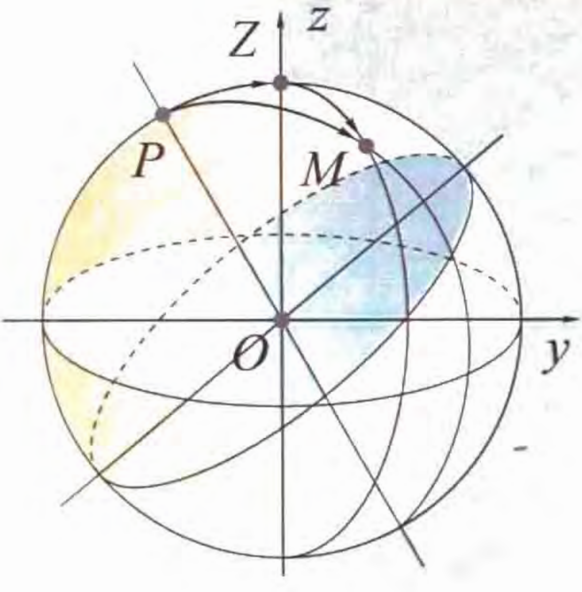
Ю.А. Курочкин

Простейшие алгебры и геометрии и их применение в физике и астрономии

Математическая физика для начинающих



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт физики им. Б.И. Степанова

Ю.А. Курочкин

Простейшие алгебры и геометрии и их применение в физике и астрономии

Математическая физика для начинающих

Минск
«Беларуская навука»
2009

Курочкин, Ю. А. Простейшие алгебры и геометрии и их применение в физике и астрономии: Математическая физика для начинающих / Ю. А. Курочкин. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 131 с. – ISBN 978-985-08-1112-7.

Книга посвящена связи физики с геометрией. Рассматриваются векторы в двумерном пространстве и допустимые преобразования над ними в общем случае и в случае плоскости Евклида. Развитый математический аппарат применяется для формулировки свойств уравнений Ньютона при допустимых преобразованиях в двумерном евклидовом пространстве и при временных сдвигах. Излагаются основные понятия комплексных чисел, приводятся примеры использования комплексных чисел в физике. Формулируется векторное исчисление в трехмерном евклидовом пространстве и дается его применение в геометрии. Вводится понятие о простейшей неевклидовой геометрии – геометрии постоянной, положительной кривизны двумерного пространства Римана в узком смысле слова, реализуемой на поверхности сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Рассматривается пример применения такой геометрии к установлению связи между двумя системами отсчета в сферической астрономии: горизонтальной и экваториальной. Излагаются основы специальной теории относительности как теории пространства-времени физики систем, учитывающих существование скорости света как универсальной константы.

В приложениях даны математические сведения, необходимые при изучении материала, тригонометрические и гиперболические функции, дается представление о пределе функции и ее производных.

Адресуется ученикам старших классов, учителям физики и математики, студентам и преподавателям вузов, не специализирующихся по теоретической физике.

Ил. 25. Библиогр.: 19 назв.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Е. А. Толкачев,
кандидат физико-математических наук В. И. Анцулевич

ISBN 978-985-08-1112-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой вниманию читателя книге изложены вопросы, касающиеся связи физики с геометрией. В ее основу положены идея, восходящая к работе Г. Гельмгольца, о фактической тождественности геометрической фигуры в евклидовой геометрии и абсолютно твердого тела в механике Ньютона, и идея Ф. Клейна, состоящая в том, что геометрия пространств, в том числе используемых в физике, определяется величинами, не меняющимися при допустимых движениях в этих пространствах, – их инвариантами. В принципе, под движениями в физике и математике понимаются разные вещи, но когда движения в физике удается описать с помощью движений, определенных в математике, тогда и достигается цель взаимодействия этих двух наук.

Геометрические решения приходится, как правило, облекать в алгебраическую форму. Для этого в книге используется векторное исчисление.

Уровень развития любой из наук, как известно, в большой степени определяется уровнем ее математизации. Физика в этом отношении является образцом использования математических методов. При этом, когда возникает необходимость облачить физические явления в математическую форму, среди всех разделов математики первой выступает геометрия. В современной математике аппаратом для описания свойств симметрии пространств, тесно связанных с понятиями инвариантности, является теория групп преобразований и их представлений. Однако данные разделы не могут изучаться в школьных курсах, поэтому автор постарался изложить материал, не прибегая к аппарату теории групп. Насколько это удалось – судить читателю.

Не последнюю роль в решении написать указанную книгу сыграло то обстоятельство, что идеи инвариантности в физике и математике близки белорусским физикам-теоретикам школы академика Ф. И. Федорова, к которой принадлежит автор.

Книга состоит из 6 глав. В первой главе рассматриваются векторы в двумерном пространстве и допустимые преобразования над ними в общем случае и в случае плоскости Евклида. Подчеркивается разница между двумя этими случаями. В достаточно полной мере вводится математический аппарат, необходимый для формирования понимания роли движений пространства в геометрии и физике.

Во второй главе развитый математический аппарат применяется для формулировки свойств уравнений Ньютона при допустимых преобразованиях в двумерном евклидовом пространстве и при временных сдвигах.

В третье главе излагаются основные понятия алгебры комплексных чисел, их геометрическая интерпретация на плоскости евклидового пространства. Приводятся примеры использования комплексных чисел в физике и математике.

Четвертая глава посвящена формулировке векторного исчисления в трехмерном евклидовом пространстве и применению его в геометрии, физике, в частности к формулировке механики Ньютона, описанию свойств уравнений Ньютона при преобразованиях пространства и времени. Даны примеры использования скалярного и векторного произведений векторов в различных разделах физики. Вводится представление о связи законов сохранения со свойствами симметрии пространства и времени.

В пятой главе дается понятие о простейшей неевклидовой геометрии – геометрии постоянной, положительной кривизны двумерного пространства Римана в узком смысле слова, реализуемого на поверхности сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Приводится пример применения такой геометрии к установлению связи между двумя системами отсчета в сферической астрономии: горизонтальной и экваториальной.

В последней, шестой главе излагаются основы специальной теории относительности как теории пространства-времени физики систем, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. Изложение данной главы существенно основано на понятиях допустимых движений пространства-времени при переходе к объектам, движущимся со скоростями, близкими к скорости света. При этом мы старались избежать применения некоторых артефактов, часто используемых при изложении основ специальной теории относительности. Каждая глава снабжена задачами, решение которых углубит понимание читателя.

В приложениях дан минимум математических сведений, которые не связаны концептуально с содержанием книги, но, по нашему мнению, совершенно необходимы при изучении материала. Речь идет о тригонометрических функциях, пределе функции и производных. Список литературы предназначен для желающих углубить свое понимание вопросов, затронутых в книге.

В основе книги находится спецкурс, прочитанный автором в школе-лицее № 165 г. Минска ученикам 9-х и 11-х классов в 1996/97 учебном году. Несмотря на сравнительно большой промежуток времени, прошедший со времени чтения спецкурса, неоднократное обсуждение его содержания со школьными учителями и авторами учебников для школы укрепило автора во мнении, что данная книга может быть полезной ее читателям.

Глава 1

ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ВЕКТОРНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1. Векторы в двумерном евклидовом пространстве

Многие физические явления описываются векторами, математическими объектами, которые задаются своей длиной и направлением. К таким величинам относятся: перемещение, скорость, ускорение, угловая скорость, импульс, момент импульса, момент силы, напряженности электрического и магнитного полей и т. д.

Векторное исчисление является адекватным математическим аппаратом для описания многих физических явлений. Несмотря на то что с современной точки зрения векторное исчисление – довольно формализованная математическая структура, полезно начинать его изучение с примеров использования векторов в геометрии и механике и опираться на интуитивное представление о векторах.

Сначала рассмотрим векторы на плоскости. Очевидно, что если представить плоскость как белый лист бумаги, не имеющий границ, и на нем нарисовать стрелку, то понятие длины применительно к ней вполне оправдано. Длина стрелки может быть определена путем сравнения с масштабом, т. е., например, с линейкой. Однако направление одной такой стрелки не имеет смысла – оно не определено.

Это связано со свойствами той плоскости, того пространства, которое моделируется белым листом, не имеющим границ. По отношению к такому пространству неважно, в каком месте листа будет нарисована стрелка и как она направлена (рис. 1). Эти свойства данного пространства называются однородностью и изотропностью. В данном случае их (свойства) можно связывать с названным физическим

Рис. 1

свойством белизны. Однородность и изотропность означают, что степень белизны листа всюду одинакова, и невозможно отличить по данному признаку одно из расположений вектора по отношению к другому его расположению. Куда бы на плоскости мы не передвинули стрелку и как бы не повернули ее, не имеет значения. Для задания направления вектора потребуются некоторые выделенные на уже упоминаемом листе места. Иными словами, необходимо задать систему отсчета или систему точек и линий на плоскости, выделяющихся на фоне однородности пространства (белого листа). Предположим, что данные линии будут не белыми, а, например, нарисованными черным карандашом. С системой отсчета связывают систему координат. В математике два понятия – система отсчета и система координат фактически совпадают, а в физике различаются. В дальнейшем мы будем возвращаться к обсуждению данного вопроса. Отметим только, что в математике понятие систем координат подразумевает выбор различных конкретных систем линий, в то время как понятие системы отсчета является общим и вид линий может не конкретизироваться.

На первом этапе потребуется прямоугольная декартова система координат. Такая система координат, как известно, задается с помощью двух прямых линий, пересекающихся под прямым углом с заданными на них выбранными направлениями. В зависимости от выбранных направлений декартовы системы координат называются правой или левой. На рис. 2 изображена правая декартова система координат.

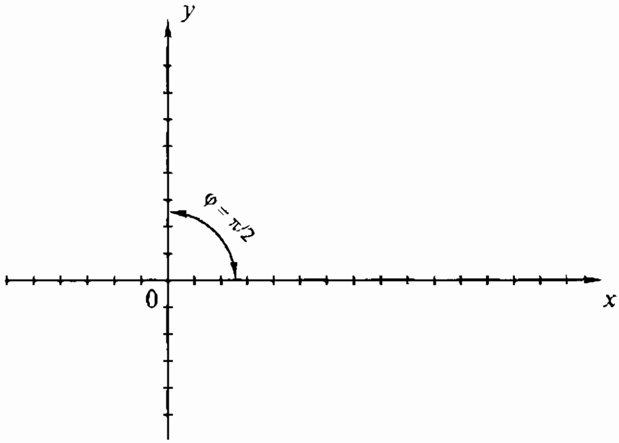


Рис. 2

Правая система координат определяется как система координат, в которой для совмещения оси Ox по направлению с осью Oy путем поворота на угол $\pi/2$ относительно точки пересечения O (ось Ox) необходимо поворачивать против часовой стрелки. Напомним, что точка пересечения линий называется началом отсчета или началом координат, а сами линии – осями координат: ось Ox – осью абсцисс, а ось Oy – осью ординат. Выберем масштаб на каждой из координатных осей. Для удобства при вычислениях желательны одинаковые масштабы на оси абсцисс и оси ординат. Масштаб представляет собой некоторую принятую по соглашению единицу измерения, например сантиметр, разнесенный с помощью делений на всю ось абсцисс и ординат (рис. 2). Таким образом, мы полностью задали систему отсчета и рассмотрим теперь, каким образом задаются в ней векторы.

На плоскости, в которой задана прямоугольная система координат, возьмем две точки A и B с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Упорядочим данную пару, назвав точку A началом, а точку B концом отрезка. Будем также

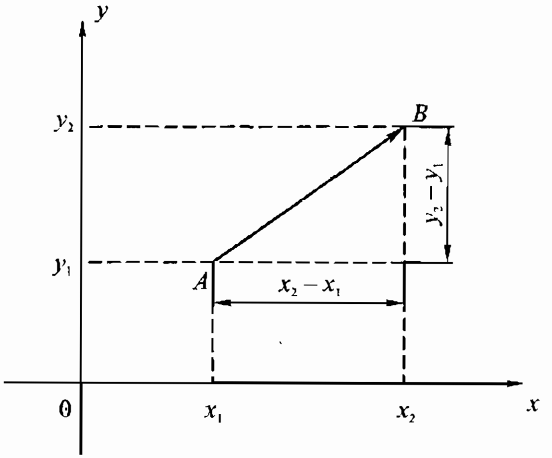


Рис. 3

считать, что на отрезке AB задано направлсние от начала к концу, которое обозначим стрелкой на отрезке.

Таким образом, четыре числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) полностью задают вектор на плоскости в заданной системе координат. С их помощью можно определить его длину, которая, согласно теореме Пифагора (рис. 3), будет равна

$$\ell_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,, \tag{1.1}$$

а также угол φ между вектором $\overline{AB}$ и любой из координатных осей. Для определенности возьмем ось Ox. Очевидно, что косинус данного угла, согласно его определению:

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\ell_{AB}}. \tag{1.2}$$

Нетрудно понять, что вектор $\overline{AB}$ может быть заданным также четверкой чисел $x_1, x_2, \ell_{AB}, \cos\varphi$ вместо четверки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (рис. 4).

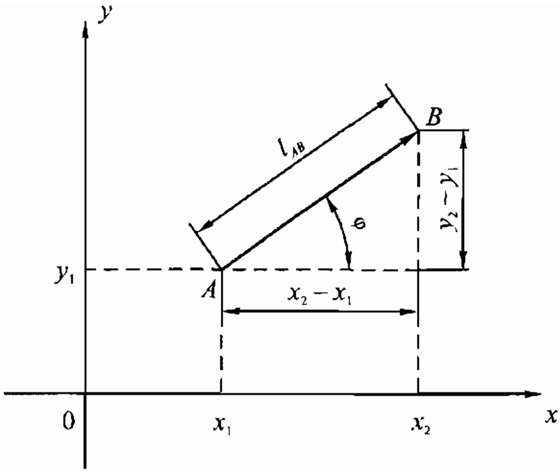


Рис. 4

Теперь вспомним об однородности пространства, в котором задаем векторы. Оно остается таким вне системы координат, вне опорных линий – введенных координатных осей. Поэтому все векторы, параллельные друг другу и имеющие одинаковые длины, естественно считать одинаковыми. Такие векторы могут быть перенесены параллельно самим себе и совмещены. Именно в этом смысле они являются одинаковыми. И следовательно, векторы, расположенные в любом месте пространства, могут быть перенесены параллельно самим себе, так чтобы начало их координат совпало с началом системы отсчета. В этом случае каждой точке плоскости соответствует вектор, начало которого совпадает с началом отсчета, а конец – с данной точкой. Такой вектор далее будем называть радиус-вектором той точки, с которой совпадает его конец. В этом смысле рассматриваемую плоскость можно считать двумерным векторным пространством. В дальнейшем будет дано более строгое определение такого пространства. Удобство отнесения всех векторов к началу системы координат состоит в том, что в этом случае для их задания достаточно, как и для точки, двух чисел.

1.2. Сложение векторов. Операции над векторами

Рассмотрим движение точки по некоторой кривой. Пусть в результате своего движения точка из пункта A переходит в пункт B, а затем из пункта B – в пункт C на данной кривой, как изображено на рис. 5, *а*.

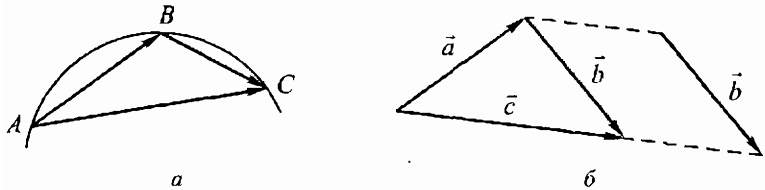


Рис. 5

Результат движения точки из пункта A в пункт B удобно характеризовать вектором $\vec{s}_{AB}$, соединяющим пункты A и B, направленным от A к B, который называется вектором перемещения. Соответственно переход точки из пункта B в пункт C будет характеризоваться вектором перемещения $\vec{s}_{BC}$, а итоговый переход из A в C – вектором перемещения $\vec{s}_{AC}$. Таким образом, естественно возникает первая операция над векторами – операция сложения. Вектор $\vec{s}_{AC}$ естественно считать суммой векторов $\vec{s}_{AB}$ и $\vec{s}_{BC}$.

Как видно из приведенного примера, векторы складываются в соответствии с правилом треугольника. Правило гласит: если есть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (далее векторы обозначаются строчными буквами латинского алфавита со стрелками над ними), расположенные произвольно на плоскости, то для сложения векторов вектор $\vec{b}$ параллельно себе необходимо перенести до совмещения его начала с концом вектора $\vec{a}$. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается соединением начала вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$. Направлен вектор $\vec{c}$ от начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$, как изображено на рис. 5, *б*.

Легко проверить, что выходит тот же результат, если вместо вектора $\vec{b}$ параллельно себе перенести вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{b}$. Вектор, полученный соединением начала вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$, совпадет с вектором $\vec{c}$ с точностью до параллельного переноса. Следовательно, операция сложения векторов перестановочна или коммутативна.

Теперь определим операцию вычитания векторов. Для этого сначала установим, чем различаются, например, векторы $\vec{b}$ и $-\vec{b}$. Очевидно, они совпадают по длине и противоположны по направлению. Поэтому если необходимо вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, т. е. получить результат операции $\vec{a}-\vec{b}$, то ее можно свести к уже известной операции сложения векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$: $\vec{a}+(-\vec{b})$. Если две указанные операции над векторами на плоскости представить в декартовой системе координат, то легко увидеть (рис. 6),

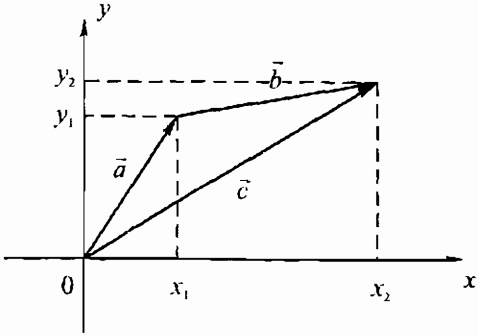


Рис. 6

что в результате сложения векторов складываются и их проекции, т. е.

$$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2-x_1,y_2-y_1), \tag{1.3}$$

следовательно,

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(x_2,y_2), \tag{1.4}$$

а в случае вычитания

$$\vec{c}-\vec{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=\vec{b} \tag{1.5}$$

вычитаются.

Представим себе, что мы хотим изменить масштаб, в котором измеряются проекции векторов: вместо уже выбранной единицы измерения по осям декартовой системы – найти другую (в два раза меньше). При этом очевидно, что значения проекций векторов, заданных в данной декартовой системе, станут в два раза больше. То есть для того чтобы перейти к новому масштабу измерения, пришлось обе проекции умножить на два. Такая процедура означает умножение вектора на число два. В общем случае при умножении вектора $\vec{a}$ на число α получается вектор $\alpha\vec{a}$, проекции которого при этом умножаются на число α, а именно

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1). \tag{1.6}$$

Введенная выше операция сложения векторов задает их сдвиги в пространстве и таким образом связана со свойством его однородности. Изотропность пространства связана с равноправием всех направлений в пространстве. Направления задаются углами. В частности, для того чтобы задавать углы, а также другие величины, характеризующие взаимное расположение векторов в пространстве, определим еще одну операцию над векторами – их скалярное произведение. Скалярным произведением ($\vec{a}\ \vec{b}$) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое получается перемножением проекций этих векторов на одну и ту же ось системы координат и последующим сложением результатов умножения. Иными словами, данное число получается согласно правилу: если $\vec{a} = (x_1, y_1)$, а $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то их скалярное произведение

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2). \tag{1.7}$$

Возможно скалярное умножение вектора самого на себя. Например,

$$(\vec{a}\ \vec{a}) = \vec{a}^2 = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Ранее упоминалось (рис. 6), что длина вектора определяется согласно теореме Пифагора и равна, как подтверждено теперь, корню квадратному из скалярного произведения вектора самого на себя, т. е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}\,. \tag{1.8}$$

Данная величина также называется абсолютной величиной, модулем или нормой вектора.

Дадим еще одно определение скалярного произведения двух векторов, основанное на знании длин векторов-сомножителей $\vec{a}, \vec{b}$ и угла φ между ними. В этом случае скалярное произведение:

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\,. \tag{1.9}$$

Теперь рассмотрим треугольник, сторонами которого являются векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, где $\vec{c}$ по-прежнему сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В принципе, до задания системы отсчета неважно и даже бессмысленно говорить о месторасположении треугольника и его ориентации на плоскости в силу того, что пространство однородно и изотропно. При этом следует вспомнить определение равных треугольников в геометрии. Равными называются треугольники, которые можно, перенеся и наложив друг на друга, совместить так, что соответствующие их вершины и стороны совпадут (рис. 7).

Таким образом, видно, что определение одинаковости треугольников подразумевает однородность и изотропность пространства. При переносе предполагаем, что треугольник в любом промежуточном положении до совмещения равен треугольнику в исходном положении.

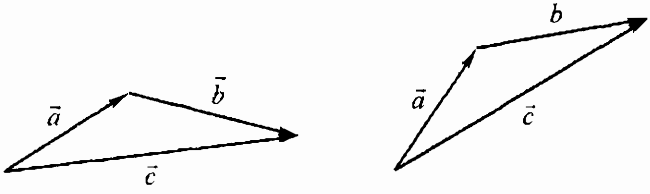


Рис. 7

Необходимо отметить, что треугольник задает естественную систему отсчета для векторов, его составляющих. При этом естественными координатами вектора, соответствующего любой из сторон, выступают его длина и угол между ним и вектором, соответствующим стороне, прилегающей (смежной) с первым вектором.

Следует также заметить, что параллельные переносы (их также называют сдвигами и трансляциями) векторов легко формулируются в терминах операции сложения векторов. Очевидно, что в этих терминах параллельный перенос означает просто тождественное преобразование. К параллельно переносимому вектору $\vec{a}$ добавляется и отнимается некоторый вектор $\vec{b}$, на который осуществляется параллельный перенос (рис. 8). Ниже мы еще вернемся к данному вопросу.

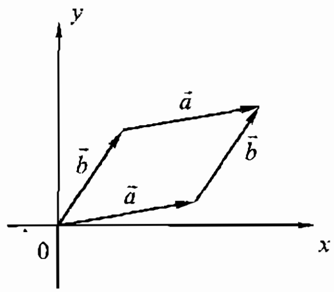


Рис. 8

Задачи. 1. Воспользовавшись свойством параллельно перенесенных векторов, сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.

2. Сформулируйте правило вычитания векторов, не прибегая к понятию вектора, противоположно направленного вычитаемому.

3. Используя геометрические соображения, основанные на свойстве изотропности пространства, докажите тождественность выражений (1.7) и (1.9).

4. Необходимо проверить, что длина вектора и угол между двумя векторами не меняются при параллельных переносах.

5. Используя определение сложения векторов и их скалярного произведения, выведите выражение для теоремы косинусов.

1.3. Векторы и вращения в двумерном евклидовом пространстве

Рассмотрим, как изменяются проекции вектора на оси декартовой системы координат при поворотах. Для этого декартову систему координат, в которой задан вектор $\vec{a}$, повернем на угол β.

Тогда, как видно из рис. 9, если в системе координат до поворота вектор $\vec{a}$ имел составляющие (x, y), а в повернутой системе координат – (x', y'), то простые рассуждения, использующие понятие тригонометрических функций, приводят к следующим формулам, связывающим проекции вектора $\vec{a}$ до и после поворота:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\beta - y' \sin\beta, \\ y &= x' \sin\beta + y' \cos\beta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

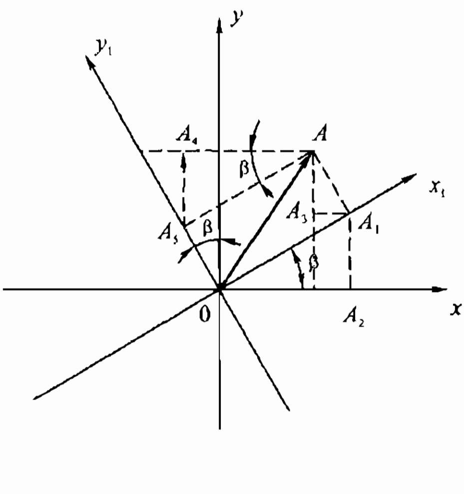


Рис. 9

Действительно, как видно из рис. 9, углы $A_1OA_2 = A_2AA_1 = \beta$ и $A_1OA_2 = A_2AA_1 = \beta$ в силу того, что их стороны взаимно перпендикулярны. Далее учтем, что $x = OA_2 - A_1A_3$, а $y = OA_3 + A_1A_2$ и $OA_2 = x'\cos\beta$, $A_1A_3 = y'\sin\beta$, $OA_3 = y'\cos\beta$, $A_1A_2 = x'\sin\beta$, откуда следуют формулы (1.10).

Разрешив выражения (1.10) относительно (x', y'), получим связь координат (проекций) вектора в повернутой системе координат с проекциями вектора в старой системе, а именно

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\beta + y\sin\beta, \\ y' &= -x\sin\beta + y\cos\beta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Если имеются вектор $\bar{c}$ с проекциями (x_1, y_1) и вектор $\bar{b}$ с координатами (x_2, y_2), которые в дальнейшем будем обозначать как $\bar{c} = (x_1, y_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2)$ соответственно, то при преобразованиях вращения на угол β системы координат, в которой они заданы, проекции каждого из векторов преобразуются согласно формулам (1.10), (1.11), в частности

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cos\beta - y_1'\sin\beta, \\ y_1 &= x_1'\sin\beta + y_1'\cos\beta. \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2'\cos\beta - y_2'\sin\beta, \\ y_2 &= x_2'\sin\beta + y_2'\cos\beta. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Непосредственной подстановкой формул (1.12) и (1.13) в выражение для скалярного произведения векторов $\bar{c}$ и $\bar{b}$:

$$(\bar{c}\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{1.14}$$

легко убедиться, что оно не меняется при преобразованиях вращения плоскости, задаваемой выражениями (1.12), (1.13). Естественно, что длина любого вектора также не будет изменяться при поворотах, так как выражается через скалярное произведение вектора самого на себя.

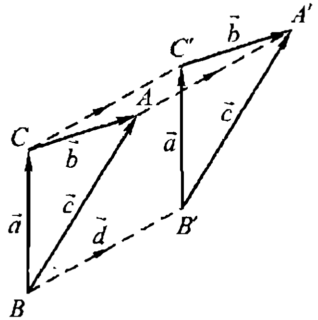


Рис. 10

Теперь у нас достаточно знаний и техники для того, чтобы дать аналитическую трактовку свойствам однородности и изотропности рассматриваемого двумерного пространства. Это удобно сделать на примере треугольника, произвольно расположенного на плоскости. Однако следует сразу заметить, что это справедливо в отношении любой фигуры на плоскости. Пусть вершины треугольника A, B, C заданы векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тогда легко понять, что при сдвигах (трансляциях) плоскости, например, на вектор $\vec{d} = (d_x, d_y)$ и поворотах, например, на угол β треугольник не меняется. Действительно, длины сторон треугольника являются длинами векторов, представляющих собой разности радиус-векторов точек A, B, C (рис. 10).

Если прибавить к данным векторам вектор $\vec{d}$, то очевидно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, соответствующие сторонам треугольника, не изменятся. Поскольку длины сторон выражаются в виде скалярного произведения векторов самих на себя, а углы (или косинусы углов) между сторонами – через скалярные произведения векторов-сторон, между которыми угол заключен, то, как уже было сказано, такие комбинации не меняются при вращениях системы координат. Общие преобразования, оставляющие неизменными длины векторов и углы между ними, можно записать в виде вращений и сдвигов (трансляций):

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\beta + y\sin\beta + d_x, \\ y^* &= -x\sin\beta + y\cos\beta + d_y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Такие преобразования называются движениями двумерной евклидовой плоскости (двумерного евклидового пространства).

1.4. Свойства преобразований вращений и некоторые соотношения между тригонометрическими функциями

Рассмотрим теперь некоторые свойства преобразований (1.10), (1.11) и вытекающие из них следствия. Во-первых, установим, каким образом связаны отдельные последовательные повороты на углы β_1 и β_2 с конечным поворотом, который, как очевидно из простых геометрических соображений, равен сумме $\beta_1 + \beta_2$. Учитывая сказанное, можно записать результат первого поворота на угол β_1:

$$x' = x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1,$$
$$y' = -x\sin\beta_1 + y\cos\beta_1. \tag{1.16}$$

Результат следующего поворота на угол β_2 представится как

$$x'' = x'\cos\beta_2 + y'\sin\beta_2,$$
$$y'' = -x'\sin\beta_2 + y'\cos\beta_2. \tag{1.17}$$

Результирующий поворот на угол $\beta_1 + \beta_2$:

$$x'' = x\cos(\beta_1 + \beta_2) + y\sin(\beta_1 + \beta_2),$$
$$y'' = -x\sin(\beta_1 + \beta_2) + y\cos(\beta_1 + \beta_2). \tag{1.18}$$

С другой стороны, подставив выражения для (x', y') (1.12) в выражения (1.13), получим:

$$x'' = x(\cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2) +$$
$$y(\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_2\cos\beta_1),$$
$$y'' = -x(\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_2\cos\beta_1) +$$
$$y(\cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2). \tag{1.19}$$

Сравнивая выражения (1.18) и (1.19), получаем следующие выражения для косинуса и синуса суммы двух углов:

$$\cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2, \tag{1.20a}$$

$$\sin(\beta_1 + \beta_2) = \sin\beta_1 \cos\beta_2 + \sin\beta_2 \cos\beta_1 . \qquad (1.20б)$$

З а д а ч и: 1. Выведите формулы для косинуса и синуса разности двух углов.

2. Используя полученные формулы для синуса и косинуса разности двух углов, докажите, что функция косинус четная (не меняет знак при изменении знака аргумента), а синус нечетная (меняет знак на противоположный при изменении знака аргумента).

1.5. Матрицы. Линейные преобразования векторов

Формулы (1.10), (1.11), (1.16)–(1.19) допускают обобщения. Например, формулу (1.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} x' &= A_{xx}x + A_{xy}y, \\ y' &= A_{yx}x + A_{yy}y. \end{aligned} \qquad (1.21)$$

Из коэффициентов преобразования (1.21) составим следующую таблицу:

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} A_{xy} \\ A_{yx} A_{yy} \end{pmatrix}, \qquad (1.22)$$

где очевидно принято

$$A_{xx} = \cos\beta, A_{xy} = -\sin\beta, A_{yx} = \cos\beta, A_{yy} = \sin\beta.$$

Таблицы такого рода в математике называются матрицами, числа $A_{xx}, A_{xy}, A_{yx}, A_{yy}$ – элементами матрицы.

Существуют определенные правила обращения с матрицами, которые в значительной степени вытекают из правил действия их на векторы, т. е. формул (1.21). Напомним, что заданные своими проекциями векторы мы представляли в виде строчки из двух чисел (проекций). Такие векторы называются вектор-строчками. Векторы можно также представлять в виде столбика из его проекций. Такие векторы называются вектор-столбцами. Используя представление вектора в виде столбца, преобразование (1.21) можно определить с помощью действия матрицы (1.22):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx} A_{xy} \\ A_{yx} A_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

или в сокращенном виде:

$$\vec{a}' = A\vec{a}\,. \tag{1.24}$$

Матрицу A при этом удобно рассматривать как совокупность двух вектор-строк – верхней и нижней. Тогда под действием матрицы на вектор-столбец понимается скалярное произведение каждой из данных вектор-строк с вектор-столбцом, стоящим справа, результатом чего является вектор-столбец, стоящий справа или, что то же, формула (1.21). Повторив операцию и подействовав на штрихованный вектор-столбец в (1.23) некоторой новой матрицей A', где

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{xx} A'_{xy} \\ A'_{yx} A'_{yy} \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

будем иметь

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} \\ A'_{yx} & A'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} \\ A'_{yx} & A'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

где вместо однократно преобразованного штрихованного вектор-столбца подставлено его выражение через матрицу A, откуда после последовательного перемножения в соответствии с выше сформулированным правилом умножения матриц на вектор-столбец получаем правило умножения матриц

$$A'' = A'A = \begin{pmatrix} A''_{xx} & A''_{xy} \\ A''_{yx} & A''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} \\ A'_{yx} & A'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A'_{xx} A_{xx} + A'_{xy} A_{yx} & A'_{xx} A_{xy} + A'_{xy} A_{yy} \\ A'_{yx} A_{xx} + A'_{yy} A_{yx} & A'_{yx} A_{xy} + A'_{yy} A_{yy} \end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Таким образом, один и тот же результат преобразования вектор-столбца $\vec{a}$ получается, когда подействуем на $\vec{a}$ последовательно сначала матрицей A, а потом матрицей A' или сразу подействуем матрицей

$$A'' = \begin{pmatrix} A'_{xx}A_{xx} + A'_{xy}A_{yx} & A'_{xx}A_{xy} + A'_{xy}A_{yy} \\ A'_{yx}A_{xx} + A'_{yy}A_{yx} & A'_{yx}A_{xy} + A'_{yy}A_{yy} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

которая является произведением этих двух матриц. При этом получается следующее правило для умножения матриц: каждый вектор-столбец, из двух вектор-столбцов, из которых состоит матрица A', как бы скалярно умножается на каждую из вектор-строчек, из которых состоит матрица A. Умножая первую из вектор-строчек сначала на первый, а потом на второй вектор-столбцы, получаем первую вектор-строчку матрицы произведения. Умножая также вторую вектор-строчку данной матрицы на вектор-столбцы справа стоящей матрицы, получаем вторую вектор-строчку матрицы произведения. В результате умножения матриц мы получаем также квадратную матрицу такой же размерности 2×2, т. е. состоящую из четырех чисел, объединенных в квадратную таблицу.

При определении матриц выше мы исходили из их частного случая, а именно матриц, которые задают преобразования вращений в двумерном пространстве. Такие матрицы представляют собой весьма частный вид матриц 2×2. Действительно, как вытекает из вышеизложенного, элементы матрицы поворота в плоскости представляют собой два числа, при этом не являющиеся независимыми (оба зависят от одного и того же параметра угла поворота β). Абстрагируясь от преобразований поворотов в плоскости, от которых мы отталкивались при введении матриц, становясь на чисто алгебраическую точку зрения, можем рассмотреть множество 2×2 матриц с произвольными значениями их элементов и правилом умножения (1.27). Очевидно, что, став на такую точку зрения, можно ввести матрицы и большей размерности, например 3×3, а вообще говоря, и размерности $n \times n$, где n – произвольное целое число. Алгебра матриц является обобщением обычной алгебры чисел, изучаемой в школе. Так, например, для матриц одной и той же размерности вводится операция сложения, при которой складываются соответствующие элементы. Так, например,

$$A'' = A' + A = \begin{pmatrix} A''_{xx} & A''_{xy} \\ A''_{yx} & A''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} \\ A'_{yx} & A'_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{xx} + A_{xx} & A'_{xy} + A_{xy} \\ A'_{yx} + A_{yx} & A'_{yy} + A_{yy} \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

С алгебраической точки зрения операция сложения таких обобщенных чисел, как матрицы, обладает всеми свойствами операции сложения обычных чисел – она коммутативна и ассоциативна. Операция умножения матриц в отличие от операции умножения для обычных чисел некоммутативна, но ассоциативна. Важный класс матриц составляют матрицы, у которых отличен от нуля их определитель. Определителем, или детерминантом, $\det A$ 2×2 матрицы A называется обычное число, которое получается из элементов матрицы по правилу

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{vmatrix} = A_{xx}A_{yy} - A_{xy}A_{yx}. \tag{1.30}$$

Если $\det A \neq 0$, то для таких матриц определена им обратная матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = 1$. Приведенных сведений о матрицах достаточно для дальнейшего изложения материала.

В заключение данного параграфа отметим, что преобразование движений двумерного пространства (евклидовой плоскости) (1.15), используя матрицы, можно записать как

$$\vec{a}' = O\vec{a} + \vec{d}, \tag{1.31}$$

где 2×2-матрица вращений в отличие от произвольной 2×2-матрицы A обозначена буквой O.

З а д а ч и. 1. Используя явный вид 2×2-матриц A' и A, докажите, что их произведение не коммутативно, т. е. $A'A \neq AA'$.

2. Используя явный вид трех произвольных 2×2-матриц A'', A' и A, докажите, что их произведение ассоциативно, т. е. $(A''A')A = A''(A'A)$.

3. Покажите, что определитель матрицы поворотов плоскости равен единице.

1.6. Аксиоматика линейного пространства

Рассмотрим систему аксиом линейного векторного пространства. В данных аксиомах в очень сжатом виде содержится информация, изложенная выше, а также информация, допускающая всевозможные обобщения. Для людей с определенным складом мышления и определенной квалификацией аккумулированной в аксиомах информации достаточно для развертывания из них всего того, о чем уже шла речь. Известный специалист по математической логике Б. Рассел считал, что аксиоматический метод имеет много преимуществ перед другими подходами в математике, подобных преимуществам воровства перед честным трудом. Имелось в виду, что исторически открытия в математике, как правило, делаются не с помощью аксиоматического метода.

Приведем классическую формулировку аксиом линейного векторного пространства, данную в свое время Г. Вейлем. Аксиомы Вейля состоят из двух групп. Первая группа аксиом оперирует с неопределимым понятием «вектор», вторая – с понятием «точка». Вот эти аксиомы.

Группа аксиом I.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно определяют их сумму – вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Число λ и вектор $\vec{a}$ однозначно определяют вектор $\lambda\vec{a}$. Сложение векторов и умножение на число обладают следующими свойствами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – свойство перестановочности, или коммутативности.

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – свойство распределительности, или дистрибутивности.

3. Существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $\vec{b} = -\vec{a}$ такой, что $\vec{a} + \vec{b} = 0$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства:

5. $1\,\vec{a} = \vec{a}$ (умножение на единицу не меняет вектора).

6. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (дистрибутивность для умножения на произведение чисел).

7. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (дистрибутивность относительно умножения на сумму чисел).

8. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (дистрибутивность относительно умножения суммы векторов на число).

Сформулированные выше аксиомы дополняются аксиомой размерности.

Для формулировки аксиомы размерности вводится понятие линейной зависимости и независимости. Аксиома размерности формулируется в виде: *имеются n линейно независимых векторов, но всякие n + 1 векторов линейно зависимы друг от друга.* Другими словами, в пространстве n измерений вектор может быть представлен как строчка (или столбец) из n чисел. Как нетрудно понять, сформулированные аксиомы справедливы для линейного пространства произвольной размерности. Мы же будем иметь дело только с пространствами размерности 2, 3 и 4. Отметим также, что именно в пространствах размерности 2 и 3 векторы обозначаются буквами со стрелками над ними, в то время как векторы в пространствах большей размерности обозначаются буквами без стрелки над ними.

В пространстве, определенном аксиомами 1–8, допустимо линейное преобразование

$$\vec{a} = A\vec{a} + \vec{d}\,, \tag{1.32}$$

где матрица A имеет отличный от нуля определитель и, следовательно, для нее определена обратная матрица. Под действием преобразования (1.32) любой вектор линейного пространства, определенного аксиомами 1–8, преобразуется в вектор этого же пространства. В этом смысле можно говорить, что такое пространство замкнуто относительно преобразований (1.32). Допустимость таких преобразований означает, что в пространстве не фиксировано начало координат.

Группа аксиом II.

1. Каждая пара точек A и B определяет вектор $\vec{a}$, выражаемый символически в виде $\overline{AB}=\vec{a}$. Если A – произвольная точка, а $\vec{a}$ – произвольный вектор, то существует одна и только одна точка B такая, что $\overline{AB}=\vec{a}$.

2. Если $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{BC}=\vec{b}$, $\overline{AC}=\vec{c}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Пространство, в котором точки и векторы определяются группами аксиом I и II, называется линейным аффинным пространством.

Для перехода к евклидовому пространству к аксиомам групп I и II следует добавить метрическую аксиому, т. е. ввести понятие скалярного произведения двух векторов.

Всякие два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяют число $(\vec{a}\vec{b})=Q(\vec{a},\vec{b})$, которое можно рассматривать как функцию двух данных векторов, или, другими словами, как симметричную билинейную форму. Симметричность такой билинейной формы означает, что она не меняет знака при перестановке аргументов (векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), т. е. $(\vec{a}\vec{b})=Q(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b}\vec{a})=Q(\vec{b},\vec{a})$.

Частный случай билинейной формы – квадратичная форма $(\vec{a}\vec{a})=Q(\vec{a})$ положительно определена. С помощью квадратичной формы можно ввести важное понятие единичного вектора $\vec{e}$, такого, что $Q(\vec{e})=1$. Билинейность формы означает, что она линейна по каждому из своих векторных аргументов, например по $\vec{a}$

$$(\lambda\vec{a}\vec{b})=\lambda(\vec{a}\vec{b}),\ ((\vec{a}+\vec{a}\,')\vec{b})=(\vec{a}\vec{b})+(\vec{a}\,'\vec{b}). \qquad (1.33)$$

Аналогичными свойствами билинейная форма Q обладает относительно аргумента $\vec{b}$.

Задание билинейной формы $Q(\vec{a},\vec{b})$ позволяет определить длину вектора $\vec{a}$ как

$$|\vec{a}|=\sqrt{Q(\vec{a})}=\sqrt{(\vec{a}\vec{a})}=\sqrt{\vec{a}^2}, \qquad (1.34)$$

расстояние между точками A и B – как длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{1.35}$$

Теперь зададимся вопросом: «К чему сведутся преобразования (1.32) в двумерном пространстве, если мы потребуем, чтобы они оставляли неизменными расстояния между точками (длины векторов) и углы между векторами? Или, по-другому, к чему сведутся эти преобразования, когда они будут оставлять неизменным скалярное произведение двух векторов?» Ответ состоит в том, что они сведутся к преобразованиям

$$\vec{a}' = O\vec{a} + \vec{d}, \tag{1.36}$$

где матрица

$$O = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

есть матрица поворотов евклидовой плоскости, а вектор $\vec{d}$ – вектор, определяющий сдвиги в этом пространстве. Таким образом, общие преобразования (1.32), в которых в случае двумерного линейного аффинного пространства единственным требованием, предъявляемым к матрице, было требование, чтобы ее определитель отличался от нуля, и которая в силу этого зависела от четырех параметров в случае евклидового двумерного пространства, сводятся к матрице вращений и зависят только от одного параметра. Сказанное подчеркивает разницу между двумя данными пространствами.

З а д а ч а. Проверьте, что множество вещественных 2×2-матриц удовлетворяет первой группе аксиом линейного векторного пространства. Что играет роль составляющих (компонентов) векторов в таком пространстве?

Глава 2

ФИЗИКА И ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Кинематика точки на евклидовой плоскости

Рассмотрим кинематику точки на евклидовой плоскости. Определим основные понятия. К таким, прежде всего, относятся перемещение, скорость, ускорение. Все перечисленные величины являются векторами, и поскольку рассматривается движение точки на плоскости, то очевидно это будут векторы заданные на плоскости, т. е. в двумерном евклидовом пространстве.

В отличие от геометрии в физике движение рассматривается как процесс изменения во времени. Так, в частности, механическое движение определяется как процесс изменения положения точки или тела с течением времени относительно некоторой заданной системы отсчета. Как видно, такое определение подчеркивает относительный характер механического движения. Очевидно, движение точки можно задать ее меняющимся со временем радиус-вектором $\vec{r}(t)$. Иными словами, описывающий движение радиус-вектор есть функция времени.

Напомним, что радиус-вектор точки $\vec{r}(t)$ – это вектор, соединяющий начало координат и рассматриваемую точку в определенный момент времени t. Как и всякий вектор, в декартовой системе координат он может быть задан двумя проекциями на оси прямоугольной декартовой системы координат в виде $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$. В своем движении материальная точка (конец ее радиус-вектора) описывает некоторую кривую, которая называется траекторией точки. Если в момент времени t_1 движущаяся материальная точка занимала положение на траектории своего движения, совпадающее с положением точки A с радиус-вектором

$\vec{r}(t_1) = \{x(t_1), y(t_1)\}$, а в момент времени t_2 – положение, совпадающее с положением точки B с радиус-вектором $\vec{r}(t_2) = \{x(t_2), y(t_2)\}$, то перемещением рассматриваемой материальной точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$ называется вектор $\Delta\vec{r}$, равный разности радиус-векторов данной материальной точки в моменты времени t_2 и t_1 соответственно, как это изображено на рис. 11.

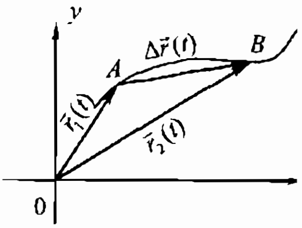


Рис. 11

Согласно ранее сформулированным правилам вычитания векторов

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \{x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1)\} = \{\Delta x(t), \Delta y(t)\}. \tag{2.1}$$

Тогда средней скоростью материальной точки называется вектор, который определяется как

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}. \tag{2.2}$$

Важной кинематической характеристикой движения является вектор мгновенной скорости, определяющийся как предел, к которому стремится отношение перемещения к отрезку времени, за который оно совершено при стремлении этого отрезка времени к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right\} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right\} = \{v_x, v_y\}. \tag{2.3}$$

Следует сказать, что предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, в результате которого произошло приращение этой функции, при стремлении приращения аргумента к нулю называется производной функции. Процедура взятия производных от функций по их аргументам в математике называется дифференцированием. Правила дифференцирования, необходимые для чтения данной книги, приведены в Приложении 2.

В результате дифференцирования вектора перемещения материальной точки на евклидовой плоскости по времени получается двумерный вектор мгновенной скорости, т. е. значение скорости материальной точки в данный момент времени. Как видно из рис. 11, вектор мгновенной скорости по направлению совпадает с касательной к траектории материальной точки.

З а д а ч а. Пользуясь определением производной, найдите мгновенную скорость материальной точки, движущейся так, что ее радиус-вектор меняется по закону $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются постоянными, не зависящими от времени векторами.

2.2. Инерциальные системы отсчета и преобразования Галилея

Пусть материальная точка движется относительно некоторой заданной системы отсчета K, с которой связана декартова система координат, в которой ее радиус-вектор $\vec{r}$ меняется с течением времени согласно определенному закону, т. е. $\vec{r}(t) = \{\, x(t), y(t)\,\}$. Пусть система отсчета K движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно другой такой же системы отсчета K' таким образом, что ее координатные оси все время остаются параллельными соответствующим осям системы K'. То есть совершается параллельный перенос системы K относительно системы K'. В этом случае изменение положения системы K относительно K' вполне определяется перемещением $\vec{r}_0$ начала координат системы K относительно K'.

При этом очевидно, что $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\} = \vec{v}_0 t = \{v_{0x}t, v_{0y}t\}$. Следует отметить, что вектор называется постоянным (в данном случае постоянным в смысле независимости от времени), когда он с течением времени не меняет своей длины и не изменяется по направлению. Тогда, как видно из рис. 12, радиус-вектор рассматриваемой материальной точки $\vec{r}'(t)$ в любой момент времени t в системе отсчета K' будет равен

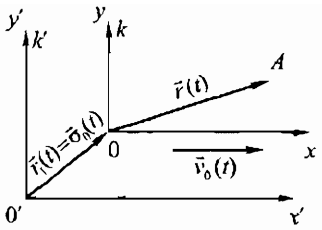


Рис. 12

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t = \{x'(t), y'(t)\} = \{x(t) + v_{0x}t, y(t) + v_{0y}t\} \tag{2.4}$$

или в покомпонентной записи

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + v_{0x}t, \\ y'(t) &= y(t) + v_{0y}t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Выражения (2.4), (2.5) называются преобразованиями Галилея. Они связывают уравнение $\vec{r}'(t)$, определяющее движение материальной точки, заданное в одной системе отсчета, с уравнением движения $\vec{r}(t)$ в другой, которая движется относительно первой с постоянной скоростью. Системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью, называются инерциальными.

Определим, опираясь на формулы (2.4), (2.5), как связаны между собой мгновенные скорости материальной точки в системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью. Для этого возьмем производную по времени от выражений (2.4), (2.5). В результате получим

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v}(t) + \vec{v}_0. \tag{2.6}$$

Выражение (2.6), записанное в проекциях на оси декартовых систем координат, связанных с системами отсчета K и K', представится как

$$\begin{aligned} v'_x(t) &= \frac{dx'(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + v_{0x} = v_x(t) + v_{0x}, \\ v'_y(t) &= \frac{dy'(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + v_{0y} = v_y(t) + v_{0y}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Часто в литературе встречается запись выражений (2.4)–(2.7), соответствующих случаю движения системы отсчета (параллельного ее переноса) вдоль оси x', что несколько упрощает рассмотрение. В этом случае $\vec{v}_0 = \{v_0, 0\}$. Очевидно, что при таком выборе движения системы отсчета общность рассмотрения не нарушается.

З а д а ч а. Обоснуйте, почему выбор направления скорости движения системы отсчета K вдоль оси x' не нарушит общность описания движения материальной точки относительно подвижной K и неподвижной K' систем отсчета.

В заключение отметим, что скорость

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) - \vec{v}_0 \qquad (2.8)$$

называется относительной мгновенной скоростью материальной точки.

2.3. Двумерное линейное пространство скоростей

Формула сложения скоростей, следующая из преобразований Галилея (2.6), с одной стороны, отражает тот факт, что для скоростей в этом случае имеет место правило треугольника (или параллелограмма) двумерного пространства Евклида, а с другой – придает физический смысл сложению скоростей. Нетрудно проверить, что все аксиомы линейного векторного пространства, сформулированные в параграфе 1.6, справедливы для скоростей, определенных формулой (2.3).

Важным обстоятельством является также то, что преобразования движений (1.36), введенные нами для евклидового пространства, действуют на скорости, определенные (2.3). Преобразования сдвига скоростей (2.6), (2.7), как уже было сказано, возникают вследствие преобразований Галилея, а преобразования вращений переносятся на скорости при вращениях системы отсчета без изменений, так как время при вращениях остается неизменным. Преобразования вращений не затрагивают времени. Таким образом, можно ввести скалярное произведение векторов скорости, которое также не будет меняться при преобразованиях скоростей, и, в частности, можно ввести длину (модуль) вектора мгновенной скорости на основе данного скалярного произведения. При этом линейное пространство скоростей наделяется всеми атрибутами двумерного евклидового пространства. Мы ввели двумерное евклидово пространство скоростей, однако в механике Ньютона оно, вообще говоря, является трехмерным, о чем будет идти речь ниже.

Теперь ответим на вопрос: «Зачем нужно вводить представление о пространстве скоростей?» Ответ на данный вопрос заключается в том, что мгновенные скорости материальной точки вместе с ее координатами определяют состояние механического движения точки. И следовательно, знание мгновенных скоростей точек столь же важно при описании их механического движения, как и знание их координат. И именно к пространству скоростей относится сравнение их по абсолютной величине и все операции над ними как над векторами, так же, как и определение самой абсолютной величины. В пространстве положений (координатном пространстве) материальной точки мгновенные скорости задаются точкой приложения и направлением.

2.4. Ускорение материальной точки. Пространство ускорений

С формальной точки зрения ускорение материальной точки, движущейся по плоскости, можно найти, заменив в определении скорости радиус-вектор точки на ее вектор мгновенной скорости. Действительно, вектор ускорения характеризует изменение вектора скорости с течением времени. Данный вектор можно назвать скоростью изменения скорости. Если вектор скорости меняется с течением времени, то его конец в пространстве скоростей движется подобно материальной точке в координатном пространстве и описывает некоторую кривую (рис. 13). Данная кривая

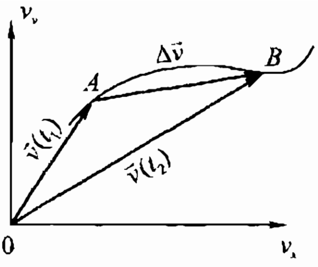


Рис. 13

называется годографом и является аналогом траектории материальной точки.

Если в момент времени t_1 конец вектора скорости занимал положение на годографе, совпадающее с положением точки A с вектором скорости $\vec{v}(t_1) = \{v_x(t_1), v_y(t_1)\}$, а в момент времени t_2 – положение, совпадающее с положением точки B с вектором скорости $\vec{v}(t_2) = \{v_x(t_2), v_y(t_2)\}$, то разностью скоростей за время $\Delta t = t_2 - t_1$ является вектор $\Delta\vec{v}$, равный разности скоростей рассматриваемой материальной точки в моменты времени t_2 и t_1 соответственно, как это изображено на рис. 13. Согласно ранее сформулированным правилам вычитания векторов:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \{v_x(t_2) - v_x(t_1), v_y(t_2) - v_y(t_1)\} = \{\Delta v_x(t), \Delta v_y(t)\}. \tag{2.9}$$

Тогда средним ускорением материальной точки называется вектор, который определяется как

$$\vec{w}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \left\{\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right\}. \tag{2.10}$$

Вектор мгновенного ускорения определяется как предел, к которому стремится отношение изменения скорости к отрезку времени, за который оно совершено при стремлении этого отрезка времени к нулю:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right\} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left\{\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right\} = \{w_x, w_y\}. \tag{2.11}$$

В силу того что время в механике Ньютона во всех системах отсчета одинаково и не зависит от выбора систем отсчета, линейное пространство скоростей, очевидно, влечет за собой линейность пространства ускорений. Для векторов ускорений справедливо правило сложения векторов пространства Евклида. Именно в этом пространстве векторы ускорений определены с точностью до параллельных переносов. В пространстве положений материальной точки или тела операции над ними диктуются операциями, допустимыми над векторами сил, вызывающих данные ускорения.

Из определения мгновенного ускорения (2.11) видно, что преобразования вращений в пространстве скоростей вызовут такие же вращения в пространстве ускорений; в этом свойства пространства скоростей и пространства ускорений совпадают. То есть пространство ускорений, как и должно быть, изотропно.

З а д а ч а. Уравнением какой кривой описывается годограф точки, движущейся по окружности с постоянным (не зависящим от времени) модулем скорости?

2.5. Второй закон Ньютона для материальной точки на плоскости

Рассмотрим основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) на евклидовой плоскости и исследуем свойства уравнения, выражающего этот закон относительно допустимых преобразований плоскости (1.36). Как известно, второй закон Ньютона гласит: мгновенное ускорение материальной точки прямо пропорционально силе, приложенной к данной точке в данный момент времени, и обратно пропорционально массе точки. Данное утверждение можно записать в векторной форме, используя двумерные векторы:

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.12)$$

или с учетом определения (2.11)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,. \qquad (2.13)$$

Выраженное через составляющие векторов, которые входят в данное уравнение, оно может быть записано как система двух уравнений

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x,$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y. \qquad (2.14)$$

Выражения (2.14) можно рассматривать также как уравнение для вектор-столбцов

$$m\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Такое представление особенно удобно для исследования его свойств по отношению к преобразованиям вращения системы координат. Действительно, как было сказано выше, при преобразованиях поворотов плоскости на угол φ мгновенное ускорение преобразуется как радиус-вектор рассматриваемой материальной точки. Следовательно, чтобы основное уравнение динамики не меняло своего вида, необходимо, чтобы вектор силы при поворотах системы отсчета и связанной с ней системы координат преобразовался точно так же, как вектор мгновенного ускорения. Таким образом, при преобразовании поворота евклидовой плоскости уравнение динамики сохранит свой вид, перейдет в такое же уравнение динамики, но для повернутых на угол φ двумерных векторов мгновенного ускорения и силы, вызывающей данное ускорение. Иными словами, при поворотах (1.37) уравнение (2.13) переходит в уравнение

$$m\vec{w}\,' = \vec{F}\,'(\vec{r}\,'), \qquad (2.16)$$

где

$$\vec{w}\,' = O\vec{w}, \quad \vec{r}\,' = O\vec{r}, \quad \vec{F}\,'(\vec{r}\,') = O\vec{F}(O\vec{r}),$$

или с учетом явного выражения (1.37) для матрицы вращений O имеем

$$\begin{pmatrix} w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}, \tag{2.17а}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.17б}$$

$$\begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}. \tag{2.17в}$$

Наличие матрицы, обратной к матрице поворота O, обеспечивает полную эквивалентность описания динамики материальной точки на основе второго закона Ньютона в системах отсчета, повернутых относительно друг друга. Следует также заметить, что если совершается последовательно несколько поворотов, то, как было показано выше, в результате получается также поворот и поэтому когда система отсчета, в которой записаны уравнения Ньютона, претерпевает такую последовательность поворотов, то в отношении ее справедлив вывод, только что нами сделанный.

Теперь рассмотрим, что произойдет со вторым законом Ньютона при сдвигах системы отсчета в пространстве. При сдвигах системы отсчета, относительно которой движется материальная точка, на постоянный, не зависящий от времени вектор $\vec{d}$ радиус-вектор точки преобразуется как

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) + \vec{d}\ .$$

При этом не изменяются мгновенные скорости относительно начальной и сдвинутой систем отсчета. Действительно, исходя из определения мгновенной скорости как производной от радиус-вектора материальной точки по времени получаем

$$\vec{v}\,'(t) = \frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)\,. \tag{2.18}$$

В силу равенства мгновенных скоростей (2.18) будут равны мгновенные ускорения, т. е.

$$\vec{w}'(t) = \vec{w}(t)\,. \qquad (2.19)$$

Тем самым доказано, что при сдвигах системы отсчета на постоянный вектор левые части уравнения (2.13) не меняются. Докажем, что и сила при таких преобразованиях не изменяется. При этом следует учесть, что сила, как правило, зависит от разности радиус-вектора точки, в которой в данный момент находится интересующая нас материальная точка, и радиус-вектора точки, со стороны которой на материальную точку оказывается силовое воздействие. Иными словами, сила представляется как функция $\vec{F}(\vec{r}-\vec{R})$, где $\vec{R}$ определяет положение источника силы, и естественно, что при одновременном сдвиге $\vec{r}$ и $\vec{R}$ их разность не изменится.

Заметим, что и при преобразованиях Галилея (2.4) разность $\vec{r}-\vec{R}$ также остается неизменной, а следовательно, не меняется и сила. Нетрудно понять, что и ускорение при преобразованиях Галилея не меняется. Действительно, следует учесть, что точка, соответствующая радиус-вектору $\vec{R}$, является фиксированной и ее удобно выбирать совпадающей с началом координат системы отсчета, которая подвержена преобразованию Галилея, т. е. движется с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ (2.6). Поэтому имеем

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t\,,$$

$$\vec{R}'(t) = \vec{R} + \vec{v}_0 t\,,$$

$$\vec{r}'(t) - \vec{R}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t - [\vec{R} + \vec{v}_0 t] = \vec{r}(t) - \vec{R}\,,$$

где учтено, что в движущейся системе отсчета $\vec{R}$ не зависит от времени. И время одно и то же во всех инерциальных системах отсчета, что справедливо для механики Ньютона. Так как скорость в неподвижной системе отсчета согласно (2.6):

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) + \vec{v}_0\,.$$

то, взяв производную по времени от обеих сторон данного выражения и с учетом независимости от времени скорости системы отсчета $\vec{v}_0$, опять получаем

$$\vec{w}'(t) = \vec{w}(t),$$

что и требовалось, и, следовательно, имеет место независимость второго закона Ньютона от выбора инерциальной системы отсчета, т. е.

$$m\vec{w}'(t) = m\vec{w}(t) = \vec{F}[\vec{r}\,'(t) - \vec{R}\,'(t)] = \vec{F}[\vec{r}(t) - \vec{R}(t)]\,. \quad (2.20)$$

Данное положение есть известный принцип относительности Галилея – классический принцип относительности, который также формулируется так: **все механические процессы при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.**

На материальную точку может оказываться действие со стороны ряда других материальных точек. Действие каждой из этих точек будет характеризоваться определенной силой. При этом, согласно третьему закону Ньютона, сила, действующая со стороны некоторой материальной точки на рассматриваемую нами материальную точку, будет направлена вдоль прямой, соединяющей данные точки. Каждая сила в соответствии со вторым законом Ньютона будет вызывать свое ускорение. Векторы ускорения, вызванные различными силами, будут направлены вдоль прямых, соединяющих рассматриваемую материальную точку и точку, со стороны которой на нее действует сила, и складываться по правилам, присущим векторам евклидового пространства, каковыми они, как было сказано выше, и являются. Следовательно, для согласованности уравнения, выражающего второй закон Ньютона, силы должны складываться по тем же правилам, а именно правилам треугольника или параллелограмма. Таким образом, имеет место принцип суперпозиции (сложения) для различных сил, действующих на материальную точку. Второй закон Ньютона при этом следует понимать как

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

где сила $\vec{F}$, стоящая в правой части уравнения, есть равнодействующая (векторная сумма) всех сил, действующих на материальную точку, т. е.

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k . \tag{2.21}$$

2.6. Абсолютно твердое тело в двумерном евклидовом пространстве

Материальная точка, понятие которой использовалось в предыдущих параграфах, является идеализацией, благодаря которой можно поставить в соответствие реальным движущимся предметам геометрический объект – точку двумерного евклидова пространства (евклидовой плоскости). Таким образом, мы обеспечили возможность математической формулировки задачи о механическом движении широкого класса реальных объектов. Для математической формулировки физических задач потребовалась идеализация. Напомним, что под материальной точкой понимается физическое тело, размерами которого можно пренебречь при рассмотрении определенного круга задач. Например, речь может идти о задачах, в которых рассматривается механическое движение тел, линейные размеры которых малы по сравнению с расстояниями до них и расстояниями, ими проходимыми. В этом и состоит идеализация.

Другой важной идеализацией, используемой в механике, является понятие абсолютно твердого тела. Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется при его движении. То есть если A и B – две точки абсолютно твердого тела, а их радиус-векторы в некоторой системе отсчета соответственно равны $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, то расстояние S_{AB} между ними равно

$$S_{AB}=\sqrt{(\vec{r}_A-\vec{r}_B)^2}\ . \qquad (2.22)$$

Выражение под корнем представляет собой скалярный квадрат вектора, являющегося разностью радиус-векторов двух точек. Как было показано в параграфе 1.3, скалярное произведение векторов не меняется при преобразованиях движения плоскости пространства Евклида, т. е. при вращениях и сдвигах системы отсчета. В этом собственно и состоит главное в определении абсолютно твердого тела. Но, как сказано в том же параграфе, геометрические фигуры на плоскости обладают такими свойствами. Поэтому идеализация – абсолютно твердое тело позволяет реальному физическому телу поставить в соответствие геометрическую фигуру, в данном случае на плоскости, что в свою очередь обеспечивает математизацию многих задач о механическом движении физических тел, деформацией которых при их движении можно пренебречь.

Отметим, что и система отсчета также представляет собой абсолютно твердое тело, ибо остаются неизменными при ее движениях углы между координатными осями и масштабы на осях. Углы выражаются через скалярные произведения векторов, являющихся их сторонами, а масштабы задаются отрезками между метками на осях. И те и другие по определению не меняются при поворотах и сдвигах системы координат.

2.7. Равновесие абсолютно твердого тела на плоскости. Сходящаяся система сил на плоскости

Разделом механики, в котором эффективно используется векторное исчисление и геометрические методы, является статика. Статика рассматривает задачу равновесия материальной точки или абсолютно твердого тела под действием системы приложенных к (ней) нему сил. Рассмотрим условие равновесия абсолютно твердого тела на плоскости евклидового пространства.

Будем считать тело находящимся в равновесии, если преобразованием Галилея его можно отнести к инерциальной системе отсчета, в которой оно покоится либо вращается относительно покоящегося в этой системе центра масс с постоянной угловой скоростью. Более строгое определение состояния равновесия будет дано в главе 4.

Определим, что мы будем понимать под понятием состояния покоя тела. Для этого дадим определение степеней свободы абсолютно твердого тела. Под степенями свободы понимаются допустимые независимые движения тела. У абсолютно твердого тела на плоскости (у плоской геометрической фигуры) три степени свободы. Две связаны с его поступательным движением (сдвигами плоскости), при котором прямая, проведенная через две точки тела, остается параллельной сама себе, и одна вращательная (связана с поворотами плоскости). Произвольное движение абсолютно твердого тела можно рассматривать как комбинацию поступательного его движения и вращения тела относительно точки, находящейся внутри тела – центра масс. Как легко видеть, число степеней свободы абсолютно твердого тела на плоскости вполне определяется допустимыми преобразованиями плоскости, в данном случае плоскости Евклида. Отметим, что материальная точка обладает только двумя поступательными степенями свободы. Говорить о вращении точки бессмысленно.

Теперь можно пояснить, что следует понимать под состоянием покоя тела. Тело покоится, когда оно не совершает ни поступательного ни вращательного движения. Таким образом, состояние покоя является частным случаем состояния равновесия тела.

Точка находится в состоянии равновесия, если движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Силы, действующие на точку или тело, могут изменить их состояние. Рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять система сил, действующих на тело, чтобы тело оставалось в состоянии покоя. Для решения данной задачи рассмотрим действия над векторами сил, которые можно осуществлять в евклидовом пространстве, и к чему в результате может быть приведена произвольная система сил, приложенных к телу. Что же касается материальной точки, то она будет находиться в равновесии, если равнодействующая к ней приложенных сил (2.21) равна нулю. Система сил, приложенных к точке, называется сходящейся системой сил.

Следует заметить, что действие силы, приложенной к какой-либо точке тела, зависит от ее направления и от точки ее приложения. Так, сила, приложенная к телу, например моховику, имеющему неподвижную точку при закрепленной оси, в точке, не лежащей на оси, и направленная вдоль прямой линии, не проходящей через ось моховика, будет, очевидно, вызывать его поворот (вращение), если до этого маятник не вращался, либо изменять его состояние вращения в случае, когда маятник вращался до действия силы. В то время как сила той же величины и направления, но приложенная к точке на оси данного моховика, не вызовет никакого изменения движения. Указанный пример демонстрирует то, что вектор силы нельзя просто параллельно переносить в пространстве положений тела. Получившаяся в результате такого переноса система сил не будет эквивалентна исходной. Эквивалентность здесь понимается в смысле одинаковости результата действия силы на тело. Поскольку в пространстве положений тела силы нельзя переносить параллельно без дополнительных построений, то система сил, приложенных к телу, вообще говоря, не всегда сводится к сходящейся. Тем не менее система сил, приложенных к телу, может быть преобразована, но таким образом, чтобы ее действие оставалось прежним. Полученная в результате такого преобразования система сил и будет эквивалентной исходной.

Прежде чем описать допустимые преобразования над силами, приложенными к телу, в результате которых система приводится к эквивалентной, введем величину, характеризующую вращающее действие силы на тело. Такой величиной является момент силы.

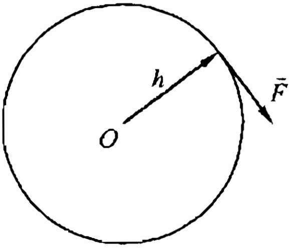


Рис. 14

Момент силы относительно некоторой точки в двумерном пространстве определяется как произведение модуля силы на плечо силы.

Плечом силы называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент силы на направление действия силы. Таким образом, формула для момента силы будет иметь вид (рис. 14)

$$M = Fh. \qquad (2.23)$$

В двумерном пространстве данная величина является скаляром, однако в зависимости от направления силы может отличаться знаком. Из определения момента силы следует, что при перенесении вектора силы вдоль прямой линии, на которой лежит вектор силы, ее момент не меняется. Перенос силы вдоль прямой, на которой лежит ее вектор, в пределах тела, к которому сила приложена, также не изменит ее влияния на поступательное движение тела. Данная сила будет вызывать ускорение вдоль направления своего действия, такое же, что и в точке до переноса. Таким образом, одним из преобразований сил, при которых их система, приложенная к телу, остается эквивалентной, является сдвиг векторов силы вдоль прямых, на которых они лежат.

Вторым преобразованием эквивалентности является перенос вектора силы параллельно себе в другую точку тела, если к точке, в которую он переносится, также приложить силу той же абсолютной величины, но противоположного направления. Описанными выше преобразованиями эквивалентности любая система сил на плоскости может быть приведена к равнодействующей силе, приложенной, например, к центру масс тела (фигуры) и результирующему моменту сил относительно центра масс. Теперь можно сформулировать условие равновесия тела на плоскости.

Если в некоторой системе отсчета тело покоилось, то оно будет сохранять состояние покоя в том случае, если результирующая сил, приложенных к телу, и результирующий момент сил равны нулю:

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j = 0, \qquad (2.24)$$

$$M = \sum_i M_i = \sum_i h_i F_i = 0. \qquad (2.25)$$

В выражениях (2.24) суммирование ведется по всем силам, приведенным преобразованиями эквивалентности к центру масс, а в выражениях (2.25) – по всем моментам силы относительно центра масс. Уравнения (2.24), (2.25) могут быть в проекциях на оси координат

$$F_x = \sum_j F_{xj} = 0, \qquad (2.26а)$$

$$F_y = \sum_j F_{yj} = 0, \qquad (2.26б)$$

$$M = \sum_i M_i = \sum_i h_i F_i = 0. \qquad (2.27)$$

Число уравнений, выражающих условие равновесия, равно числу степеней свободы тела на плоскости. Из определения (2.23) видно, что момент силы равен нулю, когда плечо силы равно нулю. Поэтому если на тело действуют силы, векторы которых лежат на прямых, пересекающихся в центре масс, относительно которого определяются моменты сил, действующих на тело, то моменты указанных сил равны нулю и условие равновесия тела сведется к равенству нулю равнодействующей сходящейся системы сил, приложенных к телу (2.24), или к условию (2.26,а,б) в проекциях на оси координат.

З а д а ч и. 1. Напишите в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат условие равновесия тела под действием сходящейся системы из пяти сил, одинаковых по абсолютной величине, векторы которых направлены в вершины правильного пятиугольника.

2. Проверьте выполнение условия равенства нулю результирующей системы сил из предыдущей задачи геометрическими построениями.

3. У стены стоит лестница. Коэффициент трения лестницы о стену 0,4, коэффициент трения лестницы о землю 0,5, центр тяжести лестницы (центр масс 0) находится на середине ее длины. Определите наименьший угол α, который может образовать лестница с горизонтом, не соскальзывая.

4. На веревочной петле в горизонтальном положении висит стержень. Нарушится ли равновесие, если справа от петли стержень согнуть?

5. Докажите, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан.

Задачи 3–5 взяты из: Гольдфарб Н. И. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высш. шк., 1973.

Глава 3

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Комплексные числа впервые возникли в связи с вопросами решения квадратных уравнений в работах итальянских математиков в XVI в. и на протяжении почти двух веков являлись причиной противоречивых мнений ученых относительно возможности их сопоставления реальным объектам, как это было в случае, например, с положительными и отрицательными числами. И только геометрическая интерпретация комплексных чисел первоначально в терминах евклидовой плоскости, а затем представление их алгебры как исчисления пар действительных чисел продемонстрировали научному сообществу, что комплексные числа вполне вписываются в требования сторонников того, чтобы любые математические структуры обязательно находили соответствие в реальном мире, в природе. И поскольку евклидова геометрия в данный период была единственной и однозначно связывалась с окружающим миром, то естественно, что интерпретация комплексных чисел в терминах плоскости Евклида явилась исходным пунктом в широком признании и понимании комплексных чисел.

3.1. Определение комплексных чисел

Комплексными числами называются выражения вида $z = a + ib$, где a и b – вещественные числа, а символ i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$, причем следует учесть, что i коммутирует (перестановочно) с числами a и b. Число a называется действительной частью комплексного числа z, b – его мнимой частью. Для комплексных чисел z и z' вводятся операции сложения и умножения:

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = a + a' + i(b + b'), \tag{3.1}$$

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b). \tag{3.2}$$

Как следует из (3.2), умножение двух комплексных чисел осуществляется как умножение двух двучленов с учетом определения и свойств мнимой единицы i.

Отметим, что если в выражениях (3.1) и (3.2) положить $b = b' = 0$, то вместо z и z' получим вещественные числа a и a', а правила сложения и умножения (3.1) и (3.2) перейдут в сложение и умножение вещественных чисел. Нетрудно проверить, что правила сложения и умножения комплексных чисел (3.1) и (3.2) обладают свойством коммутативности (перестановочности) и ассоциативности (сочетательности). Наконец, справедлив дистрибутивный (распределительный) закон, устанавливающий связь между этими действиями:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''. \tag{3.3}$$

Каждому комплексному числу z ставится в соответствие число $z^* = a - ib$, называемое комплексно сопряженным, и таким образом для комплексных чисел вводится операция (*)-комплексного сопряжения.

Произведение комплексного числа z на число z^*, комплексно ему сопряженное, даст вещественное положительное число:

$$zz^* = a^2 + b^2. \tag{3.4}$$

Число

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3.5}$$

называется модулем комплексного числа. Для модуля произведения двух комплексных чисел z и z' имеет место тождество

$$|zz'| = |z||z'|. \tag{3.6}$$

З а д а ч и. 1. Покажите, что комплексные числа образуют двумерное вещественное линейное пространство.

2. Напишите уравнение окружности в комплексных числах.

3.2. Представление комплексных чисел 2×2-матрицами и геометрическая интерпретация комплексных чисел

С учетом того что комплексному числу соответствует двумерный вектор, получим представление комплексного числа в виде 2×2-матрицы. Действительно, в произведении комплексных чисел $z''=zz'$.

Представим $z''=a''+ib''$ в виде двумерного вектор-столбца $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}$, а z' – в виде вектор столбца $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ и воспользуемся правилом матричного умножения. В результате получим для z представление в виде 2×2-матрицы

$$z \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Легко проверить, что сложению и умножению матриц (3.7) соответствуют сложение и умножение отвечающих им комплексных чисел, причем свойства сложения и умножения матриц (3.7) совпадают со свойствами сложения и умножения комплексных чисел.

Все остальные свойства комплексных чисел также можно сформулировать на языке матриц (3.7). Например, комплексно-сопряженному числу z^* соответствует матрица

$$z^* \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

получаемая из матрицы (3.7) транспонированием, т. е. заменой столбцов на строчки или наоборот. Как видим, транспонирование приводит к замене знака перед b на противоположный и это соответствует определению сопряжения комплексного числа.

Определим комплексное число z^{-1}, обратное комплексному числу z, из условия $zz^{-1}=1$. Умножив обе части данного уравнения на z^* и разделив на квадрат модуля zz^*, являющийся обычным числом, получаем, что

$$z^{-1}=\frac{z^*}{zz^*}. \tag{3.9}$$

Определение комплексного числа z^{-1} решает задачу определения операции деления комплексных чисел. Данная задача эквивалентна решению уравнения

$$zz'=z''$$

относительно неизвестного z' при заданных z и z''. В соответствии с вышесказанным решение данного уравнения примет вид

$$z'=z^{-1}z''=\frac{z^*z''}{zz^*}. \tag{3.10}$$

Взяв определитель матриц (3.7) и (3.8) (см. (1.30)), убедимся, что он совпадает с квадратом модуля комплексного числа. Зная определитель матрицы (3.7), найдем обратную ей матрицу, которая, очевидно, соответствует обратному комплексному числу, т. е.

$$z^{-1}\to\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

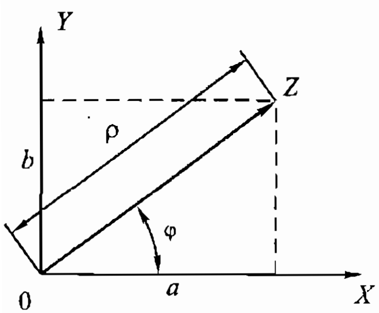


Рис. 15

Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что комплексным числам ставятся в соответствие точки евклидовой плоскости – двумерные векторы (рис. 15).

При этом вещественная часть комплексного числа a откладывается по оси абсцисс, а коэффициент b

при мнимой единице – по оси ординат. Переходя к полярным координатам ρ, φ на плоскости X, Y, получим тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}, \tag{3.12}$$

где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = a/b$; $\rho\cos\varphi = a$; $\rho\sin\varphi = b$. Здесь нами введена также новая функция $e^{i\varphi}$, которая называется экспоненциальной. Угол φ называется аргументом комплексного числа. Как следует из (3.12),

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.13}$$

Данное выражение будем рассматривать как определение экспоненциальной функции $e^{i\varphi}$. Число e, подобно числу π, является трансцендентным и содержит бесконечную последовательность цифр после запятой. Приближенно $e = 2,72$ и называется в математике основанием натурального логарифма. Впрочем, знание последнего обстоятельства для дальнейшего изложения не существенно. Отметим только, что комплексное число (3.13) при изменении φ в интервале $[0, 2\pi]$ описывает окружность единичного радиуса.

Задачи. 1. Докажите, что $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i2\pi} = 1$.

2. Выразите тригонометрические функции синус и косинус через экспоненциальную функцию.

Представление комплексного числа z, записанного в тригонометрической форме (3.12) в виде матрицы (3.7) в координатах ρ, φ, есть матрица

$$\rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Очевидно, что 2×2-матрица (3.14) есть матрица поворота на угол φ в плоскости X, Y (см. (1.21), (1.22)), умноженная на модуль комплексного числа ρ. Следовательно, геометрический смысл произведения двух комплексных чисел

zz' сводится к повороту (например, вектора, соответствующего z') на угол φ и растяжению его длины (модуля) ρ' в ρ раз. В справедливости сказанного можно убедиться перемножением комплексных чисел, представленных в форме (3.12), согласно правилам (3.2), либо перемножением их, представленных в форме матриц (3.14), согласно правилам умножения матриц с учетом коммутативности умножения матрицы на число – модуль комплексного числа в данном случае. В этом также можно убедиться с помощью геометрических построений, используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

З а д а ч а. Убедитесь, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются.

В частности, решив предыдущую задачу, получим следующее свойство экспоненциальных функций:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{3.15}$$

т. е. при умножении экспоненциальных функций их аргументы складываются.

3.3. Возведение в степень комплексных чисел. Формула Муавра

Для возведения комплексного числа z в степень n, где n – положительное целое число, справедлива формула Муавра

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}. \tag{3.16}$$

С учетом решения предыдущей задачи формула Муавра для целых положительных n легко решается методом индукции. Проверяем справедливость формулы (3.16) для $n=2$, $n=3$, предполагаем ее справедливость для произвольного n и доказываем ее справедливость для $n+1$. Действительно, для $n=2$ имеем

$$z^2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\rho^2[(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i2(\cos\varphi\sin\varphi)] = \qquad (3.17)$$
$$\rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Для $n = 3$ получаем

$$z^3 = z^2 z = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\rho^3[(\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi) + \qquad (3.18)$$
$$i(\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi)] = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Наконец, для $n + 1$ получаем

$$z^{n+1} = z^n z = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\rho^{n+1}[(\cos n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin n\varphi) + \qquad (3.19)$$
$$(\cos n\varphi\sin n\varphi + \sin n\varphi\cos\varphi)] =$$
$$\rho^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi].$$

Отметим, что при выводе формул (3.17)–(3.19) использовались формулы сложения для тригонометрических функций (1.20а) (1.21б).

Полученных нами знаний достаточно, чтобы убедиться в том, что решением уравнения в комплексных числах

$$z^n - 1 = 0 \qquad (3.20)$$

будет число

$$\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = e^{\frac{i2\pi k}{n}}, \qquad (3.21)$$

где $k = 1, 2, ..., n-1$.

Уравнение (3.20) преобразуем в уравнение

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1) = 0, \qquad (3.22)$$

откуда следует, что отдельно

$$z - 1 = 0,$$

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0. \qquad (3.23)$$

Решениями (3.23) по-прежнему являются выражения (3.21) с $0 \le k < n-1$.

З а д а ч и. 1. Предложить доказательство из статики того, что решением уравнения (3.23) являются выражения (3.21).

2. Представить уравнение материальной точки, движущейся по окружности радиуса R с постоянной по модулю линейной скоростью v в виде комплексного числа.

3.4. Алгебра комплексных чисел

Комплексные числа образуют математическую структуру, которая называется алгеброй. Прежде всего дадим определение алгебры. Алгеброй называется линейное пространство A, для элементов которого задана операция умножения. То есть если a и b – два элемента, принадлежащие алгебре A, что в математике обозначается как a, $b \in A$, то их произведение $ab \in A$ обладает следующими свойствами:

$$a(b+c) = ab + ac\,, \tag{3.24а}$$

$$(a+b)c = ac + bc\,, \tag{3.24б}$$

$$\alpha(ab) = a(\alpha b) = (\alpha a)b \tag{3.24в}$$

для любых $a, b, c \in A$ и α, принадлежащей основному полю, над которым задана определяемая алгебра. Алгебра A называется вещественной, если A – вещественное линейное пространство и α в этом случае – любое вещественное число. То есть множество действительных чисел и есть основное поле, над которым определена алгебра. Возможно определение линейных пространств над другими полями, например комплексных чисел, однако мы ограничимся алгеброй над полем вещественных чисел.

Очевидно, комплексные числа образуют двумерную вещественную алгебру и одномерную комплексную алгебру, вещественные числа – одномерную вещественную алгебру.

Под размерностью алгебры понимается размерность линейного пространства A (см. параграф 1.6). Алгебра называется коммутативной, если операция умножения, определенная в ней, коммутативна, и ассоциативной, если операция умножения ассоциативна.

З а д а ч а. Какая из ранее введенных в данной книге математических структур является некоммутативной алгеброй?

Алгебра называется алгеброй с делением, если в ней всегда разрешимо относительно x уравнение

$$ax = b\,, \tag{3.25}$$

где $a, x, b \in A$. Наконец, алгебра называется нормированной, если в ней определена норма, т. е. каждому элементу алгебры поставлено в соответствие положительное вещественное число. Алгебры вещественных и комплексных чисел являются коммутативными, ассоциативными, нормированными алгебрами с делением. Норма (абсолютная величина или модуль) (3.5) для комплексного числа вводится с помощью операции комплексного сопряжения. Норма вещественного числа определяется следующим образом:

$$|a| = \sqrt{a^2}\,. \tag{3.26}$$

Для нормы вещественных чисел, так же как и для нормы комплексных, справедливо соотношение (3.6).

Отметим разницу между двумерными векторами вообще и двумерными векторами, которые ставятся в соответствие комплексным числам, в частности. Двумерные векторы являются элементами линейного пространства, которое является более широким понятием, чем алгебра. Введение произведения в линейном пространстве сужает его. Разницу между линейным пространством вообще и множеством комплексных чисел можно подчеркнуть, прибегнув к понятию допустимых линейных преобразований в этих пространствах.

Самое общее линейное преобразование для комплексных чисел (элементов одномерного линейного комплексного пространства) задается умножением комплексного числа z на некоторое комплексное число z' с последующим прибавлением к результату умножения некоторого комплексного числа t:

$$z'' = z'z + t. \tag{3.27}$$

Геометрический смысл такого преобразования сводится к тому, что преобразуемый двумерный вектор, соответствующий z, поворачивается на угол φ', являющийся аргументом $z' = a' + ib'$, где $\operatorname{tg}\varphi' = b'/a'$, растягивается в $\rho' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$ с последующим сдвигом в комплексной плоскости на t. Такое преобразование задается, как нетрудно подсчитать, четырьмя параметрами. В двумерном вещественном линейном пространстве, на элементы которого – вектор-строчки (x, y) или вектор-столбцы не накладывается никаких дополнительных ограничений (например, чтобы они образовывали алгебру), самым общим линейным преобразованием будет преобразование вида

$$x' = \alpha x + \beta y + c,$$

$$y' = \gamma x + \delta y + d, \tag{3.28}$$

которое можно записать в векторной форме

$$X' = AX + B, \tag{3.29}$$

где $X' = \begin{pmatrix} x' \\ \overline{y'} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ \overline{y} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c \\ \overline{d} \end{pmatrix}$ – двумерные вектор-столбцы; $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – произвольная 2×2-матрица с вещественными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и с единственным накладываемым на нее ограничением $\det A \neq 0$ (det обозначает определитель). Преобразование (3.29) зависит от шести параметров. Преобразования (3.27) и (3.29) отличаются по числу параметров в комплексном числе z' (3.27) и в матрице A (3.29).

Таким образом, на примере допустимых линейных преобразований можно видеть разницу, существующую между двумерным линейным пространством, двумерным пространством вообще и двумерным линейным пространством, соответствующим комплексным числам. Указанная разница является следствием задания операции умножения. Определение операции сопряжения для комплексных чисел эквивалентно определению нормы в алгебре комплексных чисел или заданию на двумерной плоскости расстояния между двумя произвольными точками. При этом говорят, что в двумерном пространстве задана метрика двумерного евклидового пространства. Если потребовать, чтобы преобразования (3.28), (3.29) сохраняли неизменным расстояние между точками двумерного евклидового пространства (длину вектора, соответствующего комплексному числу), то они сведутся к преобразованиям вращений (1.36), (1.37) и сдвигам. Такие преобразования называются движениями двумерной евклидовой плоскости и, как было показано выше, могут быть заданы для комплексных чисел с помощью операций, определенных только для них, а именно с помощью умножения комплексных чисел и их сложения. При этом вращение задается умножением на комплексное число единичного модуля.

3.5. Некоторые применения комплексных чисел в физике и математике

Применения комплексных чисел и комплексных функций вещественного и комплексного переменного в физике многочисленны и эффективны. Однако они требуют достаточно обширных и глубоких знаний в области теории функции комплексной переменной. Тем не менее приведенных выше сведений о комплексных числах достаточно, чтобы дать представление о некоторых важных применениях комплексных чисел в физике и математике. Одной из областей, где применение комплексных чисел особенно адекватно, является описание с их помощью гармонических колебаний.

Гармонические колебания и комплексные числа. Процесс, меняющийся со временем по гармоническому закону, описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{r}+\omega^2 r, \tag{3.30}$$

где две точки над r обозначают вторую производную по времени от $r(t)$.

Следует сказать, что уравнение (3.30) описывает различные физические системы, могущие совершать гармонические колебания и выражать различные физические законы. Так, например, уравнение данного типа описывает малые колебания математического и пружинного маятников и колебания в электрическом контуре. При этом в первых двух случаях уравнение (3.30) выражает второй закон Ньютона, а в случае электрического контура данное уравнение есть следствие второго правила Кирхгофа с учетом явлений самоиндукции и выражения для падения напряжения на конденсаторе. В случае колебаний пружинного и математического маятников r имеет смысл величины отклонения грузика от положения равновесия, а когда речь идет об электрических колебаниях в контуре, r имеет смысл величины электрического заряда на обкладках конденсатора. Важно понимать, что одни и те же математические уравнения и математические структуры (линейные векторные пространства, алгебры) могут описывать совершенно различные физические системы.

Решение уравнения (3.30) удобно представить в виде комплексного числа в экспоненциальной форме

$$r(t)=r_0 e^{\varphi(t)}=r_0 e^{i(\omega t+\alpha)}, \tag{3.31}$$

где модуль комплексного числа r_0 – амплитуда гармонического колебания, зависящая от времени; аргумент комплексного числа $\varphi(t)=\omega t+\alpha$ – фаза; α – начальная фаза гармонического колебания; ω – циклическая частота гармонического колебания. Тот факт, что выражение (3.31) удовлетворяет уравнению (3.30), легко проверить, используя правила дифференцирования экспоненциальной функции, приведенные в Приложении 2. Заметим также, что тригонометрические функции $\cos(\omega t+\alpha)$ и $\sin(\omega t+\alpha)$, связанные с экспоненциальной функцией (3.31) формулой (3.13), также удовлетворяют уравнению (3.30). Только данные функции и имеют непосредственный физический смысл. Однако введение комплексной формы записи, являясь эквивалентным вещественному описанию с помощью тригонометрических функций, обеспечивает компактность формул и, что более важно, открывает возможность использования новых методов описания и решения физических задач, связанных, например, с гармоническими их колебаниями. Одной из таких задач, которая весьма наглядно и изящно решается на основе геометрического представления комплексных чисел, является задача сложения гармонических колебаний.

Рассмотрим два гармонических колебания:

$$r_1(t)=r_{01}e^{i(\omega t+\alpha_1)} \text{ и } r_2(t)=r_{02}e^{i(\omega t+\alpha_2)}, \qquad (3.32)$$

совершающиеся с одинаковой циклической частотой ω, которые имеют амплитуды r_{01} и r_{02}, а также начальные фазы α_1 и α_2 соответственно. Каждое колебание на комплексной плоскости Z можно представить вектором в соответствии с геометрической интерпретацией комплексных чисел. Первому из колебаний поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{OA_1}$, второму – $\overrightarrow{OA_2}$ (рис. 16).

Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ имеет модуль r_{01} и аргумент, равный фазе колебания $\varphi_1(t)=\omega t+\alpha_1$, а вектор $\overrightarrow{OA_2}$ имеет модуль r_{02} и аргумент $\varphi_2(t)=\omega t+\alpha_2$. Угол α_{12} между векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ очевидно равен $\alpha_{12}=(\alpha_2-\alpha_1)$ и называется относительной фазой. Очевидно, каждый из построенных векторов вращается в комплексной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. В момент времени $t_0=0$ аргументы ком-

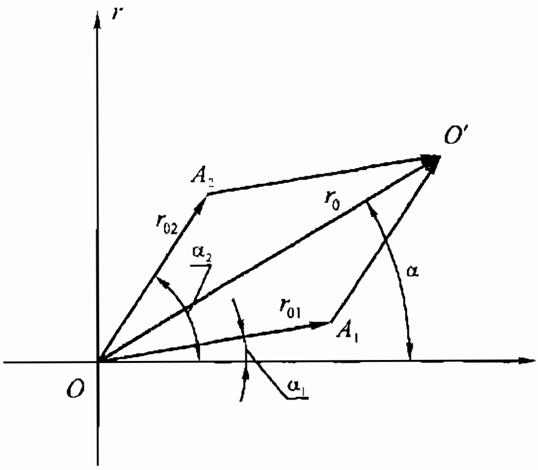


Рис. 16

плексных чисел (3.32) (углы поворота векторов $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ относительно оси абсцисс) равны α_1 и α_2 соответственно. Поскольку векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью, то их относительная фаза α_{12} не меняется с течением времени.

Суммой двух гармонических колебаний (3.32) будет геометрическая сумма двух векторов $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$. Вектор $\overline{OO'}$, являющийся суммой данных двух векторов, согласно правилу параллелограмма будет диагональю параллелограмма $OA_1O'A_2$, вращающегося в комплексной плоскости как твердое тело, не претерпевая деформаций. Соответствующее ему гармоническое колебание (3.22) полностью установим, определив его амплитуду и начальную фазу. Амплитуда r_0 данного колебания является модулем вектора $\overline{OO'}$ и определяется через амплитуды колебаний r_{01} и r_{02} согласно теореме косинусов:

$$r_0^2 = r_{01}^2 + r_{02}^2 - 2r_{01}r_{01}\cos[180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ r_{01}^2 + r_{02}^2 + 2r_{01}r_{01}\cos(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{3.33}$$

Для определения начальной фазы суммарного гармонического колебания запишем сумму векторов через их составляющие. Поскольку данные условия справедливы для любого момента времени, то достаточно их записать для момента $t_0 = 0$. В этом случае мы имеем

$$\left|\overrightarrow{OO'}\right| \cos\alpha = \left|\overrightarrow{OA_1}\right| \cos\alpha_1 + \left|\overrightarrow{OA_2}\right| \cos\alpha_2, \qquad (3.34а)$$

$$\left|\overrightarrow{OO'}\right| \sin\alpha = \left|\overrightarrow{OA_1}\right| \sin\alpha_1 + \left|\overrightarrow{OA_2}\right| \sin\alpha_2. \qquad (3.34б)$$

Разделив второе уравнение на первое и заменив модули векторов на соответствующие модули комплексных чисел для фазы α, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r_{01}\sin\alpha_1 + r_{02}\sin\alpha_2}{r_{01}\cos\alpha_1 + r_{02}\cos\alpha_2}. \qquad (3.35)$$

Таким образом, гармоническое колебание, являющееся суммой гармонических колебаний (3.32), также есть гармоническое колебание, которое представляется в виде комплексного числа

$$r = r_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \qquad (3.36)$$

где r_0 определяется из формулы (3.33), α – из формулы (3.35).

З а д а ч и. 1. Используя тригонометрическую форму гармонических колебаний (3.32) в виде косинуса (либо в виде синуса), складывая гармонические колебания как эти тригонометрические функции, численными расчетами покажите совпадение результатов, полученных выше, с результатами сложения данных тригонометрических функций.

2. Сформулируйте правило Ленца на языке фаз для переменного тока и э.д.с. самоиндукции катушки в электрическом колебательном контуре.

Заметим, что метод векторных диаграмм, некоторые аспекты которого рассмотрены выше, является одним из адекватных методов решения электротехнических задач.

Квантовая механика. Одной из основных величин квантовой механики является волновая функция. С помощью волновой функции в квантовой теории описывается чистое состояние физической системы, т. е. такое состояние, при котором можно пренебречь, исходя из физических соображений, тем обстоятельством, что система является составной частью другой квантовомеханической системы. Волновая функция является комплексной функцией и обычно обозначается буквой $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Действительная и мнимая части ψ зависят от координат и времени. Таким образом, волновая функция является комплексной зависимой от четырех вещественных переменных функций. Непосредственно сама волновая функция физического смысла не имеет. Физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции

$$|\psi|^2 = \psi\psi^{\#} = \psi_1{}^2 + \psi_2{}^2 . \qquad (3.37)$$

Как видно, по определению квадрата модуля комплексного числа функция (3.37) является существенно положительной. Ее смысл состоит в том, что она характеризует распределение вероятности того, что физическая система находится в определенном состоянии. Волновая функция ψ подчиняется уравнению Шредингера. Уравнение Шредингера в квантовой механике играет роль, подобную роли второго закона Ньютона в классической механике.

Комплексность волновой функции и тот факт, что она определена с точностью до умножения на экспоненциальный множитель $e^{i\alpha}$, связана, в частности, с тем, что она может описывать частицы с зарядами двух знаков. Независимость модуля волновой функции (3.37) от данного множителя, или, другими словами, изотропия комплексной плоскости волновой функции, означает инвариантность его относительно двумерных поворотов и физически означает то, что в отсутствие электромагнитного поля электрические заряды разных знаков неразличимы.

Комплексный язык фракталов. Опишем еще один случай применения комплексных чисел, который для школьников, владеющих элементами программирования, может представлять интерес как определенного рода интеллектуальная игра.

Под функцией комплексного переменного (отображением комплексной плоскости самой на себя) понимается определенный закон, согласно которому одному комплексному числу (точке на плоскости) ставится в соответствие другое комплексное число (точка на плоскости). Рассмотрим отображения следующего вида:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{3.38}$$

где z_{n+1}, z_n, c – комплексные числа и комплексное число c называется управляющим параметром. Формула (3.38) описывает итерации (последовательные подстановки), согласно которым выбирается произвольное число z_0, возводится в квадрат и к результату прибавляется константа c, чтобы получить z_1. Повторяя вычисления, заменив z_0 на z_1, получаем z_2 и т. д. В зависимости от выбранной начальной точки z_0 в результате будем иметь точки, которые либо уходят на бесконечность (беглецы), либо остаются в некоторой ограниченной области комплексной плоскости (заключенные). Граница между этими двумя множествами точек сильно изломана. При увеличении масштаба она остается изломанной и напоминает линию морского берега, которая становится тем длиннее, чем более мелкий масштаб используется для ее измерения. Одна из характерных особенностей этой границы – ее самоподобие, являющееся отличительной чертой множеств, которые называются фрактальными. Описанные выше границы в математике называют множествами Жулиа. Общей чертой множеств Жулиа является то, что они заключают в себе невероятно сложную динамику поведения точек, генерируемых алгоритмом (3.38). Построить множество Жулиа можно, используя обратный по отношению (3.38) алгоритм:

$$u_{n-1} \to \pm\sqrt{u_n - c}, \tag{3.39}$$

в котором знак компьютер выбирает случайным образом.

Второй метод построения множества Жулиа состоит в создании компьютерной программы, тестирующей всевозможные z_0 в соответствии с алгоритмом (3.38) при заданном управляющем параметре c и отбирающей из них те точки z_0, которые не принадлежат к последовательности «беглецов» или «заключенных», тогда остаются точки только граничного множества.

Глава 4

ВЕКТОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И МЕХАНИКА НЬЮТОНА

В главе 2 рассмотрена связь геометрии евклидовой плоскости с механикой Ньютона на плоскости. Многие практические задачи механики сводятся к задачам на плоскости. Например, движение людей, автомобилей по поверхности Земли в значительном интервале расстояний, проходимых ими, можно описывать с помощью движения материальной точки по евклидовой плоскости. В системе отсчета, связанной с Солнцем, в плоскости лежат орбиты планет Солнечной системы. По кривым, лежащим в плоскости, движется камень, брошенный под углом к горизонту, и пуля, выпущенная из пистолета или автомата.

Основные выводы, которые автор хотел продемонстрировать в главе 2, сводятся к тому, что задание геометрии полностью определяет кинематику. Хотя в геометрии отсутствует понятие времени, в ней существует понятие допустимых движений (вращений и параллельных переносов), с помощью которых осуществляется сравнение геометрических фигур, например, определения равенства треугольников. При этом при переносе геометрической фигуры из некоторого начального положения в некоторое конечное с целью их наложения, очевидно, в любом своем промежуточном положении данная фигура должна быть тождественной начальной. Таким образом, понятия абсолютно твердого тела в механике и фигуры в евклидовой геометрии фактически являются тождественными, что в свое время дало повод Г. Гельмгольцу сделать вывод, что в основе евклидовой геометрии лежит экспериментально обоснованное понятие абсолютно твердого тела.

В данной главе будет рассмотрен переход к трехмерному евклидовому пространству, геометрия которого в общем случае и является геометрией механики Ньютона.

4.1. Векторы в трехмерном пространстве Евклида

Аксиомы линейного пространства, введенные в параграфе 1.6, в принципе справедливы для векторов любой размерности. Как было там сказано, для того чтобы вводить векторные пространства конкретной размерности, система аксиом дополняется аксиомой размерности. Напомним ее: имеются n линейно независимых векторов, но всякие $n + 1$ векторов линейно зависимы друг от друга.

Таким образом, для того чтобы рассматривать трехмерное векторное пространство, необходимо положить $n = 3$ и под векторами понимать упорядоченные тройки чисел. Очевидно, для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, представленных в виде троек $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, правило сложения аналогично сложению двумерных векторов, т. е.

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1, y_1, z_1\} + \{x_2, y_2, z_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}. \tag{4.1}$$

Введенные упорядоченные тройки чисел с правилом сложения (4.1), подчиняющиеся системе аксиом, рассмотренной в параграфе 1.6, образуют трехмерное аффинное пространство. В таком пространстве действует линейное преобразование

$$\vec{a}' = O\vec{a} + \vec{d}, \tag{4.2}$$

которое аналогично преобразованию (1.31), но отличается от него тем, что действует в трехмерном пространстве. В данном преобразовании O – произвольная матрица размерности 3×3, а $\vec{d}$, подобно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, – трехмерный вектор. Единственным условием, которому должна удовлетворять матрица O, является условие, чтобы она имела обратную.

Матрица O действует на трехмерный вектор-столбец, стоящий справа, либо на вектор-строчку, стоящую слева, аналогично тому, как матрица 2×2 действует на двумерные векторы. Очевидно, преобразования (4.2) переводят трехмерные векторы, введенные нами выше, в такие же трехмерные векторы. Преобразование (4.2) можно рассматривать как преобразование, переводящее некоторый фиксированный вектор в другой фиксированный вектор данного же пространства, либо как преобразование, действующее на все множество векторов данного пространства, переводя его во множество векторов этого же пространства. При этом преобразование (4.2) отображает трехмерное аффинное пространство на себя.

Смысл требования существования обратной матрицы к матрице O легко понять в случае, когда преобразование (4.2), без сдвига действующее на вектор $\vec{a}$, рассматривается как преобразование одного из векторов в другой вектор. В силу того что речь идет о произвольных векторах, должно существовать и преобразование, переводящее вектор конечный в начальный, которое, очевидно, и является обратным к задаваемому матрицей O.

Само по себе аффинное пространство не достаточно для эффективных физических приложений. Оно слишком общее и является довольно бедным в смысле определенных в нем операций. В таком пространстве не определена столь важная для физических приложений операция, как скалярное произведение.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ определяется аналогично тому, как это было сделано в двумерном случае, т. е.

$$(\vec{a}\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{4.3}$$

Исходя из общего определения скалярного произведения (4.3), определим скалярное произведение вектора самого на себя:

$$(\vec{a}\vec{a})=(\vec{a}^2)=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \qquad 4.4)$$

и длину вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \qquad (4.5)$$

а также угол между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из формулы для еще одного определения скалярного произведения этих векторов

$$(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (4.6)$$

Из формулы (4.6) для $\cos\varphi$ получим с учетом формул (4.3) и (4.5)

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4.7)$$

Так же как и в случае двумерного пространства, длина вектора определяет расстояние между точками в пространстве. Пространство, в котором определено скалярное произведение, называется аффинным евклидовым пространством. За счет того, что в таком пространстве введена дополнительная по сравнению с операциями в общем аффинном пространстве операция скалярного произведения, общее трехмерное аффинное пространство сузилось до евклидового трехмерного пространства. Данное сужение проявляется, в частности, в том, что в преобразовании (4.2) вместо произвольной матрицы O с единственным требованием к ней, чтобы у нее была обратная, получим матрицу трехмерных поворотов. Такое сужение на уровне матриц преобразования (4.2) является следствием требования, чтобы введенное скалярное произведение, а следовательно, и длина вектора оставались неизменными при этих преобразованиях. В результате матрица трехмерных поворотов в отличие от произвольной 3×3-матрицы O, зависящей от девяти параметров, будет зависеть только от трех параметров.

Преобразования (4.2) с матрицей поворотов, оставляющие неизменными длины векторов и углы между ними, называются движениями трехмерного евклидового пространства.

Отметим также, что при переходе от произвольного аффинного пространства к евклидову пространству упорядоченная тройка чисел, задающая вектор, приобретает четкий геометрический смысл, заключающийся в том, что они являются проекциями вектора на оси прямоугольной декартовой системы координат.

Не будем подробно рассматривать матрицы поворотов в трехмерном евклидовом пространстве. В принципиальном отношении описание поворотов с помощью матриц было рассмотрено в параграфе 1.2 для случая двумерного евклидового пространства (евклидовой плоскости). Описание трехмерных поворотов с помощью матриц более сложно и не входит в задачи данной книги. В той мере, в которой это необходимо, в будущем при рассмотрении поворотов будем опираться на представления, сформированные в двумерном случае, и наглядные примеры из геометрии и механики.

Допустимость преобразований (4.2) в евклидовом трехмерном пространстве с матрицей поворотов и сдвигами отражает определенные свойства данного пространства. Вращениям пространства соответствует свойство изотропии пространства, или, другими словами, отсутствие в нем выделенных направлений, а сдвигам соответствует однородность пространства, т. е. отсутствие в пространстве выделенных точек.

Абсолютно твердое тело в трехмерном пространстве. Как и в случае двумерного евклидового пространства, абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется при его движении. То есть если A и B – две точки абсолютно твердого тела, а их радиус-векторы в некоторой системе отсчета соответственно равны $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, то расстояние S_{AB} между ними:

$$S_{AB} = \sqrt{(\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2}\ . \qquad (4.8)$$

В отличие от двумерного евклидового пространства в выражении (2.22) точки A и B заданы в трехмерном пространстве и соответственно их радиус-векторы $\bar{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ и $\bar{r}_B = \{x_B, y_B, z_B\}$ являются трехмерными, а квадрат под корнем следует понимать как скалярное произведение трехмерных векторов. В данном случае вектора, представляющего собой разность радиус-векторов $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$ точек A и B соответственно.

Все вышесказанное о связи абсолютно твердого тела и геометрии в трехмерном случае остается справедливым. Условие неизменности выражения (4.27) при движении твердого тела означает фактическую тождественность понятий твердого тела и геометрического тела, что дает возможность эффективного применения геометрических и не только геометрических, но и алгебраических методов в механике.

4.2. Векторное произведение векторов евклидового трехмерного пространства

Выше было определено скалярное произведение двух векторов. Введение данной операции целесообразно как для двумерных, так и трехмерных векторов. Введем понятие векторного произведения двух векторов. Данная операция целесообразна для трехмерных векторов. Ее нет смысла вводить в двумерном пространстве. Данное утверждение поясним ниже после определения векторного произведения.

Определение. **Векторным произведением двух векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ называется такой вектор $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, который по абсолютной величине равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах как на сторонах и направленный так, что от его конца совмещение первого из векторов-сомножителей по направлению второго вектора-сомножителя по кратчайшему пути видно против движения часовой стрелки.**

Из определения легко видеть (рис. 17), что абсолютная величина (модуль) векторного произведения двух векторов выражается через модули сомножителей и угол между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi . \qquad (4.9)$$

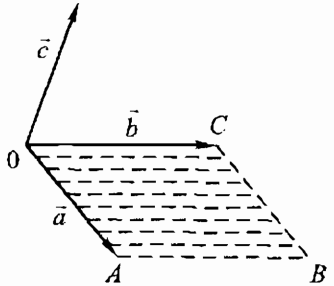


Рис. 17

Векторное произведение обычно обозначается либо с помощью квадратных скобок:

$$\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}], \qquad (4.10)$$

либо с помощью креста:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} . \qquad (4.11)$$

Другое, чисто алгебраическое определение векторного произведения двух векторов связано с составляющими векторов сомножителей. По данному определению

$$\begin{gathered} \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\} = \vec{a} \times \vec{b} = \\ \{y_1 z_2 - z_1 y_2, z_2 x_1 - x_2 z_1, x_1 y_2 - y_1 x_2\}. \end{gathered} \qquad (4.12)$$

Отметим некоторые свойства векторного произведения.

1. Векторное произведение меняет знак при перестановке сомножителей. Это легко проверить, если воспользоваться первым его определением или определением (4.12).

2. Если один из векторов-сомножителей в векторном произведении умножается на вещественное число α, то *данное число* выносится за знак векторного произведения, т. е. если $\vec{a} \to \alpha\vec{a}$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] \to \alpha[\vec{a}\vec{b}]. \qquad (4.13)$$

3. Если один из сомножителей в векторном произведении есть сумма двух векторов, например $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] = [(\vec{a}' + \vec{a}'')\vec{b}] = [\vec{a}'\vec{b}] + [\vec{a}''\vec{b}]. \tag{4.14}$$

Комбинация скалярного и векторного произведений позволяет ввести смешанное произведение трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, т. е. скалярное произведение, например, вектора $\vec{c}$ на векторное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$. Иными словами:

$$(\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]). \tag{4.15}$$

Задачи. 1. Докажите, что смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях как на ребрах.

2. Используя результат предыдущей задачи, докажите следующее свойство смешанного произведения: $(\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]) = (\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]) = (\vec{b}[\vec{c}\vec{a}])$.

3. Докажите, что $[\vec{a}\vec{b}]^2 = ([\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{b}]) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$.

Очевидно, что возможно введение векторного произведения трех и более векторов. Так, векторное произведение трех векторов:

$$[\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] \tag{4.16}$$

или в других обозначениях

$$\vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b}.$$

Ограничимся данным определением векторного произведения более чем двух векторов, не обсуждая их свойства.

Скалярное и векторное произведения трехмерных векторов имеют широкое приложение в геометрии и физике. Ниже мы приводим некоторые примеры таких приложений.

4.3. Некоторые приложения скалярного и векторного произведений векторов в геометрии

Одним из приложений векторных обозначений в аналитической геометрии является векторная запись уравнений линий и поверхностей в трехмерном пространстве. Так, например, уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид

$$(\vec{n}\vec{r}) + p = 0. \qquad (4.17)$$

В данном уравнении ($\vec{n}\vec{r}$) – скалярное произведение двух векторов, где $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$, ($\vec{n}^2 = n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2 = 1$) – единичный вектор (вектор, модуль которого равен единице), перпендикулярный данной плоскости; $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – переменный радиус-вектор точек плоскости; p – расстояние от начала координат до плоскости. Запись уравнений в векторной форме, в том числе уравнений плоскости, отличается прежде всего краткостью. Для сравнения выпишем уравнение (4.17) в координатной форме:

$$n_x x + n_y y + n_z z + p = 0.$$

З а д а ч а. Найдите выражения для уравнений координатных плоскостей декартовой системы координат в трехмерном евклидовом пространстве.

Уравнение прямой в пространстве в векторной форме можно записать, используя векторное произведение. Такое уравнение (а точнее, таких уравнений три) имеет вид

$$[\vec{a}\vec{r}] = \vec{b}, \qquad (4.18)$$

где $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – заданные, взаимно перпендикулярные векторы, т. е. $(\vec{a}\vec{b}) = 0$.

Вектор $\vec{a}$ направлен вдоль прямой, задает ее направление, а вектор $\vec{b}$ перпендикулярен плоскости, проходящей через начало координат, в которой лежит прямая, $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – текущие координаты точек прямой.

В координатной форме уравнения (4.18) имеют вид

$$a_y z - a_z y = b_x,$$

$$a_z x - a_x z = b_y,$$

$$a_x y - a_y x = b_z.$$

Уравнение (4.18) проще осознать как уравнение прямой, если оно представлено в виде

$$[\vec{n}\vec{r}] = \vec{N}, \qquad (4.19)$$

где $\vec{n}$ – заданный единичный вектор вдоль направления прямой, а $\vec{N}$ – вектор, модуль которого равен расстоянию от начала координат до прямой, и $(\vec{n}\vec{N}) = 0$.

З а д а ч а. Приведите уравнение прямой в форме (4.18) к уравнению (4.19).

4.4. Скалярное произведение векторов в некоторых задачах физики

Механическая работа. Работа в механике определяется как скалярное произведение силы на перемещение, т. е.

$$A = (\vec{F}\vec{s}) = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\varphi, \tag{4.20}$$

где φ – угол между направлением силы и вектором перемещения. Определение работы (4.20) справедливо, только если сила на всем перемещении постоянна. В случае если сила меняется с расстоянием, то перемещение следует разбить на участки, в пределах которых силу можно считать постоянной. В этом случае работа будет представлять собой сумму работ по всем n перемещениям, в пределах которых силу можно считать постоянной:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \Delta\vec{r}_k . \tag{4.21}$$

З а д а ч и. 1. Приведите конкретные примеры ситуаций, когда сила, действующая на тело, не совершает работы.

2. За счет изменения какой физической величины совершается работа?

3. Каким образом можно уменьшить силу, действующую на тело, так, чтобы работа, совершаемая ею, сохранялась прежней?

4. Каким образом результат решения предыдущей задачи используется в боевых искусствах?

Исходя из определения работы, можно дать определение мощности, которая также выражается через скалярное произведение векторов. Мощность определяется как работа постоянной силы, совершаемая в единицу времени. Поэтому, согласно (4.20), мощность

$$N = (\vec{F}\vec{v}) = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\varphi\,. \tag{4.22}$$

Основываясь на формуле (4.20), можно определить мгновенную мощность силы, совершающей работу. Такая мощность определяется как скалярное произведение силы, действующей в данный момент на тело, на мгновенную скорость тела в этот же момент времени. Аналитическое выражение для мгновенной мощности по форме совпадает с выражением (4.21).

З а д а ч а. Насколько необходимо увеличить мощность тяги двигателя автомобиля, чтобы сохранить его скорость при подъеме по наклонному участку шоссе равной скорости на горизонтальном участке дороги, если угол наклона участка к горизонту равен α? Масса автомобиля известна. Ответ обоснуйте.

Поток индукции магнитного поля. Рассмотрим плоский контур C в однородном магнитном поле, расположенный таким образом, что силовые линии поля пересекают его под некоторым углом. Таким контуром может быть, например, плоский виток проволоки. Поскольку магнитное поле однородно, то его достаточно задать с помощью одного вектора магнитной индукции $\vec{B}$. Ориентацию плоскости контура по отношению к направлению вектора $\vec{B}$ будем задавать с помощью угла β между единичным вектором, перпендикулярным плоскости контура, или, другими словами, единичной нормалью к плоскости контура, и самим вектором индукции. Тогда потоком Ф-вектора $\vec{B}$ через контур C называется

$$\Phi = (\vec{B}\vec{n}) = B\cos\beta, \tag{4.23}$$

где $\vec{n}$ – вектор единичной ($\vec{n}^2 = 1$) нормали к плоскости контура C. Если поле неоднородно, вектор $\vec{B}$ зависит от координат, то для определения потока магнитной индукции через плоскость контура необходимо контур разбить на малые контуры, в пределах которых поле можно считать однородным, задаваемым вектором $\vec{B}_i$, где индекс i означает номер малого контура. Определив потоки Φ_i-векторов $\vec{B}_i$ через каждый малый контур и просуммировав потоки Φ_i по всем малым контурам в пределах исходного контура C, получим искомый поток:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i (\vec{B}_i \vec{n}) = \sum_i B_i \cos\beta_i, \qquad (4.24)$$

где суммирование ведется по всем малым контурам.

С помощью понятия потока магнитной индукции формулируется один из основных законов электромагнетизма – закон электромагнитной индукции Фарадея. Данный закон гласит: электродвижущая сила (э.д.с.) электромагнитной индукции:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4.25)$$

– скорость изменения потока вектора электромагнитной индукции, пронизывающего замкнутый проводящий контур.

З а д а ч а. В первом случае, в постоянном, однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого направлен вдоль оси z, замкнутый проводящий, плоский контур вращается так, что угол β между нормалью к плоскости, восстановленной из центра контура, и осью z все время остается постоянным (нормаль лежит на поверхности кругового конуса с раствором 2β). Во втором случае в той же системе координат создано неоднородное магнитное поле и тот же контур совершает такие же вращения. Чем различаются э.д.с. электромагнитной индукции в первом и втором случаях?

4.5. Векторное произведение векторов в некоторых задачах физики

Момент импульса. Моментом импульса (моментом количества движения) материальной точки относительно начала координат системы отсчета, в которой рассматривается движение этой точки, называется величина

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m[\vec{r}\vec{v}], \tag{4.26}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки в заданной декартовой системе координат, связанной с рассматриваемой системой отсчета; $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки в данной системе отсчета; m – ее масса; $\vec{v}$ – скорость точки.

Момент количества движения системы точек, движущихся относительно некоторой системы отсчета, определяемый относительно начала координат. получается суммированием по моментам количества всех точек системы, т. е.

$$\bar{L} = \sum_j \bar{L}_j = \sum_j m_j (\bar{r}_j \times \bar{v}_j). \tag{4.27}$$

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с учетом условия (4.8). Для этого любое абсолютно твердое тело может быть разбито на бесконечно малые по размерам в сравнении с размерами самого тела объемы, имеющие массы, равные Δm_j, радиус-векторы которых по отношению к началу координат обозначим $\vec{r}_j$, а скорость – $\vec{v}_j$, и момент импульса $\vec{L}$ абсолютно твердого тела определится аналогично (4.27):

$$\vec{L} = \sum_j \Delta m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j, \tag{4.28}$$

где суммирование ведется по всем бесконечным элементам объема абсолютно твердого тела.

З а д а ч и. 1. Найдите уравнение прямой траектории материальной точки массы m, движущейся с постоянной скоростью $\vec{v}$ и имеющей постоянный момент импульса $\vec{L}$ относительно начала декартовой системы координат, связанной с некоторой системой отсчета.

2. Определите расстояние от начала координат до прямой, по которой движется материальная точка, имеющая постоянные заданные импульс и момент импульса.

Угловая скорость. Связь линейной скорости движения точек абсолютно твердого вращающегося тела с угловой скоростью его вращения. Несмотря на формальную схожесть формул (4.28) и (4.27) для абсолютно твердого тела и произвольной системы материальных точек, между ними существует разница, которую можно подчеркнуть, рассмотрев чисто вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг какой-нибудь оси, задаваемой в пространстве единичным вектором $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$.

Для характеристики вращательного движения твердого тела удобно ввести такую характеристику, как угловая скорость. Для определения угловой скорости выделим в теле плоскость, перпендикулярную оси вращения, пересекающую ось в точке O . Зафиксируем в данной плоскости некоторую точку A, радиус-вектор которой, проведенный в рассматриваемой плоскости от точки O на оси вращения, обозначим как $\vec{r}_A$. Пусть за время Δt радиус-вектор $\vec{r}_A$ поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Нетрудно понять, что радиус-векторы всех точек, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, за данный промежуток времени также повернутся на данный угол. Данное обстоятельство является следствием определения абсолютно твердого тела, его особенностью, позволяющей ввести понятие угла поворота абсолютно твердого тела вокруг оси вращения. Для произвольной системы материальных точек сделать это невозможно, так как в какой бы плоскости не рассматривались вращения их радиус-векторов, последние поворачивались бы, вообще говоря, за равные промежутки времени на различные углы.

Средняя угловая скорость определяется аналогично тому, как определялась линейная скорость материальной точки:

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}\vec{n}. \qquad (4.29)$$

Наряду со средней угловой скоростью вращательного движения тела вводится понятие угловой скорости в данный момент времени – мгновенная угловая скорость. Мгновенная угловая скорость вводится аналогично мгновенной линейной скорости материальной точки:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} \hat{n} = \frac{d\varphi}{dt} \bar{n}, \qquad (4.30)$$

производной от угла поворота как функции времени по времени.

Если тело за одинаковые промежутки времени поворачивается на один и тот же угол, такое его движение называется равномерным вращательным движением, и средняя угловая скорость тела и мгновенная совпадают. Такое вращательное движение можно характеризовать этим единственным вектором угловой скорости.

Как указывалось выше, вектор угловой скорости направлен по оси вращения. Здесь впервые встречается ситуация, когда геометрический образ и алгебраическое представление вектора различаются. Действительно, при определении средней и мгновенной скорости использовался вектор $\Delta\varphi\,\bar{n}$, по абсолютной величине равный углу поворота тела, но направленный по оси вращения, хотя в качестве геометрического образа его естественно рассматривать направленную дугу окружности, описываемую концом радиус-вектора некоторой фиксированной точки, выбранной во вращающемся абсолютно твердом теле, проведенного, как выше описывалось, от оси вращения и перпендикулярного ей.

Все точки абсолютно твердого тела при вращении тела вокруг фиксированной в трехмерном евклидовом пространстве оси, которые лежат на разных расстояниях от оси вращения, будут иметь различные линейные скорости. Естественно, что это будет иметь место и в общем случае движения абсолютно твердого тела. Однако для простоты рассмотрим частный случай вращения тела вокруг собственной оси и установим связь угловой скорости радиус-вектора точек тела относительно оси вращения с линейной скоростью точек. Докажем, что линейная скорость $\bar{v}_A$ любой точки A тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$, с радиус-вектором $\bar{r}_A$ относительно оси вращения:

$$\vec{v}_A = \vec{r}_A \times \vec{\omega}. \tag{4.31}$$

Докажем формулу (4.31) для случая мгновенных угловой и линейной скоростей. В выражение (4.31) подставим выражение угловой скорости (4.30), тогда

$$\vec{v}_A = (\vec{r}_A \times \vec{n})\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4.32}$$

Учтем то, что выбранная точка в теле совершает свое движение по окружности, при котором абсолютная величина радиус-вектора точки не меняется, представим $\vec{r}_A = \vec{r}R_A$, где $\vec{r}$ – единичный ($\vec{r}^2 = 1$) вектор, а R_A не меняется с течением времени. Тогда выражение (4.32) может быть переписано как

$$\vec{v}_A = (\vec{r} \times \vec{n})\frac{R_A d\varphi}{dt} = (\vec{r} \times \vec{n})\frac{ds}{dt}, \tag{4.33}$$

где учтено, что произведение радиуса окружности на угол дает длину дуги окружности, на которую опирается данный угол, т. е. $ds = R_A d\varphi$. Отсюда следует, что $v_A = \dfrac{ds}{dt}$ является модулем мгновенной скорости точки, движущейся по окружности.

Вектор $\vec{r} \times \vec{n}$ является единичным, он перпендикулярен плоскости, определяемой векторами $\vec{r}$ и $\vec{n}$, что следует из определения векторного произведения. Отнесенный к движущейся точке, он будет задавать направление мгновенной скорости на окружности, по которой точка движется, и будет касательным к данной окружности. Таким образом, произведение

$$(\vec{r} \times \vec{n})\frac{ds}{dt} = \vec{v}_A,$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч и. 1. Докажите, что модуль угловой скорости радиус-вектора материальной точки, движущейся по прямой, не проходящей через начало координат, убывает обратно пропорционально расстоянию точки до начала координат.

2. Почему кажется, что самолет, летящий на небольшой высоте, движется гораздо быстрее, чем когда он летит на большой высоте, даже когда линейные скорости самолета в обоих случаях одинаковы?

3. Почему звезды при наблюдении их в течение короткого промежутка времени кажутся неподвижными в отличие от самолета в предыдущей задаче?

Момент силы. Моментом $\vec{M}$ силы $\vec{F}$, приложенной в точке A относительно некоторой точки O, называется векторное произведение

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{4.34}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A и направленный от O к A. Отметим, что, согласно определению векторного произведения, абсолютная величина момента силы:

$$M = rF\sin\varphi, \tag{4.35}$$

где M, r, F – абсолютные величины момента силы, радиус-вектора и силы соответственно; φ – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Произведение $r\sin\varphi = h$ равно расстоянию от точки O до точки A и называется плечом силы. Таким образом, абсолютная величина момента силы (4.35) совпадает с моментом силы в двумерном пространстве (2.23). Нами отмечалось, что момент силы в двумерном пространстве – величина скалярная, что нетрудно понять после того, как введено общее определение момента силы (4.34). Поскольку векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$ лежат в раз и навсегда заданной плоскости, в нашем случае в плоскости чертежа (листа данной книги), то направление вектора момента силы всегда будет перпендикулярно чертежу (листу книги) и направлено либо к нам, либо от нас, что можно определять в зависимости от направления силы только знаком, и в этом случае можно не вводить понятие вектора момента силы, а ограничиться только определением (4.35) его абсолютной величины.

Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле. На частицу, обладающую электрическим за-рядом q в магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила (сила Лоренца) $\vec{F}$, определяемая выражением

$$\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{4.36}$$

где $\vec{v}$ – скорость частицы; c – скорость света.

Задача. Докажите, что в магнитном поле сохраняется кинетическая энергия частицы.

4.6. Система уравнений, описывающих движение абсолютно твердого тела

Выше были определены все величины, необходимые для записи уравнений, описывающих динамику абсолютно твердого тела, которые являются следствием уравнений Ньютона для материальных точек. Данные уравнения являются сложными и не могут решаться в школьных или даже в общих курсах физики, однако их формулировка поучительна и будет полезна для дальнейшего изложения. Данная система состоит из шести следующих уравнений, записанных в векторной форме:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}, \tag{4.37а}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}. \tag{4.37б}$$

Система уравнений (4.36) учитывает поступательное и вращательное движение тела и гласит, что первая тройка уравнений – уравнения Ньютона в уже известной нам форме, приводимые нами для материальной точки и гласящие, что скорость изменения импульса тела равна равнодействующей сил, приложенных к телу. Первая тройка описывает поступательное движение абсолютно твердого тела, которое вполне может определяться движением центра масс тела. Поэтому уравнения (4.37а) совпадают с уравнениями движения материальной точки (центра масс) с массой, равной массе тела. Тройка уравнений (4.37б) описывает вращение тела в системе отсчета, где центр масс покоится. Закон, выраженный данной тройкой уравнений, означает, что изменение момента импульса тела равно моменту приведенной системы внешних сил.

Условие равновесия абсолютно твердого тела. Абсолютно твердое тело находится в равновесии, если равнодействующая сил, приложенных к телу $\vec{F}$, и главный момент сил $\vec{M}$ равны нулю. Число уравнений, определяющих условие равновесия абсолютно твердого тела, равно числу степеней свободы тела и равно шести в трехмерном пространстве. При равенстве нулю результирующей силы, действующей на тело, и главного момента из уравнений (4.36а) и (4.36б) следует (см. Приложение 2), что импульс тела

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}, \tag{4.38}$$

и момент импульса

$$\vec{L} = \text{const}, \tag{4.39}$$

где const означает постоянную (не меняющуюся со временем) величину. Преобразованием Галилея всегда можно преобразовать условие (4.38) к системе отсчета, где постоянный импульс равен нулю, т. е. центр масс тела покоится. Однако не существует преобразования Галилея, в результате которого постоянный угловой момент $\vec{L}$ мог бы обратиться в нуль. В отсутствие действия момента внешних сил на тело имеющийся у тела момент количества движения (момент импульса) сохраняется. Если при этом момент импульса тела равен нулю и на тело не действует момент сил, то тело будет оставаться не вращающимся, т. е. его момент количества движения будет равен нулю.

Неинерциальные системы отсчета и сила Кориолиса. Неинерциальной системой отсчета называется система отсчета, движущаяся с ускорением относительно некоторой инерциальной системы. В неинерциальных системах отсчета возникают инерциальные силы. Если с вращающимся абсолютно твердым телом жестко связать некоторую, например декартову, систему координат, получим пример неинерциальной системы отсчета. В таких системах возникают инерционные силы, вызванные вращением системы, которые, как и многие уже введенные нами выше величины, выражаются через векторное произведение. Так, на тело массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$ относительно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ системы отсчета, действует сила Кориолиса

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}).$$

Сила Кориолиса, вызванная вращением Земли, играет важную роль в метеорологии. Действием этой силы объясняется подмывание правых берегов рек, если смотреть по направлению их течения, а также большее стирание правых рельсов, чем левых, на железнодорожных путях.

4.7. Свойства симметрии пространства, времени и законы сохранения

Выше было показано, что в случае, когда равнодействующая сил, приложенных к абсолютно твердому телу, равна нулю, сохраняется его импульс, а если равен полный момент приложенных сил, сохраняется момент импульса. Сохраняется также и его кинетическая энергия. Законы сохранения являются следствием законов движения (в данном случае законов Ньютона). Законы движения были сформулированы в трехмерном евклидовом пространстве, которое, как подчеркивается на протяжении всего изложения, обладает такими свойствами симметрии, как однородность и изотропия. В свою очередь, данные свойства определяют допустимые движения тел (геометрических фигур) при отсутствии действия на них сил (внешних возмущений). Действительно, однородность трехмерного евклидова пространства означает равноправие всех его точек по отношению к сдвигам (параллельным переносам) системы отсчета.

Иными словами, однородность пространства означает, что все точки равноправны и ни в одной их них нет ничего, что бы могло изменить импульс материальной точки или абсолютно твердого тела.

Изотропия означает, что все направления в пространстве равноправны и нет причин, чтобы вращающееся тело при достижении значения какого-то угла поворота изменило бы свой момент импульса – состояние вращения. Отметим, что при сохранении момента количества движения всегда есть фиксированное в пространстве направление, совпадающее с моментом количества движения, задающего ось, вокруг которой совершается вращение. В этом смысле физическая система, находящаяся в пространстве, обладающая угловым моментом, нарушает изотропию пространства. Однако следует помнить, что, когда говорят об изотропии пространства, имеют в виду данное пространство в отсутствие физической системы.

Ось времени можно рассматривать как одномерное однородное пространство. Однородность оси времени означает, что состояние физической системы (материальной точки, абсолютно твердого тела) не зависит от выбора начала отсчета времени. Все моменты времени равноправны в том смысле, что ни в одном из них не возникает причины, которая могла бы привести к изменению энергии системы.

Глава 5

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

Неевклидова геометрия, созданная трудами К. Ф. Гаусса, Н. И. Лобачевского, Я. Бойяи, Б. Римана в конце XVIII–XIX в. и развиваемая в дальнейшем в трудах многих ученых, среди которых особо следует выделить У. К. Клиффорда, Ф. Клейна и А. Пуанкаре, получила широкое применение в физике в XX в. Из наиболее известных приложений неевклидовой геометрии отметим применение геометрии Римана при построении теории тяготения (общей теории относительности – ОТО) А. Эйнштейном, четырехмерную формулировку специальной теории относительности (СТО) в терминах псевдоевклидового пространства и др. Менее известно, но весьма плодотворно и поучительно применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности, в особенности в релятивистской кинематике процессов столкновений элементарных частиц. Широкое понимание неевклидовой геометрии научной общественностью произошло после построения моделей простейших неевклидовых пространств, реализованных в евклидовых пространствах в работах Э. Бельтрами, Ф. Клейна, А. Пуанкаре. Смысл такого рода моделей заключался в том, что геометрические образы евклидовой геометрии по соглашению принимаются за образы геометрии неевклидовой. Например, окружности большого круга на сфере принимаются в качестве прямых пространства Римана постоянной положительной кривизны, каковым можно рассматривать двумерную сферу в трехмерном евклидовом пространстве. У читателя может возникнуть вопрос: «Не обесценивает ли это открытия создателей неевклидовой геометрии? Не свелось ли все к прежней известной евклидовой геометрии?» История развития математики показывает, что не свелось. Неевклидова геометрия обеспечила математикам новый взгляд на стоящие перед ними проблемы, сформировала базу для создания новых математических методов. Первым это продемонстрировал Н. И. Лобачевский, но в особенности А. Пуанкаре при построении теории автоморфных функций. К К. Ф. Гауссу, Н. И. Лобачевскому, Я. Бойяи и Б. Риману восходит понимание тесной связи физики и геометрии и того обстоятельства, что физические свойства тел, их взаимодействия определяют геометрию физического пространства. Эти идеи получили дальнейшее развитие и воплощение при создании ОТО А. Эйнштейном.

5.1. Двумерная сфера – простейшее риманово пространство

Ниже нами будет рассмотрена простейшая неевклидова геометрия, которая может быть реализована на поверхности двумерной сферы трехмерного евклидового пространства. Двумерная сфера несет на себе геометрию риманового пространства в узком смысле этого слова, т. е. геометрию пространства постоянной (не зависящей от координат) кривизны. Двумерную сферу можно рассматривать как плоскость трехмерного риманового пространства, если в качестве прямых принять окружности большого радиуса. В данной геометрии проблема пятого постулата Евклида решается таким образом, что в ней отсутствуют параллельные прямые. То есть через заданную точку нельзя провести ни одну прямую, параллельную данной. Все прямые пересекаются. В остальном геометрия плоскости Римана очень похожа на геометрию евклидовой плоскости. Это особенно наглядно демонстрируется на примере допустимых движений в этих пространствах. Например, треугольник (абсолютно твердое тело) на евклидовой плоскости может совершать, не деформируясь, два независимых сдвига вдоль ортогональных осей координат и делать повороты вокруг некоторой фиксированной в плоскости этого треугольника точки. На сфере треугольник также может передвигаться, не деформируясь. В этом можно убедиться, проведя такой эксперимент. Любой подходящий шар (им может быть резиновый мяч) поместить в шар, склеенный из бумаги, почти такого же размера, но такой, чтобы шар внутри свободно мог вращаться. Если на бумажном шаре вырезать треугольник либо другую фигуру, то можно убедиться, что при поворотах внутреннего шара треугольник будет скользить по поверхности внутреннего шара без деформаций. Нетрудно понять также, что для него возможны два независимых сдвига и поворот вокруг фиксированной точки. При этом в отличие от плоскости евклидовой сдвиги по сфере обязательно сопровождаются поворотами.

Одним из очень древних применений геометрии двумерной сферы является астрономия, развитие которой на протяжении тысячелетий стимулировало развитие математики. Раздел астрономии, изучающий расположение небесных тел на небе, называется сферической астрономией. Рассмотрим геометрию сферы с точки зрения неевклидовой геометрии и применим такой подход к решению характерной для сферической геометрии задачи о связи различных систем координат, в данном случае горизонтальной и экваториальной.

Для дальнейшего изложения будем использовать подход, основанный на понятии векторов, сопоставляемых парам точек, продолжая основную концепцию данной книги, состоящую в использовании тесной связи геометрии и векторного исчисления.

5.2. Векторы, сопоставляемые парам точек на сфере

Идея сопоставления векторов парам точек пространств постоянной кривизны, простейшим и наглядным примером которых является сфера, принадлежит А. П. Котельникову.

В его работах теория таких векторов развивалась преимущественно геометрически. Им не была дана алгебраическая векторная форма закона сложения введенных векторов. Геометрическое определение самих же векторов не вызывало труда. Они определялись как направленные отрезки геодезических линий данных неевклидовых пространств (аналогов прямых в обычном трехмерном евклидовом пространстве). Вопрос об алгебраической форме закона сложения векторов, сопоставляемых парам точек такого рода пространств, был решен в работах белорусских ученых. В частности, решающую роль в установлении алгебраической формы данного закона сыграли работы академика Ф. И. Федорова по векторной параметризации пространственных вращений, а также работы А. А. Богуша, в которых была разработана векторная параметризация важных для физических приложений плоских преобразований пространственных вращений.

Необходимо различать геометрические образы векторов и их алгебраические представления. **Геометрическим образом вектора на сфере является направленный отрезок окружности большого радиуса** (рис. 18).

Именно окружность большого радиуса является геодезической линией (аналогом прямой обычного пространства) простейшего пространства постоянной положительной кривизны, каким и является сфера. Введенные таким образом векторы на сфере определяются с точностью до переносов вдоль окружности, на которой они лежат.

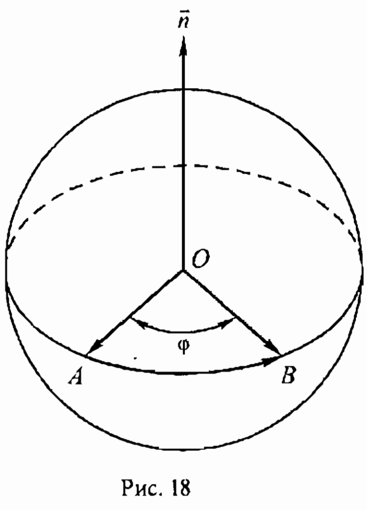


Рис. 18

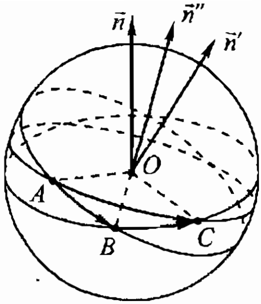


Рис. 19

Сформулируем геометрическое правило сложения векторов на сфере. Под ним будем понимать правило, по которому двум векторам на сфере ставится в соответствие один и только один третий вектор сферы. Обратное утверждение не верно. Для геометрических образов векторов на сфере примем следующее правило сложения – правило треугольника. Имеется в виду, что если есть треугольник на сфере, то, выбирая направления на двух его сторонах, третью можно рассматривать как вектор-сумму двух других, выбрав на ней направление согласованным с выбором направлений на первых двух сторонах образом. Как известно, на сфере две любые окружности большого радиуса всегда пересекаются и имеют две точки пересечения, если только они не совпадают вообще. Поэтому любые два вектора всегда можно перенести вдоль окружностей больших кругов, на которых они лежат, до одной из точек пересечения этих окружностей. Учтя данные замечания, можно окончательно сформулировать правило сложения (правило треугольника) для геометрических образов векторов (рис. 19).

Правило сложения векторов. Первый из векторов переносится вдоль окружности, на которой он лежит, до тех пор, пока его конец не совпадет с точкой пересечения окружности, на которой лежит второй вектор, до тех пор, пока его начало не совпадет с вышеотмеченной точкой пересечения двух окружностей или пока его начало не совпадет с концом первого вектора. Суммой этих двух векторов является отрезок окружности большого радиуса, соединяющий начало первого с концом второго и направленный от начала первого вектора к концу второго (рис. 19).

Алгебраическим представлением вектора на сфере назовем вектор, по модулю равный тангенсу угла, под

которым с центра сферы наблюдается соответствующий геометрический образ, перпендикулярный плоскости большого круга, на котором лежит указанный геометрический образ, и направленный так, чтобы направление все того же геометрического образа с конца определяемого вектора было видно против хода часовой стрелки (рис. 18, 19).

Напомним, что с ситуацией, когда геометрическое и алгебраическое представления векторов различаются, мы уже сталкивались при введении вектора угловой скорости.

Если сфера задана в некоторой системе координат (x, y, z) так, что ее начало совпадает с началом этой системы координат, то алгебраическое представление вектора на сфере можно также представить в виде трехмерного вектора $\vec{n}$, заданного в данной декартовой системе координат, т. е. $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$. Такой вектор, очевидно, может быть построен согласно его определению. Если имеются алгебраические представления $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ двух векторов на сфере, алгебраическое представление $\vec{n}''$ геометрической суммы соответствующих векторов на сфере задается формулой

$$\vec{n}'' = \langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle = \frac{\vec{n} + \vec{n}' + \vec{n} \times \vec{n}'}{1 - (\vec{n}\vec{n}')}, \qquad (5.1)$$

где $\vec{n} \times \vec{n}'$ – векторное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{n}'$; $(\vec{n}\vec{n}')$ – их скалярное произведение. При этом вектор $\vec{n}'$ является алгебраическим представлением первого из складываемых векторов на сфере, а $\vec{n}$ – второго. В рамках предлагаемого векторного исчисления переход к неевклидовой геометрии означает изменения закона сложения векторов, переход от (1.4) к (5.1).

Если абсолютные величины векторов, которые входят в правую часть выражения (5.1), малы, т. е. когда малы длины соответствующих геометрических представлений векторов так, что величинами второго порядка можно пренебречь, то приходим к обычной формуле сложения векторов плоского евклидового пространства (1.4), т. е.

$$\vec{n}'' = \left\langle \vec{n}, \vec{n}' \right\rangle = \vec{n} + \vec{n}' .$$

Рассмотренный предельный случай соответствует так называемому плоскому пределу риманового пространства, означающему, что в малой окрестности любой точки риманового пространства реализуется евклидово пространство той же размерности, что и риманово пространство.

Алгебраическая форма правила сложения векторов на сфере (5.1) обладает рядом существенных свойств.

1. Она неперестановочна, т. е. в общем случае

$$\left\langle \vec{n}, \vec{n}' \right\rangle \neq \left\langle \vec{n}', \vec{n} \right\rangle . \qquad (5.2)$$

Данное свойство следует из неперестановочности векторного произведения, для которого выполняется условие $\vec{n} \times \vec{n}' = -\vec{n}' \times \vec{n}$.

2. Если $\vec{n}' = -\vec{n}$, то, очевидно,

$$\vec{n}'' = \left\langle \vec{n}, \vec{n}' \right\rangle = \left\langle \vec{n}, -\vec{n} \right\rangle = \bar{0} . \qquad (5.3)$$

И тем самым приходим к алгебраическому представлению нулевого вектора на сфере. Под геометрическим образом нулевого вектора на сфере будем понимать вектор на сфере, у которого начало и конец совпадают.

3. Для нулевого вектора

$$\vec{n}' = \bar{0} = (0, 0, 0) \qquad (5.4)$$

имеют место очевидные свойства

$$\left\langle \vec{n}, \bar{0} \right\rangle = \left\langle \bar{0}, \vec{n} \right\rangle = \vec{n} . \qquad (5.5)$$

4. Для трех векторов $\vec{n}''$, $\vec{n}'$, $\vec{n}$ справедливо свойство ассоциативности их сложения

$$\left\langle \vec{n}'', \left\langle \vec{n}, \vec{n}' \right\rangle \right\rangle = \left\langle \left\langle \vec{n}'', \vec{n} \right\rangle, \vec{n}' \right\rangle = \left\langle \vec{n}'', \vec{n}, \vec{n}' \right\rangle . \qquad (5.6)$$

Последнее свойство, как и предыдущее, следует непосредственно из определения (5.1).

Из формулы (5.1) довольно просто получаются основные соотношения сферической геометрии. Например, возведя правую и левую части формулы (5.1) в квадрат и совершая очевидные преобразования, получаем выражение для теоремы косинусов на сфере через алгебраические представления векторов, соответствующих сторонам сферического треугольника:

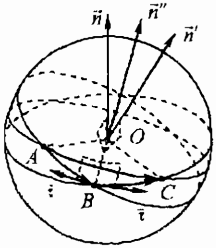


Рис. 20

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left|\vec{n}''\right|^2}}=\frac{1-(\vec{n}\vec{n}')}{\sqrt{1+\left|\vec{n}\right|^2}\sqrt{1+\left|\vec{n}'\right|^2}}. \tag{5.7}$$

Данное выражение переходит в стандартное выражение теоремы косинусов на сфере, если учесть, что в соответствии с определением векторов $\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''$ их длины равны

$$\left|\vec{n}\right|=\mathrm{tg}\frac{r}{R},\quad \left|\vec{n}'\right|=\mathrm{tg}\frac{r'}{R},\quad \left|\vec{n}''\right|=\mathrm{tg}\frac{r''}{R}, \tag{5.8}$$

где r/R, r'/R, r''/R – углы (в радианах), под которыми с центра сферы радиусом R наблюдаются соответствующие геометрические образы векторов на сфере, имеющие длины r, r', r''. Кроме того, следует воспользоваться определением скалярного произведения векторов $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ в форме (4.6), вводя угол Θ между ними, тогда из (5.7) получаем

$$\cos\frac{r''}{R}=\cos\frac{r}{R}\cos\frac{r'}{R}-\sin\frac{r}{R}\sin\frac{r'}{R}\cos\Theta. \tag{5.9}$$

Выражение (5.9) и является стандартным выражением теоремы косинусов на сфере, поскольку (рис. 20) $\Theta=\pi-\alpha$, где α – угол между касательными $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}'$ к геометрическим образам векторов, соответствующим векторам $\vec{n}$ и $\vec{n}'$, причем сами векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}'$ должны быть отнесены к общему началу.

5.3. Применение теории векторов на сфере для решения задач сферической астрономии

Рассмотрим задачу перехода от горизонтальной системы координат к экваториальной в сферической астрономии. В основе такого перехода лежит параллактический треугольник (рис. 21), вершинами которого являются точки зенита Z, полюса мира P и точка M, соответствующая какому-либо светилу. Координатами светила в горизонтальной системе являются зенитное расстояние z и азимут A, а в экваториальной – склонение δ и часовой угол t ($R = 1$). Часовой угол t известным образом связан с прямым восхождением.

На каждой из сторон параллактического треугольника зададим направление так, как это показано на рис. 22, и будем рассматривать стороны треугольника как векторы.

При этом вектор $\bar{P}M$ будем рассматривать как сумму векторов $\bar{P}Z$ и $\bar{Z}M$. Систему координат (x, y, z) с началом в центре сферы выберем так, чтобы вектор $\bar{P}Z$ лежал в координатной плоскости yz. Тогда, руководствуясь изложенными правилами, устанавливающими соответствие между геометрическими образами векторов, сопоставляемых сторонам параллактического треугольника, и их алгебраическими представлениями, для последних будем иметь

$$\vec{n}' = \left\{-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right), 0, 0\right\} \Leftrightarrow P\tilde{Z}, \tag{5.10а}$$

$$0\vec{n} = \left\{-\mathrm{tg}\, Z\cos A, \mathrm{tg}\, Z\sin A, 0\right\} \Leftrightarrow \bar{Z}M, \tag{5.10б}$$

$$\vec{n}'' = \left\{-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos t,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin t\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\right.$$
$$\left.\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right\} \Leftrightarrow \bar{P}M. \tag{5.10в}$$

Учитывая выбор направлений на сторонах параллактического треугольника, можно утверждать, что для алгебраических представлений векторов на сфере (5.10) выполняется правило (5.1). Далее, принимая во внимание структуру векторов (5.10), т. е. то, что

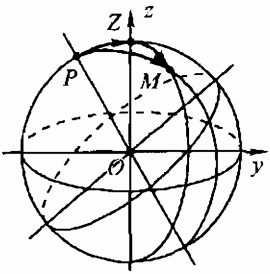


Рис. 21

$$\vec{n}' = \{n'_x, 0, 0\},$$
$$\vec{n} = \{n_x, n_y, 0\},$$
$$\vec{n}'' = \{n''_x, n''_y, n''_z\},$$

из формулы (5.1) получаем следующие выражения для проекций n''_x, n''_y, n''_z:

$$n''_x = \frac{n_x + n'_x}{1 - n_x n'_x}, \tag{5.11а}$$

$$n''_y = \frac{n_y}{1 - n_x n'_x}, \tag{5.11б}$$

$$n''_z = -\frac{n_y n'_x}{1 - n_x n'_x}. \tag{5.11в}$$

После подстановки в формулы (5.11а) и (5.11б) конкретных значений (5.10а), (5.10б) и деления формулы (5.11б) на (5.11а) получаем необходимое выражение для тангенса t через координаты светила M в горизонтальной системе координат (A, z) и широту φ места, где находится наблюдатель, т. е.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin A \sin z}{\cos z \cos\varphi + \sin z \sin\varphi \cos A}. \tag{5.12}$$

Выражение для косинуса угла склонения δ через A, z и φ получается подстановкой выражения (5.10) в теорему косинусов (5.7). В результате приходим к известной формуле

$$\cos\delta = \sin\varphi\cos z - \cos A\cos\varphi\sin z .$$

Для того чтобы получить выражение координат A, z через δ, t, φ, необходимо воспользоваться формулой

$$\vec{n} = \left\langle \vec{n}'', -\vec{n}' \right\rangle . \tag{5.13}$$

Формула (5.13) получается из формулы (5.1), если к обеим ее частям с правой стороны добавить вектор $(-\vec{n}')$ в смысле сложения, определяемого выражением (5.1), и воспользоваться свойствами (5.6), (5.7).

Отметим, что аналогичным образом могут быть определены переходы для иных пар координатных систем отсчета.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет решать задачи сферической астрономии, используя единственную формулу (5.1), тогда как стандартный подход требует знания многочисленных формул сферической тригонометрии.

Задачи. 1. Найдите длину дуги меридиана на глобусе диаметром 15 см, опирающуюся на угол 30°.

2. В треугольнике на сфере радиуса 15 см заданы три стороны в угловой мере 30°, 40°, 60°. Найдите все углы в данном треугольнике.

3. Докажите ассоциативность формулы сложения векторов на сфере (5.1).

4. Найдите расстояние между Санкт-Петербургом и Каиром, если широта, на которой находится Санкт-Петербург, 60° с. ш., Каира 30° с. ш., расстояние от меридиана, на котором расположен Санкт-Петербург, до Каира составляет 1100 км. Землю считать идеальным шаром с радиусом R = 6400 км.

5. Найдите длину стороны сферического треугольника, лежащего против угла в 5°, если две другие его стороны равны 90°. Принять $R = 1$.

6. Докажите, что высота, опущенная на основание в равнобедренном треугольнике сферического пространства, является медианой и бисектриссой.

7. Найдите зависимость величины угла равностороннего треугольника сферического пространства Римана от длины стороны.

Глава 6

ГЕОМЕТРИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

. Специальная теория относительности (СТО) – раздел физики, изучающий закономерности движений физических систем с большими скоростями, близкими к скорости света. Завершение формулировки Дж. К. Максвеллом и Г. А. Лоренцом электродинамики во второй половине XIX в. поставило вопрос об отношении вновь созданной теории к принципу относительности, лежащему в основе механики Ньютона. Проблема включала в себя два вопроса. Один из них касался законов движения под действием электромагнитных полей заряженных тел, в частности электрона, существование которого было постулировано Лоренцем для объяснения источников полей, описываемых уравнениями Максвелла. Другой вопрос относился к закономерностям распространения электромагнитных полей, описываемых уравнениями Максвелла. Как показал Дж. К. Максвелл, одним из следствий его уравнений явилось установление того факта, что оптические явления сводятся к электромагнитным и что свет имеет электромагнитную природу. Важным обстоятельством явился теоретический вывод выражения скорости света через электромагнитные константы. Это поставило вопрос о том, должна ли скорость света в результате преобразований Галилея преобразовываться согласно формуле (2.6) или же константа c, как обычно обозначают скорость света в вакууме, не должна изменяться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Как экспериментальные исследования, так и дальнейшее развитие теории показали, что скорость света не должна меняться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это обстоятельство нашло свое выражение в одном из постулатов созданной в связи с указанными проблемами специальной теории относительности, которая, по существу, вводила в физику новое представление о пространстве и времени. Данный постулат формулируется следующим образом: **скорость света (скорость распространения электромагнитных волн) в вакууме не зависит от скорости источника и направления распространения.**

Второй постулат теории относительности обобщает постулат относительности Галилея (см. параграф 2.5) на все физические явления и формулируется так: **физические явления в инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях протекают одинаково.** Отметим, что обычно используемый порядок нумерации постулатов СТО обратный приведенному здесь. Сформулированные постулаты принято называть постулатами Эйнштейна, хотя механика, удовлетворяющая данным постулатам, независимо была сформулирована А. Пуанкаре.

6.1. Пространство-время в специальной теории относительности

Фактически переход к физике, учитывающей возможность перемещений с большими скоростями, близкими к скорости света, означает переход к новой геометрии физического пространства. Особенностью этой новой геометрии являются новые отношения между пространством и временем, отличающиеся от отношений между пространством и временем в классической ньютоновской физике. Чтобы подчеркнуть особенности новой геометрии, приведем здесь еще раз в сжатом виде основные положения геометрии пространства, используемого в классической механике, имея в виду взаимоотношения пространства и времени.

Основная идея, проводимая в данной книге, как уже неоднократно подчеркивалось, состоит в том, что геометрия предполагает наличие движений, ее определяющих. Данные движения полностью определяют кинематику материальной точки и абсолютно твердого тела. Геометрии и связанные с ними движения характеризуются величинами, не меняющимися при движениях. Такие величины называются инвариантами движений и лежат в основе геометрий.

Напомним допустимые преобразования (движения) пространства и времени в классической физике. Движения пространства и времени в механике Ньютона включают повороты систем отсчета относительно друг друга и их относительные сдвиги, сдвиги начала отсчета времени и специальные преобразования Галилея. Специальные преобразования Галилея – это тот блок преобразований, который претерпевает изменение при переходе к специальной теории относительности, поэтому воспроизведем их еще раз полностью:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + v_0 t,\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= t.
\end{aligned}
\qquad (6.1)
$$

Формулы (6.1) определяют связь между декартовыми координатами $\{x', y', z'\}$ некоторой материальной точки A и временем их определения t' в неподвижной системе отсчета K' и координатами $\{x, y, z\}$ этой же точки и моментом времени t, в который они определялись в системе отсчета K, движущейся относительно первой со скоростью v_0 вдоль оси x. Направления осей двух систем отсчета выбраны параллельными, что не нарушает общности рассмотрения, так как евклидово пространство изотропно. Четвертое из преобразований (6.1) означает, что время для всех систем отсчета в классической физике одно и то же, или, другими словами, часы, которыми это время измеряется во всех системах отсчета, идут одинаково.

Теперь рассмотрим распространение электромагнитных сигналов, которые, кстати говоря, используются для синхронизации часов, находящихся в различных точках пространства и движущихся относительно друг друга с различными скоростями, а также для арифметизации пространства посредством локационного метода. Арифметизировать пространство – значит с помощью локационного метода определять расстояния до материальных тел (точек) в пространстве, например планет, и таким образом наделять их некоторыми координатами.

6.2. Преобразования Лоренца

Пусть по-прежнему две системы отсчета, ориентированные так же, как и в описанном выше случае, движутся относительно друг друга со скоростью v_0 (рис. 22).

Пусть в каждой из систем отсчета находится наблюдатель. Предположим, что в момент времени (будем считать его началом отсчета времени), когда начала отсчета двух систем совпали, происходит вспышка света от точечного источника света, излучающего во все стороны, находящегося в начале одной из систем отсчета. Пусть наблюдатели в обеих системах отсчета фиксируют, каждый в своей системе отсчета, достижение фронтом световой волны некоторой точки A, координаты которой совпадали, когда совпадали начала отсчета систем координат, т. е. в момент вспышки. Согласно постулату о скорости света, волна от вспышки в обеих системах координат будет распространяться с одной и той же скоростью, причем одинаковой по всем направлениям, таким образом, что точки фронта световой волны будут очевидно подчиняться уравнению сферы

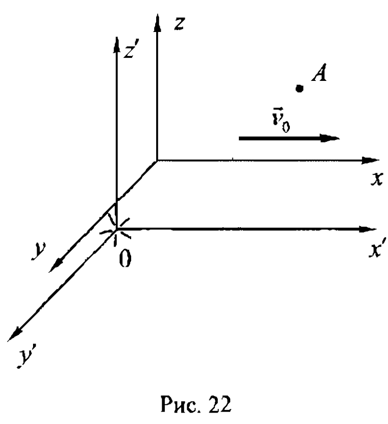


Рис. 22

$$\bar{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0 \qquad (6.2)$$

в системе отсчета K' и уравнению

$$\bar{r}^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad (6.3)$$

в системе отсчета K. Здесь

$$\bar{r}'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad (6.4)$$

$$\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (6.5)$$

Пока фронт волны распространялся после вспышки до точки $A(x', y', z')$ за время t' по часам системы K' в данной системе отсчета, система отсчета K сдвинулась на расстояние $v_0 t$ с точки зрения наблюдателя, связанного с системой K' вдоль оси x. В системе отсчета K фронт этой же волны достиг этой же точки, но уже с координатами (x, y, z) из-за сдвига начала системы K. С помощью преобразований Галилея невозможно добиться того, чтобы сферический фронт волны, имеющий место в системе отсчета K, оставался сферическим и в системе отсчета K', если полагать, что время не зависит от выбора системы, как это следует из четвертого преобразования (6.1). Таким образом, встает задача найти преобразования, оставляющие неизменными выражения (6.2) и (6.3), т. е. чтобы выполнялось условие

$$\bar{r}'^2 - c^2 t'^2 = \bar{r}^2 - c^2 t^2, \qquad (6.6)$$

или с учетом (6.4) и (6.5)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = inv, \qquad (6.7)$$

где inv при преобразованиях, определяемых нами, обозначает независимую величину, заданную в фиксированной системе отсчета, которая, в частности, может равняться нулю, как в (6.2), (6.3). Для вывода преобразований, оставляющих неизменными (инвариантными) (6.2), (6.3), заметим, что в силу того что оси y, z и y', z' систем соответственно неподвижны относительно друг друга, по-прежнему, имеют место второе и третье равенства (6.1). Тогда задача сводится к определению преобразований в двумерном пространстве (x, ct), оставляющих неизменными двумерные выражения

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2 = inv. \tag{6.8}$$

Для решения задачи введем следующие обозначения: $x_0 = ict$ и $x'_0 = ict'$, где i – мнимая единица, т. е. введенные нами величины являются чисто мнимыми, для них справедливы условия

$$x_0^* = -x_0, \ x'^*_0 = -x'_0. \tag{6.9}$$

С учетом введенных обозначений условие (6.8) может быть переписано в виде, формально совпадающем с выражениями для равенства длин векторов в евклидовом двумерном пространстве:

$$x'^2 + x'^2_0 = x^2 + x_0^2 = inv. \tag{6.10}$$

Как было показано в параграфе 1.3 (см. (1.13), (1.14) и пояснения к ним), выражение остается неизменным при двумерных вращениях (1.13). Однако необходимо учесть мнимость вторых слагаемых, стоящих под операцией возведения в квадрат в (6.10), и поэтому углы поворотов в данных преобразованиях вращений будут также чисто мнимы, т. е. должно иметь место

$$\begin{aligned} x &= x'\cos i\varphi + ict'\sin i\varphi, \\ ict &= -x'\sin i\varphi + ict'\cos i\varphi. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Полученные формулы (6.11) самосогласованы в том смысле, что действительные величины здесь остаются действительными, а чисто мнимые – чисто мнимыми при данных преобразованиях. Дело в том, что, согласно определению (3.5), функция $\cos i\varphi$ является действительной величиной: $(\cos i\varphi)^* = \cos(-i\varphi) = \cos i\varphi$ в силу четности косинуса, а функция $\sin i\varphi$ является, согласно определению (3.6), величиной, чисто мнимой: $(\sin i\varphi)^* = \sin(-i\varphi) = -\sin i\varphi$, так как синус – функция нечетная (см. задачи к параграфу 1.4).

Отметим, что тригонометрические функции мнимого аргумента выражаются через гиперболические функции. Определения гиперболических синуса и косинуса даны в Приложении 1.

Поскольку выражения (6.11) справедливы для любых точек системы K, рассмотрим случай, когда некоторая материальная точка в момент времени $t = 0$ находилась в точке $x = 0$. В этом случае мгновенная скорость движения точки и скорость движения системы отсчета K совпадают. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= x'\cos i\varphi + ict'\sin i\varphi, \\ 0 &= -x'\sin i\varphi + ict'\cos i\varphi. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Уравнения (6.12) имеют два решения относительно $i\varphi$: первое

$$\operatorname{tg} i\varphi = -\frac{x'}{ict'} = i\frac{v_0}{c} \tag{6.13}$$

и второе

$$c\operatorname{tg} i\varphi = \frac{x'}{ict'} = -i\frac{v_0}{c}, \tag{6.14}$$

где v_0, как уже сказано, – скорость, совпадающая со скоростью движения системы K относительно K'. Только первое из решений (6.13) имеет физический смысл. Однако имеет смысл пояснить это позже. Здесь же учтем, что

$$\sin i\varphi = \frac{\operatorname{tg} i\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i\varphi}} = \frac{iv_0 / c}{\sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}, \tag{6.15}$$

а

$$\cos i\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}. \tag{6.16}$$

Подставив (6.15) и (6.16) в (6.11), получим выражение преобразований Лоренца, посредством которых системы отсчета преобразуются при больших, сравнимых со скоростью света скоростях их движения:

$$x = \frac{x' - v_0 t}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \tag{6.17}$$

$$t = \frac{t' - x' v_0 / c^2}{\sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}. \tag{6.18}$$

Важной особенностью формул (6.17), (6.18) является то, что при малых скоростях v_0, удовлетворяющих условию $v_0 \ll c$, они переходят в преобразования Галилея (6.1) (напомним, что переменные y и z по-прежнему остаются неизменными). Отметим, что данное требование малости в формулах (6.17), (6.18) будет удовлетворено, если пренебречь членами, содержащими скорость света в квадрате.

С ситуацией, когда уже существующая теория должна входить в новую в виде ее предельного, частного случая, впервые столкнулся Н. И. Лобачевский, обнаруживший, что построенная им неевклидова геометрия содержит евклидову в пределе стремления радиуса кривизны к бесконечности. В настоящее время такое условие для вновь создаваемой теории называется принципом соответствия. В частности, оно имеет место в теории относительности, квантовой механике, естественно, – в римановой геометрии, в чем мы убедились в параграфе 5.2, когда в пределе малой кривизны получили из формулы сложения векторов на сфере формулу сложения векторов евклидового пространства. Принцип соответствия является важным методологическим принципом, которым должны руководствоваться все исследователи. Данному принципу должна подчиняться любая новая научная теория. Он играет роль необходимого, но недостаточного условия, которому должны подчиняться вновь создаваемые теории.

Преобразования, обратные преобразованиям Лоренца (6.17), (6.18), осуществляющие переход от координат в движущейся системе отсчета к координатам в неподвижной системе, имеют вид

$$x' = \frac{x + v_0 t}{\sqrt{1-(v_0 / c)^2}}, \tag{6.19}$$

$$t' = \frac{t + x v_0 / c^2}{\sqrt{1-(v_0 / c)^2}}. \tag{6.20}$$

При скорости движения системы отсчета, равной скорости света ($v_0 = c$), преобразования Лоренца (6.17), (6.18) становятся неопределенными. Из данного факта следует, что инерциальных систем отсчета, движущихся со скоростями, равными скорости света в вакууме, быть не может, так как в рамках специальной теории относительности множество всех инерциальных систем включает системы отсчёта, которые могут быть связаны между собой преобразованиями Лоренца аналогично тому, как в классической механике Ньютона множество инерциальных систем отсчета эквивалентны в смысле возможности установления связи между ними посредством преобразований Галилея. При этом подчеркнем еще раз, что наше утверждение относительно инерциальных систем отсчета в механике Ньютона и преобразований Галилея в данном ситуации следует как частный случай из утверждения для инерциальных систем отсчета в СТО и преобразований Лоренца.

6.3. Некоторые следствия из преобразований Лоренца

Одним из следствий преобразований Лоренца является сокращение пространственных масштабов в направлении движения. Действительно, пусть в движущейся системе отсчета K вдоль оси x расположен стержень, движущийся вместе с ней, и его длина $l_0 = x_2 - x_1$. Поскольку с точки зрения наблюдателя (человека, измеряющего длину движущегося стержня в неподвижной системе отсчета) измерить длину стержня – значит определить координаты его начала и конца одновременно по часам этой же системы отсчета, то, используя преобразования Лоренца (6.17), (6.18), получаем

$$x_2 - x_1 = l_0 = \frac{x'_2 - v_0 t}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - \frac{x'_1 - v_0 t}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \\ \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}, \tag{6.21}$$

где x_1, x_2 – координаты концов стержня в системе отсчета K; l_0 – его длина в этой системе.

Из формулы (6.21) видно, что стержень имеет максимальную длину l_0 в системе отсчета, в которой он покоится. Длина стержня сокращается в направлении его движения согласно формуле

$$l = l_0 \sqrt{1-(v_0/c)^2}. \tag{6.22}$$

Вторым важным следствием из преобразований Лоренца является вывод об относительности промежутков времени, измеряемых в различных системах отсчета. Пусть в системе отсчета K часы, неподвижные относительно нее, измеряют промежуток времени $\Delta t = T_0 = t_2 - t_1$ между двумя событиями в некоторой точке с координатой x этой системы, произошедшими в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Как уже говорилось, с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно системы K', эти события, вообще говоря, происходят в разных точках. Для установления связи промежутков времени между упомянутыми событиями в двух системах воспользуемся преобразованием (6.20). Тогда будем иметь

$$\Delta t = T = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 + x v_0/c^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - \frac{t_1 + x v_0/c^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \\ \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}, \tag{6.23}$$

где t_1' и t_2' – моменты времени рассматриваемых событий в системе K'; T – промежуток времени между данными событиями в системе K'. Из формул (6.23) следует, что промежутки времени в системах отсчета K' и K между одномоментными событиями связаны соотношением

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{6.24}$$

из которого следует, что в отличие от механики Ньютона, в которой справедлив принцип относительности Галилея, время в разных системах отсчета течет по-разному. Минимальным будет промежуток времени, измеренный часами, неподвижными относительно системы отсчета. Такое время называется собственным.

Следует пояснить понятие одномоментности. Именно на нем покоится вывод формулы (6.24). Одномоментными называются события, происходящие в одной точке пространства и имеющие равный нулю промежуток времени между собой. События одномоментные в одной инерциальной системе отсчета будут такими в любой другой инерциальной системе отсчета. В этом смысле понятия одномоментности являются абсолютными. Как видно из формулы (6.24), при $T_0 = 0$ также $T = 0$ и наоборот.

6.4. Закон сложения скоростей в специальной теории относительности

Изменение закона преобразования инерциальных систем отсчета влечет за собой изменение закона сложения скоростей. Действительно, пусть x обозначает координаты материальной точки в системе K, а x' – в K'. Пусть в момент t_1 материальная точка находилась в точке x_1, а в момент t_2 – в точке x_2 в системе K. Тогда в системе отсчета K' моментам времени t_1 и t_2 будут соответствовать моменты времени t'_1 и t'_2, координатам x_1 и x_2 – координаты x'_1 и x'_2, связанные преобразованиями Лоренца (6.19), (6.20). Тогда, исходя из определения средней скорости, будем иметь

$$v'_{\text{ср}} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\dfrac{x_2 + v_0 t_2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - \dfrac{x_1 + v_0 t_1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}}{\dfrac{t_2 + x_2 v_0/c^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - \dfrac{t_1 + x_1 v_0/c^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}} = \frac{x_2 - x_1 + v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1 + \dfrac{(x_2 - x_1)v_0}{c^2}} = \tag{6.25}$$

$$\frac{\Delta x + v_0 \Delta t}{\Delta t + \dfrac{\Delta x v_0}{c^2}} = \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + v_0}{1 + \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\dfrac{v_0}{c^2}} = \frac{v_{\text{ср}} + v_0}{1 + \dfrac{v_{\text{ср}} v_0}{c^2}}.$$

Нетрудно понять, что выражение (6.25) для формулы сложения скоростей в специальной системе координат сохранится для мгновенных скоростей, когда перейдем к пределу $\Delta t \to 0$ и, таким образом, вместо классической формулы сложения скоростей (2.6) получим

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + \dfrac{v v_0}{c^2}} \tag{6.26}$$

или для скорости v, выраженной через v' и v_0:

$$v = \frac{v' - v_0}{1 - \dfrac{v' v_0}{c^2}}. \tag{6.27}$$

Последнюю формулу можно вывести аналогично тому, как была выведена формула (6.26), но воспользоваться для этого формулами (6.17), (6.18). Отличительной особенностью формул является то, что в случае равенства одной из скоростей, входящих в их правую часть, скорости света в вакууме c результат также всегда равен c по абсолютной величине.

Из формул (6.26), (6.27) видно, что скорости в специальной теории относительности не образуют линейное пространство, как это было в механике Ньютона (см. параграф 2.3).

Следует сказать, что для произвольно направленных скоростей имеет место формула, аналогичная формуле (5.1), однако существенно отличающаяся по содержанию. Пространство скоростей в СТО подчиняется законам неевклидовой геометрии Лобачевского.

Вывод формулы сложения произвольно направленных скоростей в специальной теории относительности выходит за рамки данной книги.

6.5. Четырехмерное псевдоевклидово пространство СТО

Преобразования Лоренца (6.17)–(6.20), пришедшие на смену преобразованиям Галилея, совершенно по-новому устанавливают отношения пространства и времени при описании движений физических систем со скоростями сравнимыми со скоростью света, – как отличные от отношений пространства и времени в механике Ньютона. В специальной теории относительности пространство и время естественным образом объединяются в четырехмерное пространство-время. Действительно, положение материальной точки при ее движении задается тремя координатами в системе координат (например, декартовой), связанной с некоторой инерциальной системой отсчета и моментом времени, в который данные координаты определены. В принципе, то же можно сказать и о материальной точке в механике Ньютона. Однако в механике Ньютона отсутствует универсальная физическая константа – скорость распространения электромагнитных сигналов (в частности, скорость света) в вакууме c. Благодаря данной константе можно ввести четвертую координату $x_0 = ict$ (что уже было сделано выше при выводе преобразований Лоренца), которая имеет размерность длины, как и три остальные, в системе единиц, например, СИ.

Таким образом, движение материальной точки в специальной теории относительности описывается точками четырехмерного пространства, координаты которого определяются как координаты трехмерного евклидового пространства x, y, z, дополненные координатой ict, и благодаря этому объединяются в координаты четырехмерного пространства, точки которого можно рассматривать также как концы четырехмерного их радиус-вектора с координатами $\{x, y, z, ict\}$. Векторы четырехмерного пространства будем обозначать также буквой без индекса и без стрелки над буквой, его обозначающей: $x = \{x_1, x_2, x_3, x_0\} = \{\vec{x}, x_0\}$. В дальнейшем введенные нами векторы четырехмерного пространства-времени будем называть 4-векторами. Нетрудно проверить, что введенные таким образом векторы будут удовлетворять аксиомам линейного вещественного пространства (см. параграф 1.6) размерности 4. Подчеркнем, что именно вещественного, несмотря на то что нами введена чисто мнимая четвертая координата для векторов такого пространства. Можно избежать введения мнимой единицы и сделать изложение, оперирующее только вещественными величинами, однако это усложнило бы материал. Тем не менее очевидно, что даже с четвертой чисто мнимой единицей определенные таким образом векторы подчиняются аксиомам параграфа 1.6, когда множитель λ в них выбран чисто вещественным числом.

Для определенных 4-векторов вводится скалярное произведение вполне аналогично тому, как это делается в трехмерном евклидовом пространстве. Если заданы два 4-вектора $x = \{x_1, x_2, x_3, x_0\} = \{\vec{x}, x_0\}$ и $x' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_0\} = \{\vec{x}', x'_0\}$, то их скалярное произведение:

$$xx' = x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 + x_0x'_0 = x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 - c^2tt' =$$
$$(\vec{x}\vec{x}') + x_0x'_0 = (\vec{x}\vec{x}') - c^2tt'. \quad (6.28)$$

Введенное четырехмерное пространство называется псевдоевклидовым. В физике такое пространство также называют пространством Минковского, хотя следует заметить, что А. Пуанкаре ранее Г. Минковского дал формулировку механики и электродинамики в терминах четырехмерного псевдоевклидового пространства, не акцентируя внимания на особенностях его геометрии.

Существенной особенностью скалярного произведения (6.28) является наличие знака минус перед одним из слагаемых. Этим отличается скалярное произведение в псевдоевклидовом пространстве от скалярного произведения в четырехмерном евклидовом пространстве. Наличие знака минус приводит к тому, что указанное скалярное произведение может быть больше нуля, меньше нуля или принимать нулевое значение тогда, когда отличны от нуля составляющие 4-векторов, в то время как скалярное произведение в евклидовом пространстве всегда больше нуля, а равно нулю, только когда один их векторов-сомножителей нулевой, т. е. имеет все составляющие, равные нулю. В частности, скалярное произведение 4-вектора самого на себя дает выражения типа (6.2), (6.3) (см. также (6.6), (6.7)), которые, как было показано выше, являются величиной, не меняющейся при допустимых движениях данного пространства. Это же справедливо и в отношении скалярного произведения общего вида (6.28).

Точки четырехмерного пространства-времени называются событиями. Имеется в виду, что появление материальной точки в данной точке пространства в данный момент времени есть событие. Линия в таком пространстве-времени, которую проходит материальная точка в результате своего движения, называется мировой линией материальной точки. Расстояние между двумя точками A и B с координатами соответственно $x^{(A)} = \{x_1{}^{(A)}, x_2{}^{(A)}, x_3{}^{(A)}, x_0{}^{(A)}\}$ и $x^{(B)} = \{x_1{}^{(B)}, x_2{}^{(B)}, x_3{}^{(B)}, x_0{}^{(B)}\}$ в псевдоевклидовом 4-пространстве определяется как корень квадратный из разности 4-векторов

$$x^B - x^A = \{x_1^{(B)} - x_1^{(A)}, x_2^{(B)} -$$
$$x_2^{(A)}, x_3^{(B)} - x_3^{(A)}, x_0^{(B)} - x_0^{(A)}\},$$

скалярно умноженной на себя, т. е. из величины

$$\begin{gathered}(\Delta S)^2 = (x_1^{(B)} - x_1^{(A)})^2 + (x_2^{(B)} - x_2^{(A)})^2 + \\ (x_3^{(B)} - x_3^{(A)})^2 + (x_0^{(B)} - x_0^{(A)})^2 = \\ (x_1^{(B)} - x_1^{(A)})^2 + (x_2^{(B)} - x_2^{(A)})^2 + \\ (x_3^{(B)} - x_3^{(A)})^2 - c^2(t^{(B)} - t^{(A)})^2.\end{gathered} \tag{6.29}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\Delta S = \sqrt{(x_1^{(B)} - x_1^{(A)})^2 + (x_2^{(B)} - x_2^{(A)})^2 +} \\ \overline{(x_3^{(B)} - x_3^{(A)})^2 - c^2(t^{(B)} - t^{(A)})^2} = \\ \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2(\Delta t)^2}.\end{gathered}$$

Такая величина называется релятивистским (от англ. relatively – относительно) интервалом. Как уже было сказано, $(\Delta S)^2$ может принимать значения

$$(\Delta S)^2 < 0; (\Delta S)^2 > 0, (\Delta S)^2 = 0. \tag{6.30}$$

Интервал, подчиняющийся первому из условий в (6.30), называется времениподобным, второму – пространственноподобным и третьему условию – светоподобным, или изотропным. Первый из интервалов связан с собственным временем. Действительно, величина

$$\begin{gathered}\Delta\tau = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2} = \\ c\Delta t\sqrt{1 - \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}{c^2}} = c\Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},\end{gathered} \tag{6.31}$$

только заменой знака подкоренного выражения отличающаяся от (6.29), совпадает с точностью до умножения на скорость света c с собственным временем T_0 в (6.24). Соответственно здесь Δt совпадает с T той же формулы (6.24).

Подчеркнем одно обстоятельство, которое обычно не отмечается, а именно то, что времениподобный интервал в пределе малых скоростей соответствует величине, не меняющейся при преобразованиях Галилея (инварианту) – времени, которое в механике Ньютона одинаково во всех системах отсчета, а пространственноподобный интервал соответствует трехмерной евклидовой длине. Светоподобный интервал не имеет аналога в механике Ньютона, так как он связан с распространением фотонов, которые отсутствуют в данной теории.

Использование четырехмерных векторов, а также величин, не меняющихся при преобразованиях Лоренца – инвариантов данных преобразований, дает возможность построения механики материальной точки, автоматически удовлетворяющей обоим постулатам А. Эйнштейна. Что касается механики абсолютно твердого тела, то в силу (6.22) расстояние между двумя точками в трехмерном евклидовом пространстве не инвариантно относительно преобразований Лоренца и, следовательно, введение понятия «абсолютно твердое тело» в СТО невозможно.

6.6. Уравнения динамики материальной точки в СТО. Энергия-импульс в СТО

Перемещение материальной точки вдоль ее мировой линии характеризуется ее четырехмерным (мировым) вектором. Мировой четырехмерный вектор имеет вполне определенные свойства относительно преобразований Лоренца. Имеется в виду то, что при данных преобразованиях преобразуемый четырехмерный вектор останется четырехмерным вектором и при последующих преобразованиях повторяется то же. Сказанное, очевидно, не применимо в отношении вектора трехмерного пространства, посредством которого определялось положение точки в каждый момент времени в классической механике Ньютона. Хотя положение материальной точки и можно задать в некоторый начальный момент времени $t=0$ с помощью трех координат, это будет означать только то, что мы рассматриваем положения материальной точки, когда ее мировой вектор имеет частный вид $x=\{x_1, x_2, x_3, 0\} = \{\vec{x}, 0\}$, и при переходе к некоторой произвольной системе отсчета в результате преобразований Лоренца все его четыре составляющие, вообще говоря, будут отличны от нуля.

Аналогично классической механике определение мгновенной скорости можно осуществлять взятием производной, но уже от четырехмерного вектора по инвариантной величине, имеющей смысл времени. Так мы поступали в классической механике, оперируя с трехмерными векторами евклидового пространства, так целесообразно поступать в интересующем нас случае. При таком подходе получившаяся в результате взятия производной величина скорости также будет 4-вектором и будет иметь необходимые свойства при преобразованиях Лоренца.

Временным параметром инвариантным (не меняющимся) при преобразованиях Лоренца, является собственное время (6.31). Тогда, учитывая это, 4-скорость материальной точки в СТО определим как

$$U = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \frac{dx}{d\tau} \to \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}, i\frac{dx_0}{d\tau}\right) = \\ (\vec{U}, iU_0) = \left(\frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (6.32)$$

Из определения следует, что 4-скорость – величина безразмерная, а ее скалярный квадрат равен -1, т. е.

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 - U_0^2 = \vec{U}^2 - U_0^2 = -1 . \qquad (6.33)$$

Четырехмерный импульс p определяется как произведение массы частицы m на скорость света и на 4-скорость:

$$p = mcU = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{imc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \left(\bar{p}, i\frac{\varepsilon}{c} \right), \tag{6.34}$$

где $\bar{p}$ – трехмерный импульс. В пределе малых скоростей данная величина переходит в обычный импульс, определяемый в механике Ньютона. Для перехода к механике Ньютона следует учитывать, что при $v \ll c$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sim 1 + \frac{v^2}{2c^2}. \tag{6.35}$$

Для обоснования выражения (6.35) требуется знать начала теории рядов, изложение которых выходит за рамки данной книги, поэтому читателю придется принять его без доказательств. Напомним, что переход к нерелятивистской (ньютоновой) физике осуществляется при пренебрежении членами, начиная с членов разложения типа (6.35), содержащих $1/c^2$.

Величина

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.36}$$

является релятивистской энергией материальной точки. В нерелятивистском пределе

$$\varepsilon = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{6.37}$$

Второй член в выражении (6.37) совпадает с выражением кинетической энергии частицы, а первый член не имеет аналога в механике Ньютона и выражает то известное обстоятельство, что, согласно теории относительности с любой массой, даже покоящегося тела, связана энергия, определяемая известной формулой А. Эйнштейна

$$\varepsilon = mc^2, \tag{6.38}$$

выражающей закон эквивалентности массы и энергии.

Исходя из вышесказанного, кинетическую энергию материальной точки в релятивистской теории следует определить как

$$\varepsilon_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Из формул (6.34), (6.36) видно, что скорость частицы не может превышать скорость света. Если скорость частицы превысила бы скорость света, то импульс частицы и ее энергия приняли бы мнимые значения, что физически бессмысленно. Напомним, что при выводе самих преобразований Лоренца в принципе существовала возможность, связанная с формулой (6.14) вывода преобразований, содержащих скорости больше скорости света. Кроме того, если воспользоваться вариантом, связанным с формулой (6.14), то невозможно удовлетворить требованию принципа соответствия, получить в пределе малых скоростей механику Ньютона.

Аналог второго закона Ньютона в четырехмерной форме будет иметь вид

$$\frac{dp}{d\tau} = mc\frac{dU}{d\tau} = f, \tag{6.39}$$

где $f = (\vec{f}, if_0)$ – 4-вектор силы, которая также называется силой Минковского.

Умножив левую и правую части (6.39) скалярно на U, получим, что

$$U\frac{dU}{d\tau} = \frac{d(U^2)}{d\tau} = 0 \tag{6.40}$$

в силу (6.33). Справедливость формулы (6.40) легко можно установить, если воспользоваться правилами дифференцирования сложной функции и произведения (см. Приложение 2). Из (6.40) следует, что скалярное произведение 4-скорости на 4-ускорение всегда равно нулю и, значит, скалярное произведение 4-скорости на 4-силу также всегда равно нулю:

$$(Uf) = 0 .$$

Из определения 4-вектора импульса, который также называют вектором энергии-импульса, следует важное соотношение между энергией и импульсом частицы

$$p^2 = \vec{p}^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m^2c^2 . \qquad (6.41)$$

В природе существуют частицы, которые имеют массу, равную нулю. Эти частицы движутся со скоростью, равной скорости света в вакууме. Примерами таких частиц являются частицы света – фотоны. Для них выражение (6.41) принимает вид

$$p^2 = \vec{p}^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = 0 . \qquad (6.42)$$

Очевидно, частицы, для которых выполняется соотношение (6.42), обладают энергией, импульсом, но их масса равна нулю. Для них определен 4-импульс, но не определена 4-скорость.

Согласно формуле (6.38), покоящиеся массы могут порождать движущиеся массы в той системе, где они покоились, и, наоборот, движущиеся массы могут превращаться в покоящиеся, что и происходит в ядерных реакциях и процессах взаимодействия частиц в микромире.

Законы сохранения в СТО. Как уже было замечено в параграфе 4.7, законы сохранения в физике связаны со свойствами симметрии пространства и времени. Эти свойства пространства и времени в свою очередь определяются допустимыми движениями в физическом пространстве и пространстве-времени. Переход от пространства-времени классической механики к пространству-времени СТО не меняет свойств изотропии, однородности пространства, а также и однородности времени. В СТО эти свойства являются частным случаем изотропии и однородности четырехмерного пространства-времени. Общие допустимые преобразования движений пространства-времени содержат вращения четырехмерного псевдоевклидового пространства, каковым является пространство-время Минковского. Такие преобразования и называются преобразованиями Лоренца. Как частные случаи преобразования Лоренца содержат преобразования вращений трехмерного пространства и преобразования (6.17)–(6.20). Преобразования сдвигов трехмерного пространства и времени объединяются в преобразования сдвигов четырехмерного пространства-времени и являются отражением однородности данного четырехмерного пространства. В результате вместо закона сохранения трехмерного вектора импульса и закона сохранения энергии имеем закон сохранения четырехмерного вектора энергии-импульса, естественным образом возникшего в СТО. Однако поскольку закон сохранения векторной величины означает сохранение каждой из составляющих вектора, то, очевидно, по-прежнему имеют место законы сохранения как импульса, так и энергии.

В результате того что преобразования вращения трехмерного пространства стали подмножеством преобразований вращения четырехмерного пространства, отражающих его свойство изотропии, вместо сохраняющейся величины вектора момента количества движения возникает математическая величина, называемая тензором момента количества движения. Данная величина по причине, аналогичной той, по которой в СТО сохраняются по отдельности энергия и импульс, обеспечивает сохранение вектора момента количества движения. Определение тензоров и описание их свойств не входит в задачи данной книги.

З а д а ч и. 1. Рассчитайте, сколько лет назад покинул звезду Кассиопея А свет, попавший в объектив телескопа в момент, когда Вы читаете эти строки. Подумайте, что тогда было на Земле. Расстояние до этой звезды 9×10^{19} м.

Что можно сказать о состоянии самой звезды в данный момент?

2. В инерциальной системе отсчета «Альфа» событие S произошло в момент t_α и в точке с координатой x_α. Определите момент t_β и координату x_β этого же события в другой инерциальной системе отсчета, которая движется относительно «Альфа» с постоянной скоростью v в направлении их совпадающих осей x. Начальное событие в обеих системах отсчета – одно и то же. Рассмотрите ситуацию с точки зрения классической механики, используя преобразования Галилея, и с точки зрения СТО, используя преобразования Лоренца.

3. Найдите выражение для 4-скорости в системе отсчета, где частица покоится.

4. Найдите общий вид мгновенного 4-ускорения частицы в ее системе покоя.

5. Сколько джоулей энергии высвобождается при термоядерном синтезе 4 г гелия дейтерия и трития с выделением нейтрона? Сравните с теплотворной способностью бензина.

6. В реакции аннигиляции электрон-позитронной пары пара-электрон e и позитрон $\tilde{e}$ превращаются в фотоны (γ-кванты). Докажите, что в такой реакции не может образоваться один фотон.

Задачи 2 и 5 взяты из сборника: Соколовский Ю. И. Элементарный задачник по теории относительности. – М.: Наука, 1971.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрия играла и продолжает играть определяющую роль в развитии физики. История физики после создания СТО подтверждает данное утверждение. Примером тому служит возникновение, становление и последующее влияние на современную физику общей теории относительности – теории тяготения, обобщающей классическую теорию тяготения Ньютона таким образом, чтобы она учитывала возможность движения материальных тел со скоростями, близкими к скорости света, и наличие сильных гравитационных полей.

Современная теория тяготения – общая теория относительности (ОТО) – основана на нелинейных уравнениях, сформулированных в четырехмерном псевдоримановом пространстве-времени. Заметим, что если в главе 5 мы познакомились с простейшей римановой геометрией, которая является двумерной, то в ОТО используется 4-мерная псевдориманова геометрия. В малой окрестности точки данной геометрии реализуется геометрия 4-мерного пространства-времени СТО в полном согласии с принципом соответствия. В уравнениях ОТО, сформулированных в такой геометрии, реализована идея А. Эйнштейна, состоящая в том, что геометрия (метрика), определяющая кривизну физического пространства-времени, и распределение материи (вещества, физических полей) в пространстве-времени взаимообусловлены. В предельном случае малых по сравнению со скоростью света скоростей движения тел и малых значений напряженностей гравитационных полей ОТО переходит в ньютоновскую теорию тяготения.

В ОТО установлены три классических эффекта, отсутствующие в теории тяготения Ньютона: смещение перигелия планеты Меркурий, отклонение направления распространения световых лучей (пучков электромагнитных волн) вблизи массивных космических тел, гравитационный сдвиг частот светового (электромагнитного) излучения в красную (низкочастотную) область спектра. Уравнения ОТО допускают космологические решения, лежащие в основе современного описания Вселенной в целом, – модели Фридмана, де Ситтера и др.

Идеи ОТО широко используются при построении современных теорий, претендующих стать первоосновой для объяснения всех физических явлений.

Тригонометрические и гиперболические функции

Автор предполагает, что читатель знаком с определением тригонометрических функций. Однако при введении производных от тригонометрических функций понадобятся определения, которые будут приведены ниже.

Функцией $\cos\varphi$ назовем проекцию на ось абсцисс радиус-вектора точки, лежащей на окружности единичного радиуса (рис. 23). Аргумент φ есть угол между радиус-вектором рассматриваемой точки и осью абсцисс.

Функцией $\sin\varphi$ назовем проекцию на ось ординат радиус-вектора точки, лежащей на окружности единичного радиуса.

Используемые в основном тексте функции $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ для наших целей достаточно определить как

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\ \text{а}\ \operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},\ \text{т. е.}\ \operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Из определения функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и рис. 24 непосредственно следует известное тождество

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,$$

которое здесь есть следствие теоремы Пифагора.

Используя (3.13)

$$e^{i\varphi}=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

и комплексно сопряженное выражение

$$e^{-i\varphi}=(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

тригонометрические функции можно выразить че-

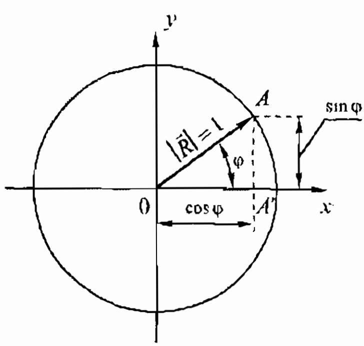


Рис. 23

рез экспоненциальную функцию. Действительно, сложив эти выражения, получим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \tag{П1}$$

а вычтя, –

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{П2}$$

Теперь можно определить гиперболические функции. Фактически такие функции использовались нами при выводе преобразований Лоренца в главе 6.

Гиперболический косинус определяется по аналогии с (П1) как косинус от чисто мнимого аргумента:

$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \cos(i\varphi),$$

аналогично гиперболический синус:

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = -i\sin(i\varphi).$$

Для гиперболических синуса и косинуса имеет место тождество

$$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1.$$

Отметим, что поведение гиперболических функций существенно отличается от поведения тригонометрических. В частности, гиперболические функции не являются периодическими.

Производная. Производные от некоторых функций

Понятие производной базируется на понятии предела. Поэтому прежде чем дать определение производной, остановимся на понятии предела.

Обычно предел b функции y при аргументе x, стремящемся к своему некоторому значению a, обозначают как $\lim\limits_{x \to a} y = b$. Данное выражение имеет следующий смысл: какова бы ни была окрестность V числа b, существует такая окрестность U числа a, что $y \in V$ всякий раз, когда $x \in U$, за исключением, быть может, $x = a$.

Отметим, что мы воспользовались определением из книги: Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. Читатель, желающий углубить свои знания в области математического анализа, может обратиться к данной книге или другим пособиям. Нам определение предела нужно только для определения производной функции. Поэтому без доказательства приведем ряд утверждений, справедливость которых будет подразумеваться в дальнейшем при доказательствах некоторых свойств производных.

Предел суммы двух выражений равен сумме пределов этих выражений.

Предел произведения двух выражений равен произведению пределов данных выражений.

П р о и з в о д н а я ф у н к ц и и. Производной $y' = dy/dx$ функции $y = f(x)$ называется предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx},$$

где $\Delta x = x' - x$ – приращение аргумента функции; $\Delta y = f(x') - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение самой функции, вызванное приращением аргумента; dy – дифференциал функции; dx – дифференциал аргумента.

Таким образом, производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, вызвавшему это приращение функции при стремлении приращения аргумента к нулю.

Из определения производной легко получить выражения для производных простейших степенных функций, а также установить некоторые необходимые нам свойства производной.

Начнем с общих свойств. Производная суммы функций равна сумме производных от этих функций. Представляется, что читатель без труда докажет данное утверждение исходя из определения производной.

Производная произведения $[f(x)\varphi(x)]'$ двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$: $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$. Доказательство данного утверждения сложнее, чем предыдущее утверждение, поэтому приведем его. Согласно определению производной

$$\Delta[f(x)\varphi(x)] = f(x + \Delta)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x) =$$
$$f(x+\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - f(x)\varphi(x) -$$
$$f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\varphi(x+\Delta x) = f(x+\Delta)\varphi(x+\Delta x) -$$
$$f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\varphi(x+\Delta x) -$$
$$f(x)\varphi(x) = [f(x+\Delta) - f(x)]\varphi(x+\Delta x) +$$
$$f(x)[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = \Delta f(x)\varphi(x+\Delta x) + f(x)\Delta\varphi(x).$$

Взяв отношение полученного приращения произведения к Δx и взяв предел выражения, устремив Δx к нулю, получим приведенное выше выражение. Производная $f'(\varphi(x))$ сложной функции определяется как $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = f_\varphi'\varphi'$. При желании читатель легко докажет справедливость данного правила взятия производной от сложной функции.

Используя определение производной и установленные выше ее свойства, легко получить следующие производные некоторых функций.

1. Производная постоянной функции равна нулю, т. е. если $y = a$, то $y' = 0$.

2. Производная линейной функции: $y = ax + b$, $y' = a$.

3. Производная квадратичной функции $y = x^2$, $y' = 2x$.

4. Производная степенной функции $y = x^n$, где n – целое число $y' = nx^{n-1}$.

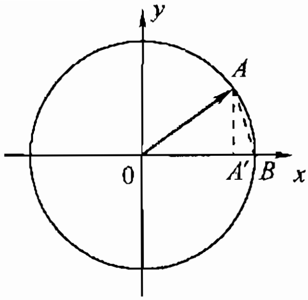


Рис. 24

При выводе некоторых из приведенных ранее производных следует учитывать, что бесконечно малыми второго порядка (например, $(\Delta x)^2$ при $\Delta x \to 0$) и выше необходимо пренебрегать.

В основном тексте приходилось брать производные от тригонометрических и экспоненциальной функций. Для того чтобы определить производные от функций $\sin$ и $\cos$, необходимо знание того, что $\lim\limits_{\beta \to 0} \cos\beta = 1$, что очевидно, например, из геометрического определения функции $\cos$, данного выше. Сложнее доказать следующее: $\lim\limits_{\beta \to 0} \dfrac{\sin\beta}{\beta} = 1$ – первый замечательный предел. Для доказательства следует опять обратиться к определению функции $\sin$, данному выше, и принять во внимание (рис. 24), что угол β в единицах длины окружности – это отрезок AB окружности, $\sin\beta = AA'$ по определению и при $\beta \to 0$ $\sin\beta$ снизу, а угол β сверху стремятся к одной и той же величине – длине хорды AB, и, следовательно, данный предел равен единице.

Теперь определим производную $(\sin x)'$ функции $\sin x$:

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\cos(\Delta x) - 1]\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Мы воспользовались формулой (1.20б).

Первый из пределов, получившихся в результате, равен нулю. Действительно, преобразуем

$$\cos(\Delta x) - 1 = -\sin^2\frac{(\Delta x)}{2}$$

и тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\cos(\Delta x)-1]\sin x}{\Delta x} = -\frac{\sin x}{2}\lim_{\Delta x'\to 0}\sin(\Delta x')\lim_{\Delta x'\to 0}\frac{\sin(\Delta x')}{\Delta x'} = 0,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x'\to 0}\sin(\Delta x') = 0$. Здесь $\Delta x' = \dfrac{\Delta x}{2}$. Тогда видно, что с учетом первого замечательного предела во втором слагаемом получаем

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

Аналогичным образом легко установить, что

$$(\cos x)' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Последнее предлагается вывести читателю.

Используя полученные формулы для производных функций $\sin x$ и $\cos x$ и правило взятия производной от сложной функции, используя представление (3.13) для комплексной экспоненты, можно показать, что

$$(e^{ix})' = \frac{d}{dx}(e^{ix}) = ie^{ix}.$$

Если есть функция $e^{i\omega x}$, то $\dfrac{d}{dx}(e^{i\omega x}) = \dfrac{de^{i\omega x}}{d(i\omega x)}\dfrac{d(i\omega x)}{dx} =$ $i\omega e^{i\omega x}$. Данное выражение необходимо для решения дифференциального уравнения (3.30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989.

2. *Кузичева З. А.* Векторы, алгебры пространства. Серия «Математика и кибернетика». – М.: Знание, 1970.

3. *Понтрягин Л. С.* Метод координат. – М.: Наука, 1977.

4. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 366–382.

5. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа). – М.: ГИТЛЛ, 1956. – С. 399–434.

6. *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.

7. *Кісель В. В., Курачкін Ю. А., Отчык У. С.* Некаторыя трыганаметрычныя роўнасці і меркаванні сімметрыі ў фізіцы / Труды конф. «Проблемы теории и методики преподавания математики, физики и астрономии». Ч. II. Минск: БДПУ, 1998. – С. 12–14.

8. *Кісель В. В., Курачкін Ю. А., Ранцевіч А. В.* Вектары на сферы і рашэнне задач сферычнай астраноміі // Весці БДПУ ім. М. Танка. – 1996. – № 4. – С. 67–72.

9. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1967.

10. *Вейль Г.* Пространство, время, материя. – М.: УРСС, Янус-К, 2004.

11. *Розенфельд Б. Я.* История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976.

12. *Угаров В. А.* Специальная теории относительности. – М.: Наука, 1969.

13. *Румер Ю. Б., Рывкин М. С.* Теория относительности. – М.: Учпедгиз, 1960.

14. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2002.

15. *Понтрягин Л. С.* Обобщения чисел. Библиотека Квант. Вып. 54. – М.: Наука, 1986.

16. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. – Минск: Наука и техника, 1989; М.: УРСС, 2003.

17. *Костенич Ю. В., Лаврентьев И. А., Толкачев Е. А.* Геометрия пространства-времени в классической физике: методический аспект // Репетитор. – 2007. – № 10. – С. 58–65.

18. *Костенич Ю. В., Лаврентьев И. А., Толкачев Е. А.* Преобразования Галилея и уравнения Ньютона: симметрийный подход // Репетитор. – 2005. – № 8. – С. 78–85.

19. *Толкачев Е. А., Костенич Ю. В.* О релятивистском пространстве-времени // Репетитор. – 2007. – № 11. – С. 47–54.

20. *Костенич Ю. В., Лаврентьев И. А., Толкачев Е. А.* Предельная скорость и законы сложения скоростей // Репетитор. – 2006. – № 8. – С. 50–56.

Научно-популярное издание

ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ

Математическая физика для начинающих

Редактор *А. А. Баранова*
Художественный редактор *Т. Д. Царева*
Компьютерная верстка *Н. И. Кашуба*

Подписано в печать 25.11.2009. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 6,9. Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 248 экз. Заказ 557.

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука». ЛИ № 02330/0494405 от 27.03.2009. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

Отпечатано в РУП «Издательский дом «Беларуская навука».

КУРОЧКИН Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией теоретической физики Института физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси.

Автор и соавтор более 100 научных работ по физике частиц, математическим методам теоретической физики, в том числе монографии «Кватернионы в релятивистской физике» (Мн.: Наука и техника, 1989; М.:УРСС, 2003) и сборника «Экспериментальные олимпиадные задачи по физике» (Мн.: Народная асвета, 1981)

ISBN 978-985-08-1112-7