$$

Сечениям трубки тока, в которых отсутствует ток $\left(\frac{dH}{dx} = 0 \right)$, соответствуют на плоскости (u, H) точки гиперболы

$$uH = 4\pi E_0, \quad (u = u_3 = cE/H). \quad (7.11)$$

Следовательно, сечениям трубки тока, в которых отсутствует электромагнитное воздействие на поток, соответствуют точки пересечения кривых (7.9) и (7.11). В этих точках (A, B, G на рис. 48) все производные равны нулю, т. е. поток является поступательным. Если точка, соответствующая u и H , в данном сечении трубки тока лежит на плоскости (u, H) выше гиперболы (7.11), то с ростом x магнитное поле вдоль трубки тока возрастает ($dH/dx > 0$), если же эта точка лежит ниже гиперболы (7.11), то с ростом x магнитное поле убывает ($dH/dx < 0$). Направление изменения магнитного поля вдоль трубки тока указано на рис. 48 стрелками. Точкам, в которых скорость потока равна скорости звука, соответствуют на плоскости (u, H) точки параболы

$$u = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{m} \left(\frac{q}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right). \quad (7.12)$$

Кривые (7.9) и (7.12) пересекаются в точках, в которых $dH/du=0$ (точки C, D, F на рис. 48).

Очевидно, что при расположении кривых (7.9) и (7.11), указанном на рис. 48, непрерывный переход через скорость звука

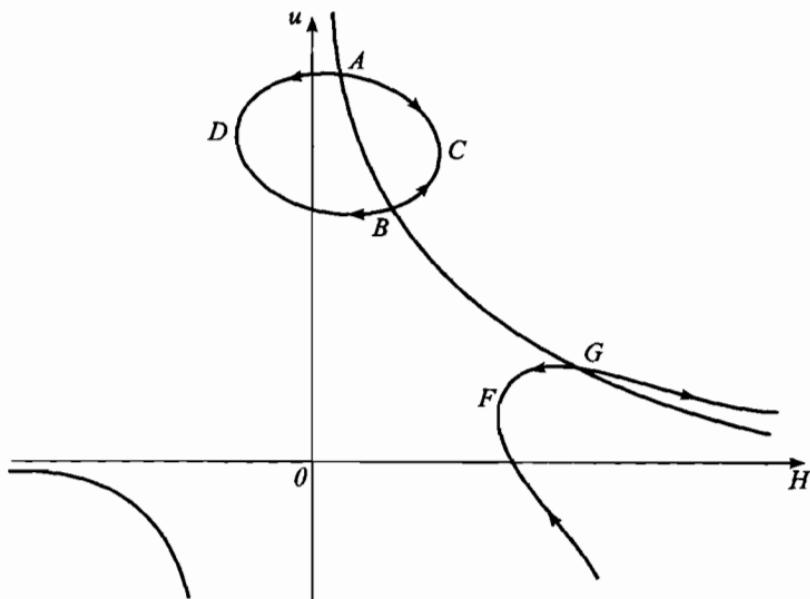


Рис. 48

($u = a_0$) при заданных константах m, \mathcal{L}, E_0 невозможен ни при каких начальных данных (см. знак изменения H). Непрерывный переход через скорость звука возможен при $u = u_3 = a_0$, т. е. при таких начальных данных, при которых точки B и C (см. рис. 48) совпадают. В этом случае происходит непрерывный переход из сверхзвуковой области в дозвуковую (см. для сравнения рис. 47). Если начальные данные таковы, что точка B лежит выше точки C , звуковая скорость при положительных H недостижима.

Отметим, что если в некотором сечении трубы тока параметры потока таковы, что через него продолжить поток непрерывным образом нельзя, то в некоторых случаях возможно построить течения, содержащие на исследуемом участке трубы тока скачки уплотнения. Скачкам уплотнения в данной постановке соответствуют переходы при постоянном магнитном

поле с верхней ветви кривой (7.9) на нижнюю ветвь. Эти скачки представляют собой обычные ударные волны, так как соотношения (7.7) при $H = \text{const}$ представляют собой условия на газодинамической ударной волне.

Точки потока, в которых силовое воздействие электромагнитного поля компенсируется тепловым воздействием ($u = u_1$), соответствуют на плоскости (u, H) точки гиперболы

$$u = u_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{cE}{H}, \quad (7.13)$$

лежащей ниже гиперболы (7.11). Если гипербола (7.13) не проходит через точку C , то в точках ее пересечения с кривой (7.9) $du/dH = 0$, т. е. при переходе через точки гиперболы (7.13), замедляющийся дозвуковой поток начинает ускоряться, а ускоряющийся сверхзвуковой поток замедляется, что находится в соответствии с результатами, полученными выше (см. рис. 47).

Заметим, что рассмотренная задача о течении в трубке тока постоянного сечения аналогична задаче о структуре магнитогидродинамической ударной волны с учетом только диссипации за счет электрических токов (магнитогидродинамической ударной волне на плоскости (u, H) соответствует переход $A \rightarrow B$). В более полной постановке эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 2. Структура магнитогидродинамической ударной волны

К задаче об одномерных стационарных течениях газа приводит также задача о структуре ударной волны [1–10], которая в идеальном газе представляет собой геометрическую поверхность разрыва параметров газового потока. В действительности, конечно, ударная волна представляет собой узкий слой, в котором параметры потока изменяются от их значений перед поверхностью разрыва до значений за ней. Если ширина этого слоя много меньше характерной длины задачи, то законно отождествлять этот слой с поверхностью разрыва в идеальном газе. Но если нас интересует характер изменения параметров внутри самого слоя, представляющего ударную волну, а это может в ряде вопросов оказаться необходимым, то благодаря узости слоя и связанным с этим большим градиентом газодинами-

ческих величин, диссипативными процессами в этом слое пре-небречь нельзя. Вблизи некоторой точки волну можно счи-тать плоской, а движение внутри слоя, представляющего удар-ную волну, — стационарным в системе координат, в которой волна поконится. В связи с этим задача о структуре ударной волны, или, что то же самое, о течении внутри узкого слоя, представляющего ударную волну, сводится к рассмотрению одномерных стационарных движений вязкого, теплопроводного и электропроводного газа.

Рассмотрим задачу о структуре ударной волны [4, 8] в газе, уравнение состояния которого имеет вид $p = p(V, s)$, где V — удельный объем, s — энтропия. На функцию $p(V, s)$ наложим ограничения довольно общего типа, а именно, будем считать, что

$$p'_V < 0, \quad p''_{VV} > 0, \quad p'_s > 0. \quad (7.14)$$

Первые два неравенства показывают, что на плоскости (p, V) кривая $s = \text{const}$ имеет отрицательный наклон и обращена выпуклостью вниз.

Ниже будет показано, что если два стационарных однородных потока идеального газа в магнитном поле связаны через быструю магнитогидродинамическую ударную волну, то всегда найдется единственное непрерывное решение уравнений магнитной гидродинамики, описывающее стационарное одномерное течение вязкого теплопроводного конечнопроводящего газа (при произвольной зависимости диссипативных коэффициентов от параметров потока), обращающееся при удалении в беско-нечность вверх и вниз по течению в однородные потоки, па-раметры которых связаны соотношениями на быстрой ударной волне. Общего доказательства существования решения, описы-вающего структуру медленной ударной волны, в настоящее время нет. Существование такого решения доказано для медлен-ных ударных волн малой интенсивности. Для неэволюционных ударных волн, в которых изменяется магнитное поле, показано, что всегда можно так подобрать диссипативные коэффициенты, что решения, представляющего структуру ударной волны, не существует.

Для описания стационарных одномерных (вдоль оси x) тече-ний газа воспользуемся непосредственно уравнениями Макс-велла, законом Ома и законами сохранения массы, импульса и

энергии, следствиями которых являются уравнения магнитной гидродинамики. Из уравнений Максвелла и закона Ома

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \left[\mathbf{E} + \left(\frac{\nu}{c} \times \mathbf{H} \right) \right] \quad (7.15)$$

в случае одномерного движения следует, что

$$E_y = \text{const}, \quad E_z = \text{const}, \quad H_x = \text{const}, \quad (7.16)$$

$$v_m \frac{dH_y}{dx} = uH_y - vH_x + cE_z, \quad v_m \frac{dH_z}{dx} = uH_z - wH_x - cE_y.$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии в этом случае выражают постоянство потока массы

$$\rho u = m, \quad (7.17)$$

составляющих потока импульса

$$\left. \begin{aligned} \rho u^2 + p + \frac{H^2 - H_x^2}{8\pi} - \mu_1 \frac{du}{dx} &= \mathcal{Q}_x, \\ \rho uv - \frac{H_x}{4\pi} H_y - \mu \frac{dv}{dx} &= \mathcal{Q}_y, \\ \rho uw - \frac{H_x}{4\pi} H_z - \mu \frac{dw}{dx} &= \mathcal{Q}_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

и потока энергии

$$\begin{aligned} \rho u \left[i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right] + \frac{c}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y) - \mu_1 u \frac{du}{dx} - \\ - \mu v \frac{dv}{dx} - \mu w \frac{dw}{dx} - k \frac{dT}{dx} &= m \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Здесь m , \mathcal{Q}_x , \mathcal{Q}_y , \mathcal{Q}_z и $m \mathcal{E}$ – постоянные, представляющие собой потоки массы, составляющих импульса и энергии, которые могут быть выражены, например, через параметры потока при $x = -\infty$; $i = p/\rho + \epsilon$ – энталпия газа, μ – коэффициент вязкости, $\mu_1 = \zeta + 4\mu/3$, ζ – вторая вязкость, k – коэффициент теплопроводности.

Обозначим

$$H_0 = H_x/(4\pi m), \quad E_0 = cE_z/(4\pi m), \quad \mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}$$

и выберем систему координат так, чтобы в ней $E_y = \mathcal{Q}_y = \mathcal{Q}_z = 0$ (эти равенства имеют место в системе координат, повернутой относительно исходной системы вокруг оси x так, чтобы $E_y = 0$, и движущейся относительно исходной системы со скоростью $U_y = \mathcal{Q}_y/m$, $U_z = \mathcal{Q}_z/m$.

Из уравнения (7.17) следует, что

$$u = mV, V = 1/\rho.$$

При этом система уравнений, описывающая задачу о структуре ударной волны в выбранной системе координат, примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nu_m}{4\pi} \frac{dH_y}{dx} &= m \left(\frac{H_y V}{4\pi} - H_0 v + E_0 \right), \\ \frac{\nu_m}{4\pi} \frac{dH_z}{dx} &= m \left(\frac{H_z V}{4\pi} - H_0 w \right), \\ \mu \frac{dv}{dx} &= m(v - H_0 H_y), \\ \mu \frac{dw}{dx} &= m(v - H_0 H_z), \\ \mu_1 m^2 \frac{dV}{dx} &= m \left(p + m^2 V + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} - \mathcal{Q} \right), \\ k \frac{dT}{dx} &= m \left(\epsilon - \frac{m^2 V^2}{2} - \frac{v^2}{2} - \frac{w^2}{2} - \frac{H_y^2 V}{8\pi} - \frac{H_z^2 V}{8\pi} - \right. \\ &\quad \left. - E_0 H_y + H_0 H_y v + H_0 H_z w + \mathcal{Q} V - \mathcal{E} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Введем в рассмотрение две функции:

$$D = \frac{1}{2mT} \left\{ \frac{\nu_m}{4\pi} \left(\frac{dH_y}{dx} \right)^2 + \frac{\nu_m}{4\pi} \left(\frac{dH_z}{dx} \right)^2 + \mu_1 m^2 \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \mu \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{k}{T} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right\} \quad (7.21)$$

и

$$P = \frac{1}{T} \left\{ \frac{H_y^2 V}{8\pi} + \frac{H_z^2 V}{8\pi} + \frac{m^2 V^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} - f(V, T) + E_0 H_y - H_0 H_y v - H_0 H_z w - \mathcal{Q}V + \mathcal{E} \right\}, \quad (7.22)$$

где $f = \varepsilon - Ts$ — массовая плотность свободной энергии, удовлетворяющая термодинамическому тождеству $df = -sdT - pdV$, которое является следствием первого и второго законов термодинамики ($Tds = d\varepsilon + pdV$). При этом нетрудно выразить энтропию s через функцию P :

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}(PT) = P + T \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (7.23)$$

Система уравнений (7.20) может быть записана через функции (7.21) и (7.22) следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial P}{\partial q_j}, \quad (7.24)$$

где через q_j обозначены величины H_y, H_z, v, w, V, T , а $\dot{q}_j = dq_j/dx$.

Так как $D(\dot{q}_j)$ — квадратичная форма переменных \dot{q}_i , то

$$2D = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{dP}{dx}, \quad (7.25)$$

или

$$P(x_2) - P(x_1) = 2 \int_{x_1}^{x_2} D dx. \quad (7.26)$$

Так как $D \geq 0$, то $P(q_i)$ — неубывающая функция вдоль интегральных кривых системы (7.24), причем $P(q_i)$ возрастает, когда действует хотя бы один механизм диссипации. В особых точках A_k системы уравнений (7.24), которые являются стационарными точками функции P (так как в этих точках $dP/dq_i = 0$), имеют место равенства

$$D = 0, \quad \frac{dP}{dx} = 0. \quad (7.27)$$

Поступательному однородному потоку ($\dot{q}_i = 0$) соответствуют особые точки A_k системы (7.24). Поэтому решение задачи о структуре ударной волны должно представляться интегральной

кривой системы (7.24) в пространстве q_i , соединяющей особые точки этой системы, вдоль которой x меняется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если A_i – особая точка, соответствующая начальному состоянию, а A_j – особая точка, соответствующая конечному состоянию, то из уравнений (7.26) и (7.23) следует, что

$$P(A_i) < P(A_j), \quad s(A_i) < s(A_j). \quad (7.28)$$

Введем пространство переменных, $\{H_y, H_z, v, w, V, T, m, H_0, \mathcal{L}, \mathcal{E}, E_0\}$ и рассмотрим в нем поверхность Σ , точки которой удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial H_y} = \frac{\partial P}{\partial H_z} = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T} = 0. \quad (7.29)$$

В силу определения Σ очевидно, что все особые точки системы (7.24) лежат на поверхности Σ . Две точки поверхности Σ будем называть *объединенными*, если они имеют одну и ту же проекцию на подпространство $\{m, H_0, E_0, \mathcal{L}, \mathcal{E}\}$. Такие точки могут быть связаны ударным переходом. Из равенств (7.22) и (7.23), в силу (7.29), следует, что на Σ имеет место равенство

$$TdP = Tds = H_y dE_0 + d\mathcal{E} - V d\mathcal{L} - H_y v dH_0 - H_z w dH_0 + V^2 dm^2 / 2. \quad (7.30)$$

Вводя обозначения $4\pi H_0^2 = V_0 = a_A^2 / (im)$, можно записать первые четыре равенства (7.29) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v &= H_0 H_y, \quad w = H_0 H_z, \quad H_y(V - V_0) + 4\pi E_0 = 0, \\ H_z(V - V_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Как следует из (7.31), при $E_0 = 0$ в особых точках системы (7.24) выполняется равенство

$$\mathbf{H}_\tau(V - V_0) = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau = H_y \mathbf{e}_y + H_z \mathbf{e}_z).$$

которые показывают, что при $E_0 = 0$ ударные волны являются либо газодинамическими, либо лежат на границе эволюционности, так как условие $V = V_0$ эквивалентно условию $u^2 = a_A^2$. Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $E_0 \neq 0$, при этом из равенств (7.31) получим, что в особых точках системы (7.24) имеет место $H_z = 0, w = 0$.

Два последних уравнения в (7.29), преобразованные при

помощи (7.31), принимают вид

$$p + m^2 V + \frac{4\pi E_0^2}{2(V - V_0)^2} = \mathcal{Q}, \quad i + \frac{1}{2} m^2 V^2 + \frac{4\pi E_0^2 (2V - V_0)}{2(V - V_0)^2} = \mathcal{E}. \quad (7.32)$$

На плоскости (V, p) особые точки A_k являются точками пересечения кривых, определяемых уравнениями (7.32). Количество

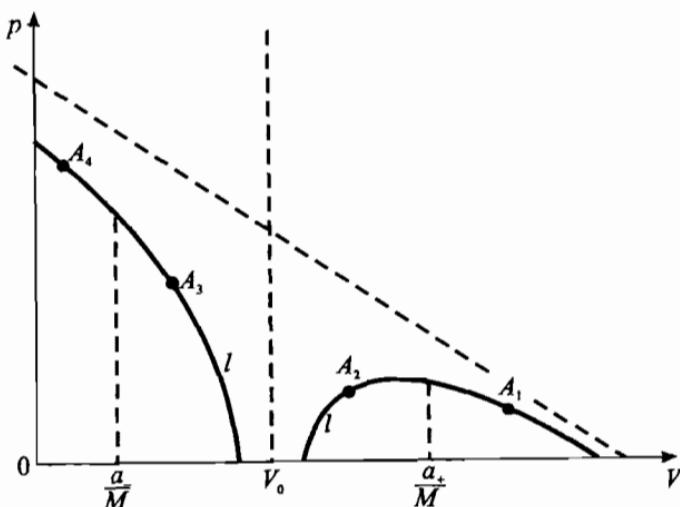


Рис. 49

особых точек, отвечающих начальному или конечному состоянию в задаче о структуре ударной волны, равно числу точек пересечения этих кривых в области $V > 0, p > 0$.

Будем менять постоянную \mathcal{E} , оставляя неизменными остальные постоянные (m, H_0, E_0, \mathcal{Q}). Тогда особые точки системы (7.24), лежащие на поверхности Σ , опишут кривую, проекция которой на плоскость pV есть кривая l (рис. 49), точки которой удовлетворяют первому уравнению (7.32). Согласно равенству (7.31), на этой кривой

$$Tds = d\mathcal{E}. \quad (7.33)$$

Следовательно, \mathcal{E} и s одновременно принимают на этой кривой максимальные и минимальные значения. В то же время, дифференцируя первое из равенств (7.32), получим

$$\frac{dp}{dV} = -m^2 + \frac{4\pi E_0^2}{(V - V_0)^3} = p'_V + p'_s \frac{ds}{dV}, \quad (7.34)$$

$$\frac{d^2 p}{dV^2} = -\frac{12\pi E_0^2}{(V - V_0)^4} = p''_{VV} + p'_s \frac{d^2 s}{dV^2} + p''_{sV} \frac{ds}{dV} + p''_{ss} \left(\frac{ds}{dV} \right)^2. \quad (7.35)$$

Если $ds/dV = 0$, то из (7.14) и (7.35) следует, что $d^2 s/dV^2 < 0$. Поэтому точки, в которых $ds/dV = 0$, являются максимумами энтропии, и на каждой связной ветви кривой l имеется не более одного такого максимума s , а следовательно, и \mathcal{E} . Таким образом, кривая, определенная вторым из уравнений (7.32), может иметь с каждой ветвью кривой l не более двух точек пересечения. Занумеруем точки пересечения кривых в порядке убывания V : A_1, A_2, A_3, A_4 , причем A_1 и A_2 принадлежат ветви, лежащей в области $V_1 > V_0$, а A_3 и A_4 – ветви, лежащей в области $V < V_0$. В точках A_1 и A_3 величины \mathcal{E} и s убывают с ростом V , а в точках A_2 и A_4 – возрастают.

Согласно (7.34),

$$p'_s \frac{ds}{dV} = -m^2 - p'_V + \frac{4\pi E_0^2}{(V - V_0)^3} = -\frac{1}{V^2} \left[u^2 - a_0^2 - \frac{4\pi E_0^2 V^2}{(V - V_0)^3} \right],$$

где a_0 – газодинамическая скорость звука ($a_0^2 = -V^2 p'_V$). Преобразуем последний член в правой части этого равенства при помощи соотношений (7.31):

$$\frac{4\pi E_0^2 V^2}{(V - V_0)^3} = \frac{H_y^2 V}{4\pi} \frac{V^2}{V^2 - V_0 V} = \frac{\alpha^2 u^2}{u^2 - a_A^2},$$

здесь a_A и α – альфвеновские скорости в направлении осей x и y : $a_A^2 = H_x^2 V / (4\pi) = m V_0 V$, $\alpha^2 = H_y^2 V / (4\pi)$. При этом предыдущее равенство перейдет в следующие:

$$p'_s \frac{ds}{dV} = -\frac{1}{V^2} R(u), \quad R(u) = u^2 - a_0^2 - \frac{\alpha^2 u^2}{u^2 - a_A^2}. \quad (7.36)$$

Так как в точках кривой l , где s достигает максимума, $R(u)$ обращается в нуль, то в этих точках u удовлетворяет уравнению

$$u^4 - (a_0^2 + \alpha^2 + a_A^2) u^2 + a_0^2 a_A^2 = 0,$$

т. е. совпадает с одной из магнитозвуковых скоростей

$$u = a_{+-} \text{ или } V = a_{+-} / m.$$

Очевидно, что больший корень ($u = a_+$) лежит на правой ветви кривой l , где $V > V_0$, или, что то же самое, $u > a_A$, а меньший корень ($u = a_-$) лежит на левой ветви, где $V < V_0$, или $u < a_A$. Точки A_1 и A_2 , A_3 и A_4 лежат соответственно по разные стороны от точек $V = a_+ / m$ ($u = a_+$) и $V = a_- / m$ ($u = a_-$), причем, как это следует из (7.14) и (7.36), значения функции $R(u)$ в точках A_1, A_2, A_3 и A_4 удовлетворяют неравенствам $R(u)|_{A1} > 0$, $R(u)|_{A2} < 0$, $R(u)|_{A3} > 0$, $R(u)|_{A4} < 0$.

Из этих неравенств, а также из вида функции $R(u)$ (график функции $R(u)$ изображен на рис. 50) следует, что

$$u(A_1) > a_+, \quad a_- < u(A_3) < a_A, \quad a_+ > u(A_2) > a_A, \quad u(A_4) < a_-. \quad (7.37)$$

Очевидно, что переход $A_1 \rightarrow A_2$ представляет быструю ударную волну, а $A_3 \rightarrow A_4$ – медленную. Все остальные переходы являются неэволюционными ударными волнами. При некоторых значениях постоянных точки A_1 и A_2 или A_3 и A_4 могут совпадать; при этом $u = a_\pm$ и ударные волны превращаются в быстрые или медленные магнитозвуковые волны.

Так как все точки A_k отвечают одним и тем же значениям постоянных (m , \mathcal{L} , E_0 , H_0 , \mathcal{E}) и обращают в нуль правые части уравнений (7.20), то каждая пара этих точек может быть связана ударным переходом (возможно, неэволюционным). В разд. 4.1 показано, что ударные волны сжатия сопровождаются возрастанием энтропии, следовательно, $s(A_1) < s(A_2) < s(A_3) < s(A_4)$. Отсюда, используя (7.23), получаем

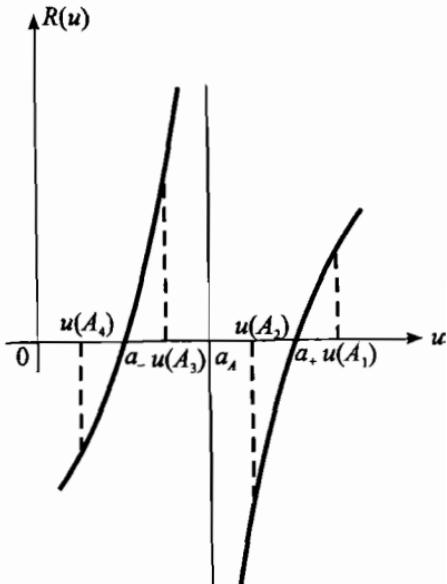


Рис. 50

$$P(A_1) < P(A_2) < P(A_3) < P(A_4). \quad (7.38)$$

Перейдем теперь к изучению характера интегральных кривых системы (7.24). Рассмотрим прежде всего поведение интегральных кривых в окрестности особых точек A_k системы (7.24). Введем в окрестности A_k новые переменные $H_y^*, H_z^*, v^*, w^*, V^*, T^*$, согласно равенствам

$$\begin{aligned} H_y = H_{yk}(1+H_y^*), \quad H_z = H_{yk}H_z^*, \quad v = v_k + u_k v^*, \\ w = u_k w^*, \quad V = V_k(1+V^*), \quad T = T_k(1+T^*). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Индекс k показывает, что значение соответствующей переменной взято в точке A_k . При изучении особых точек можно без ограничения общности предполагать, что H_0 и H_{yk} положительны. Линеаризуем систему уравнений по этим переменным. Подставляя (7.39) в уравнения (7.24) и сохраняя только линейные члены, получаем, что в окрестности каждой особой точки функции $v^*, w^*, H_y^*, H_z^*, V^*, T^*$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial D^*}{\partial q_j^*} = \frac{\partial P^*}{\partial q_j^*}, \quad (7.40)$$

где через q_j^* обозначены величины $H_y^*, H_z^*, v^*, w^*, V^*, T^*$, а

$$\begin{aligned} D^* = \frac{1}{2mT_k} \left\{ \frac{v_m H_{yk}^2}{4\pi} \left(\frac{dH_y^*}{dx} \right)^2 + \frac{v_m H_{yk}^2}{4\pi} \left(\frac{dH_z^*}{dx} \right)^2 + \mu_1 u_k^2 \left(\frac{dV^*}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu u_k^2 \left(\frac{dv^*}{dx} \right)^2 + \mu u_k^2 \left(\frac{dw^*}{dx} \right)^2 + kT_k \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^* = \frac{1}{2T_k} \left\{ \alpha_k^2 (2H_y^* V^* + H_y^{*2}) + \alpha_k^2 H_z^{*2} + u_k^2 (v^{*2} + w^{*2} + V^{*2}) - \right. \\ \left. - 2a_{Ak} \alpha_k H_y^* v^* - 2a_{Ak} \alpha_k H_z^* w^* + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{Tk} V_k^2 V^{*2} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_{Tk} V_k T_k V^* T^* + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{V_k} T_k^2 T^{*2} \right\} \end{aligned}$$

— функции D и P , вычисленные в окрестности точки A_k с точ-

нностью до квадратов q_i^* . Представим квадратичную форму P^* в виде суммы квадратов:

$$P^* = \frac{1}{T_k} \left\{ \left(\alpha_k H_y^* + \alpha_k V^* - a_{Ak} v^* \right)^2 + \left(\alpha_k H_z^* - a_{Ak} w^* \right)^2 + \left(u_k^2 - a_{Ak}^2 \right) \left(v^* + \frac{a_{Ak} \alpha_k V^*}{u_k^2 - a_{Ak}^2} \right)^2 + \left(u_k^2 - a_{Ak}^2 \right) w^{*2} + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{V_k} \left(T_k T^* + \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_{T_k} V_k V^* \right)^2 + \left(u_k^2 - \alpha_k^2 - a_0^2 - \frac{a_{Ak}^2 \alpha_k^2}{u_k^2 - a_{Ak}^2} \right) V^{*2} \right\}. \quad (7.41)$$

При этом преобразовании были использованы тождества, которые следуют из того, что $df = -sdT - pdV$ и $d\varepsilon = Tds - pdV$ являются полными дифференциалами, и из определения a_0 :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T &= -\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s = -\frac{a_0^2}{V^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Так как теплоемкость газа при постоянном объеме положительна, то

$$c_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V > 0. \quad (7.43)$$

Коэффициент при V^{*2} в (7.41) представляет собой $R(u)$. Отсюда в силу неравенств (7.37) следует, что коэффициенты при квадратах в выражении (7.42) имеют следующие знаки в стационарных точках A_k :

A_1 — все шесть коэффициентов положительны,

A_2 — пять коэффициентов положительны и один отрицателен.

A_3 — четыре коэффициента положительны и два отрицательны,

A_4 — три коэффициента положительны и три отрицательны.

Обозначим через λ собственные значения системы (7.40), т. е. такие значения λ , при которых существуют решения вида

$$q_j^* = q_j^{**} e^{\lambda x}. \quad (7.44)$$

Легко показать, что число положительных и отрицательных λ совпадает с числом положительных и отрицательных коэффициентов в выражении (7.41). Действительно, подставляя (7.44) в (7.40), находим, что λ удовлетворяет уравнению $|M - \lambda K| = 0$, где M — матрица квадратичной формы P^* , K — диагональная матрица, у которой по главной диагонали стоят удвоенные коэффициенты при q_j^{*2} в выражении для D^* . Это уравнение, в силу теоремы об определителе произведения матриц, эквивалентно уравнению

$$|A'(M - \lambda K) A| = |A'| |M - \lambda K| |A| = 0.$$

Пусть A — матрица линейного преобразования, одновременно преобразующего матрицы M и K двухквадратичных форм к диагональному виду, так что $A'MA = N$, $A'KA = L$. Известно, что такое преобразование всегда существует. При этом уравнение для определения λ примет вид $|N - \lambda L| = 0$.

Так как в силу теоремы об инерции квадратичных форм число положительных и отрицательных элементов матрицы N совпадает с числом положительных и отрицательных коэффициентов в выражении (7.41), а все элементы матрицы L положительны, то из последнего равенства следует справедливость доказываемого утверждения. Таким образом, в каждой особой точке A_k имеется шесть собственных направлений, отвечающих шести действительным собственным значениям, $7-k$ из которых положительны, а $k-1$ отрицательны. Каждой особой точке A_k соответствует $(7-k)$ -мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, выходящих из этой точки, и $(k-1)$ -мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, входящих в нее.

Перейдем теперь к доказательству существования непрерывных решений, представляющих структуру эволюционных ударных волн. Рассмотрим поверхность $P(q_i) = C$, $C = \text{const}$. Нетрудно убедиться, что часть этой поверхности, лежащая в области $V > 0$, $T > 0$, содержит бесконечно удаленную точку. Действительно, уравнение поверхности $P(q_i) = C$ можно привести к виду

$$2P \equiv \frac{1}{T} \left[\frac{V}{4\pi} \left(H_y - \frac{4\pi H_0}{V} v + \frac{4\pi E_0}{V} \right)^2 + \frac{V}{4\pi} \left(H_z - \frac{4\pi H_0}{V} w \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{V_0}{V} \right) \left(v + \frac{4\pi H_0 E_0}{V - V_0} \right)^2 + \left(1 - \frac{V_0}{V} \right) w^2 \right] + 2F(V, T) = 2C, \quad (7.45)$$

$$2F(V, T) = -\frac{1}{T} \left[\frac{4\pi E_0}{V - V_0} - m^2 V^2 + 2\mathcal{L}V - 2\mathcal{E} + 2f(VT) \right].$$

Пересечение ее с плоскостью $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ представляет собой поверхность второго порядка в четырехмерном пространстве $\{H_y, H_z, v, w\}$, которая при $V < V_0$ простирается до бесконечности и представляет собой гиперболоид в четырехмерном пространстве.

Придадим постоянной C в равенстве $P(q_i) = C$ очень большое отрицательное значение и будем затем увеличивать его. При этом поверхность $P(q_i) = C$ будет изменяться, однако топологический тип поверхности $P(q_i) = C$ может меняться только при переходе постоянной C через значение $C = P(A_k)$. Две поверхности имеют один топологический тип, если они путем взаимно-однозначной и взаимно-непрерывной деформации могут быть переведены одна в другую. При $C \neq P(A_k)$ в каждой точке поверхности $P(q_i) = C$ существует вектор градиента функции $P(q_i)$, являющийся непрерывной функцией на поверхности. При изменении C поверхность $P(q_i) = C$ деформируется взаимно-однозначным образом.

В силу неравенств (7.38) первое изменение топологического типа поверхности произойдет, когда в процессе увеличения C поверхность $P(q_i) = C$ пройдет через точку A_1 (если она существует при заданных значениях постоянных $E_0, H_0, \mathcal{L}, \mathcal{E}$). При $C = P(A_1) + \Delta$, где $\Delta > 0$ — некоторое достаточно малое число, поверхность $P(q_i) = C$ к окрестности точки A_1 представляет собой поверхность эллипсоида (см. (7.41)), содержащую внутри себя точку A_1 . Так как поверхность $P(q_i) = C$ содержит бесконечно удаленную точку, то у нее при $C > P(A_1)$ должна существовать другая ветвь, уходящая в бесконечность. Область $P(q_i) \leq C$ расширяется с увеличением C .

Замкнутая ветвь поверхности $P(q_i) = C$, содержащая внутри себя точку A_1 , не выходит из области $V > V_0, T > 0$. Действитель-

но, пересечение замкнутой ветви поверхности $P(q_i) = C$ любой плоскостью представляет собой замкнутую поверхность. Но при $V < V_0$ пересечение поверхности (7.45) плоскостью $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ не содержит замкнутых ветвей. Кроме того, пересечение поверхности $P(q_i) = C$ плоскостью $T = 0$ не зависит от значения константы C . При значениях C , близких к $P(A_1)$, замкнутая ветвь поверхности $P(q_i) = C$, содержащая внутри себя точку A_1 , не пересекается с плоскостью $T = 0$ и, следовательно, не пересекает этой плоскости ни при каких C .

При увеличении C обе ветви поверхности должны соединиться при некотором значении C в точке, лежащей в области $V > V_0$, $T > 0$. Действительно, внутри области $V > V_0$, $T > 0$, $\text{grad}P$ нигде не обращается в бесконечность, и поэтому обе части поверхности $P(q_i) = C$ при увеличении C движутся с конечной скоростью навстречу друг другу. Соединение двух частей поверхности $P(q_i) = C$ должно произойти в стационарной точке функции $P(q_i)$, так как при этом изменяется топологический тип поверхности. Эта точка является точкой A_2 , так как из оставшихся стационарных точек только она лежит в области $V > V_0$, и только она может описывать слияние двух частей поверхности $P(q_i) = C$.

Так как особая точка A_1 является узлом для системы (7.24), то в окрестности точки A_1 все пространство заполнено интегральными кривыми, выходящими из этой точки. Поэтому каждая точка замкнутой ветви поверхности $P(q_i) = C$ при $P(A_1) < C < P(A_2)$ может быть соединена интегральной кривой с точкой A_1 . При этом одна интегральная кривая, вышедшая из точки A_1 , достигает точки A_2 , так как при $C = P(A_2)$ некоторая (единственная) точка этой поверхности совпадает с точкой A_2 . Этим доказано существование и единственность решения, представляющего структуру быстрой ударной волны.

Общего доказательства существования решения, представляющего структуру медленной ударной волны, в настоящее время пока нет. Однако имеется доказательство существования такого решения для достаточно слабых волн [4, 6]. Изложим кратко идею этого доказательства [4].

Можно показать, что при $P(A_3) < C < P(A_4)$ в области $P(q_i) \leq P(A_3)$ можно построить двумерную замкнутую поверхность Σ , проходящую через точку A_3 , которая не может быть стянута в точку непрерывной деформацией в этой области. Рассмотрим

двумерную поверхность $\Sigma^*(C)$, являющуюся пересечением трехмерной поверхности, составленной из интегральных кривых, входящих в точку A_4 , с поверхностью $P(q_i) = C$. При $C = P(A_4) - \delta$ ($\delta > 0$ – достаточно малое число) $\Sigma^*(C)$ представляет собой замкнутую двумерную поверхность, которая может быть переведена в положение Σ непрерывной деформацией в области $P(q_i) \leq C$. Будем теперь изменять C в пределах $P(A_3) < C < P(A_4)$.

Если диссипативные коэффициенты непрерывны и их отношения ограничены, то $\Sigma^*(C)$ будет испытывать непрерывную деформацию. При этом пока поверхность $\Sigma^*(C)$ остается в исследуемой области (возможность выхода поверхности $\Sigma^*(C)$ к плоскостям $T = 0$, $V = 0$, а также в бесконечность будет обсуждена ниже), она остается замкнутой поверхностью, которая может быть переведена в положение Σ непрерывной деформацией в области $P(q_i) \leq C$.

Структура поверхности $P(q_i) = C$ при $C = P(A_3) + \delta$ в окрестности особой точки A_3 такова, что кратчайшее расстояние любой замкнутой двумерной поверхности, которая может быть переведена в положение Σ путем непрерывной деформации в области $P(q_i) < C$, до точки A_3 имеет порядок $\sqrt{\delta}$. Таким образом, при $C = P(A_3)$ поверхность $\Sigma^*(C)$ пройдет через A_3 и найдется хотя бы одна интегральная кривая, соединяющая особые точки A_3 и A_4 . Эта интегральная кривая представляет решение, соответствующее структуре медленной ударной волны.

Приведенные соображения теряют силу, если поверхность размыкается при изменении C , вследствие того, что она или ее часть выходят из рассматриваемой области $T > 0$, $V > 0$. Можно показать, что ни одна интегральная кривая, а следовательно, и поверхность $\Sigma^*(C)$ не могут при конечном изменении P подойти к плоскостям $V = 0$ и $T = 0$. Остается не выясненным вопрос, может ли поверхность $\Sigma^*(C)$ разомкнуться через бесконечно удаленную точку. Можно только утверждать, что если ударная волна не слишком сильная и отношения диссипативных коэффициентов ограничены, то так как вдоль интегральной кривой, представляющей структуру такой волны, P меняется мало, а интегральные кривые составляют не слишком малый угол с поверхностью $P(q_i) = C$, то, очевидно, что поверхность $\Sigma^*(C)$ не может уйти в бесконечность и, таким образом, решение, представляющее структуру медленной ударной волны, в этом случае существует.

Покажем теперь, что не при всех соотношениях между диссипативными коэффициентами существуют решения, представляющие структуру неизолюционных ударных волн, в которых изменяется магнитное поле. При этом полагаем, что в течении, представляющем структуру ударной волны, все величины ограничены. Обозначим через H_m , T_m , V_m , u_m максимальные значения соответствующих величин (полагаем, что они не зависят от диссипативных коэффициентов). Из тождества

$$\frac{\partial P}{\partial H_y} + H_0 \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{T} \left[\frac{H_y}{4\pi} (V - V_0) + E_0 \right]$$

следует, что если δ определено соотношением $2H_m\delta = 4\pi |E_0|$, то на отрезке

$$V_0 - \delta \leq V \leq V_0 + \delta \quad (7.46)$$

выполняется неравенство

$$m^2 T \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial H_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 \right\} > \frac{k}{T_m}, \quad (7.47)$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля, если $E_0 \neq 0$.

Пусть теперь x_1 и x_2 являются границами интервала на оси x , на котором всюду выполняются неравенства (7.46), причем $V(x_1) = V_0 + \delta$, $V(x_2) = V_0 - \delta$ (такой интервал должен существовать для неизолюционной ударной волны), а Q_1 и Q_2 — точки в пространстве q_i , соответствующие x_1 и x_2 . Оценим величину отрезка $[x_1, x_2]$. Заметим прежде всего, что

$$D = m^2 T \left\{ \frac{4\pi}{v_m} \left(\frac{\partial P}{\partial H_y} \right)^2 + \frac{4\pi}{v_m} \left(\frac{\partial P}{\partial H_z} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial w} \right)^2 + \frac{1}{\mu_1 m^2} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^2 + \frac{T}{k} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)^2 \right\} \geq m^2 T \left\{ \frac{4\pi}{v_m} \left(\frac{\partial P}{\partial H_y} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 \right\}.$$

Согласно равенству (2.13), с учетом (2.34) получим

$$P(A_f) - P(A_i) > P(Q_2) - P(Q_1) = 2 \int_{x_1}^{x_2} D dx \geq$$

$$\geq 2 \int_{x_1}^{x_2} m^2 T \left[\frac{4\pi}{v_m} \left(\frac{\partial P}{\partial H_y} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 \right] dx \geq \frac{k [x_2 - x_1]}{T_m \sup \left(\frac{v_m}{4\pi}, \mu \right)},$$

где A_i и A_f соответствуют состояниям перед и за ударной волной. Отсюда следует, что

$$x_2 - x_1 < k_1 \sup \left(\frac{v_m}{4\pi}, \mu \right), \quad (7.48)$$

где k_1 не зависит от диссипативных коэффициентов. Но вдоль интегральной кривой, как следует из третьего уравнения (7.20), $dV/dx < C_2/\mu_1$, где C_2 не зависит от диссипативных коэффициентов. Отсюда получаем:

$$x_2 - x_1 > 2\delta \frac{1}{C_2} \inf \mu_1, \quad (7.49)$$

Очевидно, что неравенства (7.48) и (7.49) не могут выполняться при произвольных соотношениях между диссипативными коэффициентами. Это противоречие означает, что не во всех соотношениях между диссипативными коэффициентами существует интегральная кривая, представляющая структуру неизволнционной ударной волны.

Для того чтобы нагляднее представить характер интегральных кривых, соответствующих задаче о структуре ударной волны, а также выяснить характер зависимости решения от соотношений между диссипативными коэффициентами, рассмотрим задачу о структуре ударной волны в случае, когда отличны от нуля только два диссипативных коэффициента μ_1 и v_m ($\mu = k = 0$) [5]. Кроме того, предположим, что $w = 0$ и $H_z = 0$. В этом случае система (7.20) превращается в систему двух дифференциальных уравнений и двух алгебраических интегралов. Поле интегральных кривых становится плоским, что делает решение задачи наглядным.

Если ввести безразмерные переменные по формулам

$$V = \frac{u_0}{m} \tau, \quad v = u_0 v, \quad p = \rho_0 u_0^2 \theta, \quad H_y = \sqrt{4\pi \rho_0 u_0^2} h, \quad H_x = \sqrt{4\pi \rho_0 u_0^2} h_x,$$

то система уравнений, описывающих задачу о структуре ударной волны, в этом случае имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_m}{u_0} \frac{dh}{dx} &= h(\tau - h_x^2) - e, \\ \frac{\mu_1}{\rho_0 u_0} \frac{d\tau}{dx} &= \theta + \tau + \frac{1}{2} h^2 - J, \quad v - h_x h = 0, \\ k\theta\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}h_x^2 h^2 + eh &= \mathcal{E}, \quad k = \frac{\gamma}{\gamma-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

Здесь ρ_0 и u_0 — характерные плотность и скорость (например, значения этих величин при $x = -\infty$); J , \mathcal{E} , e — константы, связанные с потоком импульса, потоком энергии и электрическим полем.

На плоскости (τ, h) изоклина $dh/dx = 0$ представляет собой гиперболу

$$h(\tau - h_x^2) = e, \quad (7.51)$$

а изоклина $d\tau/dx = 0$ представляет собой кривую, описываемую уравнением

$$h^2(k\tau - h_x^2) - 2eh + (2k - 1)\tau^2 - 2kJ\tau + 2\mathcal{E} = 0. \quad (7.52)$$

Из определений h_x и τ следует, что в точках, лежащих выше асимптоты $\tau = h_x^2$ гиперболы (7.51), скорость газа больше альфвеновской, а ниже асимптоты скоростей — меньше альфвеновской. Вид кривой (7.52) на плоскости (τ, h) зависит от значений, определяющих задачу констант, входящих в это уравнение.

Особыми точками системы (7.50) являются точки пересечения кривых (7.51) и (7.52). В зависимости от значений определяющих констант может быть либо две, либо четыре точки пересечения этих кривых (один из возможных случаев расположения кривых (7.51) и (7.52) представлен на рис. 51). Исследование характера особых точек в этом случае показывает, что точка A_1 является узлом, из которого выходят интегральные кривые при увеличении x , точки A_2 и A_3 , являются седлами, точка A_4 узел, в который входят интегральные кривые при возрастании x . Если имеются четыре особые точки, то две из них лежат выше прямой $\tau = h_x^2$, а две другие — ниже ее. Если особых точек только две, то они лежат по одну сторону от этой прямой.

Исследование изоклин (7.51) и (7.52) позволяет качественно построить поле интегральных кривых системы дифференциаль-

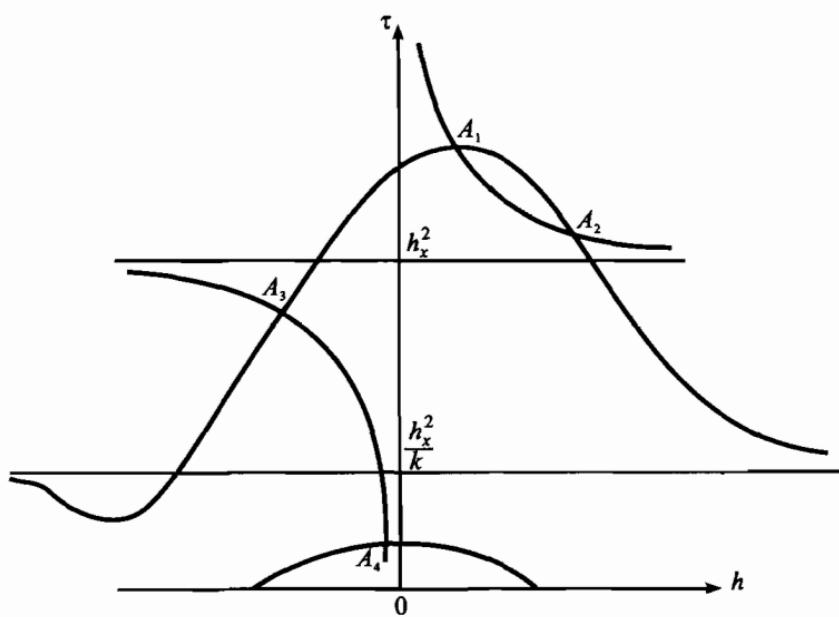


Рис. 51

ных уравнений (7.50). Для изоклин (7.51) и (7.52), представленных на рис. 51, соответствующее поле интегральных кривых в зависимости от величины отношения диссипативных коэффициентов $\mu_1/(\rho_0 v_m)$ имеет вид, изображенный на рис. 52–54 (стрелками указано направление движения точки (τ, h) вдоль интегральной кривой при возрастании x). Во всех остальных случаях расположения изоклин, при наличии четырех особых точек характер интегральных кривых остается тем же самым. Если имеются две особые точки (та или другая пара), то поведение интегральных кривых в окрестности этих точек остается таким же, как при наличии четырех особых точек.

Картина интегральных кривых, представленная на рис. 52, соответствует случаю, когда отношение $\mu_1/(\rho_0 v_m)$ велико. Точки A_1 и A_2 , A_3 и A_4 при этом соединяются между собой попарно единственными интегральными кривыми, представляющими соответственно структуру быстрой и медленной ударных волн. Точки из первой пары и точки из второй пары не соединяются между собой интегральными кривыми, что соответствует отсутствию структуры у промежуточных ударных волн. Если

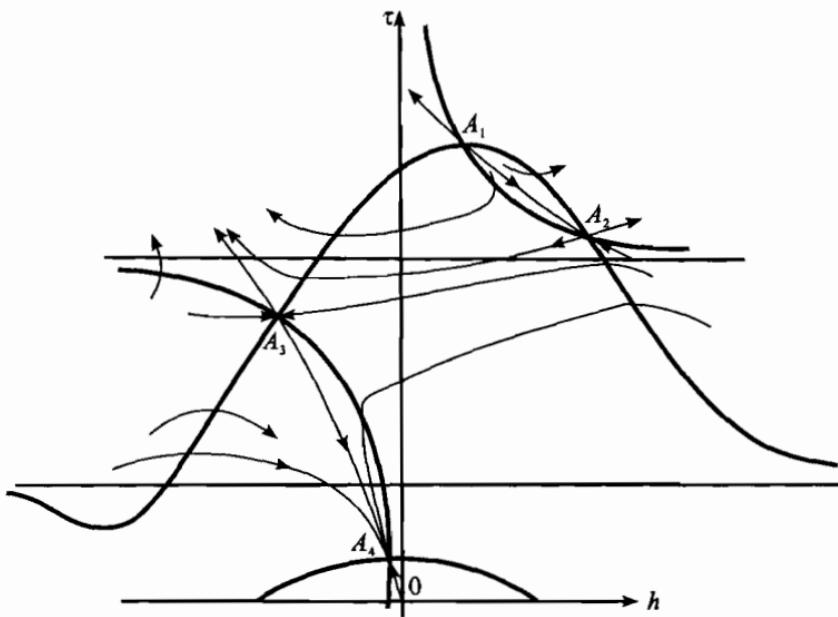


Рис. 52

$\mu_1/(\rho_0 v_m) \rightarrow \infty$, то интегральные кривые, представляющие структуру быстрой и медленной ударных волн, стремятся к совпадению с соответствующими отрезками изоклины $dh/dx = 0$.

Случай, показанный на рис. 53, соответствует одному-единственному значению отношения $\mu_1/(\rho_0 v_m) = (\mu_1/(\rho_0 v_m))_{kp}$, при котором интегральная кривая, выходящая из точки A_2 , входит в точку A_3 . Это значение $\mu_1/(\rho_0 v_m)$ разделяет случаи, представленные на рис. 52 и 54. При этом интегральными кривыми соединены точки $A_1 \rightarrow A_2$ (быстрая волна), $A_3 \rightarrow A_4$ (медленная волна) и $A_2 \rightarrow A_3$ (промежуточная волна), причем интегральные кривые, соединяющие эти особые точки, единственные. Возможны также сложные переходы $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$, $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$, $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$.

При малых значениях отношения $\mu_1/(\rho_0 v_m)$ имеем случай, представленный на рис. 54, когда интегральными кривыми соединены следующие пары особых точек: $A_1 \rightarrow A_2$, $A_3 \rightarrow A_4$, $A_1 \rightarrow A_3$, $A_1 \rightarrow A_4$, $A_2 \rightarrow A_4$, причем все эти пары точек соединяются единственными интегральными кривыми, за исключением пары $A_1 \rightarrow A_4$, которая соединяется бесчисленным множеством

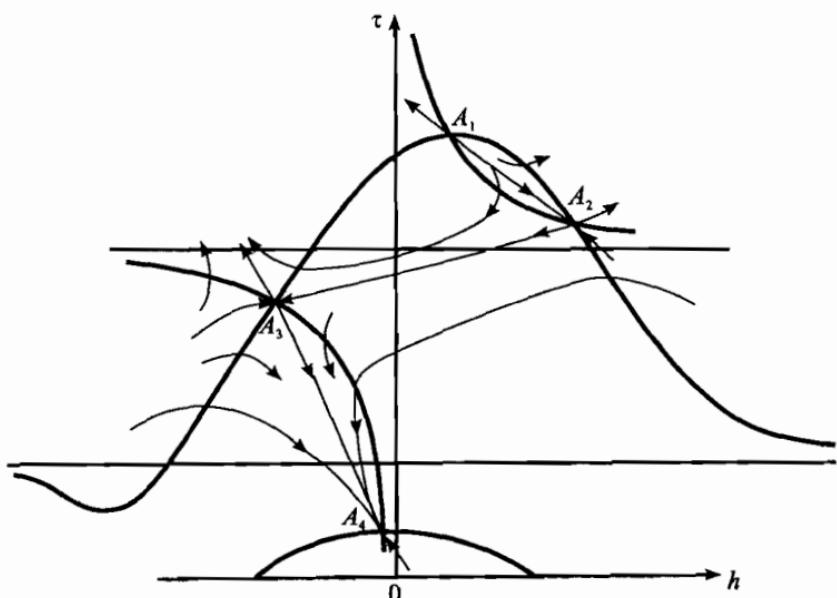


Рис. 53

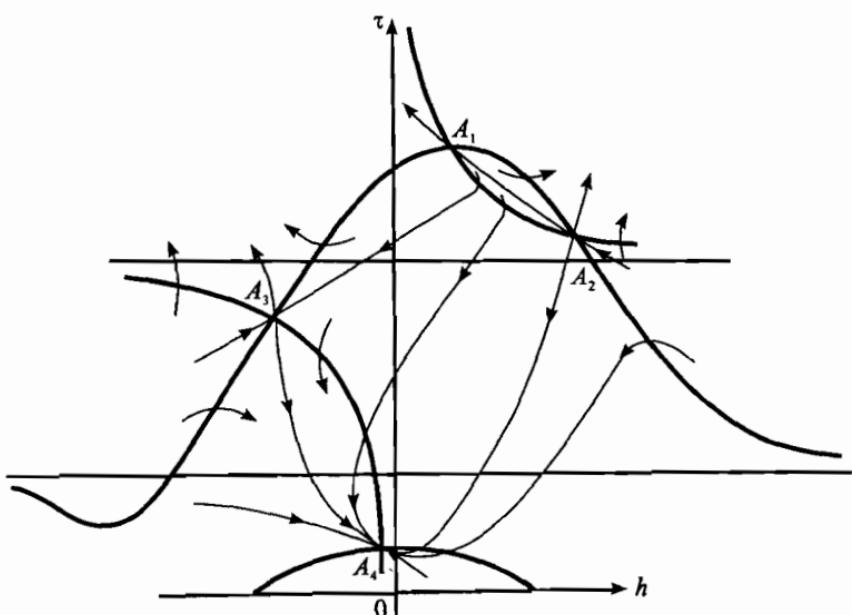


Рис. 54

интегральных кривых. Из сложных переходов имеют место следующие: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$, $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$.

Если $\mu_1/(\rho_0 v_m) \rightarrow 0$, то интегральные кривые стремятся к сопадению с изоклиной $d\tau/dx = 0$. Однако, если когда в начальной точке движение сверхзвуковое, а в конечной точке — дозвуковое, внутри зоны, представляющей структуру ударной волны, возникает газодинамическая ударная волна, в которой $H = \text{const}$. Отметим, что если такая ударная волна существует, то структура быстрой магнитогидродинамической ударной волны завершается газодинамическим скачком, а структура медленной ударной волны начинается с газодинамического скачка. Структура промежуточных ударных волн также может содержать газодинамические скачки.

Таким образом, в рассматриваемой постановке быстрые и медленные волны обладают структурой при любом отношении диссипативных коэффициентов. При наличии четырех особых точек структурой могут обладать и промежуточные ударные волны. Эволюционные ударные волны отличаются от неэволюционных тем, что только они обладают структурой при любом соотношении между диссипативными коэффициентами.

Глава 8

Обтекание намагниченных тел проводящей жидкостью

§ 1. Обтекание намагниченных тел идеальной жидкостью

Если проводимость жидкости бесконечна, то набегающий поток, в котором магнитное поле предполагается отсутствующим, не может проникнуть в область, занятую полем (при бесконечной проводимости магнитные силовые линии вмороожены в жидкость). Отсюда следует, что обтекаемая область состоит из намагниченного тела и «каверны» — области, в которой находится магнитное поле [1, 2]. Эта область может быть пустой или заполненной жидкостью. Будем для определенности считать, что каверна заполнена обтекающей жидкостью, так как при большой, но конечной проводимости жидкость хотя и медленно, но может проникать внутрь каверны.

Рассмотрим случай стационарного обтекания намагниченного тела потоком идеальной жидкости. Внутри каверны, вообще говоря, возможно установившееся движение жидкости. Заметим, что скорость в каверне равна нулю, когда все магнитные силовые линии начинаются и кончаются на теле. В дальнейшем будем считать, что жидкость внутри каверны покоятся, и разыскивать форму каверны и магнитное поле в ней. Полагая в уравнениях магнитной гидродинамики $v = 0$, находим, что магнитное поле в каверне удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (8.1)$$

$$\operatorname{grad} p_{\text{кв}} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} (\mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (8.2)$$

где $p_{\text{кв}}$ — давление в каверне. На границе каверны с потоком должны выполняться условия

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (8.3)$$

$$p_n = p_{\text{кв}} + \frac{1}{8\pi} H^2, \quad (8.4)$$

где p_n – давление в потоке; \mathbf{n} – единичный вектор нормали. Первое условие вытекает из отсутствия источников магнитного поля, а второе выражает факт равенства нормальных напряжений. Условие равенства касательных напряжений при выполнении условия (8.3) выполняется автоматически. Магнитное поле в каверне создается намагниченным телом.

Если применить операцию rot к уравнению (8.2), то внутри каверны вектор \mathbf{H} должен удовлетворять системе уравнений

$$\text{div} \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot} (\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) = 0, \quad (8.5)$$

совпадающей по форме с уравнениями, описывающими стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости, если под \mathbf{H} понимать скорость движения жидкости.

В тех случаях, когда на поверхности тела выполнено условие $j_n = 0$, т.е. тело электрически изолировано, задачу можно существенно упростить, потребовав, чтобы в каверне отсутствовали токи:

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (8.6)$$

(если в каверне отсутствует проводящая жидкость, то это условие выполняется автоматически). Из уравнения (8.2) при этом получим

$$p_{\text{кв}} = \text{const}, \quad (8.7)$$

форма же каверны должна быть найдена таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию (8.4).

Рассмотрим несколько простейших примеров [2].

1. *Обтекание несжимаемой жидкостью плоского магнитного диполя, вектор момента которого перпендикулярен к направлению скорости на бесконечности.*

В этом случае существует решение, когда обтекаемая поверхность представляет собой цилиндр, радиус которого обозначим через a (рис. 55). Магнитное поле внутри цилиндра и скорость жидкости вне его даются формулами

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 \operatorname{grad} y \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \\ v &= U_0 \operatorname{grad} x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где U_0 и H_0 — постоянные, связанные соотношением

$$H_0^2 = 4\pi\rho U_0^2, \quad (8.9)$$

причем H_0 определяется через момент диполя q из соотношения $q = H_0 a_0^2$. Давление внутри каверны $p_{\text{кв}}$ постоянно и связа-

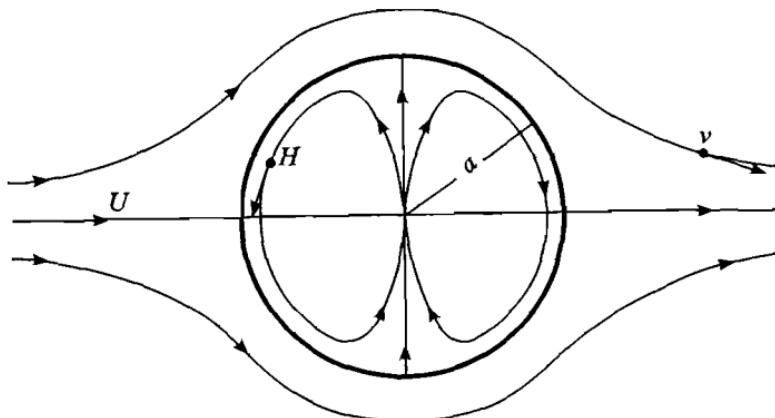


Рис. 55

но с давлением в критической точке набегающего потока p_0 следующим образом:

$$p_0 - p_{\text{кв}} = \frac{1}{2\pi} H_0^2. \quad (8.10)$$

2. Сверхзвуковое обтекание клина, по поверхности которого течет ток постоянной плотности i , параллельно ребру клина.

Будем для определенности считать, что по разным граням клина ток течет в противоположные стороны. Можно построить решение этой задачи, в котором обтекаемая газом область представляет собой клинообразную область с углом раствора

большим, чем угол раствора клина. Картина обтекания и поведения магнитных силовых линий представлена на рис. 56.

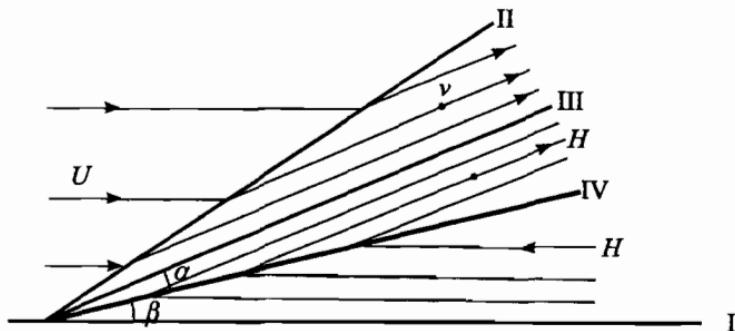


Рис. 56

Прямая I изображает плоскость симметрии, II — ударную волну, III — границу каверны и IV — границу клина. Линии тока после ударной волны идут параллельно границе каверны; давление внешнего потока $p_{\text{н}}$ на границе каверны постоянно. Магнитные силовые линии в каверне идут параллельно ее границе, а напряженность магнитного поля $H_{\text{кв}}$ постоянна. Давление в каверне связано с давлением в потоке соотношением

$$p_0 = p_{\text{кв}} + \frac{1}{8\pi} H_{\text{кв}}^2. \quad (8.11)$$

Внутри клина напряженность магнитного поля $H_{\text{кл}}$ постоянна и связана с $H_{\text{кв}}$ и i соотношениями

$$H_{\text{кв}} \sin \alpha = H_{\text{кл}} \sin \beta, \quad i = \frac{c}{4\pi} (H_{\text{кв}} \cos \alpha + H_{\text{кл}} \cos \beta).$$

Как видно из уравнений минимальная сила тока, необходимая для поддержания разности давлений $p_{\text{н}} - p_{\text{кв}}$, достигается при $\alpha = 0$ и равна

$$i_{\text{мин}} = c \frac{\sqrt{p_{\text{н}} - p_{\text{кв}}}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (8.12)$$

Величина $i_{\text{мин}}$ — очень большая: так, если $p_{\text{н}} - p_{\text{кв}} = 1$ атм, то $i_{\text{мин}} = 4000$ А/см.

Итак, при заданной разности $p_n - p_\infty$ необходимым условием существования каверны является выполнение неравенства $i > i_{\min}$. В противном случае каверна отсутствует.

3. Сверхзвуковое обтекание конуса, по поверхности которого течет ток постоянной интенсивности i , перпендикулярно к образующей конуса.

Введем сферические координаты r, θ, φ . Из соображений размерности следует, что все искомые величины могут быть функциями только углов θ и φ . Так как задача осесимметрична, то все искомые величины не зависят от φ и являются функциями только θ . Будем искать решение задачи, предполагая, что $H_\varphi = 0$. Тогда уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{dH_r}{d\theta} = H_\theta,$$

$$\frac{dH_\theta}{d\theta} \sin\theta + H_\theta \cos\theta + 2H_r \sin\theta = 0.$$

Исключив H_θ , получим для H_r линейное однородное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 H_r}{d\theta^2} + \frac{dH_r}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta + 2H_r = 0,$$

частным решением которого является $H_r = \cos\theta$. Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$H_r = \cos\theta \left\{ \int \frac{C_1 e^{-\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta}}{\cos^2\theta} d\theta + C_2 \right\} = C_1 \left[1 + \cos\theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] + C_2 \cos\theta. \quad (8.13)$$

Дифференцируя это выражение по θ , найдем H_θ :

$$H_\theta = \frac{dH_r}{d\theta} C_1 \left(\operatorname{ctg}\theta - \sin\theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) - C_2 \sin\theta. \quad (8.14)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на границе ка-

верны: $H_\theta = 0$, $p_n = p_{kv} + H_r^2/(8\pi)$ при $\theta = \alpha + \beta$. Внутри конуса напряженность магнитного поля постоянна, а магнитные силовые линии параллельны оси симметрии. Плотность поверхностного тока i определяется из равенства

$$i = \frac{c}{4\pi} (H_{kv,r} - H_{kh,r}),$$

где $H_{kv,r}$ и $H_{kh,r}$ – касательные составляющие напряженности магнитного поля каверны и конуса на поверхности конуса. Для конуса также существует плотность тока i_{min} , которая выражается той же формулой, что и для клина.

Отметим, что при заданной плотности тока i угол α определяется заданием значения p_{kv} . Параметр p_{kv} остается в решении свободным. Он должен задаваться из каких-то дополнительных соображений.

§ 2. Пример обтекания намагниченного тела жидкостью с конечной электропроводностью

Решение задачи об обтекании намагниченных тел, когда $R_m \neq \infty$, представляет большой интерес для аэродинамики больших скоростей. При больших сверхзвуковых скоростях полета перед телом образуется сильная ударная волна. За ударной волной вследствие сильного нагревания газ становится проводящим. В этих условиях, если тело намагничено, поток газа между телом и ударной волной будет взаимодействовать с магнитным полем, связанным с телом. Это взаимодействие приводит к изменению сил, действующих на тело, а также к изменению тепловых потоков от газа к телу.

Точных решений задачи об обтекании намагниченных тел потоком неидеального газа не существует. Однако развиты различного рода приближенные методы решения задачи, причем они связываются с конкретной задачей (либо тепловой, либо задачей обтекания) [3–11]. При обтекании затупленных тел область высоких температур и интенсивных тепловых потоков находится вблизи передней критической точки, поэтому выбираются приближенные методы, опирающиеся на свойства течения газа вблизи критической точки. Один из таких методов описан ниже [3].

Будем рассматривать течение невязкого, нетеплопроводного газа с конечной электропроводностью, что позволит исследовать влияние магнитного поля на движение газа вне пограничного слоя. Такое рассмотрение имеет смысл, так как известно, что изменение скорости внешнего к пограничному слою потока влияет на течение внутри пограничного слоя и, следовательно, на тепловые потоки и сопротивление тела. Изучение характера влияния магнитного поля на течение в пограничном слое и оценки суммарного изменения тепловых потоков и вязкого трения проведены в [7, 8, 10, 11].

Исследуем обтекание гиперзвуковым потоком ($U \gg a_1$) затупленного осесимметричного тела. При таком обтекании образуется отошедшая ударная волна. Так как скорость набегающего потока велика ($M_1 \gg 1$) и скачок вблизи критической точки мало отличается от прямого, то для числа Маха за скачком вблизи критической точки получим выражение (газ считаем совершенным)

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \approx \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

При больших скоростях набегающего потока на ударной волне происходят диссоциация и ионизация газа, которые сопровождаются поглощением энергии. Это добавочное поглощение энергии можно трактовать как увеличение теплоемкости c_V в совершенном газе. В связи с этим за сильной ударной волной эффективная величина γ становится близкой к единице ($\gamma \approx 1,2$). При этом M_2 за скачком становится малой величиной и газ в сжатом слое в окрестности носовой части тупого тела может рассматриваться с достаточной степенью точности как несжимаемая жидкость. Исходя из этого при изучении движения вблизи критической точки будем пользоваться моделью несжимаемой жидкости. Параметры, характеризующие течение непосредственно за ударной волной, могут быть рассчитаны по параметрам набегающего потока из условий на ударной волне. Газ перед ударной волной будем считать непроводящим, а за ударной волной — обладающим постоянной проводимостью σ .

В дальнейшем при решении задачи будем задавать форму ударной волны и определять форму обтекаемого тела. Пусть ударная волна имеет сферическую форму, а магнитное поле

вне ударной волны является полем диполя, расположенного в центре этой сферы (внутри тела электрические токи должны быть заданы таким образом, чтобы они совместно с токами, текущими в газе за ударной волной, образовывали дипольное магнитное поле перед ударной волной). Решение будет разыскиваться в окрестности оси симметрии потока.

Уравнения, описывающие движение за ударной волной, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - v \times \operatorname{rot} v &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho c} j \times H, \\ j &= \sigma \left(E + \frac{v}{c} \times H \right), \quad \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div} H &= 0, \quad \operatorname{rot} H = 4\pi j/c. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Будем считать, что магнитное поле находится в меридиональных плоскостях и обладает осевой симметрией. Тогда вектор скорости v будет лежать в меридиональных плоскостях, а векторы плотности тока j и напряженности электрического поля E будут иметь лишь составляющие, перпендикулярные к меридиональной плоскости (рис. 57). При этом из условия $\operatorname{rot} E = 0$

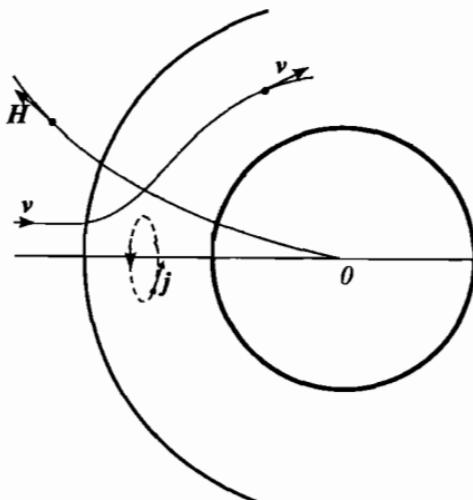


Рис. 57

и предположения, что электромагнитное поле вдали от тела равно нулю, следует, что E всюду равно нулю.

Действительно, составляющая $\text{rot } E$, перпендикулярная к оси симметрии, равна производной от E по направлению, параллельному оси симметрии. Таким образом, E зависит только от расстояния до оси симметрии и, следовательно, E равно нулю всюду. В связи с этим уравнения, описывающие электромагнитное поле, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} j &= \sigma(v/c \times H), \\ j &= \frac{c}{4\pi} \text{rot } H, \\ \text{div } H &= 0, \quad E = 0. \end{aligned} \right\} (8.16)$$

Решение задачи должно удовлетворять условиям на поверхности тела

$$v_n = 0 \quad (8.17)$$

и условиям на ударной волне, которые вследствие конечности проводимости жидкости сводятся к условию непрерывности магнитного поля при переходе через ударную волну и обычным газодинамическим условиям сохранения потока массы, импульса и энергии:

$$\left. \begin{aligned} H_{n1} &= H_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad \rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \quad v_{\tau 1} = v_{\tau 2}, \\ \rho_1 v_{n1}^2 + p_1 &= \rho_2 v_{n2}^2 + p_2, \quad i_1 + v_1^2/2 = i_2 + v_2^2/2. \end{aligned} \right\} (8.18)$$

Всюду в дальнейшем будем использовать сферическую систему координат с началом в центре сферы, задающей форму ударной волны (рис. 58). При этом уравнение ударной волны будет иметь вид $r = r_1$, а выражение для напряженности магнитного поля диполя интенсивности $Q^* c$, расположенного в центре

$$\frac{1}{c} H = 2 \frac{Q^*}{r^3} \cos \theta e_r + \frac{Q^*}{r^3} \sin \theta e_\theta.$$

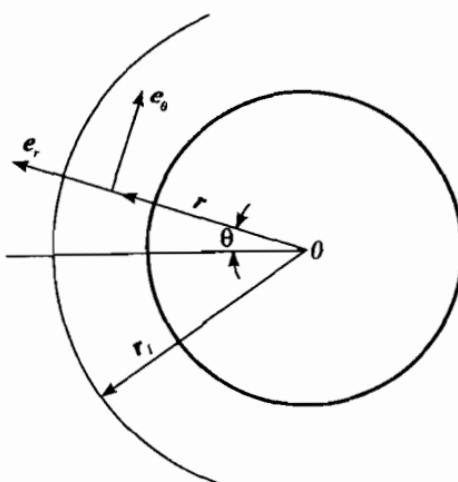


Рис. 58

В этой системе координат граничные условия (8.18) перепишутся при $r = r_1$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{H}_2 &= 2\chi \cos \theta \mathbf{e}_r + \chi \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (\chi = Q^*/r_1^3), \\ \nu_2 &= v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta = -\eta U \cos \theta \mathbf{e}_r + U \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ p_2 &= p_1 + \rho_1 U^2 \cos^2 \theta (1 - \eta), \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

где U — скорость набегающего потока.

Таким образом, задача о течении вблизи критической точки свелась к отысканию решения уравнений (8.15) и (8.16), удовлетворяющего граничным условиям (8.19). Граничное условие (8.17) будет использоваться для определения формы обтекаемого тела после нахождения решения.

Преобразуем систему уравнений движения. Применив операцию rot к уравнению импульсов, получим

$$-\text{rot}(\nu \times \text{rot} \nu) = \frac{1}{\rho c} \text{rot}(j \times \mathbf{H}). \quad (8.20)$$

Вследствие осевой симметрии $\Omega = \text{rot} \nu = \xi \mathbf{e}_\phi$, и левая часть уравнения (8.20) преобразуется к виду

$$-\text{rot}(\nu \times \Omega) = (\nu \nabla) \Omega - (\Omega \Delta) \nu + \nu \text{div} \Omega - \Omega \text{div} \nu = \mathbf{e}_\phi \left[(\nu \nabla) \xi - \frac{\xi}{r^*} (\nu \nabla) r^* \right],$$

где $r^* = r \sin \theta$. Умножая обе части (8.20) на \mathbf{e}_ϕ , находим окончательно:

$$(\nu \nabla) \xi - \frac{\xi}{r^*} (\nu \nabla) r^* = \frac{e_\phi}{\rho c} \text{rot}(j \times \mathbf{H}). \quad (8.21)$$

Уравнение неразрывности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

где v_r и v_θ — компоненты скорости в сферических координатах. Это уравнение можно также записать в виде

$$\frac{\partial(r^2 v_r \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (8.22)$$

Для того чтобы замкнуть систему, необходимо к уравнениям (8.21) и (8.22) добавить уравнения (8.16). Решением, удовлетворяющим уравнению (8.22) и имеющим ту же зависимость от θ , что и на ударной волне (см. (8.19)), является выражение

$$v = \left[\frac{2f(r)}{r^2} \cos \theta \right] e_r - \left[\frac{f'(r)}{r} \sin \theta \right] e_\theta.$$

где $f(r)$ — некоторая функция, подлежащая определению. Штрихом здесь и всюду в дальнейшем обозначается производная по r .

Исследуем течение в окрестности оси симметрии, т. е. будем считать, что $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, а $\sin \theta \approx \theta$. Тогда предыдущее выражение для v преобразуется в следующее:

$$v = \frac{2f}{r^2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) e_r - \frac{f'}{r} \theta e_\theta. \quad (8.23)$$

Поскольку магнитное поле должно удовлетворять уравнению $\operatorname{div} H = 0$ и условия на ударной волне для него дают ту же зависимость от θ , что и для скорости, аналогичную операцию можно проделать и для отыскания вида функции H . Следовательно, решение для H можно искать в виде

$$\frac{1}{c} H = \left[\frac{2g(r)}{r^2} \cos \theta \right] e_r - \left[\frac{g'(r)}{r} \sin \theta \right] e_\theta \approx \frac{2g}{r^2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) e_r - \frac{g'}{r} \theta e_\theta. \quad (8.24)$$

Таким образом, решение задачи свелось к отысканию двух функций $f(r)$ и $g(r)$. Эти функции на ударной волне, т. е. при $r = r_1$, должны обращаться в некоторые константы, определяемые видом решения (8.23) и (8.24) и граничными условиями (8.19). Для определения функций $f(r)$ и $g(r)$ воспользуемся уравнениями (8.21) и законом Ома (8.16). Выразим члены, входящие в эти уравнения, через функции $f(r)$ и $g(r)$. Так как

$$\begin{aligned}\xi = (\text{rot } v)_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} = 2 \frac{\theta}{r^3} f - f' \frac{\theta}{r} = -\frac{\theta}{r} \left(f'' - 2 \frac{f}{r^2} \right), \\ (\nu \nabla) \xi &= v_r \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{2f}{r^2} \left[\frac{\theta}{r^2} \left(f'' - \frac{2f}{r^2} \right) - \frac{\theta}{r} \left(f''' - 2 \frac{f'}{r^2} + 4 \frac{f}{r^3} \right) \right] + \\ &+ \frac{f' \theta}{r^2} \frac{1}{r} \left(f'' - 2 \frac{f}{r^2} \right) = \frac{\theta}{r^3} \left(-2f \tilde{f} + f \tilde{f}' + 2 \frac{ff''}{r} + 2 \frac{ff'}{r^2} - 12 \frac{f^2}{r^3} \right), \\ \frac{\xi}{r^*} (\nu \nabla) r^* &= \frac{\xi}{r\theta} \left(v_r \frac{\partial r^*}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial r^*}{\partial \theta} \right) = \frac{\xi}{r\theta} (\nu_r \theta + v_\theta) = \frac{\xi}{r\theta} \left(\frac{2f}{r^2} \theta - \frac{f'}{r} \theta \right) = \\ &= \xi \left(\frac{2f}{r^3} - \frac{f'}{r^2} \right) = -\frac{\theta}{r^3} \left(f'' - 2 \frac{f}{r^2} \right) \left(\frac{2f}{r} - f' \right) = \\ &= -\frac{\theta}{r^3} \left(-f \tilde{f}' + \frac{2f \tilde{f}}{r} + \frac{2f \tilde{f}}{r^2} - \frac{4f^2}{r^3} \right),\end{aligned}$$

то левая часть уравнения (8.21) преобразуется к виду

$$-\text{rot}(\nu \times \text{rot } v) e_\phi = (\nu \nabla) \xi - \frac{\xi}{r^*} (\nu \nabla) r^* = -\frac{2f}{r^3} \left(f'' - \frac{2f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{8f}{r^3} \right) \theta.$$

Преобразуем теперь правую часть уравнения (8.21). Вычислим плотность тока

$$\begin{aligned}j &= \sigma \nu \times \frac{\mathbf{H}}{c} = \sigma \left(\frac{v_r}{c} H_\theta - \frac{v_\theta}{c} H_r \right) e_\phi = \\ &= \sigma \left(\frac{2g}{r^2} \frac{f' \theta}{r} - \frac{2f}{r^2} \frac{g' \theta}{r} \right) e_\phi = \frac{2\sigma\theta}{r^3} (f'g - g'f) e_\phi.\end{aligned}$$

Плотность силы равна

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} j \times \mathbf{H} &= e_r \frac{2\sigma\theta}{r^3} (f'g - g'f) \left(\frac{g'}{r} \theta \right) + e_\theta \frac{2\sigma\theta}{r^3} (f'g - g'f) \left(\frac{2g}{r^2} \right) = \\ &= \sigma \left[e_r \frac{2\theta^2}{r^4} g'(f'g - g'f) + e_\theta \frac{4\theta}{r^5} g(f'g - g'f) \right].\end{aligned}$$

Итак, правая часть уравнения (8.21) выражается через функции f и g следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \cdot \text{rot} \left(\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2\theta^2}{r^4} g'(f'g - g'f) \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{4\theta\sigma}{r^4} g(f'g - g'f) = \\ &= -\frac{4\theta\sigma}{\rho r^5} g'(f'g - g'f) - \frac{16\theta\sigma}{\rho r^6} g(f'g - g'f) + \frac{4\theta\sigma}{\rho r^5} g'(f'g - g'f) + \\ &+ \frac{4\theta\sigma}{\rho r^5} g(f''g - g''f) = \frac{4\theta\sigma}{\rho r^5} g \left(-g''f + gf'' - \frac{4f'g}{r} + \frac{4fg'}{r} \right). \end{aligned}$$

Окончательно уравнение (8.21) примет вид

$$f \left(f'' - \frac{2f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{8f}{r^3} \right) = -\frac{2\sigma g}{\rho r^2} \left(-fg'' + f''g + \frac{4fg'}{r} - \frac{4f'g}{r} \right). \quad (8.25)$$

Так как

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \text{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = c \left(\frac{2\theta g}{r^3} - \frac{g''\theta}{r} \right),$$

то уравнение, выражающее закон Ома, запишется через функции f и g следующим образом:

$$\frac{2}{r^2} (f'g - g'f) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{2g}{r^2} - g'' \right). \quad (8.26)$$

Уравнения (8.25) и (8.26) служат для определения функций $f(r)$ и $g(r)$. Перейдем в этих уравнениях к безразмерным переменным $R = r/r_1$, $F(R) = f(r)/(Ur_1^2)$, $G(R) = g(r)/(\chi r_1^2)$.

Тогда уравнение (8.25) примет вид

$$F \left(F'' - \frac{2F''}{R} - \frac{2F'}{R^2} + 8 \frac{F}{R^3} \right) = -\frac{2}{R^2} Q \eta G \left(-FG'' + F''G + 4F \frac{G'}{R} - 4F' \frac{G}{R} \right), \quad (8.27)$$

где $Q = \sigma\chi^2 r_1/(U\rho_1)$, а уравнение (8.26) будет иметь вид

$$(-G'' + G/R^2) = \frac{2}{R^2} R_m (-FG' + F'G), \quad (8.28)$$

где $R_m = Ur_1/v_m = 4\pi\sigma Ur_1/c^2$ – магнитное число Рейнольдса.

Найдем теперь граничные условия, которым должны удовлетворять функции F и G , входящие в эти уравнения. Система (8.27) и (8.28) является системой пятого порядка, поэтому для определения функций $G(R)$ и $F(R)$ необходимо пять граничных условий. Магнитное поле на ударной волне выражается через функцию G следующим образом:

$$\frac{1}{c} H = \frac{2g(r_1)}{r_1^2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) e_r - \frac{g'(r_1)}{r_1} \theta e_\theta = 2\chi G(1) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) e_r - \chi G'(1) \theta e_\theta.$$

Следовательно, в силу (8.24)

$$G(1) = 1, \quad G'(1) = -1. \quad (8.29)$$

С другой стороны, на ударной волне

$$v = 2UF(1)(1 - \theta^2/2)e_r - UF'(1)\theta e_\theta.$$

Следовательно, в силу (8.23)

$$F(1) = -\eta/2, \quad F'(1) = -1. \quad (8.30)$$

Для получения пятого граничного условия воспользуемся тем, что непосредственно за ударной волной давление известно:

$$\left. \begin{array}{l} p_2 = p_1 + \rho_1 U^2 (1 - \eta)(1 - \theta^2) \\ \text{или} \\ \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{r=r_1} = -2\rho_1 U^2 (1 - \eta)\theta. \end{array} \right\} \quad (8.31)$$

Проектируя уравнение движения на направление e_θ , получаем

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \frac{v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\sigma H_r}{\rho} (v_r H_\theta - v_\theta H_r) \right].$$

Используя (8.23), (8.24), находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{2f}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f' \theta}{r} \right) - \frac{f'^2 \theta}{r^3} + \frac{2f}{r^2} \frac{f' \theta}{r^2} + \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{2g}{r^2} \left(-\frac{2f}{r^2} \frac{g' \theta}{r} + \frac{f' \theta}{r} \frac{2g}{r^2} \right) \right] = \\ &= \frac{2ff''\theta}{r^3} - \frac{2ff'\theta}{r^4} - \frac{f'^2\theta}{r^3} + \frac{2ff'\theta}{r^4} + \frac{\sigma 4g\theta}{\rho r^5} (f'g - g'f) = \\ &= \frac{\theta}{r^3} (2ff'' - f'^2) + \frac{\sigma 4g\theta}{\rho r^5} (f'g - g'f). \end{aligned}$$

Введя функции $F(R)$ и $G(R)$, получим

$$\frac{1}{U^2 \rho_l \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{\eta R^2} (2FF'' - F'^2) + 4Q \frac{G}{R^2} (F'G - G'F).$$

Подставляя последнее равенство в (8.31) и воспользовавшись граничными условиями (8.30) и (8.29), найдем соотношение, которое должно выполняться на ударной волне:

$$-2(1-\eta) = \frac{1}{\eta} (-\eta F'' - 1) + 4Q \left(-1 - \frac{\eta}{2} \right).$$

Таким образом, пятое граничное условие можно записать в виде

$$F'' = -\frac{1}{\eta} + 2(1-\eta) - 4Q \left(\frac{\eta}{2} + 1 \right). \quad (8.32)$$

Система (8.26), (8.27) с граничными условиями (8.29), (8.30) и (8.32) интегрировалась численно при $\eta = 1/11$, $R_m = 1/5$ и 1 и различных значениях Q (от 0,1 до 5). Интегрирование велось от $R_1 = 1$ до R^* такого, что $F(R^*) = 0$. В точке R^* скорость $v_r = 0$, и следовательно, эта точка соответствует поверхности тела. Отсюда видно, что сферической ударной волне соответствует обтекание сферы меньшего радиуса $R^* < 1$. Расчет показал, что R^* уменьшается при увеличении Q . При $Q > Q_{\text{крит}}$ величина R^* становится отрицательной, т.е. обтекаемого тела не существует. Величина $Q_{\text{крит}}$ для обеих R_m получилась приблизительно равной 4,2. На основании результатов расчета для различных Q и R_m были найдены безразмерное расстояние ударной волны от сферы $\Delta = (1 - R^*)/R^*$ и безразмерный градиент скорости на теле

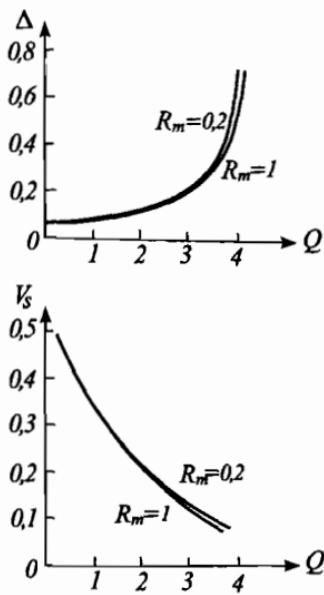


Рис. 59

$V_s = -\left(F'/R^2\right)_{R=R^*}$. Результаты расчетов этих величин представлены на рис. 59.

Отметим, что эти величины слабо зависят от R_m и сильно от Q . При увеличении Q ударная волна удаляется от тела. При $Q = Q_{\text{крит}}$ безразмерное расстояние от ударной волны до тела обращается в бесконечность. Градиент скорости на поверхности тела убывает с ростом Q .

Уменьшение касательной составляющей скорости невязкого потока вне пограничного слоя приводит к уменьшению аэродинамического нагрева летящего тела приблизительно

в $\sqrt{V_{s0}}/\sqrt{V_{sm}}$ раз, где V_{s0} и V_{sm} — градиенты скорости на поверхности тела соответственно при отсутствии

и наличии магнитного поля [7]. Таким образом, использование магнитного поля может привести к уменьшению нагрева тела.

Библиография *

Монографии, обзоры, сборники

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952.
2. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. М.: Физматгиз, 1958.
3. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Труды конференции по магнитной гидродинамике. Рига, 1958. Рига: Изд. АН Лат. ССР, 1959.
4. Данжи Дж. Космическая электродинамика. М.: Госатомиздат, 1961.
5. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: ИЛ, 1959.
6. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
7. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума): Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1958.
8. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М.: Физматгиз, 1961.
9. Проблемы современной физики. Сб. перев. №2. М.: ИЛ, 1954.
10. Проблемы современной физики. Сб. перев. №7. М.: ИЛ, 1957.
11. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: ИЛ, 1957.
12. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика // УФН, 1957. Т.62. №3.
13. Electromagnetic phenomena in cosmical physics Ed. by B. Lehnert Cambr. Univ. Press, 1958.
14. Germain P. Introduction a l'étude de l'aeromagnetodynamique // ONERA, publ. 51, 1958.
15. Magneto-fluid dynamics. Symposium 1960 // Rev. Modern Physics, 1960. T.32. №4.

* В списке литературы приняты следующие сокращения названий журналов:

ДАН – Доклады Академии наук.

ЖТФ – Журнал технической физики.

ЖЭТФ – Журнал экспериментальной и теоретической физики.

ПММ – Прикладная математика и механика.

УФН – Успехи физических наук.

ARS Journ. – American Rocket Society Journal.

JAS – Journal of Aero-Space Sciences.

ONERA – Office National d'Etudes et de Recherches Aeronau-tiques.

16. The magnetodynamics of conducting fluids D. Bershader. Stanford Univ. Press, 1959.
17. Resler E. L., Sears W. R. The prospects for magneto-aerodynamics // JAS, 1958. T.25. №4. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1958. №6.)

К главе 1

1. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме//ЖЭТФ, 1957. Т.33. №2.
2. Брагинский С. И. Об одном критерии применимости уравнений магнитной гидродинамики к плазме. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы//Труды конференции по магнитной гидродинамике. Рига, 1958. Рига: Изд. АН Лат. ССР, 1959.
3. Голицын Г. С. Плоские задачи магнитной гидродинамики//ЖЭТФ, 1958. Т.34. №3.
4. Губанов А. И., Лузыгин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики // ЖТФ, 1960. Т.ХХХ. №9.
5. Жигулев В. Н. Об одном классе движений в магнитной гидродинамике//ПММ, 1958. Т.ХХII. №3.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.
7. Кантрович А. Р., Петчек Г. Е. Вводный обзор магнитной гидродинамики. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума): Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1958.
8. Каплан С. А. О сохранении циркуляции скорости в магнитогазодинамике//Астр. журн., 1954. Т. XXXI. №4.
9. Каплан С. А., Станюкович К. П. Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного течения//ДАН СССР, 1954. Вып. 95. №4.
10. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: ИЛ, 1959.
11. Ладыженский М. Д. Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике//ПММ, 1959. Т.ХХIII. №6.
12. Любимов Г. А. О форме обобщенного закона Ома в магнитной гидродинамике//ПММ, 1961. Т.ХХV. №4.
13. Половин Р. В. О магнитогидродинамическом описании плазмы// ЖТФ, 1962. Т.ХХXI. №1.
14. Ращевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Гостехиздат, 1953.
15. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: ИЛ, 1957.
16. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика//УФН, 1957. Т.62. №3.
17. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Гостехиздат, 1957.
18. Чепмен С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.
19. Ching Shi-Liu, Ali Bulent Cambel. Magnetogasdodynamic flow regimes // ARS Journ., 1959. T.29. №11.
20. EIsasser W. M. Induction effects in terrestrial magnetism//Phys. Rev., 1947. T.72. №9.
21. EIsasser W. M. Dimensional relations in magnetohydrodynamics//Phys. Rev., 1954. T.95. №1.
22. Kihara T. Macroscopic foundation of plasma dynamics//Proc. Phys. Soc. Japan, 1958. T.13. №5.

23. *Schlüter A.* Dynamik des Plasmas I//*Zeitschr. Naturforsch.*, 1950. T.5a. №1. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1954. №2.)
24. *Schlüter A.* Dynamik des Plasmas II//*Zeitschr. Naturforsch.*, 1951. T.6a. №1. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1954. №2.)

К главе 2

1. *Коган М. Н.* О сохранении вихрей и токов в магнитной гидродинамике//*ДАН СССР*, 1961. Т.139. №1.
2. *Ладиков Ю. П.* Магнитно-вихревые кольца // *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, 1960. №4.
3. *Региер C. A.* О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля//*ПММ*, 1960. Т. XXIV. №3.
4. *Сыроватский С. И.* Магнитная гидродинамика//*УФН*, 1957. Т.62. №3.
5. *Уфлянд Я. С.* Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля // *ЖТФ*, 1960. Т.XXX. №10.
6. *Уфлянд Я. С.* Задача Гартмана для круглой трубы//*ЖТФ*, 1960. Т.XXX. №10.
7. *Шаффранов В. Д.* Магнитно-вихревые кольца//*ЖЭТФ*, 1957. Т.33. №3 (9).
8. *Якубенков А. Е.* Течение по трубам вязкой несжимаемой проводящей жидкости в однородном и неоднородном магнитном поле // *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, 1961. №1.
9. *Alfvén H.* Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves//*Nature*, 1942. Т.150. №3805.
10. *Alfvén H.* On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves// *Arkiv f. mat., astron., o. fys.*, 1943. Т.29 B. №2.
11. *Blewiss Z. O.* Magneto-gas dynamics of hypersonic Couette flow//*JAS*, 1958. Т.25. №10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №3.)
12. *Chandrasekhar S.* On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics//*Proc. Nat. Acad. of Science USA*, 1956. Т.42. №5.
13. *Greenspan H. P., Carrier G. F.* The magnetohydrodynamic flow past a flat plate//*Journ. Fluid Mech.*, 1959. Т.6. №1.
14. *Hartmann J.* Hg-dynamics I: Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field//*Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-fysiske Meddelelser*, 1937. Т.XV. №6.
15. *Hasimoto H.* Viscous flow of a perfectly conducting fluid with a frozen magnetic field//*Phys. of Fluids*, 1959. Т.2. №3.
16. *Parker E. N.* Hydromagnetic waves and the acceleration of cosmic rays //*Phys. Rev.*, 1955. Т.99. №6.
17. *Shercliff J. A.* Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields//*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1953. Т.49. №1.
18. *Stewartson K.* On the motion of a non-conducting body through a perfectly conducting fluid//*Journ. of Fluid Mech.*, 1960. Т.8. №1.

К главе 3

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Простые волны в магнитной гидродинамике//ЖТФ, 1959. Т.ХХIX. №8.
2. Жигулов В. Н. Анализ слабых разрывов в магнитной гидродинамике //ПММ, 1959. Т.ХХIII. №1.
3. Каплан С. А., Станюкович К. П. Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного течения//ДАН СССР, 1954. Т.95. №4.
4. Коган М. Н. Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью//ПММ, 1959. Т.ХХIII. №1.
5. Куликовский А. Г. О волнах Римана в магнитной гидродинамике//ДАН СССР, 1958. Т.121. №6.
6. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Простые магнитозвуковые волны//ЖЭТФ, 1958. Т.35. №2.
7. Половин Р. В. К теории простых магнитогидродинамических волн//ЖЭТФ, 1960. Т.39. №2.
8. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика//УФН, 1957. Т. 62. №3.
9. Banos A. Magneto-hydrodynamic waves in incompressible and compressible fluids//Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1955. T.233. №1194. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1957. №7.)
10. Banos A. Fundamental wave equations in an unboundet magneto-hydrodynamic field//Phys. Rev., 1955. T.97. № 6. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1957. №7).
11. Bazer J. Resolution of an initial shear-flow discontinuity in one-dimensional hydromagnetic flow//Astrophys. Journ., 1958. T.128. №3.
12. Herlofson N. Magneto-hydrodynamic waves in a compressible fluid conductor//Nature, 1950. T.165. №4208.
13. Hulst H. C. van de. Interstellar polarization and magneto-hydrodynamic waves//Proc. of the symposium on the motion of gaseous masses. Paris, 1949. (Имеется русский перевод в книге «Проблемы космической аэродинамики». М.: ИЛ, 1953).
14. Ong R. S. Characteristics manifolds in three-dimensional unsteady magnetohydrodynamics//Phys. of Fluids, 1959. T.2. №3.
15. Pott N. A simple construction for the determination of the magnetohydrodynamic wave speed in a compressible conductor//JAS, 1959. T.26. №4.

К главе 4

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ, 1958. Т.25. №3.
2. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений //Успехи математических наук, 1959. Т.87. №2.
3. Иорданский С. В. Теорема Цемплена в магнитной гидродинамике //ДАН СССР, 1958. Т.121. №4.
4. Киселев М. И. К расчету наклонных ударных волн в магнитной гидродинамике//ДАН СССР, 1960. Т.131. №4.
5. Коган М. Н. Ударные волны в магнитной газодинамике//ПММ, 1959. Т.ХХIII. №3.

6. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
7. Любарский Г. Я., Половин Р. В. О расщеплении неустойчивых ударных волн//ЖЭТФ, 1959. Т.36. №4.
8. Половин Р. В. Ударные волны в магнитной гидродинамике//УФН, 1960. Т.72. №1.
9. Половин Р. В., Любарский Г. Я. Невозможность ударных волн разрежения в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ, 1958. Т.35. №2.
10. Сыроватский С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ, 1958. Т.35. №6.
11. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика//УФН, 1957. Т.62. №3.
12. Bazer J., Ericson W. Hydromagnetic shocks//Astrophys. Journ., 1959. Т.129. №3.
13. Hoffmann F., Teller E. Magnetohydrodynamic shocks//Phys. Rev., 1950. Т.80. №4. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1954. №2).

К главе 5

1. Ахиезер И. А., Половин Р. В. О движении проводящего поршня в магнитогидродинамической среде//ЖЭТФ, 1960. Т.38. №2.
2. Бармин А. А., Гогосов В. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике//ДАН СССР, 1960. Т.134. №5.
3. Гогосов В. В. О движении поршня в проводящей среде//Труды ДАН СССР, 1960. Т.135. №1.
4. Гогосов В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике//ПММ, 1961. Т.XXV. №1.
5. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Некоторые решения уравнений магнитной гидродинамики и их приложения к задачам о распространении ударных волн//ПММ, 1960. Т.XXIV. №1.
6. Куликовский А. Г. К вопросу о пульсации плазменного шнура//ДАН СССР, 1957. Т.114. №5.
7. Ладиков Ю. П. Некоторые точные решения уравнений неустановившихся движений в магнитной гидродинамике//ДАН СССР, 1961. Т.137. №2.
8. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике//ДАН СССР, 1959. Т.128. №4.
9. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Расщепление малого разрыва в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ, 1958. Т.35. №5.
10. Половин Р. В. О движении поршня в проводящей среде//ЖЭТФ, 1960. Т.38. №5.
11. Рязанов Е. В. О решении уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерные осесимметрические движения гравитирующего газа//ПММ, 1959. Т.XXIII. №1.
12. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа//ДАН СССР, 1953. Т.90. №5.
13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953.

14. Яворская И. М. Колебания бесконечного газового цилиндра с собственной гравитацией в магнитном поле//ДАН СССР, 1957. Т.114. №5.
15. Bazer J. Resolution of an initial shear-flow discontinuity in one-dimensional hydromagnetic flow//Astrophys. Journ., 1958. Т.128. №3.
16. Bazer J., Fleischmann O. Propagation of weak hydro-magnetic discontinuities//Phys. of Fluids, 1959. Т.2. №4.
17. Grad H. Propagation of magnetohydrodynamic waves without radial attenuation. The magnetodynamics of conducting fluids. Stanf. Univ. Press, 1959.
18. Mc. Vittie G. C. Some exact solutions of the equations of magnetohydrodynamics when both self-attraction and magnetic fields are present //Rev. Mod. Phys., 1958. Т.30. №3.

К главе 6

1. Коган М. Н. Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью//ПММ, 1959. Т.ХХIII. №1.
2. Коган М. Н. Плоские течения идеального газа с бесконечной электропроводностью в магнитном поле, не параллельном скорости потока//ПММ, 1960. Т.ХХIV. №1.
3. Коган М. Н. О распространении возмущений в плоских магнитогидродинамических течениях//ПММ, 1960. Т.ХХIV. №3.
4. Любимов Г. А. Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа//ДАН СССР, 1959 Т.126. №4.
5. Kato Y., Taniuti T. Hydromagnetic plane steady flow in compressible ionized gases//Progr. Theoret. Phys., 1959. Т.21. №4.
6. McCune J. E., Resler E. L. Compressibility effects in magneto-aerodynamic flows past thin bodies//JAS, 1960. Т.27. №7.
7. Resler E. L., McCune J. E. Electromagnetic interaction with aerodynamic flows, The magnetodynamic of conducting fluids//Stanf. Univ. Press, 1959.

К главе 7

1. Бюргерс Ж. М. Проникание ударной волны в магнитное поле. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума): Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1958.
2. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости//ЖЭТФ, 1957. Т.33. №6.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Замечания относительно структуры перпендикулярной магнитогидродинамической ударной волны//ПММ, 1959. Т.ХХIII. №6.
4. Куликовский А. Г. О структуре ударных волн в магнитной гидродинамике при произвольном законе диссиpации//ПММ, 1962. Т.ХХVI. №2.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Структура наклонной магнитогидродинамической ударной волны//ПММ, 1961. Т.ХХV. №1.

6. Сиротина Е.П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике//ЖЭТФ, 1960. Т.39. №3.
7. Bleviss Z. O. A study of the structure of the magnetohydrodynamic switch-on shock in steady plane motion//Journ. of Fluid Mech., 1960. T.9. №1.
8. Germain P. Contribution a la theorie des ondes de choc en magneto-dynamique des fluids//ONERA, publ. 97, 1959.
9. Ludford G. S. S. The Structure of a hydromagnetic shock in steady plane motion//Journ. of Fluid Mech., 1959. T.5. №1.
10. Marshall W. The structure of magneto-hydrodynamic shock waves//Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955. T.233. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», 1957. №7).
11. Resler E., Sears W. The prospects for magneto-aerodynamics//JAS, 1958. T.25. №4. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №6).

К главе 8

1. Жигулов В. Н. О явлении магнитного отжатия потока проводящей среды//Труды ДАН СССР, 1959. Т.126. №3.
2. Куликовский А. Г. Об обтекании намагниченных тел проводящей жидкостью//ДАН СССР, 1957. Т.117. №2.
3. Bush W. Magneto-hydrodynamic hypersonic flow past a blunt body//JAS, 1958. T.25. №11. (Имеется русский перевод в сборнике «Вопросы ракетной техники», 1959. №4).
4. Freeman N. C. On the flow past a sphere at hypersonic speed with a magnetic field//JAS, 1959. T.26. №10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1960. №3).
5. Kemp N. H. On hypersonic stagnation-point flow with a magnetic field //JAS, 1958. T.25. №6; Author's reply//JAS, 1959. T.26. №10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №1 и 1960. №3).
6. Kemp N. H. Hydromagnetic effect on heating and shear at a three-dimensional stagnation point in hypersonic flow//JAS, 1960. T.27. №7.
7. Meyer R. C. On reduction aerodynamic heat-transfer rates by magnetohydrodynamic techniques//JAS, 1958. T.25. №9. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №2).
8. Meyer R. X. Magnetohydrodynamics and aerodynamic heating//ARS Journ., 1959. T.29. №3.
9. Neuringer J. L., McIlroy W. Incompressible two-dimensional stagnation-point flow of an electrically conducting viscous fluid in the presence of a magnetic fields//JAS, 1958. T.25. №3. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №1).
10. Neuringer J. L., McIlroy W. Hydromagnetic effects on stagnation — point heat transfer//JAS, 1958. T.25. №5. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №1).
11. Rossow V. J. Magnetohydrodynamic analysis of heat transfer near a stagnation point//JAS, 1958. T.25. №5. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», 1959. №1).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1*

О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана

Медленные стационарные течения в цилиндрических трубах проводящей жидкости в однородном магнитном поле изучались ранее в работах [1–8], где теоретически и экспериментально был выявлен ряд интересных особенностей этих течений. В частности, в экспериментах с течением в прямоугольных трубах в средней части (ядре) потока, где влияние вязкости мало, в распределении скорости были обнаружены особенности, напоминающие дельта-функции.

Представляет интерес теоретическое изучение произвольных течений проводящей жидкости в неоднородном магнитном поле в случаях, когда силами инерции можно пренебречь. В этот класс течений входят течения в цилиндрических трубах произвольного сечения при наличии электродов на границах.

1. Общее решение. Рассмотрим медленные движения электропроводной несжимаемой жидкости в сильном магнитном поле. Будем считать, что силами инерции и вязкости можно пренебречь всюду, за исключением узких пограничных слоев. Тогда уравнение импульсов для ядра потока примет вид уравнения магнитной статики

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (1)$$

Рассмотрим стационарные или квазистационарные явления такие, что можно положить

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \phi. \quad (2)$$

Если известно решение системы уравнений (1), то потенциал ϕ и перпендикулярная к магнитному полю составляющая v_{\perp} скорости могут быть найдены из закона Ома

$$j_{\parallel} = \sigma \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad j_{\perp} = \sigma \left[(\operatorname{grad} \phi)_{\perp} + \frac{v_{\perp}}{c} \times \mathbf{H} \right]. \quad (3)$$

Здесь σ – электропроводность; $\partial \phi / \partial s$ означает производную, взятую в направлении магнитного поля. Интегрируя первое уравнение

* Приложение представляет собой лишь слегка отредактированную статью А.Г. Куликовского, опубликованную в Известиях АН СССР, Сер.: «Механика жидкости и газа», 1968. Вып.2. С. 3–10.

ние (3), получим выражение для ϕ , которое будет содержать произвольную функцию координат, не меняющуюся вдоль магнитных силовых линий. После нахождения v_{\perp} из второго уравнения (3) определим продольную составляющую v_{\parallel} из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (4)$$

Полученное выражение для v_{\parallel} содержит слагаемое fH , где f – произвольная функция, принимающая постоянные значения магнитных силовых линий. Таким образом, каждому решению уравнений магнитной статики (1) могут быть поставлены в соответствие явные выражения для ϕ и v .

Будем рассматривать в дальнейшем случай $p \ll H^2$. Тогда из уравнения (1) следует, что магнитное поле в первом уравнении можно считать безвихревым и зависящим от внешних источников

$$H = \operatorname{grad} a \quad (a - \text{заданная функция}). \quad (5)$$

Второе уравнение в (1) заменяется в данном случае уравнением

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (6)$$

При этом давление может быть задано как произвольная функция, меняющаяся вдоль магнитных силовых линий. Из уравнений (1) найдем

$$j_{\perp} = \frac{cH}{H^2} \times \operatorname{grad} p. \quad (7)$$

Подставляя в (6) выражение (7), после интегрирования получим

$$j_{\parallel} = H \int \frac{c}{H^2} (H \times \operatorname{grad} H^{-2}) \cdot \operatorname{grad} p \, da + AH. \quad (8)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль магнитной силовой линии по величине a , определенной равенством (5); A – произвольная функция, постоянная на каждой из магнитных силовых линий.

Из уравнения (3) имеем

$$\sigma\phi = c \iint H^{-2} (H \times \operatorname{grad} H^{-2}) \cdot \operatorname{grad} p \, dada + Aa + B. \quad (9)$$

При этом интегрирование также производится вдоль магнитных силовых линий, а B – произвольная функция, не меняющаяся вдоль магнитных силовых линий. Проводимость σ предполагалась для простоты постоянной. Из второго уравнения (3) получаем

$$v_{\perp} = -\frac{c^2}{\sigma H^2} \operatorname{grad} p - \frac{cH}{H^2} \times \operatorname{grad} \phi. \quad (10)$$

Используя выражение (10), из уравнения неразрывности (4) находим

$$\nu_1 = H \int \left[\frac{c}{H^2} (\operatorname{grad} H^{-2} \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad} \phi + \right. \\ \left. + \frac{c^2}{\sigma H^2} \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} H^{-2} + \frac{c^2}{\sigma H^4} \Delta p \right] da + CH. \quad (11)$$

Интегрирование ведется вдоль магнитных силовых линий; Δ – оператор Лапласа; C – произвольная функция, постоянная на каждой из магнитных силовых линий.

Равенства (7)–(11) дают при заданном H общее решение системы уравнений (1), (3), (4), (6). Это решение содержит четыре произвольные функции: p , A , B , C , принимающие постоянные значения на каждой из магнитных силовых линий. Решения типа (7)–(11) в случае однородного магнитного поля были получены ранее для некоторых частных видов течений в работах [1–3].

2. Границные условия для ядра потока. Границные условия для ядра потока представляют собой условия на внешней границе пограничного слоя, который возникает у стенки и преобразует граничные условия на стенке в граничные условия для ядра потока. В пристеночном пограничном слое, кроме магнитной силы и градиента давления, необходимо учитывать вязкость, а силами инерции по-прежнему можно пренебречь. Пограничные слои подобного типа называются гармановскими; для некоторых видов течений они рассматривались ранее в [1, 5, 6]. Здесь будет рассмотрен пограничный слой при произвольной взаимной ориентации стенки, магнитного поля, градиента давления и градиента электрического потенциала в ядре потока, хотя это усложнение не приводит к каким-либо новым качественным выводам.

Уравнения, описывающие течение в пограничном слое, имеют вид

$$\mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial n^2} = \operatorname{grad} p + \frac{\sigma}{c} \mathbf{H} \times \operatorname{grad} \phi + \frac{\sigma H^2}{c^2} \nu - \frac{\sigma}{c^2} \mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \nu), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} - \frac{1}{c} \left(\mathbf{H} \times \frac{\partial \nu}{\partial n} \right)_n = 0, \quad (12)$$

где n – расстояние, отсчитываемое по нормали к поверхности стенки. Первое уравнение получается подстановкой уравнений (3), выражающих закон Ома, в уравнение импульсов, а второе представляет собой уравнение неразрывности электрического тока.

Будем считать, что нормальная к поверхности составляющая магнитного поля $H_n \neq 0$. Будем считать также, что в пограничном слое нормальная к поверхности компонента скорости равна нулю, а касательные составляющие градиентов потенциала и давления со-впадают с их значениями в ядре потока.

Обозначим, соответственно, через u , Φ и P разности

$$u = v - v_0, \quad \Phi = \phi - \phi_0, \quad P = p - p_0,$$

где v_0 , ϕ_0 и p_0 – значения скорости, потенциала и давления в ядре.

Интегрируя второе уравнение (12) и считая, что H не меняется на толщине пограничного слоя, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{c} (H \times u)_n. \quad (13)$$

Используя это выражение и уравнение (12), получим уравнение для u :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \operatorname{grad} P + \frac{\sigma}{c^2} H_n^2 u - \frac{\sigma}{c^2} H_n (H \cdot u) n, \quad (14)$$

где n – единичный вектор нормали к поверхности.

Так как $u_n = 0$, то проектируя левую и правую части векторного уравнения (14) на нормаль к поверхности, получим

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\sigma}{c^2} H_n (H \cdot u). \quad (15)$$

Проектируя левую и правую части векторного уравнения (14) на касательную к стенке плоскость, получим уравнение

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\sigma}{c} H_n^2 u. \quad (16)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющего граничным условиям на стенке и в бесконечности, имеет вид

$$u = -v_0 \exp \left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \frac{H_n}{c} n \right). \quad (17)$$

Здесь v_0 – скорость на внешней границе пограничного слоя, которая определяется равенством (10) и условием $v_n = 0$:

$$\begin{aligned} v_0 = & -\frac{c^2}{\sigma H^2} \operatorname{grad} p + \frac{cH}{H^2} \times \operatorname{grad} \phi + \\ & + \frac{c^2 H}{H_n H^2} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial p_0}{\partial n} - \frac{1}{c} (H \times \operatorname{grad} \phi)_n \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Индекс «0» в дальнейшем будем опускать.

Из равенства (17) следует, что отношение толщины пограничного слоя к характерному размеру течения L имеет порядок $1/M$, где $M = \sqrt{\sigma}HL / c\sqrt{\mu}$ – число Гартмана. При $M \gg 1$ вдали от стенок образуется ядро потока, где справедливы формулы (7)–(11). Условие $M \gg 1$ будем в дальнейшем считать всегда выполненным.

Нетрудно при помощи закона Ома и уравнений (15), (13) вычислить полный ток I , протекающий в пограничном слое, изменение давление δp и изменение потенциала $\delta\phi$ поперек пограничного слоя:

$$I = \frac{\sigma}{c} \int (\mathbf{u} \times \mathbf{H})_n dn = \sqrt{\sigma\mu} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}), \quad (19)$$

$$\delta p = \frac{\sigma}{c^2} H_n \int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) dn = \frac{\sqrt{\sigma\mu}}{c} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}), \quad (20)$$

$$\delta\phi = \frac{1}{c} \int (\mathbf{H} \times \mathbf{u})_n dn = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \frac{1}{H_n} (\mathbf{H} \times \mathbf{v})_n, \quad (21)$$

где интегрирование ведется по всей толщине пограничного слоя, а \mathbf{v} – скорость на его внешней границе; индексами τ и n обозначены касательные и нормальные к поверхности компоненты векторов.

Равенства (18)–(21) показывают, что величины I , δp , $\delta\phi$ имеют следующие порядки величины:

$$|I| \sim \frac{c}{H_0} \delta p \sim \sigma \delta\phi \sim \frac{1}{M} \max \left\{ \frac{cp}{H_0}, \sigma LE_\perp \right\}. \quad (22)$$

Здесь H_0 , E_\perp – характерные значения напряженности магнитного поля и поперечной составляющей электрического поля. Заметим, что изменение давления и потенциала в пограничных слоях не может привести к заметному изменению скорости в ядре потока. Действительно, изменения граничных значений потенциала и давления могут изменить градиенты этих величин в ядре потока на величины $\delta p/L$ и $\delta\phi/L$, и, как нетрудно убедиться, соответствующие изменения скорости составят величину порядка $1/M$ ее первоначального значения.

Поэтому на электродах величиной $\delta\phi$ во многих случаях можно пренебречь, и граничное условие для ядра потока записывать в виде

$$\Phi = \Phi_0. \quad (23)$$

На непроводящей стенке нужно потребовать выполнение равенства

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + j_n = 0.$$

Здесь div берется в касательной плоскости к поверхности стенки, а j_n – нормальная к стенке составляющая плотности тока в ядре. Это равенство, которое в силу (19) можно записать в виде

$$\sqrt{\sigma\mu} (\operatorname{rot} v)_n + j_n = 0, \quad (24)$$

представляет собой граничное условие для ядра потока на непроводящих стенках. Если j_{\parallel} имеет тот же порядок величины, что и j_{\perp} , то величина I имеет по отношению к характерному току $j_{\perp}L$ в ядре потока следующий порядок величины:

$$\frac{1}{M} \left[1 + \frac{\sigma H_0 L E_{\perp}}{p} \right]. \quad (25)$$

Рассмотрим течения проводящей жидкости в некотором ограниченном объеме, когда каждая магнитная силовая линия пересекает две стенки, ограничивающие жидкость. Суммарный ток, притекающий из ядра потока к обоим пограничным слоям, определяется величиной j_{\perp} , а также формой стенок и магнитным полем. Если обе стенки – изоляторы, то этот ток вливается в токи, текущие по пограничным слоям. Как видно из (3), протекание значительных токов в пограничных слоях вызывает появление сильного электрического поля E_{\perp} .

В случае, когда одна из стенок – электрод, а другая – изолятор, возникновению сильного электрического поля в области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими электрод, препятствует наличие электрода с заданным потенциалом. Поэтому током в пограничном слое на непроводящей стенке можно пренебречь. Тогда равенство (24) примет вид

$$j_n = 0. \quad (26)$$

В этом случае ток из ядра потока протекает лишь к электроду, и условие (26) позволяет определить произвольную функцию в равенстве (8).

3. Поверхностные особенности в решении для ядра потока. Общее решение (7)–(11), описывающее ядро потока, допускает существование в нем поверхностей, на которых величины, представляющие решение, терпят разрыв или имеют другие особенности. Эти особенности определяются поведением произвольных функций p , A , B , C , входящих в решение. Равенства (7)–(11) показывают, что изменение всех величин в направлении магнитного поля происходит непрерывно, а особенности могут возникать на поверхностях, со-

стоящих из магнитных силовых линий. Решения (7)–(11) с особенностями могут быть получены как предел последовательности, решений, не содержащих особенностей. Они могут использоваться для приближенной замены решений с быстрым изменением величин в окрестности некоторой поверхности.

Выражения, содержащие главные особенности в узком слое с резким изменением величин, можно получить, если сохранить в правых частях равенств (7)–(11) только члены, содержащие производные от p и ϕ по нормали к слою. Будем записывать полученные таким образом выражения в виде соответствующей величины в квадратных скобках

$$[j_1] = \frac{c}{H} \frac{\partial p}{\partial n} \tau, \quad (27)$$

$$[j_{||}] = H \int \frac{c}{H} \frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau} \frac{\partial p}{\partial n} da + AH, \quad (28)$$

$$[\phi] = \frac{c}{\sigma} \iint \frac{c}{H} \frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau} \frac{\partial p}{\partial n} dada + Aa + B, \quad (29)$$

$$[v_{\perp}] = -\frac{c^2}{\sigma H^2} \frac{\partial p}{\partial n} n + \frac{c}{H} \frac{\partial \phi}{\partial n} \tau, \quad (30)$$

$$[v_{||}] = -\frac{c^2}{\sigma} H \int \left(\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) da + CH, \quad (31)$$

где n – нормаль; τ – вектор, перпендикулярный к магнитному полю и лежащий в касательной плоскости к поверхности. Эти равенства позволяют очевидным образом найти соотношения на поверхностях сильного и слабого разрывов, которые возникают, если претерпеваются разрыв величины $\partial^2 p / \partial n^2$, $\partial \phi / \partial n$ или их производные. Если же рвутся ϕ , $\partial p / \partial n$ или p , то решение будет содержать дельта-функции или производные от нее.

Причина возникновения особенностей в решении связана с разрывом величин, задающих граничные условия на стенках. Рассмотрим пример.

Пусть обе стенки, ограничивающие течение, представляют собой перфорированные электроды с заданным непрерывным распределением потенциала. Через отверстия в электродах осуществляется

отсос или вдув жидкости. Пусть при помощи отсоса и вдува создано распределение давления с разрывом на некоторой поверхности. Тогда, как это следует из равенств (27), (28), на этой поверхности j и ϕ содержат дельта-функции, а v — производную от дельта-функции. Наличие таких особенностей у $j_{||}$, ϕ и v_{\perp} связано с неоднородностью магнитного поля. В однородном поле функции будут содержать особенности более низкого порядка.

Другие примеры возникновения особенностей будут рассмотрены ниже, при изучении течений проводящей жидкости в трубах. В частности, особенности образуются вдоль магнитных силовых линий, пересекающих угловые точки контура трубы.

При учете сил инерции и вязкости рассмотренные выше особенности «размажутся» и превратятся в узкие пограничные слои, расположенные внутри ядра потока. В случае однородного магнитного поля особенности, сосредоточенные на поверхностях, при переходе через которые рвется $\partial^2 p / \partial n^2$ и $v_{||}$ или ϕ , а также соответствующие этим особенностям пограничные слои рассматривались в работах [3, 7, 8].

4. Течение проводящей жидкости с прямолинейными линиями тока в трубе произвольного поперечного сечения в неоднородном магнитном поле. В качестве примера рассмотрим течение с прямолинейными линиями тока в трубе постоянного сечения произвольной формы при больших числах Гартмана. В этом случае силы инерции точно равны нулю и, кроме того, решение сохраняет свой вид при любых значениях магнитного числа Рейнольдса.

Эта задача решалась ранее только в случае однородного внешнего поля [1, 2, 7, 8]. Равенства (7)–(11) позволяют выписать в явном виде решение для течения в трубе при произвольном магнитном поле.

В плоскости uz , перпендикулярной направлению течения, введем криволинейные координаты и будем характеризовать положение точки потенциалом a и функцией тока b для напряженности магнитного поля H . Координатные линии $b = \text{const}$ совпадают с магнитными силовыми линиями, а кривые $a = \text{const}$ ортогональны к ним. При этом переход от плоскости uz к плоскости ab задается аналитической функцией $a + ib$. Такое преобразование рассматривалось ранее для течений с конечными числами Гартмана в [9].

Введем функцию тока ψ для электрического тока, так что

$$j_{||} = H \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad j_{\perp} = -H \frac{\partial \psi}{\partial a}. \quad (32)$$

Тогда общее решение (7)–(11) можно записать в следующем виде:

$$\psi = -K \int H^{-2} da + A(b), \quad (33)$$

$$\sigma p = -K \iint \frac{\partial H^{-2}}{\partial b} dada + A'(b)a + B(b), \quad (34)$$

$$\frac{\sigma}{c} u = \frac{K}{H^2} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial b}, \quad K = -c \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.} \quad (35)$$

Здесь $A(b)$ и $B(b)$ – произвольные функции, определяемые из граничных условий.

Пусть контур трубы задан уравнениями $a = a_1(b)$, $a = a_2(b)$, при чем $a_1 < a_2$ при $b_1 < b < b_2$. Обозначим через $F(a, b)$ какую-либо реализацию неопределенного интеграла

$$F(a, b) = \iint H^{-2} dada.$$

Через F_a и F_b будем обозначать частные производные по a и b , соответственно. Тогда, используя равенство (24), найдем решение в области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими две непроводящие стенки:

$$\psi = -KF_a(a, b) + \frac{1}{2}K[F_a(a_1, b) + F_a(a_2, b)] + \frac{Q}{2}, \quad (36)$$

$$\phi = \frac{K}{2c\sqrt{\sigma\mu}} \int [F_a(a_2, b) - F_a(a_1, b)] db - \frac{Q}{2c\sqrt{\sigma\mu}} b + \text{const}, \quad (37)$$

$$u = -\frac{K}{2\sqrt{\sigma\mu}} [F_a(a_2, b) - F_a(a_1, b)] + \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}}. \quad (38)$$

Здесь a_1 , a_2 – заданные функции b ; Q – постоянная, равная полному току, текущему в поперечном сечении трубы перпендикулярно магнитному полю. В выражениях (36)–(38) отброшены члены, имеющие порядок $1/M$ по отношению к оставленным. Величина Q может быть задана (при отсутствии электродов $Q = 0$) или может определяться по разности $\phi^* - \phi^{**}$ значений потенциала на электродах, ближе всего расположенных к рассматриваемой области. В последнем случае величина Q находится из уравнения

$$\phi(b^*) - \phi(b^{**}) = \phi^* - \phi^{**},$$

где $\phi(b)$ – функция, определенная равенством (37); b^* и b^{**} – нижняя граница ближайшего верхнего электрода и верхняя граница ближайшего нижнего электрода, соответственно.

В области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими два электрода с заданной постоянной разностью потенциалов N , функция электрического тока и потенциал выражаются следующим образом:

$$\psi = -KF_a(a, b) + \int \frac{\sigma N + K[F_b(a_2, b) - F_b(a_1, b)]}{a_2 - a_1} db, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma\varphi = & -KF_b(a, b) + \sigma N \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} + \\ & + K \frac{[F_b(a_2, b) - F_b(a_1, b)]a - [F_b(a_2, b)a_2 - F_b(a_1, b)a_1]}{a_2 - a_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

И, наконец, в области между электродом $a = a_1(b)$ с постоянным значением потенциала и изолятором $a = a_2(b)$ решение имеет вид:

$$\psi = K[F_a(a_2, b) - F_a(a_1, b)], \quad (41)$$

$$\sigma\varphi = -K[F_b(a, b) - F_b(a_1, b)] + (a - a_1)K \frac{dF_a(a_2, b)}{db}. \quad (42)$$

Отметим следующие характерные черты полученных решений. При $\mu \rightarrow \infty$ скорость и потенциал в области между изолирующими стенками стремятся к бесконечности, в то время как в остальной части трубы остаются конечными. Если производная функции, задающей уравнение электрода, терпит разрыв, то, как следует из равенств (40), (42) и (35), в потоке образуется поверхность разрыва скорости. Если рвется производная функции, задающей уравнение стенки-изолятора, то, как следует из (11), возникает поверхность, на которой рвется потенциал, а выражение для скорости содержит дельта-функцию. Границы между областями различных типов представляют собой поверхности, на которых сосредоточены особенности решения. Тип особенностей определяется поведением потенциала.

В случае однородного магнитного поля a и b представляют собой декартовы координаты в сечении трубы, $\Phi(a, b) = a^2/(2H^2)$ и решение переходит в известные решения [1, 2].

Литература

1. *Shercliff J.A.* Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1953. Vol. 49. P. 136.
2. *Брагинский С.И.* К магнитной гидродинамике слабо проводящих жидкостей // ЖЭТФ, 1959. Т. 37. № 5.
3. *Ludford G.S.S.* The effect of a very strong magnetic crossfield on a steady motion through a slightly conducting fluid. J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10. № 1. P. 141.
4. *Ludford G.S.S., Singh M.P.* Motion of a nonconducting sphere through a conducting fluid in a magnetic field. Proc. Camb. Phil. Soc. 1963. Vol. 59. P. 615.
5. *Hunt J.C.R., Leibovich S.* Magnetohydrodynamic flow in channels of variable cross-section with strong transverse magnetic field. J. Fluid Mech. 1967. Vol. 28. P. 241.
6. *Hunt J.C.R.* Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fluid Mech., 1965. Vol. 21. P. 577.
7. *Moffatt H.K.* Electrically driven steady flows in magnetohydrodynamics. Proc. 11th Inst. Congr. Appl. Mech. Munich, 1964, Springer - Verlag, 1966.
8. *Alty C.J.N.* Magnetohydrodynamic duct flow. Ph. D. Thesis Cambridge Univers, 1966.
9. *Якубенко А.Е.* Стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости по трубам в однородном и неоднородном магнитном поле // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961. № 1.

Приложение 2*

О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизующих газ

Ниже мы покажем, что в нестационарных задачах с ударными волнами, ионизирующими газ, находящийся в электромагнитном поле, впереди ударной волны может распространяться электромагнитная волна. При этом оказывается [1], что если за ударной волной известна, например, скорость движения газа (задача о поршне), то граничных условий на ударной волне, выражающих непрерывность касательной составляющей электрического поля, а также потоков вещества, импульса и энергии, недостаточно для одновременного определения интенсивности ударной волны и интенсивности излученной электромагнитной волны. Рассмотрение структуры ударных волн такого типа дает дополнительное соотношение, связывающее величины до и после ударной волны. Это соотношение, а следовательно, изменение всех величин на ударной волне существенным образом зависит от соотношения между диссипативными коэффициентами (вязкости, теплопроводности и магнитной вязкости) в переходной зоне.

В задачах обычной газовой динамики можно встретиться также с необходимостью получения дополнительного соотношения на разрыве из рассмотрения структуры разрыва. Примером является задача о медленном горении в газе [2, 3].

Будем считать, что электропроводность газа σ является функцией температуры T , причем $\sigma = 0$ при $T < T^*$ и $\sigma > 0$ при $T > T^*$. Рассмотрим структуру магнитогидродинамической ударной волны, движущейся по газу, температура которого перед волной $T_1 < T^*$. Структура ударных волн, когда проводимость всюду отлична от нуля, рассматривалась ранее в работах [4, 5]. Ограничимся здесь для простоты случаями, когда отличны от нуля только два диссипативных коэффициента — магнитная вязкость ν_m и молекулярная вязкость μ или магнитная вязкость ν_m и теплопроводность k , и предположим, что магнитное H и электрическое E поля взаимно перпен-

* Приложение к главе 4 представляет собой текст статьи того же названия, опубликованной А. Г. Куликовским и Г. А. Любимовым в журнале Доклады АН СССР, 1959, т. 129, № 1.

дикулярны и параллельны плоскости фронта волны. Уравнения магнитной гидродинамики, описывающие одномерные стационарные движения газа, могут быть записаны в следующем виде:

в первом случае

$$\nu_m \frac{dH}{dx} = Hv - C_1,$$

$$\mu \frac{dv}{dx} = \frac{\gamma + 1}{2} mv - \gamma \left(J - \frac{H^2}{8\pi} \right) + (\gamma - 1) \left(\varepsilon - \frac{C_1}{4\pi} H \right) v^{-1}, \quad (1)$$

$$mc_v T = \frac{1}{2} mv^2 - \left(J - \frac{H^2}{8\pi} \right) v + \left(\varepsilon - \frac{C_1}{4\pi} H \right)$$

во втором случае

$$\nu_m \frac{dH}{dx} = Hv - C_1,$$

$$k \frac{dT}{dx} = - \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} mv^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(J - \frac{H^2}{8\pi} \right) v - \left(\varepsilon - \frac{C_1}{4\pi} H \right), \quad (2)$$

$$mRT = \left(J - \frac{H^2}{8\pi} \right) v - mv^2,$$

где $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$, $\mu = \nu\rho$ – коэффициент вязкости; $k = c_p\rho\chi$ – коэффициент теплопроводности; R – газовая постоянная. При получении этих уравнений использовано то, что при одномерном стационарном движении газа электрическое поле $E = C_1/c$ (c – скорость света), поток массы m , поток импульса J и поток энергии ε не зависят от координаты x . Газ в уравнениях (1) и (2) считался совершенным. Несовершенство газа не приведет к качественным изменениям в дальнейших выводах.

В области $T > T^*$ на плоскости H, v , где проводимость $\sigma > 0$ ($\nu_m \neq \infty$), дифференциальные уравнения (1) или (2) определяют систему интегральных кривых (рис. 1). В области $T < T^*$ имеем $\sigma = 0$ и $H = \text{const}$. Ударную волну могут представлять те решения, которые переходят в поступательный поток при $x = \pm\infty$, т.е. решения, в которых все производные стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$. Так как по предположению $T_1 < T^* < T_2$, где T_2 – температура за ударной волной, то на плоскости H, v состоянию при $x = -\infty$ должна соответствовать некоторая точка кривой

$$mv^2 - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(J - \frac{H^2}{8\pi} \right) v + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\epsilon - \frac{C_1}{4\pi} H \right) = 0, \quad (3)$$

а состоянию при $x = \infty$ – точка, являющаяся пересечением гиперболы $Hv = C_1$ и кривой, описываемой уравнением (3). Таких точек пересечения существует либо три, либо одна.

В первом случае можно показать, что точка пересечения, соответствующая самому малому значению v , лежит либо в области $v < 0$, либо в области $T < 0$ и потому недостижима. Точка A (см. рис. 1), которая соответствует самому большому значению v , может быть только узлом для систем уравнений (1) и (2), причем интегральные кривые выходят из точки A при увеличении x .

Таким образом, потоку при $x = \infty$ может соответствовать только точка B (см. рис. 1). Для системы (1) точка B является седлом [5]. Если в этой точке выполняется неравенство $mv > (J - H^2/8\pi)/2$, то она является седлом и для системы (2). При обратном знаке неравенства точка B является узлом и интегральные кривые, описываемые системой (2), выходят из нее при увеличении x . В последнем случае внутри области течения образуется изотермический изомагнитный скачок.

Если из точки B , соответствующей потоку при $x = \infty$, двигаться по одной из двух интегральных кривых в сторону, соответствующую уменьшению x , то интегральная кривая должна достигнуть линии $T = T^*$, так как $T_1 < T^*$. При этом проводимость становится

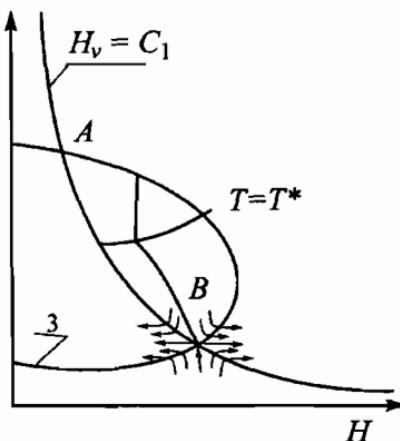


Рис. 1

равной нулю и дальнейшее движение происходит при $H = \text{const}$ до тех пор, пока интегральная кривая не подойдет к некоторой точке кривой (3). На последнем участке движение является чисто газодинамическим. Нетрудно убедиться, что для того, чтобы прийти таким образом к некоторой точке кривой (3), необходимо выйти из точки B по интегральной кривой, проходящей в области, где

$$dv/dx \leq 0, \quad dT/dx \geq 0, \quad dH/dx \geq 0. \quad (4)$$

Эти неравенства выполняются во время всего движения. Таким образом, газ, двигаясь от $x = -\infty$, сначала испытывает газодинамическое сжатие (которое, однако, не есть завершенная газодинамическая ударная волна), а затем при $T > T^*$ начинает взаимодействовать с магнитным полем и приходит в состояние B .

Изменение магнитного поля в волне $H_1 - H_2$ определяется точкой пересечения интегральной кривой с линией $T = T^*$. Эта точка зависит не только от характеристик набегающего потока, но и от отношений диссипативных коэффициентов ν_m , μ , k внутри переходной зоны, представляющей ударную волну. Если проинтегрировать уравнения, то можно выразить H_1 через параметры потока при $x = -\infty$, а так как последние однозначно связаны с величинами при $x = \infty$, то

$$H_1 = H_1(E_1, \rho_1, T_1, v_1). \quad (5)$$

Это соотношение может служить дополнительным граничным условием при замене непрерывного течения ударной волной. Условие (5) является независимым от условий, выражающих непрерывность потоков массы, импульса и энергии, а также касательной составляющей электрического поля. При распространении магнитогидродинамических ударных волн по непроводящему газу соотношение (5) заменяет известное соотношение

$$H_1 = -\frac{c}{\nu_1} E_1,$$

которое имеет место, если газ переди ударной волны является проводящим. Если соотношение (5) не выполнено, то стационарное движение, представляющее ударную волну, невозможно.

Если в переходной зоне один из диссипативных коэффициентов значительно больше остальных, то дополнительное граничное условие (5) можно найти в явном виде.

Пусть в переходной зоне всюду выполняются условия

$$\rho v_m \ll \mu, \quad \chi = 0 \quad (6)$$

или

$$\rho v_m \ll k, \quad \mu = 0. \quad (7)$$

Из равенств (1) и (2) найдем, что при $T = T^*$ скорость газа будет равна:

в случае (6)

$$v^* = m^{-1} \left[\left(J - \frac{H_1^2}{8\pi} \right) - \sqrt{\left(J - \frac{H_1^2}{8\pi} \right)^2 - 2J \left(\varepsilon - \frac{C_1}{4\pi} H - mc_v T^* \right)} \right]; \quad (8)$$

в случае (7)

$$v^* = m^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(J - \frac{H_1^2}{8\pi} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(J - \frac{H_1^2}{8\pi} \right)^2 - J^2 RT} \right]. \quad (9)$$

Так как при выполнении условий (6) и (7) интегральные кривые, описываемые системами уравнений (1) и (2), входящие в точку B , проходят при $T = T^*$ сколь угодно близко от гиперболы $Hv = C_1$, то в качестве дополнительного условия можно принять

$$H_1 v^* = c E_1 (\equiv C_1 = H_2 v_2). \quad (10)$$

Заметим, что при условиях (7), если в точке B $(dv/dH)_{T=\text{const}} < C_1/H^2$, то интегральная кривая, входящая в эту точку, все время идет вдоль гиперболы $Hv = C_1$. Если же $C_1/H_2 < (dv/dH)_{T=\text{const}} < 0$, то интегральная кривая идет вдоль гиперболы $Hv = C_1$ от $T = T^*$ до $T = T_2$, а затем вдоль кривой $T = T_2$ до точки T_2, H_2 . Если $(dv/dH)_{T=\text{const}} > 0$, то интегральная кривая идет от $T = T^*$ до $T = T_2$ вдоль $Hv = C_1$, от T_2, H до T_2, H_2 вдоль линии $T = T_2$, состоящие же T_2, H_2 переходит в точку B посредством изотермического изомагнитного скачка. В последних двух случаях конечный участок интегральной кривой соответствует изотермическому скачку в магнитной гидродинамике.

Рассмотрим теперь случаи, когда выполняются условия

$$\rho v_m \gg \mu, \quad c = 0 \quad \text{или} \quad \rho v_m \gg k, \quad \mu = 0. \quad (11)$$

Скорости v^* , соответствующие $T = T^*$, выражаются так же, как и в предыдущем случае, равенствами (8) и (9). При выполнении неравенств (11) интегральные кривые, описываемые системами (1) и (2), входящие в точку B , идут сначала вблизи кривой (3), а затем вблизи

прямой $H = H_2$. Так как разности $v_1 - v^*$ являются конечными величинами при фиксированных T_1 и T^* , а интегральные кривые при усилении неравенств (11) могут проходить сколь угодно близко от кривой (3), то дополнительным граничным условием в этом случае является

$$H_1 = H_2. \quad (12)$$

При этом все остальные величины изменяются, как в газодинамической ударной волне.

Ширина ударных волн определяется наибольшим из диссипативных коэффициентов. Исключение составляет случай (11), когда ширина ударной волны может быть оценена методами газовой динамики.

Рассмотрим теперь при условиях (6), (7) и (11) задачу о поршне. Пусть при $t = 0$ газ, температура которого $T < T^*$, заполняет полу-пространство $x > 0$. Газ находится в электромагнитном поле, напряженность которого $E_y = E'_0$, $H_z = H'_0$. В момент $t = 0$ плоскость, ограничивающая газ, начинает двигаться с постоянной скоростью U в сторону газа. Если не интересоваться явлениями, происходящими в масштабах, меньших, или равных ширине ударной волны, то среду можно считать идеальной. В этом случае задача будет автомодельной и ее решение будет состоять из электромагнитной и ударной волн, распространяющихся от поршня.

Пусть скорость поршня U такова, что скорость ударной волны равна v_1 . Перейдем к системе координат, связанной с ударной волной. Напряженности начального электрического и магнитного полей в этой системе будут соответственно равны с точностью до членов порядка v_1^2/c^2 :

$$H_0 = H'_0 - \frac{v_1}{c} E'_0, \quad E_0 = E'_0 - \frac{v_1}{c} H'_0.$$

После прохождения электромагнитной волны напряженности магнитного и электрического полей в этой системе будут связаны соотношением

$$H_1 - E_1 = H_0 - E_0 = \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) (H'_0 - E'_0) \quad (13)$$

Из равенств (10) и (13) найдем, что при условиях (6) и (7)

$$H_1 = \frac{1 - v_1/c}{1 - v^*/c} (H_0 - E_0) \approx H_0 - E_0, \quad E_1 = \frac{v^*}{c} H_1. \quad (14)$$

При условиях (11) ударная волна является газодинамической, а из равенств (12), (13) и условия $v_2 H_2 = (v_1 - U) H_1 = c E_1$ получим

$$H_1 = \frac{(1 + v_1/c)(H_0 - E_0)}{1 - (v_1 - U)/c} \approx H_0 - E_0, \quad E_1 = \frac{v_1 - U}{c} H_1 \quad (15)$$

Для определения связи v_1 и U в случае (5) и (6) необходимо решить алгебраическую систему уравнений, выражающую непрерывность на ударной волне потоков массы, импульса и энергии, а также электрического поля, при известных напряженностях магнитного и электрического полей непосредственно перед ударной волной.

Литература

1. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Изв. АН СССР. ОТН. 1959, № 4.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред, 1954.
3. Зельдович Я.В. Журн. физич. химии, 1948, т. 22, вып. 1, с. 27.
4. Marshall W. Phys. Rev., 1956, v.103, p.1900; Проблемы современной физики, 1957, № 7 (пер.)
5. Ludford G.S.S. J.Fluid Mech, 1959, v. 5, p.1.

Приложение 3*

Фронты ионизации в магнитном поле

В данном приложении рассматриваются фронты (разрывы), распространяющиеся по газу с проводимостью, изменяющейся на разрыве от нуля до бесконечности. Присутствие магнитного поля определяет существование фронтов различных типов и является важным для обсуждаемого явления. Системы уравнений, описывающих поведение электромагнитных полей и среды, различны по разные стороны от разрывов. Таким образом, рассматриваемые фронты являются фронтами фазовых переходов.

1. Крупномасштабная модель

Если достаточно сильная ударная волна распространяется по непроводящему газу, то рост температуры может вызвать появление электрической проводимости газа. В этом случае газ начинает взаимодействовать с магнитным полем. Так как перед фронтом взаимодействие между электромагнитным полем и газом отсутствует, то электромагнитное поле может быть описано уравнениями Максвелла, которые в отсутствие электрических токов и зарядов имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Поведение газа описывается уравнениями газовой динамики

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ – внутренняя энергия единицы массы газа. Для совершенного газа, течения которого будут далее изучаться, имеем

* Приложение представляет собой незначительно скорректированный для самостоятельной публикации текст одного из параграфов, написанных А.Г. Куликовским для книги «Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений».

$\varepsilon = p/[\rho(\gamma - 1)]$. Другие обозначения – стандартные¹. В уравнениях (1)–(3) не учитываются диссипативные процессы. Это означает, что они отвечают крупномасштабному приближению. В крупномасштабном приближении электропроводящий газ, магнитное и электрическое поля за фронтом ионизации могут быть описаны уравнениями магнитной гидродинамики (см. гл. 1), соответствующими отсутствию магнитной вязкости и других диссипативных процессов

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (6)$$

Последние равенства в (5) и (6) определяют электрическое поле \mathbf{E} и плотность электрического тока \mathbf{j} , которые не входят в другие дифференциальные уравнения. Однако в непроводящей среде вектор \mathbf{E} является независимой величиной, определяемой из уравнений Максвелла.

Заметим, что уравнения Максвелла (!) имеют одинаковый вид как для проводящей, так и непроводящей среды. Это следует из двух последних уравнений в (5) и первого в (6). Из выражения (5) для \mathbf{E} видно, что в проводящей среде $|\mathbf{E}|$ является малой величиной порядка $|\mathbf{v}| |\mathbf{B}| / c$. В дальнейшем предположим, что порядок $|\mathbf{E}|$ везде одинаков.

На фронте ионизации, который разделяет области, занятые проводящим и непроводящим газом, должны выполняться определенные соотношения. Они могут быть получены из интегральной формы основных уравнений. Система соотношений на разрыве может быть записана в виде [1] (см. также гл. 6):

¹ В этом приложении в отличие от основного текста книги напряженность магнитного поля обозначается через \mathbf{B} .

$$\begin{aligned}
 & [B_1 V / (4\pi) - B_0 v_1]^L + E_0 = 0, \quad [B_2 V / (4\pi) - B_0 v_2]^L = 0, \\
 & \{v_1 - B_0 B_1\} = 0, \quad \{v_2 - B_0 B_2\} = 0, \quad \{p + m^2 V + (B_1^2 + B_2^2) / (8\pi)\} = 0, \\
 & \left\{ \epsilon(p, V) - (m^2 V^2 + v_1^2 + v_2^2) / 2 - (V(B_1^2 + B_2^2)) / (8\pi) - \right. \\
 & \left. - E_0 B_1 + B_0 (B_1 v_1 + B_2 v_2) + V J \right\} = 0, \\
 & V = 1/\rho, \quad v_3 = mV, \quad B_0 = B_3 / (4\pi m), \quad E_0 = cE_2 4\pi m,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где m – поток массы. Величины m , B_0 и E_0 непрерывны на разрыве. Фигурные скобки обозначают скачок взятой в них величины, так что $\{a\} = a^L - a^R$. Верхние индексы R и L соответствуют величинам перед разрывом и за ним. Буквой J обозначена величина $p + m^2 V + (B_1^2 + B_2^2) / (8\rho)$, которая согласно одному из соотношений (7) одинакова по обе стороны от фронта.

В записи соотношений (7) использована декартова система координат, связанная с фронтом разрыва и осью x_3 , направленной по нормали к его поверхности. Таким образом, скорость разрыва равна нулю, а направления осей x_1 и x_2 выбраны так, что перед разрывом $E_1 = 0$. Отсюда, учитывая последнее равенство в (5), видим, что за разрывом $v_2 = 0$ и $B_2 = 0$.

Как будет показано ниже, соотношения на фронтах ионизации не всегда исчерпываются граничными условиями (7). Для того чтобы получить дополнительные соотношения, если они необходимы, надо рассматривать модель для умеренных масштабов и исследовать структуру фронтов ионизации.

2. Модель для умеренных масштабов

Рассмотрим случай, когда ионизация газа везде достаточно мала [7, 3, 4], чтобы пренебречь ее вкладом в уравнение состояния. В дальнейшем газ считается совершенным. Предполагается, что магнитная вязкость $\eta_m = c^2 / (4\pi\sigma)$ является наибольшим диссипативным коэффициентом.

Обзор исследований ионизационных фронтов при других предположениях имеется в обзоре [5], а также в монографии [6].

Модель для явлений умеренного масштаба в принятом приближении сводится к системе уравнений магнитной гидродинамики с конечной электрической проводимостью, но в отсутствии вязкости

и теплопроводности. Уравнения (4) и (6) сохраняют свою форму, а уравнения (5) должны быть заменены уравнениями

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\eta_m}{4\pi\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \operatorname{rot}(\eta_m \operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad \eta_m = c^2 / (4\pi\sigma). \quad (9)$$

Правая часть уравнения (8) представляет собой действие джоулева тепла. Соотношение для \mathbf{j} является простейшей формой закона Ома (без учета эффекта Холла). При $\sigma \rightarrow \infty$ уравнение закона Ома переходит в последнее из соотношений (5). Уравнение (10) является следствием уравнений Максвелла и закона Ома.

Для исследования структуры разрыва предположим, что все величины являются функциями единственной координаты $x = x_3$, т.е. рассмотрим стационарное течение газа в координатной системе, связанной с разрывом. Тогда система, описывающая изменение величин в структуре, может быть записана в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{dB_1}{dx} = \frac{4\pi m}{\eta_m} \left(\frac{B_1 V}{4\pi} - B_0 v_1 + E_0 \right), \\ \frac{dB_2}{dx} = \frac{4\pi m}{\eta_m} \left(\frac{B_2 V}{4\pi} - B_0 v_2 \right), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} v_1 - B_0 B_1 = 0, \quad v_2 - B_0 B_2 = 0, \\ p + m^2 V + \frac{B_1^2 + B_2^2}{8\pi} = J, \quad J = \text{const}, \\ \epsilon(p, V) - \frac{m^2 V^2 + v_1^2 + v_2^2}{2} - \frac{V(B_1^2 + B_2^2)}{8\pi} - \\ - E_0 B_1 + B_0 (B_1 v_1 + B_2 v_2) + VJ = \Theta, \quad \Theta = \text{const}. \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (10) выражают тот факт, что тангенциальные компоненты электрического поля являются постоянными. Это есть следствие первого из уравнений (1) для не зависящих от времени решений. При записи (10) были учтены закон Ома и последнее равенство в уравнениях (6). Равенства (11) выражают сохранение потоков импульса и энергии и по форме напоминают уравнения (7). Уравнения

(10) и (11) записаны в координатной системе, движущейся в плоскости разрыва таким образом, что потоки компонент импульса вдоль осей x_1 и x_2 равняются нулю. Потоки x -компоненты импульса и энергии через единицу поверхности $x = \text{const}$ обозначаются, соответственно, как J и Θ .

При этих предположениях величины в непроводящей области не могут меняться непрерывным образом. Это следует из уравнений (10) и (11), так как правые части уравнений (10), пропорциональные σ , исчезают для $\sigma = 0$ и дают $B_1 = \text{const}$, $B_2 = \text{const}$, что, согласно (11), приводит к постоянству остальных величин, если они меняются непрерывно и скорость газа не равна скорости звука.

Система (10), (11) допускает разрывные решения. Так как магнитная вязкость является единственным диссипативным коэффициентом, присутствующим в системе, магнитное поле должно быть непрерывным на разрывах, в то время как остальные величины могут претерпевать разрыв. Очевидно, что эти разрывы представляют собой газодинамические ударные волны.

Для описания фронта ионизации необходимо определить условие включения проводимости, т.е. условие, когда проводимость становится отличной от нуля. В простейшем случае можно предположить, что σ является функцией термодинамического состояния газа, например $\sigma = \sigma(T)$, где T – температура, так что $\sigma \equiv 0$ при $T \leq T^*$ и $\sigma > 0$ при $T > T^*$. В этом случае проводимость включается, если $T \leq T^*$ перед фронтом и $T > T^*$ за ним. Однако, как следует из системы уравнений (10), параметры, управляющие проводимостью, не очень важны. Нужно лишь знать, на каких фронтах включается проводимость. Это позволяет одновременно рассматривать случаи с неравновесной проводимостью.

3. Множество допустимых разрывов

Уравнения (11) представляют собой четыре равенства, которые связывают величины v_1 , v_2 , p , V , B_1 и B_2 . Эти соотношения позволяют выразить v_1 , v_2 , p и V , через B_1 и B_2 . Как следует из предыдущих рассмотрений, для совершенного газа эти функции двузначны и возможные значения при одинаковых B_1 и B_2 могут отвечать состояниям перед и за газодинамическим скачком, который не движется в выбранной системе координат.

Для определенности рассмотрим пространство (V, B_1, B_2) . Уравнение, связывающее V , B_1 и B_2 , может быть получено из соотношений (11). Для совершенного газа оно имеет вид

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} m^2 V^2 - 2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(J - \frac{B_\tau^2}{8\pi} \right) V + 2\Theta - B_0^2 B_\tau^2 + 2E_0 B_1 = 0, \quad (12)$$

где $B_\tau^2 = B_1^2 + B_2^2$.

Двузначная функция $V(B_1, B_2)$, которая может быть найдена из уравнения (12), задает поверхность Σ в пространстве (B_1, B_2, V) . Большие и меньшие значения V соответствуют сверхзвуковой и дозвуковой частям поверхности Σ , которые обозначим соответственно Σ_1 и Σ_2 . Поверхности Σ_1 и Σ_2 стыкуются по кривой, на которой х-компоненты скорости $v_3 = mV$ равна скорости звука в газе $a_0 = \sqrt{\gamma p V}$.

Состояние перед фронтом ионизации ($x = -\infty$) может быть задано произвольной точкой на части поверхности Σ , где $\sigma = 0$. В этом случае, как упоминалось ранее, правые части уравнений (10) равны нулю. В состоянии за фронтом ионизации ($x = \infty, \sigma \neq 0$) выражения в круглых скобках в правых частях уравнений (10) должны быть равны нулю. Таким образом, это состояние описывается особыми точками системы уравнений (10), которая может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{dB_1}{dx} = \frac{4\pi m}{\eta_m} \left\{ B_1 \left(\frac{V}{4\pi} - B_0^2 \right) + E_0 \right\}, \\ \frac{dB_2}{dx} = \frac{4\pi m}{\eta_m} B_2 \left(\frac{V}{4\pi} - B_0^2 \right). \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $V = V(B_1, B_2)$ – введенная выше двузначная функция, которая задает поверхность Σ . При написании уравнений (13) использовались два первых соотношения из системы (11).

Особые точки A_i , системы уравнений (13) – это особые точки одномерных МГД-течений. Они были изучены в [1] (см. также гл. 6) при рассмотрении структуры МГД-разрывов, для которых всюду $\sigma \neq 0$. Если газ совершенный, то существует не более четырех особых точек A_1, A_2, A_3 и A_4 , в которых должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned} mV(A_4) &< a_-, \quad a_- < mV(A_3) < a_A, \\ a_A &< mV(A_2) < a_+, \quad a_+ < mV(A_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $mV = v_3$ – скорость газа по отношению к разрыву, $a_- < a_A < a_+$ – характеристические скорости (медленная, альфеновская и быстрая) по отношению к газу, выражющиеся следующим образом (см. гл. 3):

$$a_A = \frac{|B_n|}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad a_{+,-} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_0^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} + \frac{|B_n|a_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \pm \sqrt{a_0^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} - \frac{|B_n|a_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \right],$$

где $a_0^2 = \gamma p V$.

Эволюционные быстрые и медленные магнитогидродинамические ударные волны соответствуют переходам $A_1 \rightarrow A_2$ и $A_3 \rightarrow A_4$. Если эти волны бесконечно слабые, то скорости быстрых и медленных ударных волн равны, соответственно, a_+ и a_- . Вращательная (альфеновская) волна Римана, которая сохраняет свою форму, а также соответствующий обратимый вращательный разрыв распространяются в проводящем газе со скоростью a_A .

Ограничимся рассмотрением фронтов ионизации, распространяющихся по заданному непроводящему газу со сверхзвуковой скоростью (сверхзвуковые фронты ионизации). Так как согласно предыдущему непрерывное изменение параметров течения невозможно при $\sigma = 0$, то газ может стать проводящим, только в том случае, если структура фронта ионизации начинается разрывом (газодинамической ударной волной), за которым проводимость становится отличной от нуля [4]. Решение, представляющее собой структуру фронта ионизации, должно в этом случае состоять из скачка с Σ_1 на Σ_2 при постоянном магнитном поле, и отрезка одной из магнитогидродинамических интегральных кривых, описываемых системой уравнений (13), входящей в одну из особых точек A_i .

Возможно существование дозвуковых фронтов ионизации [4]. В этом случае состояние впереди фронта должно принадлежать кривой, разделяющей на Σ_2 проводящее и непроводящее состояния. Такая ситуация в решениях задач также соответствует одному из случаев общего положения, поскольку перед дозвуковым фронтом ионизации может распространяться газодинамический скачок, который переводит газ в состояние, лежащие на границе областей с $\sigma > 0$ и $\sigma \equiv 0$. Исследование структуры дозвуковых фронтов ионизации требует информации о границе между проводящим и непроводящим состояниями (эти фронты здесь не рассматриваются).

Во многих случаях поверхность Σ представляет собой замкнутую выпуклую поверхность (ее форма не влияет на дальнейшее рассмотрение), сечение которой плоскостью $B_2 = 0$ показано на рис. 1 (кривая a). Все особые точки системы лежат в этой плоскости на пересечении кривой a с гиперболой

$$B_1 \left(\frac{V}{4\pi} - B_0^2 \right) = -E_0. \quad (15)$$

Точка A_1 всегда лежит на верхней сверхзвуковой части Σ_1 поверхности Σ , в то время как точка A_4 на нижней, дозвуковой части Σ_2 . Это следует из неравенств (14) с учетом того, что $a_+ > a_0$ и $a_- < a_0$. В зависимости от параметров течения точки A_2 и A_3 могут находиться как на Σ_2 , так и на Σ_1 .

Поскольку структура сверхзвукового фронта ионизации начинается с газодинамической ударной волны (скакча на котором B_1 и B_2 непрерывны с верхней частью поверхности Σ на ее нижнюю часть), рассмотрим проекции на плоскость (B_1, B_2) интегральных кривых, лежащих на Σ_2 , описываемых системой уравнений (13). На рис. 2 качественно изображены эти интегральные кривые для случая, когда точка A_2 лежит на Σ_2 . Стрелки показывают направление изменения величин при уменьшении x , т.е. вдоль потока газа.

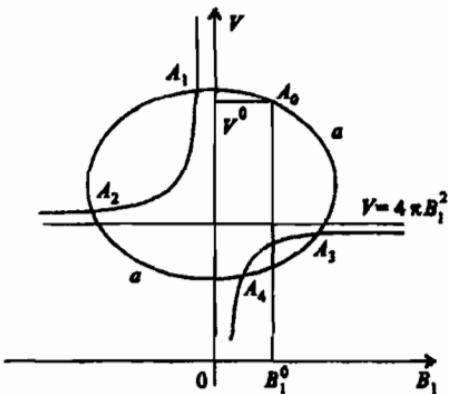


Рис. 1. Состояние перед фронтом ионизации (A_0) и возможные состояния за ним (A_2, A_3, A_4)

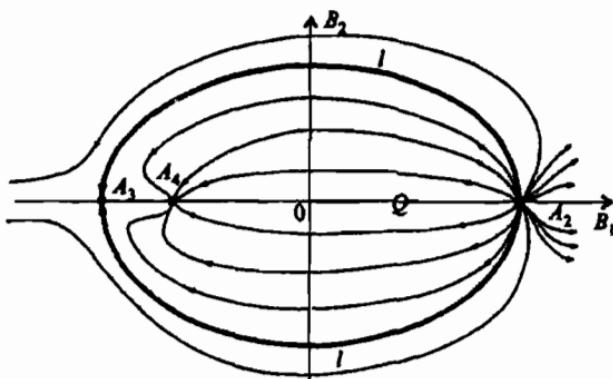


Рис. 2. Интегральные кривые, описывающие изменение магнитного поля в структуре фронта ионизации

Рассмотрим различные типы сверхзвуковых фронтов ионизации [4]. При этом будем различать типы фронтов по особым точкам, соответствующим состоянию за фронтом, т.е. в зависимости от того, какие неравенства в (14) выполняются.

На рис. 3 показана диаграмма эволюционности фронтов. Конечные особые точки A_1, A_2, A_3 и A_4 фронтов отмечены в соответствующих им прямоугольниках.

На горизонтальной оси нанесена величина газодинамической скорости звука a_0 . В прямоугольниках также указано число K дополнительных соотношений на разрыве, необходимых для того, чтобы сделать его эволюционным. Основными соотношениями при этом считались равенства, описывающие непрерывность потоков массы, импульса и энергии. Соотно-

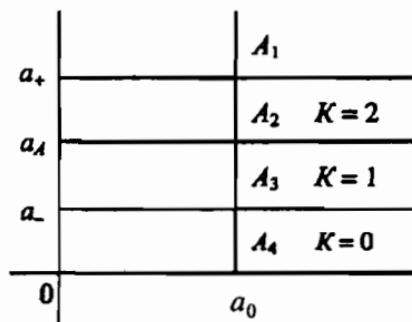


Рис. 3. Диаграммы эволюционности фронтов ионизации

шения, связывающие касательные составляющие электрического поля, служат для нахождения напряженности электрического поля перед разрывом и здесь не учитываются (см. обсуждение этого вопроса ниже).

Медленный фронт ионизации (I^-) соответствует состоянию A_4 за фронтом. Для I^- выполняется первое из неравенств (14). Интегральные кривые приходят в особую точку A_4 , которая является узлом (см. рис. 2). На плоскости (B_1, B_2) они занимают область Q , ограниченную кривыми l , приходящими в точку A_3 , которая является седловой. На рисунке изображен случай, когда A_2 лежит на Σ_2 и кривые l выходят из A_2 . Так как состояние за фронтом фиксировано, то состояние перед фронтом должно изображаться точкой, лежащей на Σ_1 над областью Q . Решение, представляющее собой структуру разрыва, начинается с газодинамической ударной волны, а затем величины B_1 и B_2 на поверхности Σ_2 непрерывно изменяются вдоль рассмотренных выше интегральных кривых.

Требование существования структуры не накладывает дополнительных условий, кроме условия типа неравенства, показывающего, что начальная точка лежит над областью Q . Это согласуется с условиями эволюционности. Если вместо конечного состояния зафиксি-

ровать скорость фронта ионизации W и начальное состояние, то множество конечных состояний в общем случае будет двумерным. Принимая во внимание возможность изменения W , можно заключить, что часть многообразия ударной адиабаты, изображающей состояния за фронтами ионизации, соответствующая медленным фронтам ионизации, является трехмерной.

Промежуточный фронт ионизации (I^-) отвечает состоянию A_3 за фронтом. Выполняется второе из неравенств (14). Если особая точка A_3 лежит на Σ_2 (см. рис. 2), то эта точка является седловой. В эту точку приходят две вышеупомянутые интегральные кривые l . Точка, представляющая собой начальное состояние, должна лежать на Σ_1 непосредственно над кривыми l (т.е. при тех же значениях B_1 и B_2). После газодинамической ударной волны, которой начинается структура фронта ионизации, точка, представляющая параметры среды, попадает на одну из интегральных кривых l и приходит в A_3 вдоль нее.

Если точка A_3 лежит на Σ_1 , то только точка A_4 остается на Σ_2 и все интегральные кривые приходят в эту точку. Следовательно, после газодинамического скачка из начального состояния на Σ_2 в особую точку A_3 попасть невозможно.

Таким образом, если сверхзвуковой промежуточный ионизационный фронт имеет структуру, то возникает простое ограничение на множество начальных состояний, а именно: B_1^R и B_2^R должны принадлежать кривой l . Это ограничение должно рассматриваться как дополнительное соотношение на фронте ионизации. Оно отвечает условиям эволюционности. Таким образом, для данного состояния перед фронтом и фиксированного W множество состояний за фронтом одномерно. Следовательно, если принять во внимание изменение W , то состояния за промежуточными фронтами ионизации, представляют собой двумерное множество.

Быстрый фронт ионизации (I^+) отвечает состоянию A_2 за фронтом. Выполняется третье из неравенств (14). Если точка A_2 лежит на Σ_2 , эта точка является узлом с интегральными кривыми, выходящими из него. В этом случае попасть непосредственно из начальной точки в точку A_2 можно только при помощи газодинамического скачка. Это приводит к двум дополнительным соотношениям $\{B_1\} = 0$ и $\{B_2\} = 0$, и изменение всех величин в быстром фронте совпадает с изменениями в газодинамической ударной волне. Множество состояний за этими фронтами, является одномерным.

Если точка A_2 лежит на Σ_1 , то данная точка – седловая. Приходящие в нее интегральные кривые лежат на плоскости $B_2 = 0$.

Не существует интегральных кривых с монотонным изменением x , приходящих в точку A_2 , которые начинались бы из состояния лежащего на Σ_2 за газодинамической ударной волной, поскольку на границе Σ_1 и Σ_2 направление изменения x меняется на противоположное. В результате быстрый фронт ионизации со сверхзвуковой скоростью за фронтом не имеет структуры. Очевидно также, что не существует фронтов ионизации таких, что состояние за фронтом отвечает точке A_1 .

Заметим, что при представлении результатов этого пункта, не учитывалось наличие электрического поля. В проводящей области электрическое поле может быть определено из соотношения (5), в то время как в непроводящей области касательные компоненты электрического поля могут быть найдены из условия их непрерывности на фронте в связанной с ним системе координат. Если к множеству параметров, подлежащих определению, добавится напряженность электрического поля перед разрывом, то необходимо также добавить два дополнительных соотношения на фронтах ионизации для касательных компонент электрического поля.

Обсуждаемые выше ударные адиабаты фронтов ионизации получены в результате определения перед фронтом всех величин, кроме E_1 и E_2 . Однако поскольку электромагнитное поле не взаимодействует с газом в непроводящей области, то при конкретных условиях задача определения напряженности электрического поля отделяется от задачи нахождения других величин. Это оправдывает развитый выше подход.

Тем не менее если наряду с величинами ρ , p , \mathbf{B} и v перед фронтом ионизации определять также E_1 и E_2 , то оказывается, что быстрые фронты ионизации могут, например, существовать не для произвольных комбинаций этих величин. Электромагнитная волна, излучаемая фронтом вперед, изменяет электромагнитное поле таким образом, что обеспечивает возможность реализации рассматриваемого фронта ионизации.

4. Простейшая автомодельная задача

Рассмотрим задачу о поршне. Пусть непроводящий газ занимает полупространство $x > 0$ при $t = 0$. Предположим, что при $t = 0$ газ находится в покое, его плотность и давление постоянны, а магнитное и электрическое поля \mathbf{B} и \mathbf{E} однородны, причем $E^2 \ll B^2$.

Бесконечно проводящий плоский поршень при $t = 0$ начинает двигаться из положения $x = 0$, сохраняя свою скорость при $t > 0$, так что $x = Wt$. Предположим, что при этом образуется фронт ионизации. Если бесконечно проводящий газ находится в контакте с поверхностью бесконечно проводящего тела, то на контактной поверхности должны быть непрерывны все три компоненты скорости. Последнее следует из условия непроницаемости и из непрерывности касательных компонент электрического поля в системе координат, связанной с поршнем.

Таким образом, сформулированная задача является автомодельной, и ее решение должно зависеть от x/t . Впереди фронта ионизации, который предполагается сверхзвуковым, могут распространяться только электромагнитные волны. Фронт ионизации образуется, если скорость поршня достаточно высока и направлена в сторону газа.

Как хорошо известно, в электромагнитных волнах изменения напряженности магнитного и электрического полей равны по абсолютной величине. За и непосредственно перед фронтом ионизации E имеет порядок vB/c . Следовательно, если напряженность начального электрического поля E достаточно мала, то его изменение и, следовательно, изменение напряженности магнитного поля B оказываются также малыми. В дальнейшем изменением B в электромагнитной волне пренебрегается. Это означает, что магнитное поле перед фронтом ионизации можно считать известным, а граничное условие, определяющее электрическое поле на фронте ионизации, выполненным. Следовательно, если не интересоваться электрическим полем, это граничное условие можно не рассматривать. Изменение электрического поля полностью определяет электромагнитную волну, которая излучается фронтом ионизации. Заметим, что в рассматриваемом приближении вектор B перед фронтом ионизации не зависит от x и t и должен быть задан заранее.

Решение задачи должно состоять из фронта ионизации и, возможно, следующих за ним магнитогидродинамических (МГД) волн. Если фронт ионизации медленный, то из первого неравенства в системе (14) следует, что МГД-волны не могут распространяться за фронтом ионизации, поскольку их скорости выше, чем скорость фронта. Так как множество состояний за фронтом, соответствующее этому типу фронтов ионизации, трехмерно, то можно выбрать состояние за фронтом таким образом, что векторы скорости газа и поршня совпадут. Значит, можно ожидать, что если формируется

медленный фронт ионизации, то все величины за ним постоянны и скорости газа и поршня совпадают.

Если фронт ионизации является промежуточным, то в соответствии со вторым неравенством в системе (14) автомодельное решение может включать в себя медленную МГД-волну, распространяющуюся за фронтом. Она может быть либо ударной – либо волной разрежения. Изменение величин в этой волне характеризуется единственным параметром, а во фронте ионизации – двумя параметрами. Используя эти три параметра, можно удовлетворить трем граничным условиям на поршне.

Если фронт ионизации является быстрым, то в соответствии с третьим неравенством в системе (14) за фронтом могут распространяться две волны, а именно медленная магнитогидродинамическая и вращательный разрыв, скорость которого по отношению к газу равна a_A . Изменение величин в быстром фронте ионизации и каждой последующей волне характеризуется единственным параметром. Используя три параметра, определяющие указанные три волны, можно удовлетворить условиям на поршне.

5. Изменение скорости газа во фронтах ионизации

Для того чтобы избежать рассмотрения дозвуковых фронтов ионизации вместе со сложными явлениями, возникающими, когда состояние газа оказывается близким к порогу ионизации, ограничимся исследованием изменения скорости во фронтах ионизации, в которых увеличение плотности и давления превосходит определенные величины. Изменение скорости газа во фронтах ионизации и соответствующая задача о поршне, в том числе и без этого ограничения, были рассмотрены в [7].

Предположим, что рассматриваемые фронты ионизации распространяются по заданному состоянию покоящегося газа при следующих начальных условиях: $V = V^0$, $p = p^0$, $v = 0$, $B = B_3 e_3 + B_1^0 e_1$. Для простоты проанализируем ситуацию, в которой, векторы скорости поршня, и начального магнитного поля лежат в плоскости (x_1, x_3) (напомним, что $x_3 \equiv x$). Будем считать, что $B_1^0 > 0$.

Как упоминалось выше, рассматриваются разрывы с достаточно большими изменениями величин, т.е. фронты ионизации, за которыми $v_3 > v_3(K)$, где K – определенная точка на оси v_3 (рис. 4), и $v_3(K) > 0$ – значение v_3 в этой точке. Подчеркнем, что в этом пункте v_1 и v_3 – компоненты вектора скорости газа по отношению к газу

перед фронтом ионизации (а не по отношению к фронту ионизации, как это было в п. 3). Исследуем на плоскости v_1, v_3 множество точек, соответствующих состояниям за фронтами ионизации – ударную адиабату фронтов ионизации.

Среди всех, рассмотренных в п. 3, типов фронтов ионизации находятся фронты с не изменяющимися компонентами магнитного поля B_1 и B_2 . Изменение других величин в этих фронтах является таким же, как и в газодинамических ударных волнах.

Начнем с фронтов ионизации с такими скоростями распространения W и нормальной компонентой магнитного поля B_3 , при которых выполняется неравенство $V^0 < 4\pi B_0^2$.

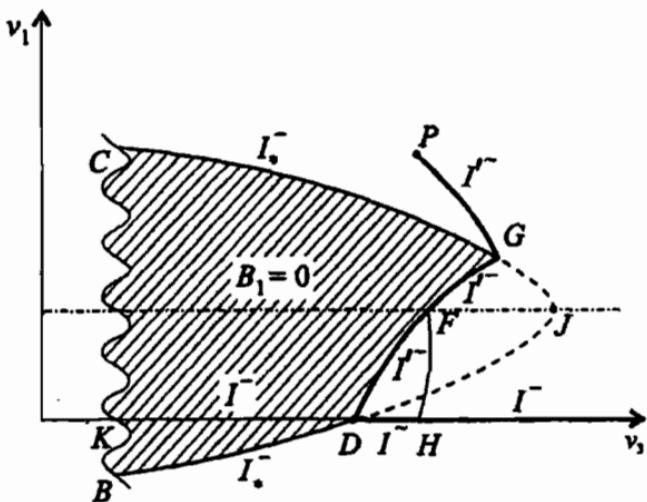


Рис. 4. Проекция ударной адиабаты на плоскость (v_3, v_1) для плоских фронтов ионизации

Здесь $B_0 = B_3 / (4\pi m)$, $m = W/V^0$, а V^0 – удельный объем газа перед фронтом, т.е. в невозмущенном состоянии. Это неравенство означает, что скорость фронта W меньше альфеновской скорости $a_A = B_3 \sqrt{V^0 / (4\pi)}$, вычисленной по начальной плотности. Равенство $V = 4\pi/B_1^0$ отвечает горизонтальной асимптоте гиперболы (15). Величина $4\pi B_1^0$ убывает при возрастании W .

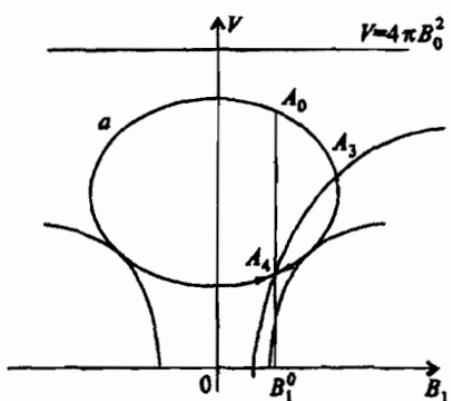


Рис. 5. Состояния перед и за фронтом ионизации (A_0 и A_4) и расположение точек Жуге в случае $V^0 \ll 4\pi B_1^0$

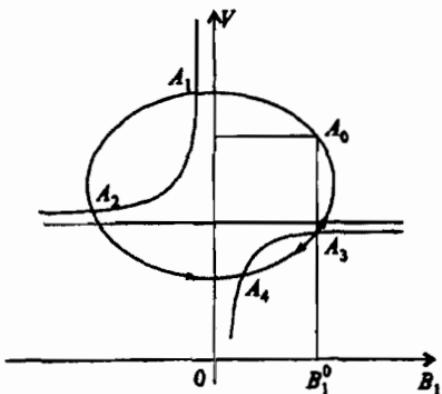


Рис. 6. Промежуточный фронт ионизации ($A_0 \rightarrow A_4$) для непрерывного магнитного поля. Предельное расположение состояния за медленным фронтом ионизации (A_4)

B_1 . При этом структура медленного фронта ионизации состоит из газодинамического скачка из начальной точки на нижнюю часть кривой a при фиксированном B_1 и изменения B_1 и V вдоль кривой a из состояния за газодинамическим скачком в точку A_4 . Положение точки A_4 по отношению к положению $B_1 = B_1^0$ может меняться при изменении E_0 (кривая a зависит от E_0 , но изменения последней

При заданной W и достаточно больших значениях B_3 взаимное расположение кривой a и горизонтальной асимптоты гиперболы (15) для фронтов с не меняющимся значением B_1 показано на рис. 5. Состояние перед фронтом обозначено точкой A_0 . Состояние за фронтом ионизации, в котором не меняется магнитное поле, представлено точкой A_4 .

При увеличении W взаимное расположение кривой a , точки A_0 и гиперболы (15) меняется (рис. 6 и 7). При этом конечной точкой за фронтом ионизации, не меняющим магнитное поле, становится A_3 , а затем A_2 . Поэтому на рис. 4 отрезки, соответствующие медленному (KD), промежуточному (DH) и быстрому фронтам ионизации (H, ∞), расположены на оси v_3 слева направо в перечисленном порядке.

Рассмотрим теперь случаи, когда меняется

мало влияют на ее форму), причем в зависимости от зна- ка изменения E_0 точка A_4 мо- жет смещаться от прямой $B = B_1^0$ в любую сторону.

Компонента скорости v_1 изменяется одновременно с B_1 в соответствии с первым равенством системы (11). При этом знаки изменений v_1 и B_1 совпадают. В рассматриваемых медленных фронтах ионизации I^- максимальные изменения B_1 и v_1 имеют место, если гипербола (15) касается кривой a справа или слева (эти крайние положе- ния гиперболы показаны на рис. 5). В точках касания точки A_3 и A_4 сливаются, и, следовательно, за разрывом выполняется условие Жуге, т.е. скорость газа за фронтом по отношению к нему равна медленной магнитозвуковой скорости a_- (скорости бесконечно малой медленной МГД ударной волны).

На рис. 4 изображена область изменения компонент v_1 и v_3 , обозначенная Γ , которая отвечает изменению скорости в медленных фронтах ионизации. Эта область ограничена сверху и снизу кривыми, обозначенными I^- . Каждая точка этих кривых соот- ветствует медленному фронту ионизации, для которого условие Жуге $W = v_3 + a_-$ выполняется за фронтом.

Очевидно, что в точке D (см. рис. 4) выполняется условие Жуге. Сравнение рис. 1 и 6 показывает, что при $v_3 = v_3(D)$ точка Жуге расположена там, где $B_1 = B_1^0$. Это отвечает пересечению кривой Жуге I^- оси v_3 снизу вверх при возрастании v_3 . На рисунке кривая Жуге для $v_3 > v_3(D)$ продолжена штриховой линией.

Рассмотрим возможные изменения v_1 для $v_3(D) < v_3 < v_3(H)$. Точ- ки на отрезке DH отвечают промежуточным фронтам ионизации I^- . Как видно из рис. 6, также возможен сложный разрыв, состав- ленный из газодинамической ударной волны $A_0 \rightarrow A_3$ и медленной МГД ударной волны $A_3 \rightarrow A_4$, которая распространяется с той же скоростью. В дальнейшем медленная МГД ударная волна будет

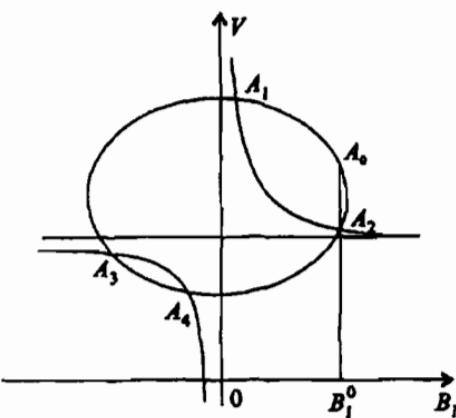


Рис. 7. Быстрый ($A_0 \rightarrow A_2$) и промежуточный ($A_0 \rightarrow A_3$) фронты ионизации

обозначаться S^- . Направление изменения B_1 определяется первым из уравнений (13). На рисунках оно показано стрелками. Легко видеть, что интегральная кривая не может прийти в точку A_4 , если точка A_3 лежит слева от прямой линии $B_1 = B_1^0$. Соответственно, крайне правое положение точки A_4 на рис. 6 соответствует наличию вышеупомянутого двойного разрыва $A_0 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$, обозначенного $I^- S^-$. Обозначим этот медленный фронт ионизации как $I^- \equiv I^- S^-$. Очевидно, что точка Жуге, в которой $B_1 > 0$, лежит между точками A_3 и A_4 . Кривая DF на плоскости (v_3, v_1) отвечает фронту I^- и представляет собой нижнюю границу области I^- . Штриховая кривая DJ соответствует точкам Жуге. Верхняя граница области I^- , как и ранее, представлена кривой Жуге I_- , соответствующей $B_1 < 0$.

При $E_0 = 0$ кривая I^- , выходящая из точки D , приходит в точку F , в которой $B_1 = 0$. Линия, на которой $B_1 = 0$, обозначена на рис. 4 штрихпунктирной линией. Горизонтальная асимптота гиперболы (15) в этом случае проходит через точку, представляющую состояние за газодинамическим скачком из точки A_0 . Когда E_0 проходит через ноль и меняет знак, точки A_2 и A_3 , соответствующие состоянию за газодинамической ударной волной, меняются местами. Таким образом, скачок S^- в точку F происходит из точки H оси v_3 , которая разделяет отрезки, соответствующие разрывам I^- и I^+ . При $E_0 = 0$ кривая a становится симметричной относительно оси V (см. уравнение (12)). В этом случае возможен также скачок из состояния H (т.е. состояния за газодинамической ударной волной) в точку с $B_1 = -B_1^0$ и $V = V_H$ т. е. в точку, симметричную относительно оси V .

Этот скачок представляет собой вращательный (альфеновский) разрыв, который распространяется относительно газа со скоростью $a_A = B_3 \sqrt{V/(4\pi)}$. В дальнейшем будем обозначать его как A . В рассматриваемом плоском случае касательная компонента магнитного поля $B_\phi = B - B_3 e_3$ поворачивается на 180° . Известно, что вращательный разрыв не имеет стационарной структуры. Однако при больших t ширина A увеличивается медленнее, чем масштаб длины в автомодельном решении. Это позволяет рассматривать A как разрыв. На рис. 4 точка P обозначает состояние за комбинацией движущихся с одинаковой скоростью разрывов I_H и A . Здесь I_H обозначает фронт ионизации, состояние за которым отвечает точке H .

Наряду с промежуточными фронтами ионизации, соответствующими интервалу DH оси v_3 , существуют другие промежуточные фронты. Их структура состоит из газодинамической ударной волны $A_0 \rightarrow A_2$ и течения, описываемого интегральной кривой I , соединяющей точки A_2 и A_3 (см. рис. 2). Очевидно, что скорости этих фронтов совпадают со скоростью разрыва $A_0 \rightarrow A_2$, представляющего собой фронт ионизации I^+ . Состояние за I^+ принадлежит части оси v_3 справа от точки H (см. рис. 4). Фронты $A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ будут обозначаться как I^- . Множеству фронтов I^- в плоскости (v_3, v_1) отвечает кривая PG на рис. 4, которая выходит из точки P .

Следует заметить, что существует медленный фронт ионизации, состоящий из вышеупомянутого фронта I^- (переход $A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$) и медленной ударной волны S^- , движущейся с той же скоростью. На рис. 7 S^- отвечает переходу $A_3 \rightarrow A_4$. Указанные фронты ионизации будут обозначаться I^- , так как они состоят из промежуточного фронта ионизации I^- и медленной МГД ударной волны S^- , движущихся с одинаковой скоростью. Множество возможных состояний за такими фронтами представлено кривой FG , которая на рис. 4 является продолжением кривой DF .

Если в точках за газодинамической ударной волной выполняется соотношение $V > 4\pi B_0^2$, т.е. если на плоскости B_1 , V точки лежат над асимптотой гиперболы, то, как следует из направления изменения B_1 , для того чтобы интегральная кривая кончалась в точке A_4 , необходимо, чтобы точка A_2 на рис. 7 лежала справа от начальной точки. С возрастанием $|E_0|$ точка A_4 перемещается вдоль кривой a из своего положения, показанного на рис. 7 (это состояние за фронтом I^-), в точку Жуге. Точка A_3 , отвечающая состоянию за фронтом I^- , лежит на рисунке слева от точки Жуге. В соответствии с этим в плоскости (v_3, v_1) кривая, отвечающая фронтам I^- , лежит выше кривой Жуге I_- , в то время как кривая, отвечающая Γ , лежит ниже кривой Жуге.

Если скорость разрыва увеличивается, горизонтальная асимптона гиперболы опускается и точки A_3 и A_4 , представляющие собой состояния за I^- и I_- , сближаются (рис. 7), пока при определенной скорости разрыва не сольются. При дальнейшем увеличении скорости разрыва они исчезают. В соответствии с этим при увеличении v_3 кривые I^- , I_- и I_- в плоскости (v_3, v_1) вначале сближаются, а затем заканчиваются в единственной точке (точка G на рис. 4).

Таким образом, на плоскости (v_3, v_1) (см. рис. 4) множество точек, изображающих скорости газа за всеми возможными фронтами ионизации, распространяющимися по состоянию с заданными $p = p^0$, $V = V^0$ и $B = B_3 e_3 + B_1^0 e_1$ состоит из следующих частей: 1) части плоскости, ограниченной плоской кривой $KBDGHC$, точки которой представляют состояния за I^- ; 2) интервала DH на оси v_3 и кривой PG , точки которых представляют состояния за I^- и I^- ; 3) точек оси v_3 справа от точки H , которые представляют состояния за I^+ . Со-вокупность указанных множеств является допустимой частью ударной адиабаты в плоскости (v_3, v_1) , то есть соответствует состояниям за фронтом ионизации, имеющими структуру. Более точно, эта со-вокупность множеств есть изображение на плоскости (v_3, v_1) плоско-поляризованной части ударной адиабаты. Напомним, что величина B_2 была принята равной нулю и, следовательно, за фронтами равна нулю и величина v_2 .

Если не ограничиваться рассмотрением плоско-поляризованных фронтов, т.е. если также рассматривать фронты с $v_2 \neq 0$, то медленные фронты ионизации (I^-) будут соответствовать трехмерной об-ласти в пространстве (v_1, v_2, v_3) , промежуточные фронты ионизации (I^-) будут соответствовать поверхности, пересекающей плоскость (v_3, v_1) вдоль кривых DH и PG , а быстрые фронты ионизации (I^+) будут соответствовать лучу, который принадлежит оси v_3 и идет от точки H в бесконечность.

6. Построение решения задачи о поршне

Ударная адиабата, построенная выше для плоско-поляризован-ных фронтов в плоскости (v_3, v_1) , представляет собой одновременно решение задачи о поршне при его скорости, принадлежащей удар-ной адиабате. В этом случае решение состоит из единственного фронта ионизации. Рассмотрим к чему приводит присутствие в ре-шении задачи о поршне других волн.

Одна из этих волн – медленная волна Римана R^- . Без детально-го анализа изменения физических величин в этой волне можем за-метить, что знаки изменения удельного объема V (и, следовательно, v_3) и компоненты магнитного поля B_1 в медленной волне Римана противоположны соответствующим знакам в медленной МГД удар-ной волне [8]. Следовательно, можно заключить, что в расширяю-щейся медленной волне Римана v_3 убывает, а $|v_1|$ возрастает. Заме-тим, однако, что для того чтобы избежать необходимости введения

фронтов рекомбинации ([9, 10, 11]), не следует продвигаться слишком далеко вдоль интегральных кривых, описывающих медленные волны Римана, в которых температура газа убывает.

Медленная волна Римана может распространяться за медленным фронтом ионизации только в том случае, если последний представляет собой фронт Жуге I^- . Это позволяет построить решение задачи о поршне для областей, которые примыкают к кривым I^- , ограничивающим область I^- снаружи. На рис. 8 указанные области обозначены как I^-R^- .

За быстрым и промежуточным фронтами ионизации могут распространяться медленная волна Римана или медленная ударная волна. На рис. 8 соответствующие области скорости обозначены как I^-R^- , I^-S^- , I^+R^- и I^+S^- . Заметим, что область I^-S^- примыкает к области I^- по кривой DF . На этой кривой скорости волн I^- и S^- становятся равными. Решение I^-S^- перестает существовать над кривой DF в силу того факта, что скорость S^- становится больше, чем скорость I^- (обратное соотношение между скоростями фронтов). Область, соответствующая решению I^+S^- , ограничена кривой FF' , на которой $B_1 = 0$.

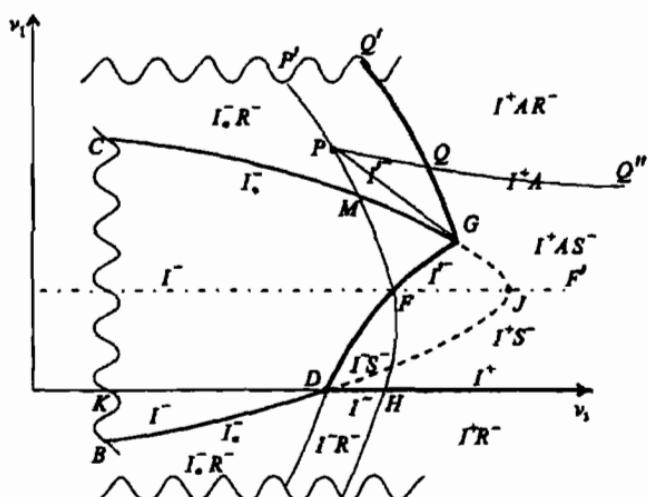


Рис. 8. Решение задачи о поршне в присутствии фронта ионизации как функция скорости поршня

Существуют также примыкающие к кривой PG области $P'PGQQ'$ и $PMFG$. В этих областях имеются, соответственно, решения вида I^-R^- и I^-S^- . На кривой FG скорости I^-S^- и I^- совпадают, а ниже этой кривой решение I^-S^- перестает существовать из-за обратного соотношения между скоростями разрывов.

На кривой PQQ'' решение имеет форму I^+A . Сама кривая характеризуется тем, что на ней $B_1 = -B_1^0$. В областях $Q''QPMFF'$ и $P'PQQ''$ существуют, соответственно, решения вида I^+AS^- и I^+AR^- .

Таким образом, на плоскости (v_3, v_1) в области $P'PMFGQQ'$ имеется несколько решений задачи о поршне. В остальной части плоскости (v_3, v_1) существует единственное решение.

Перечислим решения в области неединственности. Они представлены I^-R^- , I^-S^- и I^+AR^- в области $P'PQQ'$; I^-R^- , I^-S^- и I^+AS^- в области PQG ; I^-R^- , I^-S^- и I^+AS^- в области PGM ; I^- , I^-S^- и I^+AS^- в области MGF .

Заметим, что при рассмотрении задачи о поршне в случае, когда все три компоненты его скорости отличны от нуля, решения, содержащие I^- , I^- и I^+ , отвечают трехмерным областям. В случае, если фронт ионизации медленный, то фронт представляет собой единственную волну в решении задачи. Если фронт ионизации промежуточный, то существует также медленная волна (волна Римана или ударная волна). Наконец, если фронт ионизации быстрый, то в дополнение к упомянутым волнам, решение содержит вращательный разрыв.

При переходе из одной области изменения величин v_1 , v_3 в другую число волн, составляющих решение, изменяется. Типичную ситуацию представляют распад или слияние разрывов на границе между областями. Например, на одной стороне кривой DF решение состоит из одной волны I^- , в то время как на другой стороне решение состоит из двух волн I^-S^- . На самой кривой DF скорости волн I^- и S^- совпадают. При слиянии или распаде разрывы сохраняют число характеризующих их свободных параметров.

Литература

1. Germain P. Contribution a la théorie des ondes de choc en magnetodynamique des fluides // Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques. Paris. Publ. 97. 1959.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. О магнитогидродинамических ударных, ионизующих газ // ДАН СССР, 1959. Вып. 29. № 1. С. 52–55.

3. *Taussig R.T.* Comparison of oblique, normal and transverse ionizing shock waves // *Phys. Fluids*. 1967. Vol. 10. № 6. P. 1145–1161.
4. *Бармин А.А., Куликовский А.Г.* Об ударных волнах, ионизующих газ, находящийся в электромагнитном поле // *ДАН СССР*, 1968. Вып. 178. № 1. С. 55–58.
5. *Бармин А.А., Куликовский А.Г.* Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. Итоги науки // Гидромеханика. 1971. № 5. С. 5–31.
6. *Великович А.Л., Либерман М.А.* Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука, 1987.
7. *Бармин А.А., Куликовский А.Г.* Изменение скорости газа в ионизующих ударных волнах. Задача о проводящем поршне // *ПММ*. 1968. Вып. 32. № 3. С. 495–499.
8. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
9. *Butler D.S.* One-dimensional flow in an ionizing gas // *J. Fluid Mech.*, 1965. Vol. 23. № 1. P. 1–21.
10. *Куликовский А.Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации // *ПММ*, 1968. Вып. 32. № 6. С. 1125–1131.
11. *Бармин А.А.* Фронты рекомбинации при произвольном ориентированном магнитном поле // *Механика жидкости и газа*, 1970. № 3. С. 8–12.

Приложение 4*

1. Стационарные простые волны в произвольном магнитном поле

Рассмотрим стационарные адиабатические движения при наличии произвольно ориентированного магнитного поля, когда его вектор напряженности, вообще говоря, непараллелен вектору скорости. Исследуем решения, отличные от поступательного потока и стационарной вращательной простой волны.

Система (3.10)–(3.16) гл. 6 представляет собой линейную относительно производных неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определитель которой

$$\Delta = v_\phi \left(v_\phi^2 - \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho} \right) \left[v_\phi^4 - \left(a^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) v_\phi^2 + a^2 \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho} \right], \quad (1)$$

где $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$. Разрешая эту систему по правилу Крамера, найдем, что определитель для производной от плотности тождественно равен нулю. Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то изменение плотности не происходит и, как показано в гл. 6, в этом случае решение описывает поступательный поток (формулы (3.21) гл. 6).

Если течение отлично от поступательного потока, то необходимо выполнение условия $\Delta = 0$. Равенство нулю первого и второго множителей в (1) соответствует отсутствию движения ($v_\phi = 0$) и стационарной вращательной простой волне ($v_\phi^2 = H_\phi^2/(4\pi\rho) = a_A^2$), в которой $\rho = \text{const}$ (см. гл. 6). Будем в дальнейшем полагать, что $v_\phi^2 \neq H_\phi^2/(4\pi\rho)$.

Таким образом, для того чтобы изменялась плотность газа в стационарной простой волне, необходимо, чтобы

$$v_\phi^4 - \left(a^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) v_\phi^2 + a^2 \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho} = 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) представляет собой алгебраический интеграл системы (3.10)–(3.16) гл. 6, который совпадает при $v_\phi = a_{+,-}$ с урав-

* Приложение к параграфу 6.3 главы 6 написано специально для данного издания Е. А. Пушкарем.

нением для скорости магнитозвуковых волн. Это означает, что при изменении плотности в простой волне нормальная к плоскости $\phi = \text{const}$ скорость v_ϕ равна одной из быстрых магнитозвуковых скоростей (быстрой или медленной). Отсюда следует, что в исключительном решении плоскости $\phi = \text{const}$, как и в газовой динамике, являются характеристиками.

Исходная система уравнений допускает еще один интеграл (см. гл. 6):

$$v_r H_\phi - v_\phi H_r = \text{const} \equiv |V| |H| \sin \psi = -c E_z, \quad (3)$$

который выражает постоянство компоненты электрического поля E_z вдоль оси Z перпендикулярно плоскости XY .

Разрешим систему (3.10)–(3.16) гл. 6 относительно производных от неизвестных функций. Это легко сделать, выразив из нее в явном виде v'_z и H'_z :

$$v'_z = \frac{H_\phi}{4\pi\rho v_\phi} H'_z, \quad (4)$$

$$H'_z = H_z \frac{v_\phi^2}{v_\phi^2 - H_\phi^2/(4\pi\rho)} \frac{\rho'}{\rho} \quad (5)$$

Исходная система в силу равенства нулю ее определителя (1) содержит линейно зависимые уравнения. Поэтому для получения уравнения для ρ' необходимо использовать интеграл (2). Продифференцировав его по ϕ и подставив зависимости для $(H^2(\rho'))$, v'_ϕ , H'_z и p , получим

$$\frac{\rho'}{\rho} = -2 \frac{\left(\frac{v_\phi^2}{a^2} - \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho v_\phi^2} \right) \frac{v_r}{v_\phi} + \frac{H_r H_\phi}{4\pi\rho v_\phi^2}}{3 \frac{v_\phi^2}{a^2} - (2 - \gamma) - (\gamma + 1) \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho v_\phi^2}} \quad (6)$$

Из оставшихся неиспользованными уравнений (3.2) и (3.5) гл. 6 легко найти v'_r и H'_r , после чего все производные выражаются через ρ' :

$$v'_r = v_\phi + \frac{H_r H_\phi v_\phi}{4\pi\rho} \cdot \frac{1}{v_\phi^2 - H_\phi^2/(4\pi\rho)} \cdot \frac{\rho'}{\rho}, \quad (7)$$

$$H'_r = H_\varphi + H_r \cdot \frac{v_\varphi^2}{v_\varphi^2 - H_\varphi^2/(4\pi\rho)} \cdot \frac{\rho'}{\rho}, \quad (8)$$

$$H'_\varphi = -H_r, \quad (9)$$

$$H'_z = H_z \cdot \frac{v_\varphi^2}{v_\varphi^2 - H_\varphi^2/(4\pi\rho)} \cdot \frac{\rho'}{\rho}, \quad (10)$$

$$v'_z = \frac{H_z H_\varphi v_\varphi}{4\pi\rho} \cdot \frac{1}{v_\varphi^2 - H_\varphi^2/(4\pi\rho)} \cdot \frac{\rho'}{\rho}, \quad (11)$$

где

$$v_\varphi = -\frac{1}{2} \left| \left[\left(\frac{H_\varphi}{\sqrt{4\pi\rho}} + a \right)^2 + \frac{H_r^2 + H_\varphi^2}{4\pi\rho} \right]^{1/2} \pm \left[\left(\frac{H_\varphi}{\sqrt{4\pi\rho}} - a \right)^2 + \frac{H_r^2 + H_\varphi^2}{4\pi\rho} \right]^{1/2} \right| \quad (12)$$

Система уравнений (6)–(12) представляет собой разрешенную относительно производных систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих течение в стационарной простой волне. Знаки «+» и «–» в (12) относятся к быстрым R^+ и медленным R^- волнам, соответственно. Уравнение (2) может быть записано в виде

$$H_r^2 + H_\varphi^2 = \frac{(v_\varphi^2 - a^2) \cdot [v_\varphi^2 - H_\varphi^2/(4\pi\rho)]}{v_\varphi^2/(4\pi\rho)} \quad (13)$$

Из условия неотрицательности $H_r^2 + H_\varphi^2$ следует, что в быстрых волнах

$$v_\varphi^2 \geq \max[a^2, H_\varphi^2/(4\pi\rho)], \quad (14)$$

а в медленных волнах

$$v_\varphi^2 \leq \max[a^2, H_\varphi^2/(4\pi\rho)]. \quad (15)$$

Система (6)–(12) имеет особенности при $v_\varphi^2 = H_\varphi^2/(4\pi\rho)$, $\rho = 0$ и

$$3 \frac{v_\varphi^2}{a^2} - (2 - \gamma) - (\gamma + 1) \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho v_\varphi^2} = 0. \quad (16)$$

Можно показать, что (16) справедливо только при условиях одновременного выполнения равенств в ограничениях (14) и (15): $v_\phi^2 = a^2 = H_\phi^2/(4\pi\rho)$, т.е. на границе между быстрыми и медленными волнами в особой точке уравнений магнитной гидродинамики.

Особенность $v_\phi^2 = H_\phi^2/(4\pi\rho)$ возникает при слиянии быстрой и альфвеновской характеристик ($v_\phi^2 = a_{+, -}^2 = a_A^2$) и является следствием того, что система уравнений магнитной гидродинамики нестрого гиперболическая. Из (13) следует, что при этом $H_r = H_z = 0$. Как было показано в [1], состояние $v_\phi = a_A$ достигается в быстрых волнах максимальной интенсивности при магнитном поле непараллельном скорости потока.

Особенность $\rho = 0$ соответствует разрежению до вакуума, где магнитное поле постоянно и однородно. При H , параллельном V , это состояние достигается в R^+ , а при непараллельном скорости магнитном поле в R^- .

Из уравнения (10) следует, что $H_z = 0$ является решением системы, тогда из (11) получим $v_z = \text{const}$. Двигая систему координат вдоль оси Z , можно добиться, чтобы выполнялось условие $v_z = 0$. Таким образом, имеем частное решение системы (6)–(12):

$$H_z = 0; \quad v_z = 0. \quad (17)$$

Это означает, что при отсутствии в набегающем потоке компоненты магнитного поля вдоль оси Z стационарная простая волна представляет собой плоскополяризованное течение, в котором скорость и магнитное поле в направлении оси Z не генерируются.

Умножая уравнения (8)–(10) соответственно на H_r , H_ϕ и H_z и затем складывая их, а также используя (13), получим

$$(H_\phi^2 + H_r^2 + H_z^2)' = 2(v_\phi^2 - a^2)\frac{\rho'}{\rho}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что модуль напряженности магнитного поля в быстрых волнах разрежения убывает, а в медленных – возрастает. В волнах сжатия положение обратное.

Если ввести безразмерные переменные $M_\phi = v_\phi/a$, $M_r = v_r/a$, $M_z = v_z/a$, $a^2 = C_0\gamma\rho^{r-1}$, $N_\phi = H_\phi/(a\sqrt{4\pi\rho})$, $N_r = H_r/(a\sqrt{4\pi\rho})$, $N_z = H_z/(a\sqrt{4\pi\rho})$, $R = \rho/\rho_0$, $P = R'$, то система (6)–(12) записывается в безразмерном виде так:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\varphi} = -\frac{2}{M_\varphi} \cdot \frac{\left(M_\varphi^4 - N_\varphi^2\right) M_r + N_r N_\varphi M_\varphi}{3M_\varphi^4 - (2-\gamma)M_\varphi^2 - (\gamma+1)N_\varphi^2} \equiv Q, \quad (19)$$

$$\frac{dN_r}{d\varphi} = N_\varphi + N_r \left(\frac{M_\varphi^2}{M_\varphi^2 - N_\varphi^2} - \frac{\gamma}{2} \right) Q, \quad (20)$$

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} = - \left(N_r + \frac{\gamma}{2} N_\varphi Q \right), \quad (21)$$

$$\frac{dN_z}{d\varphi} = N_z \left(\frac{M_\varphi^2}{M_\varphi^2 - N_\varphi^2} - \frac{\gamma}{2} \right) Q, \quad (22)$$

$$\frac{dM_r}{d\varphi} = M_\varphi + \left(\frac{N_r N_\varphi M_\varphi}{M_\varphi^2 - N_\varphi^2} - \frac{\gamma-1}{2} M_r \right) Q, \quad (23)$$

$$\frac{dM_z}{d\varphi} = \left(\frac{N_z N_\varphi M_\varphi}{M_\varphi^2 - N_\varphi^2} - \frac{\gamma-1}{2} M_z \right) Q, \quad (24)$$

$$M_\varphi = -\frac{1}{2} \left| \left((N_\varphi + 1)^2 + N_r^2 + N_z^2 \right)^{1/2} \pm \left((N_\varphi - 1)^2 + N_r^2 + N_z^2 \right)^{1/2} \right|. \quad (25)$$

Отметим, что поскольку $Q = Q(M_\varphi, M_r, N_\varphi, N_r, N_z)$, $M_\varphi = M_\varphi(N_\varphi, N_r, N_z)$, а M_z входит только в (24), система (19)–(25) расщепляется на отдельные независимые подсистемы. Уравнения (20)–(23) вместе с соотношением (25) образуют систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть исследована (или решена численно) независимо от (19) и (24), после чего решения этих уравнений могут быть легко найдены, так как они являются линейными относительно R и M_z .

В общем виде исследование системы уравнений (20)–(23) вместе с соотношением (25) представляет собой достаточно сложную задачу, однако эта система была детально рассмотрена для частного случая плоскополяризованных волн ($M_z = N_z = 0$) [1]. Результаты исследования следующие.

При коллинеарных векторах скорости и напряженности магнитного поля быстрые простые волны R^+ ведут себя подобно волнам Прандтля-Майера в газовой динамике, но принципиально отличаются от быстрых волн Римана в нестационарной магнитной

гидродинамике. Волны максимальной интенсивности соответствуют разлету в вакуум с нулевым магнитным полем.

В зависимости от свойств набегающего потока (который должен быть квазигиперболического типа) медленные простые волны R^- , направленные вверх по потоку, могут быть двух типов. В волне максимальной интенсивности первого типа нормальная к характеристике скорость равна альфеновской, а во втором типе – газодинамической скорости звука. В отличие от R^+ и медленных нестационарных волн Римана разрежение до вакуума невозможно.

В случае неколлинеарных V и H волны разрежения соответствуют уходящим характеристикам, а волны сжатия – приходящим характеристикам. Для R^+ показана продолжаемость решения вплоть до слияния быстрой и альфеновской характеристик, где достигается наибольшее разрежение (но не вакуум). Угол ψ между V и H увеличивается, на предельной характеристике скорость по нормали равна альфеновской. Чем больше напряженность электрического поля, тем сильнее убывает напряженность магнитного поля. Изменение всех величин сильно зависит от ψ .

Имеют место два типа медленных волн R^- . В первом из них плотность убывает до нуля, так что на предельной характеристике достигается вакуум. Во втором типе R^- разрежение до вакуума невозможно, на предельной характеристике скорость равна альфеновской. Относительное изменение магнитного поля в R^- существенно меньше, чем в R^+ . При малых ψ поток замедляется, при больших – ускоряется, при этом величина ψ возрастает. С ростом числа Маха относительные изменения напряженности магнитного поля и скорости уменьшаются.

Таким образом, стационарные простые волны в наклонном магнитном поле ведут себя подобно волнам Римана, однако их свойства качественно отличаются от свойств простых волн, когда магнитное поле коллинеарно скорости потока.

Литература

1. Пушкарь Е.А. Простые стационарные волны в наклонном магнитном поле // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 130–138.

Приложение 5*

Наклонные неплоскополяризованные МГД ударные волны

При решении стационарных задач магнитной гидродинамики возникает необходимость исследования ударных волн в заданной системе координат. Угол наклона нормали к фронту ударной волны неизвестен и должен быть найден в процессе решения. Тем самым невозможен выбор системы координат, в которой одна из осей направлена по нормали к ударной волне, как это делается в нестационарных одномерных задачах [1].

Исследованию наклонных ударных волн в магнитной гидродинамике посвящено много публикаций (см. [2] и литературу в ней). Однако в проведенных исследованиях, как правило, накладывались дополнительные ограничения на начальное состояние перед ударной волной. Например, предполагалось, что векторы скорости и напряженности магнитного поля параллельны, или рассматривались плоскополяризованные постановки задачи, когда векторы напряженности магнитного поля, скорости потока и нормали к ударной волне, в силу теоремы компланарности [1], лежат в одной плоскости перед разрывом и за ним [2].

Пространственные задачи с неизвестной или варьируемой нормалью в ряде случаев требуют разрешения условий и исследования соотношений на разрывах, когда три перечисленных выше вектора перед ударной волной некомпланарны. В качестве примера можно привести задачи взаимодействия ударной волны солнечного ветра с околосземной головной ударной волной [3]. В этом случае по крайней мере одна из ударных волн представляет собой криволинейную поверхность, поэтому решение в плоскополяризованной постановке может быть найдено только для некоторого сечения, и глобальная трехмерная картина взаимодействия не может быть построена. Аналогичные трудности возникают, когда один из разрывов является вращательным [4]. В этой связи возникает потребность в разре-

* Приложение к параграфу 4.3 главы 4, написанное Е.А.Пушкарем по материалам статьи Пушкарь Е.А. Наклонные неплоскополяризованные МГД ударные волны и их взаимодействие // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 4. С. 136–152.

шении условий на неплоскополяризованных наклонных магнитогидродинамических ударных волнах, когда магнитное поле и скорость перед фронтом разрыва имеют три компоненты.

1. Разрешение условий на косых магнитогидродинамических ударных волнах

Рассмотрим плоскую стационарную МГД ударную волну в системе координат, связанной с элементом фронта разрыва. Будем полагать, что линии тока могут пересекать поверхность ударной волны под произвольным углом, т.е. фронт разрыва наклонен к скорости потока. Такие ударные волны называются наклонными, или косыми. Будем считать, что внутренняя энергия газа по обе стороны от разрыва определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + C,$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты. Среда перед и за ударной волной является бесконечно проводящей, электрическое поле по обе стороны от разрыва определяется законом Ома $\mathbf{E} = -(1/c)\mathbf{V} \times \mathbf{H}$ [1].

На ударной волне должны быть выполнены следующие соотношения [1, 5] (система (1.2)–(1.7) гл. 4):

$$[\rho V_n] = 0; \quad (1)$$

$$[\rho + \rho V_n^2 + H_t^2/8\pi] = 0, \quad [\rho V_n V_t - H_n H_t/4\pi] = 0; \quad (2)$$

$$\left[\rho V_n \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + p V_n + \frac{H_t^2 V_n}{4\pi} - \frac{H_n (H_t \cdot V_t)}{4\pi} \right] = 0; \quad (3)$$

$$H_n [V_t] = [H_t V_n], \quad [H_n] = 0, \quad [H_t] = \frac{4\pi}{c} j \times n. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность; p – давление; V – скорость, \mathbf{H} и \mathbf{E} – магнитное и электрическое поля; c – скорость света; j – ток, текущий по фронту разрыва; n – нормаль к поверхности разрыва. Квадратные скобки обозначают скачок величин на разрыве, индексы n и t относятся соответственно к нормальным и касательным к разрыву составляющим величин.

При любой скорости набегающего потока можно выбрать движущуюся систему координат так, чтобы ударная волна была плоскополяризованной (теорема компланарности) [1]. Однако в ряде

стационарных задач система координат определяется их постановкой, поэтому целесообразно разрешить условия (1)–(4) на ударной волне, не вводя требования компланарности векторов \mathbf{n} , \mathbf{V} , \mathbf{H} . Кроме того, отказ от компланарности позволит применить процедуру разрешения условий к вращательному разрыву, который в общем случае не является плоскополяризованным.

Выберем систему координат XYZ следующим образом. Ось Z расположим в плоскости разрыва, ее направление задается либо произвольно (вне конкретных постановок задач), либо определяется внешними причинами. Например, в задачах, куда наклонная ударная волна входит как элемент решения, ось Z совпадает с линией пересечения фронтов разрывов, с кромкой клина и т.п. Оси X и Y лежат в плоскости, перпендикулярной Z (эта плоскость содержит нормаль к фронту разрыва), так что ось X направлена по составляющей вектора скорости, перпендикулярной оси Z , а ось Y перпендикулярна оси X и выбрана таким образом, чтобы система координат XYZ была правой.

В выбранной системе координат вектор скорости набегающего потока $\mathbf{V} = (V_0, 0, V_{z0})$, магнитное поле $\mathbf{H} = (H_{x0}, H_{y0}, H_{z0})$. Пусть ϕ – угол наклона фронта ударной волны к оси X , ψ – угол между скоростью и магнитным полем в плоскости XY , $H_0 = \sqrt{H_{x0}^2 + H_{y0}^2}$ – абсолютная величина напряженности магнитного поля в этой плоскости. Введем безразмерные переменные

$$M = \frac{V_0}{a_0}, \quad M_z = \frac{V_{z0}}{a_0}, \quad N = \frac{a_A}{a_0}, \quad h_{z0} = \frac{H_{z0}}{H_0}, \quad a_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}, \quad a_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},$$

$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad u = \frac{V_{x1}}{a_0}, \quad v = \frac{V_{y1}}{a_0}, \quad w = \frac{V_{z1}}{a_0}, \quad P = \frac{p_1}{P_0}, \quad \beta = \frac{p}{H^2/(8\pi)}, \quad (5)$$

$$h_x = \frac{H_{x1}}{H_0}, \quad h_y = \frac{H_{y1}}{H_0}, \quad h_z = \frac{H_{z1}}{H_0}, \quad j = (j_x \cos \phi, j_x \sin \phi, j_z),$$

$$i_z = \frac{4\pi j_z}{cH_0}, \quad i_x = -\frac{4\pi j_x}{cH_0}, \quad \mathbf{n} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0), \quad \tau = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$$

Здесь вектор τ обозначает направление в плоскости разрыва, перпендикулярное оси Z , а i_x – ток, текущий в этом направлении. Индексы 0 и 1 относятся к состояниям перед разрывом и за ним соответственно.

В выбранной системе координат из соотношений на разрыве (1)–(4) следуют (в том же порядке) безразмерные соотношения на МГД ударной волне:

$$u \sin \varphi - v \cos \varphi = M \eta \sin \varphi, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P - 1 + \gamma M^2 (\eta - 1) \sin^2 \varphi + 0,5 \gamma N^2 \left[(h_x \cos \varphi + h_y \sin \varphi)^2 + \right. \\ \left. + h_z^2 - \cos^2 (\varphi - \psi) - h_{z0}^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$M \sin \varphi (u \cos \varphi + v \sin \varphi - M \cos \varphi) = N^2 \sin (\varphi - \psi) i_z, \quad (8)$$

$$M \sin \varphi (w - M_z) = N^2 \sin (\varphi - \psi) i_r, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(P \eta - \frac{1}{\gamma N^2} \right) + \frac{1}{2N^2} \left((u \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 + \right. \\ \left. (u \cos \varphi + v \sin \varphi)^2 + w^2 + M^2 - M_z^2 \right) = \\ \frac{1}{M \sin \varphi} \left\{ i_z \left(\sin (\varphi - \psi) (u \cos \varphi + v \sin \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - (u \sin \varphi - v \cos \varphi) (\cos (\varphi - \psi) + i_z) \right) + \right. \\ \left. + i_r (w \sin (\varphi - \psi) - h_z (u \sin \varphi - v \cos \varphi)) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sin (\varphi - \psi) (u \cos \varphi + v \sin \varphi - M \cos \varphi) = \\ = i_z (u \sin \varphi - v \cos \varphi) + \cos (\varphi - \psi) (u \sin \varphi - v \cos \varphi - M \sin \varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sin (\varphi - \psi) (w - M_z) = i_r (u \sin \varphi - v \cos \varphi) + \\ + h_{z0} (u \sin \varphi - v \cos \varphi - M \sin \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi = h_x \sin \varphi - h_y \cos \varphi, \quad (13)$$

$$\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi = h_x \cos \varphi - h_y \sin \varphi - i_z; \quad h_z - h_{z0} = i_r. \quad (14)$$

При написании (7)–(12) использовались уравнение неразрывности (6), условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля (13), а также связи (14) между скачками касательных компонент магнитного поля и токами i_z и i_r , текущими по разрыву.

Будем считать все величины перед волной заданными. Выразим состояние за разрывом через отношение плотностей η и угол наклона ударной волны φ аналогично одномерному случаю [6].

Из (6)–(9), (13), (14) получим явные зависимости для компонент магнитного поля h_x , h_y , h_z скорости u , v , w и давления p :

$$h_x = \cos \psi + i_z \cos \phi; \quad h_y = \sin \psi + i_z \sin \phi; \quad h_z = h_{z0} + i_t, \quad (15)$$

$$\frac{V_{x1}}{V_0} = \frac{u}{M} = 1 - (1 - \eta) \sin^2 \phi + \frac{N^2}{M^2} \frac{\sin(\phi - \psi) \cos \phi}{\sin \phi} i_z, \quad (16)$$

$$\frac{V_{y1}}{V_0} = \frac{v}{M} = (1 - \eta) \sin \phi \cos \phi + \frac{N^2}{M^2} \sin(\phi - \psi) \cdot i_z, \quad (17)$$

$$\frac{V_{z1}}{V_0} = \frac{w}{M} = \frac{M_z}{M} + \frac{N^2 \sin(\phi - \psi)}{M^2 \sin \phi} i_t, \quad (18)$$

$$P = 1 + \gamma M^2 (1 - \eta) \sin^2 \phi - \\ - 0,5 \gamma N^2 (2 i_z \cos(\phi - \psi) + i_z^2 + 2 h_{z0} i_t + i_t^2). \quad (19)$$

Из (7) легко также получить выражение для полного давления $P^* = p + H^2/(8\pi)$. Прибавляя к P величину $0,5 \gamma N^2 (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$, равную магнитному давлению отнесенному к p_0 , получим для $P^* = p^*/p_0$ выражение

$$P^* = 1 + 0,5 \gamma N^2 + \gamma M^2 (1 - \eta)^2 \sin^2 \phi \equiv \\ \equiv P_0^* + \gamma M^2 (1 - \eta)^2 \sin^2 \phi. \quad (20)$$

Полное давление описывается такой же зависимостью, что и давление в газовой динамике [7], однако зависимость $\eta(\phi)$, входящая в (20), не совпадает с газодинамическим аналогом, в нее войдут параметры, учитывающие влияние магнитного поля.

Таким образом, давление и все компоненты магнитного поля и скорости за ударной волной выражаются явными формулами (15)–(20) через токи i_z и i_t , текущие по фронту разрыва, отношение плотностей η и угол наклона разрыва.

Подставив в (11) и (12) зависимости (16)–(18) для u , v , w получим уравнения, связывающие i_z и i_t с η , ϕ и параметрами, характеризующими начальное состояние:

$$\chi i_z = i_z \eta + \cos(\phi - \psi)(\eta - 1); \quad \chi i_t = i_t \eta + h_{z0}(\eta - 1), \quad (21)$$

$$\chi = \frac{N^2}{M^2} \frac{\sin^2(\phi - \psi)}{\sin^2 \phi}. \quad (22)$$

В (21) $\cos(\phi - \psi)$ и h_{z0} – касательные к разрыву начальные магнитные поля в направлениях, перпендикулярных соответствующим токам. Поскольку $i_z(\eta, \phi)$ и $i_t(\eta, \phi)$ описываются одинаковыми уравнениями, то можно перейти в систему координат, в которой течение будет удовлетворять условиям компланарности векторов \mathbf{n} , \mathbf{V} и \mathbf{H} .

Из (21) при условии $\chi - \eta \neq 0$ получим

$$i_z = -\frac{\cos(\phi - \psi)(1 - \eta)}{\chi - \eta}; \quad i_t = -\frac{h_{z0}(1 - \eta)}{\chi - \eta}. \quad (23)$$

Подставляя выражения (15)–(19), (21), (23) в (10), после сокращения на $(1 - \eta)$ и алгебраических преобразований получаем связь между η и ϕ :

$$\left[(\gamma + 1) M^2 \sin^2 \phi \left(\eta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) - 2 \right] (\chi - \eta)^2 + \\ + N^2 (\cos^2(\phi - \psi) + h_{z0}^2) \{ (\chi - \eta) (\gamma(\eta - 1) + 1) + \eta(\chi - 1) \} = 0, \quad (24)$$

где $\chi = \chi(\phi, \psi, M, N)$ определяется формулой (22).

Уравнение (24), которое будем называть уравнением ударной адиабаты, поскольку оно есть следствие закона сохранения энергии (4), является многочленом третьей степени по η . Задавая ϕ и решая (24) относительно η (например, численно), после подстановки $\eta(\phi)$ в (21) и (15)–(20) можно построить ударные поляры магнитного поля и скорости, а также магнитогидродинамический аналог сердцевидной кривой [7] в плоскостях (P, ω_ν) или (P^*, ω_ν) , где ω_ν – угол отклонения скорости, или иные зависимости, позволяющие решать конкретные задачи.

Если поделить (24) на $(\chi - \eta)^2 \neq 0$, то все члены, связанные с магнитным полем, войдут во второе слагаемое, коэффициент перед которым равен $N^2 = 2/(\gamma\beta)$, что с точностью до множителя $2/\gamma$ равно отношению магнитного давления к газодинамическому в набегающем потоке. Поэтому при $N \rightarrow 0$ влияние магнитного поля на ударную адиабату быстрых ударных волн ослабляется пропорционально N^2 и она быстро приближается к газодинамической адиабате

$$(\gamma + 1) M^2 \sin^2 \phi \left(\eta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) - 2 = 0. \quad (25)$$

Легко показать, что ударная адиабата (24) инвариантна относительно выбора системы координат. Рассмотрим, например, преобразование координат, которое приводит трехмерное течение к плоскокополяризованному, в котором векторы скорости среды и напряженности магнитного поля лежат в одной и той же плоскости, а токи по поверхности разрыва текут в перпендикулярном направлении. Перейдем в систему координат, движущуюся вдоль оси Z с такой скоростью V_z , чтобы выполнялось условие компланарности векторов n , V и H :

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ V_0 & 0 & V_z \\ H_{x0} & H_{y0} & H_{z0} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получим $-V_0 \cos \varphi H_{z0} + V_z (\sin \varphi H_{y0} + \cos \varphi H_{x0}) = 0$. Если $\sin \varphi H_{y0} + \cos \varphi H_{x0} \neq 0$ (H имеет касательную компоненту помимо H_{z0}), то искомая скорость движения равна

$$V_z = V_0 \frac{H_{z0} \cos \varphi}{H_{y0} \sin \varphi + H_{x0} \cos \varphi} \equiv V_0 \frac{h_{z0} \cos \varphi}{\cos(\varphi - \psi)}.$$

Если теперь провести плоскость XY через n и $V = (V_0, 0, V_z)$, то в этой плоскости также будет лежать вектор H , а модуль скорости набегающего потока

$$V = V_0 \sqrt{1 + \frac{h_{z0}^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2(\varphi - \psi)}}, \quad (26)$$

однако в этой плоскости угол $\tilde{\varphi}$ наклона ударной волны к скорости будет отличен от φ , его синус равен косинусу угла между n и V :

$$\sin \tilde{\varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + h_{z0}^2 \cos^2 \varphi / \cos^2(\varphi - \psi)}}. \quad (27)$$

Из уравнений (26) и (27) следует, что величина $M^2 \sin^2 \varphi$ (квадрат числа Маха по нормали к ударной волне), которая входит в (24), инвариантна относительно движения по оси Z : во сколько раз увеличилась скорость V , во столько же раз уменьшился $\sin \varphi$. Другие выражения в (24), которые содержат угол φ , а именно $N^2 \sin^2(\varphi - \psi)$ (входит в χ) и $N^2 (\cos^2(\varphi - \psi) + h_{z0}^2)$ имеют смысл квадратов проекций магнитного поля на нормаль и касательную

плоскость к разрыву и не зависят от выбора системы координат. Поэтому ударная адиабата (24) инвариантна относительно выбора системы координат.

Однако, несмотря на это и тот факт, что при любом заданном угле ϕ трехмерное течение может быть сведено к плоскополяризованному, ударные адиабаты как кривые $\eta = \eta(\phi)$, в плоскости (ϕ, η) представляют собой разные геометрические объекты в плоскополяризованном $h_{z0} = M_z = 0$ и трехмерном случаях. Например, в плоско-поляризованном случае существует такое значение ϕ , при котором ударная волна перпендикулярна магнитному полю. При этом адиабата может обладать особенностями (так называемые «включющие» ударные волны), которые отсутствуют при $h_{z0} \neq 0$ [2]. При выполнении последнего условия фронт разрыва не перпендикулярен H ни при каком ϕ .

При разрешении условий на разрыве, которые описывают одномерное многообразие-линию в пространстве большого числа измерений, в процессе исключения переменных происходит проектирование этой линии в пространство меньшего числа измерений. При этом из регулярной кривой может получаться кривая с особенностями: точками самопересечения и т.п. Разрешение условий для величин $h_x, h_y, h_z, u, v, w, P$ (см. формулы (15)–(19)) произведено регулярным образом, т.е. никаких ограничений на параметры и физические переменные не налагалось (кроме предположений $\sin \phi \neq 0, M \neq 0$) и никаких особенностей не возникло. Однако при нахождении из (21) токов i_z и i_t наложено условие $\chi - \eta \neq 0$, нарушение которого в случае плоскополяризованных ударных волн приводит к сингулярности на адиабате в плоскости (ϕ, η) .

Чтобы устранить эту особенность для плоскополяризованных ударных волн ($h_{z0} = M_z = 0$), разрешим первое уравнение (21) относительно η (предполагаем, что $i_z + \cos(\phi - \psi) \neq 0$):

$$\eta = 1 - \frac{(1 - \chi) \cdot i_z}{i_z + \cos(\phi - \psi)}. \quad (28)$$

и после подстановки (28) вместе с выражениями (15)–(19) в закон сохранения энергии (10) и алгебраических преобразований получим уравнение ударной адиабаты в виде $\Phi(i_z, \phi) = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{1}{\gamma N^2} (\chi - 1) (i_z + \cos(\varphi - \psi)) + \right. \\
 & + \frac{M^2 \sin^2 \varphi}{N^2} (1 - \chi) (\chi i_z + \cos(\varphi - \psi)) - \frac{\chi}{2} i_z^3 \Bigg) + \\
 & + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(-(1,5\chi + 0,5) \cos(\varphi - \psi) i_z^2 - \right. \\
 & - (\chi + 1,5) \cos^2(\varphi - \psi) i_z - \cos^3(\varphi - \psi) \Big) + \\
 & + \frac{M^2 \sin^2 \varphi}{N^2} (\chi - 1) (0,5(\chi + 1) i_z + \cos(\varphi - \psi)) + \\
 & \left. + (\cos(\varphi - \psi) + 0,5\chi i_z) (i_z + \cos(\varphi - \psi))^2 = 0, \right. \tag{29}
 \end{aligned}$$

которое является кубическим многочленом по i_z . Здесь $\chi = \chi(\varphi, \psi, M, N)$ определяется из (22). Задавая φ и решая (29) относительно i_z (например, численно), после подстановки $i_z(\varphi)$ в (28) найдем $\eta = \eta(i_z(\varphi), \varphi)$. Дальнейший алгоритм построения различного рода зависимостей совпадает с алгоритмом при разрешении адиабаты в виде $F(\eta, \varphi) = 0$ (24). Подробное исследование косых плоскополяризованных МГД ударных волн проведено в [2].

2. Условия эволюционности МГД ударных волн

Эти условия понимаются как условия существования единственного решения линеаризованной задачи о взаимодействии малого плоского возмущения с плоским фронтом разрыва и сводятся к ограничениям-неравенствам на скорости течения по нормали к разрыву (перед разрывом и за ним) для быстрых S^+ и медленных S^- ударных волн [1], а именно:

для $S^+ : V_{+,0} \geq a_{+,0}, a_{+,1} \leq V_{+,1} \leq a_{+,1}$;

для $S^- : a_{-,0} \leq V_{-,0} \leq a_{-,0}, V_{-,1} \leq a_{-,1}$.

Здесь $a_{\pm,i}$, $i = 0, 1$ – быстрая и медленная магнитозвуковые скорости перед разрывом ($i = 0$) и за ним ($i = 1$), а $a_{A,i}$, $i = 0, 1$ – альфевеновские скорости, соответственно.

Из теории нестационарных ударных волн [1] известно, что условия эволюционности равносильны двум условиям: 1) плотность в

ударной волне возрастают: $\eta \leq 1$; 2) знак касательной компоненты магнитного поля не изменяется. При этом в S^+ касательное магнитное поле по модулю растет, а в S^- убывает. Из (15) и (21) следует, что касательные компоненты магнитного поля описываются выражениями

$$h_t = \cos(\phi - \psi) \frac{\chi - 1}{\chi - \eta}, \quad h_z = h_{z0} \frac{\chi - 1}{\chi - \eta}, \quad (30)$$

где $\cos(\phi - \psi)$ и h_{z0} — касательные компоненты \mathbf{H} перед разрывом. Таким образом, из (30) получаем, что для сохранения знака касательного магнитного поля необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\chi - 1)/(\chi - \eta) \geq 0$. Условия эволюционности принимают вид:

$$\begin{aligned} S^+ : \chi - 1 &< 0, \quad \chi - \eta \leq 0, \quad \eta \leq 1; \\ S^- : \chi - 1 &\geq 0, \quad \chi - \eta > 0, \quad \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (31)$$

Для S^+ неравенство $\chi - 1 < 0$, а для S^- неравенство $\chi - \eta > 0$ являются следствиями двух других неравенств в (31). Таким образом, условия эволюционности принимают простой вид:

$$S^+ : \chi \leq \eta \leq 1; \quad S^- : \chi \geq 1; \quad \eta \leq 1 \quad (32)$$

Неравенства (32) можно понимать как ограничения на отношение плотностей по обе стороны от ударной волны и углы наклона ударных волн. Для нахождения последних необходимо подставить в (32) зависимость $\eta = \eta(\phi)$ из (24). Из (32) следует, что условие эволюционности по магнитозвуковой скорости за S^+ и S^- для волн сжатия $\eta \leq 1$ является следствием остальных условий эволюционности.

Подставляя $\eta = 1$ в (24), получим

$$(\chi - 1) \left((M^2 \sin^2 \phi - 1)(\chi - 1) + N^2 (\cos^2(\phi - \psi) + h_{z0}^2) \right) = 0. \quad (33)$$

Можно показать, что обращение в нуль выражений в первой или второй скобке в (33) равносильно равенству нормальной и альфеновской или нормальной и магнитозвуковой скоростей перед ударной волной, т. е. ударная адиабата пересекает одну из границ области эволюционности ($\eta = 1$) при характеристических углах ϕ_A или ϕ_\pm [1].

Для S^- других ограничений нет, т. е. вся часть ударной адиабаты между характеристическими углами для состояния перед ударной волной $\phi = \phi_-$ и $\phi = \phi_A$ удовлетворяет условиям эволюционности (32).

Для S^+ ограничений $\phi_+^- \leq \phi \leq \phi_+^+$ (здесь ϕ_+^- и ϕ_+^+ – углы наклона уходящей и приходящей быстрых магнитозвуковых характеристик) недостаточно. Дополнительно необходимо выполнение условия $\eta \geq \chi$, которое соответствует требованию $V_{\alpha,1} \geq a_{A,1}$: скорость по нормали за ударной волной должна превосходить альфеновскую.

Таким образом, при численных расчетах ударных адиабат и поляр необходимо заранее выбирать $\phi \in [\phi_+^-, \phi_A^+]$ для S^- и $\phi \in [\phi_+^+, \phi_+^-]$ для S^+ . Для этого необходимо найти углы наклона магнитозвуковых характеристик ϕ_{\pm} и альфеновских волн ϕ_A из уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^4 \phi_{\pm} \left(M^4 + N^2 \cos^2 \psi - M^2 \left(1 + N^2 \left(1 + h_{z0}^2 \right) \right) \right) - \\ - 2 \operatorname{tg}^3 \phi_{\pm} N^2 \sin \psi \cos \psi + \operatorname{tg}^2 \phi_{\pm} \left(N^2 - M^2 \left(1 + N^2 \left(1 + h_{z0}^2 \right) \right) \right) - \quad (34) \\ - 2 \operatorname{tg} \phi_{\pm} N^2 \sin \psi \cos \psi + N^2 \sin^2 \psi = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \phi_A = N \sin \psi / (N \cos \psi \pm M) \quad (35)$$

Как показывают численные расчеты, каждому значению ϕ в интервалах $[\phi_+^-, \phi_A^+]$ и $[\phi_+^+, \phi_+^-]$ соответствует одна эволюционная волна. Если при данном угле наклона возможны несколько волн сжатия, то эволюционным является скачок наименьшей интенсивности.

Таким образом, наклонные ударные волны как одномерное многообразие в пространстве физических переменных описываются формулами (15)–(19), (23), (24) с ограничениями-неравенствами (32). Эволюционная часть ударной адиабаты начинается от своей характеристики. В этой точке все параметры потока непрерывны.

Рассмотрим неплоскополяризованный альфеновский разрыв. Подстановка в (24) условия равенства скорости перед разрывом альфеновской скорости ($\chi = 1$) дает одно из возможных решений: $\phi = \phi_A$, $\eta = 1$. Выполнение условия $\chi = 1$ достигается при $\phi = \phi_A$, которое определяется из (35). Это решение соответствует неплоско-

поляризованному альфвеновскому разрыву, в котором вектор магнитного поля поворачивается вокруг нормали к ударной волне на произвольный угол. Появляющийся произвол в определении альфвеновского разрыва связан с вырождением при $\chi = 1$, $\eta = 1$ уравнений (21) которые в этом случае выполнены тождественно.

Введем угол v_H наклона тангенциального магнитного поля к плоскости XY :

$$\operatorname{tg} v_H = h_{z0} / \cos(\phi_A - \psi) \quad (36)$$

Тогда угол v поворота магнитного поля будет служить мерой интенсивности альфвеновского разрыва. Из (15) можно найти токи, которые обеспечивают поворот магнитного поля на угол v в альфвеновском разрыве:

$$\begin{aligned} i_z &\equiv h_t - h_{t0} = \sqrt{\cos^2(\phi_A - \psi) + h_{z0}^2} (\cos(v_H + v) - \cos v_H), \\ i_t &\equiv h_z - h_{z0} = \sqrt{\cos^2(\phi_A - \psi) + h_{z0}^2} (\sin(v_H + v) - \sin v_H). \end{aligned} \quad (37)$$

Верно и обратное, задание токов i_z и i_t в (37), удовлетворяющих условию неизменности модуля магнитного поля в альфвеновском разрыве, однозначно определяет поворот магнитного поля. Таким образом, в неплоскополяризованном случае состояние за альфвеновским разрывом определяется токами i_z и i_t , текущими по его фронту, которые однозначно задаются углом v поворота магнитного поля. Компоненты скорости определяются из (16)–(18), куда нужно подставить $\Phi = \Phi_A$, $\eta = 1$, $p = 1$, а также i_z и i_t из (37).

При $\Phi = \Phi_A$ уравнение (24), кроме корня $\eta = 1$, имеет еще два корня, один из которых больше, а другой меньше единицы. Как и в плоскополяризованном случае, последний корень определяет медленную выключающую ударную волну, за которой магнитное поле перпендикулярно фронту.

Литература

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
2. Пушкарь Е. А. О косых магнитогидродинамических ударных волнах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 4. С. 106–116.
3. Бармин А. А., Пушкарь Е. А. Магнитогидродинамическое описание процесса столкновения ударного возмущения солнечного ветра и головной

ударной волны // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С.140–155.

4. Пушкарь Е.А. Столкновение альвеновского разрыва солнечного ветра с околоземной головной ударной волной // Письма в Астрономический журнал. 1998. Т. 24. № 6. С. 461–473.

5. De Hoffman F., Teller E. Magneto-hydrodynamic shocks // Phys. Rev. 1950. Vol.80. № 4. P. 692–703.

6. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 5. С. 801–810.

7. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.

Приложение 6*

Двумерная МГД-модель взаимодействия сильных разрывов и ее космофизические приложения

Рассмотрим двумерное нелинейное взаимодействие ударных волн и других сильных разрывов в проводящей среде с магнитным полем на основе модели идеальной магнитной гидродинамики в рамках автомодельной стационарной постановки [1, 2]. Класс изученных ранее решений [3–9] позволяет выявить характерные свойства и особенности течений, обусловленные взаимодействием магнитного поля со средой, и применить полученные решения к анализу космофизических явлений, таких как взаимодействие возмущений солнечного ветра с околоземной головной ударной волной и предельной ударной волной вблизи гелиопаузы.

Ранее задача о пересечении разрывов рассматривалась только в частных случаях ориентации магнитного поля: параллельного скорости газа [10, 11] или перпендикулярного плоскости течения [12]. В этих вырожденных ситуациях решение строится аналогично газовой динамике и большинство магнитогидродинамических эффектов упускается. Подобные задачи рассматривались применительно к околоземной плазме в упрощенной постановке. Например, предполагалось, что возникающее течение содержит по одной преломленной и отраженной волне [13], подобно тому, как это имеет место в газовой динамике.

1. Постановка задачи

Взаимодействие сильных разрывов рассмотрим в рамках модели идеальной магнитной гидродинамики [14], которая самосогласованно учитывает взаимное влияние движения проводящей среды и магнитного поля. В случае бесконечной проводимости имеет место вморооженность силовых линий магнитного поля в среду подобно вморооженности вихревых линий в идеальной гидродинамике [15]. По этой

* Приложение к главе 6, написанное Е. А. Пушкарем по материалам статьи: Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Двумерная МГД-модель взаимодействия сильных разрывов и ее космофизические приложения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 1998. Т. 223. С. 87–101.

причине проводящую среду в магнитном поле можно представлять себе как анизотропный композит: сжимаемый газ с «вклешенными» в него упругими нитями – силовыми линиями магнитного поля.

Система уравнений магнитной гидродинамики является нестрого гиперболической и имеет семь характеристик. В общем случае конечное плоское возмущение приводит к образованию трех автомодельных волн или сильных разрывов (быстрых, медленных и альфеновского), распространяющихся с каждой стороны исходного возмущения. Несмотря на то, что МГД-модель характеризуется двумя векторами – скоростью и напряженностью магнитного поля – быстрые и медленные волны в специальной системе координат плоскополяризованы, однако альфеновские волны обладают круговой поляризацией. В общем случае при наличии двух и более разрывов течение не является плоскополяризованным. Для упрощения анализа в дальнейшем рассматривается плоскополяризованная постановка задачи, когда в альфеновском разрыве поле поворачивается вокруг нормали на 180° , оставаясь в плоскости течения. В газовой динамике ситуация гораздо проще, так как имеется только три характеристики и, соответственно, в каждую сторону от возмущения распространяется только одна волна. При этом задачу всегда можно свести к плоской.

В общем случае плоские сильные разрывы могут сталкиваться под произвольным углом и их взаимодействие, вообще говоря, является нестационарным. Однако в ряде случаев имеется возможность перейти в систему координат, движущуюся с линией пересечения исходных разрывов, в которой течение может рассматриваться как установившееся.

Исследование будем проводить на основе стационарных уравнений для невязкого нетеплопроводного газа [14] (см. систему (1.1) гл. 4) с соотношениями на сильных разрывах в виде системы (1.2)–(1.7) гл. 6), которая равносильна системе (1)–(4) приложения 5.

Рассмотрим постановку задачи о взаимодействии сильных разрывов, движущихся навстречу другу с заданными скоростями V_1 и V_2 , или догоняющими друг друга (второй имеет скорость V_2 относительно среды, сжатой и ускоренной в S_1) (рис. 1, а и б). Угол между плоскими фронтами разрывов равен θ . Стакивающиеся разрывы могут быть различных типов: ударные волны S^\pm (быстрые и медленные), альфеновские (A), тангенциальные (T) и контактные (C) разрывы. Будем считать заданным начальное состояние невозмущенной неподвижной среды (0) перед взаимодействующими раз-

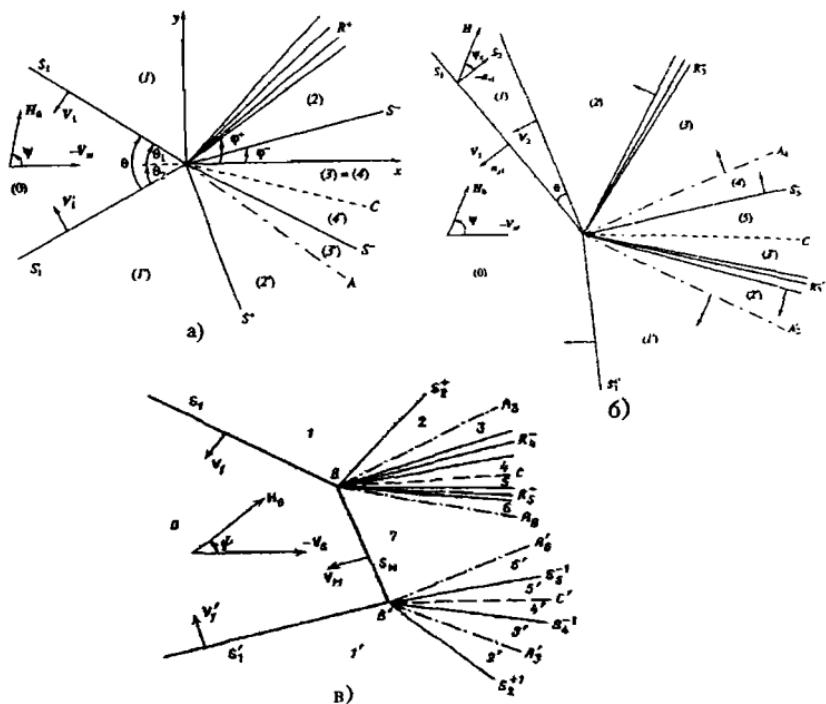


Рис. 1. Схемы взаимодействия сильных разрывов: а) встречное, б) догоняющее, в) маховское; S – ударные волны; R – автомобильные волны разрежения; C – контактный и A – альфвеновский разрывы; индексы «+» и «-» обозначают быстрые и медленные волны

рывами: давление p_0 , плотность ρ_0 и вектор напряженности магнитного поля H_0 . Выберем систему координат, движущуюся вместе с линией пересечения фронтов со скоростью V_{st} . При встречном столкновении разрывов

$$|V_{st}| = \frac{\left(|V_{S_1}|^2 + 2|V_{S_1}||V_{S'_1}| \cos \theta + |V_{S'_1}|^2 \right)^{1/2}}{\sin \theta};$$

$$\sin \theta_1 = \frac{|V_{S_1}|}{|V_{st}|}; \quad \sin \theta_{1'} = \frac{|V_{S'_1}|}{|V_{st}|}; \quad (1)$$

где θ_1 и $\theta_{1'}$ – углы между вектором $-V_{st}$ и фронтами взаимодействующих разрывов ($\theta_1 + \theta_{1'} = \theta$). В случае догоняющих ударных волн для нахождения стационарной системы координат необходимо до-

полнительно использовать соотношения на ударной волне, из которых находится состояние за S_1 [8]. В этой системе координат задача стационарна [5], разрывы неподвижны, а скорость набегающей среды (0) равна $-V_{st}$. Начальное состояние будем предполагать плоскополяризованным, т.е. векторы V_1 , $V_{l'}$ и H_0 ортогональны линии пересечения фронтов взаимодействующих разрывов. Вектор напряженности магнитного поля H_0 охарактеризуем углом ψ его наклона к $-V_{st}$ и модулем $|H_0|$.

Рассматриваемая задача определяется следующими безразмерными параметрами: числами Маха взаимодействующих разрывов $M_1 = V_1/a_0$ и $M_{l'} = V_{l'}/a_0$, числом Альфвена $N = a_A/a_0 = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, (или $\beta = 8\pi p_0/H_0^2$, $N^2 = 2/(\gamma\beta)$), углом θ между S_1 и $S_{l'}$ и углом ψ наклона магнитного поля к скорости среды в стационарной системе координат. Здесь $a_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ – газодинамическая скорость звука, $a_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ – альфвеновская скорость, γ – показатель адабаты Пуассона ($\gamma = 5/3$). На контактном разрыве $M_{l'} = 0$ и отношение плотностей на нем тоже должно быть задано.

Поскольку сформулированная задача не содержит характерного линейного размера, она автомодельна: все величины зависят от полярного угла ϕ . Элементарные автомодельные решения в этой постановке – вышеперечисленные разрывы S^\pm , A , C и центрированные волны разрежения R^\pm . Решение состоит из двух комбинаций, включающих в себя быструю, альфвеновскую и медленную волны (разрывы), разделенные однородными состояниями. Состояния за медленными волнами разделяет контактный разрыв C , на котором должны выполняться граничные условия непрерывности всех величин, кроме плотности и температуры [3–5].

Как и в газовой динамике [16], регулярное решение существует не при всех значениях θ . При θ , меньшем некоторого критического значения θ^* существуют два регулярных решения – слабое и сильное, которые совпадают при $\theta = \theta^*$. Первое из них в пределе бесконечно слабых взаимодействующих волн вырождается в однородное течение. В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабого решения. Для существования регулярного решения необходимо (но, вообще говоря, не достаточно), чтобы течения за взаимодействующими разрывами были гиперболического типа в стационарной системе координат, движущейся с линией пересечения исходных разрывов.

В качестве альтернативы регулярному решению предложено [6] решение, аналогичное маховскому в газовой динамике [16], в котором маховская ударная волна движется в рассматриваемой системе координат (рис. I, в). Такое решение автомодельно вблизи точек ветвления разрывов, однако в общем случае не существует системы координат, в котором течение в целом стационарно. Часть возникающих волн может пересекаться, что должно приводить к искажению картины течения.

Соотношения на S_k^\pm сводятся к уравнению, связывающему отношение плотностей η_k и угол ее наклона ϕ_k^\pm к линии тока (здесь и далее индекс k обозначает k -ую ударную волну в соответствии с рис. 1) [7] (см. уравнения (24) приложения 5, в котором нужно положить $\Phi = \phi_k^\pm$, $\eta = \eta_k$, $\Psi = \Psi_{k-1}$, χ определяется из (22) и $h_{z0} = 0$ для плоскополяризованных ударных волн). Все остальные величины выражаются через η_k и ϕ_k^\pm явно по формулам (15)–(19) приложения 5.

Условия эволюционности для S^+ и S^- дают ограничения на ϕ_k^\pm и η_k :

$$\begin{aligned} S^+ : W &\geq 0; \quad \chi \geq 1; \quad \chi \leq \eta_k \leq 1; \\ S^- : W &\leq 0; \quad \chi \geq 1; \quad \eta_k \leq 1; \end{aligned} \quad (2)$$

$$W(\phi_k^\pm) = \sin^2 \phi_k^\pm + (\chi - N^2 - 1) M^{-2} \quad (3)$$

Уравнение $W(\phi_k^\pm) = 0$ определяет углы ϕ_k^\pm наклона быстрых и медленных магнитозвуковых характеристик. Состояние за S^\pm есть функция ϕ_k^\pm с ограничениями (2).

Автомодельные волны разрежения R_k^\pm описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в общем случае не интегрируемой (система (19)–(25) приложения 4, в которой для плоскополяризованных волн R_k^\pm нужно положить $N_z = M_z = 0$). При заданном состоянии перед R_k^\pm состояние за ней определяется углом наклона задней характеристики ϕ_k^\pm , который отсчитывается от линии тока перед R_k^\pm . Тогда безразмерные компоненты скорости u_{xk} , u_{yk} и магнитного поля h_{xk} , h_{yk} являются функциями ϕ_k^\pm , M_φ , M_r , N_φ , N_r и R , где $R = \rho_k / \rho_{k-1}$ и $P_k = R'$:

$$\omega_{vk} = \varphi_k^\pm + \operatorname{arctg} \frac{M_\varphi}{M_r} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M_r}{|M_r|} \right) \pi,$$

$$(u_{xk}, u_{yk}) = R^{(\gamma-1)/2} (M_\varphi^2 + M_r^2)^{1/2} (\cos \omega_{vk}, \sin \omega_{vk}),$$

$$\omega_{hk} = \varphi_k^\pm + \operatorname{arctg} \frac{N_\varphi}{N_r} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_r}{|N_r|} \right) \pi,$$

$$(h_{xk}, h_{yk}) = R^{\gamma/2} N^{-1} (N_\varphi^2 + N_r^2)^{1/2} (\cos \omega_{hk}, \sin \omega_{hk}).$$

Здесь индексы r и φ обозначают радиальную и азимутальную компоненты векторов скорости и напряженности магнитного поля и соответствующих безразмерных переменных. Начальное значение φ_k^\pm определяется из уравнения $W(\varphi_k^\pm) = 0$ (см. (3)), а предельные значения φ^\pm для R^\pm задаются условием $M_\varphi = N_\varphi$ ($v_\varphi = a_A$), а для R^- условием разрежения до вакуума $R = 0$ [17].

Уравнения для S^\pm и R^\pm описывают отдельные элементы решения. Для описания всего течения, возникшего в результате взаимодействия, следует выписать совокупность систем, описывающих отдельные элементы, в соответствии с его волновой картиной. Поскольку последняя заранее неизвестна, написать априори такую систему невозможно. Предложенный нами метод решения [18, 19] позволяет снять это противоречие и в процессе решения, не прибегая к подбору, регулярным образом определять волновую картину и все параметры течения с любой наперед заданной степенью точности. При этом все разрывы явно выделены. С помощью этого метода рассмотрено большинство возможных комбинаций взаимодействующих волн [3–9].

2. Фундаментальные свойства решений

Нелинейный характер взаимодействия при наклонном столкновении разрывов проявляется прежде всего в сильной зависимости волновой структуры течения от определяющих параметров. Полная картина течения, как правило, не может быть предсказана заранее. В результирующем течении могут отсутствовать волны типа сталкивающихся, поэтому говорить о пересечении или преломлении

разрывов можно лишь условно, на самом деле происходит нелинейный распад каждого из них под влиянием конечного возмущения состояния среды и магнитного поля, созданного другим разрывом.

Продемонстрируем нелинейность взаимодействия на примере встречного наклонного столкновения быстрой МГД ударной волны S^+ с вращательным разрывом A для $N = 2,5$ и числа Маха ударной волны $M_1 = 3$. Если зафиксировать угол θ , взяв его, например, равным 30° , и варьировать угол δ между вектором H_0 и нормалью n_A в пределах от -90° до 90° (при этом альфеновский разрыв меняет свою интенсивность, а также меняется угол ψ), то получим следующую эволюцию волновой картины течения:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^+AS^- & \xleftarrow[\delta=-50^\circ]{K_{C+}} & R^+AS^- & \xleftarrow[\delta=-30^\circ]{K_G} & S^+R^- & \xleftarrow[\delta=0^\circ]{} & \\
 S^+S^- & & S^+S^- & & S^+R^- & & \\
 \xleftarrow[\delta=0^\circ]{} & & \xleftarrow[\delta=15^\circ]{K_{O+}} & & \xleftarrow[\delta=32^\circ]{K_{I+}} & & \xleftarrow[\delta=36^\circ]{K_{C+}} \\
 R^+S^- & & R^+AS^- & & R^+AS^- & & \\
 S^+S^- & & S^+S^- & & S^+AS^- & & \\
 \xleftarrow[\delta=36^\circ]{K'_{C+}} & & R^+AS^- & & R^+AS^- & & \\
 R^+AS^- & & R^+AS^- & & R^+AS^- & & \\
 R^+AS^- & & R^+S^- & & R^+S^- & & \\
 \end{array} \quad . \quad (4)$$

Здесь верхняя и нижняя комбинации S^\pm , A и R^\pm отвечают волнам, следующим по состояниям (1) и (1') за исходными S^+ и A соответственно (рис. 1); символы над стрелками обозначают тип перестройки течения (катастрофу, см. ниже). Значение δ , при котором течение меняется, указаны под стрелкой.

В диапазоне $-30^\circ < \delta < 15^\circ$ (альфеновский разрыв имеет относительно небольшую интенсивность) в результирующем течении вращательные разрывы отсутствуют. В этом случае при взаимодействии с ударной волной конечной интенсивности происходит нелинейная трансформация альфеновского разрыва, в котором возмущается только касательное магнитное поле и касательная компонента скорости, в систему ударных волн и волн разрежения, в которых изменяются также нормальные компоненты этих величин, давление и плотность среды.

При достаточно большой интенсивности A в диапазоне $36^\circ < \delta < 45^\circ$ быстрая ударная волна в результате взаимодействия трансформируется в систему быстрых волн разрежения и медленных ударных волн, при этом альфеновский разрыв может присутствовать в течении и как «отраженный» (снизу). При определенной ориентации магнитного поля ($-90^\circ < \delta < -50^\circ$) течение состоит только из ударных волн и «преломленного» A .

На рис. 2 приведена символическая картина волновой структуры течения как функции углов δ , θ при $N = 2,5$ и $M_1 = 3$ [9]. Контактный разрыв присутствует во всех течениях и поэтому не изображен. Из рис. 2 видно, что двумерность взаимодействия весьма существенна для рассматриваемого процесса. В отличие от одномерного случая ($\theta = 0$) даже при малых δ альфеновский разрыв ($|A| \ll 1$) в результирующем течении отсутствует.

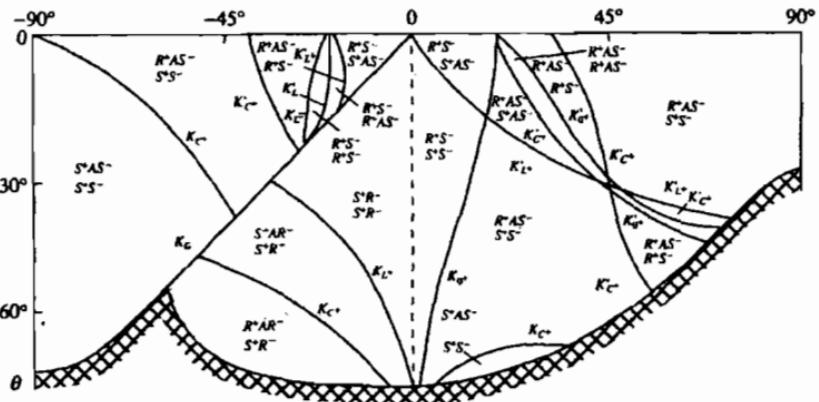


Рис. 2. Бифуркационная карта решений для столкновений $S^+ \subset A$ ($M_1 = 3, N = 2,5$) на плоскости δ, θ

В рассматриваемых задачах существенны геометрические параметры: углы ψ и θ , которые определяют наклон магнитного поля к взаимодействующим фронтам. При переходе вектора H через нормаль к фронту направление пондеромоторной силы меняется на противоположное, что приводит к перестройке течения. Соответствующие углы будем называть критическими, а происходящие при этом изменения течения – катастрофами. Математически катастрофы связаны со слиянием характеристик различных типов, при котором возможно нарушение непрерывной зависимости решения от параметров. В зависимости от области течения, в которой происходит слияние характеристик, типы катастроф будут различными.

Глобальные катастрофы. Если одна из взаимодействующих волн – быстрая ударная волна S^+ , перед которой выполняется условие

$$1 < N^2 < M^2 < ((\gamma + 1)N^2 - 2)/(\gamma - 1), \quad (5)$$

то при переходе вектора H через нормаль к S^+ ($\psi = \psi_*$) возникает глобальная катастрофа K_G [5] – изменение течения происходит во всей области. На рис. 3 приведен пример такой катастрофы для встречного столкновения $S_1^+ S_{1'}^+$ ($M_1 = M_{1'} = 3$, $N = 2,5$, $\theta = 20^\circ$) при $\psi = 80^\circ < \psi_*$ (рис. 3, а) и $\psi = 81^\circ > \psi_*$ (рис. 3, б). Представлены $0,5p(\phi)/p_0$, $|H|(\phi)/H_0$, $V(\phi)/a_0$ и $\omega_H(\phi)$ (ω_H – угол между H и осью X). На оси абсцисс указаны волны, составляющие решение.

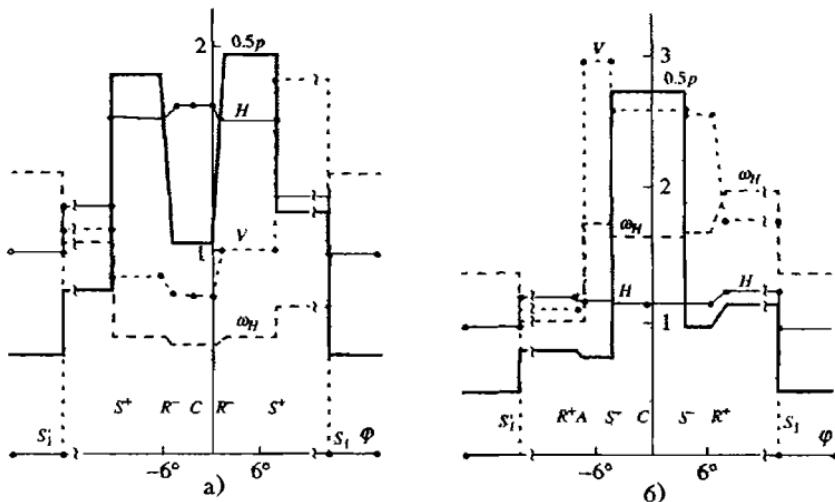


Рис. 3. Перестройка течения в результате глобальной катастрофы при встречном столкновении ударных волн ($M_1 = M_{1'} = 3$; $N = 2,5$; $\theta = 20^\circ$). Угол $\psi = 80^\circ < \psi_*$ (а) и $\psi = 81^\circ > \psi_*$ (б). Над осью абсцисс указаны волны, составляющие решение

В результате глобальной катастрофы решение изменило свою структуру:

$$\begin{array}{c} S^+ R^- \xleftarrow{K_G} R^+ A S^- \\ S^+ R^- \quad R^+ S^- \end{array}$$

так что ударные волны трансформировались в волны разрежения и наоборот, и при $\psi > \psi_*$ в результирующем течении нет быстрых ударных волн.

Указанное выше изменение направления действия пондеромоторных сил, возникшее в результате перераспределения электрических токов, текущих по волнам, привело к глобальному изменению

всех физических величин. Например, на результирующем контактном разрыве при $\psi > \psi_*$ давление растет примерно в 3 раза, магнитное поле убывает в 1,7 раза, скорость увеличивается более чем втрое. Хотя магнитогидродинамические числа Maxa $M_+ = V/a_+$ взаимодействующих ударных волн в этом случае близки к единице ($M_+ \approx 1,1$), из-за двумерности задачи сильное влияние магнитного поля приводит к столь яркой перестройке течения.

Глобальная катастрофа может рассматриваться как результат нестационарного процесса, происходящего при изменении ψ . При переходе ψ через ψ_* от S^+ отщепляется альфеновский разрыв, который сносится потоком и вызывает перестройку всего течения. Глобальная катастрофа является чисто магнитогидродинамическим эффектом.

Локальные катастрофы $K_{L\pm}$ и $K_{0\pm}$. Они обусловлены совпадением характеристических скоростей в возникающем течении при варьировании определяющих параметров, а именно совпадением альфеновской скорости с быстрой (катастрофы K_{L+} и K_{0+}) или медленной магнитозвуковой (катастрофы K_{L-} и K_{0-}). При катастрофах $K_{L\pm}$ происходит отщепление (слияние) альфеновского разрыва конечной интенсивности от S^+ . В этом альфеновском разрыве течет электрический ток, вдвое больший по модулю и противоположный по знаку току, текущему в соответствующей предельной ударной волне (рис. 4). В катастрофах $K_{L\pm}$ магнитное поле и скорость изменяется скачкообразно в части течения между соответствующими волнами, а состояние на контактном разрыве изменяется непрерывно. Возникновение в течении узких зон с противонаправленными конечными электрическими токами может приводить к развитию различного рода неустойчивостей. При катастрофах $K_{0\pm}$ альфеновский разрыв бесконечно малой интенсивности отщепляется от R^\pm , при этом все величины меняются непрерывно. Отметим дополнительную возможность непрерывного изменения волновой картины течения $S^+ \leftrightarrow R^\pm$ при вырождении этих волн в характеристики (катастрофы $K_{C\pm}$).

Катастрофа тангенциального разрыва K_T . Она происходит при переходе через ноль собственного электрического поля, когда H_0 становится параллельным V_s , т.е. при $\psi = 0$. Направление токов, а следовательно, и пондеромоторных сил, действующих на среду, меняется на противоположное. В результате при различных знаках электрического поля течение в области между альфеновскими разрывами

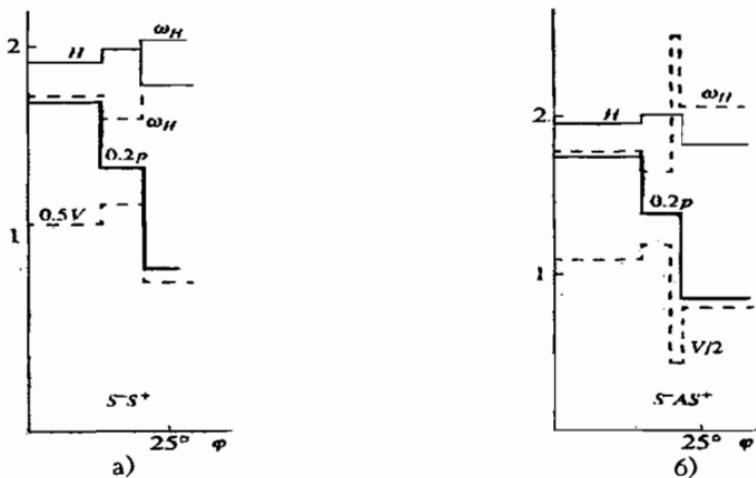


Рис. 4. Перестройка течения при локальной катастрофе K_{L+} : $\psi < \psi_*$ (а); $\psi > \psi_*$ (б). Показана та часть области взаимодействия, в которой происходят изменения решения

ми или характеристиками будет качественно различным (рис. 5). При $|E| \rightarrow 0$ эта область стягивается к контактному разрыву C . При $E = 0$ вместо всей комбинации волн, включающей в себя альфеновские и медленные волны, формируется единый тангенциальный разрыв T , на котором граничные условия не совпадают с условиями на контактном разрыве и вырождаются в условия непротекания и непрерывности полного давления. При этом в рассматриваемом течении сливаются пять характеристик (две альфеновских, две медленных и энтропийная).

Состояния среды по обе стороны от T есть пределы состояний за быстрыми волнами при $|E| \rightarrow 0$. Естественно, что они не совпадают с пределами состояний среды за медленными волнами, т.е. на C , последние различны при ψ больше и меньше нуля (при разных направлениях E). Катастрофа тангенциального разрыва показывает, что стационарные решения с $V \parallel H$ [10, 12] некорректны. Такие решения неустойчивы относительно возмущений, в которых $V \parallel H$. При $M_1 = M_1$, катастрофа K_T вырождается в силу симметрии рассматриваемого течения относительно линии тока, входящей в точку пересечения S_1 и S_1 . Наиболее ярко катастрофы тангенциального

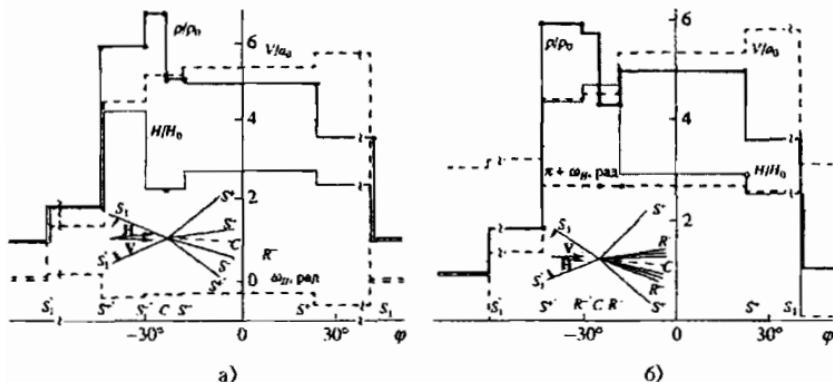


Рис. 5. Перестройка течения при катастрофе тангенциального разрыва
 K_T : $\psi < 0$, $E < 0$ (а); $\psi > 0$, $E > 0$ (б)

разрыва проявляются при нерегулярном (маховском) взаимодействии ударных волн (см. рис. 1, б), поскольку течение в окрестности ножки Маха существенно несимметрично. Они впервые были получены численно при исследовании нерегулярного встречного взаимодействия быстрых ударных волн [6].

Наличие катастроф приводит к отсутствию непрерывной зависимости течения от параметров задачи. На рис. 6, а приведены графики $P(\psi_s)/P_0$ (сплошные кривые, левая шкала) и $|H|(\psi_s)/|H_0|$ (штриховые кривые, правая шкала) на результирующем контактном разрыве C для догонного взаимодействия S_1 и S_2 (см. рис. 1, б). Здесь ψ_s – угол между H_0 и n_{S_1} , n_{S_1} – нормаль к S_1 , $M_1 = 3$, $M_2 = 5$, $N_1 = 2.5$. Значение угла θ (в градусах) проставлено у кривых. Зависимости $P(\psi_s)/P_0$ и $|H_0|$ разрывны, что связано с наличием катастроф K_T при $\psi_s = \psi_s^*$, для которого $\psi = 0$, и K_G при $\psi_s = 0$.

Изменение давления при катастрофе K_T тем больше, чем больше θ (чем «сильнее» двумерность или асимметрия течения). В более слабом магнитном поле относительная величина изменения P в катастрофе K_T больше [8]. Падение P при $\psi_s > \psi_s^*$ взаимосвязано с одновременным ростом $|H|$ в силу непрерывности полного давления в узкой зоне между альфеновскими характеристиками, сливающимися в тангенциальный разрыв при $\psi_s = \psi_s^*$. Основные эффекты обусловлены магнитогидродинамическим характером взаимодей-

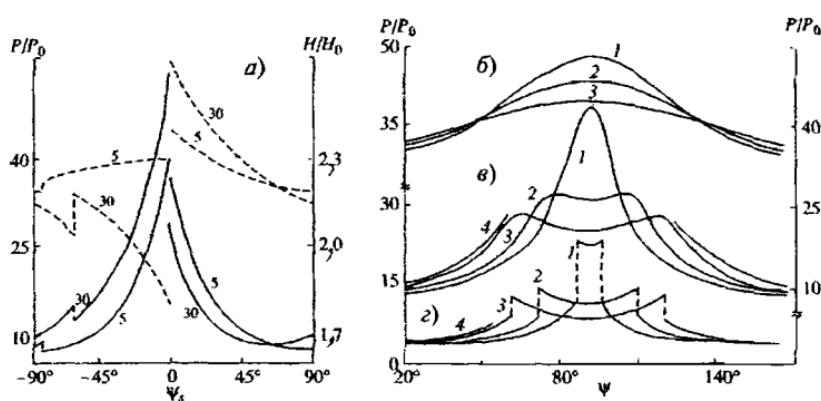


Рис. 6. Зависимости давления и напряженности магнитного поля на контактных разрывах от наклона H_0 при взаимодействии ударных волн: а – догоонное взаимодействие ($M_1 = 3, M_2 = 5, N_1 = 2,5$), ψ_s – угол между H_0 и n_{S_1} , сплошные линии – давление (левая шкала), штриховые линии – напряженность магнитного поля (правая шкала), значения θ (в градусах) указаны у кривых; б, в – встречное взаимодействие ($M_1 = M_2 = 3$): $N = 0,7$ (б) (левая верхняя шкала), $N = 1,5$ (в) (правая шкала), $N = 2$ (г) (левая нижняя шкала); $\theta = 10, 40, 60, 70^\circ$ (кривые 1–4, соответственно)

ствия с существенным вкладом медленных волн и альфеновских разрывов.

При глобальной катастрофе ψ_s меняет знак, вследствие чего перераспределяются электрические токи, текущие по S_1 и S_2 и тем самым изменяются направления пондеромоторных сил. В результате в течении формируется мощный альфеновский разрыв A'_2 и следующая за ним медленная ударная волна S'_3 которая дополнитель но сжимает среду, приводя к росту газодинамического давления (пик давления на рис. 6, а).

Можно различать два типа взаимодействия в зависимости от угла ψ : квазипараллельный и квазиперпендикулярный. При встречном столкновении $S_1^+ S_2^+$ для квазипараллельного взаимодействия типично относительно небольшое усиление «преломленных» S^+ , сравнительно небольшая интенсивность S^- (или R^-) и отсутствие A . Для квазиперпендикулярного взаимодействия интенсивности всех возникающих волн примерно одного порядка и волновая структура течения испытывает

нелинейные перестройки (катастрофы). Два типа взаимодействия отличаются друг от друга изменением физических характеристик течения. На рис. 6,б–г приведены зависимости $P(\psi)$ на C при $\underline{S}_1^+ \underline{S}_r^+$ для чисел Maxa $M_1 = M_r = 3$ при $\theta = 10, 40, 60, 70^\circ$ (кривые 1–4) и $N = 0,7$ (рис. 6,б), $N = 1,5$ (рис. 6,в) и $N = 2$ (рис. 6,г).

Видно, насколько сильно магнитное поле влияет на результирующее газодинамическое давление. Наиболее рельефно это проявляется в умеренном поле (рис. 6,в, правая шкала), когда отношение результирующих давлений в квазипараллельном и квазиперпендикулярном режимах взаимодействия достигает 3–4 единиц. В сильном поле (рис. 6,г) зависимости $P(\psi)$ становятся разрывными, что соответствует глобальным катастрофам.

В квазипараллельном случае магнитное поле сглаживает подъем давления и уменьшает скорость газа на C , одновременно возрастая по модулю. В квазиперпендикулярном случае магнитное поле сжимает газ и ускоряет его, при этом энергия магнитного поля преобразуется в термодинамическую энергию среды и энергию ее направленного движения. В результате столкновения $\underline{S}_1^+ \underline{S}_r^+$, в противоположность квазипараллельному случаю, формируются высокоскоростные области газа с большим газодинамическим и относительно слабым магнитным давлениями.

3. Космофизические приложения

Ударные волны и другие сильные разрывы часто обнаруживаются в межпланетном пространстве при его исследовании с помощью приборов, устанавливаемых на борту космических аппаратов. Исследование этих разрывов позволяет уточнить макроструктуру солнечного ветра и связать их с процессами, происходящими на Солнце. Одним из источников образования в межпланетной плазме сильных разрывов (ударные волны, тангенциальный, вращательный и контактный разрывы) являются вспышки на Солнце, в результате которых происходят выбросы солнечного вещества и истечение газа из солнечной короны в межпланетную плазму со скоростями, намного превосходящими скорость спокойного солнечного ветра (рис. 7,а). Высокоскоростные потоки, как правило, начинаются с сильных ударных волн, возникших в результате опрокидывания волн сжатия.

Сильные разрывы могут возникать не только вследствие увеличения крутизны профиля плотности в нелинейных волнах. Из-за того,

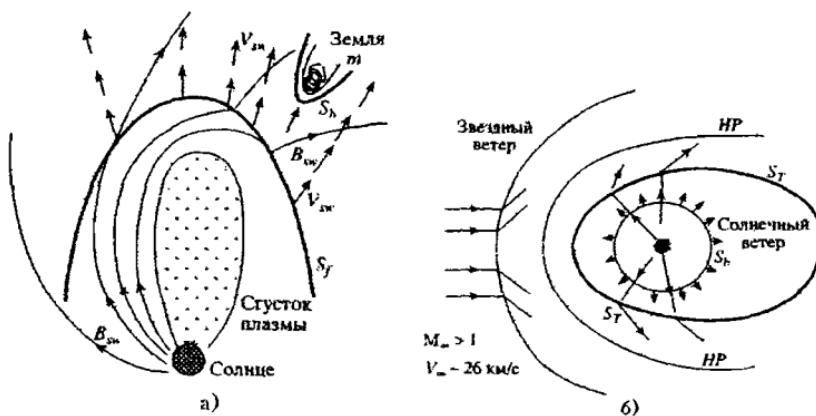


Рис. 7. Схемы течения в окрестности Солнце–Земля (а) и гелиопаузы HP (б)

что солнечный ветер представляет собой сверхзвуковой поток, разрывы образуются при обтекании планет и других тел солнечным ветром (головная ударная волна около Земли, Марса, Венеры, магнитопауза как тангенциальный разрыв, отделяющий переходный слой за головной ударной волной от магнитосферы и т. д.). Общепринятой в настоящий момент является теория взаимодействия солнечного ветра и локальной межзвездной среды в виде столкновения двух сверхзвуковых потоков с формированием двух ударных волн, разделенных гелиопаузой (тангенциальным разрывом) (рис. 7, б).

В этой связи представляет интерес рассмотреть процесс взаимодействия ударного возмущения солнечного ветра с околоземной головной (рис. 7, а) или стационарной предельной ударной волной солнечного ветра (рис. 7, б) в рамках двумерного МГД приближения. Многие авторы рассматривали подобные задачи в газодинамическом приближении или в одномерной МГД постановке [13, 20–25], однако двумерность в рамках магнитной гидродинамики приводит к новым качественным эффектам. Учет влияния магнитного поля принципиален: на орбите Земли магнитное давление в солнечном ветре порядка газодинамического давления. Отметим также, что точные решения необходимы для истолкования многочисленных космических явлений, зависящих от большого числа параметров, тогда как сеточные методы обладают существенными недостат-

ками при расчете течений с разрывами, особенно из-за наличия магнитного поля.

Пусть плоский фронт быстрой ударной волны S_f (или вращательного разрыва A_f), движущийся от Солнца со скоростью V_f (или V_A) относительно солнечного ветра, падает на околоземную головную ударную волну S_b (рис. 8, а) или предельную ударную волну S_T (рис. 8, б). Будем полагать, что в первой задаче межпланетное магнитное поле B_{sw} наклонено к скорости солнечного ветра V_{sw} под углом ψ_B , а во второй – что оно образует угол ψ_{ST} с фронтом S_T . Исследуем случай, когда векторы нормалей к фронтам разрывов, V_{sw} и B_{sw} лежат в одной плоскости. Тогда при взаимодействии S_f с S_b или S_T задачи являются плоскополяризованными, а при падении A_f для плоской поляризации необходимо, чтобы ток, текущий по A_f , был перпендикулярен этой плоскости. Нормаль n_{sf} (или n_A) к фронту S_f (или A_f) наклонена к V_{sw} под углом ζ . В системе координат XY , связанной с Землей (ось X по солнечному ветру ось Y в плоскости течения), S_b предполагается стационарной, ее интенсивность меняется как функция угла α наклона фронта S_b к оси X (рис. 8, а). При $\psi_B \neq 0$ головная ударная волна S_b несимметрична, состояние среды,

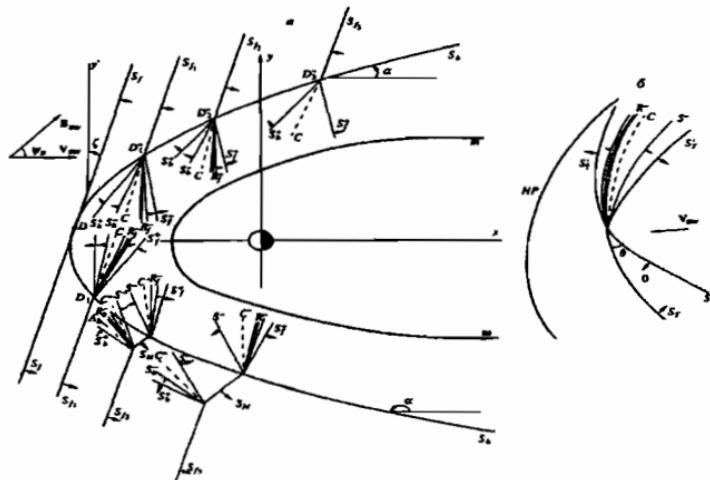


Рис. 8. Волновая картина течений, возникающих при взаимодействии быстрой ударной волны солнечного ветра S_f (или альфеновского разрыва) с околоземной головной ударной волной S_b (а), и структура течения при взаимодействии S_f со стационарной предельной ударной волной S_T (б) (HP – гелиопауза)

скорость и магнитное поле за ней определяются по углу $\phi = \alpha$ из соотношений (15)–(19), (22)–(24) (или (28)–(29)) приложения 5.

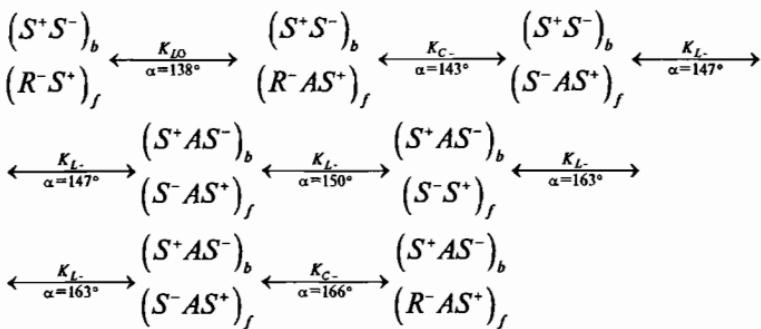
Аналогично, в системе координат, связанной с Солнцем, ударная волна S_T предполагается стационарной, и ее число Маха M_{ST} определяется газодинамическим числом Маха солнечного ветра перед ее фронтом, которое находится из самосогласованного решения осесимметричной задачи, полученного в [26, 27] методом Монте-Карло с учетом резонансной перезарядки между атомами водорода и протонами в солнечном ветре.

После соприкосновения фронтов S_f и S_b в некоторой точке D разрыв перемещается по фронту S_b со сверхзвуковой скоростью, поэтому процесс столкновения двух разрывов можно рассматривать локально, считая интенсивность падающего разрыва и состояние за ним неизменными, а S_b параметрически зависящей от α (рис. 8, а). При взаимодействии S_f с S_T неизменными будут интенсивность S_T и состояние за ней, тогда как S_f будет меняться из-за изменения угла наклона B_{sw} к фронту S_f при увеличении угла θ между S_T и S_f (рис. 8, б). Расчеты были проведены в широком диапазоне изменения всех вышеперечисленных определяющих параметров. Остановимся на ряде результатов.

Рассмотрим падение S_f на S_b [28] для следующих безразмерных параметров: $M_{sw} = 8$, $M_{Sf} = 3$, $\beta = 1$ ($N = 1,1$), $\psi_B = 45^\circ$. Это соответствует средним характеристикам солнечного ветра на орбите Земли [29]: $V_{sw} = 390$ км/с, $|B_{sw}| = 6,2$ нТл, температура протонов $1,2 \cdot 10^5$ К, концентрация частиц 11 см^{-3} , $V_{Sf} = 170$ км/с.

Пусть $\zeta = -30^\circ$. Течение в окрестности лобового столкновения ($\alpha = 120^\circ$) имеет вид $S_b^+ S_b^- CR_f^- S_f^+$, что соответствует результатам, полученным в [21] для лобового столкновения в подсолнечной точке в одномерном приближении. При $\alpha = 113^\circ$ течение непрерывно трансформируется в $S_b^+ R_b^- CR_f^- S_f^+$ (катастрофа K_{c-}) и далее вплоть до подсолнечной точки и на всем фланге волновая картина остается неизменной до $\alpha \approx 50^\circ$, где происходит переход к маxовскому взаимодействию [6]. Роль медленных волн в изменении давления и компоненты скорости V_x невелик (порядка 5–10% по сравнению с быстрыми волнами), однако их влияние существенно для модуля напряженности магнитного поля и компоненты скорости V_y (до 50% от изменения этих параметров в S_f^+).

На нижнем фланге перестройки волновой картины взаимодействия и катастрофы изобразятся так:



Таким образом, при $\zeta = -30^\circ$ в случае движения S_f вдоль того фланга, на который она падает, в ограниченных пространственных зонах происходит последовательное образование и исчезновение узких слоев с двойными противонаправленными токовыми системами в прошедших волнах. Такие токовые системы будут оказывать раскачивающее влияние на магнитопаузу. Эти токовые слои приводят к изменению не только магнитного поля, но и обеих компонент скорости в альфвеновских и медленных волнах, при этом изменение давления в последних мало.

Рассмотрим падение S_f на верхний фланг S_b ($\zeta = 20^\circ$). Эволюция волновой картины взаимодействия представлена на рис. 8,а. Течение в окрестности лобового столкновения ($\alpha = 70^\circ$) имеет вид $S_b^+ S_b^- C R_f^- S_f^+$, как и в случае $\zeta = -30^\circ$. При перемещении S_f по верхнему флангу угол между B_{sw} и V_{sw} уменьшается, вследствие чего взаимодействие приобретает квазипараллельный характер [5]. При $\alpha \approx 55^\circ$ течение непрерывно трансформируется в $S_b^+ R_b^- C R_f^- S_f^+$ (катастрофа K_{C-}), и далее интенсивности медленных волн убывают, но не стремятся к нулю. При $\alpha \approx 25^\circ$ вектор V_{st} становится коллинеарен B_{sw} , и происходит катастрофа тангенциального разрыва K_T , однако поскольку при этом число Maxa M_* по нормали к элементу фронта S_b с $\alpha \approx 25^\circ$ ($M_* = M_{sw} \sin \alpha \approx 3,3$) достаточно близко к $M_{sy} = 3$, интенсивность K_T из-за симметричности течения практически равна нулю. При других числах Maxa S_f и других углах падения ζ может наблюдаться существенный скачок в состоянии на контактном разрыве. При $\alpha < 25^\circ$ течение имеет ту же волновую структуру $S_b^+ R_b^- C R_f^- S_f^+$ и остается регулярным вплоть до характеристического значения $\alpha_* \approx 11^\circ$.

При перемещении S_f по другую сторону от точки лобового столкновения ($\alpha > 70^\circ$) течение имеет волновую картину $S_b^+ S_b^- CR_f^- S_f^+$ до подсолнечной точки и далее на нижнем фланге, где регулярное решение существует вплоть до $\alpha \approx 141^\circ$, и при $\alpha > 141^\circ$ происходит переход к маховскому взаимодействию, при этом никаких скачкообразных изменений параметров течения в волнах, прошедших внутрь переходного слоя, как это было при $\zeta = -30^\circ$, не наблюдается.

Таким образом, построенное решение демонстрирует асимметричность воздействия падающей ударной волны S_f на фланги S_b и ее существенную зависимость от взаимной ориентации B_{sw} и фронта S_b . Возможны ситуации, когда при продвижении ударной волны в прошедших волнах возникают альфвеновские разрывы (токовые слои), которые затем нелинейно (скачкообразно) исчезают и могут снова скачкообразно возникать далее на флангах. Нелинейная перестройка волновой структуры течения обуславливает изменение физических величин. Появление альфвеновских разрывов соответствует резким изменениям магнитного поля и скорости, что может оказывать раскачивающее влияние на магнитопаузу. Очевидно, что нелинейно возникающие близко расположенные в пространстве токовые слои, генерирующие взаимно противоположное изменение магнитного поля, будут сноситься на магнитопаузу, вызывая геомагнитные бури. Это позволяет объяснить причину того, что только часть ударных волн солнечного ветра геоэффективна [30].

Рассмотрим падение S_f на S_T [31]. Продемонстрируем существенность влияния ориентации магнитного поля на этот процесс. Выберем следующие безразмерные параметры: $M_{ST} = 5,5$; $M_{sy} = 5$; $\beta = 1$ ($N = 1,1$). На рис. 9 представлены зависимости безразмерной плотности $\rho(\theta)/\rho_0$ (сплошные кривые, левая шкала) за новой предельной ударной волной S'_T , возникшей в результате взаимодействия, и ее безразмерная скорость $V_{ST}(\theta)/V_{sw}$ относительно невозмущенного солнечного ветра (штриховые кривые, правая шкала) для значений $\Psi_{ST} = 0, 40, 80^\circ$ (кривые 1–3). Штрихпунктирная кривая 4 описывает $\rho(\theta)/\rho_0$ для $\beta = 10$ (квазигазодинамический случай). Поведение $\rho(\theta)/\rho_0$ и $V(\theta)/V_{sw}$ существенно зависит от Ψ_{ST} . Например, при $\Psi_{ST} = 0^\circ$ влияния магнитного поля приводит, по сравнению с квазигазодинамическим случаем, к существенному уменьшению ρ/ρ_0 за S'_T , тогда как при $\Psi_{ST} = 80^\circ$ это влияние приводит либо к увеличению ρ/ρ_0 при малых и либо значительному уменьшению ρ/ρ_0 при достаточно больших θ . Учет двумерности взаимо-

действия приводит к тому, что при определенных углах наклона магнитного поля ($\psi_{ST} = 40, 80^\circ$) максимальное сжатие среды достигается не при лобовом столкновении, как обычно считается ($\theta = 0$), а на флангах предельной ударной волны.

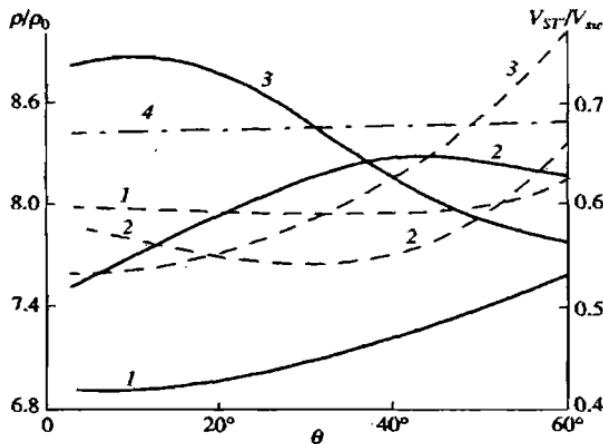


Рис. 9. Зависимость безразмерной плотности ρ/ρ_0 за предельной ударной волной (сплошные линии) и ее скорости относительно невозмущенного солнечного ветра после взаимодействия (штриховые) от угла θ между S_f и S_T : $M_{ST} = 5,5$; $M_{sy} = 5$; $\beta = 1$ ($N = 1,1$), $\psi_{ST} = 0, 40, 80^\circ$ (кривые 1–3, соответственно). Кривая 4 описывает $\rho(\theta)/\rho_0$ при $\beta = 10$ (квазигазодинамический случай)

Максимальная безразмерная скорость S'_T относительно Солнца (минимум $V_{ST}(\theta)/V_{sw}$) достигается, когда вектор напряженности межпланетного магнитного поля B_{sw} близок к нормалиям к обеим взаимодействующим волнам, т.е. при малых θ для $\psi_{ST} \approx 80^\circ$ и при некотором промежуточном значении θ в случае меньших ψ_{ST} . Например, как можно видеть из рис. 9, при $\psi_{ST} \approx 40^\circ$ минимум $V_{ST}(\theta)/V_{sw}$ достигается при $\theta \approx 30^\circ$. Это соответствует квазиперпендикулярному взаимодействию ударных волн, при котором магнитное поле ускоряет среду в наибольшей степени.

Таким образом, учет влияния магнитного поля и двумерности взаимодействия может существенно изменить картину течения и результирующие параметры, что важно для интерпретации информации, поступающей с космических аппаратов.

Литература

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
3. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Наклонное взаимодействие сильных разрывов в магнитной гидродинамике // Механика. Современные проблемы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 100–105.
4. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Наклонное взаимодействие альфвеновского и контактного разрывов в магнитной гидродинамике // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 1. С. 131–142.
5. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Пересечение ударных волн в магнитной гидродинамике // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 3. С. 132–143.
6. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Нерегулярное взаимодействие ударных волн в магнитной гидродинамике // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 184–198.
7. Barmin A.A., Pushkar' E.A. Interaction of strong discontinuities in magnetized conducting medium // Shock Waves @ Marseille II, Physico-Chemical Processes and Nonequilibrium Flow, Proceedings of the 19th International Symposium on Shock Waves / R. Brun and L.Z. Dumitrescu. New York: Springer-Verlag. P. 433–438.
8. Пушкарь Е.А. Регулярное наклонное взаимодействие догоняющих ударных волн в проводящей среде с магнитным полем // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 127–143.
9. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Встречное наклонное взаимодействие альфвеновского разрыва с быстрой магнитогидродинамической ударной волной // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 6. С. 120–136.
10. Natter M. Shock reflection and shock-wave interaction in field-aligned flows // J. Plasma Physics. 1975. Vol. 4. № 1. P. 39–51.
11. Bestman A.R. Refraction of hydromagnetic shocks // J. Plasma Physics. 1977. Vol. 18. № 2. P. 189–208.
12. Bestman A. R. Confluence of three shocks for transverse shocks and shocks in aligned MHD field // J. Plasma Physics. 1975. Vol. 13. № 1. P. 107–125.
13. Zhuang H.C., Russell C.T., Smith E.J., Gosling J.T. Three-dimensional interaction of interplanetary shock waves with the bow shock and magnetopause: A comparison of theory with ISEE observations three-dimensional plasma measurements // J. Geophys. Res., 1981. Vol. A86. № 7. P. 5590–5600.
14. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2.
16. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
17. Пушкарь Е.А. Простые стационарные волны в наклонном магнитном поле // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С 130–138.
18. Пушкарь Е.А. Обобщенные поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений в магнитной гидродинамике // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 3. С. 111–119.

19. Pushkar' E.A. Methods of numerical simulation of the oblique shock wave interaction in magnetized conducting media // The Third Russian-Japanese Joint Sympos. on Computational Fluid Dynamics. Russia, Vladivostok, 1992. Book Abstr. Vol. 2. P. 158–159.
20. Grib S.A., Brunelli B.E., Dryer M., Shen W.W. Interaction of interplanetary shock wave with the bow shock-magnetopause system // J. Geophys. Res., 1979. Vol. 84. № 10. P. 5907–5921.
21. Grib S.A. Interaction of non-perpendicular / parallel solar wind shock waves with the earth's magnetosphere // Space Sci. Rev., 1982. Vol. 32. № 1–2. P. 43–48.
22. Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock: A gas dynamic model // J. Geophys. Res., 1993. Vol. 98. № A9. P. 15137–15146.
23. Naidu K., Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock. 3. Incident interplanetary shocks // Geophys. Res., 1994. Vol. 99. № A6. P. 11553–11560.
24. Naidu K., Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock. 4. MHD effects // J. Geophys. Res., 1994. Vol. 99. № A10. P. 17673–17679.
25. Whang Y.C., Burlaga L.F. Interaction of global merged interaction region shock with the heliopause and its relation to the 2- and 3-kHz radio emissions // J. Geophys. Res., 1994. Vol. 99. № A11. P. 21457–21465.
26. Baranov V.B., Malama Yu.G. Model of the solar wind interaction with the local interstellar medium: Numerical solution of self-consistent problem // J. Geophys. Res., 1993. Vol. 98. № A9. P. 15157–15163.
27. Baranov V.B., Malama Yu.G. Effect of LISM hydrogen fractional ionization on the distant solar wind and interface region // J. Geophys. Res., 1995 Vol. 100. № A5. P. 14755–14761.
28. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Магнитогидродинамическое описание процесса столкновения ударного возмущения солнечного ветра и головной ударной волны // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 140–155.
29. Hundhausen A.J. Coronal Expansion and Solar Wind. New York-Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag, 1972.
30. Gosling J.T., McComas D.J., Phillips J.L., Bame S.L. Geomagnetic activity associated Earth passage of interplanetary shock disturbances and coronal mass ejections // J. Geophys. Res., 1991. Vol. 96, № A5. P. 7831–7839.
31. Baranov V.B., Barmin A.A., Pushkar' E.A. Interaction of interplanetary shocks with the heliospheric termination shock: Two-dimensional magnetohydrodynamic model // J. Geophys. 1996. Vol. 101, № A12. P. 27465–27481.

Учебное издание

Андрей Геннадьевич Куликовский
Григорий Александрович Любимов

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Учебник

Художественное оформление серии выполнено
Издательством Московского университета
и издательством «Проспект»
по заказу Московского университета

Редактор *Е.В. Комарова*
Оформление *В.А. Чернецова, Н.С. Шуваловой*
Компьютерная верстка *Т.В. Клейменовой*

Подписано в печать 25.12.2004. № 13 (и). Формат 84x108/32
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 10,25
Тираж 2000 экз. Заказ № 497

Издательско-книготорговый дом «Логос»
105318, Москва, Измайловское ш., 4

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

По вопросам приобретения литературы
обращаться по адресу:

105318, Москва, Измайловское ш., 4
Тел./факс: (095) 369-5819, 369-5668, 369-7727

Электронная почта: universitas@mail.ru

Дополнительная информация на сайте <http://logosbook.ru>

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



ISBN 5-94010-370-7
9 785940 103707