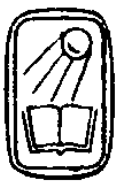
Е. С. ЛЯПИН, А. Я. АЙЗЕНШТАТ, М. М. ЛЕСОХИН

УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

Под редакцией
Е. С. ЛЯПИНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.1
Л 97
УДК 519.4

Евгений Сергеевич Ляпин, Анна Яковлевна Айзенштат, Михаил Моисеевич Лесохин

Упражнения по теории групп
М., 1967, 264 стр.

Редакторы *З. И. Боревич* и *В. В. Донченко*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 20/XII 1966 г. Подписано к печати 5/IV 1967 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 8,25. Условн. печ. л. 13,86. Уч.-изд. л. 14,87. Тираж 20 000 экз. Т-01869. Цена книги 67 коп. Заказ № 737.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3
53-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Множества** 9

§ 1. Исходные понятия теории множеств 9

§ 2. Отображения множеств 15

§ 3. Бинарные отношения 20

§ 4. Умножение бинарных отношений 26

Глава II. **Алгебраические действия общего типа** 31

§ 1. Понятие алгебраического действия 31

§ 2. Основные свойства действий 36

§ 3. Умножение подмножеств мультипликативного множества 42

§ 4. Гомоморфизмы 45

§ 5. Полугруппы 50

§ 6. Первоначальные понятия теории групп 55

Глава III. **Суперпозиция преобразований** 64

§ 1. Общие свойства суперпозиции преобразований 64

§ 2. Обратимые преобразования 73

§ 3. Обратимые преобразования конечных множеств 77

§ 4. Эндоморфизмы 81

§ 5. Группы движений 87

§ 6. Частичные преобразования 92

Глава IV. **Группы и их подгруппы** 98

§ 1. Разложение группы по подгруппе 98

§ 2. Отношение сопряженности в группах 102

§ 3. Нормальные делители и фактор-группы 106

§ 4. Подгруппы конечных групп 111

§ 5. Коммутаторы и коммутант 113

§ 6. Разрешимые группы 116

§ 7. Нильпотентные группы 118

§ 8. Автоморфизмы групп 122

§ 9. Транзитивные группы преобразований 125

Глава V. **Определяющие множества соотношений** 130
§ 1. Определяющие множества соотношений в полугруппах 130
§ 2. Определяющие множества соотношений в группах . . 136
§ 3. Свободные группы 142
§ 4. Группы, заданные определяющими множествами соотношений 146
§ 5. Свободные произведения групп 151
§ 6. Прямые произведения групп 154
Глава VI. **Абелевы группы** 160
§ 1. Простейшие свойства абелевых групп 160
§ 2. Конечные абелевы группы 164
§ 3. Конечно порожденные абелевы группы 167
§ 4. Бесконечные абелевы группы 170
Глава VII. **Представления групп** 174
§ 1. Представления общего типа 174
§ 2. Представления групп преобразованиями 179
§ 3. Представления групп матрицами 183
§ 4. Группы гомоморфизмов абелевых групп 188
§ 5. Характеры групп 192
Глава VIII. **Топологические и упорядоченные группы** . . . 194
§ 1. Метрические пространства 194
§ 2. Группы непрерывных преобразований метрического пространства 200
§ 3. Топологические пространства 204
§ 4. Топологические группы 211
§ 5. Упорядоченные группы 219

	УКАЗАНИЯ	ОТВЕТЫ
Глава I	225	238
Глава II	226	240
Глава III	227	246
Глава IV	229	252
Глава V	232	255
Глава VI	234	256
Глава VII	235	257
Глава VIII	236	260

Литература 263

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга имеет своей целью способствовать изучению основных исходных положений, результатов и методов современной алгебры. В ряду алгебраических дисциплин, составляющих в совокупности то, что в последнее время часто стали называть общей алгеброй (по-видимому, лучше было бы говорить: общей теорией алгебраических действий), теория групп занимает бесспорно первое место как наиболее развитая из этих дисциплин. Естественно начинать изучение современной алгебры именно с теории групп. Однако следует учитывать современное положение дел в алгебре, где теория групп представляется как раздел, близко соприкасающийся с рядом других алгебраических теорий. Что касается исходных положений даже самой теории групп, то наиболее естественно они могут быть приняты и усвоены в связи с идеями общего характера, выходящими за пределы собственно теории групп. Этими соображениями определяются рамки, ограничивающие материал данной книги. Здесь изучаются начальные разделы теории групп, излагаемые на базе общих понятий, что делает одновременно и более естественными основы самой теории групп и служит подходящим фундаментом для изучения иных алгебраических дисциплин.

Уже давно обращалось внимание на важную роль алгебры в математике. Именно в алгебре часто формируются идеи, понятия и методы, которые в дальнейшем распространяются и на другие области математики. Поэтому ознакомление с основами алгебры необходимо для математиков различных специ-

альностей. При этом начинать желательно возможно раньше с первых же курсов университетов и педагогических институтов. Однако на пути этого имеется значительное методическое препятствие. Обилие, сложность и большая общность («абстрактность») понятий крайне затрудняют овладение этим материалом для тех, кто только приступил к изучению высшей математики. Наиболее успешный путь для преодоления этой трудности заключается в следующем. Знакомясь с понятиями, надо иллюстрировать их возможно бо́льшим числом конкретных примеров, показать, как они реализуются в отдельных случаях. При этом желательно, чтобы это не было просто продемонстрировано преподавателем (или автором книги), но чтобы изучающий в известном смысле самостоятельно подошел к этому. Активная роль обучающегося является залогом полного и действенного усвоения материала.

Указанные соображения были ведущими для создания данной книги. В каждом разделе сначала в краткой форме сообщаются основные понятия. Затем приводятся примеры, конкретизирующие эти понятия. Путем последовательного выполнения ряда упражнений читатель сам приходит к доказательству ряда свойств данных понятий. Среди этих свойств встречаются такие, которые являются важными исходными теоретическими результатами в данной области, а также и менее значительные, но полезные вспомогательные свойства и, наконец, просто тренировочные упражнения.

Авторы надеются, что начинающий математик, проработавший эту книгу (полностью или частично), сможет не только запомнить и усвоить, но и творчески овладеть исходными понятиями, некоторыми результатами и методами теории групп. После этого он уже смело может приниматься как за более углубленное изучение самой теории групп, так и за ознакомление с другими направлениями современной общей алгебры.

Разумеется, успех будет увеличен, если параллельно с работой над данной книгой читатель будет иметь возможность

слушать лекции специалиста, пользоваться его советами и указаниями или использовать другие книги (список соответствующих книг, имеющихся на русском языке, приводится в конце книги). Это тем более важно, что в соответствии с направлением и характером данной книги в ней не приводится подробных разъяснений и обоснования значений вводимых понятий и получаемых результатов, не излагается история вопроса, причины возникновения тех или иных понятий. Для того чтобы познакомиться с этим, так же как и для последующего дальнейшего углубленного изучения материала, необходимо чтение специальных монографий или соответствующие лекции.

Учитывая, однако, что различные читатели могут оказаться в весьма различных условиях в отношении сказанного выше, данная книга составлена так, что при работе с ней нет непосредственной жесткой необходимости пользоваться каким-либо определенным дополнительным источником. В известном смысле она автономна. Это должно увеличить возможности ее применения. Разумеется, читатель, получивший ряд сведений из другого источника, просто пропустит соответствующие упражнения, рекомендуемые данной книгой.

Для задач, приводимых в книге, даются ответы. Для более трудных — указания, кратко намечающие путь решения. Около номеров задач, для которых приведены указания, стоит буква У. Номера упражнений, результаты которых представляют значительный теоретический интерес, сопровождаются буквой Т.

Некоторые задачи сопровождаются и примечаниями, цель которых обычно состоит в том, чтобы обратить внимание на те или иные особенности в решении или значении полученного результата, которые заслуживают внимания, но могли остаться незамеченными.

Материал разбит на главы и параграфы. Задачи соответственно нумеруются внутри каждого параграфа отдельно с

указанием номера главы и параграфа. Например, 2.3.13 означает тринадцатую задачу в третьем параграфе второй главы.

Разумеется, отдельные задачи могут оказаться близкими к задачам, приводимым в качестве упражнений в том или ином теоретическом курсе, или представлять собою те или иные доказываемые там утверждения. Каких-либо указаний в таких случаях не делается хотя бы потому, что большею частью трудно выяснить, когда и кто именно впервые предложил соответствующую задачу.

На последнем этапе работы с книгой авторы получили большое количество полезных и ценных советов от З. И. Боревича, которому выражают искреннюю благодарность.

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

§ 1. Исходные понятия теории множеств

Пусть определено некоторое свойство, относительно которого про всякий предмет, который может быть рассмотрен в какой-либо математической теории, можно в принципе сказать, обладает он этим свойством или нет. Тогда все взятые вместе предметы, обладающие этим свойством, мы можем представлять себе как некий новый математический предмет, который называется *множеством*, состоящим из всех предметов, обладающих указанным свойством. Сами эти предметы называются *элементами* данного множества.

Таким образом, для задания какого-либо множества можно или формулировать то свойство, обладание которым делает какой-либо математический предмет его элементом, или указать все его элементы. (Собственно говоря, факт принадлежности каждого из элементов заданному множеству тоже можно рассматривать как некоторое свойство. Таким образом, оба подхода различны лишь по внешнему оформлению.)

Тот факт, что x является элементом множества M, записывается так: $x \in M$. В этом случае говорят также, что x входит в M, x содержится в M или что x принадлежит M.

Два множества равны, т. е. совпадают, если они состоят из одних и тех же элементов. Поэтому доказательство равенства двух множеств M и N обычно состоит из двух частей. Сначала доказывается, что для каждого $x \in M$ имеет место $x \in N$; затем что для каждого $y \in N$ имеет место $y \in M$.

Наравне с термином «множество» употребляются в том же смысле термины «совокупность» и «класс». При этом надо, однако, оговорить, что в некоторых более глубоких аксиоматических теориях делается различие между понятиями «множество» и «класс». В пределах этой книги в этом нет необходимости и никакого различия между терминами «класс» и «множество» мы делать не будем.

То, что некоторое множество M состоит из элемеитов $x, y, \ldots, t, \ldots$, мы будем записывать при помощи фигурных скобок:

$$M = \{x, y, \ldots, t, \ldots\}.$$

Если элементы множества обозначаются при помощи некоторых индексов, например x_α, x_β, ..., x_ξ, ..., то пишут также

$$M = \{x_\xi\} \quad \text{или} \quad M = \{x_\xi\}_{\xi \in \Gamma},$$

где Γ — множество всех индексов: $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots, \xi, \ldots\}$.

В пределах данной книги у нас не будет необходимости делать различие между каким-либо предметом x и множеством $\{x\}$, состоящим из одного этого элемента x (одноэлементное множество), хотя в некоторых иных теориях такое различие необходимо.

Множество может состоять из конечного числа элементов (любого) или быть бесконечным. Среди множеств рассматривается также и так называемое *пустое множество*, не имеющее ни одного элемента. Мы будем обозначать пустое множество знаком $\emptyset$.

Если все элементы некоторого множества M являются одновременно элементами другого множества N, то говорят, что M есть подмножество множества N (или что M содержится в N) и пишут $M \subset N$ или $N \supset M$.

Подмножествами множества N являются, в частности, само N и пустое множество. Эти подмножества называются *несобственными*. Прочие подмножества называются *собственными* подмножествами множества N.

Непосредственно ясно, что одновременное выполнение для двух множеств условий $M \subset N$ и $N \subset M$ равносильно равенству этих множеств: $M = N$.

Для двух множеств M и M' *объединением* их (иногда говорят также *теоретико-множественной* суммой) называют множество, состоящее из всех элементов, являющихся элементами хотя бы одного из множеств M или M'. Объединение обозначается через $M \cup M'$.

Пересечением M и M' называют множество, состоящее из всех элементов, являющихся одновременно и элементами M и элементами M'. Пересечение обозначается $M \cap M'$. Если $M \cap M' = \emptyset$, то говорят также, что M и M' не пересекаются.

Пусть задана совокупность множеств:

$$\{M_\alpha, M_\beta, \ldots, M_\xi, \ldots\} = \{M_\xi\}_{\xi \in \Gamma}; \quad \Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots, \xi, \ldots\}.$$

Объединением всех множеств M_ξ называется множество, обозначаемое через

$$M_\alpha \cup M_\beta \cup \ldots \cup M_\xi \cup \ldots$$

или $\bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} M_\xi$, которое состоит из всех элементов, входящих элементами хотя бы в одно из M_ξ.

Пересечение, обозначаемое через

$$M_\alpha \cap M_\beta \cap \ldots$$

или через

$$\bigcap_{\xi \in \Gamma} M_\xi,$$

есть множество, состоящее из всех элементов, являющихся одновременно элементами каждого из множеств M_ξ.

Если в множестве M заданы его подмножества M_α, M_β, ... такие, что их объединение равно M:

$$M = M_\alpha \cup M_\beta \cup \ldots,$$

и никакие два из этих подмножеств не имеют ни одного общего элемента (не пересекаются), то говорят, что M есть непересекающееся объединение множеств M_α, M_β, ... Говорят также, что определено *разбиение* M на классы M_α, M_β, ... Если при этом все множества M_α, M_β, ... не пусты, а количество их более одного, то говорят о собственном разбиении.

Для двух множеств M и N через $M \setminus N$ обозначается множество всех тех элементов из M, которые не являются элементами из N.

Пусть даны некоторое множество M и некоторое множество индексов (т. е. элементов, которые рассматриваются только как различительные знаки)

$$\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}.$$

Каждому из индексов $\xi \in \Gamma$ сопоставлен некоторый элемент x_ξ из M. При этом некоторым различным индексам может оказаться сопоставленным один и тот же элемент из M. Тогда говорят, что $(x_\alpha, x_\beta, \ldots) = (x_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ есть некоторое семейство элементов из M. Например, бесконечная последовательность чисел есть семейство чисел, в котором множество индексов состоит из всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Пару элементов (x, y) из некоторого множества M, взятых в определенном порядке, можно рассматривать как семейство элементов из M с множеством индексов $\{1, 2\}$ (то, что x стоит в этой паре на первом месте, означает, что x сопоставлен первому индексу 1, стоящий на втором месте y сопоставлен индексу 2).

Пусть для некоторого множества индексов $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ каждому индексу $\xi \in \Gamma$ сопоставлено свое множество (причем допускается, что некоторые из множеств M_α, M_β, ... или даже все они совпадают друг с другом). Декартовым произведением множеств M_α, M_β, ... называется множество всех элементов x следующей природы.

Произвольным образом каждому индексу $\xi \in \Gamma$ сопоставляется элемент $x_\xi \in M_\xi$. Это и определяет x:

$$x = (x_\xi)_{\xi \in \Gamma}, \qquad x = (x_\alpha, x_\beta, \ldots)$$
$$(x_\alpha \in M_\alpha, \ x_\beta \in M_\beta, \ldots).$$

Можно сказать, что x является семейством элементов множества $\bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} M_\xi$ с множеством индексов Γ (как видно, не любым семейством, а таким, что $x_\xi \in M_\xi$ для каждого $\xi \in \Gamma$). Декартово произведение множеств M_α, M_β, ... обозначается через

$$M_\alpha \times M_\beta \times \ldots \times M_\xi \ldots (\xi \in \Gamma)$$

или короче

$$\prod_{\xi \in \Gamma} \times M_\xi.$$

В случае, когда множество индексов Γ декартового произведения конечно и состоит из n элементов, обычно считают, что индексами являются числа 1, 2, ..., n. Само декартово произведение записывается тогда как $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, а элементы этого декартового произведения записывают в виде конечной последовательности

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\text{где } x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2,\ \ldots,\ x_n \in M_n).$$

В частности, множество всевозможных последовательностей из n элементов, принадлежащих некоторому множеству M, есть не что иное, как декартово произведение $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n \text{ раз}}$.

1.1.1. Выяснить, элементами каких из нижеследующих множеств являются следующие числа:

$$0,\ 1,\ \frac{3}{5},\ \sqrt{2},\ -2,\ \pi,\ \frac{1}{7},\ i,\ -i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ 2+i.$$

Множества:

M_1 — множество всех натуральных чисел;

M_2 — множество всех целых чисел;

M_3 — множество всех рациональных чисел;

M_4 — множество всех положительных вещественных чисел;

M_5 — множество всех комплексных чисел z, обладающих тем свойством, что $z^2 = z$;

M_6 — множество всех таких чисел z, что $z^2 \neq z$.

1.1.2. Какие из матриц:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

являются элементами множества всех матриц, определитель которых равен 1?

1.1.3. Сколько элементов содержит множество всех корней уравнения

$$x^5 - 2x^3 + x = 0?$$

1.1.4. Для множеств M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 задачи 1.1.1 выяснить, какие из них будут подмножествами других?

1.1.5. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два алгебраических полинома. Доказать, что множество корней полинома $F(x)=f(x)\varphi(x)$ есть объединение множества корней полинома $f(x)$ и множества корней полинома $\varphi(x)$.

1.1.6. Найти пересечение множества всех целых неотрицательных чисел и множества всех целых неположительных чисел.

1.1.7. Для всякого вещественного числа ρ обозначим через M_ρ множество всех вещественных чисел, бóльших ρ. Найти: 1) $\bigcup\limits_\rho M_\rho$; 2) $\bigcap\limits_\rho M_\rho$ (объединение и пересечение берутся по всем вещественным числам ρ).

1.1.8. Пусть M_n есть множество всех натуральных чисел, делящихся на натуральное число n. Найти:

1) $\bigcup\limits_n M_n$ (объединение по всем натуральным n);

2) $\bigcap\limits_n M_n$ (пересечение по всем натуральным n);

3) $M_n \cap M_m$;

4) $\bigcup\limits_p M_p$ (объединение по всем простым числам $p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$).

1.1.9.Т. Доказать, что для произвольных множеств M, N и S выполняются соотношения:

$$M \cup M = M, \quad M \cap M = M,$$
$$M \cup N = N \cup M, \quad M \cap N = N \cap M,$$
$$M \cup (N \cup S) = (M \cup N) \cup S,$$
$$M \cap (N \cap S) = (M \cap N) \cap S,$$
$$M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S),$$
$$M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (M \cup S).$$

1.1.10. Найти для произвольного множества M: 1) $M \cup \phi$; 2) $M \cap \phi$.

1.1.11. Пусть M есть некоторое множество. Рассматривая его подмножества, будем для $A \subset M$ применять обозначение $\tilde{A} = M \setminus A$. Найти для $A, B \subset M$:

1) $\tilde{\tilde{A}}$; 2) $A \cup \tilde{A}$; 3) $A \cap \tilde{A}$; 4) $\widetilde{(A \cup B)}$;

5) $\widetilde{(A \cap B)}$; 6) $(A \cap B) \cup (A \cap \tilde{B})$; 7) $A \cup (\tilde{A} \cap B)$;

8) $(A \cap B) \cup (A \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap B)$; 9) $\tilde{M}$; 10) $\tilde{\phi}$.

1.1.12. Найти число подмножеств множества, состоящего из четырех элементов. Найти число различных его собственных разбиений.

1.1.13. Из числа указанных ниже множеств подобрать такие их системы, которые осуществляли бы разбиение множества всех целых чисел:

$M_0 = \{0\}$,
$M_1 = \{1\}$,
M_2 — множество всех целых положительных чисел,
M_3 — множество всех целых отрицательных чисел,
M_4 — множество всех четных чисел,
M_5 — множество всех нечетных чисел,
M_6 — множество всех простых натуральных чисел,
M_7 — множество всех составных натуральных чисел.

1.1.14. Пусть даны два разбиения множества M:

$$M = \bigcup_{\xi} A_\xi, \qquad M = \bigcup_{\lambda} B_\lambda.$$

Будет ли образовывать разбиение M совокупность всевозможных непустых множеств вида $A_\xi \cap B_\lambda$?

1.1.15. Для каждого элемента x множества M полагаем

$$N_x = M \setminus \{x\}.$$

Найти

$$\bigcap_{x \in M} N_x.$$

1.1.16. Обозначив число элементов конечного множества X через $m(X)$, доказать, что для любых конечных множеств M, N, S имеют место соотношения:

1) $m(M \cup N) = m(M) + m(N) - m(M \cap N)$;

2) $m(M \cup N \cup S) =$
$= m(M) + m(N) + m(S) - m(M \cap N) -$
$- m(M \cap S) - m(N \cap S) + m(M \cap N \cap S)$.

Сформулировать и доказать аналогичную формулу для произвольного числа конечных множеств.

1.1.17. Сколько семейств элементов можно составить из чисел множества $\{-1, 0, 1\}$ с множеством индексов $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

1.1.18. Выписать все элементы декартового произведения трех множеств:

$$M_1 = \{-1, 1\}, \quad M_2 = \{a, b, c\}, \quad M_3 = \{a\}.$$

1.1.19. Сколько элементов в декартовом произведении трех конечных множеств, состоящих из k_1, k_2 и k_3 элементов?

1.1.20. Каково должно быть разбиение конечного множества M на два непустых класса:

$$M = M_1 \cup M_2,$$

чтобы декартово произведение $M_1 \times M_2$ имело наибольшее число элементов?

§ 2. Отображения множеств

Пусть даны два множества A и B. *Отображением* φ множества A в B называется такое правило, которое каждому элементу a множества A ставит в соответствие некоторый вполне определенный элемент множества B, который в этом случае обозначают через $\varphi(a)$ или через φa и называют *образом* элемента a при отображении φ. Если при этом для любых не равных между собой элементов $a, a' \in A$ их образы $\varphi(a)$ и $\varphi(a')$ всегда различны, то отображение называется *взаимно однозначным*.

Если для всякого $b \in B$ существует $a \in A$ (все равно, один или несколько) такой, что $\varphi(a) = b$, то говорят, что φ является отображением A *на* B (следует всегда обращать внимание на то, говорится ли об отображении «на» или «в», при этом первое является частным случаем второго).

Для $A' \subset A$ под $\varphi(A')$ (также $\varphi A'$) понимают множество всех образов $\varphi(x)$ элементов $x \in A'$. Множество $\varphi(A')$ называют образом подмножества A' при отображении φ. Тем самым φ является отображением A на B тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = B$.

Пусть $B' \subset B$. Совокупность всех $a \in A$ таких, что $\varphi(a) \in B'$, называют *полным прообразом множества* B'.

Пусть отображение φ множества A в множество B взаимно однозначно. Тогда естественным образом определяется отображение множества $\varphi(A)$ на множество A, называемое *обратным* к φ и обозначаемое через φ^{-1}. Именно, для каждого $z \in \varphi(A)$ существует и ввиду взаимной однозначности φ единственный элемент $a \in A$ такой, что

$$\varphi(a) = z.$$

Поэтому можно положить

$$\varphi^{-1}(z) = a.$$

При отображении A в B множества A и B могут иметь общие элементы, а в частности и совпадать.

Элемент $a \in A$ называется *неподвижной точкой* отображения φ, если $\varphi(a) = a$.

Пусть φ_1 есть отображение множества A_1 в множество B_1, а φ_2 — отображение A_2 в B_2, причем $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \subset B_2$. Отображение φ_2 называется *продолжением* отображения φ_1, если φ_1 и φ_2 на A_1 совпадают, т. е. для любого $a \in A_1$ имеет место $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.

Два множества A и B называются *равномощными* (или имеющими равную мощность, или эквивалентными), если существует взаимно однозначное отображение A на B (а тем самым, как следует из 1.2.9, и взаимно однозначное отображение B на A).

Говорят, что мощность множества A меньше мощности B, если они неравномощны, но A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Под *мощностью* множества M понимают знак, сопоставленный классу всех множеств, равномощных M (следует принять во внимание 1.2.15). Мощности называют также *кардинальными числами*.

Под мощностью конечного множества, состоящего из n элементов, понимают число n. Про бесконечные множества говорят, что их мощность бесконечна.

Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется *счетным*. Тем самым счетность множества есть не что иное, как возможность перенумеровать все его элементы при помощи всех натуральных чисел.

Известна важная теорема, которая, впрочем, нами в дальнейшем не будет использоваться.

Для любых двух множеств A и B всегда имеет место одна и только одна из трех возможностей:

1) *A равномощно B;*

2) *мощность A меньше мощности B;*

3) *мощность B меньше мощности A.*

Необходимо отметить, что в некоторых математических работах образ элемента a при отображении φ нередко обозначают через $a\varphi$ или a^{φ} (вместо $\varphi a = \varphi(a)$, принятого в настоящей книге и вообще являющегося более распространенным).

1.2.1. Пусть конечное множество A состоит из n элементов и конечное множество B из m элементов. Определить число различных отображений A в B. Определить, когда существуют отображения A на B и когда существуют взаимно однозначные отображения A и B; когда существуют взаимно однозначные отображения A на B и каково их число.

1.2.2.Т. Доказать, что всякое бесконечное множество обладает счетным подмножеством.

Примечание. Это означает, что мощность счетного множества меньше или равна мощности всякого другого бесконечного множества.

1.2.3.У. Пусть A есть множество целых чисел, B — множество всех натуральных чисел и C — множество всех про-

стых натуральных чисел. Существуют ли такие взаимно однозначные отображения φ множества C на A и C на B, что для $p_1 \leqslant p_2$ $(p_1, p_2 \in C)$ всегда имеет место

$$\varphi(p_1) \leqslant \varphi(p_2)?$$

1.2.4. Сколько существует отображений множества $M = \{a, b, c, d\}$ в себя, имеющих неподвижные точки?

1.2.5. Пусть n — фиксированное натуральное число, φ — отображение множества всех натуральных чисел $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ в себя, ставящее в соответствие каждому $k \in M$ число

$$\varphi(k) = \begin{cases} n - k & (\text{если } k < n), \\ n + k & (\text{если } k \geqslant n). \end{cases}$$

Будет ли φ взаимно однозначным? Каков образ $\varphi(M)$?

1.2.6. Пусть N — множество всех непрерывных вещественных функций, заданных на всей вещественной оси, φ — отображение N в себя, ставящее в соответствие каждой функции $f(x)$ из N функцию

$$(x^2 - 1) f(x).$$

Будет ли φ взаимно однозначным? Является ли φ отображением N на само себя?

1.2.7. Пусть S — множество всех вещественных функций, заданных на всей вещественной оси; $h(x)$ — некоторая фиксированная функция из их числа. Пусть ψ_h — отображение S в себя, ставящее в соответствие функции $f(x) \in S$ функцию

$$h(x)\ f(x).$$

Какому условию должна удовлетворять функция $h(x)$, чтобы соответствие ψ_h было взаимно однозначным?

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

1.2.8. Каждому треугольнику T, длины сторон которого суть a, b, c, сопоставим треугольник T', стороны которого имеют длины

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{b+c}{2}, \qquad \frac{c+a}{2}.$$

Будет ли отображение множества всех треугольников в себя, ставящее в соответствие треугольнику T треугольник T',

взаимно однозначным? Будет ли оно отображением этого множества на себя? Какие треугольники являются неподвижными точками этого отображения?

1.2.9. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества A в множество B. Доказать, что обратное отображение φ^{-1} множества $\varphi(A)$ на A является взаимно однозначным.

1.2.10. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества A в B. Доказать, что $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

1.2.11. Пусть множество M представлено в виде непересекающегося объединения подмножеств, состоящих из одного или двух элементов, и пусть φ — такое отображение множества M в себя, что $\varphi(x) = x$, если элемент x один составляет одну из компонент указанного разбиения, и $\varphi(x) = y$, если x входит в компоненту разбиения, состоящую из двух элементов, и y является вторым элементом этой компоненты. Доказать, что φ взаимно однозначно и что $\varphi^{-1} = \varphi$.

1.2.12. Пусть φ — такое взаимно однозначное отображение множества M в себя, что $\varphi^{-1} = \varphi$. Доказать, что φ может быть получено методом, описанным в предыдущей задаче.

1.2.13.Т. Пусть мощность множества A меньше или равна мощности множества B, а мощность B в свою очередь меньше или равна мощности множества C. Доказать, что мощность A меньше или равна мощности C.

1.2.14. Доказать, что мощность любого конечного множества меньше мощности любого бесконечного множества.

1.2.15.Т. Пусть множество A равномощно множеству B, а B равномощно множеству C. Доказать, что множества A и C равномощны.

1.2.16. Доказать, что всякое бесконечное подмножество счетного множества само счетно.

1.2.17. Дано счетное множество конечных множеств M_1, M_2, ... Доказать, что их объединение $\bigcup_k M_k$ конечно или счетно.

1.2.18.Т.У. Пусть множество множеств M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ конечно или счетно. При этом каждое из множеств M_k конечно или счетно. Доказать, что объединение $\bigcup_k M_k$ является конечным или счетным. Выяснить, когда имеет место первое и когда второе.

1.2.19.Т.У. Доказать, что множество всех рациональных чисел счетно.

1.2.20.У. Пусть множество M бесконечно и множество N конечно или счетно. Доказать, что мощности множеств M и $M \bigcup N$ равны.

1.2.21.У. Доказать, что множество всех полиномов с рациональными коэффициентами счетно.

1.2.22. Доказать, что множество всех матриц с рациональными коэффициентами счетно.

1.2.23.Т.У. Доказать, что множество всех вещественных чисел r таких, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, несчетно.

1.2 24.Т.У. Доказать, что множество вещественных чисел несчетно.

Примечание. Мощность множества всех вещественных чисел называется *континуумом.* Про множества, равномощные этому множеству, говорят, что они континуальные или континуальной мощности.

1.2.25.Т.У. Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого отличного от нуля полинома одной переменной с целыми коэффициентами. Числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными.*

Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно, множество всех трансцендентных чисел несчетно, множество всех вещественных трансцендентных чисел несчетно.

1.2.26.У. Доказать, что следующие множества точек прямой все равномощны между собою:

1) множество всех точек прямой;

2) множество всех точек произвольного открытого отрезка прямой;

3) множество всех точек произвольного замкнутого отрезка прямой;

4) множество всех точек прямой, не входящих в некоторый выделенный отрезок (все равно, замкнутый или открытый).

1.2.27.У. Пусть A и B — произвольные множества, но только B содержит не менее двух элементов. M — множество всевозможных отображений A в B. Доказать, что мощность множества M больше мощности множества A $(A \neq \emptyset)$.

1.2.28.У. Пусть P_M — множество всех подмножеств множества M. Доказать, что мощность множества P_M больше мощности множества M $(M \neq \emptyset)$.

1.2.29. Пусть отображение φ_2 есть продолжение отображения φ_1. Если φ_2 взаимно однозначно, то и φ_1 будет взаимно однозначным. Доказать.

1.2.30. Пусть φ_1, φ_2, φ_3 — отображения некоторых множеств, причем φ_3 — продолжение φ_2, а φ_2 — продолжение φ_1. Доказать, что φ_3 является продолжением отображения φ_1.

1.2.31. Пусть N — множество всех натуральных чисел и N' — множество всех натуральных четных чисел; φ — некоторое отображение N' в N. Когда найдется взаимно однозначное отображение множества N в себя, являющееся продолжением отображения φ?

§ 3. Бинарные отношения

Пусть даны два множества Ω_1 и Ω_2. Их декартово произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$, т. е. множество всевозможных пар вида (α, β), где $\alpha \in \Omega_1$ и $\beta \in \Omega_2$, называется *универсальным бинарным отношением* между элементами Ω_1 и Ω_2 (при этом существенно, в каком порядке упоминаются множества Ω_1 и Ω_2). Всякое его подмножество $\rho \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ называется бинарным отношением между элементами Ω_1 и Ω_2.

Пусть ρ — некоторое бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Говорят, что элементы $\alpha \in \Omega_1$ и $\beta \in \Omega_2$ находятся между собою в этом отношении, если $(\alpha, \beta) \in \rho$. Помимо указанной записи включения мы будем также употреблять для этого запись

$$\alpha \sim \beta \ (\rho).$$

Для некоторых бинарных отношений существуют особые знаки, употребляемые аналогичным образом вместо $\sim$. Если ясно, о каком отношении идет речь, указание в скобках на данное бинарное отношение может быть опущено.

Отметим, что нередко условие $(\alpha, \beta) \in \rho$ записывают в виде $\alpha\rho\beta$.

Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Через $\mathrm{pr}_1 \rho$ обозначается совокупность всех таких элементов $\alpha \in \Omega_1$, для которых найдется такой $\beta \in \Omega_2$, что $\alpha \sim \beta \ (\rho)$. Аналогично определяется $\mathrm{pr}_2 \rho \subset \Omega_2$.

Пусть бинарное отношение ρ между элементами множеств Ω_1 и Ω_2 таково, что $\mathrm{pr}_1 \rho = \Omega_1$ и $\mathrm{pr}_2 \rho = \Omega_2$, причем $\alpha_1 \sim \beta \ (\rho)$ и $\alpha_2 \sim \beta \ (\rho)$ имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2$, так же как $\alpha \sim \beta_1 \ (\rho)$ и $\alpha \sim \beta_2 \ (\rho)$ имеют место лишь при $\beta_1 = \beta_2$. В этом случае говорят, что ρ осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B. Для наглядности часто пишут:

$$\alpha_\xi \leftrightarrow \beta_\xi, \qquad \alpha_\eta \leftrightarrow \beta_\eta, \ \ldots,$$

где $\alpha_\xi \sim \beta_\xi \ (\rho)$, $\alpha_\eta \sim \beta_\eta \ (\rho)$, ... В силу свойства ρ здесь каждый элемент α_ξ из A встречается лишь один раз только в одной из этих пар $(\alpha_\xi \leftrightarrow \beta_\xi)$ и каждый элемент β_η из B встречается лишь один раз только в одной из этих пар $(\alpha_\eta \leftrightarrow \beta_\eta)$.

Для бинарного отношения ρ между элементами множеств Ω_1 и Ω_2 определяется естественным образом бинарное отношение ρ^*

между элементами Ω_2 и Ω_1, согласно которому $\beta \sim \alpha\ (\rho^*)$ для $\beta \in \Omega_2$ и $\alpha \in \Omega_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha \sim \beta\ (\rho)$.

Отношение ρ^* называется *транспонированным* относительно ρ (или, как чаще говорят, обратным, употребляя при этом обозначение ρ^{-1} вместо принятого здесь ρ^*).

Так же для ρ определяется дополнительное бинарное отношение $\bar{\rho}$ между элементами Ω_1 и Ω_2, согласно которому $\alpha \sim \beta\ (\bar{\rho})$, где $\alpha \in \Omega_1$, $\beta \in \Omega_2$, имеет место для всех тех пар (α, β), которые не содержатся в ρ.

Поскольку бинарные отношения являются подмножествами универсального бинарного отношения $\Omega_1 \times \Omega_2$, понятно, что означают для них выражения: $\rho_1 \subseteq \rho_2$, $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_1 \cap \rho_2$.

В дальнейшем нас, как правило, будут интересовать бинарные отношения в одном и том же множестве Ω, т. е. подмножества декартова произведения $\Omega \times \Omega$.

Универсальное бинарное отношение $\Omega \times \Omega$ будем часто обозначать через ω_Ω или просто ω, когда ясно, о каком Ω идет речь.

Пустое бинарное отношение, т. е. бинарное отношение, представляющее собою пустое подмножество $\Omega_1 \times \Omega_2$, обычно так и будем обозначать через $\emptyset$.

Диагональю в множестве Ω называется бинарное отношение Δ, согласно которому $\alpha \sim \beta\ (\Delta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Пусть ρ — бинарное отношение в множестве Ω. Оно называется *рефлексивным*, если для любого $\alpha \in \Omega$ имеет место $\alpha \sim \alpha\ (\rho)$.

ρ называется *транзитивным*, если из $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ и $\beta \sim \gamma\ (\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \gamma\ (\rho)$.

ρ называется *симметричным*, если из $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ всегда следует $\beta \sim \alpha\ (\rho)$. Отношение ρ называется *антисимметричным*, если ни для каких $\alpha, \beta \in \Omega$, где $\alpha \neq \beta$, невозможно одновременно $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ и $\beta \sim \alpha\ (\rho)$.

Бинарное отношение в Ω, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности, называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью* в Ω.

Отметим, что в том случае, когда бинарное отношение ρ является эквивалентностью, наравне с обозначением $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ в литературе часто употребляется обозначение $\alpha \equiv \beta\ (\rho)$.

Пусть ρ — некоторая эквивалентность в множестве M. Если $x \sim y\ (\rho)$ (а потому и $y \sim x\ (\rho)$), то x и y называются эквивалентными относительно ρ или ρ-эквивалентными. Непустое подмножество K множества M называется *ρ-классом*, если всякие два элемента из K являются ρ-эквивалентными и никакой элемент из K не эквивалентен никакому элементу из $M \setminus K$. Множество всех ρ-классов обозначается обычно через M/ρ.

Бинарное отношение в Ω, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, называется *отношением упорядоченности*, или просто *упорядоченностью*, или, как еще говорят, *порядком* (иногда говорят «частичная упорядоченность», «частичный порядок»).

Упорядоченность ρ в Ω называется *линейной*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ всегда выполняется $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ или $\beta \sim \alpha\ (\rho)$. Линейно упорядоченное множество иногда называют *цепью*.

Линейная упорядоченность ρ называется ***полной***, если в любом непустом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$ найдется такой элемент $\alpha_0 \in \Omega'$, что $\alpha_0 \sim \alpha\,(\rho)$ имеет место для всех $\alpha \in \Omega'$.

Для упорядоченностей вместо знака $\sim$ чаще употребляется знак $\leqslant$ (или сходный знак $<$). При этом $\alpha \geqslant \beta$ понимается как равнозначное с $\beta \leqslant \alpha$. При $\alpha \leqslant \beta\,(\rho)$ говорят, что элемент α *предшествует* элементу β относительно упорядоченности ρ.

Множество, рассматриваемое относительно некоторой определенной в нем упорядоченности, называется *упорядоченным*, а если упорядоченность линейная или полная, то линейно упорядоченным и вполне упорядоченным.

Элемент α упорядоченного множества Ω называется ***максимальным***, если $\alpha \leqslant \beta$ невозможно ни для какого $\beta \in \Omega$, отличного от α, и ***минимальным***, если $\gamma \leqslant \alpha$ невозможно ни для какого $\gamma \in \Omega$, отлнчного от α. Элемент α называется ***универсально максимальным***, если $\xi \leqslant \alpha$ имеет место для всякого $\xi \in \Omega$, и ***универсально минимальным***, если $\alpha \leqslant \xi$ имеет место для всякого $\xi \in \Omega$.

1.3.1. Пусть ρ и σ оба являются бинарными отношениями между элементами множеств Ω_1 и Ω_2.

Доказать, что следующие условия все равносильны между собою: 1) из $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \beta\,(\sigma)$; 2) $\rho \subset \sigma$; 3) $\rho \cup \sigma = \sigma$; 4) $\rho \cap \sigma = \rho$; 5) $\rho \cap \bar{\sigma} = \emptyset$; 6) $\bar{\rho} \supset \bar{\sigma}$.

1.3.2. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Показать, что

$$\rho \cup \bar{\rho} = \omega, \qquad \rho \cap \bar{\rho} = \emptyset.$$

Обратно, если для бинарного отношения σ между элементами Ω_1 и Ω_2:

$$\rho \cup \sigma = \omega, \qquad \rho \cap \sigma = \emptyset,$$

то $\sigma = \bar{\rho}$. Доказать.

1.3.3. В множестве всех натуральных чисел N определены бинарные отношения ρ_k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$), согласно которым $n \sim m\,(\rho_k)$, если $n - m = k$. Найти: 1) $\mathrm{pr}_1 \rho_k$; 2) $\mathrm{pr}_2 \rho_k$; 3) $\sigma = \bigcup\limits_k \rho_k$; 4) $\overline{\sigma^*}$; 5) $\tau = \bigcap\limits_k \bar{\rho}_k$; 6) $\overline{\tau^*}$.

1.3.4 Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 — некоторые бинарные отношения между элементами множеств Ω_1 и Ω_2. Доказать,что: 1) $\rho \cup \rho = \rho$; 2) $\rho \cap \rho = \rho$; 3) $(\rho^*)^* = \rho$; 4) $(\rho_1 \cup \rho_2)^* = \rho_1^* \cup \rho_2^*$; 5) $(\rho_1 \cap \rho_2)^* = \rho_1^* \cap \rho_2^*$; 6) $\overline{\rho^*} = (\bar{\rho})^*$; 7) $\bar{\bar{\rho}} = \rho$; 8) $\overline{(\rho_1 \cup \rho_2)} = \bar{\rho}_1 \cap \bar{\rho}_2$; 9) $\overline{(\rho_1 \cap \rho_2)} = \bar{\rho}_1 \cup \bar{\rho}_2$.

1.3.5. Пусть R — множество всех вещественных чисел и Γ — декартово произведение:

$$\Gamma = \underbrace{R \times R \times \ldots R}_{n};$$

ρ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — бинарное отношение в множестве Γ, согласно которому

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n)(\rho_{ij}),$$

если $a_1 + a_2 + \ldots + a_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_j$.

Выяснить, что представляют собою бинарные отношения:

1) $\tau_1 = \rho_{11} \cap \rho_{21} \cap \ldots \cap \rho_{n1}$;
2) $\tau_2 = \rho_{11} \cap \rho_{22} \cap \ldots \cap \rho_{nn}$;
3) $\tau_3 = \bigcap\limits_{i,j} \rho_{ij}$.

1.3.6. Выяснить, какими из основных свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают нижеследующие бинарные отношения в множестве всех натуральных чисел.

1) $n \sim m\,(\rho_1)$, если n и m взаимно просты;
2) $n \sim m\,(\rho_2)$, если n — делитель m;
3) $n \sim m\,(\rho_3)$, если $n = m^2$;
4) $n \sim m\,(\rho_4)$, если $n < m$;
5) $n \sim m\,(\rho_5)$, если $n \leqslant m$;
6) $n \sim m\,(\sigma_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, если $m - n = k$.

1.3.7. Пусть $\mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{Q}$ и ρ — некоторое бинарное отношение в $\mathfrak{Q}$. В $\mathfrak{Q}'$ определяем бинарное отношение ρ', полагая $\alpha \sim \beta\,(\rho')$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{Q}')$, если $\alpha \sim \beta\,(\rho)$ в $\mathfrak{Q}$. Показать, что если ρ в $\mathfrak{Q}$ обладает каким-либо из свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью, то и ρ' в $\mathfrak{Q}'$ будет обладать соответствующим свойством. Если ρ было эквивалентностью, то и ρ' будет ею, если ρ было упорядоченностью, то и ρ' будет ею, если при этом упорядоченность ρ была линейной, то и ρ' будет линейна.

1.3.8. Пусть дано разбиение некоторого множества M. Определяем в M бинарное отношение ρ, полагая $x \sim y\,(\rho)$ $(x, y \in M)$, если x и y лежат в одном и том же классе разбиения. Доказать, что ρ является эквивалентностью.

1.3.9.Т Пусть ρ — некоторая эквивалентность в множестве M. Доказать, что всякие два ρ-класса или совпадают или не пересекаются; совокупность всех ρ-классов образует

разбиение множества M. Эквивалентность, соответствующая этому разбиению по 1.3.8, есть не что иное, как исходная эквивалентность ρ.

Примечание. Сопоставляя 1.3.8 и 1.3.9, мы видим, что задать разбиение множества это все равно, что задать эквивалентность, соответствующую этому разбиению, и наоборот. Обычно не делают различия между эквивалентностями и разбиениями (без пустых классов), так что если ρ есть некая эквивалентность, то и соответствующее ей разбиение обозначается той же буквой ρ.

1.3.10.Т. Пусть ρ — некоторое бинарное отношение в множестве Ω. Бинарное отношение ρ' определяется следующим образом: $\alpha \sim \beta\,(\rho')$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Omega$, что $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_1 \sim \gamma_2\,(\rho)$, $\gamma_2 \sim \gamma_3\,(\rho)$, $\gamma_3 \sim \gamma_4\,(\rho)$, $\ldots$, $\gamma_{n-1} \sim \gamma_n\,(\rho)$, $\gamma_n = \beta$. Доказать, что:

1) $\rho \subset \rho'$;

2) ρ' транзитивно;

3) ρ' является пересечением множества всех таких транзитивных бинарных отношений σ в Ω, которые содержат ρ.

Примечание. Тем самым ρ' является универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех транзитивных бинарных отношений в Ω, следующих за ρ. Бинарное отношение ρ' часто называется *транзитивным замыканием* бинарного отношения ρ.

1.3.11. Пусть ε — произвольное фиксированное положительное вещественное число. В множестве R всех вещественных чисел определено бинарное отношение ρ, согласно которому $a \sim b\,(\rho)$, если $0 \leqslant b - a < \varepsilon$. Выяснить, что представляет собою транзитивное замыкание ρ и транзитивное замыкание $\rho \bigcup \rho^*$ (см. 1.3.10).

1.3.12. В множестве K всех комплексных чисел рассматриваются бинарные отношения ρ_1 и ρ_2, где $z_1 \sim z_2\,(\rho_1)$, если $|z_1| \leqslant |z_2|$; $z_1 \sim z_2\,(\rho_2)$, если $\arg z_1 = \arg z_2$ $(z_1, z_2 \in K)$. Найти: 1) $\rho_1 \bigcap \rho_1^*$; 2) $\rho_1 \bigcup \rho_1^*$; 3) $\rho_1 \bigcap \rho_1^* \bigcap \rho_2$; 4) транзитивное замыкание бинарного отношения $(\rho_1 \bigcap \rho_1^*) \bigcup \rho_2$ (см. 1.3.10).

1.3.13. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω найти бинарное отношение ρ', которое будет универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех симметричных бинарных отношений σ в Ω таких, что $\rho \subset \sigma$ (симметричное замыкание ρ).

1.3.14. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω найти такое бинарное отношение ρ', которое будет универсально минимальным элементом в упорядоченном по включению множестве всех рефлексивных бинарных отношений, следующих за ρ (рефлексивное замыкание ρ).

1.3.15. Выяснить, какие из следующих бинарных отношений, заданных в множестве всех непрерывных вещественных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ вещественной оси, являются упорядоченностями:

1) $f(x) \sim \varphi(x)\,(\rho_1)$, если при всяком $c \in [a, b]$ имеет место $f(c) \leqslant \varphi(c)$;

2) $f(x) \sim \varphi(x)\,(\rho_2)$, если $f(c_1) \leqslant \varphi(c_2)$, где $f(c_1)$ — наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, а $\varphi(c_2)$ — наибольшее значение $\varphi(x)$ на $[a, b]$;

3) $f(x) \sim \varphi(x)\,(\rho_3)$, если $\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx \leqslant 0$;

4) $f(x) \sim \varphi(x)\,(\rho_4)$, если найдутся такие c_1, $c_2 \in [a, b]$, что $f(c_1) \leqslant \varphi(c_2)$;

5) $f(x) \sim \varphi(x)\,(\rho_5)$, если $f(a) \leqslant \varphi(a)$ и $f(b) \leqslant \varphi(b)$.

1.3.16. В множестве всех бесконечных последовательностей вещественных чисел заданы нижеследующие бинарные отношения. Выяснить, какие из них являются эквивалентностями, и какие упорядоченностями:

1) $(a_1, a_2, a_3 \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)\,(\rho_1)$, если $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)\,(\rho_2)$, если найдется такое n, что $a_k = b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$;

3) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)\,(\rho_3)$, если найдется такое n, что $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$;

4) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots)(\rho_4)$, если или $a_k = b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ или найдется такое n, что $a_n < b_n$ и $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$

1.3.17. Доказать, что в конечном упорядоченном множестве всегда имеются минимальные элементы и максимальные элементы.

1.3.18.Т.У. Доказать, что для всякой упорядоченности ρ в конечном множестве Ω всегда найдется такая линейная упорядоченность ρ', которая включает ρ, т. е. $\rho \subset \rho'$.

Примечание. На самом деле указанное утверждение справедливо не только для конечного, но для любого Ω.

1.3.19. Пусть $\{\rho_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$ есть некоторая совокупность упорядоченностей в множестве Ω. Доказать, что бинарное отношение

$$\sigma = \bigcap_{\xi\in\Gamma} \rho_\xi$$

также будет упорядоченностью в Ω.

1.3.20. Описать все линейно упорядоченные множества, обладающие тем свойством, что для любых элементов $\alpha \leqslant \beta$ существует лишь конечное множество элементов γ таких, что $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

1.3.21. Какие из следующих множеств рациональных чисел, упорядоченных по величине, будут вполне упорядоченными:

1) множество всех целых чисел;
2) множество всех целых положительных чисел;
3) множество всех целых отрицательных чисел;
4) множество всех рациональных чисел;
5) множество всех чисел вида $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;
6) множество всех чисел вида $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;
7) множество всех чисел вида $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

1.3.22. В множестве M имеется линейная упорядоченность ρ такая, что и сама ρ и ρ^* являются полными упорядоченностями. Что представляет собою M?

1.3.23. В множестве M дано разбиение $M = \{N_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$, в совокупности классов которого определена полная упорядоченность. В каждом классе в свою очередь определена полная упорядоченность. В M определяется бинарное отношение ρ, согласно которому $x \sim y\ (\rho)$, если или 1) $x \in N_\alpha$, $y \in N_\beta$, $\alpha \neq \beta$ и $N_\alpha \leqslant N_\beta$ согласно упорядочению в совокупности классов разбиения, или 2) x, $y \in N_\xi$ и x предшествует y согласно упорядоченности в N_ξ. Доказать, что ρ есть полная упорядоченность в M.

§ 4. Умножение бинарных отношений

Пусть ρ и σ — два бинарных отношения в множестве Ω. Их произведением называется бинарное отношение $\tau = \rho\sigma$ в Ω, согласно которому $\alpha \sim \beta\ (\tau)$ $(\alpha, \beta \in \Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется такой $\gamma \in \Omega$, что $\alpha \sim \gamma\ (\rho)$ и $\gamma \sim \beta\ (\sigma)$.

В частности, можно рассматривать произведение бинарного отношения ρ само на себя, причем употребляется запись $\rho\rho = \rho^2$. Благодаря ассоциативности (которая будет получена в 1.4.4) можно говорить о ρ^3, имея в виду $\rho^3 = (\rho\rho)\rho = \rho(\rho\rho)$ и т. д.

Для $\Omega' \subset \Omega$ и бинарного отношения ρ в множестве Ω определено подмножество $\rho\Omega'$, состоящее из всех тех элементов $\alpha \in \Omega$, для каждого из которых найдется такой $\beta \in \Omega'$, что $\alpha \sim \beta\ (\rho)$. Аналогично $\Omega'\rho$ означает совокупность всех тех $\alpha \in \Omega$, для каждого из которых найдется такой $\beta \in \Omega'$, что $\beta \sim \alpha\ (\rho)$.

В частности, если Ω' состоит из одного элемента: $\Omega' = \{\alpha\}$ $(\alpha \in \Omega)$, то множества $\rho\alpha$ и $\alpha\rho$ иногда называют срезами (правым и левым) бинарного отношения ρ по элементу α.

1.4.1. В множестве всех натуральных чисел N определены нижеследующие бинарные отношения: ρ, σ, τ, λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$:

$n \sim m\ (\rho)$, если n есть делитель m;

$n \sim m\ (\sigma)$, если $n < m$;

$n \sim m\ (\tau)$, если n и m взаимно просты;

$n \sim m\ (\lambda_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, если $|m - n| = k$.

Найти произведения

$$\rho^2,\ \rho\sigma,\ \sigma^2,\ \tau^2,\ \rho\lambda_k,\ \lambda_k\rho,\ \sigma\lambda_k,\ \lambda_k\sigma,\ \lambda_k\lambda_l.$$

Примечание. Обратить внимание на случаи, показывающие, что умножение бинарных отношений некоммутативно.

1.4.2. Для бинарных отношений ρ и σ в множестве Ω доказать, что

$$\mathrm{pr}_1(\rho\sigma) \subset \mathrm{pr}_1\rho, \qquad \mathrm{pr}_2(\rho\sigma) \subset \mathrm{pr}_2\sigma.$$

1.4.3. Для бинарного отношения ρ в множестве Ω доказать, что

$$\mathrm{pr}_1\rho = \rho\Omega, \qquad \mathrm{pr}_2\rho = \Omega\rho.$$

1.4.4. Пусть в множестве Ω даны три бинарных отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)\rho_3 = \rho_1(\rho_2\rho_3)$$

(ассоциативность умножения бинарных отношений).

1.4.5. Пусть $\Omega' \subset \Omega$, а ρ_1 и ρ_2 — два бинарных отношения в Ω. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)\Omega' = \rho_1(\rho_2\Omega'),$$
$$\Omega'(\rho_1\rho_2) = (\Omega'\rho_1)\rho_2.$$

1.4.6. Пусть Z — множество всех комплексных чисел. В Z определены бинарные отношения ρ, σ, τ, согласно которым

$$z_1 \sim z_2\,(\rho), \quad \text{если} \quad |z_1| = |z_2|;$$
$$z_1 \sim z_2\,(\sigma), \quad \text{если} \quad \arg z_1 = \arg z_2;$$
$$z_1 \sim z_2\,(\tau), \quad \text{если} \quad \bar{z}_1 = z_2.$$

R — множество всех вещественных чисел, C — множество всех комплексных чисел z, у которых $|z| \leqslant 1$, $P = \{i\}$.

Найти: ρR, $R\rho$, σR, $R\tau$, ρC, $C\sigma$, $C\tau$, ρP, $P\sigma$, $P\tau$.

1.4.7. Пусть ρ_1, ρ_2, σ — три бинарных отношения в множестве Ω, причем $\rho_1 \subset \rho_2$. Доказать, что

$$\sigma\rho_1 \subset \sigma\rho_2, \qquad \rho_1\sigma \subset \rho_2\sigma.$$

1.4.8. Доказать, что для любых бинарных отношений τ, ρ_α, ρ_β, ... в множестве Ω справедливо

$$\tau(\rho_\alpha \cup \rho_\beta \cup \ldots) = \tau\rho_\alpha \cup \tau\rho_\beta \cup \ldots,$$
$$(\rho_\alpha \cup \rho_\beta \cup \ldots)\tau = \rho_\alpha\tau \cup \rho_\beta\tau \cup \ldots;$$
$$\tau(\rho_\alpha \cap \rho_\beta \cap \ldots) \subset \tau\rho_\alpha \cap \tau\rho_\beta \cap \ldots,$$
$$(\rho_\alpha \cap \rho_\beta \cap \ldots)\tau \subset \rho_\alpha\tau \cap \rho_\beta\tau \cap \ldots$$

1.4.9. В множестве, состоящем из двух элементов $\{a, b\}$, определены бинарные отношения ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}, \quad \rho_2 = \{(a, b), (b, a)\}.$$

Найти и сравнить

$$\omega(\rho_1 \cap \rho_2), \qquad \omega\rho_1 \cap \omega\rho_2.$$

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 1.4.8.

1.4.10. Найти следующие произведения бинарных отношений в множестве Ω:

$$\omega^2, \quad \omega\bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta}\omega, \quad \bar{\Delta}^2.$$

1.4.11. В множестве всевозможных последовательностей из n элементов некоторого множества M определены бинарные отношения ρ_k $(k = 1, 2, \ldots n)$, согласно которым

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n)\ (\rho_k),$$

если $a_k = b_k$.

Найти $\rho_i\rho_j$.

1.4.12. В множестве $\mathfrak{Q}$, состоящем из всех подмножеств множества M, рассматривается бинарное отношение включения ρ (т. е. $P \sim Q\,(\rho)$, где $P,\ Q \subset M$, если $P \subset Q$). Найти

$$\rho^2,\ \rho\bar{\rho},\ \bar{\rho}\rho,\ \rho\rho^*,\ \bar{\rho}\rho^*.$$

1.4.13. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве $\mathfrak{Q}$. Выяснить, что представляют собою произведения $\rho\Delta$, $\Delta\rho$, $\omega\rho$, $\rho\omega$.

1.4.14. Выяснить, для каких бинарных отношений ρ в множестве $\mathfrak{Q}$ выполняются следующие равенства:

1) $\omega\rho = \omega$; 2) $\rho\omega = \omega$; 3) $\rho\omega\rho = \omega$; 4) $\omega\rho\omega = \omega$; 5) $\rho\rho^* = \omega$.

1.4.15. В множестве всех вещественных непрерывных функций, заданных на замкнутом промежутке $E = [a,\ b]$, определены бинарные отношения σ_1, σ_2, σ_3, согласно которым

$f(x) \sim \varphi(x)\,(\sigma_1)$, если $f(c) \leqslant \varphi(c)$ для всякого $c \in E$;
$f(x) \sim \varphi(x)\,(\sigma_2)$, если $f(a) = \varphi(a)$, $f(b) = \varphi(b)$;
$f(x) \sim \varphi(x)\,(\sigma_3)$, если $f(c) \neq \varphi(c)$ для всякого $c \in E$.

Найти

$$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \sigma_3^2,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_2.$$

1.4.16.Т. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве $\mathfrak{Q}$. Доказать, что для транзитивности ρ необходимо и достаточно выполнение $\rho^2 \subset \rho$.

1.4.17.Т. Пусть ρ_1 и ρ_2 — произвольные бинарные отношения в множестве $\mathfrak{Q}$. Доказать, что

$$(\rho_1\rho_2)^* = \rho_2^*\rho_1^*.$$

1.4.18.Т. Пусть ρ — произвольное бинарное отношение в множестве $\mathfrak{Q}$. Доказать, что $\rho\rho^*$ всегда является симметричным бинарным отношением.

1.4.19.Т. Доказать, что бинарное отношение ρ в множестве $\mathfrak{Q}$ является упорядоченностью тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

$$\rho^2 = \rho,\quad \rho \cap \rho^* = \Delta.$$

1.4.20. Пусть ρ_1 и ρ_2 являются бинарными отношениями в множестве $\mathfrak{Q}$. Выяснить, всегда ли из рефлексивности обоих отношений ρ_1 и ρ_2 следует рефлексивность $\rho_1\rho_2$. Выяснить,

всегда ли из транзитивности ρ_1 и ρ_2 следует транзитивность $\rho_1\rho_2$. Выяснить, всегда ли из симметричности ρ_1 и ρ_2 следует симметричность $\rho_1\rho_2$. Выяснить, всегда ли из антисимметричности ρ_1 и ρ_2 следует антисимметричность $\rho_1\rho_2$.

1.4.21. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две такие эквивалентности в множестве Ω, что $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$. Доказать, что тогда и $\rho_1\rho_2$ является эквивалентностью.

1.4.22. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две линейные упорядоченности в множестве Ω. Выяснить, когда $\rho_1\rho_2$ будет линейной упорядоченностью в Ω.

1.4.23. Пусть ρ_1 и ρ_2 — симметричные бинарные отношения в множестве Ω, причем $\rho_1\rho_2 \subset \rho_2\rho_1$. Доказать, что $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

1.4.24. Пусть ρ — эквивалентность в некотором множестве Ω и σ — линейная упорядоченность в том же множестве. Какими из основных свойств: рефлексивностью, транзитивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают во всяком Ω следующие произведения:

$$\rho^2,\ \rho^3,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \rho\sigma,\ \sigma\rho,\ \sigma\rho\sigma,\ \rho\sigma\rho.$$

1.4.25. Доказать, что для бинарного отношения ρ в множестве Ω равенство

$$\rho^2 \cap \rho = \emptyset$$

имеет место тогда и только тогда, когда из $\alpha \sim \beta(\rho)$ и $\beta \sim \gamma(\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \gamma(\bar{\rho})$.

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ОБЩЕГО ТИПА

§ 1. Понятие алгебраического действия

Говорят, что в множестве M задано алгебраическое действие или, короче, просто действие, если указано правило, сопоставляющее некоторым парам элементов из M, взятым в определенном порядке, элемент из того же множества M. Таким образом, действие есть отображение некоторого подмножества декартова произведения $M \times M$ в M.

Наравне с термином «действие» употребляют также термины «операция», «композиция». Иногда уточняют термин, говоря о бинарном действии, поскольку возможно рассмотрение законов, сопоставляющих элементы тройкам элементов, — тернарное действие — или даже последовательностям n элементов при любом натуральном n. Множество, рассматриваемое относительно некоторого заданного в нем действия, иногда называют *оперативом* или *группоидом*, хотя чаще последнему термину придают более узкий смысл.

Элемеит z, сопоставленный паре (x, y) $(x, y \in M)$ при данном действии, называют *результатом* этого действия, совершенного над элементами x и y. Для его обозначения употребляют различные виды записи. Например, зафиксировав какую-либо букву, скажем f, пишут $z = f(x, y)$. Однако чаще вместо такой функциональной записи употребляют следующую форму записи. Элементы, над которыми совершается действие, пишут рядом, помещая между ними какой-либо специальный знак. Некоторые такие знаки хорошо известны еще из элементарной математики: $+$, $-$, $\times$, $:$. Они употребляются как для обычных действий сложения, вычитания, умножения, деления чисел, так и для других действий, которые могут и не иметь с ними ничего общего. Иногда также употребляют знаки вида $\circ$, $*$ и т. п.

Очень распространены так называемая мультипликативная запись и терминология. Элементы, над которыми совершается действие, пишутся рядом без какого-либо знака между ними или же между ними ставится точка:

$$xy = z, \quad x \cdot y = z.$$

В этом случае элементы x и y называют *сомножителями* (соответственно левыми и правыми), а z — их *произведением*. При этом действие может не иметь никакого отношения к обычному умножению.

Иногда употребляются аддитивная запись и терминология, когда результат действия над x и y обозначают через $x+y$ с соответствующим употреблением терминов: сумма, слагаемые и т. д.

Разумеется, тогда, когда в том или ином конкретном множестве (например, состоящем из чисел, функций, матриц) названия определенных действий и соответствующие им знаки закреплены твердо установленным обычаем (сложение, умножение), они употребляются в соответствующем смысле без особых пояснений. В общем случае чаще всего используется мультипликативная терминология, часто без добавочных пояснений. В дальнейшем мы также будем обычно поступать таким образом.

Фактическое задание действия в множестве может быть произведено различными методами. Можно, исходя из конкретной природы элементов, составляющих M, указать закон (в частности, формулу), выделяющий те пары, для которых определен результат действия, и то, как строится элемент, являющийся результатом действия для каждой такой пары.

Возможно также непосредственное перечисление всех результатов действия. Его удобнее всего осуществить при помощи так называемой таблицы Кэли (называемой также таблицей умножения при мультипликативной записи). Слева и сверху квадратной таблицы выписываются все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу x, и столбца, соответствующего элементу y, пишут результат действия над парой (x, y) или черточку, если результат действия для данной пары не определен.

Хотя на самом деле таблица Кэли может быть построена лишь для конечного множества M и притом с не слишком большим числом элементов, теоретически можно рассматривать таблицу Кэли при любом множестве M — конечном и даже бесконечном.

Если в множестве M определено действие, то для каждого подмножества $M' \subset M$ действие в M определяет естественным образом действие в M'. Именно, для $x, y \in M'$ результат действия в M' определен и равен $z \in M'$, если для x, y, рассматриваемых как элементы M, результат определен и равен $z \in M'$. (Очень важно помнить, что, говоря о действии в каком-либо множестве, мы всегда требуем, чтобы результатами действия были элементы, принадлежащие этому множеству; случаев «внешнего действия», когда результатами считаются и элементы, не содержащиеся в самом множестве, мы совсем не рассматриваем.) О таком, по существу говоря, новом действии говорят также, что это есть ограничение основного действия на M'.

Два множества M_1 и M_2, в каждом из которых определено действие, обозначаемое соответственно через $\bigcirc_1$ и $\bigcirc_2$, называются *изоморфными* относительно этих действий, если между всеми элементами M_1 и всеми элементами M_2 можно установить такое взаимно однозначное соответствие:

$$x_1 \longleftrightarrow x_2, \quad y_1 \longleftrightarrow y_2 \quad (x_1, y_1 \in M_1; \quad x_2, y_2 \in M_2),$$

что $x_1 \underset{1}{\circ} y_1$ определено в M_1 тогда и только тогда, когда для соответствующих им элементов в M_2 определено $x_2 \underset{2}{\circ} y_2$, причем элементы $x_1 \underset{1}{\circ} y_1$ и $x_2 \underset{2}{\circ} y_2$ соответствуют друг другу при рассматриваемом соответствии, т. е. $x_1 \underset{1}{\circ} y_1 \longleftrightarrow x_2 \underset{2}{\circ} y_2$.

Смысл и значение понятия изоморфизма заключаются в том, что изоморфные множества с действиями являются относительно этих действий совершенно одинаковыми. Если в таблице Кэли одного из них элементы расположить в том же порядке, в каком расположены соответствующие элементы во втором, то таблицы Кэли обоих множеств окажутся совпадающими (с точностью до обозначения элементов). Это означает, что действия в изоморфных множествах, по существу, совершенно одинаковы.

2.1.1. В множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 рассматриваем действие сложения. Определить, для какого числа пар определен результат действия.

Примечание. Напоминаем, что в пределах рассматриваемого множества результат нашего действия над числами 6 и 7 следует считать неопределенным, ибо число 13 не содержится в нашем множестве.

2.1.2. В множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ рассматриваем действие обычного вычитания. Составить таблицу Кэли.

Примечание. Учесть примечание к задаче 2.1.1.

2.1.3. В множестве, состоящем из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, действие $x_i \circ x_j$ задано таблицей Кэли:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_2	—	—	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_2	x_5	x_2	x_1	—
x_3	—	x_3	x_3	x_3	x_3	—
x_4	x_1	x_5	x_2	x_5	x_1	x_1
x_5	x_5	x_5	—	x_2	x_3	x_1
x_6	x_6	x_6	x_2	—	—	x_1

Выяснить, для каких x_i определены оба результата $(x_i \circ x_i) \circ x_i$ и $x_i \circ (x_i \circ x_i)$.

2.1.4. Можно ли построить такую таблицу Кэли для множества $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, чтобы $z_i \circ z_i$ было определено для всех z_i, кроме z_1, для которого $z_1 \circ z_1$ не определено, и чтобы ни $(z_i \circ z_j) \circ z_k$, ни $z_i \circ (z_j \circ z_k)$ не были определены

ни для какой тройки z_i, z_j, z_k (i, j, $k = 1, 2, 3, 4$)? Найти общий вид такой таблицы.

2.1.5. В множестве всех рациональных чисел M каждая из следующих формул определяет действие, результат которого определен для каждой пары элементов из M.

1) $a \circ b = \frac{a+b}{2}$;

2) $a \circ b = \frac{a(a+1)+b(b+1)}{2}$;

3) $a \circ b = a^2 - 2ab + b^2$.

Эти действия рассматриваются в множестве N, состоящем из всех натуральных чисел. Для каких пар элементов из N определены результаты этих действий в N?

2.1.6. Доказать, что всякое множество с действием изоморфно само себе относительно этого действия.

2.1.7. В множестве всех положительных рациональных чисел рассматривается действие обычного умножения. A есть его подмножество, состоящее из чисел, бóльших 1, и B — подмножество, состоящее из чисел, меньших 1. Доказать, что относительно умножения A и B изоморфны.

2.1.8. M есть множество всех натуральных чисел, M_1 — его подмножество, состоящее из всех нечетных чисел, и M_2 — подмножество, состоящее из всех четных чисел. Выяснить, будут ли какие-нибудь из множеств M, M_1, M_2 изоморфны между собою относительно действия обычного умножения.

2.1.9. Доказать, что множество всех положительных вещественных чисел изоморфно относительно обычного сложения множеству всех отрицательных вещественных чисел.

2.1.10. В множестве $G = \{2, 3, 4, 5\}$ рассматривается действие обычного сложения. В множестве $H = \{2, 4, 5, 10\}$ рассматривается действие обычного умножения. Доказать, что множества G и H изоморфны относительно указанных действий.

2.1.11.У. В множестве G всех вещественных положительных чисел рассматривается действие обычного умножения. В множестве H всех вещественных чисел рассматривается действие обычного сложения. Доказать, что относительно указанных действий множества G и H изоморфны.

2.1.12. Каково число неизоморфных между собою множеств с действием, состоящих из n элементов каждое ($n \geqslant 3$),

таблица Кэли которых обладает следующим свойством. В $n^3 - 1$ ее клетках стоит один и тот же элемент. В одной клетке стоит черточка (результат действия не определен).

2.1.13. В множестве M_1, состоящем из элементов α, β, γ, δ, ε, действие определено таблицей Кэли:

	α	β	γ	δ	ε
α	α	α	α	α	α
β	α	β	γ	α	ε
γ	α	γ	β	β	ε
δ	δ	δ	δ	δ	δ
ε	ε	ε	ε	ε	ε

Множество M_2, состоящее из чисел -1, 0,1, рассматривается относительно обычного умножения.

Существуют ли подмножества множества M_1, которые относительно действия, определяемого вышеприведенной таблицей, изоморфны M_2? Каково число таких подмножеств?

2.1.14. В множестве M, состоящем из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где x — любое вещественное число, рассматривается действие умножения матриц. Доказать, что относительно этого действия M изоморфно множеству всех вещественных чисел, рассматриваемых относительно действия сложения.

2.1.15. В множестве $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ рассматривается действие, согласно которому

$$x_i \circ x_j = x_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Выяснить, каким своим подмножествам (рассматриваемым относительно действия, определяемого в них действием в M) изоморфно M.

2.1.16. Пусть в каждом из множеств M_1, M_2, M_3 задано некоторое действие. Относительно этих действий M_1 изоморфно M_2, а M_2 изоморфно M_3. Доказать, что тогда M_1 изоморфно M_3.

Примечание. Благодаря этому, учитывая также результат 2.1.6 и то, что отношение изоморфизма по самому определению симметрично, можно заключить, что отношение

изоморфизма можно рассматривать как эквивалентность в классе всех множеств с действиями.

2.1.17.Т. Пусть в множестве Ω задано действие, согласно которому для любых α, β, $\gamma \in \Omega$ имеет место:

1) $\alpha \circ \alpha = \alpha$;

2) если $\alpha \circ \beta$ определено, то $\alpha \circ \beta \in \{\alpha, \beta\}$;

3) если $\alpha \circ \beta$ определено, то определено и $\beta \circ \alpha$, причем $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$;

4) если $\alpha \circ \beta = \alpha$ и $\beta \circ \gamma = \beta$, то определено $\alpha \circ \gamma$, причем $\alpha \circ \gamma = \alpha$.

Определяем в Ω бинарное отношение ρ, полагая $\alpha \sim \beta\ (\rho)$, если $\alpha \circ \beta$ определено и $\alpha \circ \beta = \alpha$.

Доказать, что ρ является отношением упорядоченности.

2.1.18.Т. Пусть в множестве Ω дано отношение упорядоченности ρ. Определяем в Ω действие, полагая $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \alpha$ для таких пар α, $\beta \in \Omega$, для которых $\alpha \sim \beta\ (\rho)$.

Доказать, что это действие удовлетворяет четырем условиям, сформулированным в предыдущей задаче.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

§ 2. Основные свойства действий

Общая теория алгебраических действий распадается на ряд алгебраических дисциплин, каждая из которых занимается множествами с тем или иным количеством действий, с теми или иными условиями, связывающими эти действия между собою, и с дополнительными условиями, налагаемыми на эти действия. В настоящей книге мы ограничиваемся изучением множеств с одним действием (конечно, в каждом из них могут более или менее естественно определяться и другие действия, но мы каждый раз интересуемся только одним из действий). Теория множеств с одним действием разбивается на ряд частных теорий, отличающихся друг от друга тем, что каждая из них обладает некоторыми основными свойствами. Какие из возможных свойств взять в качестве основных и тем самым на какие разделы разбивать общую теорию — это, конечно, зависит в значительной степени от фактического состояния науки в данный момент. С течением времени границы могут изменяться.

В настоящее время в качестве упомянутых основных свойств, в зависимости от выполнения или невыполнения которых классифицируются отдельные направления общей теории действий, следует принять указанные ниже.

Пусть в множестве M задано действие, для которого употребляем значок $\circ$ (пока мы не переходим к мультипликативной записи, которой в основном будем придерживаться в дальнейшем).

1. Действие называется *неограниченно применимым*, если результат действия $x \bigcirc y$ определен для любой пары элементов x, $y \in M$.

2. Действие называется *коммутативным*, если для всякой пары x, $y \in M$, для которой определен результат $x \bigcirc y$, обязательно определен и результат $y \bigcirc x$, причем выполняется

$$x \bigcirc y = y \bigcirc x.$$

3. Действие называется *ассоциативным*, если для всякой тройки x, y, $z \in M$, для которой определены результаты $(x \bigcirc y)$ и $(x \bigcirc y) \bigcirc z$, обязательно определены результаты $(y \bigcirc z)$, $x \bigcirc (y \bigcirc z)$ и наоборот, причем выполняется равенство

$$(x \bigcirc y) \bigcirc z = x \bigcirc (y \bigcirc z).$$

4. Действие обладает свойством *обратимости слева*, если для всяких u, $v \in M$ всегда найдется такой элемент $x \in M$, что определено $x \bigcirc u$ и выполняется

$$x \bigcirc u = v.$$

5. Действие обладает свойством *обратимости справа*, если для всяких u, $v \in M$ всегда найдется такой элемент $y \in M$, что определено $u \bigcirc y$ и выполняется

$$u \bigcirc y = v.$$

6. Действие обладает свойством *сократимости слева*, если из того, что определены $x \bigcirc u$ и $x \bigcirc v$ (x, u, $v \in M$) и выполнено

$$x \bigcirc u = x \bigcirc v,$$

всегда следует $u = v$.

7. Действие обладает свойством *сократимости справа*, если из того, что определены $u \bigcirc x$ и $v \bigcirc x$ (x, u, $v \in M$) и выполнено

$$u \bigcirc x = v \bigcirc x,$$

всегда следует $u = v$.

С вопросом о выполнении для какого-либо действия указанных свойств тесно связаны нижеследующие понятия.

Элемент u называется *левой единицей* для M, если для любого $x \in M$ определено $u \bigcirc x$ и имеет место

$$u \bigcirc x = x.$$

Элемент u иазывается *правой единицей* для M, если для любого $x \in M$ определено $x \bigcirc u$ и имеет место

$$x \bigcirc u = x.$$

Элемент u называется *двусторонней единицей* для M или просто *единицей*, если u является для M одновременио и левой и правой единицей.

Отметим, что вместо термина «единица» употребляют также и термины «единичный элемент» или «нейтральный элемент».

Если в множестве M имеется единица e, то элементы x и x' называются *взаимно обратными*, а каждый из них обратным для другого, если определены $x \bigcirc x'$ и $x' \bigcirc x$ и имеет место

$$x \bigcirc x' = x' \bigcirc x = e.$$

При мультипликативной записи элемент x', обратный x, обозначается обычно при помощи показателя степени -1:

$$x' = x^{-1}.$$

Элемент v называется *левым нулем* для M, если для любого $x \in M$ определено $v \bigcirc x$ и имеет место

$$v \bigcirc x = v.$$

Элемент v называется *правым нулем* для M, если для любого $x \in M$ определено $x \bigcirc v$ и имеет место

$$x \bigcirc v = v.$$

Элемент называется *двусторонним нулем* для M или просто *нулем*, если он является для M одновременно и левым и правым нулем. Вместо термина «нуль» употребляют также термины «нулевой элемент» или «аннулирующий элемент».

Элемент x называется *идемпотентным* (или идемпотентом), если $x \bigcirc x$ определено и имеет место $x \bigcirc x = x$.

Все вышеприведенные формулировки упрощаются, если действие обладает свойством неограниченной применимости. Такие упрощения полезно держать в памяти.

В этом параграфе всюду без дальнейших пояснений M будет обозначать множество с заданным в нем действием, для которого употребляется значок $\bigcirc$.

Напоминаем, что, как мы условились в § 1, для всякого $M' \subset M$ будем считать, что в M' определено это же самое действие в смысле, указанном в § 1.

2.2.1. Выяснить выполнение основных семи свойств и наличие единичного и нулевого элементов в множестве всех вещественных чисел, рассматриваемом относительно действий:

1) обычное сложение чисел;
2) обычное умножение чисел;
3) обычное вычитание чисел;
4) обычное деление чисел.

2.2.2. Те же вопросы, что и в 2.2.1, относительно тех же четырех действий выяснить для следующих множеств:

1) множество всех натуральных чисел;
2) множество всех целых чисел;
3) множество всех рациональных чисел;
4) множество всех положительных чисел;
5) множество всех отрицательных чисел.

2.2.3. В множестве всех непрерывных функций, заданных на одном и том же отрезке вещественной оси $[a, b]$, выяснить выполнение основных свойств и наличие единичного и нулевого элементов относительно действий:

1) обычное сложение функций;

2) обычное умножение функций;

3) обычное вычитание функций;

4) обычное деление функций.

2.2.4. Пусть в множестве M имеются левые единицы и правые единицы. Тогда в M имеется двусторонняя единица e, причем никаких других, ни левых, ни правых единиц, кроме e, в M не существует. Доказать.

Примечание. В частности, отсюда следует, что в M может существовать не более одной единицы.

2.2.5. Пусть в множестве M имеются левые нули и правые нули. Тогда в M имеется двусторонний нуль 0, причем никаких других ни левых, ни правых нулей, кроме 0, в M не существует. Доказать.

Примечание. Отсюда следует, что в M может существовать не более одного нуля.

2.2.6. В множестве N всех натуральных чисел для каждого из указанных ниже действий выяснить, какие из семи основных свойств выполнены. Существуют ли единицы и нули (левые, правые, двусторонние)? Какие элементы являются идемпотентами?

1) $a \circ b = c$, где c есть наибольший общий делитель чисел a и b;

2) $a \circ b = c$, где c есть наименьшее общее кратное чисел a и b;

3) $a \circ b = a^b$;

4) $a \circ b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

2.2.7. В множестве всех квадратных комплексных матриц порядка n, рассматриваемом относительно действия умножения матриц, выяснить, какие из семи основных свойств выполнены. Имеются ли нуль и единица? Какие элементы обладают обратными?

2.2.8. Пусть p, q, r — произвольные фиксированные вещественные числа. В множестве всех вещественных чисел рассматривается действие, результатом которого для чисел a, b является число $a \circ b = pa + qb + r$. Выяснить, при каких

значениях p, q, r это действие обладает теми или иными из семи основных свойств.

2.2.9.У. В множестве R_Ω всех бинарных отношений в множестве Ω рассматривается действие умножения бинарных отношений. Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место. Имеются ли единица и нуль?

2.2.10. В множестве всех положительных вещественных чисел R рассматривается действие нахождения среднего геометрического, т. е. для $a, b \in R$ результат $a \circ b$ всегда определен и равен арифметическому значению корня $\sqrt{a \cdot b}$. Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место. Имеются ли единица и нуль? Какие из элементов R являются идемпотентами?

2.2.11. Пусть M есть множество точек плоскости. Заданы два вещественных числа φ и λ, где $0 < \varphi < 2\pi$ и $\lambda > 0$. В M определено следующее действие. Результат $a \circ b = c$ определен для любой пары точек $a, b \in M$. При этом точка c расположена так, что расстояние от a до c равно расстоянию от a до b, умноженному на λ, и при $a \neq b$ угол между направлением от a к b и между направлением от a к c равен φ (угол отсчитывается против движения часовой стрелки).

Выяснить, какие из основных семи свойств имеют место.

2.2.12. Пусть M есть множество направленных отрезков на плоскости, т. е. пар точек (a, b). Действие в M задано следующим образом: для (a, b) и (c, d) результат определен, если конец первого отрезка b совпадает с началом второго c, при этом

$$(a, b) \circ (b, d) = (a, d).$$

Выяснить геометрический смысл действия. Какие из основных семи свойств имеют место?

2.2.13. Пусть действие в множестве задано таблицей Кэли. Как по этой таблице можно непосредственно судить, обладает ли действие каким-либо из свойств:

1) неограниченной применимости;
2) коммутативности;
3) обратимости слева;
4) обратимости справа;
5) сократимости слева;
6) сократимости справа?

2.2.14. Для каких из семи основных свойств действий можно утверждать, что если оно имеет место в M, то обязательно будет иметь место и во всяком $N \subset M$ относительно того же действия?

2.2.15. Пусть в каждом из множеств последовательности

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \ldots$$

определено действие $\underset{n}{\circ}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. При этом для $x, y \in M_n$ определено и имеет место $x \underset{m}{\circ} y = z$ $(m \geqslant n)$ тогда и только тогда, когда в M_n определено $x \underset{n}{\circ} y$ и $x \underset{n}{\circ} y = z$, $z \in M_n$. В множестве $M = \bigcup\limits_n M_n$ определяем действие $\circ$, полагая $x \circ y = z$ $(x, y, z \in M)$, если найдется такое n, что $x, y, z \in M_n$ и $x \underset{n}{\circ} y = z$.

Доказать, что такое правило действительно определяет действие в M.

Доказать, что если все действия $\underset{n}{\circ}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ обладают одним из основных свойств, то и $\circ$ в M будет обладать этим свойством.

2.2.16.Т. Пусть P есть совокупность всех подмножеств некоторого непустого множества Ω (в частности, в P включается и пустое множество). Выяснить, какими из основных семи свойств обладает в P действие объединения множеств и какими действие пересечения.

2.2.17. В множестве всевозможных последовательностей из n вещественных чисел рассматривается действие, согласно которому

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \circ (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ = (a_1 + b_1, a_1 + a_2 + b_1 + b_2, \ldots, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Выяснить, какими из основных семи свойств обладает это действие.

2.2.18.Т. Пусть дано некоторое семейство множеств M_ξ $(\xi \in \Sigma)$, в каждом из которых определено действие,

обозначаемое одним и тем же знаком $\circ$. Декартово произведение (см. гл. I, § 1) этих множеств

$$M = \prod_{\xi \in \Sigma} \times M_\xi$$

рассматривается относительно следующего действия. Для $(x_\xi)_\Sigma$ и $(y_\xi)_\Sigma$ результат определен, если в каждом M_ξ определено $x_\xi \circ y_\xi$. В этом случае

$$(x_\xi)_\Sigma \circ (y_\xi)_\Sigma = (x_\xi \circ y_\xi)_\Sigma.$$

Доказать, что если в каждом из M_ξ действие обладает одним из основных семи свойств, то и в M действие будет обладать соответствующим свойством.

§ 3. Умножение подмножеств мультипликативного множества

Если в множестве M определено неограниченно применимое действие, для которого употребляется мультипликативная запись, то M, рассматриваемое относительно этого действия, мы будем называть *мультипликативным множеством.*

Пусть A и B — два подмножества мультипликативного множества M. Их произведением AB называется множество всех таких элементов z из M, которые могут быть представлены в виде $z = xy$, где $x \in A$, $y \in B$.

Говорят, что непустое подмножество $A \subset M$ *замкнуто* относительно умножения (употребляют также термин «стационарно»), если $AA \subset A$.

A называется *левым идеалом*, если $MA \subset A$;

A называется *правым идеалом*, если $AM \subset A$;

A называется *двусторонним идеалом*, если оно является одновременно и левым и правым идеалом.

Если A является левым или правым идеалом (в частности, двусторонним), то A называют *идеалом.*

Однако надо иметь в виду, что в литературе идеалами иногда называют лишь двусторонние идеалы. В случае коммутативного умножения понятия левого идеала, правого идеала, двустороннего идеала и идеала, очевидно, совпадают.

2.3.1. Пусть R — мультипликативное множество всех рациональных чисел, Z — множество всех целых чисел, P — множество всех положительных рациональных чисел, N — множество всех отрицательных чисел. Найти произведения множеств:

$$RR,\ RZ,\ ZR,\ ZZ,\ PP,\ PN,\ NN.$$

2.3.2. В мультипликативном множестве M действие задано таблицей умножения:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	b	b	b

Найти $(MM)M$ и $M(MM)$.

2.3.3. Пусть K_1, K_2, K_3, K_1', K_2' — подмножества мультипликативного множества M, причем $K_1' \subset K_1$ и $K_2' \subset K_2$. Доказать, что

1) $K_1(K_2 \cup K_3) = K_1K_2 \cup K_1K_3$;
2) $K_1(K_2 \cap K_3) \subset K_1K_2 \cap K_1K_3$;
3) $K_1'K_2' \subset K_1K_2$.

2.3.4. Пусть M — мультипликативное множество и M^* — совокупность всех его непустых подмножеств. M^* само рассматриваем как мультипликативное множество относительно действия умножения подмножеств мультипликативного множества M. Пусть действие в M обладает каким-либо из следующих основных свойств: ассоциативностью, коммутативностью, наличием левых единиц, наличием правых единиц, наличием левых нулей, наличием правых нулей. Доказать, что тогда и действие в M^* будет обладать соответствующим свойством.

2.3.5. Пусть M — мультипликативное множество всех рациональных положительных чисел, M^* — мультипликативное множество его непустых подмножеств (см. 2.3.4). Доказать, что действие в M^* не обладает ни одним из свойств: сокращения слева, сокращения справа, обратимости слева, обратимости справа.

Примечание. Учесть, что само M всеми упомянутыми свойствами обладает. Результат сопоставить с результатами 2.3.4.

2.3.6. Доказать, что всякий идеал мультипликативного множества замкнут относительно умножения.

2.3.7. Пусть M — мультипликативное множество всех натуральных чисел; A — множество всех четных натуральных чисел; B — множество всех нечетных; C_n — множество всех натуральных чисел, меньших или равных n ($n = 1, 2, 3, \ldots$); D_n — множество всех натуральных чисел, бóльших или равных n.

Выяснить, какие из следующих множеств:

$$A,\ B,\ C_n,\ D_n,\ C_n \cap D_m\ (n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

замкнуты относительно умножения, какие являются идеалами.

2.3.8. В мультипликативном множестве всех комплексных чисел будут ли замкнутыми и являются ли идеалами множество всех вещественных чисел и множество всех чисто мнимых чисел (т. е. чисел вида bi, где b — вещественное число, отличное от нуля)?

2.3.9. В мультипликативном множестве всех вещественных квадратных матриц порядка n будут ли замкнутыми и являются ли идеалами множество всех неособенных матриц и множество всех особенных матриц?

2.3.10. Доказать, что пересечение любого множества замкнутых подмножеств мультипликативного множества, если только оно не пусто, само замкнуто.

2.3.11. Доказать, что пересечение любого множества левых идеалов, если оно не пусто, само является левым идеалом. То же для правых идеалов и двусторонних идеалов.

2.3.12.У. Пусть L — левый идеал и R — правый идеал мультипликативного множества. Доказать, что пересечение $L \cap R$ всегда не пусто.

2.3.13.У. Доказать, что пересечение конечного множества двусторонних идеалов само является двусторонним идеалом.

2.3.14. Доказать, что объединение любого множества левых идеалов мультипликативного множества само является левым идеалом.

То же для правых и двусторонних идеалов.

2.3.15. Пусть T_1 и T_2 являются двусторонними идеалами мультипликативного множества M. Доказать, что T_1T_2 замкнуто относительно умножения.

2.3.16. В мультипликативном множестве M, состоящем из пяти элементов a, b, c_1, c_2, d, действие задано таблицей умножения:

	a	b	c_1	c_2	d
a	a	a	a	a	b
b	a	a	a	a	a
c_1	a	a	a	a	a
c_2	a	a	a	a	a
d	b	a	a	a	a

Выяснить, будут ли идеалами множества $T_1 = \{a, b, c_1\}$, $T_2 = \{a, b, c_2\}$, $T_1 T_2$.

2.3.17. Выяснить, когда множество $\{z\}$, состоящее из одного элемента z мультипликативного множества M, является замкнутым, когда левым идеалом, когда правым, когда двусторонним.

2.3.18.У. Определить количество двусторонних идеалов в мультипликативном множестве всех комплексных квадратных матриц порядка n.

§ 4. Гомоморфизмы

Отображение φ мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 называется *гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in M_1$ в M_2 выполняется равенство

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y).$$

Взаимно однозначное отображение φ, являющееся гомоморфизмом, называется *изоморфизмом*.

Отметим, что при гомоморфизме (и, в частности, при изоморфизме) $\varphi(M_1)$ не обязано совпадать со всем M_2, оно может быть и собственным подмножеством M_2.

Если $\varphi(M_1) = M_2$, то гомоморфизм φ в литературе иногда называют *эпиморфизмом*. Если же гомоморфизм φ является взаимно однозначным отображеннем, т. е. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, если $x \neq y$, то его иазывают иногда *мономорфизмом*.

Гомоморфизму φ мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 соответствует бинарное отношение ρ_φ в множестве M_1, согласно которому $x \sim y\ (\rho_\varphi)$ имеет место тогда и только тогда, когда в M_2 выполнено $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Легко видеть, что ρ_φ является эквивалентностью. Как мы уже знаем (см. гл. 1, § 3), на другом языке это означает, что гомоморфизму φ соответствует разбиение множества M_1. Каждый класс этого разбиения состоит из множества всех элементов M_1, отображающихся при φ в один и тот же элемент из M_2.

Некоторая эквивалентность σ в мультнпликативном множестве M (так же как и соответствующее ей разбиение) называется *стабильной слева*, если из $u \sim v\ (\sigma)$ $(u, v \in M)$ всегда следует $xu \sim xv\ (\sigma)$ при любом $x \in M$. Эквивалентность σ *стабильна справа*, если из $u \sim v\ (\sigma)$ всегда следует $ux \sim vx\ (\sigma)$ при любом $x \in M$.

Если σ стабильна и слева и справа, то говорят, что σ *двусторонне стабильна*. Двусторонне стабильные эквивалентности в литературе часто называют *конгруэнциями*. Вместо термина стабильный иногда говорят *регулярный*.

Пусть τ — некоторое разбиение мультипликативного множества M, обладающее тем свойством, что для любых двух τ-классов K и K' существует такой τ-класс K'' (причем, очевидно, единственный), что $KK' \subseteq K''$. (K и K' перемножаются согласно правилу

перемножения подмножеств мультипликативного множества, см. § 3.) Тогда в множестве всех τ-классов, т. е. в M/τ, можно ввести действие умножения, полагая

$$K \cdot K' = K'',$$

относительно которого M/τ само оказывается мультипликативным множеством. Оно называется *мультипликативным фактор-множеством* мультипликативного множества M по разбиению (или по эквивалентности) τ.

Надо иметь в виду, что умножение τ-классов как элементов мультипликативного фактор-множества M/τ не совпадает с их умножением как подмножеств мультипликативного множества M, поскольку в M возможно $KK' \subset K''$, но $KK' \neq K''$.

2.4.1. Пусть Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел; R — мультипликативное множество всех вещественных чисел; φ_1 — отображение Z в R, согласно которому для каждого $z \in Z$

$$\varphi_1(z) = |z|;$$

φ_2 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_2(z) = |z| + 1;$$

φ_3 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_3(z) = 0;$$

φ_4 — отображение Z в R, согласно которому

$$\varphi_4(z) = 2.$$

Выяснить, какие из отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 являются гомоморфизмами.

2.4.2. Пусть R — мультипликативное множество всех рациональных чисел. Найти все гомоморфизмы R в себя такие, чтобы $\varphi(R) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2.4.3. Пусть M — мультипликативное множество всех комплексных матриц порядка $n > 1$, Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел. Определим отображения φ_1, φ_2, φ_3 множества M в Z, полагая

$$\varphi_1(a) = \det a;$$
$$\varphi_2(a) = a_{11};$$
$$\varphi_3(a) = 1,$$

где $\det a$ — определитель матрицы a; a_{11} — элемент первой строки и первого столбца матрицы a. Выяснить, какие из отображений φ_1, φ_2, φ_3 являются гомоморфизмами.

2.4.4.Т. Пусть φ — изоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Доказать, что M_1 и M_2 изоморфны в смысле § 1.

2.4.5.Т. Пусть мультипликативные множества M_1 и M_2 изоморфны в смысле § 1. Доказать, что тогда найдется изоморфизм M_1 на M_2.

Примечание. Сопоставьте результаты 2.4.4 и 2.4.5.

2.4.6. Пусть φ — изоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Доказать, что обратное отображение φ^{-1} (см. гл. 1, § 2) будет изоморфизмом M_2 на M_1.

2.4.7. Для мультипликативного множества всех целых чисел вида 5^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) найти все гомоморфизмы его в себя. Выяснить, какие из них являются изоморфизмами.

2.4.8. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Пусть M_1 обладает каким-либо из основных свойств: ассоциативностью, коммутативностью, обратимостью слева, обратимостью справа, наличием левых единиц, наличием правых единиц. Доказать, что тогда и M_2 будет обладать соответствующим свойством.

2.4.9. Пусть M_1 — мультипликативное множество всех целых положительных чисел, M_2 — мультипликативное множество, состоящее из двух чисел $\{0; 1\}$. Доказать, что отображение φ мультипликативного множества M_1 на M_2, согласно которому

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(n) = 0 \qquad (n > 1),$$

является гомоморфизмом.

Примечание. Обратить внимание, что в коммутативном мультипликативном множестве M_1 действие обладает свойством сократимости, тогда как в M_2 это свойство не имеет места. Результат сравнить с результатами 2.4.8.

2.4.10. Какому условию должно удовлетворять мультипликативное множество M_0, чтобы для всякого мультипликативного множества M нашелся гомоморфизм M в M_0?

2.4.11. Пусть σ есть некоторое отношение эквивалентности в мультипликативном множестве M. Доказать, что для двусторонней стабильности σ необходимо и достаточно выполнение

условия: из $x_1 \sim y_1(\sigma)$ и $x_2 \sim y_2(\sigma)$ ($x_1, y_1, x_2, y_2 \in M$) должно всегда следовать $x_1x_2 \sim y_1y_2(\sigma)$.

2.4.12. В мультипликативном множестве M с действием, определенным таблицей умножения

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

определено бинарное отношение σ, согласно которому

$$a \sim b(\sigma), \quad b \sim c(\sigma),$$
$$a \sim a(\sigma), \quad b \sim b(\sigma), \quad c \sim c(\sigma).$$

Доказать, что для любых $x, y, z \in M$ из $x \sim y(\sigma)$ всегда следует $xz \sim yz(\sigma)$ и $zx \sim zy(\sigma)$. Найти такие $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M$, что $x_1 \sim y_1(\sigma)$ и $x_2 \sim y_2(\sigma)$, но не имеет места $x_1x_2 \sim y_1y_2(\sigma)$.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 2.4.11.

2.4.13. Пусть M — множество всех ненулевых комплексных полиномов, рассматриваемое относительно обычного умножения полиномов, Z — мультипликативное множество всех комплексных чисел. Для нижеследующих отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 мультипликативного множества M в Z выяснить, какие из них будут гомоморфизмами, и описать разбиения M, соответствующие этим гомоморфизмам:

$$F = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

1) $\varphi_1(F) = a_0$;

2) $\varphi_2(F) = \bar{a}_0$ (где $\bar{a}_0$ — комплексное число, сопряженное с a_0);

3) $\varphi_3(F) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$;

4) $\varphi_4(F) = a_0 + a_n$;

5) $\varphi_5(F) = |a_n|$;

6) $\varphi_6(F) = c^n$ (где c — произвольное отличное от нуля вещественное число).

2.4.14.Т. Пусть τ — некоторое разбиение в мультипликативном множестве M. Для того чтобы существовало мультипликативное фактор-множество M/τ (т. е. чтобы было выполнено свойство разбиения, указанное во введении при опреде-

лении фактор-множества), необходимо и достаточно, чтобы τ было двусторонне стабильным. Доказать.

2.4.15. В мультипликативном множестве R всех рациональных чисел разбиение ρ состоит из трех классов: R^+ состоит из всех положительных чисел, R^- из всех отрицательных, R^0 из одного числа 0. Доказать, что ρ двусторонне стабильно. Построить таблицу умножения для мультипликативного фактор-множества R/ρ.

2.4.16.Т. Пусть T — двусторонний идеал мультипликативного множества M. Обозначим через ρ_T разбиение M, в котором T является одним ρ_T-классом, а все прочие ρ_T-классы состоят каждый из одного элемента M, не принадлежащего T. Доказать, что ρ_T является двусторонне стабильным.

Примечание. Разбиение (и соответственно эквивалентность) такого типа обычно называется *идеальным*. Соответствующее фактор-множество, помимо M/ρ_T, часто обозначается через M/T и называется *идеальным фактор-множеством*.

2.4.17. В мультипликативном множестве M вещественных чисел вида 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) через T_k обозначается подмножество, состоящее из чисел 2^n, у которых $n \geqslant k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Доказать, что T_k является идеалом. Построить таблицу умножения для мультипликативных фактор-множеств M/T_1, M/T_2 и M/T_3.

2.4.18.Т. Пусть ρ — двусторонне стабильная эквивалентность в мультипликативном множестве M. Определяем отображение φ множества M в M/ρ, полагая для каждого $x \in M$ в качестве $\varphi(x)$ тот ρ-класс из M/ρ, который содержит элемент x. Доказать, что φ есть гомоморфизм и что эквивалентность ρ_φ, соответствующая этому гомоморфизму, совпадает с ρ:

$$\rho_\varphi = \rho.$$

В каких случаях φ оказывается изоморфизмом?

Примечание. Описанный гомоморфизм φ часто называют *естественным гомоморфизмом* мультипликативного множества M, соответствующим эквивалентности ρ.

2.4.19.Т. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 в мультипликативное множество M_2 и ρ_φ — эквивалентность в M_1, соответствующая гомоморфизму φ. Доказать, что эквивалентность ρ_φ двусторонне стабильна.

2.4.20.Т. Пусть φ — гомоморфизм мультипликативного множества M_1 на мультипликативное множество M_2. Эквивалентность ρ_φ в M_1 соответствует гомоморфизму φ. Доказать, что мультипликативные множества M_1/ρ_φ и $M_2 = \varphi M_1$ изоморфны.

Примечание. Результаты 2.4.18, 2.4.19 и 2.4.20 в совокупности означают, что если не делать различия между изоморфными мультипликативными множествами, то все гомоморфизмы мультипликативного множества M на различные мультипликативные множества ограничиваются естественными гомоморфизмами, соответствующими различным двусторонне стабильным эквивалентностям M (см. 2.4.18).

2.4.21. Определить число и найти все двусторонне стабильные эквивалентности в мультипликативном множестве, действие в котором задано таблицей:

	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	b	b	b	b
c	b	b	b	b
d	b	b	b	b

2.4.22.У. Сколько существует неизоморфных между собою мультипликативных множеств таких, что мультипликативное множество из задачи 2.4.21 обладает гомоморфизмом на них?

§ 5. Полугруппы

Если в множестве определено действие, обладающее свойствами неограниченной применимости и ассоциативности, то такое миожество, рассматриваемое отиосительно этого действия, называется *полугруппой*.

Таким образом, при обычной мультипликативной записи, как правило, применяемой в последующем изложении, полугруппа есть мультипликативное множество с ассоциативным умножением.

Пусть K — некоторое подмножество полугруппы A. Конечная последовательность элементов из K, написанных рядом без каких-либо разделяющих их знаков, называется *словом* над K:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \qquad (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in K).$$

Производя в той или иной последовательности перемножения пар соседних элементов в слове, мы можем, постепенно уменьшая длину слова (т. е. число n), через конечное число шагов преобразовать слово в один элемент, принадлежащий A (конечно, он не

обязательно будет принадлежать K). Полученный элемент называется *значением* данного слова в A. В произвольном мультипликативном множестве значение слова будет зависеть от того, в какой последовательности, между какими парами элементов производятся действия, так как различные процессы нахождения значения слова могут привести к различным результатам. Так, уже слово вида

$$x_1x_2x_3$$

при отсутствии ассоциативности может иметь два разных значения, а именно:

$$(x_1x_2)\,x_3, \qquad x_1\,(x_2x_3).$$

В полугруппе всякое слово имеет лишь единственное значение (см. 2.5.1). Поэтому, когда пишется слово

$$x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n,$$

то без каких-либо дополнительных пояснений под ним обычно понимают его значение, являющееся элементом из A. Элемент вида

$$\underbrace{xx \ldots xx}_{n}$$

обозначают коротко через x^n.

Для $K \subset A$ множество всех элементов, являющихся значениями различных слов над K, обозначается через $[K]_s$, а чаще просто через $[K]$ без дополнительного знака s. Если $K = \{x, y, z, \ldots\}$, то вместо $[\{x, y, z, \ldots\}]_s$ обычно пишут просто $[x, y, z, \ldots]_s$. Множество K называется *порождающим* для $[K]$ относительно действия в A. Частным случаем является порождающее множество самой полугруппы: $[K]_s = A$. При этом, если никакое собственное подмножество $K' \subset K (K' \neq K)$ уже не является порождающим для A, т. е. $[K']_s \neq A$, то K называется *неприводимым* порождающим множеством A.

Полугруппа, обладающая порождающим множеством, состоящим из одного элемента, называется *моногенной* (или *циклической*).

Непустое подмножество полугруппы, замкнутое относительно действия, называется *подполугруппой*. Очевидно, подполугруппа сама является полугруппой относительно действия, определенного в полугруппе. Обратно, всякое подмножество полугруппы, являющееся полугруппой, будет подполугруппой.

Элемент a полугруппы A называется *регулярным*, если в A существует такой $x \in A$, что

$$axa = a.$$

Если все элементы полугруппы A являются регулярными, то полугруппа A сама называется *регулярной*.

Непустое подмножество K полугруппы A называется *нормальным комплексом*, если для всяких $k, k' \in K$ и $a, b \in A$ из $akb \in K$ всегда следует $ak'b \in K$, из $ak \in K$ следует $ak' \in K$ и из $kb \in K$ следует $k'b \in K$.

2.5.1.Т.У. Доказать, что в полугруппе любое слово обладает единственным значением (т. е. в какой бы последовательности мы ни совершали перемножение пар соседних элементов в данном слове, мы всегда в конце концов придем к одному и тому же элементу).

2.5.2. Доказать, что для любого элемента a полугруппы A имеют место соотношения:

$$(a^n)^m = a^{nm}, \qquad a^n a^m = a^{n+m}$$

при любых натуральных n и m.

2.5.3. В мультипликативной полугруппе всех натуральных чисел найти такое порождающее множество, которое содержится во всяком другом порождающем множестве этой полугруппы (т. е. является универсально минимальным порождающим множеством).

2.5.4. В мультипликативной полугруппе всех целочисленных квадратных матриц второго порядка для

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти $[x]$, $[x, t]$, $[y, z]$, $[y, t]$.

2.5.5. Доказать, что для любого непустого подмножества K полугруппы A множество $[K]_s$ является подполугруппой.

2.5.6. Доказать, что $[K]_s$ есть пересечение всех подполугрупп полугруппы A, содержащих K.

2.5.7. Доказать, что при любых $K, K' \subset A$ имеет место

$$[K \cup [K']_s]_s = [K \cup K']_s.$$

2.5.8. Доказать, что в бесконечной моногенной полугруппе $A = [x]_s$ ни при каких $n \neq m$ невозможно $x^n = x^m$.

2.5.9. Доказать, что всякие две бесконечные моногенные полугруппы изоморфны.

2.5.10. Пусть в моногенной полугруппе $A = [x]_s$ для некоторых натуральных чисел p и q $(p \neq q)$ имеет место $x^p = x^q$. Доказать, что:

1) A конечна;

2) найдутся такие натуральные числа h и d, что $x^{h+d} = x^h$, причем $A = \{x, x^2, \ldots, x^{h+d-1}\}$ и все элементы $x, x^2, \ldots, x^{h+d-1}$ различны;

3) указанная пара чисел (h, d) для данной полугруппы единственна;

4) равенство $x^{n+m}=x^n$ имеет место тогда и только тогда, когда $n \geqslant h$ и m делится на d.

Примечание. Указанная пара чисел (h, d) называется *типом* моногенной полугруппы $[x]_s$, а также типом самого элемента x. Если $[x]_s$ бесконечна, то говорят, что ее тип и тип элемента x бесконечен.

2.5.11. Доказать, что две конечные моногенные полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

2.5.12. Определить число всех подполугрупп и число идеалов в моногенной полугруппе типа (5, 3).

2.5.13. Каков тип (h, d) конечной моногенной полугруппы, если она обладает $(h+d-2)$ порождающими множествами, состоящими каждое из одного элемента?

2.5.14. Доказать, что для двусторонних идеалов T_1 и T_2 полугруппы A произведение T_1T_2 всегда является двусторонним идеалом.

Примечание. Результат сравните с 2.3.16.

2.5.15. В множестве, состоящем из элементов

$$0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\quad b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{ij},\ \ldots,\ b_{nn},$$

определено действие умножения, согласно которому

$$a_ia_j=b_{ij},$$

а во всех остальных случаях $xy=0$.

Доказать, что A является полугруппой.

Описать типы всех ее моногенных подполугрупп.

Выяснить, какие подмножества A являются ее левыми, правыми и двусторонними идеалами.

2.5.16.У. Доказать, что для регулярного элемента полугруппы a всегда найдется такой элемент $\bar{a}$, что

$$a\bar{a}a=a,\ \bar{a}a\bar{a}=\bar{a}.$$

Примечание. Элементы a и $\bar{a}$, связанные указанными соотношениями, называются *регулярно сопряженными*.

2.5.17. В множестве всевозможных четверок целых чисел определено действие

$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)=(p_1,\ p_2,\ q_3,\ q_4).$$

Доказать ассоциативность действия. Выяснить, какие элементы в получающейся полугруппе будут регулярными. Найти все регулярно сопряженные с каждым регулярным элементом.

2.5.18.Т. Пусть φ — гомоморфизм полугруппы A в полугруппу B; z — произвольный элемент из B. Совокупность всех элементов $x \in A$ таких, что $\varphi x = z$, обозначим через K_z. Доказать, что K_z, если оно непусто, является нормальным комплексом полугруппы A.

2.5.19.Т.У. Пусть K — нормальный комплекс полугруппы A. Доказать, что существуют такая полугруппа B и такой гомоморфизм φ полугруппы A на B, что для некоторого $z \in B$ множество K является совокупностью всех таких $x \in A$, что $\varphi x = z$.

2.5.20. Каково должно быть подмножество K полугруппы A, чтобы существовал гомоморфизм φ полугруппы A на некоторую полугруппу B, обладающую идемпотентом z, при котором K есть совокупность всех таких $x \in A$, что $\varphi(x) = z$?

2.5.21. Найти все нормальные комплексы моногенной полугруппы типа (3,2).

2.5.22. Доказать, что в коммутативной полугруппе, обладающей идемпотентами, множество всех идемпотентов является подполугруппой.

2.5.23.У. Доказать, что всякая конечная полугруппа обладает идемпотентами.

2.5.24. Доказать, что конечная коммутативная полугруппа всегда обладает единственным разбиением, каждая компонента которого является подполугруппой с одним идемпотентом. Показать, что каждая компонента этого разбиения является нормальным комплексом.

2.5.25. Каждая регулярная полугруппа обладает идемпотентами. Количество идемпотентов в регулярной полугруппе равно одному тогда и только тогда, когда в ней выполнено условие двусторонней обратимости. Доказать.

2.5.26. Если в полугруппе имеется левая единица и выполнено условие обратимости слева, то имеет место свойство двусторонней обратимости. Доказать. Аналогично для правой единицы и обратимости справа.

2.5.27.Т. Если бесконечная полугруппа обладает конечным или счетным порождающим множеством, то она сама счетна. Доказать.

§ 6. Первоначальные понятия теории групп

Алгебраической группой или, как чаще говорят, просто *группой* называется множество, рассматриваемое относительно некоторого заданного в нем действия, которое обладает свойствами:

1) неограниченной применимости;
2) ассоциативности;
3) двусторонней обратимости.

Таким образом, группа есть полугруппа со свойством двусторонней обратимости.

При рассмотрении групп общего типа в соответствии со сказанным ранее чаще всего употребляется мультипликативная запись и терминология, обычно даже без специального пояснения. В дальнейшем мы также будем следовать этому обычаю.

Следует, однако, указать, что некоторые авторы иногда предпочитают аддитивную запись (особенно при изучении групп со свойством коммутативности).

Как будет показано в 2.6.1, в группе G существует единичный элемент, который мы будем обозначать через e_G или через e (нередко единичный элемент обозначается через 1). При этом единичный элемент в G согласно 2.2.4 единствен. Каждый элемент x группы обладает обратным, который мы будем обозначать через x^{-1}. Обратный элемент для всякого x единствен (см. 2.6.1). Для элементов группы, как и в общих полугруппах, употребляется обозначение степени x^n для любого натурального числа n. Кроме того, в группе употребляется обозначение

$$(x^{-1})^n = x^{-n}.$$

Далее, при любом элементе группы x под x^0 всегда понимается единичный элемент группы.

Если в группе выполняется свойство коммутативности, то группа называется *коммутативной* или *абелевой* (последний термин употребляется чаще).

Хотя в общем случае группа G не обязана быть коммутативной, в ней могут существовать такие элементы z, которые перестановочны со всяким элементом группы $x \in G$:

$$xz = zx.$$

Совокупность всех таких элементов Z называется *центром* группы G. Если центр группы G состоит не менее чем из двух элементов (см. 2.6.32), то говорят, что группа G обладает нетривиальным центром.

Непустое подмножество H группы G называется ее *подгруппой*, если H замкнута относительно действия в G и если для всякого элемента x из H обратный к нему элемент x^{-1} также принадлежит H (последнее условие можно было бы сформулировать как замкнутость H относительно операции взятия обратного элемента). Если $H \neq G$ и $H \neq e_G$, то H называют *собственной* подгруппой.

Подгруппа H группы G называется ***нормальной*** или, как чаще говорят, ***нормальным делителем*** G, если для любых $a \in G$ и $x \in H$ всегда имеет место

$$a^{-1}xa \in H.$$

Особая роль нормальных делителей будет выяснена в гл. IV.

Если подгруппа H конечна, то число ее элементов называют ***порядком*** данной подгруппы. Если H бесконечна, то говорят также, что H имеет бесконечный порядок. Так как сама группа, очевидно, является своей подгруппой, то согласно сказанному порядком конечной группы называется число ее элементов; бесконечная группа называется также группой бесконечного порядка.

Пусть K — некоторое непустое подмножество группы G. Множество всех элементов G, представимых в виде произведения

$$x_1x_2 \ldots x_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где каждый x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ или принадлежит K или является обратным для некоторого элемента из K, называется ***порожденным множеством*** K в смысле теории групп и обозначается через $[K]_g$; само K называется для $[K]_g$ ***порождающим множеством*** в смысле теории групп. Если $[K]_g = G$, то K называется порождающим множеством группы G в смысле теории групп. Если при этом никакое собственное подмножество K не порождает G, то K называется ***неприводимым*** порождающим множеством в смысле теории групп. Если группа обладает *конечным порождающим* множеством, то она называется *конечно порожденной*. Следует иметь в виду, что в литературе по теории групп вместо термина *порождающее множество группы* (в смысле теории групп) часто употребляют термин *система образующих*.

Следует отметить, что, рассматривая группу как полугруппу (очевидно, всякая группа является полугруппой), мы в отдельных случаях вполне можем иметь

$$[K]_g \neq [K]_s.$$

Непосредственно ясно, что всегда имеет место

$$[K]_g = [K \cup K']_s,$$

где K' — множество всех элементов G, обратных для элементов из K.

В том случае, когда происходит рассмотрение групп без привлечения понятий из теории полугрупп, в термине «множество, порождающее в смысле теории групп» последние слова обычно опускаются, также опускают значок g и пишут просто $[K]$ вместо $[K]_g$. В главах, целиком посвященных группам, мы также будем поступать подобным образом.

Следует отметить, что в литературе вместо $[K]$ чаще пишут $\{K\}$. Мы не будем употреблять этого обычного в теории групп обозначения ввиду того, что такое использование фигурных скобок противоречит принятому их употреблению в общей теории множеств.

Если в подгруппе H группы G найдется такой элемент x, что $H = [x]_g$, то H называется *циклической подгруппой* группы G, порожденной элементом x. Если $H = G$, то G называется *циклической группой*.

Пусть x — произвольный элемент группы G. Если существуют такие натуральные числа n, что $x^n = e_G$, то наименьшее из них называется *порядком элемента* x. Если таких натуральных чисел нет, то говорят, что порядок x бесконечен.

Если все элементы группы имеют конечные порядки, то группа называется *периодической*.

Связь понятия порядка элемента с понятием порядка подгруппы будет установлена ниже (2.6.9).

2.6.1.Т. Доказать, что множество G относительно определенного в нем действия будет группой тогда и только тогда, когда действие обладает свойствами:

1) неограниченной применимости;

2) ассоциативности;

3) существования двусторонней единицы e;

4) существования для каждого элемента $x \in G$ обратного элемента (т. е. такого элемента $x^{-1} \in G$, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$).

При этом каждый элемент группы обладает лишь единственным обратным. Доказать.

Примечание. Система указанных четырех условий чаще всего и принимается в качестве определения группы. Существуют многочисленные другие эквивалентные определения (см., например, 2.5.25 и 2.5.26).

2.6.2.Т. Пусть φ — гомоморфизм группы G на мультипликативное множество M. Доказать, что M есть группа; φe_G есть единица группы $M = \varphi G$; при любом $x \in G$ элемент $\varphi(x^{-1})$ в $M = \varphi G$ является обратным для φx.

2.6.3. В мультипликативном множестве M всех комплексных квадратных матриц n-го порядка выяснить, являются ли группами подмножества, состоящие из следующих матриц:

1) вещественные матрицы из M;

2) неособенные матрицы из M;

3) вещественные неособенные матрицы из M с положительными элементами;

4) неособенные диагональные матрицы из M;

5) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0);$$

6) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0);$$

7) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6.4. В мультипликативной полугруппе всех вещественных квадратных матриц третьего порядка найти максимальное в отношении включения подмножество M такое, что M является группой и содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6.5.Т. Доказать, что при любых целых числах n и m в группе для всякого элемента x имеет место

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

2.6.6. В мультипликативной группе всех неособенных комплексных матриц второго порядка определить порядки следующих элементов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2+3i & -2+2i \\ 1-i & 3-2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.7.Т. Пусть x — элемент конечного порядка n некоторой группы. Доказать, что все элементы

$$x^0 = e, \quad x, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^{n-1}$$

различны между собою и

$$[x]_g = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}.$$

Для x^k $(0 \leqslant k < n)$ имеет место

$$(x^k)^{-1} = x^{n-k}.$$

Элементы группы $[x]_g$, заданные в виде указанных степеней x, можно перемножать по формуле

$$x^k x^l = \begin{cases} x^{k+l} & (\text{если } k+l < n); \\ x^{k+l-n} & (\text{если } k+l \geqslant n), \end{cases}$$

где $0 \leqslant k,\ l < n$ (отметим, что во втором случае, очевидно, $0 \leqslant k+l-n < n$).

2.6.8. Пусть x — элемент бесконечного порядка некоторой группы. Доказать, что при любых целых числах $n \neq m$ имеет место $x^n \neq x^m$.

2.6.9. Пусть x — элемент группы. Доказать, что $[x]_g$ является подгруппой (и по определению циклической), причем ее порядок равен порядку элемента x.

2.6.10. Доказать, что две циклические группы изоморфны тогда и только тогда, когда их порядки равны.

2.6.11. Пусть G — циклическая группа порядка 15. Определить число ее элементов x таких, что

$$[x]_g = G.$$

2.6.12. В циклической группе порядка 20 определить число различных неприводимых порождающих множеств, состоящих из двух элементов каждое.

2.6.13. Пусть для трех элементоз группы x, u, v выполняются равенства

$$x = uv = vu,\ u^p = e,\ v^q = e,$$

где p и q — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что при некоторых взаимно простых натуральных числах p' и q' имеют место

$$u = x^{p'}, \qquad v = x^{q'}.$$

2.6.14. Пусть порядок элемента группы x есть число pq, где p и q взаимно просты. Доказать, что в группе найдутся такие элементы u и v, для которых выполняются равенства:

$$x = uv = vu,\ u^p = e,\ v^q = e.$$

2.6.15. Пусть для четырех элементов группы u_1, v_1, u_2, v_2 выполняются равенства:

$$u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2,$$
$$u_1^p = u_2^p = v_1^q = v_2^q = e,$$

где p и q — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2.$$

2.6.16.У. Пусть порядок элемента группы x равен $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ — различные простые числа. Доказать, что тогда найдется единственная совокупность, состоящая из m элементов $y_1, y_2, \dots, y_m$, такая, что

$$x = y_1y_2 \dots y_m, \quad y_iy_j = y_jy_i \ (i = 1, 2, \dots, m),$$
$$y_1^{p_1^{\alpha_1}} = y_2^{p_2^{\alpha_2}} = \dots = y_m^{p_m^{\alpha_m}} = e.$$

2.6.17. Во всякой группе G подмножество, состоящее из одного единичного элемента e_G, и сама G являются для G подгруппами и даже нормальными делителями. Доказать.

2.6.18.Т. Доказать, что непустое подмножество H группы G само является группой относительно действия, определяемого в H действием в G, тогда и только тогда, когда H — подгруппа группы G.

Пусть e_G — единица группы G и e_H — единица группы H; пусть x' — элемент, обратный к элементу $x \in H$ в группе G. Доказать, что $e_G = e_H$ и что $x' \in H$.

2.6.19.Т. Пусть H — подгруппа группы G и $x \in H$. Доказать, что $xH = Hx = H$.

2.6.20. Пусть K — произвольное непустое подмножество группы. Доказать, что всегда

$$[[K]_g]_g = [K]_g$$

и что равенство

$$[K]_g = K$$

имеет место тогда и только тогда, когда K является подгруппой группы.

2.6.21.Т.У. Пусть $G = [x]_g$ — конечная циклическая группа порядка n. Для натурального числа d, являющегося

делителем n, обозначим через H_d совокупность элементов $x^d, x^{2d}, x^{3d}, \ldots, x^{\left(\frac{n}{d}\right)d} = x^n$. Доказать, что:

1) H_d является подгруппой группы G;

2) если $d_1 \neq d_2$, то $H_{d_1} \neq H_{d_2}$;

3) G не имеет иных подгрупп, кроме подгрупп H_d при всевозможных делителях d числа n.

2.6.22.Т.У. Пусть $G = [x]_g$ — бесконечная циклическая группа. Для целого неотрицательного числа m обозначим через H_m совокупность элементов вида x^{km} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Доказать, что:

1) H_m является подгруппой группы G;

2) если $m_1 \neq m_2$, то $H_{m_1} \neq H_{m_2}$;

3) G не имеет иных подгрупп, кроме подгрупп H_m.

2.6.23.У. Доказать, что всякая бесконечная группа имеет бесконечное множество подгрупп.

2.6.24.Т.У. Выяснить, каковы группы, у которых множество всех подгрупп:

1) состоит из одной подгруппы;

2) состоит из двух подгрупп;

3) состоит из трех подгрупп.

2.6.25. В мультипликативной группе всех комплексных чисел, отличных от нуля, найти: 1) $[i]_g$; 2) $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right]_g$; 3) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right]_g$; 4) $\left[-\frac{1}{2} i\right]_g$; 5) $[2, -5]_g$;

6) пересечение указанных выше подгрупп с подгруппой, состоящей из всех вещественных чисел, отличных от нуля.

2.6.26. Пусть в группе G имеем:

$$G \supset H_1 \supset H_2,$$

где H_1 является подгруппой G, а H_2 является подгруппой H_1. Доказать, что H_2 будет подгруппой G.

2.6.27. Доказать, что пересечение любого множества подгрупп группы само является ее подгруппой.

2.6.28. Пусть K есть непустое подмножество группы G. Доказать, что $[K]_g$ есть пересечение множества всех подгрупп группы G, содержащих K.

2.6.29. Выяснить каковы те группы, в которых для любого множества K выполняется равенство

$$[K]_g = [K]_s.$$

2.6.30. Пусть все неединичные элементы группы имеют порядки, равные 2. Доказать, что группа абелева.

2.6.31. Пусть H_1, H_1', H_2, H_2' — некоторые подгруппы группы, причем $H_1 \subset H_1'$ и $H_2 \subset H_2'$. Доказать, что

$$(H_1H_2) \cap H_1' \cap H_2' = (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2).$$

2.6.32. Доказать, что центр группы всегда непуст.

2.6.33. В каких группах центр группы совпадает со всей группой?

2.6.34. Доказать, что всякая подгруппа центра группы (в том числе и сам центр) является нормальным делителем группы.

2.6.35.Т. Доказать, что подгруппа H группы G является нормальным делителем тогда и только тогда, когда для любого $x \in G$ выполняется

$$xH = Hx.$$

2.6.36. Пусть H — произвольная подгруппа группы G и N — некоторый ее нормальный делитель. Доказать, что HN является подгруппой G, причем $HN = NH$.

2.6.37. Доказать, что произведение конечного числа и пересечение произвольного множества нормальных делителей группы являются также ее нормальными делителями.

2.6.38. Пусть G — множество всевозможных троек целых чисел вида $(k_1, k_2, 1)$ и $(k_1, k_2, -1)$. В G определено действие умножения по правилу:

$$(k_1, k_2, 1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_1, k_1 + l_2, \varepsilon),$$
$$(k_1, k_2, -1)(l_1, l_2, \varepsilon) = (k_1 + l_2, k_2 + l_1, -\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказать, что G является группой. Доказать, что $H_1 = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]_g$ есть нормальный делитель группы G, а $H_2 = [(1, 0, 1)]_g$ есть нормальный делитель группы H_1.

Выяснить, будет ли H_2 нормальным делителем для G.

Примечание. Сопоставить результат с результатом 2.6.26.

2.6.39. В множестве K, состоящем из восьми элементов: $1, -1, i, j, k, -i, -j, -k$ (здесь знак минус в данный момент не играет никакой другой роли, кроме того, что слу-

жит различительным значком при задании некоторых элементов), задано действие при помощи таблицы умножения:

	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
1	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
-1	-1	1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
i	i	$-i$	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
j	j	$-j$	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
$-j$	$-j$	j	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
k	k	$-k$	$-j$	j	i	$-i$	1	-1
$-k$	$-k$	k	j	$-j$	$-i$	i	-1	1

Доказать, что K является группой. Найти все ее подгруппы и доказать, что каждая из них является нормальным делителем K.

Примечание. Указанная группа называется *группой кватернионов*. Она играет важную роль в теории так называемых алгебр.

2.6.40.Т. Если бесконечная группа обладает конечным или счетным порождающим множеством, то она сама счетная.

Доказать.

ГЛАВА III

СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Общие свойства суперпозиции преобразований

Пусть Ω — произвольное множество. Всякое отображение множества Ω в себя называется *преобразованием* Ω. Так как преобразование является частным случаем отображения множеств, то здесь мы, естественно, сохраним обозначения и терминологию § 2 гл. I с той разницей, что элементы преобразуемого множества будем, как правило, обозначать малыми греческими буквами, а преобразования — малыми латинскими. В частности, если элементу α при преобразовании u соответствует элемент β, то β будем называть *образом* α и писать $u\alpha = \beta$ или $u(\alpha) = \beta$.

Множество всех преобразований множества Ω будем обозначать T_Ω.

В множестве T_Ω следующим образом вводится действие умножения преобразований (или, как говорят еще, суперпозиции преобразований): пусть $u, v, w \in T_\Omega$, тогда $w = uv$, если для каждого $\alpha \in \Omega$ выполняется равенство $w(\alpha) = u(v\alpha)$.

Если Ω — некоторое множество вещественных чисел, то всякая функция, заданная на Ω, множество значений которой содержится в Ω, является преобразованием множества Ω, а умножение таких преобразований есть обычная суперпозиция функций.

Отметим некоторое различие в обозначениях. Функцию обычно записывают в виде $f(x)$, тогда как для преобразования эта запись обозначает образ элемента x при преобразовании f. Для функции мы сохраним обычное обозначение вида $f(x)$.

Пусть Ω — произвольное множество, $u \in T_\Omega$. Запишем в одной строке все элементы множества Ω, под каждым элементом запишем его образ при преобразовании u:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ u\alpha, & u\beta, & u\gamma, & \dots \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение будем называть *подстановкой, соответствующей преобразованию* u. Обратно, записывая под каждым эле-

ментом множества Ω некоторый элемент этого же множества, получим таблицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \end{pmatrix},$$

которая, очевидно, является подстановкой для следующего преобразования u множества Ω:

$$u\alpha = \alpha', \qquad u\beta = \beta', \qquad u\gamma = \gamma', \ \dots$$

Если в верхней строке подстановки элементы записать в другом порядке и соответственно изменить порядок элементов в нижней строке, то получим подстановку, которая соответствует тому же преобразованию u. Все подстановки, соответствующие одному и тому же преобразованию u, будем считать равными между собой, отождествлять их с преобразованием u и писать

$$u = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ u\alpha, & u\beta, & u\gamma, & \dots \end{pmatrix}.$$

Запятые в записи подстановки мы, как правило, будем опускать.

Каждое преобразование можно мыслить заданным подстановкой, в том числе и для бесконечных множеств. Но, разумеется, фактическое написание подстановки возможно только в случае конечного преобразуемого множества.

Мощность множества $u\Omega$, т. е. мощность множества всех образов при преобразовании u, будем называть *рангом* преобразования u и обозначать ru.

Преобразование e будем называть *тождественным* или *единичным*, если $e\alpha = \alpha$ для любого $\alpha \in \Omega$. Очевидно, что e — единица T_Ω.

Всякое множество преобразований некоторого множества Ω, которое является полугруппой относительно определенного выше умножения преобразований, будем называть *полугруппой преобразований*.

Отметим еще, что в этом параграфе никакие действия над преобразованиями, кроме введенного выше умножения преобразований, рассматриваться не будут.

Надо иметь в виду, что в некоторых книгах преобразование w, получающееся в результате того, что сначала применено преобразование v, а затем преобразование u (т. е. то, что мы обозначаем $w = uv$), обозначают через vu. Это особенно естественно при записи знаков отображения справа, о чем было сказано в конце введения в § 2 гл. I. Действительно, в этом случае естественно записывать: $\alpha(vu) = (\alpha v)u$.

В пределах настоящей книги, учитывая принятую запись знаков отображения слева от преобразуемых элементов, умножение преобразований всегда будет производиться так, как это было описано вначале.

3.1.1.Т. Доказать, что умножение преобразований обладает ассоциативным свойством.

Примечание. Отсюда следует, что T_Ω для любого множества Ω является полугруппой.

3.1.2. Пусть $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $u, v, w\in T_\Omega$ таковы, что

$$u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&1&2&4&5&6&7\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&2&3&1&8&3&8\end{pmatrix},$$

$$w=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&1&3&8&4&5&6\end{pmatrix}.$$

Найти uw, wu, v^2u, uw^3, uvw.

Примечание. Обратить внимание на то, что $uw\neq wu$, т. е. что умножение преобразований не обладает коммутативным свойством.

3.1.3. Пусть $\Omega=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$, $u, v\in T_\Omega$,

$$u=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6&\alpha_7\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_1&\alpha_3&\alpha_2&\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6&\alpha_7\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_1&\alpha_1&\alpha_2\end{pmatrix}.$$

Найти типы элементов u, v, uv, vu в полугруппе T_Ω.

3.1.4. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какими из семи основных свойств обладает действие суперпозиции в каждом из следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω:

1) множество всех полиномов;

2) множество всех полиномов четной степени;

3) множество всех полиномов нечетной степени;

4) множество всех полиномов первой степени;

5) множество всех полиномов первой степени со старшими коэффициентами, равными единице;

6) множество степенных функций (т. е. функций вида $f(x)=x^n$ при любом натуральном n)?

3.1.5 Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Для следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω, найти нули (левые, правые, двусторонний) относительно действия суперпозиции:

1) множество всех непрерывных функций;

2) множество всех непрерывных функций, тождественных на отрезке $[0, 1]$ (т. е. $f(\alpha)=\alpha$ для любого $\alpha\in[0, 1]$);

3) множество полиномов четной степени;
4) множество полиномов нечетной степени.

3.1.6. Найти все левые нули полугруппы T_Ω при любом множестве Ω и доказать, что эта полугруппа правых нулей не имеет.

3.1.7. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какие из следующих множеств вещественных функций, заданных на Ω, образуют полугруппы? Какие из них являются группами:

1) множества, заданные в задаче 3.1.4;
2) множества 1), 2), заданные в задаче 3.1.5;
3) множество всех четных функций $(f(-x)=f(x))$;
4) множество всех нечетных функций $(f(-x)=-f(x))$;
5) множество всех ограниченных функций (для каждой функции $f(x)$ существует число $M_f>0$ такое, что $|f(x)|\leqslant M_f$ при всех x);
6) множество функций, принимающих значение 0 при $x=1$?

3.1.8. Пусть Ω — множество точек плоскости, u — проектирование на данную прямую l, а v — симметрия относительно точки, лежащей на прямой l.

1) Доказать, что преобразования u и v перестановочны.
2) Найти типы элементов u, v в полугруппе T_Ω.

3.1.9. Пусть Ω — множество точек плоскости, u — симметрия относительно прямой l_1, а v — симметрия относительно прямой l_2, параллельной l_1. Доказать, что uv, vu являются параллельными переносами плоскости, и найти векторы переносов.

3.1.10. Доказать, что каждый параллельный перенос плоскости есть произведение двух симметрий относительно параллельных прямых.

3.1.11. Пусть Ω — множество всех вещественных полиномов, u, v, $w_c\in T_\Omega$ (c — любое вещественное число):

$$u[f(x)]=f^2(x),$$
$$v[f(x)]=f'(x),$$
$$w_c[f(x)]=cf(x)\,(f(x)\in\Omega).$$

Выяснить, какие из преобразований u, v, w_c перестановочны между собой.

3.1.12 Пусть $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $u \in T_\Omega$:

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Найти все преобразования $x \in T_\Omega$, перестановочные с u.

3.1.13. Пусть N — множество всех натуральных чисел, $u, v \in T_N$ определены следующим образом:

$$u(n) = n + 1 \ (n \in N),$$
$$v(n) = n - 1 \ (n > 1), \ v(1) = 1 \ (n \in N);$$

1) из каких элементов состоит полугруппа $[u, v]_s$?

2) найти все неприводимые порождающие множества полугруппы $[u, v]_s$.

3.1.14. Пусть N — множество всех натуральных чисел, и пусть

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \ldots \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Для каждого из элементов u, v найти все регулярно сопряженные с ним элементы:

1) в полугруппе T_Ω;

2) в полугруппе $[u, v]_s$ (см. 2.5.16).

3.1.15. Доказать, что T_Ω есть регулярная полугруппа при любом Ω.

3.1.16. Пусть u — преобразование множества Ω, и пусть ρ_u — бинарное отношение в Ω, определенное следующим образом: $(\alpha, \beta) \in \rho_u$, если $u\beta = \alpha$. Доказать, что:

1) для любых $u, v \in T_\Omega$ справедливо равенство $\rho_u \rho_v = \rho_{uv}$;

2) если $u \neq v$, то $\rho_u \neq \rho_v$;

3) множество всех бинарных отношений ρ_u $(u \in T_\Omega)$ является полугруппой относительно действия умножения бинарных отношений и что эта полугруппа изоморфна T_Ω;

4) ρ_e (e — тождественное преобразование) есть диагональ.

Примечание. Таким образом, преобразования можно рассматривать как частный случай бинарных отношений.

3.1.17. Пусть v — произвольное, u — взаимно однозначное преобразование множества Ω, причем $u\Omega = \Omega$. Доказать, что $r(uv) = r(vu) = rv$.

3.1.18. Доказать, что ранг произведения двух преобразований не превосходит наименьшего из рангов сомножителей.

3.1.19. Пусть Ω — множество всевозможных бесконечных последовательностей вещественных чисел. В полугруппе T_Ω рассматривается подмножество T', состоящее из всех преобразований вида

$$u_{m,n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (m\alpha_1 + n, m\alpha_2 + n, m\alpha_3 + n, \ldots),$$

где m — любое натуральное, а n — любое целое неотрицательное число.

1) Доказать, что T' — полугруппа.

2) Доказать, что совокупность всех преобразований вида $u_{1,0}$, $u_{1,1}$, $u_{p_1,0}$, $u_{p_2,0}$, ..., где p_1, p_2, ... — простые натуральные числа, является неприводимым порождающим множеством T'.

3) Найти все идемпотенты полугруппы T'.

3.1.20. Пусть T' — полугруппа, определенная в предыдущей задаче. Какие из следующих подмножеств T' являются подполугруппами, идеалами (левыми, правыми, двусторонними), нормальными подмножествами:

1) множество M_1 всех $u_{m,n}$, у которых m равно некоторому фиксированному числу $l > 1$;

2) множество M_2 всех $u_{m,n}$, у которых $m = n$;

3) множество M_3 всех $u_{m,n}$, у которых n кратно некоторому фиксированному числу l;

4) множество M_4 всех $u_{m,n}$, у которых m кратно некоторому фиксированному числу l;

5) множество M_5 всех $u_{m,n}$, у которых m, n кратны некоторому фиксированному простому числу p.

3.1.21. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, v, u_1, u_2, $u_3 \in T_\Omega$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 8 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Какие из уравнений $u_i x = v$ ($i = 1, 2, 3$) разрешимы? Сколько решений имеет каждое разрешимое из них?

3.1.22. Пусть u, $v \in T_\Omega$. Для того чтобы уравнение $ux = v$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $u\Omega \supset v\Omega$. Доказать.

3.1.23. Выяснить, для каких пар преобразований $u, v \in T_\Omega$ уравнение $ux = v$ имеет единственное решение.

3.1.24. Пусть N — множество всех натуральных чисел, $u_1, u_2, u_3, v \in T_N$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 2n & \dots \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & \dots & 2n & 2n & \dots \end{pmatrix}.$$

Какие из уравнений $xu_i = v$ $(i = 1, 2, 3)$ разрешимы, какие из них имеют единственное решение?

3.1.25. Выяснить, для каких пар преобразований u, $v \in T_\Omega$ уравнение $xu = v$ разрешимо. Когда оно имеет единственное решение?

Примечание. Из задач 3.1.22, 3.1.25 следует, что суперпозиция преобразований не обладает свойствами обратимости.

3.1.26.У. Найти условие, при котором:

1) преобразование u является правым делителем тождественного преобразования e в полугруппе T_Ω;

2) преобразование u является левым делителем e в полугруппе T_Ω;

3) преобразование u является идемпотентом.

3.1.27. Пусть Ω — множество вещественных чисел отрезка $[0, 1]$, множество $T' \subset T_\Omega$ состоит из всех преобразований вида:

$$u_c\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < c, \\ 1, & \text{если } \xi \geqslant c; \end{cases}$$

$$v_c\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \leqslant c, \\ 1, & \text{если } \xi > c, \end{cases}$$

где c — любое вещественное число из Ω.

1) Доказать, что T' — полугруппа.

2) Описать все идемпотенты полугруппы T'.

3) Найти все левые и все правые идеалы T'.

3.1.28. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Какие из следующих множеств T_Ω являются нормальными подмножествами:

1) множество всех преобразований, ранги которых не превосходят трех;

2) множество всех преобразований ранга 5;

3) множество Q_M всех преобразований ранга 6, обладающих свойствами: для любых $u, v \in Q_M$ выполняется $u\Omega = v\Omega = M$ и $u\alpha_1 = u\alpha_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $v\alpha_1 = v\alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$, $M \subset \Omega$);

4) множество подстановок

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&3&8&5&5&1&3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&3&8&3&1&1&5&8\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&5&1&3&3&8&5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&1&5&8&8&3&1\end{pmatrix};$$

5) множество подстановок

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&1&3&7&5&6&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&4&2&5&8&3&1&7\end{pmatrix}?$$

3.1.29. Пусть a — некоторое вещественное число, A — множество вещественных функций $f(x)$, дифференцируемых в точке a и таких, что $f(a) = a$. Доказать, что:

1) A является полугруппой относительно действия суперпозиции функций;

2) отображение θ, определяемое равенством $\theta[f(x)] = f'(a)$ ($f(x) \in A$), является гомоморфизмом A в мультипликативную полугруппу вещественных чисел.

3.1.30. Пусть Ω — произвольное множество, n — фиксированное натуральное число. Доказать, что множество J_n всех преобразований из T_Ω, ранги которых меньше n, есть двусторонний идеал полугруппы T_Ω.

3.1.31.У Если J — двусторонний идеал полугруппы T_Ω и $u \in J$, $ru = n$ (n — натуральное число), то J содержит и любое преобразование ранга, не превосходящего n. Доказать.

3.1.32. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Какие из следующих подмножеств T_Ω являются группами:

1) $M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&6&7&1&1&6&7&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&6&7&7&1&6&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&1&6&6&7&1&7\end{pmatrix}\right\}$;

2) $M_2 = \left[\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&2&2&3&5&5&6&6\end{pmatrix}\right]_s$;

3) $M_3 = \left[\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&6&7&8&5\end{pmatrix}\right]_s$;

4) $M_4 = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&3&3&6&3&6&3&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&6&6&1&6&1&6&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&1&1&6&1&6&1&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&6&6&3&6&3&6&3\end{pmatrix}\right\}$?

3.1.33. Пусть G — некоторая группа преобразований множества Ω. Доказать, что если $u, v \in G$, то выполняются условия: 1) $u\Omega = v\Omega$; 2) если $u\alpha = u\beta$, то $v\alpha = v\beta$.

3.1.34.У. Доказать, что если преобразование u входит в некоторую группу преобразований множества Ω, то u удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для любых $\alpha, \beta \in u\Omega$, $\alpha \neq \beta$, выполняется $u\alpha \neq u\beta$; 2) для любого $\alpha \in u\Omega$ найдется $\beta \in u\Omega$ такое, что $u\beta = \alpha$.

3.1.35.У. Доказать, что если для преобразования u множества Ω выполняются условия задачи 3.1.34, то u входит в некоторую группу преобразований множества Ω.

3.1.36. Пусть Ω — множество всех комплексных чисел, и пусть a, b, c, d — преобразования Ω, согласно которым

$$az = \bar{z},\ bz = z^2,\ cz = 1 - z,\ dz = z\bar{z}$$

($z \in \Omega$, $\bar{z}$ — сопряженное с z число).

Доказать, что всякое неприводимое порождающее множество полугруппы $[a, b, c, d]_s$ состоит из четырех элементов.

3.1.37.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать, что всякое порождающее множество

полугруппы T_Ω содержит преобразования ранга n и преобразования ранга $n-1$.

3.1.38.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать, что множество всех преобразований ранга $n-1$ является порождающим для идеала J_n (см. 3.1.30).

3.1.39.У. Пусть Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Всякое порождающее множество полугруппы T_Ω, содержащее две подстановки ранга $n-1$, приводимо. Доказать.

Примечание. Из задач 3.1.37, 3.1.38, 3.1.39 следует, что если множество Ω состоит из n элементов, то всякое неприводимое порождающее множество полугруппы T_Ω содержит некоторые подстановки ранга n и единственную подстановку ранга $n-1$.

3.1.40.У. Множество M, состоящее из любого преобразования ранга $n-1$ и всех преобразований ранга n, является порождающим для полугруппы T_Ω, где Ω — конечное множество, состоящее из n элементов. Доказать.

§ 2. Обратимые преобразования

Пусть u — преобразование множества Ω. Преобразование u^{-1} того же множества называют *обратным* для преобразования u, если $uu^{-1}=u^{-1}u=e$, где e — тождественное преобразование.

Если преобразование u обладает обратным преобразованием, то его называют *обратимым*.

Будет доказано (см. 3.2.7, 3.2.8), что преобразование обратимо тогда и только тогда, когда оно является взаимно однозначным отображением множества Ω на себя. Отсюда следует, что если обратимое преобразование записано в виде подстановки, то в нижней строке подстановки все элементы различны и в ней содержатся все элементы Ω.

Множество всех обратимых преобразований некоторого множества Ω есть группа относительно действия умножения преобразований, единицей которой является тождественное преобразование (см. 3.2.6).

Эту группу, а также любую ее подгруппу обычно называют группой преобразований. Мы в дальнейшем под словом «группа преобразований» также будем понимать только группу, состоящую из обратимых преобразований, рассматриваемую относительно действия умножения преобразований.

3.2.1. Какие из преобразований задач 3.1.2, 3.1.14 являются левыми или правыми делителями тождественного преобразования? Какие из этих преобразований обратимы? Для обратимых найти обратные преобразования.

3.2.2. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел. Какие из следующих функций, заданных на Ω, являются обратимыми преобразованиями Ω:

1) $f_1(x) = x^n$ (n — натуральное);

2) $f_2(x) = 2^{2x}$;

3) $f_3(x) = ax + b$ ($a, b \in \Omega$, $a \neq 0$);

4) $f_4(x) = \sin x$?

3.2.3. Пусть ρ_u — бинарное отношение, определенное в задаче 3.1.16, где u — обратимое преобразование Ω. Найти:

1) $\mathrm{pr}_1 \rho_u$, $\mathrm{pr}_2 \rho_u$;

2) правый и левый срезы отношения ρ_u по каждому элементу.

3.2.4. Доказать, что обратимое преобразование обладает единственным обратным преобразованием.

3.2.5. Пусть u, v — обратимые преобразования множества Ω. Доказать, что uv — обратимое преобразование, и найти для него обратное преобразование.

3.2.6.Т.У. Доказать, что множество всех обратимых преобразований произвольного множества Ω есть группа преобразований. Какое преобразование является единицей этой группы? Какое преобразование является обратным элементом для преобразования u этой группы?

3.2.7.Т. Пусть u — обратимое преобразование множества Ω. Доказать, что выполняются следующие два условия:

1) u взаимно однозначно, т. е. для любых двух элементов α, $\beta \in \Omega$ ($\alpha \neq \beta$) выполняется $u\alpha \neq u\beta$;

2) $u\Omega = \Omega$, т. е. для любого элемента $\beta \in \Omega$ найдется элемент α такой, что $u\alpha = \beta$.

3.2.8.Т.У. Всякое преобразование u, для которого выполняются условия предыдущей задачи, является обратимым. Доказать.

3.2.9.У. Пусть обратимое преобразование u некоторого множества Ω задано подстановкой

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \end{pmatrix}.$$

Записать в виде подстановки u^{-1}.

3.2.10. Проверить выполнение двух условий задачи 3.2.7 для преобразований, данных в задачах 3.1.11, 3.1.19, 3.1.36.

3.2.11. Используя задачи 3.2.7, 3.2.8, выяснить, какие из следующих преобразований обратимы. Для обратимых из них найти обратные преобразования:

1) преобразование, данное в задаче 1.2.5;

2) преобразование, данное в задаче 1.2.6;

3) преобразование, данное в задаче 1.2.8;

4) преобразования, указанные в предыдущей задаче.

3.2.12. Пусть k, l, m, n — заданные рациональные числа, для которых выполняется условие $kn - lm \neq 0$. Пусть Ω — поле всех вещественных чисел вида $\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}$, где $f(x)$, $\varphi(x)$ — полиномы над полем рациональных чисел, а ε — произвольное, но фиксированное вещественное трансцендентное число. Доказать, что следующее преобразование u множества Ω:

$$u\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\frac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon + n}\right)}{\varphi\left(\frac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon + n}\right)}$$

обратимо, и найти для него обратное.

3.2.13. Пусть G — множество всевозможных преобразований из задачи 3.2.12 (для всевозможных рациональных k, l, m, n, удовлетворяющих условию $kn - lm \neq 0$).

1) Доказать, что G — группа преобразований.

2) Выяснить, является ли группой множество всевозможных преобразований u, у которых $m = 0$, $n = 1$.

3) Описать все преобразования из группы G, которые являются элементами второго порядка.

3.2.14. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, отличных от нуля и единицы. Множество G состоит из следующих преобразований Ω:

$$u_1\alpha = \alpha, \quad u_2\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad u_3\alpha = 1 - \alpha,$$

$$u_4\alpha = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad u_5\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad u_6\alpha = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

1) Доказать, что G — группа преобразований, и составить таблицу умножения G.

2) В группе G найти единицу и все элементы, которые являются обратными для самих себя.

3) Доказать, что группа G изоморфна группе всех обратимых преобразований трех элементов.

3.2.15. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, G — множество всех преобразований Ω вида $u_{a,b}(x) = ax + b$, где a, b — произвольные вещественные числа и $a \neq 0$. Доказать, что G — группа преобразований, не обладающая конечным порождающим множеством.

3.2.16. Пусть G — группа из предыдущей задачи. Какие из следующих подмножеств G являются подгруппами G, какие являются нормальными делителями G:

1) подмножество H преобразований $u_{1,b}$;

2) подмножество H' преобразований $u_{a,a}$;

3) подмножество H'' преобразований $u_{a,0}$?

3.2.17. Пусть G — группа всех обратимых преобразований некоторого множества Ω, и пусть $\bar{G}$ — совокупность бинарных отношений ρ_u из задачи 3.1.16 для всевозможных $u \in G$. Доказать, что $\bar{G}$ есть группа относительно действия умножения бинарных отношений, изоморфная G.

3.2.18. Пусть Ω — множество точек трехмерного пространства. Выяснить, какие из следующих преобразований Ω обратимы:

1) вращение пространства вокруг оси на некоторый угол;

2) проектирование пространства на данную плоскость;

3) симметрия пространства относительно данной плоскости (отражение относительно данной плоскости);

4) преобразование u, обладающее свойством $\rho(ux, uy) = 2\rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y.

3.2.19. Пусть Ω — множество точек плоскости. Выяснить, какие из следующих множеств преобразований Ω являются группами преобразований:

1) множество всех параллельных переносов плоскости;

2) множество всех вращений плоскости вокруг данной точки;

3) множество вращений плоскости на некоторый фиксированный угол φ вокруг всевозможных точек плоскости;

4) множество всех вращений плоскости вокруг всевозможных точек и всех параллельных переносов плоскости;

5) множество всех осевых симметрий плоскости.

3.2.20. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_1^2x_4^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_2^2x_4^2 + 2x_3^2x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 - 5.$$

Найти число обратимых преобразований совокупности переменных $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которые не изменяют $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

3.2.21. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 - 5.$$

Найти обратимые преобразования совокупности переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$, которые не изменяют $f(x_1, x_2, x_3)$. Доказать, что эти преобразования образуют группу преобразований.

3.2.22. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный полином. Доказать, что множество всех преобразований совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, оставляющих F без изменения, есть группа преобразований.

3.2.23. Пусть

$$v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{j<i} (x_i - x_j).$$

Доказать, что любое обратимое преобразование совокупности переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ или оставляет v_n без изменения или изменяет только его знак.

3.2.24. Пусть $v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином из предыдущей задачи. Доказать, что преобразование u совокупности его переменных, согласно которому $ux_i = x_j$, $ux_j = x_i$, $ux_k = x_k$ $(k \neq i, j)$, изменяет лишь знак v_n.

3.2.25. Доказать, что группа всех обратимых преобразований множества, состоящего из n элементов, имеет порядок $n!$

§ 3. Обратимые преобразования конечных множеств

В этом параграфе мы будем рассматривать обратимые преобразования конечных множеств. Поскольку мы занимаемся изучением суперпозиции преобразований, природа элементов преобразуемого множества нам безразлична. Поэтому из соображений удобства записи будем рассматривать в этом параграфе только преобразования миожеств натуральных чисел.

Группу всех обратимых преобразований множества $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ называют *симметрической группой* n-й степени. Будем обозначать эту группу S_n. Всякое преобразование из группы S_n будем называть *подстановкой* n-й степени или преобразованием n-й степени.

Подстановку вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-k} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k & \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-k} \end{pmatrix}$$

будем называть *k-членным циклом* или циклом длины k и записывать так: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Очевидно, запись цикла можно начинать с любого α_i. Запятые в записи цикла чаще всего опускаются.

Два цикла $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ будем называть *независимыми*, если множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ не пересекаются.

Будет доказано, что каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов (см. 3.3.5). О подстановке, представленной в виде произведения независимых циклов, будем говорить, что она разложена на независимые циклы.

Двучленный цикл называют *транспозицией*.

Подстановка n-й степени называется *четной*, если ее можно представить в виде произведения четного числа транспозиций. Подстановка n-й степени называется *нечетной*, если ее можно представить в виде произведения нечетного числа транспозиций.

Будет доказано (см. 3.3.14), что каждую подстановку n-й степени можно представить в виде произведения транспозиций, причем в различных таких представлениях одной и той же подстановки количество транспозиций будет оставаться всегда четным или всегда нечетным (см. 3.3.16). Отсюда следует, что каждая подстановка n-й степени является или четной или нечетной подстановкой.

Множество всех четных подстановок n-й степени есть подгруппа группы S_n (см. 3.3.17). Эту подгруппу называют *знакопеременной группой n-й степени*.

3.3.1. Пусть $u, v, w, z, t \in S_8$,

$u = (123)(4568)$, $v = (34)(52618)$, $w = (134)(2357)(1846)$,

$z = (82143)(12)(15)$, $t = (874312)(56)$.

Найти u^3, v^2u, wzt, w^4z^2, tzw.

3.3.2. Найти порядки следующих элементов группы S_{12}:

$u = (1, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 8, 12, 10, 9, 11)$, $v = (2, 1, 5, 8, 4)$.

3.3.3. Доказать, что всякие два независимых цикла перестановочны.

3.3.4. Представить в виде произведения независимых циклов следующие подстановки:

$$u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&5&6&8&7&4\end{pmatrix},$$

$$v=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\9&12&8&11&6&7&5&3&2&4&10&1\end{pmatrix},$$

$$w=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&6&5&1&8&7&2&3&4\end{pmatrix}.$$

3.3.5.Т. Доказать, что каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов.

3.3.6. Пусть

$$u=(\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1k_1})(\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2k_2})\ldots(\alpha_{l1}\alpha_{l2}\ldots\alpha_{lk_l}).$$

Доказать, что

$$u^{-1}=(\alpha_{lk_l}\ldots\alpha_{l2}\alpha_{l1})\ldots(\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{22}\alpha_{21})(\alpha_{1k_1}\ldots\alpha_{12}\alpha_{11}).$$

3.3.7. Найти все степени цикла $u=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с натуральными показателями.

3.3.8. Если разложение подстановки u на независимые циклы состоит из циклов длин $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то порядок u равен наименьшему общему кратному чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Доказать.

3.3.9. Пусть подстановка u представлена в виде произведения циклов, v — произвольная подстановка. Доказать, что если в циклах, составляющих u, произвести замену всех чисел так, как указывает подстановка v, то получится подстановка vuv^{-1}.

3.3.10. Пользуясь правилом, указанным в предыдущей задаче, вычислить uzu^{-1}, $t^{-2}wt^2$, $v^{-5}zv^5$, где u, v, w, z, t—подстановки из задачи 3.3.1.

3.3.11. Пусть

$$u=(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9),$$

$$v=(1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9),\quad w=(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9).$$

Доказать, что u перестановочно и с v и с w и что u можно представить в виде произведения, сомножителями которого являются v, w.

3.3.12. Найти все элементы группы S_n, перестановочные с циклом $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

3.3.13. Найти все элементы S_{10}, перестановочные с подстановкой $u=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)(\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10})\in S_{10}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}$ все различны.

3.3.14.У. Доказать, что каждую подстановку можно представить в виде произведения транспозиций.

3.3.15. Пусть

$$u=(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9),\quad v=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&5&9&4&7&6&8&5&3\end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) подстановку u можно представить в виде произведения семи, девяти, одиннадцати и пятнадцати различных транспозиций и нельзя представить в виде произведения пяти транспозиций;

2) подстановку v можно представить в виде произведения четырех, шести, восьми и десяти различных транспозиций;

3) подстановку u можно представить в виде произведения любого нечетного числа транспозиций, большего пяти;

4) подстановку v можно представить в виде произведения любого четного числа транспозиций, большего двух.

3.3.16.У. Доказать, что при любом разложении данной подстановки на произведение транспозиций число транспозиций будет всегда одинаковой четности.

3.3.17.Т.У. Доказать, что множество всех четных подстановок n-й степени является подгруппой группы S_n и что порядок этой подгруппы равен $n!/2$.

3.3.18. Доказать, что подмножество

$$H=\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

группы S_4 является коммутативной подгруппой. Составить таблицу умножения группы H.

Примечание. Группу H называют *четверной группой* или *группой Клейна*.

3.3.19.У. Доказать, что следующие множества подстановок являются порождающими для симметрической группы S_n:

1) множество всех циклов;

2) множество всех транспозиций;

3) множество транспозиций $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$;

4) множество транспозиций $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $\ldots$, $(1\ n)$;

5) множество, состоящее из двух подстановок: $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

3.3.20. Доказать, что каждое из следующих множеств является порождающим множеством знакопеременной группы n-й степени:

1) множество всех тройных циклов;

2) множество циклов $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n)$.

3.3.21.У. Доказать, что каждое из следующих множеств является неприводимым порождающим множеством группы S_6:

1) $M_1 = \{(12), (34), (56), (23)(45)\}$;

2) $M_2 = \{(12), (34), (123)(456)\}$;

3) $M_3 = \{(12), (23), (24)(156)\}$.

3.3.22. Доказать, что ни одно порождающее множество группы S_4, состоящее из двух элементов, не содержит элементов группы Клейна (см. 3.3.18).

3.3.23.У. Доказать, что для всякого элемента $u \in S_5$ $(u \neq e)$ найдется элемент $v \in S_5$ такой, что $S_5 = [u, v]$.

3.3.24.У. Если в разложении подстановки на независимые циклы все неединичные циклы одинаковой длины, то она называется *регулярной*. Доказать, что каждая степень n-членного цикла есть регулярная подстановка и что длина каждого цикла, входящего в ее разложение на независимые циклы, является делителем n.

3.3.25. Доказать, что всякая регулярная подстановка является степенью некоторого цикла (см. 3.3.24).

3.3.26.У. Пусть u, u' — регулярные (см. 3.3.24) перестановочные подстановки степени mn, не имеющие неподвижных точек (m, n — взаимно простые натуральные числа). Подстановка u имеет порядок m, подстановка v имеет порядок n. Доказать, что uu' — цикл длины mn.

3.3.27. Выяснить для каких m в симметрической группе S_4 найдутся элементы порядка m.

§ 4. Эндоморфизмы

Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Примерами отношений могут служить бинарные отношения, в частности упорядоченности, алгебраические действия и т. д.

Преобразование множества Ω называется *эндоморфизмом* Ω относительно заданных отношений, если всякая система элементов,

связанных одним из рассматриваемых соотношений, преобразуется в систему элементов, связанных тем же соотношением.

Например, если в множестве Ω задано алгебраическое действие, обозначаемое значком $\circ$, то эндоморфизмом Ω относительно этого действия будет всякое преобразование u множества Ω, удовлетворяющее условию: если $a \circ b = c (a, b, c \in \Omega)$, то $ua \circ ub$ определено и $ua \circ ub = uc$. Если в множестве Ω задана упорядоченность, то эндоморфизмом Ω относительно этой упорядоченности будет всякое преобразование u множества Ω, удовлетворяющее условию: если $\alpha \leqslant \beta (\alpha, \beta \in \Omega)$, то $u\alpha \leqslant u\beta$. Линейные преобразования являются эндоморфизмами линейного пространства относительно действий, введенных в этом пространстве. Пусть в трехмерном пространстве задано отношение ρ, согласно которому всякие три точки M_1, M_2, M_3 находятся в отношении ρ; если они лежат на одной прямой и M_2 лежит между M_1 и M_3, то эндоморфизмами пространства относительно ρ будут всевозможные аффинные преобразования (см. 3.4.27).

Про эндоморфизм множества Ω относительно заданных в Ω отношений говорят, что он сохраняет эти отношения в Ω.

Легко доказать, что множество всех эндоморфизмов произвольного множества относительно заданных в нем отношений является полугруппой преобразований (см. 3.4.7).

Обратимое преобразование u множества Ω, являющееся эндоморфизмом относительно некоторых заданных в Ω отношений, будем называть *обратимым эндоморфизмом* Ω относительно этих отношений. Если же u^{-1} тоже является эндоморфизмом относительно заданных отношений, то u называют *автоморфизмом* Ω относительно этих отношений.

Будет доказано (см. 3.4.12), что множество всех автоморфизмов Ω относительно заданных отношений является группой преобразований.

Если ясно, относительно каких отношений рассматривается эндоморфизм, то слова «относительно заданных отношений» опускают.

Отметим, что термии «эндоморфизм» в теории групп обычно применяется только в одном частном случае, а именно к эндоморфизмам, сохраняющим действие в группе. Если некоторая подгруппа преобразуется в себя при всех эндоморфизмах группы, сохраняющих действие, то она называется *вполне характеристической подгруппой*.

3.4.1. Пусть Ω — множество всех вещественных чисел, упорядоченное по величине. Какие функции, заданные на всем множестве Ω, являются эндоморфизмами Ω?

3.4.2. Пусть ρ — следующее бинарное отношение в множестве N натуральных чисел: $(m, n) \in \rho$, если m делится на n. Какие из следующих преобразований являются эндоморфизмами N:

1) преобразования u, v задачи 3.1.14;

2) преобразование t, согласно которому $tn = n^2$ $(n \in N)$;

3) преобразование z, согласно которому

$$zn = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ p_n, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

где p_n — наибольшее простое число, являющееся делителем n;

4) преобразование w_p, согласно которому $w_p(n) = pn$, где p — фиксированное натуральное число, $n \in N$.

3.4.3. Пусть N — множество натуральных чисел. Какие из преобразований задачи 3.4.2 являются эндоморфизмами N, сохраняющими действие сложения, действие умножения?

3.4.4. Пусть в множестве всех целых чисел R определено действие следующим образом: $m \circ n = m + n$, если m, n — натуральные числа; для остальных пар чисел действие не определено.

1) Доказать, что преобразование u, согласно которому

$$u(l) = \begin{cases} 2l, & \text{если } l \geqslant 0; \\ -l, & \text{если } l < 0 \text{ и нечетное;} \\ \dfrac{l}{2}, & \text{если } l < 0 \text{ и четное,} \end{cases}$$

является обратимым эндоморфизмом R.

2) Выяснить, является ли u автоморфизмом R.

3.4.5. Пусть в множестве A определено действие, обладающее свойством неограниченной применимости. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм A является автоморфизмом.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

3.4.6. Доказать, что преобразование u из задачи 3.2.12 является автоморфизмом преобразуемого множества Ω относительно обычных действий сложения, вычитания, умножения и деления и что при этом автоморфизме каждое рациональное число остается неподвижным.

3.4.7.Т. Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что множество всех эндоморфизмов Ω, сохраняющих заданные отношения, является полугруппой относительно действия умножения преобразований.

3.4.8. Пусть A — мультипликативное множество, $a \in A$ и пусть u_a — преобразование множества A, преобразующее каж-

дый его элемент в a. Доказать, что u_a является эндоморфизмом A тогда и только тогда, когда a — идемпотент.

3.4.9. Пусть R — аддитивная группа рациональных чисел, $r \in R$. Доказать, что преобразование x_r, согласно которому $x_r(a) = ra$ (для любого $a \in R$), является эндоморфизмом R.

3.4.10. Пусть R — аддитивная группа рациональных чисел. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов R состоит из всевозможных эндоморфизмов x_r задачи 3.4.9 (при всех $r \in R$).

3.4.11.Т. Используя две предыдущие задачи, доказать, что всякий эндоморфизм аддитивной группы рациональных чисел отличный от нулевого, является автоморфизмом (нулевой эндоморфизм преобразует каждое число в нуль).

3.4.12.Т. Пусть в множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что множество всех автоморфизмов Ω, сохраняющих заданные отношения, является группой преобразований.

3.4.13.У. Пусть в конечном множестве Ω заданы некоторые отношения. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм Ω относительно заданных отношений является автоморфизмом. Справедливо ли это утверждение для любого множества?

3.4.14. Пусть G — группа всех неособенных матриц второго порядка с рациональными элементами, d — определитель матрицы $a \in G$, записанный в виде $d = \frac{m}{n} 2^{l_a}$, где m, n — нечетные целые числа, l_a — целое число (таким способом, очевидно, можно записать всякое рациональное число d).

1) Доказать, что преобразование $u \in T_\Omega$, определенное следующим образом:

$$u(a) = \begin{pmatrix} 1 & l_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является эндоморфизмом группы G относительно действия умножения матриц.

2) Найти образ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

при этом эндоморфизме.

3) Доказать, что центр группы G не является ее вполне характеристической подгруппой.

3.4.15. Найти все вполне характеристические подгруппы группы кватернионов (см. 2.6.39).

3.4.16. Пусть в множестве $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано бинарное отношение ρ следующим образом: $(m, n) \in \rho$, если числа m, n взаимно просты. Найти количество эндоморфизмов Ω, имеющих ранги не больше двух.

3.4.17. Пусть $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, и пусть в Ω задана упорядоченность следующим образом: $\alpha < \beta < \xi$ при любом $\xi = \gamma, \delta, \varepsilon$.

1) Найти все автоморфизмы Ω.

2) Доказать, что группа автоморфизмов Ω изоморфна группе S_3 (см. § 3).

3.4.18. Пусть упорядоченность в конечном множестве Ω задается так: $\alpha \leqslant \xi$, где α — фиксированный, а ξ — произвольный элементы из Ω. Описать все эндоморфизмы Ω.

3.4.19. Пусть Ω — упорядоченное множество из задачи 3.4.18. Пусть Ω' получается из Ω присоединением элемента ν, не сравнимого ни с одним элементом из Ω ($\nu \not\leqslant \xi$, $\xi \not\leqslant \nu$, $\xi \in \Omega$). Доказать, что группы автоморфизмов Ω и Ω' изоморфны.

3.4.20. Пусть ρ — непустое бинарное отношение в множестве Ω. Пусть J — множество всех преобразований Ω, ранги которых равны 1. Доказать, что полугруппа всех эндоморфизмов Ω содержит J тогда и только тогда, когда ρ — рефлексивное отношение.

3.4.21. Пусть ρ — рефлексивное бинарное отношение в множестве Ω. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов Ω относительно ρ совпадает с полугруппой всех преобразований Ω тогда и только тогда, когда ρ — диагональ или универсальное бинарное отношение (см. гл. I, § 3).

3.4.22. Пусть Ω — упорядоченное множество. Будем говорить, что Ω связно, если для любых α, $\beta \in \Omega$ найдется цепочка элементов $\xi_1 = \alpha, \xi_2, \ldots, \xi_n = \beta$ ($\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Omega$), в которой каждые два соседних элемента сравнимы ($\xi_i \leqslant \xi_{i+1}$ или $\xi_{i+1} \leqslant \xi_i$). Доказать, что если Ω связно, то для любого эндоморфизма u множество $u\Omega$ также связно.

3.4.23.У. Доказать, что всякий обратимый эндоморфизм линейно упорядоченного множества является автоморфизмом. Справедливо ли это утверждение для любого упорядоченного множества?

3.4.24. Пусть N — множество натуральных чисел, упорядоченное по величине. Доказать, что группа автоморфизмов N единичная. Справедливо ли это утверждение для множества всех целых чисел, упорядоченного по величине?

3.4.25. Пусть ρ — отношение эквивалентности в множестве Ω и $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$. Доказать, что преобразование u, определенное следующим образом:

$$u\xi = \begin{cases} \alpha, & \text{если } (\xi, \gamma) \in \rho; \\ \beta, & \text{если } (\xi, \gamma) \notin \rho, \end{cases}$$

является эндоморфизмом Ω.

3.4.26. Пусть Ω — упорядоченное множество, $\alpha \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant \delta$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$). Доказать, что существует эндоморфизм Ω, который преобразует α в γ, а β в δ.

3.4.27.У. Пусть в трехмерном пространстве задано отношение ρ, согласно которому точки M_1, M_2, M_3 находятся в отношении ρ, если они расположены на одной прямой так, что M_2 лежит между M_1 и M_3. Доказать, что всякое аффинное преобразование пространства является эндоморфизмом пространства относительно ρ (аффинное преобразование — это обратимое преобразование, переводящее всякую прямую в прямую). Выяснить, являются ли аффинные преобразования автоморфизмами пространства относительно ρ.

3.4.28. Пусть Ω — множество всевозможных чисел вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, где a, b, c, d — рациональные числа, и пусть G_Ω — группа всех автоморфизмов Ω относительно обычных арифметических действий, для которых каждое рациональное число является неподвижной точкой (см. 3.4.12).

1) Найти $u(\sqrt{2})$, $u(\sqrt{3})$ для любого $u \in G_\Omega$.

2) Доказать, что группа G_Ω конечна.

3.4.29. Пусть G_Ω — группа из предыдущей задачи. Доказать, что подмножество H группы G_Ω, состоящее из всех автоморфизмов, для которых $\sqrt{2}$ является неподвижной точкой, есть нормальный делитель группы G_Ω.

3.4.30.У. Пусть Ω — поле из задачи 3.2.12. Доказать, что группа всех автоморфизмов Ω относительно обычных арифметических действий бесконечна.

3.4.31. Пусть P — множество эндоморфизмов упорядоченного множества Ω, определенное следующим образом:

$u \in P$, если $u\Omega$ линейно упорядочено. Доказать, что P — двусторонний идеал полугруппы всех эндоморфизмов Ω.

3.4.32.У. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ упорядочено по величине.

1) Найти все идемпотенты полугруппы эндоморфизмов Ω ранга $n - 1$.

2) Доказать, что все идемпотенты ранга $n - 1$ образуют порождающее множество этой полугруппы.

3.4.33. Пусть Ω — упорядоченное множество из задачи 3.4.18. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов Ω регулярна.

3.4.34.У. Доказать, что полугруппа эндоморфизмов упорядоченного множества Ω из задачи 3.4.17 нерегулярна.

§ 5. Группы движений

Пусть Ω — множество точек прямой. *Движением* прямой называется всякое преобразование Ω, сохраняющее расстояние между любыми ее двумя точками.

В множестве Ω для каждого вещественного неотрицательного числа c определим бинарное отношение ρ_c, согласно которому $(M_1, M_2) \in \rho_c$, если расстояние между точками M_1, M_2 равно c. Тогда движения и только они являются эндоморфизмами Ω, сохраняющими каждое из отношений ρ_c.

Наряду с движениями прямой мы будем рассматривать движения плоскости и пространства, т. е. их преобразования, сохраняющие расстояния между точками. Так же как и на прямой, движения плоскости и пространства являются эндоморфизмами относительно всех отношений ρ_c.

Всякое преобразование, которое является результатом некоторого механического перемещения, очевидно, является движением. Такие движения обычно называют *движениями первого рода*. Все движения не исчерпываются движениями первого рода. Например, симметрия плоскости относительно прямой (ее иначе называют отражением относительно прямой) является движением, но не является движением первого рода. Движения, не являющиеся движениями первого рода, называют *движениями второго рода*.

В дальнейшем мы не будем подразделять движения на движения первого и второго рода и даже не будем использовать термины: «движение первого рода», «движение второго рода».

Каждое из множеств: всех движений прямой, всех движений плоскости, всех движений пространства — является группой преобразований (см. 3.5.1). Подгруппы этих групп называют *группами движений*.

Пусть Ω — множество точек прямой, плоскости или пространства, а Φ — некоторая фигура в Ω (т. е. Φ — подмножество Ω). *Самосовмещением* фигуры Φ в Ω называется всякое движение Ω, преобразующее фигуру Φ на себя.

Для данной фигуры Ф рассмотрим в Ω бинарное отношение τ_Φ, согласно которому $(M_1, M_2) \in \tau_\Phi$, если обе точки $M_1, M_2 \in \Phi$. Будет доказано, что самосовмещения фигуры Ф являются всеми автоморфизмами Ω относительно отношения τ_Φ и всех отношений ρ_c, определенных выше (см. 3.5.11). Отсюда следует, что множество всех самосовмещений фигуры есть группа преобразований.

Можно сказать, что группа самосовмещений фигуры характеризует «степень симметричности фигуры». Иначе говоря, нахождение группы самосовмещений фигуры равносильно нахождению ее симметрии. Определение симметрии фигур часто бывает очень важным для изучения их строения. В частности, изучение групп самосовмещений фигур специального вида имеет весьма большое значение в кристаллографии.

3.5.1. Пусть Ω — множество точек прямой, плоскости или пространства. Доказать, что:

1) каждое движение Ω является обратимым преобразованием;

2) множество всех движений Ω является группой преобразований.

3.5.2. Доказать, что группа всех движений прямой имеет подгруппу, изоморфную аддитивной группе вещественных чисел.

3.5.3. В группе всех движений плоскости найти все элементы конечного порядка и все элементы второго порядка.

3.5.4. Доказать, что множество всех осевых симметрий плоскости является порождающим множеством группы всех движений плоскости.

3.5.5. Доказать, что множество параллельных переносов плоскости является нормальным делителем группы всех движений плоскости.

3.5.6. Пусть Ф — некоторая фигура в пространстве, и пусть G — совокупность всех движений пространства, для каждого из которых любая точка фигуры Ф является неподвижной точкой. Доказать, что G — группа движений.

3.5.7. Найти порядок группы G из предыдущей задачи, если:

1) Ф есть некоторая прямая;

2) Ф состоит из двух пересекающихся прямых;

3) Ф состоит из двух скрещивающихся прямых.

3.5.8. Пусть Ф — некоторая фигура в пространстве; A — совокупность всех движений пространства u, для которых $u(\Phi) \subset \Phi$ (в частности, может быть $u(\Phi) = \Phi$). Доказать, что A — полугруппа с единицей. Выяснить, для каких элементов $u \in A$ имеет место $u^{-1} \in A$.

3.5.9. Выяснить, для каких из следующих фигур полугруппа A из предыдущей задачи является группой:

1) шара;

2) полуплоскости;

3) правильного многогранника.

3.5.10. Пусть Φ — множество всех точек первой четверти координатной плоскости; A — полугруппа, определенная в задаче 3.5.8. Доказать, что множество, состоящее из всех элементов бесконечного порядка группы $[A]_g$ и единицы этой группы, является подгруппой группы $[A]_g$. Описать эту подгруппу.

3.5.11. Пусть Φ — фигура на прямой, плоскости или в пространстве. Доказать, что самосовмещения Φ и только они являются автоморфизмами относительно τ_Φ и всех отношений ρ_c (см. введение).

3.5.12. Найти порядок подгруппы всех самосовмещений каждой из следующих фигур в группе всех движений прямой:

1) полупрямой;

2) отрезка;

3) фигуры, составленной из бесконечного множества непересекающихся отрезков равной длины, расположенных так, что для каждого отрезка существуют отрезки, находящиеся слева и справа от него, и расстояние между концами любых двух соседних отрезков равно некоторому фиксированному числу.

3.5.13. Найти подгруппу G всех самосовмещений прямой в группе всех движений плоскости. Доказать, что G — бесконечная некоммутативная группа.

3.5.14. Найти подгруппу всех самосовмещений каждой из следующих фигур в группе всех движений плоскости:

1) ромба;

2) квадрата;

3) равнобедренного треугольника.

3.5.15. Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются вершинами правильного n-угольника с центром O. Точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — середины сторон данного n-угольника (B_i — середина стороны A_iA_{i+1} для $i = 1, \ldots, n-1$, а B_n — середина стороны A_nA_1). Фигура Φ образована всеми треугольниками OA_iB_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что подгруппа самосовмещений фигуры Φ в группе всех движений плоскости циклическая. Найти порядок этой группы.

3.5.16. Найти подгруппу самосовмещений правильного n-угольника в группе всех движений плоскости.

3.5.17. Фигура Ф составлена из двух одинаковых квадратов, имеющих общую вершину и расположенных так, что диагонали квадратов, проходящие через общую вершину, лежат на одной прямой. Найти подгруппу всех самосовмещений Ф в группе всех движений плоскости.

3.5.18. Пусть Ф — многогранник, имеющий n вершин. Доказать, что группа самосовмещений Ф изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.

3.5.19. Доказать, что группа самосовмещений правильной n-угольной пирамиды ($n \geqslant 4$) изоморфна группе самосовмещений правильного n-угольника.

3.5.20. Доказать, что группа G всех самосовмещений правильной n-угольной пирамиды ($n \geqslant 4$) обладает единственной коммутативной подгруппой порядка n. Описать эту подгруппу (см. предыдущую задачу).

3.5.21. Пусть G — группа из задачи 3.5.20. Для каких n любые две различные симметрии относительно плоскостей симметрии пирамиды образуют порождающее множество группы G?

3.5.22. *n-угольным диэдром* называется тело, состоящее из правильной n-угольной пирамиды и ее зеркального отражения в плоскости основания. Найти порядок группы самосовмещений n-угольного диэдра при $n \neq 4$.

3.5.23. Доказать, что множество

$$G = \{e, (12), (34), (35), (45), (345), (354), (12)(34), (12)(35), (12)(45), (12)(345), (12)(354)\}$$

является группой подстановок, изоморфной группе самосовмещений треугольного диэдра.

3.5.24. Пусть A — некоторая вершина правильного тетраэдра. Доказать, что множество всех самосовмещений тетраэдра, оставляющих неподвижной точку A, есть группа, изоморфная симметрической группе S_3.

3.5.25.У. Описать группу самосовмещений правильного тетраэдра и доказать, что эта группа изоморфна симметрической группе четвертой степени.

3.5.26 Пусть φ — произвольный изоморфизм группы самосовмещений правильного тетраэдра на группу S_4 (см. преды-

дущую задачу). Какие самосовмещения тетраэдра соответствуют при этом изоморфизме знакопеременной группе четвертой степени?

Примечание. Эти самосовмещения тетраэдра образуют так называемую группу вращений правильного тетраэдра.

3.5.27. Доказать, что множество всех самосовмещений куба, оставляющих неподвижной некоторую фиксированную вершину A, есть группа. Описать эту группу.

3.5.28.У. Найти порядок группы всех самосовмещений куба.

3.5.29.У. Доказать, что множество вращений куба вокруг всех осей симметрии есть подгруппа группы самосовмещений куба, изоморфная симметрической группе четвертой степени (эту группу называют группой вращений куба).

3.5.30. Доказать, что множество вращений куба вокруг диагоналей и прямых, соединяющих середины противоположных ребер, есть подгруппа группы вращений куба (см. 3.5.28). Найти подгруппу S_4, изоморфную ей.

3.5.31. Икосаэдром называется правильный многогранник, ограниченный двадцатью треугольниками. Описать группу всех самосовмещений икосаэдра, оставляющих неподвижной некоторую фиксированную вершину A.

3.5.32.У. Доказать, что группа самосовмещений икосаэдра имеет порядок 120.

3.5.33. Пусть фигура Ф составлена из всевозможных точек M с координатами $\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l,\ \frac{\sqrt{3}}{2}k-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ в некоторой прямоугольной системе координат, где k, l — произвольные целые числа.

1) Выяснить, какие самосовмещения Ф, являющиеся элементами группы движений конечного порядка, не оставляют неподвижной ни одну точку фигуры Ф.

2) Доказать, что существуют группы самосовмещений Ф порядков 2, 3, 6, 12 и не существует группы самосовмещений Ф порядка 5.

3.5.34. Пусть фигура Ф состоит из всех точек пространства, имеющих целые координаты в некоторой прямоугольной системе координат.

1) Найти группу самосовмещений Ф.

2) Описать все подгруппы четвертого порядка группы самосовмещений Ф.

Примечание. Конечные группы самосовмещений фигур такого типа, как в задачах 3.5.33, 3.5.34, называются *кристаллографическими группами* или *группами Федорова*. Они играют большую роль в кристаллографии.

§ 6. Частичные преобразования

Пусть Ω — произвольное множество; всякое отображение u некоторого подмножества M множества Ω в Ω называется *частичным преобразованием* Ω.

Множество $N=u(M)$ будем обозначать через $\mathrm{pr}_1 u$; множество M, на котором определено отображение u, обозначается через $\mathrm{pr}_2 u$. Используя эти обозначения, можем сказать, что преобразование u есть отображение множества $\mathrm{pr}_2 u$ на множество $\mathrm{pr}_1 u$.

Среди частичных преобразований рассматривается и пустое преобразование θ, для которого $\mathrm{pr}_1\theta$ и $\mathrm{pr}_2\theta$ — пустые множества.

Для задания частичного преобразования u достаточно задать $\mathrm{pr}_2 u$ и закон, сопоставляющий каждому $\alpha\in\mathrm{pr}_2 u$ элемент $u\alpha\in\Omega$. Множество $\mathrm{pr}_1 u$ этим вполне определяется.

Множество всех частичных преобразований множества Ω будем обозначать P_Ω.

Если $\mathrm{pr}_2 u=\Omega$, то частичное преобразование u превращается в обычное преобразование Ω (§ 1, гл. III). Следовательно, T_Ω (полугруппа всех преобразований Ω) содержится в P_Ω.

В множестве P_Ω определяется действие умножения или суперпозиции следующим образом: если $u, v\in P_\Omega$, то $w=uv$ есть преобразование, у которого $\mathrm{pr}_2 w$ состоит из всех $\alpha\in\mathrm{pr}_2 v$ таких, что $v\alpha\in\mathrm{pr}_2 u$, и для каждого $\alpha\in\mathrm{pr}_2 w$ выполняется равенство $w\alpha=u(v\alpha)$.

Если $u, v\in T_\Omega$, то определенное здесь умножение частичных преобразований, очевидно, совпадает с умножением преобразований в смысле § 1 гл. III.

Пусть $u\in P_\Omega$; определим в множестве Ω бинарное отношение ρ_u согласно которому $(\alpha,\beta)\in\rho_u$, если $\beta\in\mathrm{pr}_2 u$ и $u\beta=\alpha$. Очевидно, $\mathrm{pr}_1\rho_u=\mathrm{pr}_1 u$ и $\mathrm{pr}_2\rho_u=\mathrm{pr}_2 u$. Будем говорить, что бинарное отношение ρ_u *соответствует* преобразованию u.

Будет доказано (см. 3.6.15), что различным частичным преобразованиям соответствуют различные бинарные отношения и что $\rho_u\rho_v=\rho_{uv}(u, v\in P_\Omega)$. Следовательно, умножение частичных преобразований можно рассматривать как частный случай умножения бинарных отношений.

Особо важную роль играют взаимно однозначные частичные преобразования, т. е. такие, которые являются взаимно однозначными отображениями одного подмножества множества Ω на другое.

Если u — взаимно однозначное частичное преобразование Ω, то для него определяется обратное частичное преобразование u^{-1} (гл. I, § 2). Очевидно, что $\rho_{u^{-1}}=(\rho_u)^*$ (см. § 3 гл. I).

Если для некоторого преобразования u выполняется условие $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$ и u преобразует каждый элемент из M в себя, то это преобразование называют ***частично тождественным,*** соответствующим множеству M. Будем обозначать его e_M.

Как и обычное преобразование, частичное преобразование можно записать в виде подстановки, помещая в верхней строке элементы множества $\mathrm{pr}_2 u$ и под каждым элементом записывая его образ.

Пусть Ω — множество вещественных чисел. Каждая вещественная функция $f(x)$ определяет некоторое частичное преобразование u множества Ω такое, что $\mathrm{pr}_2 u$ есть область определения $f(x)$ и $ua = f(a)$ для каждого $a \in \mathrm{pr}_2 u$. Справедливо и обратное: каждое частичное преобразование Ω является вещественной функцией.

Следует отметить, что в теории функций обычно рассматривают суперпозицию функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ только тогда, когда множество значений $\varphi(x)$ содержится в области определения $f(x)$. Мы не будем придерживаться такого ограничения.

В этом параграфе, за исключением задач 3.6.25, 3.6.26, других действий над функциями, кроме суперпозиции, рассматривать не будем. В силу этого $f(f(x))$, например, мы можем обозначать через $f^2(x)$.

3.6.1.Т. Доказать, что умножение частичных преобразований обладает ассоциативным свойством.

Примечание. Отсюда следует, что P_Ω есть полугруппа относительно действия умножения частичных преобразований.

3.6.2. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, u_1, u_2, v_1, $v_2 \in P_\Omega$;

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 9 & 1 & 7 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1) u_2^2, $u_1 u_2$, $u_2 u_1$, v_1^3;

2) типы элементов u_1, v_1, v_2 в полугруппе P_Ω.

3.6.3. Пусть Ω — произвольное множество. Найти типы следующих элементов в полугруппе P_Ω:

1) $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta \in \Omega)$;

2) $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta \in \Omega)$;

3) $u_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Omega, \ \alpha_n \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\})$

3.6.4. Пусть

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad u \in P_\Omega;$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти u^{-1}, uu^{-1}, $u^{-1}u$.

3.6.5. Пусть u — взаимно однозначное частичное преобразование множества Ω. Найти uu^{-1}, $u^{-1}u$. При каком условии $uu^{-1} = u^{-1}u$?

3.6.6. Пусть даны вещественные функции:

$$f_1(x) = \ln \frac{x}{1-x}, \quad f_2(x) = +\sqrt{x^2 - 1}, \quad f_3(x) = \sin x,$$

$f_4(x) = \arcsin x$, $f_5(x) = +\sqrt{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}$, область определения каждой из которых состоит из тех вещественных чисел, для которых соответствующая формула имеет смысл.

Найти:

1) $\mathrm{pr}_1[f_1(x)]$, $\mathrm{pr}_2[f_2 f_3(x)]$, $\mathrm{pr}_1[f_2 f_3(x)]$;
2) $f_1^2(x)$, $f_5 f_4(x)$, $f_5^2 f_4(x)$;
3) все степени $f_2(x)$.

3.6.7. Какие из следующих вещественных функций $f_i(x)$ являются взаимно однозначными частичными преобразованиями? Для каждой взаимно однозначной функции $f_i(x)$ найти обратное частичное преобразование и произведения $f_i f_i^{-1}(x)$, $f_i^{-1} f_i(x)$:

1) функции, заданные в предыдущей задаче;
2) функция

$$f_6(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — фиксированные вещественные числа такие, что $ad - bc \neq 0$, а за $\mathrm{pr}_2[f_6(x)]$ принимается множество всех вещественных чисел, при которых знаменатель не обращается в нуль.

3.6.8.У. Пусть $f(x)$ — произвольный комплексный полином ненулевой степени, $\mathrm{pr}_2[f(x)]$ — множество всех комплексных чисел. Доказать, что $\mathrm{pr}_1[f(x)]$ есть множество всех комплексных чисел.

3.6.9. Пусть Ω — произвольное множество, $u \in P_\Omega$. Выяснить, когда $u^2 = \theta$, $u^3 = \theta$.

3.6.10. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда $\mathrm{pr}_2(u_1 u_2) = \mathrm{pr}_2(u_2)$, где u_1, $u_2 \in P_\Omega$.

3.6.11. Доказать, что для любых u_1, $u_2 \in P_\Omega$ равенство $\mathrm{pr}_1(u_1u_2) = \mathrm{pr}_1 u_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u_1$ существует $\xi \in \mathrm{pr}_1 u_2$ такое, что $u_1\xi = \alpha$.

3.6.12. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда:

1) частичное преобразование является идемпотентом;

2) взаимно однозначное частичное преобразование является идемпотентом.

3.6.13. Пусть Ω — произвольное множество. Выяснить, когда для преобразования $u \in P_\Omega$ найдется $v \in P_\Omega$ такое, что:

1) $uv = e_\Omega$;

2) $vu = e_\Omega$.

3.6.14. Пусть Ω — произвольное множество, $u \in P_\Omega$, $u \neq \theta$. Выяснить, когда найдется $v \in P_\Omega$, $v \neq \theta$, такое, что:

1) $uv = \theta$;

2) $vu = \theta$.

3.6.15. Пусть u, $v \in P_\Omega$, и пусть ρ_u, ρ_v — бинарные отношения, соответствующие преобразованиям u, v. Доказать, что если $u \neq v$, то $\rho_u \neq \rho_v$, и что $\rho_{uv} = \rho_u\rho_v$.

3.6.16. Пусть выполняются обозначения предыдущей задачи. Доказать, что множество всевозможных бинарных отношений ρ_u при всех u из полугруппы P_Ω есть полугруппа относительно действия умножения бинарных отношений, изоморфная P_Ω.

3.6.17. Выяснить, когда для бинарного отношения ρ в множестве Ω существует частичное преобразование $u \in P_\Omega$ такое, что $\rho = \rho_u$.

3.6.18. Пусть ρ_u — бинарное отношение в множестве Ω, соответствующее некоторому $u \in P_\Omega$. Выяснить, для каких преобразований u отношение ρ_u обладает свойством:

1) рефлексивности;

2) симметричности;

3) транзитивности.

3.6.19. Пусть $M \subset \Omega$. Доказать, что:

1) множество R всех преобразований $u \in P_\Omega$, у которых $\mathrm{pr}_1 u \subset M$, есть правый идеал P_Ω;

2) множество L всех преобразований $v \in P_\Omega$, у которых $\mathrm{pr}_2 v \subset M$, есть левый идеал P_Ω.

3.6.20. Доказать, что множество $L \subset P_\Omega$, состоящее из всех элементов u, для которых $\mathrm{pr}_2 u \neq \Omega$, является левым и не является правым идеалом P_Ω.

3.6.21.Т. Пусть Ω — произвольное множество. Доказать, что множество всех взаимно однозначных частичных преобразований Ω является полугруппой относительно действия умножения.

3.6.22.У. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $u = (12)$, $v = (1, 2, \ldots, n)$, $w = e_{\{2, \ldots, n\}}$. Доказать, что полугруппа всех взаимно однозначных частичных преобразований Ω порождается подстановками u, v, w.

3.6.23. Пусть

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$$

— вещественная функция, область определения которой состоит из всех вещественных чисел, за исключением -1. Найти $f^2(x)$, $f^3(x)$.

3.6.24.У. Пусть R — совокупность всевозможных функций вида

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

определенных в задаче 3.6.7. Выяснить, является ли R группой относительно действия умножения частичных преобразований.

3.6.25. Пусть $\bar{G}$ — множество дробно-линейных функций, т. е. функций вида $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, где $ad - bc \neq 0$. В $\bar{G}$ введена алгебраическая операция следующим образом: если $g(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$, то

$$f(x) \circ g(x) = \frac{(aa_1 + bc_1)\, x + (ab_1 + bd_1)}{(ca_1 + c_1 d)\, x + (cb_1 + dd_1)}.$$

Доказать, что $\bar{G}$ — группа.

Примечание. Результат сопоставить с предыдущей задачей.

3.6.26. Пусть $\bar{G}$ — группа из предыдущей задачи. Доказать, что $\bar{G}$ изоморфна группе G из задачи 3.2.13.

3.6.27. Пусть C_α — подмножество полугруппы P_Ω, состоящее из пустого преобразования и всех элементов u, у которых $\mathrm{pr}_1 u = \alpha$, где α — фиксированный элемент Ω. Доказать, что множества $C_\alpha (\alpha \in \Omega)$ и только они являются минимальными правыми ненулевыми идеалами P_Ω (т. е. такими идеалами,

которые не содержат ненулевых правых идеалов, отличных от них самих).

3.6.28.Т.У. Пусть A — полугруппа взаимно однозначных частичных преобразований, в которой выполняются условия:

1) вместе с каждым преобразованием в A содержится и ему обратное;

2) существует множество M такое, что для каждого элемента $u \in A$ выполняется $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$.

Доказать, что A — группа.

3.6.29.Т.У. Доказать, что для всякой группы взаимно однозначных частичных преобразований выполняются условия 1), 2) предыдущей задачи.

3.6.30. Пусть B — полугруппа некоторых взаимно однозначных преобразований множества Ω, обладающая тем свойством, что вместе с каждым преобразованием u полугруппа B содержит и обратное преобразование. Доказать, что B — регулярная полугруппа, в которой каждый элемент обладает единственным регулярно сопряженным элементом (см. 2.5.16).

Примечание. Справедливо и обратное утверждение: если в полугруппе каждый элемент обладает единственным регулярно сопряженным элементом, то она изоморфна некоторой полугруппе взаимно однозначных частичных преобразований, в которой вместе с каждым преобразованием содержится и обратное преобразование.

ГЛАВА IV

ГРУППЫ И ИХ ПОДГРУППЫ

§ 1. Разложение группы по подгруппе

Пусть H — некоторая подгруппа группы G и x — некоторый элемент G. Множество xH называется *правым смежным классом* группы G по H, а Hx — *левым смежным классом* G по H. Если G представлена в виде попарно непересекающегося объединения своих правых смежных классов по H:

$$G = x_\alpha H \cup x_\beta H \cup \ldots \cup x_\xi H \cup \ldots,$$

то такое разбиение называется *правым разложением* группы G по подгруппе H. Множество элементов $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ называется *множеством представителей* этого правого разложения G по H.

Аналогично определяются левое разложение и множество его представителей в левом разложении. Следует иметь в виду, что иногда то, что у нас названо правым разложением, называют левым разложением, и наоборот.

Как будет показано дальше (см. 4.1.16), множества классов в правом разложении и левом разложении равномощны. Если число их конечно, то оно называется *индексом* подгруппы H в группе G. При бесконечном количестве смежных классов в разложении мы будем говорить о бесконечном индексе.

В литературе индекс часто обозначают через $(G:H)$. В случае бесконечного множества смежных классов индексом иногда называют мощность этого множества.

Пусть F и H — две подгруппы G (в частности, F и H могут и совпадать) и x — некоторый элемент G. Множество FxH называется *двойным смежным классом* группы G по паре подгрупп (F, H) (или, как иногда говорят, по двойному модулю (F, H)).

Если G представлена в виде попарно непересекающегося объединения некоторых двойных смежных классов по паре (F, H):

$$G = Fx_\alpha H \cup Fx_\beta H \cup \ldots \cup Fx_\xi H \cup \ldots,$$

то такое разбиение называют *разложением G по паре подгрупп* (F, H) (или разложением по двойному модулю (F, H)). Множество

$\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ называется в этом случае *множеством представителей* этого разложения G по паре (F, H).

В коммутативной группе правое и левое разложения, очевидно, совпадают; разложение по паре (F, H) совпадает с разложением по подгруппе FH (см. 2.6.36).

4.1.1. Если элемент t содержится в некотором правом смежном классе xH группы G по подгруппе H, то $tH = xH$. Аналогично для левых классов. Доказать.

4.1.2.У. Пусть H — подгруппа группы G и $x, y \in G$. Доказать, что правые смежные классы xH и yH или совпадают или не имеют ни одного общего элемента. То же для левых классов.

4.1.3. Если x — некоторый элемент и H — некоторая подгруппа группы G, то x содержится в правом смежном классе xH и в левом смежном классе Hx. Доказать.

4.1.4.Т.У. Доказать, что для любой подгруппы H группы G всегда существует правое и левое разложение G по H.

4.1.5. Пусть даны два правых разложения группы G по подгруппе H. Доказать, что они представляют собою одно и то же разбиение множества всех элементов группы G. То же для левых разложений.

4.1.6. Найти правое разложение симметрической группы S_3 по подгруппе, состоящей из двух элементов e и (1 2).

4.1.7. Найти левое разложение знакопеременной группы A_4 по подгруппе, состоящей из трех элементов e, (1 2 3), (1 3 2).

4.1.8. Найти правое и левое разложения группы кватернионов K (см. 2.6.39) по подгруппе, состоящей из двух элементов: 1 и — 1. Сравнить их и объяснить результат сравнения.

4.1.9.У. Найти разложения циклической группы десятого порядка по всем ее подгруппам.

4.1.10. Найти разложение бесконечной циклической группы, порожденной элементом x, по подгруппе, порождаемой элементом x^3.

4.1.11. Что представляют собою разложения произвольной группы G по единичной подгруппе и по самой G?

4.1.12. Пусть S — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H. Определим отображение f группы G в себя, полагая для каждого $z \in G$, что $f(z) = x \in S$, где $zH = xH$. Доказать, что этот закон действительно вполне однозначно определяет отображение f.

Доказать, что f является отображением G на S, обладающим нижеследующими свойствами: для всяких $z \in G$ и $h \in H$ имеют место:

1) $f(f(z)) = f(z)$;
2) $z^{-1} f(z) \in H$;
3) $f(zh) = f(z)$.

4.1.13. Пусть H — подгруппа группы G и f — отображение G в себя, обладающее нижеследующими тремя свойствами: для всяких $z \in G$ и $h \in H$ имеют место:

1) $f(f(z)) = f(z)$;
2) $z^{-1} f(z) \in H$;
3) $f(zh) = f(z)$.

Доказать, что $f(G)$ является множеством представителей в правом разложении G по H.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 4.1.12.

4.1.14. Для левого разложения группы G по подгруппе H сформулировать условия для отображения G на множество представителей левого разложения G по H, аналогичные 4.1.12, и получить результаты, аналогичные 4.1.12 и 4.1.13.

4.1.15. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H и $\{h_\alpha, h_\beta, \ldots, h_\xi, \ldots\}$ — множество элементов, принадлежащих H и сопоставленных каждому элементу из множества наших представителей. Доказать, что множество $\{x_\alpha h_\alpha, x_\beta h_\beta, \ldots, x_\xi h_\xi, \ldots\}$ также будет множеством представителей правого разложения G по H и что всякое множество представителей правого разложения G по H может быть получено из исходного множества представителей $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ таким способом.

Сформулировать и доказать аналогичное свойство для левого разложения.

4.1.16.У. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое множество представителей в правом разложении группы G по подгруппе H. Доказать, что $\{x_\alpha^{-1}, x_\beta^{-1}, \ldots, x_\xi^{-1}, \ldots\}$ будет множеством представителей в левом разложении G по H.

Примечание. Отсюда вытекает равномощность множества правых смежных классов в правом разложении G по H и множества левых смежных классов в левом разложении G по H. Это является основанием для введения понятия индекса подгруппы в группе.

4.1.17. Пусть H и H' — подгруппы группы G, причем $G \supset H \supset H'$. Даны множество S представителей правого разложения G по H и множество S' представителей правого разложения H по H'. Доказать, что SS' является множеством представителей правого разложения G по H'.

4.1.18. Сколько существует различных множеств представителей правого разложения группы порядка 12 по ее подгруппе порядка 3?

4.1.19. Пусть K — непустое подмножество группы G и $x \in G$. Доказать, что все три множества K, xK, Kx равномощны.

Примечание. В частности, всякий правый смежный класс и всякий левый смежный класс по подгруппе равномощны с этой подгруппой (если подгруппа конечна, то имеют равное с ней количество элементов).

4.1.20.Т.У. Пусть G — конечная группа порядка n, H — ее подгруппа порядка h и k — индекс H в G. Доказать, что $n = hk$.

Примечание. Отсюда следует важный вывод: в конечной группе порядок всякой ее подгруппы, так же как и индекс, является делителем порядка группы.

4.1.21.Т.У. Доказать, что в конечной группе порядок всякого ее элемента является делителем порядка группы.

Примечание. Сопоставить с результатом задачи 3.3.27.

4.1.22. Если подмножество K группы G является правым или левым смежным классом по какой-либо подгруппе, то для всяких $x, y, z \in K$ имеет место

$$xy^{-1}z \in K.$$

Доказать.

4.1.23.У. Пусть K — такое непустое подмножество группы G, что для всяких его элементов $x, y, z \in K$ имеет место

$$xy^{-1}z \in K.$$

Доказать, что тогда существует, и притом единственная, подгруппа H группы G такая, что K является правым смежным классом по H, и такая, и притом единственная, подгруппа H', что K является левым смежным классом по H'.

Примечание. Результат сопоставить с результатом предыдущей задачи.

4.1.24. В симметрической группе S_5 выяснить, какие из нижеследующих множеств будут смежными классами по каким-либо подгруппам:

1) $K_1 = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\}$;
2) $K_2 = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4)\}$;
3) $K_3 = \{e, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$;
4) $K_4 = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5)\}$;
5) $K_5 = \{(1\ 2), (1\ 5\ 2)\ (3\ 4)\}$.

4.1.25. В группе всех неособенных комплексных квадратных матриц порядка n будет ли смежным классом и по какой подгруппе множество всех матриц, определитель которых равен заданному числу $c \neq 0$?

4.1.26.Т.У. Пусть F, H являются подгруппами группы G. Доказать, что всегда существует разложение G по паре подгрупп (F, H).

4.1.27. Найти разложение симметрической группы S_4 по паре подгрупп:

$$F = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}, \quad H = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}.$$

4.1.28. Найти разложение симметрической группы S_3 по паре подгрупп (F, H), где $F = H = \{e, (1\ 2)\}$.

4.1.29. Пусть N — нормальный делитель и F — произвольная подгруппа группы G. Доказать, что разложение G по паре (N, F) совпадает с правым разложением G по FN (см. 2.6.36).

4.1.30.Т.У. Пусть H_1 и H_2 — две подгруппы конечной группы G, имеющие порядки соответственно m_1 и m_2. Доказать, что множество H_1H_2 состоит из $\frac{m_1 m_2}{d}$ элементов, где d есть порядок пересечения подгрупп H_1 и H_2.

4.1.31. Показать, что знакопеременная группа четвертой степени A_4 не имеет подгрупп шестого порядка.

Примечание. Сопоставить с 4.1.20.

§ 2. Отношение сопряженности в группах

Если для элементов a и b группы G найдется элемент $x \in G$ такой, что $x^{-1}ax = b$, то говорят, что элемент b *сопряжен* с a (очевидно, в этом случае и a в свою очередь сопряжен с b, ибо $a = (x^{-1})^{-1} b\ (x^{-1})$). Множество K элементов из G такое, что каждые два элемента из K сопряжены между собою и никакой элемент из K не сопряжен ни с каким из элементов, лежащих вне K, назы-

вается *классом сопряженных элементов* группы G. Два подмножества M_1, $M_2 \subset G$ называются *сопряженными*, если найдется такой $x \in G$, что $x^{-1}M_1x = M_2$ (а потому и $(x^{-1})^{-1} M_2 (x^{-1}) = M_1$).

Для подмножества M группы G совокупность всех элементов $x \in G$, перестановочных с M,

$$xM = Mx$$

называется *нормализатором* M. В случае, когда M состоит из одного элемента a, нормализатор M называется нормализатором элемента a.

Так как отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности (см. 4.2.1), то совокупность всех элементов, сопряженных с данным, оказывается классом сопряженных элементов. Поэтому множество всех элементов группы распадается на непересекающиеся классы сопряженных элементов.

Пусть в конечной группе порядка n имеется m классов сопряженных элементов, и пусть число элементов в каждом из этих классов равно соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Тогда в силу сказанного имеет место равенство

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m.$$

В этом равенстве часто бывает целесообразно особо выделить слагаемые k_i, равные единице. Как будет выяснено в дальнейшем (см. 4.2.18), элементы, принадлежащие центру, и только они, обладают тем свойством, что класс элементов, сопряженных с данным элементом, состоит только из самого этого элемента. Поэтому последнему равенству можно придать вид

$$n = c + k_1 + k_2 + \ldots + k_s;$$

здесь c — порядок центра, а все k_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ больше единицы. При применении этого равенства полезно будет учитывать 4.2.10.

4.2.1.Т. Доказать, что отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности.

4.2.2. Если элементы группы x и y сопряжены, то их порядки равны. Доказать.

4.2.3. Если два подмножества M_1 и M_2 конечной группы сопряжены, то число элементов M_1 равно числу элементов M_2. Доказать.

4.2.4. Элементы симметрической группы третьей степени S_3 распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.5. Элементы группы кватернионов (см. 2.6.39) распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.6. Показать, что подстановки

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

сопряжены между собою в симметрической группе S_6, и найти число таких $z \in S_6$, что

$$z^{-1}xz = y.$$

4.2.7.Т. Пусть N — нормализатор множества M в группе G. Доказать, что N является подгруппой G.

4.2.8. В группе всех вещественных неособенных матриц второго порядка найти нормализаторы следующих элементов:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.9.Т. Пусть N — нормализатор множества M в группе G. Дано левое разложение G по N:

$$G = Nx_\alpha \cup Nx_\beta \cup \ldots \cup Nx_\xi \cup \ldots$$

Доказать, что все множества

$$x_\alpha^{-1}Mx_\alpha, \; x_\beta^{-1}Mx_\beta, \; \ldots, \; x_\xi^{-1}Mx_\xi, \; \ldots$$

различны и что всякое множество, сопряженное с M, совпадает с одним из $x_\xi^{-1}Mx_\xi$ ($\xi = \alpha, \beta, \ldots$).

4.2.10.Т.У. В конечной группе порядка n число ее подмножеств, сопряженных с данным подмножеством M, равно $\frac{n}{m}$, где m — порядок нормализатора множества M. Доказать.

Примечание. Из 4.2.10 непосредственно вытекает важное следствие: в конечной группе число элементов во всяком классе сопряженных элементов является делителем порядка группы.

4.2.11. Порядок конечной группы G равен n, порядок элемента $x \in G$ равен m, число элементов, сопряженных с x, равно k. Доказать, что k является делителем целого числа $\frac{n}{m}$.

4.2.12. Пусть k — число элементов в некотором классе сопряженных элементов конечной группы G; порядок G равен n и порядок ее центра равен c. Доказать, что k является делителем целого числа $\frac{n}{c}$.

4.2.13. Найти все конечные группы, которые обладают только двумя классами сопряженных элементов.

4.2.14. В множестве пар целых чисел (n, m) действие умножения определено по правилу:

$$(n_1, m_1)(n_2, m_2) = (n_1 + n_2, (-1)^{n_2} m_1 + m_2).$$

Доказать, что относительно приведенного действия это множество образует группу. Для каждого элемента x найти его нормализатор и определить число элементов, сопряженных с x.

4.2.15. Пусть в группе G подгруппа N является нормализатором элемента a. Показать, что для любого $x \in G$ нормализатором элемента $x^{-1}ax$ будет $x^{-1}Nx$.

4.2.16. Пусть x — элемент конечной группы G и k — число элементов, сопряженных с x в G; пусть k' — число элементов, сопряженных с x^n в G. Доказать, что k' является делителем числа k.

4.2.17.Т. Доказать, что подгруппа A группы G тогда и только тогда не имеет в G других сопряженных с ней подмножеств, кроме самой себя, когда A является нормальным делителем в G.

4.2.18.Т. Доказать, что элемент z группы G тогда и только тогда не имеет других сопряженных с ним элементов, кроме самого z, когда z принадлежит центру.

4.2.19. В симметрической группе степени n подстановки x и y разложены на независимые циклы:

$$x = (\alpha_{11} \ldots \alpha_{1k_1})(\alpha_{21} \ldots \alpha_{2k_2}) \ldots (\alpha_{p1} \ldots \alpha_{pk_p}) \quad (k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_p);$$
$$y = (\beta_{11} \ldots \beta_{1l_1})(\beta_{21} \ldots \beta_{2l_2}) \ldots (\beta_{q1} \ldots \beta_{ql_q}) \quad (l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_q).$$

Доказать, что x и y будут сопряжены в S_n тогда и только тогда, когда типы их разложений одинаковы, т. е. $p = q$ и $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_p = l_p$.

4.2.20. Элементы симметрической группы S_4 распределить по классам сопряженных элементов.

4.2.21. Элементы знакопеременной группы A_4 распределить по классам сопряженных элементов в A_4.

Примечание. Результат сопоставить с 4.2.20.

4.2.22. Выяснить, какие из следующих матриц сопряжены между собой в группе всех вещественных неособенных квадратных матриц второго порядка:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.23. Пусть K_1, K_2, K_3 — три класса сопряженных элементов некоторой группы. Доказать, что при $K_1 \cap K_2K_3 \neq \emptyset$ всегда имеет место $K_1 \subset K_2K_3$.

4.2.24.У. Пусть K_1, K_2, K_3 — три класса сопряженных элементов некоторой конечной группы, причем $K_1 = K_2K_3$. Число элементов в каждом из этих классов соответственно равно k_1, k_2, k_3. Доказать, что k_1 является делителем произведения k_2k_3.

4.2.25.Т. Пусть H — подгруппа группы G и $x \in G$. Доказать, что $x^{-1}Hx$ также является подгруппой группы G.

4.2.26.У. Пусть H_1 и H_2 — две подгруппы конечной группы G, имеющие порядки соответственно m_1 и m_2. Доказать, что множество H_1xH_2 состоит из $\frac{m_1m_2}{d}$ элементов, где d — порядок пересечения подгрупп $x^{-1}H_1x$ (см. 4.2.25) и H_2 группы G.

4.2.27.Т.У. Пусть для конечной группы G дано ее разложение по паре подгрупп (F, H) (см. § 1):

$$G = Fx_1H \cup Fx_2H \cup \ldots \cup Fx_mH.$$

Порядок G равен n, порядок F равен a, порядок H равен b, порядок пересечения подгрупп $x_i^{-1}Fx_i$ (см. 4.2.25) и H равен d_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Доказать, что

$$n = \frac{ab}{d_1} + \frac{ab}{d_2} + \ldots + \frac{ab}{d_m}.$$

§ 3. Нормальные делители и фактор-группы

Согласно определению, данному в § 6 гл. II, подгруппа H группы G называется ее *нормальным делителем*, если для каждых $x \in H$ и $a \in G$ произведение $a^{-1}xa \in H$.

Было доказано (см. 2.6.35), что подгруппа H группы G является ее нормальным делителем тогда и только тогда, когда для каждого $x \in G$ выполняется равенство $xH = Hx$.

Пусть M — подмножество группы G. Пересечение всех нормальных делителей G, каждый из которых содержит множество M, является нормальным делителем G (см. 2.6.37). Этот нормальный делитель H_M содержит множество M, и сам содержится в любом нормальном делителе G, содержащем M. Поэтому H_M называют *минимальным нормальным делителем*, содержащим множество M, или еще говорят, что H_M есть нормальный делитель, порожденный множеством M.

Следует иметь в виду, что нормальный делитель, порожденный множеством M, содержит подгруппу $[M]$, но в общем случае отличен от нее.

Пусть H — нормальный делитель группы G; тогда множество правых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов (см. 4.3.12). Эту группу называют *фактор-группой* группы G по нормальному делителю H и обозначают через G/H.

Рассматривая множество левых смежных классов по H, получим ту же самую группу (см. 4.3.13).

Фактор-группы играют в теории групп исключительно важную роль вследствие их связи с гомоморфизмами групп. Именно, фактор-группа группы G по любому нормальному делителю является гомоморфным образом G и обратно, если G' — гомоморфный образ G, то G' изоморфна некоторой фактор-группе G (см. 4.3.26, 4.3.28).

Пусть H — подгруппа группы G. Обозначим через ρ_H бинарное отношение в G, определенное следующим образом: $(x, y) \in \rho_H$, если $xH = yH$.

4.3.1. Найти все нормальные делители симметрической группы S_3.

4.3.2. Выяснить, какие нормальные делители порождаются каждым из следующих подмножеств симметрической группы S_4:

$$M_1 = [(12), (1324)]_g, \qquad M_2 = \{e, (123), (132)\}, \qquad M_3 = \{e\}.$$

4.3.3. Выяснить, является ли нормальным делителем группы всех самосовмещений n-угольного диэдра ($n \neq 4$) подмножество всех вращений диэдра вокруг его оси (см. 3.5.22).

4.3.4. Доказать, что группа Клейна является нормальным делителем симметрической группы S_4 (см. 3.3.18).

4.3.5.У. Доказать, что в группе G вещественных неособенных матриц n-го порядка множество N матриц с единичным определителем является нормальным делителем.

4.3.6. Доказать, что в любой группе подгруппа индекса 2 является нормальным делителем.

4.3.7. Доказать, что знакопеременная группа n-й степени является нормальным делителем симметрической группы n-й степени.

4.3.8. Пусть G — мультипликативное множество всевозможных троек целых чисел, действие в котором определено следующим образом:

$$(k_1, k_2, k_3)(l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3).$$

Проверить, что G — группа, и доказать, что подгруппа $H=[(1, 0, 0)]$ является нормальным делителем G.

4.3.9. Доказать, что в коммутативной группе каждая подгруппа является нормальным делителем.

Примечание. Существуют и некоммутативные группы с таким свойством. Например, группа кватернионов (см. 2.6.39).

4.3.10.Т. Пусть H — подгруппа группы G, и пусть $H_x=xHx^{-1}$ ($x\in G$), а N — пересечение всех таких подгрупп H_x. Доказать, что:

1) N — нормальный делитель G;

2) N — максимальный среди нормальных делителей группы G, содержащихся в H (если нормальный делитель $N_1\subset H$, то $N_1\subset N$).

4.3.11. Пусть N — нормальный делитель G. Доказать, что для любых элементов x, $y\in G$ выполняется равенство

$$(xN)(yN)=xyN.$$

4.3.12.Т.У. Пусть H — нормальный делитель группы G. Доказать, что множество G/H правых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов. Найти единицу этой группы и для каждого элемента xH указать обратный.

Примечание. Как было указано во введении, G/H называют фактор-группой группы G по нормальному делителю H.

4.3.13. Пусть H — нормальный делитель группы G. Доказать, что множество левых смежных классов группы G по подгруппе H является группой относительно действия умножения классов и что эта группа совпадает с фактор-группой G/H.

4.3.14. Пусть G — группа, E — ее единичная подгруппа. Что представляют собой фактор-группы G/G, G/E?

4.3.15. Доказать, что фактор-группа симметрической группы S_4 по группе Клейна изоморфна симметрической группе S_3 (см. 3.3.18).

4.3.16. Доказать, что если G, N — группы из задачи 4.3.5, то фактор-группа G/N изоморфна мультипликативной группе вещественных чисел, отличных от нуля.

4.3.17.У. Пусть G' — группа из задачи 3.2.19, 4). Доказать, что группа N параллельных переносов плоскости является нормальным делителем G' и что фактор-группа G'/N

изоморфна группе всех вращений плоскости вокруг некоторой фиксированной точки.

4.3.18.Т. Пусть H — нормальный делитель группы G, порядок G равен n, порядок H равен m. Доказать, что порядок G/H равен $\frac{n}{m}$.

4.3.19. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что отношение ρ_H является стабильной слева эквивалентностью (см. гл. II, § 4).

4.3.20. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что отношение ρ_H является двусторонне стабильной эквивалентностью тогда и только тогда, когда H — нормальный делитель G (см. предыдущую задачу).

Примечание. Используя задачу 2.4.14, отсюда получаем, что G/ρ_H является мультипликативным множеством тогда и только тогда, когда H — нормальный делитель G.

4.3.21. Пусть H — нормальный делитель G. Доказать, что фактор-множество G/ρ_H есть группа и что эта группа совпадает с фактор-группой G/H.

4.3.22. Пусть G, H — группы из задачи 4.3.8. Доказать, что фактор-группа G/H изоморфна аддитивной группе целых гауссовых чисел, т. е. чисел вида $a+bi$, где a, b — целые рациональные числа.

4.3.23. Пусть G, H — группы из задачи 3.2.16. Доказать, что фактор-группа G/H изоморфна фактор-группе, определенной в задаче 4.3.16.

4.3.24. Пусть G_2, H — группы из задачи 3.4.29. Доказать, что группы G_2/H и H изоморфны.

4.3.25.У. Доказать, что симметрическая группа S_3 является гомоморфным образом симметрической группы S_4.

4.3.26.Т.У. Пусть N — нормальный делитель группы G. Доказать, что фактор-группа G/N является гомоморфным образом G.

4.3.27.Т.У. Пусть φ — гомоморфизм группы G на группу G'. Доказать, что:

1) подмножество N группы G, состоящее из всех элементов, отображающихся на единицу G' при гомоморфизме φ, является нормальным делителем G;

2) множество всех элементов G, отображающихся при гомоморфизме φ на некоторый элемент $g' \in G'$, есть правый смежный класс группы G по подгруппе N.

Примечание. Нормальный делитель N называется *ядром гомоморфизма* φ группы G.

4.3.28.Т.У. Пусть группа G гомоморфно отображается на группу G'. Доказать, что G' изоморфна некоторой фактор-группе группы G.

Примечание. Сопоставить результаты задач 4.3.26, 4.3.28 с результатами задач 2.4.18 — 2.4.20.

4.3.29. Пусть G — некоммутативная группа, Z — ее центр. Доказать, что фактор-группа G/Z нециклическая.

4.3.30.Т. Пусть N — нормальный делитель группы G, а H — подгруппа G. Пусть $\bar{H}$ — подмножество G/N, состоящее из тех классов, в каждый из которых входит хотя бы один элемент из H. Доказать, что:

1) $\bar{H}$ — подгруппа фактор-группы G/N;

2) если $H \supset N$, то N — нормальный делитель H и $\bar{H} = H/N$.

4.3.31.Т. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что если H — нормальный делитель группы G, то $\bar{H}$ — нормальный делитель группы G/N.

4.3.32. Пусть G, N — группы из задачи 4.3.5. Пусть H_1 — подгруппа G, состоящая из треугольных матриц, в которых ниже главной диагонали стоят нули, а H_2 — подгруппа H_1, состоящая из всех матриц с определителями ± 1. В обозначениях задачи 4.3.30 найти $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$.

4.3.33.Т. Пусть $\bar{H}$ — подгруппа фактор-группы G/N. Доказать, что:

1) подмножество H группы G, являющееся объединением всех смежных классов, входящих в $\bar{H}$, является подгруппой G, содержащей N;

2) если $\bar{H}$ — нормальный делитель G/N, то H — нормальный делитель группы G.

4.3.34. Используя 4.3.33, 4.3.15, найти все подгруппы симметрической группы S_4, содержащие группу Клейна (см. 3.3.18). Какие из этих подгрупп являются нормальными делителями S_4?

4.3.35. Пусть φ — гомоморфизм группы G_1 на группу G_2. Доказать, что:

1) если группа G_2 некоммутативна, то и группа G_1 некоммутативна;

2) если G_2 бесконечна, то и G_1 бесконечна;

3) если для некоторого $a \in G_1$ элемент $\varphi(a)$ имеет бесконечный порядок, то и элемент a имеет бесконечный порядок.

4.3.36. Пусть G — группа, A — некоторая совокупность обратимых преобразований множества элементов G, являющихся изоморфизмами G на себя; A относительно умножения преобразований является группой. Обозначим через H совокупность всевозможных пар вида (x, φ), где $\varphi \in A$, $x \in G$. В H определим действие

$$(x_1, \varphi_1)(x_2, \varphi_2) = (x_1\varphi_1(x_2), \varphi_1\varphi_2).$$

Доказать, что H есть группа, а совокупность G', состоящая из всех пар вида (x, ε) $(x \in G)$, где ε — единичное преобразование G, образует нормальный делитель группы H, изоморфный группе G, причем фактор-группа H/G' изоморфна A.

§ 4. Подгруппы конечных групп

Если все элементы группы G имеют конечные порядки, являющиеся степенями одного и того же простого числа p, то говорят, что G является p-группой.

Если порядок конечной группы G делится на p^k $(k > 0)$, где p — простое число, и не делится на p^{k+1}, то всякая подгруппа группы G, имеющая порядок p^k (о том, что такие всегда найдутся, см. 4.4.6), называется *силовской подгруппой группы G относительно простого числа p* или просто *силовской p-подгруппой* группы G.

4.4.1.Т.У. Доказать, что всякая группа, порядок которой равен p^n, где p — простое число и $n > 0$, обладает нетривиальным центром (т. е. порядок ее центра больше 1).

4.4.2.У. Доказать, что для всякого простого числа p существует единственная с точностью до изоморфизма нециклическая группа порядка p^2. При этом группа коммутативна.

4.4.3.У. Пусть порядок конечной группы делится на простое число p. Доказать, что в группе имеются элементы порядка p.

4.4.4.Т.У. Доказать, что порядок всякой конечной p-группы является некоторой степенью простого числа p.

4.4.5.У. Доказать, что всякая абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, циклическая.

4.4.6.Т.У. Пусть порядок произвольной конечной группы делится на p^k, где p — простое число. Доказать, что в группе имеются подгруппы порядка p^k.

Примечание. В частности, отсюда следует существование в конечной группе силовских p-подгрупп для любого простого p, делящего порядок группы.

4.4.7.У. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G и N — ее нормализатор. Доказать, что все элементы N, порядки которых — некоторые степени числа p, содержатся в P.

4.4.8. Найти все силовские подгруппы симметрической группы S_4.

4.4.9. Пусть $G_1 = [x]$ — циклическая группа десятого порядка и $G_2 = [y]$ — циклическая группа четвертого порядка. Через G обозначается множество, состоящее из 40 пар (g_1, g_2) $(g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2)$ с правилом умножения

$$(x^{a_1}, y^{b_1})(x^{a_2}, y^{b_2}) = (x^{a_1 + 3^{b_1} a_2}, y^{b_1 + b_2}).$$

Доказать, что G есть группа. Найти все ее силовские подгруппы.

4.4.10.Т.У. Доказать, что в конечной группе всякие две силовские подгруппы относительно одного и того же простого числа p сопряжены между собою.

4.4.11.Т.У. Пусть простое число p — делитель порядка конечной группы G и s — число различных силовских подгрупп относительно числа p.

Доказать, что s является делителем порядка группы и имеет вид $s = 1 + kp$, где k — некоторое целое неотрицательное число.

4.4.12.У. Доказать, что всякая конечная нециклическая группа шестого порядка изоморфна симметрической группе S_3.

4.4.13. Пусть порядок конечной группы равен pq, где p и q — не равные между собою простые числа. Доказать, что группа имеет нормальный делитель, порядок которого есть простое число.

4.4.14.У. Пусть порядок конечной группы равен pq, где p и q — простые числа, причем $p < q$. Если $q - 1$ не делится на p, то группа циклическая. Доказать.

4.4.15. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G; N_P — нормализатор подгруппы P и H — такая подгруппа G, что $H \supset N_P$. Доказать, что нормализатор подгруппы H совпадает с самой H.

4.4.16. Пусть N — нормальный делитель группы G конечного порядка. Простое число p является делителем порядка

G, но не является делителем индекса N в G (см. § 1 гл. IV). Доказать, что все силовские p-подгруппы группы G содержатся в N.

4.4.17. Доказать, что всякая группа порядка 50 имеет собственный нормальный делитель.

4.4.18.Т.У. Пусть H — подгруппа конечной группы G, причем порядок H равен p^k, где p — некоторое простое число. Доказать, что H содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы G.

4.4.19.У. Пусть в конечной группе для каждого простого числа p, делящего порядок группы, существует лишь единственная силовская p-подгруппа. Доказать, что группа обладает нетривиальным центром.

4.4.20.У. Доказать, что в конечной p-группе для любого числа m, являющегося делителем порядка группы, найдется нормальный делитель, имеющий порядок m.

Примечание. Следует обратить внимание, что в произвольной конечной группе не для всякого числа m, являющегося делителем ее порядка, найдется подгруппа порядка m (см. 4.1.31).

§ 5. Коммутаторы и коммутант

Каждой паре элементов x и y группы G можно сопоставить элемент $x^{-1}y^{-1}xy$. Такой элемент называется *коммутатором* элементов x и y и обозначается через $k(x, y)$ или просто (x, y) (каковое обозначение и будет применяться в настоящем параграфе):

$$(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$$

(в математической литературе также используется обозначение $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$).

Подгруппа группы G, порожденная всеми ее коммутаторами, называется *коммутантом* группы.

4.5.1. Для произвольных элементов группы x и y проверить равенство

$$xy = yx(x, y).$$

Примечание. Это равенство объясняет роль коммутаторов. Коммутатор является как бы «поправкой» на неперестановочность элементов x и y. «С точностью до соответствующего коммутатора» x и y перестановочны. Равенство $(x, y) = e$ означает, что x и y перестановочны.

4.5.2. Каковы коммутаторы абелевой группы?

4.5.3. Пусть в группе все коммутаторы равны e. Показать, что группа абелева.

Примечание. Сопоставьте результаты задач 4.5.2 и 4.5.3.

4.5.4. Пусть элемент z группы G является некоторым ее коммутатором. Показать, что при любом $x \in G$ элемент $x^{-1}zx$ также будет коммутатором.

4.5.5. Доказать, что $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

4.5.6. В симметрической группе S_n $(n \leqslant 4)$ для элементов

$$x_1 = (1\ 2), \quad x_2 = (1\ 2\ 3), \quad x_3 = (1\ 2\ 3\ 4), \quad y = (1\ 3)(2\ 4)$$

найти коммутаторы

$$(x_1, x_2), \quad (x_1, x_3), \quad (x_1, y),$$
$$(x_2, x_1), \quad (x_3, x_1), \quad (y, x_1).$$

4.5.7. Какие элементы в группе кватернионов (см. 2.6.39) являются коммутаторами?

4.5.8. В группе целочисленных матриц второго порядка с определителем, равным ± 1, для элементов

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы (x, y), (y, z), (z, x).

4.5.9. В группе квадратных неособенных матриц третьего порядка для элементов

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы (u, v), (v, w), (w, u).

4.5.10. В симметрической группе S_n (где $n \geqslant 5$) для тройных циклов $x = (\mu, \gamma, \beta)$ и $y = (\alpha, \beta, \nu)$ (здесь α, β, γ, μ, ν — любые попарно различные между собою числа) найти их коммутатор (x, y).

4.5.11.Т. Доказать, что коммутант всегда является нормальным делителем группы.

4.5.12.Т. Доказать, что фактор-группа группы по ее коммутанту всегда абелева.

4.5.13.Т. Пусть N — некоторый нормальный делитель группы G. Доказать, что фактор-группа G/N будет абелевой тогда и только тогда, когда N содержит коммутант группы.

Примечание. Это означает, что коммутант является универсально минимальным элементом в множестве тех нормальных делителей группы, фактор-группа по которым абелева (множество рассматривается как упорядоченное по отношению к включению).

4.5.14.У. Найти коммутант симметрической группы S_n.

4.5.15. Пусть $\{x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ — некоторое порождающее множество группы G и N — такой ее нормальный делитель, который содержит все (x_ξ, x_η).

Доказать, что N содержит коммутант группы G.

4.5.16. Пусть в группе G коммутант содержится в центре группы. Доказать, что для любых $x, y, z \in G$ имеют место

$$(xy, z) = (x, z)(y, z),$$
$$(x, yz) = (x, y)(x, z),$$
$$(x^n, y) = (x, y^n) = (x, y)^n,$$
$$(xy)^n = x^n y^n (y, x)^{\frac{1}{2}n(n-1)},$$
$$(x, (y, z))(y, (z, x))(z, (x, y)) = e.$$

4.5.17.У. Доказать, что во всякой неединичной конечной p-группе коммутант отличен от самой группы.

4.5.18.У. Пусть в конечной группе порядок коммутанта равен двум. Доказать, что тогда индекс коммутанта — четное число.

4.5.19.У. Пусть дана последовательность групп, в которой каждая из групп является подгруппой следующей:

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots$$

Доказать, что объединение их $H = \bigcup_n G_n$ является группой и что коммутант группы H равен объединению коммутантов групп G_n.

4.5.20. Пусть N — нормальный делитель группы G. Показать, что всевозможными коммутаторами фактор-группы G/N являются смежные классы вида kN, где k — коммутатор группы G.

4.5.21. Найти коммутант группы, состоящей из всех вращений плоскости вокруг всевозможных ее точек и всех параллельных переносов плоскости (см. 3.2.19, 4)).

4.5.22.У. Найти коммутант группы всех квадратных неособенных матриц второго порядка.

§ 6. Разрешимые группы

Для всякой группы G определяется последовательность ее подгрупп, называемая рядом ее последовательных коммутантов:

$$G=K_0\supset K_1\supset\ldots\supset K_{n-1}\supset K_n\supset\ldots;$$

где каждая K_n есть коммутант группы K_{n-1}.

Если некоторый член ряда последовательных коммутантов является единичной подгруппой $K_m=e$, то группа G называется *разрешимой*. Из $K_m=e$, очевидно, следует, что и все последующие члены состоят лишь из единицы: $e=K_m=K_{m+1}=K_{m+2}=\ldots$ В этом случае говорят, что ряд последовательных коммутантов *достигает* единичной подгруппы и ***стабилизируется*** на ней.

Для конечной неразрешимой группы, очевидно, на некотором шаге должно встретиться $K_n=K_{n+1}\neq e$. Тем самым и для всех последующих членов имеет место $K_n=K_{n+1}=K_{n+2}=\ldots$, т. е. ряд последовательных коммутантов стабилизируется на некоторой неединичной подгруппе.

Для бесконечной неразрешимой группы ряд последовательных коммутантов может или стабилизироваться на некоторой неединичной подгруппе или не стабилизироваться ни на какой из подгрупп.

Существует ряд эквивалентных между собою определений разрешимой группы. Некоторые из них будут получены в последующих задачах как необходимые и достаточные условия разрешимости, понимаемой в смысле приведенного выше определения.

Понятие разрешимой группы является одним из важнейших в теории групп. Это определяется как ролью в самой теории групп, так и значением в теории разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, которая опирается на теорию конечных групп.

4.6.1. Доказать, что всякая абелева группа разрешима.

4.6.2. Доказать, что группа кватернионов (см. 2.6.39) разрешима.

4.6.3.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка pq, где p и q — простые числа (различные или одинаковые), разрешима.

4.6.4.Т. Для того чтобы группа G была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы она обладала такой конечной последовательностью подгрупп:

$$G=H_1\supset H_2\supset\ldots\supset H_{m-1}\supset H_m=e,$$

в которой каждый член H_k содержит все коммутаторы предшествующей подгруппы H_{k-1}. Доказать.

Примечание. Именно этим условием удобнее всего пользоваться во многих случаях при выяснении вопроса о разрешимости группы.

4.6.5.Т.У. Доказать, что симметрические группы S_n при $n=1, 2, 3, 4$ разрешимы.

4.6.6.Т.У. Доказать, что симметрические группы S_n при $n=5, 6, 7, \ldots$ неразрешимы.

4.6.7.Т.У. Доказать, что всякая подгруппа разрешимой группы разрешима.

4.6.8.Т.У. Доказать, что фактор-группа разрешимой группы по любому ее нормальному делителю разрешима.

4.6.9.Т.У. Пусть некоторая группа G обладает таким нормальным делителем N, что группы N и G/N обе разрешимы. Доказать, что тогда и G разрешима.

4.6.10.Т. *Нормальным рядом* группы G называется такая конечная последовательность ее подгрупп

$$G=F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_{n-1}\supset F_n=e,$$

в которой каждый член является собственным нормальным делителем предыдущего.

Если группа обладает таким нормальным рядом, у которого все фактор-группы F_{k-1}/F_k абелевы, то она разрешима. Доказать.

4.6.11.Т. Доказать, что всякая разрешимая группа обладает таким нормальным рядом (см. 4.6.10), у которого все фактор-группы F_{k-1}/F_k абелевы.

Примечание. Результат сопоставить с 4.6.10.

4.6.12.Т. Нормальный ряд группы G (см. 4.6.10) называется композиционным, если каждый его член есть максимальный (по включению) собственный нормальный делитель предыдущего члена.

Другими словами, это означает, что в G не существует такой группы F', которая есть нормальный делитель некоторого члена ряда F_i, и при этом

$$F_i\supset F'\supset F_{i+1},\quad F'\neq F_i,\quad F'\neq F_{i+1}.$$

Пусть порядок n конечной группы G есть произведение m простых чисел: $n=p_1p_2\ldots p_m$ (p_i могут быть и одинаковыми, и различными). Если G обладает нормальным рядом, состоящим из $m+1$ членов, то этот ряд будет композиционным, а G будет разрешимой. Доказать.

Что представляют собою в рассматриваемом случае фактор-группы F_i/F_{i+1}?

4.6.13.Т.У. Доказать, что конечная разрешимая группа порядка $g=p_1p_2\ldots p_m$ (где p_i — различные или одинаковые простые числа) обладает композиционными рядами и каждый из них состоит из $m+1$ членов.

Примечание. Результат сопоставить с 4.6.12.

4.6.14.Т.У. Доказать, что всякая конечная p-группа (т. е. группа порядка p^n, где p — простое число) разрешима.

4.6.15.У. Выяснить, при каких n будет разрешима знакопеременная подгруппа A_n симметрической группы S_n.

4.6.16. В множестве $G=\{\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ определено действие, согласно которому

$$z_nz_m=\begin{cases}z_{n+m}, & \text{если } n \text{ четное;}\\ z_{n-m}, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Доказать, что относительно этого действия G является группой. Выяснить, будет ли эта группа разрешимой.

4.6.17. В множестве бесконечных последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \ldots)$ определено действие, согласно которому

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)=$$
$$=(a_1+b_1, (-1)^{b_1}a_2+b_2, (-1)^{b_1+b_2}a_3+b_3, \ldots$$
$$\ldots, (-1)^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}a_n+b_n, \ldots).$$

Доказать, что относительно этого действия G является группой. Выяснить, будет ли эта группа разрешимой.

4.6.18.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка 275 разрешима.

4.6.19.У. Доказать, что всякая конечная группа порядка 100 разрешима.

4.6.20.У. Доказать, что группа G из задачи 3.2.19, 4) разрешима.

§ 7. Нильпотентные группы

Наравне с рядом коммутантов, рассмотренным в предыдущем параграфе, значительную роль играют следующие две системы подгрупп группы.

Верхним центральным рядом группы G называется последовательность ее подгрупп

$$Z_0=e\subset Z_1\subset Z_2\subset\ldots\subset Z_n\subset Z_{n+1}\subset\ldots,$$

в которой Z_{n+1} ($n=0, 1, 2, \ldots$) — множество таких элементов $x \in G$, что xZ_n является центральным элементом в фактор-группе G/Z_n (Z_n при всех n являются нормальными делителями в G; см. 4.7.1). Возможен случай, когда при некотором n имеет место $Z_n = Z_{n+1}$. Тогда, конечно, выполняется $Z_n = Z_{n+1} = Z_{n+2} = \ldots$, как говорят, ряд *стабилизируется* на Z_n. Это Z_n, на котором стабилизировался верхний центральный ряд, может совпадать с самой G; тогда говорят, что верхний центральный ряд *достигает* самой группы. Возможен случай, когда этот ряд стабилизируется на некоторой подгруппе Z_n, отличной от G. Наконец, у некоторых бесконечных групп каждая Z_n может быть отлична от Z_{n+1}, т. е. ряд вовсе не стабилизируется.

Если верхний центральный ряд группы G достигает самой G, то группа G называется *нильпотентной* (в более старой литературе конечные нильпотентные группы назывались также специальными). Если при этом Z_n — первый член верхнего центрального ряда, равный G, то n называется *классом нильпотентности* для нильпотентной группы G.

Нижним центральным рядом группы G называется последовательность подгрупп

$$H_0 = G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset H_{n+1} \supset \ldots,$$

в которой H_{n+1} ($n=0, 1, 2, \ldots$) — подгруппа G, порожденная всеми коммутаторами $x^{-1}y^{-1}xy$, у которых $x \in H_n$, $y \in G$.

Значение нижнего центрального ряда, некоторые его свойства и связь между обоими центральными рядами выяснятся в последующих упражнениях.

4.7.1.Т. Доказать, что каждый член верхнего центрального ряда группы является ее нормальным делителем.

4.7.2. Доказать, что абелевы группы являются нильпотентными. Выяснить их класс нильпотентности.

4.7.3. Выяснить, какие из следующих групп являются нильпотентными. Выяснить их классы нильпотентности:

1) конечные симметрические группы S_n ($n=1, 2, 3, \ldots$);
2) группа кватернионов (см. 2.6.39);
3) группа из задачи 2.6.38;
4) группа $G=[(1\ 2\ 3\ 4);\ (1\ 2\ 3);\ (2\ 5);\ (5\ 6)]$;
5) группа $G=[(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8);\ (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 2);\ (9\ 10\ 11)]$.

4.7.4.У. Доказать, что класс нильпотентности конечной нильпотентной группы, порядок которой есть произведение k простых чисел (равных или различных), не превосходит $k-1$.

4.7.5.Т. Доказать, что всякая нильпотентная группа разрешима.

4.7.6. Для группы кватернионов G (см. 2.6.39) преобразование

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k \\ 1 & -1 & j & -j & -i & i & k & -k \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом G на себя. Совокупность $A = \{\varepsilon, \varphi, \varphi^2, \varphi^3\}$ (где $\varepsilon = \varphi^0$ есть единичное преобразование) образует группу.

Построив для G и H методом 4.3.36 группу H, найти нижний и верхний центральные ряды H.

4.7.7. Доказать, что член Z_n верхнего центрального ряда группы G содержит все коммутаторы $x^{-1}y^{-1}xy$, у которых $x \in Z_{n+1}$, $y \in G$.

4.7.8.Т.У. Если верхний центральный ряд группы G на n-м шаге достигает самой группы $Z_n = G$, то нижний центральный ряд на n-м шаге достигает единичной подгруппы $H_n = e$. Доказать.

4.7.9.Т.У. Если нижний центральный ряд группы G на n-м шаге достигает единичной подгруппы $H_n = e$, то верхний центральный ряд на n-м шаге достигает самой группы $Z_n = G$. Доказать.

4.7.10.Т.У. Доказать, что у нильпотентной группы длины верхнего и нижнего центральных рядов одинаковы.

Примечание. Из 4.7.8, 4.7.9 и 4.7.10 вытекает, что для определения нильпотентной группы и для определения класса нильпотентности можно было бы исходить из нижнего центрального ряда.

4.7.11. Пусть коммутант некоммутативной группы G лежит в ее центре. Доказать, что G нильпотентна. Определить класс ее нильпотентности.

4.7.12.Т. Доказать, что всякая подгруппа нильпотентной группы сама нильпотентна.

4.7.13.Т. Доказать, что фактор-группа нильпотентной группы по любому ее нормальному делителю сама нильпотентна.

4.7.14.Т.У. Доказать, что всякая конечная p-группа нильпотентна.

4.7.15.У. Выяснить, какие из следующих групп являются нильпотентными. Выяснить их классы нильпотентности:

1) группа $G_1 = [(1\ 2\ 3);\ (4\ 5);\ (1\ 2)]$;

2) группа $G_2 = [(1\ 8\ 3\ 6)(2\ 7\ 4\ 5);\ (9\ 15\ 11\ 13)(10\ 14\ 12\ 16);\ (1\ 6\ 3\ 8)(2\ 8\ 4\ 7)(9\ 12\ 11\ 10)(13\ 16\ 15\ 14)]$;

3) группа $G_3 = [(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 9);\ (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 9\ 4\ 6);\ (8\ 10\ 11);\ (1\ 2\ 3\ 4);\ (1\ 3\ 2)]$;

4) группа $G_4 = [(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 16\ 15\ 11);\ (1\ 11)(2\ 15)(3\ 16)(4\ 14)(5\ 13)(6\ 12)(7\ 10)(8\ 9)]$.

4.7.16.У. Пусть G_i является p_i-группой ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем все простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ различны; H — множество всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in G_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). В H определено действие

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n).$$

Доказать, что H является нильпотентной группой и что класс нильпотентности H равен наибольшему из классов нильпотентности групп G_i.

Примечание. Доказано, что всякая конечная нильпотентная группа изоморфна группе, устроенной описанным способом.

4.7.17. Пусть G_i — нильпотентная группа класса k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$); H — множество всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, где $x_i \in G_i$. В H определено действие

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots).$$

Выяснить, когда H является нильпотентной группой и каков ее класс нильпотентности в этом случае.

4.7.18. Доказать, что конечная нильпотентная группа G обладает такой последовательностью своих нормальных делителей

$$G = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_{n-1} \supset N_n = e,$$

что все фактор-группы N_{k-1}/N_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) циклические.

4.7.19. Доказать, что в конечной группе совокупность ее нормальных делителей, являющихся нильпотентными группами, обладает универсально максимальным по включению элементом, т. е. нильпотентным нормальным делителем, содержащим все остальные нильпотентные нормальные делители.

4.7.20. Выяснить, когда в группе G из 4.7.17 совокупность ее нормальных делителей, являющихся нильпотентными группами, обладает универсально максимальным по включению элементом.

Примечание. Результат сопоставить с 4.7.19.

4.7.21.У. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа, и пусть группа G, имеющая порядок $p_1 p_2 p_3$, нильпотентна. Доказать, что G абелева.

§ 8. Автоморфизмы групп

Изоморфизм группы G на себя называется *автоморфизмом* группы G.

Очевидно, что такое понятие автоморфизма группы G совпадает с понятием автоморфизма множества G относительно группового действия (см. гл. III, § 4). Таким образом, автоморфизмы группы являются преобразованиями множества элементов этой группы. Как и всякие преобразования, мы иногда будем задавать автоморфизмы подстановками.

Пусть G — группа, $x \in G$. Обозначим через t_x следующее преобразование множества элементов группы G: $t_x(a) = xax^{-1}$ $(a \in G)$. Будет доказано, что для каждого $x \in G$ преобразование t_x является автоморфизмом G (см. 4.8.12), такие автоморфизмы называются *внутренними*.

Подгруппа группы G называется *характеристической*, если она отображается на себя при любом автоморфизме группы G.

4.8.1. Пусть G — аддитивная группа целых чисел. Какие из следующих преобразований u_1, u_2, u_3 являются автоморфизмами G:

1) $u_1 m = m + 1$;

2) $u_2 m = 2m$;

3) $u_3 m = -m$ $\quad (m \in G)$?

4.8.2. Пусть G — мультипликативная группа комплексных чисел. Какие из следующих преобразований являются автоморфизмами G:

1) $u_1 z = \bar{z}$ ($\bar{z}$ — число, сопряженное с z);

2) $u_2[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

3) $u_3[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$

$$= r\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]?$$

4.8.3.Т. Пусть φ — автоморфизм группы G. Доказать, что:

1) для любого элемента $a \in G$ элементы a и $\varphi(a)$ имеют один и тот же порядок;

2) $\varphi(e)=e$ (e — единица группы G);
3) $\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}$ ($a\in G$);
4) если $M=\{x_\alpha, x_\beta, \ldots\}$ — порождающее множество группы G, то и $M'=\{\varphi(x_\alpha), \varphi(x_\beta), \ldots\}$ — порождающее множество группы G;
5) всякий класс сопряженных элементов при автоморфизме φ преобразуется в класс сопряженных элементов.

4.8.4. Пусть K — группа кватернионов (см. 2.6.39). Какие из следующих подстановок являются автоморфизмами K:
1) $u_1=(-1, i)$;
2) $u_2=(1, -i)(j, -j)(k, -k)$;
3) $u_3=(i, j, k)(-1, -j, -k)$;
4) $u_4=(i, -j, k, -i, j, -k)$;
5) $u_5=(i, -1)(j, -j)$?

4.8.5. Найти группу автоморфизмов группы [(12)(34)(56); (34)].

Примечание. Обратить внимание на то, что группа автоморфизмов коммутативной группы оказалась некоммутативной.

4.8.6. Найти группу автоморфизмов бесконечной циклической группы.

4.8.7. Пусть G — циклическая группа порядка n. Доказать, что преобразование u, определенное равенством $u(x)=x^k$ ($x\in G$), является автоморфизмом группы G в том и только в том случае, если k взаимно просто с n.

4.8.8. Доказать, что преобразованиями, описанными в предыдущей задаче, исчерпываются все автоморфизмы конечной циклической группы.

4.8.9. Пусть G — группа. Доказать, что преобразование G, переводящее каждый элемент в обратный ему элемент, является автоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда G — коммутативная группа.

4.8.10.У. Доказать, что группа автоморфизмов конечной циклической группы, порядок которой больше 2, есть коммутативная группа четного порядка.

4.8.11.У. Описать группы автоморфизмов циклических групп порядков 12 и 14.

4.8.12.Т. Пусть G — группа и $x\in G$. Доказать, что преобразование t_x, согласно которому $t_x(a)=xax^{-1}$ ($a\in G$), является автоморфизмом G.

4.8.13.Т. Доказать, что множество внутренних автоморфизмов группы G является нормальным делителем группы всех автоморфизмов G.

4.8.14. В симметрической группе S_3 найти внутренние автоморфизмы t_{u_1}, t_{u_2}, где $u_1=(12)$, $u_2=(132)$.

4.8.15. В группе кватернионов (см. 2.6.39) найти внутренние автоморфизмы t_{-1}, t_{-i}, t_j.

4.8.16. Выяснить, какие группы имеют единичную группу внутренних автоморфизмов.

4.8.17. Найти порядок группы внутренних автоморфизмов группы $G=[(1234)(56), (13)]$.

4.8.18.Т. Пусть Z — центр группы G. Доказать, что группа внутренних автоморфизмов G изоморфна фактор-группе G/Z.

4.8.19. Доказать, что симметрическая группа S_n $(n\geqslant 3)$ изоморфна группе ее внутренних автоморфизмов.

4.8.20.У. Доказать, что при любом автоморфизме симметрической группы S_n $(n\geqslant 3,\ n\neq 6)$ транспозиция преобразуется в транспозицию.

4.8.21.У. Доказать, что всякий автоморфизм группы S_n $(n\geqslant 3,\ n\neq 6)$ преобразует множество различных транспозиций вида $(ij_1), (ij_2), \ldots, (ij_s)$ в множество транспозиций вида (kl_1), (kl_2), $\ldots$, (kl_s).

4.8.22.У. Доказать, что каждый автоморфизм группы S_4 внутренний. Найти порядок группы автоморфизмов S_4.

Примечание. Утверждение задачи справедливо для любой симметрической группы S_n $(n\neq 6)$. Группа S_6 имеет внешние автоморфизмы.

4.8.23. Пусть G — аддитивная группа целых гауссовых чисел (см. 4.3.22). Описать все автоморфизмы группы G.

4.8.24. Доказать, что группа автоморфизмов группы G из предыдущей задачи изоморфна группе целочисленных квадратных матриц второго порядка с определителями ± 1.

4.8.25. Пусть G' — характеристическая подгруппа группы G, и пусть u — автоморфизм G. Обозначим через $\bar{u}$ следующее преобразование G': если $g'\in G'$, то $\bar{u}(g')=ug'$. Доказать, что $\bar{u}$ — автоморфизм G'.

Примечание. Говорят, что $\bar{u}$ ***индуцирован*** автоморфизмом u.

4.8.26. Доказать, что знакопеременная группа и группа Клейна (см. 3.3.18) являются характеристическими подгруппами симметрической группы S_4.

4.8.27. Найти автоморфизмы группы Клейна (см. 3.3.18), индуцированные следующими автоморфизмами S_4:

$$t_{(12)},\quad t_{(34)},\quad t_{(1423)},\quad t_{(123)}.$$

Примечание. Обратить внимание на то, что разные автоморфизмы группы могут индуцировать одинаковые автоморфизмы характеристической подгруппы.

4.8.28.У. Доказать, что различные автоморфизмы группы S_4 индуцируют различные автоморфизмы ее знакопеременной подгруппы, и найти порядок группы автоморфизмов знакопеременной группы четвертой степени.

4.8.29. Доказать, что характеристическая подгруппа группы является ее нормальным делителем.

4.8.30. Пусть G — группа. Доказать, что следующие подгруппы G являются характеристическими:

1) сама группа G;
2) единичная подгруппа G;
3) центр группы G;
4) коммутант группы G.

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 3.4.14.

4.8.31.У. Пусть G — некоммутативная группа. Доказать, что группа автоморфизмов G не является циклической.

§ 9. Транзитивные группы преобразований

Пусть G — группа преобразований некоторого множества Ω. Группу G называют *транзитивной*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется элемент $u \in G$ такой, что $u\alpha = \beta$. Если группа G не является транзитивной, то ее называют *интранзитивной*.

В этом параграфе будем использовать следующее обозначение: если $\alpha \in \Omega$, то G_α есть подмножество всех преобразований из G, для которых α является неподвижной точкой.

Группу преобразований G множества Ω называют *импримитивной*, если: 1) она транзитивна; 2) существует собственное разбиение множества Ω на классы $M_i, M_j, \ldots$, среди которых хоть один имеет более одного элемента, такое, что для любого $u \in G$ и любого класса M_i множество $u(M_i)$ тоже является одним из этих классов.

Множества $M_i, M_j, \ldots$ называют *системами импримитивности*. Будем говорить, что эти множества образуют *ряд импримитивности*.

Если G — транзитивная группа и указанного разбиения не существует, то G называют *примитивной группой*.

Среди транзитивных групп преобразований выделяют так называемые *кратно транзитивные группы*.

Мы остановимся только на понятии дважды транзитивной групп

Пусть G — группа преобразований множества Ω. Группу называют *дважды транзитивной*, если для любых двух пар (α, β), (γ, δ), где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega$ и $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, в G найдется преобразование u такое, что $u\alpha = \gamma$, $u\beta = \delta$.

Очевидно, что дважды транзитивная группа транзитивна.

4.9.1. Пусть G — группа преобразований множества Ω, и пусть существует такой $\alpha \in \Omega$, что для каждого $\beta \in \Omega$ найдется $u \in G$, преобразующее α в β. Доказать, что G — транзитивная группа преобразований.

Примечание. Обратное утверждение очевидно. Если G — транзитивная группа преобразований, то каждый элемент α обладает указанным свойством.

4.9.2. Доказать, что симметрическая и знакопеременная группы любой степени транзитивны.

4.9.3. Пусть G — интранзитивная группа преобразований множества Ω. Доказать, что существует собственное разбиение Ω на классы M_i, M_j, ... такое, что если $\alpha \in M_i$ и $u \in G$, то $u\alpha \in M_i$; если $\alpha_1, \alpha_2 \in M_i$, то найдется такое $v \in G$, что $v\alpha_1 = \alpha_2$.

Примечание. Множества M_i, M_j, ... называют *системами интранзитивности*.

4.9.4. Какие из следующих групп транзитивны:

$$G_1 = [(123)(456), (1346)], \quad G_2 = [(1234)(56), (123)],$$
$$G_3 = [(1234)(56), (123)(567)],$$

где G_1, G_2 — группы подстановок шестой степени, а G_3 — группа подстановок седьмой степени? Для интранзитивных из них найти системы интранзитивности.

Примечание. Легко видеть, что G_2 изоморфна симметрической группе S_4. Следовательно, свойство группы быть транзитивной при изоморфизме сохраняется не всегда.

4.9.5.Т. Пусть G — транзитивная группа преобразований множества Ω, и пусть $\alpha \in G$. Доказать, что:

1) G_α — подгруппа группы G;

2) если $u\alpha = \beta$ ($u \in G$), то класс uG_α состоит из всех преобразований G, переводящих α в β.

4.9.6.У. Пусть G — транзитивная группа преобразований конечного множества Ω, состоящего из n элементов. Доказать, что индекс подгруппы G_α ($\alpha \in G$) в группе G равен n.

Примечание. Отсюда следует, что порядок транзитивной группы преобразований конечного множества, состоящего из n элементов, делится на n.

4.9.7. Пусть G — транзитивная группа преобразований множества Ω. Доказать, что:

1) G_α, G_β ($\alpha, \beta \in \Omega$) являются сопряженными подгруппами в группе G;

2) если G' — подгруппа G, сопряженная с некоторой подгруппой G_α, то найдется $\beta \in \Omega$ такой, что $G' = G_\beta$.

4.9.8.У. Пусть G — транзитивная группа преобразований степени n. Если $u \neq e$ принадлежит центру G, то u является регулярной подстановкой (см. 3.3.24), не имеющей неподвижных точек. Доказать.

4.9.9. Доказать, что транзитивная группа подстановок n-й степени содержит не меньше чем $n-1$ подстановку, каждая из которых не имеет неподвижных точек.

4.9.10. Пусть G — транзитивная группа подстановок степени n, порядок которой $l \neq n$, и пусть каждая неединичная подстановка из G или совсем не имеет неподвижных точек или имеет точно две неподвижных точки. Обозначим через p число подстановок из G, не имеющих неподвижных точек. Доказать, что p удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2}l < p < \frac{3}{4}l.$$

4.9.11. Пусть G — импримитивная группа и M_i, M_j, ... — некоторый ряд импримитивности. Доказать, что множества M_i, M_j, ... равномощны.

4.9.12. Доказать, что симметрическая и знакопеременная группы любой степени примитивны.

4.9.13. Доказать, что транзитивная группа подстановок простой степени примитивна.

4.9.14. Доказать, что группа $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\gamma)]$, где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — перестановка чисел 1, 2, 3, 4, импримитивна, и найти все ее системы импримитивности.

4.9.15. Найти все примитивные и импримитивные подгруппы симметрической группы S_4.

4.9.16. Доказать, что группа G_1 из задачи 4.9.4 импримитивна и что она обладает единственным рядом импримитивности.

4.9.17. Выяснить, когда группа $G = [(1\ 2\ \ldots\ n)]$ примитивна.

4.9.18. Выяснить, какие из следующих групп транзитивны, какие примитивны:

1) группа всех движений плоскости (см. гл. III, § 5);

2) группа всех параллельных переносов плоскости;

3) группа всех вращений плоскости вокруг одной точки.

4.9.19. Пусть ρ — эквивалентность в некотором множестве Ω, обладающая тем свойством, что для каждого $\alpha \in \Omega$ найдутся $\beta, \gamma \in \Omega$, $\beta \neq \alpha$, такие, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, $(\alpha, \gamma) \notin \rho$. Пусть G — некоторая транзитивная группа преобразований множества Ω. Если каждый элемент из группы G является эндоморфизмом Ω относительно ρ, то G импримитивна. Доказать (см. гл. III, § 4).

4.9.20.Т.У. Если в транзитивной группе G некоторая подгруппа G_α не максимальна (т. е. существует подгруппа G' группы G, удовлетворяющая условию $G_\alpha \subset G' \subset G$; $G' \neq G_\alpha$; $G' \neq G$), то G импримитивна. Доказать.

4.9.21.У. Доказать, что если собственная транзитивная подгруппа G симметрической группы S_n содержит транспозицию, то она импримитивна.

4.9.22.Т.У. Доказать, что если G — транзитивная группа подстановок простой степени p, содержащая транспозицию, то G совпадает с симметрической группой S_p.

4.9.23. Пусть G — импримитивная группа, M — система импримитивности. Доказать, что множество всех преобразований $u \in G$, обладающих свойством $u(M) = M$, есть подгруппа G.

4.9.24. Пусть G — импримитивная группа, H — множество всех преобразований из G, преобразующих в себя каждую систему импримитивности некоторого ряда импримитивности. Доказать, что:

1) H — нормальный делитель;

2) H — интранзитивная группа.

4.9.25. Пусть G — импримитивная группа, обладающая конечным рядом импримитивности $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Пусть φ — отображение группы G в симметрическую группу S_n, определенное следующим образом: если $u \in G$ и $u(M_1) = M_{i_1}$, $u(M_2) = M_{i_2}$, $\ldots$, $u(M_n) = M_{i_n}$, то

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что φ — гомоморфизм группы G в группу S_n. Найти

множество элементов G, отображающихся в единицу при этом гомоморфизме (см. предыдущую задачу).

4.9.26.У. Каждый неединичный нормальный делитель примитивной группы преобразований является транзитивной группой. Доказать.

4.9.27.У. Все интранзитивные нормальные делители импримитивной группы исчерпываются описанными в задаче 4.9.24. Доказать

4.9.28. Пусть G — интранзитивная группа преобразований множества Ω и M_i — система интранзитивности (см. 4.9.3). Для каждого $u \in G$ обозначим через u_i преобразование множества M_i, согласно которому $u_i\alpha = u\alpha$. Доказать, что множество G_i всевозможных преобразований u_i является транзитивной группой преобразований множества M_i.

4.9.29. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, и пусть Γ — декартово произведение групп G_i, G_j, ..., соответствующих всем системам интранзитивности группы G (см. гл. I, § 1). Доказать, что:

1) Γ является группой относительно следующего действия:

$$(u_i, u_j, \ldots)(v_i, v_j, \ldots) = (u_iv_i, u_jv_j, \ldots);$$

2) G изоморфна некоторой подгруппе группы Γ.

Примечание. Таким образом, интранзитивная группа с точностью до изоморфизма является подгруппой декартова произведения транзитивных групп. Группу G называют *подпрямым произведением* групп G_i, G_j, ...

4.9.30. Пусть G — группа преобразований множества Ω, и пусть $\alpha, \beta \in \Omega\ (\alpha \neq \beta)$. Если для каждой пары элементов $\gamma, \delta \in \Omega\ (\gamma \neq \delta)$ найдется $u \in G$ такое, что $u\alpha = \gamma$, $u\beta = \delta$, то G — дважды транзитивная группа. Доказать.

4.9.31. Какие из следующих групп дважды транзитивны:

1) симметрическая группа степени n;

2) группа G_1 из задачи 4.9.4;

3) группа всех движений плоскости (см. 4.8.18)?

4.9.32. Выяснить, при каких n знакопеременная группа n-й степени дважды транзитивна.

4.9.33. Сколько существует дважды транзитивных групп преобразований четвертой степени.

4.9.34.У. Доказать, что порядок дважды транзитивной группы преобразований n-й степени делится на число $n(n-1)$.

ГЛАВА V

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА СООТНОШЕНИЙ

§ 1. Определяющие множества соотношений в полугруппах

Пусть A — полугруппа, K — подмножество A. Будем рассматривать слова в полугруппе A над множеством K (см. гл. II, § 5).

Если $u = x_1 x_2 \dots x_n$, $v = y_1 \dots y_m$ — слова в полугруппе A над множеством K, то через uv будем обозначать слово $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$.

Если K — подмножество полугруппы A и $x_1 x_2 \dots x_n$ — слово над K, то элемент полугруппы A, равный произведению элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, называется *значением* данного слова в A (см. гл. II, § 5).

Если $A = [K]_s$, то каждый элемент полугруппы A является значением некоторого слова над K, причем для одного элемента могут существовать несколько слов над K, значениями которых является данный элемент.

Если $x_1 x_2 \dots x_n$, $y_1 y_2 \dots y_m$ — два слова, значения которых совпадают, то в полугруппе A справедливо равенство

$$x_1 x_2 \dots x_n = y_1 y_2 \dots y_m.$$

Всякое такое равенство называют *соотношением* в полугруппе A относительно множества K. Иными словами, соотношение — это пара слов, значения которых в полугруппе A совпадают.

Будем говорить, что слова $x_1 x_2 \dots x_n$, $y_1 y_2 \dots y_m$ образуют соотношение, и записывать его в виде $x_1 x_2 \dots x_n = y_1 y_2 \dots y_m$ или $y_1 y_2 \dots y_m = x_1 x_2 \dots x_n$.

В дальнейшем слова «относительно K» будем опускать, если ясно, относительно какого множества рассматривается слово или соотношение.

Пусть $A = [K]_s$ и порождающее множество K обладает тем свойством, что каждое слово над K имеет единственное значение в полугруппе A; тогда K называют *свободным порождающим множеством* полугруппы A. Если полугруппа обладает *свободным* порождающим множеством K, то ее называют *свободной полугруппой над* K или просто *свободной полугруппой*.

Пусть $A = [K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в полугруппе A относительно K. Если $w_1 = w_2$ — некоторое соотноше-

ние из Ф, а v_1, v_2 — произвольные слова над K, то в A, очевидно, выполняются соотношения:

$$v_1w_1 = v_1w_2,\ w_1v_2 = w_2v_2,\ v_1w_1v_2 = v_1w_2v_2.$$

Всякое соотношение такого вида, а также всякое соотношение вида $u = u$, где u — слово над K, будем называть *непосредственным следствием* из Ф.

Соотношение $u_1 = u_2$ называется *следствием* из множества соотношений Ф, если найдется конечная последовательность соотношений относительно K: $u_1 = v_1$, $v_1 = v_2$, ..., $v_n = u_2$, в которой каждое соотношение является непосредственным следствием из Ф.

Очевидно, что если слова u_1, u_2 образуют соотношение, являющееся следствием из некоторого множества соотношений в полугруппе A, то слова u_1, u_2 имеют равные значения в полугруппе A. Обратное утверждение, конечно, справедливо не всегда, т.е. может оказаться, что слова v_1, v_2 имеют одинаковые значения в A, но соотношение $v_1 = v_2$ не является следствием из выбранной системы соотношений.

Некоторое множество соотношений Ф в полугруппе A относительно порождающего множества K называют *определяющим множеством соотношений полугруппы* A относительно K или *определяющей совокупностью* соотношений, если каждое соотношение в A относительно K является следствием из множества соотношений Ф.

Соотношения, входящие в определяющее множество соотношений, часто называют *определяющими соотношениями*. Основной смысл понятия определяющего множества соотношений заключается в том, что задание определяющего множества соотношений определяет полугруппу с точностью до изоморфизма (см. 5.1.19).

В задачах из соображений удобства записи будут встречаться символы вида u^0. Такие символы при чтении слова следует опускать. Например, x^0y^5 будем читать y^5.

5.1.1. Пусть $A = [u, v, w]_S$ — полугруппа преобразований, где

$$u = (1\ \ 2), \quad v = (n,\ n-1,\ \ldots,\ 1), \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Выяснить, какие пары, составленные из следующих слов над $\{u, v, w\}$, образуют соотношения в A:

$$t_1 = wu, \quad t_2 = v^{n-2}uv^2wv^{n-2}uv^2, \quad t_3 = wv^{n-1}uvw,$$
$$t_4 = vuv^{n-1}wvuv^{n-1}w, \quad t_5 = v^{n-1}uvwv^{n-1}uvw, \quad t_6 = (vu)^{n-1}.$$

5.1.2. Пусть a, b, c — различные элементы некоторой полугруппы A и в полугруппе $[a, b, c]_S$ выполняются соотношения:

$$a^5 = a^3, \quad a^2b = a^2, \quad a^7cb^5a^3b^{11} = a^3c, \quad bca^3 = cba^2,$$
$$a^2c = ca^3, \quad a^3ca = a^3c, \quad bc = cb, \quad ba^2 = b.$$

Выяснить относительно каждого из этих соотношений, является ли оно следствием остальных семи соотношений.

5.1.3. Пусть A — полугруппа из предыдущей задачи. Доказать, что в A справедливы следующие равенства:

$$a^2c = a^{12}b^{11}ca^{10}, \quad (ba^3)^4 = b, \quad (abca)^3 = ac^2baca^4.$$

5.1.4. Пусть дана полугруппа $A = [K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в A относительно K. Доказать, что:

1) соотношение $u = u$ является следствием из Φ;

2) если соотношение $u = v$ является следствием из Φ, то и соотношение $v = u$ — следствие из Φ;

3) если $u = v$, $v = w$ — следствия из Φ, то и соотношение $u = w$ — следствие из Φ;

4) если $u = v$ — следствие из Φ, а w_1, w_2 — произвольные слова над K в полугруппе A, то соотношения $w_1u = w_1v$, $uw_2 = vw_2$, $w_1uw_2 = w_1vw_2$ являются следствиями из Φ;

5) если $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ — следствия из Φ, то и $u_1u_2 = v_1v_2$ — следствие из Φ.

5.1.5.У. Пусть $A = [a, b, c, d]_s$ — полугруппа из задачи 3.1.36. Проверить справедливость следующих соотношений в A:

$ab = ba$, $ac = ca$, $ad = da$, $bd = db$, $a^3 = a$, $ad = d$, $c^3 = c$, $a^2 = c^2$, $bd = d^2$, $b^4c^3a^5d^7b^3a^2d^8cd = b^4cd^{18}cd$, $ba^3cb^2abda^2 = ba^3cb^2ad^2a^2$, $c^8b^5a^3c^6a^2b^4 = ab^9$.

5.1.6.У. Выяснить, является ли следующее множество соотношений:

$$ab = ba,\ ad = da,\ bd = db,\ ad = d,$$

$$bd = d^2,\ ac = ca,\ a^3 = a,\ c^3 = c$$

определяющим множеством соотношений полугруппы A из предыдущей задачи.

5.1.7. Пусть $A' = [a, b, d]_s$ — подполугруппа полугруппы A из задачи 5.1.5. Доказать, что следующее множество соотношений:

$$ab = ba,\ ad = da,\ bd = db,$$

$$ad = d,\ bd = d^2,\ a^2b = b,\ a^3 = a$$

является определяющим для полугруппы A'.

5.1.8. Пусть в полугруппе $A=[x_1, x_2]_s$ справедливы следующие соотношения:

$$x_1^4=x_1^3,\ x_2^4=x_2^3,\ x_1^2x_2=x_2x_1^2=x_2,$$
$$x_2^2x_1=x_1x_2^2=x_1,\ (x_1x_2)^3x_1=x_1.$$

Доказать, что полугруппа A конечна.

5.1.9. Пусть полугруппа A обладает конечным порождающим множеством K, и пусть при некотором натуральном n для всякой последовательности $2n+1$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \in K$ выполняется соотношение

$$x_1x_2 \ldots x_n = x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{2n+1}.$$

Доказать, что полугруппа A конечна и обладает нулем.

5.1.10.Т. Пусть Ω — произвольное множество, C_Ω — множество всевозможных конечных последовательностей элементов из Ω. В C_Ω определено действие умножения следующим образом: если $a=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то $ab=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Доказать, что:

1) C_Ω — свободная полугруппа;

2) в C_Ω имеется лишь единственное свободное порождающее множество;

3) если A — свободная полугруппа, то найдется множество Ω такое, что A будет изоморфна полугруппе C_Ω.

Примечание. Отсюда следует, что всякая свободная полугруппа обладает лишь единственным свободным порождающим множеством.

5.1.11.Т. Доказать, что каждая полугруппа является гомоморфным образом некоторой свободной полугруппы.

5.1.12. Пусть $A=[x]_s$ — конечная моногенная полугруппа. Доказать, что существует определяющее множество соотношений полугруппы A относительно порождающего множества $\{x\}$, состоящее из одного соотношения.

5.1.13. Пусть R — мультипликативная полугруппа натуральных чисел; K — ее неприводимое порождающее множество, состоящее из всех простых чисел и единицы (см. 2.5.3). Доказать, что всевозможные соотношения вида $pq=qp$, $p1=p$ $(p, q \in K)$ образуют определяющее множество соотношений полугруппы R относительно K.

5.1.14.Т. Доказать, что в каждой полугруппе существует определяющее множество соотношений относительно любого порождающего множества.

5.1.15. Пусть в полугруппе $A=[x_1, x_2, \ldots, x_{10}]_s$ множество соотношений

$$x_k^{k+1}=x_k,\ x_kx_l=x_lx_k$$

для всех $k=1, 2, \ldots, 10$, $l=1, 2, \ldots, 10$ является определяющим. Доказать, что A — конечная коммутативная полугруппа, не обладающая ни единицей, ни нулем, и найти количество ее элементов.

5.1.16. Пусть полугруппа $A=[u, v]_s$ обладает следующей определяющей совокупностью соотношений относительно $\{u, v\}$:

$$u^2=u,\quad v^2=v,\quad uvu=u,\quad vuv=v.$$

1) Построить для полугруппы A таблицу Кэли.

2) Выяснить, регулярна ли полугруппа A (см. гл. II, § 5).

5.1.17. Пусть $A=[K]_s$ и Φ — некоторое множество соотношений в полугруппе A. Пусть φ — отображение множества K в полугруппу B. В каждом соотношении в полугруппе A относительно K заменим все элементы из K их образами при отображении φ. Если в результате этой замены из всякого соотношения, входящего в Φ, получится соотношение в B, то и из всякого следствия из Φ получится соотношение в B. Доказать.

5.1.18.Т.У. Если в условиях предыдущей задачи Φ является определяющим множеством соотношений полугруппы A, то отображение φ можно продолжить до гомоморфизма полугруппы A в полугруппу B (см. гл. I, § 2).

5.1.19.Т.У. Пусть Φ_1 — определяющее множество соотношений полугруппы A_1 относительно порождающего множества K_1, а Φ_2 — определяющее множество соотношений полугруппы A_2 относительно порождающего множества K_2. Пусть существует взаимно однозначное отображение φ множества K_1 на множество K_2 такое, что если в каждом соотношении из Φ_1 заменить все элементы из K_1 их образами при отображении φ, то получим соотношения из Φ_2. Если еще каждое соотношение из Φ_2 можно получить таким способом, то полугруппы A_1 и A_2 изоморфны. Доказать.

5.1.20.У. Выяснить, будет ли коммутативной полугруппа с некоторым порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений, состоящим из всевозможных соотношений вида

$$uvu = vuv \qquad (u,\ v \in K).$$

5.1.21. Пусть дана полугруппа $A = [a,\ b,\ c]_s$, и пусть следующее множество соотношений Ф:

$$a^2 = a, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = c$$

является определяющим множеством соотношений полугруппы A. Доказать, что:

1) каждый элемент из A можно записать и притом единственным образом в виде $a^k c^m b^n$, где $k = 0,1$; m, n — произвольные целые неотрицательные числа, причем k, m, n не равны нулю одновременно;

2) A — полугруппа без единицы.

5.1.22. Пусть A — полугруппа, заданная в предыдущей задаче. Найти:

1) все идемпотенты полугруппы A (см. гл. II, §2);

2) все элементы из A, перестановочные с элементом $ac^m b^n$ (m, n — фиксированные натуральные числа);

3) типы всех моногенных подполугрупп A (см. 2.5.10).

5.1.23. Пусть дана полугруппа $A' = [a,\ b,\ c]$, и пусть множество Ф', состоящее из всех соотношений множества Ф из задачи 5.1.21 и соотношения $c^5 = a$, является определяющим множеством соотношений полугруппы A'.

1) Доказать, что полугруппа A' является гомоморфным образом полугруппы A, определенной в задаче 5.1.21.

2) Найти тип каждого элемента полугруппы A' (см. 2.5.10).

3) Выяснить, какие элементы порождают моногенные подполугруппы полугруппы A', являющиеся группами.

5.1.24.У. Пусть A — свободная полугруппа. Доказать, что:

1) A не имеет единицы;

2) в полугруппе A выполняются свойства сократимости слева и справа (см. гл. II, §2);

3) каждый элемент A имеет лишь конечное число различных левых или правых делителей.

5.1.25. Доказать, что свободная полугруппа имеет лишь единственное неприводимое порождающее множество.

5.1.26. Пусть $A=[a, b]_s$ и следующее множество соотношений:

$$ba^2=a, \qquad aba=a, \qquad bab=b, \qquad b^2a=b, \qquad (ba)^2=ba$$

является определяющим для полугруппы A. Доказать, что:

1) элемент ba является единицей полугруппы A;

2) с элементом a перестановочны только степени a и единица ba;

3) с элементом b перестановочны только степени b и единица ba;

4) для всякого $u \in A$, $u \neq a$, b найдется неединичный элемент v, перестановочный с u и не являющийся степенью u.

5.1.27.У. Пусть A — полугруппа, определенная в предыдущей задаче. Найти:

1) все регулярные элементы полугруппы A (см. гл. II, § 5);

2) для каждого регулярного элемента найти регулярно сопряженные с ним элементы;

3) все автоморфизмы полугруппы A.

5.1.28. Доказать, что полугруппа $[u, v]_s$ из задачи 3.1.13 изоморфна полугруппе A, определенной в задаче 5.1.26.

§ 2. Определяющие множества соотношений в группах

Пусть G — группа и K — ее порождающее множество в смысле теории групп, т. е. $G=[K]_g$. Если K' — множество всех элементов из G, обратных для элементов множества K, то $G=[K \cup K']_s$ (см. гл. II, § 6).

Рассматривая группу G как полугруппу с порождающим множеством $K \cup K' \cup e$, где e есть единица G, мы можем применять к G все сказанное во введении к предыдущему параграфу (понятия слова и соотношения над порождающим множеством $K \cup K' \cup e$, следствия из множества соотношений, определяющего множества соотношений и т. д.).

Однако в теории групп применяется другая терминология. Слово в группе G над множеством $K \cup K' \cup e$ называют словом над множеством K, соотношение в G относительно $K \cup K' \cup e$ называют соотношением в G относительно K. Мы будем в дальнейшем придерживаться этой «групповой» терминологии, добавляя там, где могут возникнуть недоразумения, слова «в смысле теории групп» аналогично тому, как это делалось для порождающих множеств (см. гл. II, § 6).

Пусть $G=[K]_g$ и Φ — некоторое множество соотношений в группе G относительно K в смысле теории групп.

Соотношение $u = v$ называется следствием из множества соотношений Φ в смысле теории групп, если оно является следствием (см. § 1) из множества, состоящего из соотношений, принадлежащих Φ, и всех соотношений вида

$$ke = ek = k, \quad kk^{-1} = k^{-1}k = e \quad (k \in K \cup K' \cup e).$$

Таким образом, при выведении следствий из некоторого множества соотношений Φ в группе мы, помимо соотношений из Φ, будем использовать и естественные групповые соотношения, написанные выше.

Следует иметь в виду следующее простое, но важное обстоятельство. Если $x_1x_2 \dots x_n = y_1y_2 \dots y_m$ — некоторое соотношение в группе, то соотношение $x_1x_2 \dots x_ny_m^{-1} \dots y_1^{-1} = e$ является его следствием. И обратно, первое соотношение является следствием второго (см. 5.2.4). В связи с этим соотношения в группе чаще всего задают в виде $u = e$, где u — некоторое слово.

Отметим еще, что каждое из двух соотношений $z_1z_2 \dots z_n = e$, $z_n^{-1} \dots z_2^{-1}z_1^{-1} = e$ является следствием другого (см. 5.2.4).

Среди множеств соотношений в группе мы будем рассматривать и пустое множество соотношений. Если соотношение $u = v$ является следствием из пустого множества соотношений в смысле теории групп, то это значит, что оно является следствием (см. § 1) из естественных групповых соотношений, написанных выше.

Если каждое соотношение в группе G относительно порождающего множества K является следствием из некоторого множества соотношений Φ в смысле теории групп, то Φ называют определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K.

Задание некоторого порождающего множества и определяющей совокупности соотношений группы в смысле теории групп определяет группу с точностью до изоморфизма (см. 5.2.7).

Следует отметить, что, как ясно видно из самих определений, теория соотношений в смысле теории групп является частным случаем теории соотношений в полугруппах. В теории групп, как уже отмечалось, употребляется только несколько иная терминология отчасти в целях некоторого упрощения в обозначениях, отчасти просто по традиции.

5.2.1. Пусть $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Проверить справедливость следующих соотношений в группе $[a, b] = S_5$:

$$a^2 = e, \ b^5 = e, \ (ab)^4 = e, \ (ab^{-2}ab^2)^2 = a^2, \ (ba)^4 = e.$$

5.2.2. Пусть в некоторой группе $G = [u, v]$ выполняются следующие соотношения:

$$u^2 = e, \ v^5 = e, \ (uv)^4 = e, \ (uv^{-2}uv^2)^2 = u^2.$$

Доказать, что в группе G справедливы равенства

$$(vu)^4 = e, \ uv^{-2}uv^2 = v^{-2}uv^2u,$$
$$v^{-1}uv = v^3uv^{-1}uv^{-1}u, \ (uvuv^{-1})^3 = e.$$

Примечание. Отсюда, в частности, следует, что в группе $[a, b]$ задачи 5.2.1 справедливы равенства

$$(ba)^4 = e, \quad ab^{-2}ab^2 = b^{-2}ab^2a,$$
$$b^{-1}ab = b^3ab^{-1}ab^{-1}a, \quad (abab^{-1})^3 = e.$$

Справедливость последних равенств в группе $[a, b]$ можно проверить и непосредственным вычислением, но после того, как решена задача 5.2.2, такая проверка не нужна.

5.2.3. Пусть в конечной группе G элементы x, y связаны соотношением $yx = xy^k$, где k — некоторое целое число $\neq 0$. Доказать, что всякий элемент группы $[x, y]$ можно записать в виде $x^m y^n$ (m, n — целые числа).

5.2.4.У. Пусть G — некоторая группа. Доказать, что:

1) если в G справедливо соотношение $x_1x_2 \ldots x_n = y_1y_2 \ldots y_m$, то справедливо и соотношение $x_1x_2 \ldots x_n y_m^{-1} \ldots y_1^{-1} = e$, причем каждое из них является следствием другого в смысле теории групп;

2) если в G справедливо соотношение $z_1z_2 \ldots z_n = e$, то справедливо и соотношение $z_n^{-1} \ldots z_2^{-1}z_1^{-1} = e$ и каждое из них является следствием другого в смысле теории групп.

5.2.5. Пусть в группе $G = [a, b]$ выполняются соотношения

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e.$$

Доказать, что:

1) элементы a^2, $b^{-1}a^2b$, ba^2b^{-1} попарно перестановочны и образуют класс сопряженных элементов;

2) подгруппа $[a^2, b]$ является нормальным делителем G.

5.2.6. Пусть $G = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$ и в группе G выполняются все соотношения вида

$$a_ka_j = a_ja_k \qquad (k, j = 1, \ldots, n-1; \ |k-j| > 1),$$
$$a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Доказать, что:

1) в G справедливы следующие равенства:

$$a_i^{-1}a_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1}^{-1}, \quad a_ib = ba_{i-1}, \quad a_1b^2 = b^2a_{n-1},$$

где $b = a_1a_2 \ldots a_{n-1}$, a_i — любое;

2) элемент b^n принадлежит центру группы G.

5.2.7.Т.У. Пусть даны группы:

$$G_1 = [K_1]_g = [K_1 \cup K_1' \cup e_1]_s,$$
$$G_2 = [K_2]_g = [K_2 \cup K_2' \cup e_2]_s$$

и Φ_1, Φ_2 — определяющие множества соотношений групп G_1, G_2 относительно порождающих множеств K_1, K_2 соответственно в смысле теории групп. Если существует взаимно однозначное отображение φ множества $K_1 \cup K_1' \cup e_1$ на множество $K_2 \cup K_2' \cup e_2$, при котором

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(k_1^{-1}) = [\varphi(k_1)]^{-1} \qquad (k_1 \in K_1),$$

и множество Φ_1 взаимно однозначно отображается на множество Φ_2, то группы G_1, G_2 изоморфны. Доказать.

5.2.8.Т.У. Пусть дана группа $G = [K]_g = [K \cup K' \cup e]_s$ и Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно порождающего множества K в смысле теории групп. Пусть φ — отображение множества $K \cup K' \cup e$ в группу G', при котором каждое соотношение из Φ и каждое соотношение вида $ke = ek = k$, $kk^{-1} = k^{-1}k = e$ $(k \in K \cup K' \cup e)$ преобразуется в справедливое соотношение в G'. Доказать, что если $G' = [\varphi(K)]_g$, то G' изоморфна некоторой фактор-группе группы G.

5.2.9. Пусть $a = (1234)$, $b = (132)$ — элементы симметрической группы S_4. Доказать, что:

1) $S_4 = [a, b]$;

2) в S_4 выполняются соотношения:

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e.$$

5.2.10. Пусть G — группа из задачи 5.2.5, и пусть $c = a^2ba^{-1}$. Доказать справедливость следующих равенств в группе G:

$$c^2 = e, \quad a^{-1}b^{-1}a^{-1} = b, \quad b^{-1}c = cb, \quad bc = cb^{-1}, \quad ac = cb^{-1}a,$$
$$a^{-1}c = b^{-1}a^2, \quad a^{-1}b = bca^2, \quad a^2b = ca, \quad ab^{-1} = ca^2.$$

5.2.11. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что каждый элемент группы G можно записать в виде $c^{\alpha_1}b^{\alpha_2}a^{\alpha_3}$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant i$, $i = 1, 2, 3$.

5.2.12. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.2.10. Если в группе G равенства

$$c^{\alpha_1}b^{\alpha_2}a^{\alpha_3} = c^{\beta_1}b^{\beta_2}a^{\beta_3} \ (0 \leqslant \alpha_i \leqslant i, \ 0 \leqslant \beta_i \leqslant i, \ i = 1, 2, 3)$$

выполняются только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, то следующая совокупность соотношений:

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e$$

является определяющей в группе G. Доказать.

5.2.13.У. Доказать, что следующее множество соотношений:

$$a^4 = b^3 = (ab)^2 = e$$

является определяющим для симметрической группы S_4 относительно порождающего множества $\{a, b\}$, где $a = (1234)$, $b = (132)$.

Примечание. В последующих задачах на нахождение определяющих множеств соотношений групп полезно иметь в виду задачи 5.2.11, 5.2.12.

5.2.14. Пусть K — группа кватернионов (см. 2.6.39). Доказать, что:

1) $K = [i, j]$;

2) в K справедливы все соотношения следующего множества Ф:

$$\{i^4 = 1,\ j^4 = 1,\ i^2 = j^2,\ iji = j\}.$$

5.2.15. Доказать, что множество соотношений Ф из предыдущей задачи является определяющим множеством соотношений группы кватернионов.

5.2.16. Пусть $G_1 = [a, b, c] \subset S_6$, где $a = (1\,2)$, $b = (3\,4)$, $c = (5\,6)$. Доказать, что следующее множество соотношений Ф:

$$a^2 = b^2 = c^2 = e,\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb$$

является определяющим множеством соотношений группы G_1 относительно порождающего множества $\{a, b, c\}$.

5.2.17. Пусть $G_2 = [a, b] \subset S_6$, где $a = (1\,2\,3\,4)$, $b = (5\,6)$. Доказать, что следующее множество соотношений Ф:

$$a^4 = b^2 = e, \qquad ab = ba$$

является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества $\{a, b\}$.

5.2.18. Пусть в группе $G = [a, b]$ выполняются следующие соотношения:

$$a^2 = b^2 = (ab)^4 = e.$$

Доказать, что:

1) порядок группы G не больше восьми;

2) элемент $(ab)^2$ принадлежит центру группы G.

5.2.19. Пусть $G=[(1234), (13)]$ и $a=(12)(34)$, $b=(13)$. Доказать, что $G=[a, b]$ и множество соотношений: $a^2=b^2=(ab)^4=e$ является определяющим для группы G.

5.2.20. Пусть G — группа из задачи 4.6.16. Доказать, что $G=[z_1, z_2]$ и что множество соотношений $z_1^2=z_0$, $z_1z_2=z_2^{-1}z_1$ (где z_0 — единица группы) является определяющим для группы G.

5.2.21.У. Пусть $[a]$, $[b]$ — бесконечные циклические группы; G — множество всевозможных пар вида (a^α, b^β), где $a^\alpha \in [a]$, $b^\beta \in [b]$. В множестве G определено действие

$$(a^{\alpha_1}, b^{\beta_1})(a^{\alpha_2}, b^{\beta_2})=(a^{\alpha_1+\alpha_2}, b^{\beta_1(-1)^{\alpha_2}+\beta_2}).$$

Доказать, что:

1) G — группа;

2) если $c=(a, b^0)$ $d=(a^0, b)$, то $G=[c, d]$ и множество, состоящее из одного соотношения $dc=cd^{-1}$, является определяющим для группы G.

5.2.22.У. Пусть $[a]$, $[b]$ — циклические группы, порядки которых соответственно равны m, n, а r — натуральное число. Пусть G_r^{mn} — множество mn пар вида (a^α, b^β), где $a^\alpha \in [a]$, $b^\beta \in [b]$, в котором определено следующее действие:

$$(a^{\alpha_1}, b^{\beta_1})(a^{\alpha_2}, b^{\beta_2})=(a^{\alpha_3}, b^{\beta_3}),$$

где

$$\alpha_3 \equiv \alpha_1+\alpha_2 \pmod m, \quad \beta_3 \equiv \beta_1 r^{\alpha_2}+\beta_2 \pmod n.$$

Доказать, что:

1) G_r^{mn} является группой тогда и только тогда, когда $r^m \equiv 1 \pmod n$;

2) если G_r^{mn} — группа, то $G_r^{mn}=[c, d]$, где $c=(a, b^0)$, $d=(a^0, b)$;

3) множество соотношений

$$c^m=e, \quad d^n=e, \quad d=cd^rc^{-1},$$

где e — единица G_r^{mn}, является определяющим множеством соотношений группы G_r^{mn}.

5.2.23.У. Пусть p, q — простые числа и $p<q$. Доказать, что группы G_r^{pq}, G_s^{pq} из предыдущей задачи изоморфны при любых r, s, удовлетворяющих условию

$$r^p \equiv 1 \pmod q, \quad s^p \equiv 1 \pmod q.$$

§ 3. Свободные группы

Порождающее множество K группы G называется *свободным* порождающим множеством, если все его элементы отличны от единицы и пустое множество соотношений относительно K является определяющим миожеством соотиошений группы G в смысле теории групп.

Как отмечалось в § 2, это означает, что каждое соотношение в группе G относительно K является следствием естественных групповых соотношений: $ke = ek = k$, $kk^{-1} = k^{-1}k = e$, где $k \in K$, или k является обратиым для некоторого элемента из K, или $k = e$.

Группа, обладающая свободным порождающим множеством, называется *свободной*.

Будет доказано (см. 5.6.31), что если свободная группа обладает свободным порождающим множеством, состоящим из n элементов, то и любое другое свободное порождающее множество состоит из n элементов.

Число элементов свободного порождающего множества свободиой группы называется ее *рангом*.

Если свободные порождающие множества бесконечны, то говорят о свободной группе бесконечного ранга.

В задачах 5.3.1 — 5.3.6 указаи способ построеиия свободных групп, из которого следует, что существуют свободные группы любого ранга.

Свободные группы играют в теории групп весьма важную роль в связи с тем, что каждая группа изоморфна фактор-группе некоторой свободиой группы (см. 5.3.13). Кроме того, понятие свободной группы иногда используется при определении понятия определяющего множества соотношений в группе (см. 5.3.15, 5.3.16).

Учитывая введенный ранее термин «свободная полугруппа» (см. § 1), следует иметь в виду следующее. Свободная полугруппа никогда не является группой. Свободная же группа, конечно, является полугруппой, но она не является свободной полугруппой (см. 5.3.21).

5.3.1. Пусть F_K — свободная полугруппа со свободным порождающим множеством K, и пусть существует взаимно однозначное отображение φ множества K на себя, удовлетворяющее условию $\varphi(k) \neq k$, $\varphi^2(k) = k$ для любого $k \in K$. В F_K определено бинарное отношение ρ, состоящее из всевозможных пар вида

$(w_1, k\varphi(k)w_1)$, $(w_2, w_2k\varphi(k))$, $(w_1w_2, w_1k\varphi(k)w_2)$, (w_1, w_1), $(k\varphi(k)w_1, w_1)$, $(w_2k\varphi(k), w_2)$, $(w_1k\varphi(k)w_2, w_1w_2)$, где $k \in K$, $w_1, w_2 \in F_K$. Доказать, что:

1) ρ — рефлексивное симметричное бинарное отношение;

2) транзитивное замыкание ρ' бинарного отношения ρ является двусторонне стабильной эквивалентностью в полугруппе F_K (см. 1.3.10).

Примечание. Согласно задачам 2.4.18, 2.4.14, 2.4.8 множество $\bar{F}_K = F_K/\rho'$ является полугруппой.

5.3.2. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи. Доказать, что если $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$, то $(k_1, k_2) \notin \rho'$.

5.3.3. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.3.1. Доказать, что полугруппа $\bar{F}_K = F_K/\rho'$ является группой. Какой класс является единицей этой группы? Что представляет собой элемент, обратный классу, содержащему некоторый $k \in K$.

5.3.4.У. Доказать, что группа $\bar{F}_K$ из предыдущей задачи свободная.

5.3.5. Доказать, что если K, L — равномощные множества, то группы $\bar{F}_K$, $\bar{F}_L$, определенные в задаче 5.3.3, изоморфны.

5.3.6. Если G — свободная группа, то найдется множество K такое, что G изоморфна группе $\bar{F}_K$ из задачи 5.3.3. Доказать.

Примечание. Таким образом, все свободные группы с точностью до изоморфизма исчерпываются группами типа $\bar{F}_K$.

5.3.7. Пусть F — свободная группа, $\{a, b\}$ — ее свободное порождающее множество. Доказать, что нормальный делитель группы F, порожденный элементами a^2, b^2, $(ab)^2$ (см. гл. IV, § 3), состоит из всех тех слов $a^{\alpha_1}b^{\beta_1}a^{\alpha_2}b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_k}b^{\beta_k}$, у которых $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ и $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$ — четные числа.

5.3.8.У. Пусть F — свободная группа, $\{a, b\}$ — ее свободное порождающее множество. Найти индексы следующих подгрупп F:

1) $H_1 = [a^2, b^2, ab]$;

2) $H_2 = [a]$;

3) $H_3 = [a^2, b^2, a^{-1}b^2a, b^{-1}a^2b, (ab)^2]$.

Какие из этих подгрупп являются нормальными делителями группы F?

5.3.9. Выяснить, какие свободные группы коммутативны.

5.3.10. Пусть F — свободная группа ранга, большего единицы. Доказать, что:

1) каждый неединичный элемент группы F имеет бесконечный порядок;

2) центр группы F есть единичная подгруппа.

5.3.11. Пусть F — свободная группа со свободным порождающим множеством K. Доказать, что каждое отображение множества K в F можно продолжить до эндоморфизма группы F (см. гл. I, § 2; гл. III, § 4).

5.3.12.У. Доказать, что каждая свободная группа неединичного ранга обладает бесконечным числом свободных порождающих множеств.

5.3.13.Т.У. Пусть $G=[K]$ — группа. Доказать, что G является гомоморфным образом некоторой свободной группы, которая обладает свободным порождающим множеством, равномощным множеству K.

5.3.14. Пусть φ — гомоморфизм свободной группы F со свободным порождающим множеством K на группу G, и пусть $\overline{K}$ — порождающее множество G, состоящее из всех элементов $\varphi(x)$ $(x \in K)$. Пусть H — нормальный делитель F, состоящий из элементов, преобразующихся в единицу при гомоморфизме φ. Доказать, что:

1) если $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \in H$, то в G выполняется соотношение $\varphi(x_1)^{\alpha_1} \varphi(x_2)^{\alpha_2} \ldots \varphi(x_n)^{\alpha_n} = e$ относительно $\overline{K}$;

2) если для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in K$ в группе G выполняется следующее соотношение относительно $\overline{K}$:

$$\varphi(x_1)^{\alpha_1} \ldots \varphi(x_n)^{\alpha_n} = \varphi(y_1)^{\beta_1} \ldots \varphi(y_n)^{\beta_m},$$

то $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} y_m^{-\beta_m} \ldots y_1^{-\beta_1} \in H$.

Примечание. Если $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \in H$, то соотношение $\varphi(x_1)^{\alpha_1} \varphi(x_2)^{\alpha_2} \ldots \varphi(x_n)^{\alpha_n} = e$ будем называть *соответствующим* элементу u свободной группы F.

5.3.15. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, причем нормальный делитель H порождается некоторым множеством M (см. гл. IV, § 3). Доказать, что множество всех соотношений в G, соответствующих элементам множества M, является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества $\overline{K}$.

5.3.16. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 5.3.14, и пусть Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно порождающего множества $\overline{K}$, состо-

ящее из соотношений вида $u = e$. Доказать, что множество всех элементов группы F, каждому из которых соответствует некоторое соотношение из Φ, порождает нормальный делитель H (см. гл. IV, § 3).

Примечание. Множество соотношений в группе G, соответствующих элементам из M (см. 5.3.15), иногда и называют определяющим множеством соотношений группы G.

5.3.17.У. Пусть F — свободная группа ранга n, и пусть H — подгруппа F, порожденная квадратами всех элементов F. Проверить, что H — нормальный делитель F, и найти порядок фактор-группы F/H.

5.3.18. Пусть H — нормальный делитель из предыдущей задачи. Доказать, что если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — свободное порождающее множество группы F, то H как нормальный делитель порождается множеством

$$\{x_1^2, \ldots, x_n^2, (x_1x_2)^2, \ldots, (x_{n-1}x_n)^2\} \qquad \text{(см. гл. IV, § 3).}$$

5.3.19.У. Пусть $\{x, y\}$ — свободное порождающее множество группы F, а H — вполне характеристическая подгруппа F, содержащая элемент x^3yxy^{-1}. Доказать, что если $H \neq F$, то индекс H в группе F равен 9.

5.3.20. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — свободное порождающее множество группы F. Доказать, что следующие отображения множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на себя можно продолжить до автоморфизмов F:

1) $\varphi_{ij}(x_i) = x_j$, $\varphi_{ij}(x_j) = x_i$, $\varphi_{ij}(x_k) = x_k$, если $k \neq i, j$;
2) $\psi_i(x_i) = x_i^{-1}$, $\psi_i(x_j) = x_j$, если $i \neq j$;
3) $\theta_{ij}(x_j) = x_ix_j$ $(i \neq j)$, $\theta_{ij}(x_k) = x_k$, если $k \neq j$,

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. гл. I, § 2).

Примечание. Известно, что эти автоморфизмы порождают всю группу автоморфизмов свободной группы F.

5.3.21. Доказать, что свободная группа не является свободной полугруппой.

5.3.22. Для того чтобы группа F была свободной, необходимо и достаточно, чтобы она имела порождающее множество, всякое отображение которого в произвольную группу можно продолжить до гомоморфизма группы F в эту группу. Доказать.

§ 4. Группы, заданные определяющими множествами соотношений

Пусть K — произвольное множество. *Словом* над K называется всякая конечная последовательность элементов из K, написанных рядом без каких-либо разделяющих знаков.

Понятие слова над множеством встречается у нас не впервые (см. гл. II, § 5; гл. V), но до сих пор мы рассматривали слова только над такими множествами, которые являлись подмножествами полугрупп.

Для данного множества K выбираем произвольное, но фиксированное множество K', равномощное K и не пересекающееся с K, некоторое фиксированное взаимно однозначное отображение φ множества K на K' и элемент $e \in K \cup K'$. В множестве всех слов над $K \cup K' \cup e$ возьмем произвольное бинарное отношение ρ.

Возникает вопрос, существует ли группа, в которой K является порождающим множеством, элемент e является единицей, $\varphi(k)$ является элементом, обратным k для любого $k \in K$, а множество, состоящее из всех соотношений $u_1 = u_2$, где $(u_1, u_2) \in \rho$, является определяющим для этой группы в смысле теории групп.

Оказывается, что такая группа существует (см. 5.4.1). При этом согласно задаче 5.2.7 она будет единственной с точностью до изоморфизма.

Следует иметь в виду, что в этой группе некоторые элементы множества K могут оказаться равными. В частности, группа может быть и единичной.

С другой стороны, если G — некоторая группа и K — ее порождающее множество, то существует определяющее множество соотношений G относительно K в смысле теории групп. Таким множеством соотношений может служить, например, множество всех соотношений в G относительно K.

Если K — порождающее множество, а Φ — определяющее множество соотношений группы G относительно K, то будем говорить, что G задана порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ.

Для групп, заданных порождающими множествами и совокупностями определяющих соотношений, естественно возникают некоторые специфические вопросы. Важнейшим среди них является вопрос: как узнать, имеют ли одинаковые значения два данных слова в группе относительно заданного порождающего множества или нет. Если G — конкретная группа, т. е. известно, из каких объектов состоит G и как перемножаются ее элементы, то соответствующего вопроса не возникает. В самом деле, вычисляя значения данных слов в G, мы всегда узнаем, равны они или нет.

Если указан способ (алгоритм), при помощи которого для любых двух слов можно дать ответ, равны их значения в группе G или нет, то говорят, что в группе G *решена проблема тождества.* Известно, что решение проблемы тождества часто связано с большими трудностями и что для некоторых классов групп проблема тождества не разрешима вообще, т. е. указанного выше общего алгоритма для всех пар слов не существует.

Вторым важнейшим вопросом является вопрос о том, изоморфны ли две группы, заданные порождающими множествами и определяющими совокупностями соотношений. Наконец, возникают такие вопросы: если G задана некоторым порождающим множеством и некоторой определяющей совокупностью соотношений, то конечна G или бесконечна, G — единичиая группа или ие единичная, коммутативная группа или нет.

5.4.1.Т.У. Пусть K — произвольное множество, K' — некоторое множество, равномощное K и не пересекающееся с K, и $e \notin K \cup K'$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение K на K'. Для произвольного бинарного отношения ρ в множестве всех слов над множеством $K \cup K' \cup e$ существует группа G такая, что $G = [K]_g$, элемент e является единицей G, для любого $k \in K$ выполняется $\varphi(k) = k^{-1}$ и множество, состоящее из всех соотношений $u_1 = u_2$, где $(u_1, u_2) \in \rho$, является определяющим множеством соотношений группы G относительно K. Доказать.

5.4.2.Т. Пусть группа G_1 задана порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ_1, группа G_2 задана тем же порождающим множеством K и определяющим множеством соотношений Φ_2. Доказать, что если $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то:

1) G_2 является гомоморфным образом G_1;

2) если каждое соотношение из Φ_2 является следствием из множества соотношений Φ_1, то G_2 изоморфна G_1.

5.4.3.У. Выяснить, какие из следующих групп коммутативны:

1) G_1, заданная порождающим множеством $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ и определяющим множеством соотношений:

$$x_2^2 = x_1, \quad x_3^2 = x_2, \ \ldots, \ x_n^2 = x_{n-1}, \ \ldots;$$

2) G_2, заданная порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений $xy^2 = y^2x$;

3) G_3, заданная порождающим множеством $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ и определяющим множеством соотношений

$$x_1^2 = x_2^2, \ x_1^2 = x_3^2, \ \ldots, \ x_1^2 = x_n^2, \ \ldots$$

5.4.4.У. Доказать, что группы G_1, G_2, G_3 предыдущей задачи бесконечны.

5.4.5.У. Определить порядок группы, заданной порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений

$$xyx^{-2}yx = e, \quad y^3 = e.$$

5.4.6.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений, состоящим из одного соотношения $xy = yx^s$, где s — произвольное целое число, отличное от нуля. Найти порядок подгруппы $[y]$.

5.4.7.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений: $x^2 = y^2$. Выяснить, какие из следующих элементов G равны и какие различны:

$$u_1 = (xy)^3, \quad u_2 = yxyxy^2, \quad u_3 = x^3y^3, \quad u_4 = xy^2x^3,$$
$$u_5 = x^2y^{-1}x^3yx, \quad u_6 = x^{-1}yx^6.$$

5.4.8.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений

$$x^2 = y^2, \quad xy^6 = y^3x^4.$$

Выяснить, какие из следующих элементов G равны и какие различны:

$$v_1 = x^{-1}y^{-1}xy, \quad v_2 = x^4, \quad v_3 = y^4, \quad v_4 = xy^{-1}xy^{-1}xy^{-1},$$
$$v_5 = x^2y^2, \quad v_6 = (xy)^3, \quad v_7 = x^3y^3, \quad v_8 = x^{-1}yx^6.$$

Примечание. Результат сопоставить с результатом задачи 5.4.7.

5.4.9. Пусть группа $G = [K]$, где K — конечное множество, и множество всех соотношений вида

$$x^2 = e, \quad (xy)^2 = e \qquad (x, y \in K)$$

является определяющим для группы G. Доказать, что группа G конечна, и найти ее порядок.

5.4.10.У. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющим множеством соотношений $xy = y^{-1}x$, $x^2 = y^2$.

1) Доказать, что всякий элемент G можно записать в виде $x^\varepsilon y^m$, где $\varepsilon = 0, 1$; m — любое целое число.

2) Найти, когда элементы $x^{\varepsilon_1}y^{m_1}$, $x^{\varepsilon_2}y^{m_2}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$; m_1, m_2 — целые) равны и когда один из них является обратным для другого.

5.4.11. Доказать, что группа $G = [a, b]$ с определяющим множеством соотношений

$$a^3 = e, \quad b^7 = e, \quad a^{-1}ba = b^3$$

является циклической группой третьего порядка.

5.4.12. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений Φ и пусть $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$, где $y \in G$, $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$. Доказать, что $K' = K \cup \{y\}$ является порождающим множеством G и что множество соотношений, состоящее из соотношений Φ и соотношения $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$, является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K'.

5.4.13.Т. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений Φ, которая содержит соотношение вида $y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ ($y, x_1, \dots, x_m \in K$; $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — целые числа). Пусть Φ' — множество соотношений, полученных подстановкой во все соотношения из Φ вместо y слова $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$. Доказать, что множество $K' = K \setminus \{y\}$ порождает группу G и что Φ' является определяющим множеством соотношений группы G относительно порождающего множества K'.

5.4.14.У. Выяснить, сколько элементов конечного порядка и сколько элементов бесконечного порядка имеет группа, заданная порождающим множеством $\{x, y\}$ и определяющей совокупностью соотношений, состоящей из одного соотношения

$$(xy)^k = e \qquad (k \text{ натуральное}).$$

5.4.15.У. Найти все элементы конечного порядка в группе, заданной порождающим множеством $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и определяющей совокупностью соотношений

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^2 = e.$$

5.4.16.У. Пусть $G_1 = [x, y_1, y_2, y_3]$ и следующая совокупность соотношений:

$$x^{-1} y_1 x y_2 = x^{-1} y_2 x y_3 = x^{-1} y_3 x y_1 = e,$$
$$x^3 = y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = e, \quad y_1 y_2 = y_2 y_1, \quad y_1 y_2 y_3 = e$$

является определяющей совокупностью соотношений группы G_1. Доказать, что группа G_1 изоморфна группе G_2, заданной порождающим множеством $\{a, b_1, b_2\}$ и определяющим множеством соотношений

$$a^3 = b_1^2 = b_2^2 = e, \quad (b_1 b_2)^2 = e, \quad b_1 a = a b_2, \quad b_2 a = a b_1 b_2.$$

5.4.17. Пусть группа G задана порождающим множеством K и определяющей совокупностью соотношений, состоящей из одного соотношения вида

$$x_1x_2 \ldots x_n = x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_m,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — различные элементы из K. Доказать, что G — свободная группа.

5.4.18.У. Пусть дана группа $G=[a, b]$, для которой совокупность соотношений $a^2=b^2=(ab)^4=e$ является определяющей. Найти:

1) число порождающих множеств G, состоящих каждое из двух элементов;

2) центр группы G;

3) группу автоморфизмов G.

5.4.19. Пусть G — коммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что если G — нециклическая группа, то или G обладает порождающим множеством из двух элементов a, b, относительно которого выполняются соотношения $a^4=b^2=e$, или G обладает порождающим множеством из трех элементов a, b, c, относительно которого выполняются соотношения $a^2=b^2=c^2=e$.

5.4.20.У. Найти количество неизоморфных коммутативных групп восьмого порядка.

5.4.21. Пусть G — некоммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что:

1) G не содержит элементов восьмого порядка;

2) G содержит элемент четвертого порядка;

3) если $b \notin [a]$, где a — элемент четвертого порядка, то выполняется равенство $b^{-1}ab=a^3$;

4) если $b \notin [a]$, где a — элемент четвертого порядка и $b^2 \neq e$, то $b^2=a^2$.

5.4.22.У. Пусть G — некоммутативная группа восьмого порядка. Доказать, что G изоморфна группе кватернионов или G изоморфна группе $[(1234), (13)]$ (см. 2.6.39).

5.4.23.У. Сколько существует неизоморфных групп восьмого порядка?

5.4.24.У. Пусть p, q $(p<q)$ — натуральные простые числа и G — нециклическая группа порядка pq. Доказать, что:

1) G обладает единственной подгруппой порядка q, которая является нормальным делителем группы G;

2) G обладает q подгруппами порядка p.

5.4.25.У. Пусть G — группа, определенная в предыдущей задаче. Доказать, что найдутся a, $b \in G$ такие, что $G=[a, b]$ и в G справедливы соотношения

$$a^p = e,\ b^q = e,\ a^{-1}ba = b^r,$$

где $r \not\equiv 1 \pmod q$, $r^p \equiv 1 \pmod q$.

5.4.26.У. Доказать, что каждая нециклическая группа порядка pq, где p, q — различные простые числа и $p<q$, изоморфна некоторой группе G_r^{pq} из задачи 5.2.22.

5.4.27.У. Пусть p, q — неравные простые натуральные числа. Доказать, что существует не более двух неизоморфных групп порядка pq. Описать их строение.

5.4.28.У. Сколько существует неизоморфных групп порядков 14, 15?

5.4.29.У. Найти число $\sigma(n)$ не изоморфных между собою групп порядка n для $n \leqslant 10$.

§ 5. Свободные произведения групп

Группа G называется *свободным произведением* своих подгрупп G_α, G_β, ..., G_ξ, ... ($\xi \in \Gamma$, мощность Γ не меньше 2), если:

1) ни одна из G_ξ не является единичной подгруппой;

2) для всяких α, $\beta \in \Gamma$ $(\alpha \neq \beta)$ имеет место $G_\alpha \cap G_\beta = e$;

3) множество $G' = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} G_\xi$ является порождающим множеством группы G;

4) совокупность соотношений, состоящая из всех соотношений между элементами из G_α, всех соотношений между элементами из G_β и т. д., является определяющей совокупностью соотношеиий группы G относительно порождающего множества G'.

Представление группы G в виде свободиого произведения подгрупп G_α, G_β, ... G_ξ, ... ($\xi \in \Gamma$) называется разложением группы G в свободное произведение и записывается в виде

$$G = \prod_{\xi \in \Gamma}{}^{*} G_\xi, \text{ или } G = G_\alpha * G_\beta * \ldots * G_\xi * \ldots$$

Существует и другое, более часто употребляемое эквивалентное определение свободного произведения подгрупп (см. 5.5.10, 5.5.11).

5.5.1. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и определяющим множеством соотношений $a_1^3 = e$, $a_2^5 = e$, $a_3^7 = e$, $a_4^{12} = e$. Разложима ли группа G в свободное произведение?

5.5.2. Какие свободные группы разложимы в свободное произведение?

5.5.3. Пусть G — свободное произведение подгрупп A и B, каждая из которых является свободной группой. Доказать, что G — свободная группа.

5.5.4. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющим множеством соотношений $a_1^3 = a_2$; $a_3^7 = e$; пусть также G_i $(i = 1, \ldots, 4)$ — подгруппы G такие, что $G_1 = [a_1, a_2]$, $G_2 = [a_2]$, $G_3 = [a_2, a_3]$, $G_4 = [a_3]$. Какие из совокупностей подгрупп G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ образуют свободное произведение G.

5.5.5. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^3 = e$. Доказать, что G есть свободное произведение циклической группы порядка 3 и двух бесконечных циклических групп.

5.5.6. Существует ли абелева группа, разложимая в свободное произведение своих подгрупп?

5.5.7. Группа G есть свободное произведение подгруппы $A = [a_1, a_2, a_3]$ с множеством определяющих соотношений $a_1 a_2^{-1} = a_2^2$; $a_1^2 = a_3^2$ и подгруппы $B = [b_1, b_2]$ с множеством определяющих соотношений $b_1^3 = b_1 b_2^2$. Доказать, что множество $M = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$ является порождающим множеством группы G, а совокупность $a_1 a_2^{-1} = a_2^2$, $a_1^2 = a_3^2$, $b_1^3 = b_1 b_2^2$ является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно порождающего множества M.

5.5.8. Пусть G есть свободное произведение двух конечных подгрупп. Может ли G быть конечной группой?

5.5.9. Пусть $G = \prod_{\xi \in \Gamma}^{*} G_\xi$, причем каждый неединичный элемент $a \in \bigcup_{\xi \in \Gamma} G_\xi$ имеет бесконечный порядок. Существуют ли в G неединичные элементы конечного порядка?

5.5.10.Т. Пусть в группе G существуют неединичные подгруппы G_α $(\alpha \in \Gamma)$, удовлетворяющие следующему условию: каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ представим и притом единственным образом в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Доказать, что $G = \prod_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_\alpha$.

5.5.11.Т. Пусть $G = \prod_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_\alpha$; тогда каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ представим и притом единственным образом в

виде

$$g = a_1 a_2 \dots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Доказать.

5.5.12. Пусть $G = \prod_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_\alpha$, и пусть в каждой подгруппе G_α выбрана неединичная подгруппа G'_α. Тогда подгруппа $G' \subset G$, порожденная всеми подгруппами G'_α, будет свободным произведением подгрупп G'_α ($\alpha \in \Gamma$). Доказать.

5.5.13.Т. Пусть $G = G_1 * G_2$ и N — нормальный делитель, порожденный подгруппой G_2 (см. гл. IV, § 3). Доказать, что G_1 изоморфна G/N.

5.5.14 Пусть A, B, C — подгруппы группы G, и пусть $G = A * B$, $G = A * C$. Всегда ли изоморфны подгруппы B и C?

5.5.15. Пусть группа G является свободным произведением двух циклических подгрупп порядков 5 и 7. Будет ли G периодической группой (см. гл. II, § 6)?

5.5.16. Пусть группа G является свободным произведением конечного числа подгрупп, каждая из которых имеет конечное порождающее множество. Доказать, что G обладает конечным порождающим множеством.

5.5.17. Группу G называют полной, если для всякого ее элемента a и всякого натурального числа n в группе G разрешимо уравнение $x^n = a$. Когда группа, раскладывающаяся в свободное произведение полных подгрупп, является полной группой?

5.5.18. Чему равен центр свободного произведения групп?

5.5.19. Пусть $G = A * B$, и пусть $a \neq e$, $b \neq e$ и $a \in A$, $b \in B$. Может ли элемент ab принадлежать A?

5.5.20.У. Пусть G есть совокупность всех частичных преобразований A множества комплексных чисел K, определяемых формулой

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (z \in K)$$

(a, b, c, d — целые рациональные числа и $ad - bc = 1$). Доказать, что относительно действия, определенного так же, как и в задаче 3.6.25, G образует группу, которая раскладывается в свободное произведение циклической группы порядка 2 и циклической группы порядка 3.

5.5.21. Пусть $G = G_1 * G_2$, и пусть G'_1 и G'_2 — собственные подгруппы группы G' такие, что G'_1 изоморфна G_1, G'_2 изо-

морфна G_2 и $G'=[G_1', G_2']$. Существует ли гомоморфизм группы G на группу G'?

5.5.22. Пусть $G=G_1*G_2*G_3$. Доказать, что

$$G=G_1*(G_2*G_3)=(G_1*G_2)*G_3.$$

5.5.23. Пусть G — свободная нециклическая группа. Доказать, что существует бесконечно много разложений группы G в свободное произведение своих подгрупп.

5.5.24.Т.У. Пусть дана произвольная совокупность неединичных групп G_ξ ($\xi\in\Gamma$) с числом групп, не меньшим двух. Доказать, что существует группа G, обладающая подгруппами $\bar{G}_\xi$ ($\xi\in\Gamma$), изоморфными группам G_ξ ($\xi\in\Gamma$), и являющаяся их свободным произведением.

§ 6. Прямые произведения групп

Говорят, что группа G является *прямым произведением* своих подгрупп $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\xi, \ldots$ ($\xi\in\Gamma$), если:

1) для всяких $\alpha,\beta\in\Gamma$ ($\alpha\neq\beta$) имеет место $G_\alpha\cap G_\beta=e$;

2) множество $G'=\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma} G_\xi$ является порождающим множеством группы G;

3) для всяких $a_\xi\in G_\xi$ и $a_\eta\in G_\eta$ ($\xi\neq\eta$; $\xi,\eta\in\Gamma$) имеет место $a_\xi a_\eta=a_\eta a_\xi$ и совокупность этих соотношений совместно со всеми соотношениями из G_α, всеми соотношениями из G_β и т. д. является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно порождающего множества G'.

Существуют и другие, более часто употребляемые эквивалентные определения прямого произведения (см. 5.6.13 и 5.6.14; 5.6.30). Представление группы G в виде прямого произведения подгрупп $G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\xi, \ldots$ называется *разложением* группы G в прямое произведение и записывается в виде

$$G=\prod_{\xi\in\Gamma} G_\xi, \text{ или } G=G_\alpha\times G_\beta\times\ldots\times G_\xi\times\ldots$$

Подгруппа A группы G называется *прямым сомножителем группы* G, если найдется такая подгруппа $B\subset G$, что $G=A\times B$. Группа называется *разложимой*, если найдется собственная подгруппа, являющаяся ее прямым сомножителем.

Два разложения данной группы G в прямые произведения называются *изоморфными*, если между множителями этих разложений можно установить взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие множители являются изоморфными группами.

Пусть группа G есть прямое произведение своих подгрупп G_ξ ($\xi\in\Gamma$), и пусть некоторые из подгрупп G_ξ ($\xi\in\Gamma'$; $\Gamma'\subset\Gamma$) раскладываются в прямое произведение своих подгрупп $G_\xi=\prod\limits_{\eta\in\Gamma_\xi} G_{\xi\eta}$. Тогда группа G есть прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}$ ($\xi\in\Gamma'$;

$\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$) (см. 5.6.3). Разложение G в прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}$ ($\xi \in \Gamma'$, $\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$) называется *продолжением* разложения $G = \prod_{\xi \in \Gamma} G_\xi$.

5.6.1. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и определяющим множеством соотношений, состоящим из соотношений $a_1^7 = e$, $a_2^{13} = e$, $a_3^8 = e$, $a_4^5 = e$ и всех соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Разложить G в прямое произведение циклических подгрупп.

5.6.2. Пусть $G = A \times B$, где A имеет порождающее множество $\{a_1, a_2\}$, определяющее множество соотношений $a_1^8 = a_2$, и пусть $B = [b_1, b_2, b_3]$ и имеет определяющее множество соотношений $b_1^7 = b_2 b_3$. Доказать, что множество $M = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$ является порождающим множеством группы G и что совокупность соотношений $a_1^8 = a_2$, $b_1^7 = b_2 b_3$, $a_2 b_3 = b_3 a_2$, $a_1 b_2 = b_2 a_1$, $b_2 a_2 = a_2 b_2$, $a_1 b_1 = b_1 a_1$, $a_1 b_3 = b_3 a_1$, $a_2 b_1 = b_1 a_2$ является определяющей совокупностью соотношений группы G относительно множества M.

5.6.3.Т. Пусть группа G есть прямое произведение своих подгрупп G_ξ ($\xi \in \Gamma$), и пусть некоторые из подгрупп G_ξ ($\xi \in \Gamma'$; $\Gamma' \subset \Gamma$) раскладываются в прямое произведение $G_\xi = \prod_{\eta \in \Gamma_\xi} G_{\xi\eta}$. Доказать, что группа G есть прямое произведение всех подгрупп $G_{\xi\eta}$ ($\xi \in \Gamma'$; $\eta \in \Gamma_\xi$) и G_ξ ($\xi \in \Gamma$; $\xi \notin \Gamma'$).

5.6.4. Доказать, что группа G не может одновременно раскладываться в прямое произведение циклических подгрупп и в свободное произведение циклических подгрупп.

Примечание. Доказано, что группа не может раскладываться одновременно в прямое и свободное произведение никаких своих собственных подгрупп.

5.6.5.У. Будут ли разложимы в прямое произведение своих подгрупп следующие группы:

1) конечная группа простого порядка;
2) циклическая группа бесконечного порядка;
3) группа кватернионов (см. 2.6.39);
4) конечная группа порядка 51;
5) аддитивная группа рациональных чисел.

5.6.6. Доказать, что мультипликативная группа всех отличных от нуля действительных чисел разложима в прямое произведение мультипликативной группы положительных чисел и циклической группы порядка 2.

5.6.7. Пусть G_1 и G_2 — конечные подгруппы группы G, имеющие взаимно простые порядки, и пусть каждый элемент из G_1 перестановочен с каждым элементом из G_2. Доказать, что $[G_1, G_2] = G_1 \times G_2$.

5.6.8. Пусть A — подгруппа симметрической группы S_8, порожденная подстановками $a = (1234)(5678)$, $b = (1537)(2846)$. Разложима ли A в прямое произведение?

5.6.9. Пусть H — подгруппа симметрической группы S_4, порожденная элементами $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$, $c = (14)(23)$. Доказать, что H раскладывается в прямое произведение. Сколько существует неизоморфных разложений группы H в прямое произведение своих подгрупп?

5.6.10. Доказать, что:

1) если группа G раскладывается в прямое произведение абелевых подгрупп, то G — абелева группа;

2) если группа G раскладывается в прямое произведение полных подгрупп (см. 5.5.17), то G — полная группа;

3) если группа G раскладывается в прямое произведение периодических подгрупп, то G — периодическая группа (см. гл. II, § 6).

5.6.11. Доказать, что фактор-группа свободной группы по коммутанту есть или бесконечная циклическая группа, или прямое произведение бесконечных циклических групп.

5.6.12. Доказать, что группа G порядка pq, где p и q — различные простые числа, разложима в прямое произведение тогда и только тогда, когда G коммутативна.

5.6.13.Т. Пусть $G = \prod_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$. Доказать, что каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ единственным образом с точностью до порядка сомножителей записывается в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

5.6.14.Т. Пусть $G_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ — совокупность подгрупп группы G, причем элементы любых двух подгрупп G_α и $G_\beta (\alpha \neq \beta)$ перестановочны между собой, и пусть каждый элемент $g \in G$ $(g \neq e)$ единственным образом с точностью до порядка сомножителей записывается в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n; \quad a_i \neq e; \quad a_i \in G_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$. Доказать, что G раскладывается в прямое произведение своих подгрупп G_α ($\alpha \in \Gamma$).

Примечание. Элемент g_α из подгруппы G_α, входящий в разложение (*) элемента g (см. 5.6.13), называется *компонентой* элемента g в прямом сомножителе G_α относительно данного разложения. Если в указанном разложении нет множителя, принадлежащего G_α, то компонентой элемента g в G_α считается единица. Если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, то всякий $g \in G$ может быть единственным образом представлен в виде $g = g_1 \ldots g_i \ldots g_n$, где g_i — компонента g в G_i. В этом случае наряду с разложением (*) рассматривают и указанное выше разложение, которое от разложения (*) может отличаться лишь присутствием дополнительных множителей, равных e.

5.6.15. Пусть D — аддитивная группа всех комплексных чисел. Существуют ли такие два прямых разложения

$$D = A \times B; \quad D = A \times C$$

и такой элемент $d \in D$, что компонента элемента d в прямом сомножителе A относительно первого разложения отлична от компоненты d в A относительно второго разложения?

5.6.16. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение конечных подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, имеющих соответственно порядки $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Доказать, что G — конечная группа. Найти порядок группы G.

5.6.17. Пусть $g \in G = \prod_{\xi \in \Gamma} G_\xi$; α — фиксированный элемент из Γ, и пусть g_α — компонента $g \in G$ в прямом сомножителе G_α. Доказать, что отображение $\varphi: \varphi(g) = g_\alpha$ есть гомоморфизм группы G на подгруппу G_α.

Примечание. Это означает, что компонента произведения равна произведению компонент.

5.6.18. Пусть группа G имеет только один нормальный делитель, отличный от самой группы и единичной подгруппы. Доказать, что G неразложима.

5.6.19. Доказать, что центр прямого произведения равен прямому произведению центров сомножителей.

5.6.20. Доказать, что коммутант прямого произведения равен прямому произведению коммутантов сомножителей.

5.6.21.Т. Если A — прямой множитель группы G, то всякий нормальный делитель A' подгруппы A будет нормальным делителем и в группе G. Доказать.

5.6.22. Пусть группа G разложима в прямые произведения

$$G = A \times B, \qquad G = A \times C.$$

Доказать, что подгруппа C изоморфна B.

5.6.23. Пусть $G = A \times B$ и подгруппа F содержит прямой множитель A. Доказать, что $F = A \times (F \cap B)$.

5.6.24. Пусть G — мультипликативная группа всех квадратных действительных матриц порядка n с положительным определителем. Обозначим через N_1 совокупность всех матриц из G с определителем, равным 1, и через N_2 — совокупность всех матриц вида λE_n, где λ — положительное число, E_n — единичная квадратная матрица порядка n. Доказать, что $G = N_1 \times N_2$.

5.6.25.Т. Доказать, что если все убывающие цепи нормальных делителей группы G конечны, то группа G не может быть разложена в прямое произведение бесконечного числа подгрупп.

5.6.26.Т.У. Пусть все убывающие цепи нормальных делителей группы G конечны. Доказать, что любое разложение группы G может быть продолжено до разложения, все множители которого неразложимы в прямое произведение подгрупп.

5.6.27. Пусть группа G разложима в прямое произведение подгрупп $G = G_1 \times G_2 \times \ldots$, порядки которых являются простыми числами. Выяснить, когда G обладает лишь единственным прямым разложением на неразложимые множители.

5.6.28.Т.У. Пусть в группе G все возрастающие цепи прямых сомножителей конечны. Доказать, что в G все убывающие цепи прямых сомножителей конечны.

5.6.29.Т.У. Пусть множество G есть декартово произведение (см. гл. I, § 1) групп $G_1, \ldots, G_n$. В множестве G определим умножение следующим образом: пусть

$$g_1 = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n), \qquad a_i \in G_i,$$

$$g_2 = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n), \qquad b_i \in G_i;$$

тогда $g_1 \cdot g_2 = (a_1 b_1, \ldots, a_i b_i, \ldots, a_n b_n)$, где $a_i b_i$ — произведение элементов a_i и b_i в группе G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать, что относительно указанного выше действия множе-

ство G образует группу, которая раскладывается в прямое произведение подгрупп $\overline{G}_i$, изоморфных группам G_i соответственно.

5.6.30. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение n бесконечных циклических групп. Обозначим через H подгруппу всех элементов из G, представимых в виде x^2 ($x \in G$). Доказать, что G/H — подгруппа порядка 2^n, раскладывающаяся в прямое произведение n циклических подгрупп порядка 2.

5.6.31.Т.У. Пусть свободная группа G обладает свободным порождающим множеством из n элементов. Доказать, что всякое другое свободное порождающее множество группы G содержит n элементов.

Примечание. В задаче 5.6.31 доказана единственность ранга свободной группы для конечного случая. Отсюда непосредственно следует единственность ранга и в общем случае.

5.6.32.У. Пусть G — декартово произведение (гл. I, § 1) конечных групп $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$. В множестве G определим умножение следующим образом: пусть

$$g_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots), \quad g_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots);$$

тогда

$$g_1 \cdot g_2 = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_i b_i, \ldots),$$

где $a_i b_i$ — произведение элементов a_i и b_i в группе G_i. Доказать, что относительно указанного действия множество G образует группу. Может ли G быть разложена в прямое произведение подгрупп $\overline{G}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), изоморфных группам G_i.

Примечание. Результат сравнить с задачей 5.6.29.

5.6.33.Т. Доказать, что группа G тогда и только тогда раскладывается в прямое произведение своих подгрупп $G_\alpha, \ldots, G_\xi, \ldots$ ($\xi \in \Gamma$), когда выполнены все три указанных ниже условия:

1) подгруппы $G_\alpha, \ldots, G_\xi, \ldots$ являются нормальными делителями G;

2) $G = [\bigcup_{\xi \in \Gamma} G_\xi]$;

3) пересечение каждой G_η ($\eta \in \Gamma$) с подгруппой, порожденной остальными G_ξ ($\xi \neq \eta$), есть единичная подгруппа.

ГЛАВА VI

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

§ 1. Простейшие свойства абелевых групп

Настоящая глава посвящена коммутативным (абелевым) группам. В дальнейшем на протяжении всей главы будут рассматриваться только абелевы группы, причем это обстоятельство иногда не будет специально оговариваться.

В случае, когда абелева группа G задана порождающим множеством M и определяющей совокупностью соотношений, будем предполагать, что в число соотношений включаются все соотношения вида $xy = yx$ $(x, y \in M)$.

Часто для абелевых групп употребляют аддитивную запись. В аддитивной записи вместо $x \cdot y$ пишут $x + y$, вместо x^n пишут nx и единицу группы обозначают через 0. В настоящей главе для абелевых групп мы сохраним нашу обычную мультипликативную запись.

Абелева группа называется *периодической группой*, если все ее элементы имеют конечный порядок (см. гл. II, § 6); *группой без кручения*, если все ее элементы, кроме единицы, имеют бесконечный порядок; *смешанной*, если группа содержит неединичные элементы конечного порядка и элементы бесконечного порядка.

Если порядки элементов периодической группы G суть степени одного и того же простого числа p, т. е. G является p-группой (см. гл. IV, § 4), то G называют *примарной группой* относительно простого числа p.

Совокупность F всех элементов конечного порядка группы G образует подгруппу, которую называют *максимальной периодической подгруппой* группы G или *периодической частью* группы G (см. 6.1.1). Совокупность всех элементов периодической группы G, порядки которых суть степени одного и того же простого числа p, образует подгруппу, которую называют *примарной компонентой относительно простого числа p* или *p-компонентой* группы G (см. 6.1.7).

Конечную совокупность элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ группы G будем называть линейно зависимой, если существуют такие целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} \ldots g_k^{n_k} = e.$$

Совокупность элементов, не обладающих этим свойством, называется *линейно независимой*. В аддитивной записи указанное условие линейной зависимости будет иметь вид $n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_kg_k=0$ и, следовательно, совпадает с обычным определением линейной зависимости.

Бесконечная совокупность элементов группы G называется *линейно независимой*, если все ее конечные подмножества линейно независимы. В противном случае совокупность называется *линейно зависимой*. Говорят, что элемент $g\in G$ *линейно зависит* от совокупности $E\subset G$, если существуют такое натуральное число m и такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k\in E$, что $g^m\in[g_1, \ldots, g_k]$.

Пусть группа G обладает конечной максимальной линейно независимой совокупностью. Тогда все максимальные линейно независимые совокупности содержат одинаковое число элементов (см. 6.1.21). В этом случае число элементов в максимальной линейно независимой совокупности группы G называется *рангом* G. Если группа G не обладает максимальной линейно независимой совокупностью, содержащей конечное число элементов, то говорят, что группа G имеет *бесконечный ранг*. Считается, что периодические группы имеют нулевой ранг.

6.1.1.Т. Доказать, что периодическая часть группы G является вполне характеристической подгруппой G (см. гл. III, § 4).

6.1.2. Найти периодическую часть мультипликативной группы всех отличных от нуля комплексных чисел.

6.1.3. Пусть T — периодическая часть группы G и H — подгруппа G, тогда $H\cap T$ — периодическая часть группы H. Доказать.

6.1.4. Доказать, что аддитивная группа комплексных чисел есть прямое произведение двух аддитивных групп, изоморфных аддитивной группе вещественных чисел.

6.1.5. Доказать, что всякая совокупность элементов группы G, содержащая элемент конечного порядка, линейно зависима.

6.1.6. Доказать, что совокупность элементов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ группы G будет линейно зависима тогда и только тогда, когда один из элементов v_i линейно зависит от остальных элементов.

6.1.7 Доказать, что всякая примарная компонента группы G образует вполне характеристическую подгруппу G (см. гл. III, § 4).

6.1.8. Пусть T — примарная компонента группы G относительно простого числа p, и пусть H — подгруппа G. Доказать, что $H\cap T$ — примарная компонента группы H относительно простого числа p.

6.1.9.Т.У. Всякая периодическая группа может быть разложена в прямое произведение примарных групп, относящихся к различным простым числам. Доказать.

6.1.10.Т. Доказать, что периодическая группа может быть лишь единственным образом разложена в прямое произведение примарных подгрупп, относящихся к различным простым числам.

6.1.11. Доказать, что аддитивная группа всех рациональных чисел есть группа без кручения и, далее, что она может быть представлена в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп.

6.1.12. Изоморфны ли группы рациональных чисел по сложению и положительных рациональных чисел по умножению?

6.1.13. Пусть H и K — подгруппы G и $H \subset K$, причем индекс H в группе K конечен. Доказать, что индекс подгруппы $[H, a]$ в группе $[K, a]$ конечен и является делителем индекса H в группе K $(a \in G)$.

6.1.14. Пусть G — примарная группа относительно простого числа p и k — натуральное число такое, что $(k, p) = 1$. Всегда ли в группе G разрешимо уравнение $x^k = a$ $(a \in G)$? Сколько оно имеет решений?

6.1.15. Доказать, что совокупность всех n-х степеней элементов из группы G является вполне характеристической подгруппой (см. гл. III, § 4).

6.1.16. Найти все абелевы группы, которые не имеют собственных гомоморфизмов, т. е. гомоморфизмов, отличных от изоморфизма и гомоморфизма на единичную группу.

6.1.17. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение циклических групп. Существует ли элемент $a \in G$, отличный от единицы, для которого уравнение $x^n = a$ разрешимо при любом натуральном n?

6.1.18. Доказать, что прямое произведение любого множества групп, примарных относительно одного и того же простого числа p, есть группа, примарная относительно p.

6.1.19. Пусть группа G раскладывается в прямое произведение конечных циклических групп порядка 5 и 3 и четырех бесконечных циклических групп.

Определить:

1) периодическую часть G;

2) число периодических подгрупп;

3) фактор-группу G по периодической части;

4) гомоморфный образ G при гомоморфизме φ, ядром которого является циклическая подгруппа порядка 5.

6.1.20. Доказать, что всякая конечно порожденная абелева группа G (см. гл. II, § 6), не являющаяся периодической, обладает конечной максимальной линейно независимой совокупностью.

6.1.21. Пусть A и B — две максимальные конечные линейно независимые совокупности группы G. Тогда A и B содержат одинаковое число элементов. Доказать.

6.1.22. Пусть G — абелева группа, T — ее периодическая часть. Доказать, что ранг G равен рангу G/T.

6.1.23. Доказать, что ранг абелевой группы G является ее инвариантом относительно изоморфизма (т. е. не изменяется при любых изоморфизмах группы G).

6.1.24.Т. Пусть G раскладывается в прямое произведение конечного числа циклических групп. Доказать, что число бесконечных циклических сомножителей не зависит от выбора разложения группы G.

6.1.25. Пусть G — абелева группа, примарная относительно простого числа p. Доказать, что совокупность всех элементов G, имеющих порядок, меньший или равный p, образует характеристическую подгруппу (см. гл. IV, § 8).

Примечание. Указанная в задаче подгруппа называется *нижним слоем* группы G.

6.1.26. Пусть абелева группа G, примарная относительно простого числа p, раскладывается в прямое произведение циклических групп. Для каждого натурального n обозначим через $A^{(n)}$ произведение всех прямых сомножителей, порядки которых равны p^n (если таковых нет, то положим $A^{(n)} = e$). Через $B^{(n)}$ обозначим прямое произведение нижних слоев $A_1^{(n)}, A_1^{(n+1)}, \ldots$ групп $A^{(n)}, A^{(n+1)}, \ldots$ соответственно. Доказать, что:

1) $A_1^{(n)}$ изоморфна $B^{(n)}/B^{(n+1)}$;

2) $B^{(n)}$ содержит те и только те элементы a из нижнего слоя, для которых уравнение $x^{p^{n-1}} = a$ разрешимо;

3) подгруппы $A_1^{(n)}$ и $B^{(n)}$ не зависят от разложения G в прямое произведение.

6.1.27.Т.У. Пусть G — примарная группа, разложимая в прямое произведение циклических. Доказать, что любые

два разложения G в прямое произведение циклических групп изоморфны.

6.1.28.Т.У. Пусть G — конечная или счетная группа, разложимая в прямое произведение циклических групп. Тогда любые два разложения G с циклическими сомножителями, бесконечными или примарными конечными, изоморфны. Доказать.

Примечание. Предположение счетности на самом деле может быть отброшено.

§ 2. Конечные абелевы группы

Пусть G — конечная абелева группа. Как мы увидим, G раскладывается в прямое произведение циклических примарных подгрупп, при этом всякие два разложения группы G в прямое произведение примарных циклических групп изоморфны (см. 6.2.7 и 6.2.9). Пусть в разложении группы G в прямое произведение примарных циклических групп входят примарные группы, относящиеся к простым числам $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Пусть число примарных сомножителей, относящихся к простому числу p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, равно l_i, и пусть порядки сомножителей равны

$$p_i^{\alpha_{i1}}, p_i^{\alpha_{i2}}, \ldots, p_i^{\alpha_{il_i}},$$

где $\alpha_{i1} \geqslant \alpha_{i2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{il_i}$. Числа $p_i^{\alpha_{in_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ n_i = 1, 2, \ldots, l_i)$ называются *инвариантами* группы G. Задание всех инвариантов G определяет группу G с точностью до изоморфизма. Конечные группы, имеющие разные инварианты, неизоморфны (см. 6.2.8 и 6.2.9). Набор всех инвариантов конечной группы G иногда будем выписывать в виде таблицы, у которой в каждой строке в порядке убывания стоят инварианты, относящиеся к одному простому числу. В некоторых случаях будем дополнять строчки символом $p_i^0 = 1$. Например, если конечная группа раскладывается в прямое произведение четырех циклических групп, имеющих порядки 2^2, 2^2, 2^5, 2^6, и трех циклических групп с порядками 3, 3^3, 3^4, то инварианты можно записывать в виде следующей таблицы:

$$2^6,\ 2^5,\ 2^2,\ 2^2;$$
$$3^4,\ 3^3,\ 3,\ 3^0.$$

Следует обратить внимание на то, что в наборе инвариантов одно и то же число может встречаться несколько раз, т. е. набор инвариантов представляет собой не множество, а семейство (см. гл. I, § 1).

6.2.1. Пусть H — подгруппа конечной абелевой группы G; пусть индекс H в группе G равен k и пусть H' — подгруппа

G порядка p^l, где p — простое число и $(k, p) = 1$. Доказать, что $H' \subset H$.

6.2.2. Найти все примарные компоненты конечных групп порядков 1) 21; 2) 30; 3) 462; 4) 101.

6.2.3. Для конечной группы порядка 35 определить:

1) число подгрупп;

2) число собственных подгрупп;

3) число собственных характеристических подгрупп (гл. IV, § 8);

4) число собственных вполне характеристических подгрупп (гл. III, § 4).

6.2.4. Найти разложение группы порядка 30030 в прямое произведение циклических групп.

6.2.5. Пусть G — конечная абелева группа, примарная относительно простого числа p; пусть a — элемент максимального порядка p^k. Обозначим через H максимальную подгруппу G, для которой $H \cap [a] = e$. Пусть $x \notin [H, a]$, но $x^p \in [H, a]$. Доказать, что найдется целое число k такое, что $x^p a^{pk} \in H$.

6.2.6.У. Если в конечной абелевой группе, примарной относительно простого числа p, элемент a есть элемент максимального порядка p^k, то подгруппа $[a]$ есть прямой сомножитель. Доказать.

6.2.7.Т.У. Доказать, что всякая конечная абелева группа разлагается в прямое произведение примарных циклических групп.

6.2.8.Т. Если конечные группы имеют одинаковые наборы инвариантов, то они изоморфны. Доказать.

6.2.9.Т.У. Доказать, что конечные группы, имеющие разные наборы инвариантов, неизоморфны.

6.2.10. Для следующих конечных групп, заданных порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений, найти их инварианты:

1) $\{a_1, a_2\}$, $a_1^5 = e$, $a_2^7 = e$;

2) $\{a_1, a_2\}$, $a_2^4 = a_1$, $a_1^2 = e$;

3) $\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1^3 = e$, $a_1 a_2 = e$, $a_3^2 = e$;

4) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $a_1^3 = e$, $a_2^4 = e$, $a_3^5 = e$, $a_1 a_2 = a_3 a_4$;

5) $\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1^8 = e$, $a_2^2 = e$, $a_3^2 = e$.

6.2.11. Пусть p — простое число. Когда конечная группа G имеет собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) только на группы, примарные относительно простого числа p?

6.2.12.Т. Пусть конечная примарная относительно простого числа p абелева группа G имеет инварианты $p^{k_1}, p^{k_2}, \ldots, p^{k_s}$ и H — подгруппа G. Доказать, что если H имеет инварианты $p^{l_1}, p^{l_2}, \ldots, p^{l_s}$, то $k_i \geqslant l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

6.2.13.Т.У. Пусть конечная абелева группа G имеет инварианты

$$\begin{array}{c} p_1^{\alpha_{11}}, \ldots, p_1^{\alpha_{1m}}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_i^{\alpha_{i1}}, \ldots, p_i^{\alpha_{im}}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_k^{\alpha_{k1}}, \ldots, p_k^{\alpha_{km}} \end{array}$$

и пусть H — подгруппа G, имеющая инварианты

$$\begin{array}{c} p_1^{\beta_{11}}, \ldots, p_1^{\beta_{1m}}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_i^{\beta_{i1}}, \ldots, p_i^{\beta_{im}}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_k^{\beta_{k1}}, \ldots, p_k^{\beta_{km}}. \end{array}$$

Доказать, что для каждых $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\beta_{ij} \leqslant \alpha_{ij}.$$

6.2.14. Найти инварианты конечной абелевой группы G, у которой каждая собственная подгруппа характеристическая.

6.2.15. Найти инварианты конечной абелевой группы G, у которой каждая подгруппа вполне характеристическая.

6.2.16. Найти все конечные абелевы группы, которые имеют собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) только на циклические группы.

6.2.17. Какие конечные группы не имеют собственных эндоморфизмов, т. е. эндоморфизмов, отличных от автоморфизма и единичного гомоморфизма?

6.2.18. Существуют ли в конечной группе G элементы a, отличные от единицы, для которых уравнение $x^n = a$ разрешимо для каждого натурального n?

6.2.19. Примарная группа задана инвариантами p^4, p^3, p^2. Сколько элементов порядка p она содержит?

6.2.20. Конечная группа G задана своими инвариантами: 2^3, 2; 5^2, 5, 5.

Определить:

1) порядок G;

2) существуют ли в G подгруппы порядков 31, 25, 10, 40, 27, 120;

3) инварианты подгрупп двадцатого порядка.

6.2.21. Конечная группа G задана своими инвариантами:

$$5^3,\ 5^2,\ 5;\ 7;\ 3,$$

а группа G' — своими инвариантами:

$$2^3,\ 2^2,\ 2;\ 11.$$

Существует ли неединичный гомоморфизм G в группу G'?

6.2.22. Конечная группа G задана своими инвариантами 3; 7. Сколько нетождественных автоморфизмов существует у этой группы?

6.2.23. Доказать, что если подмножество S конечной абелевой группы G содержит все элементы максимальных порядков, то $[S]=G$.

§ 3. Конечно порожденные абелевы группы

Произвольная конечно порожденная абелева группа раскладывается в прямое произведение примарных конечных и бесконечных циклических групп, причем число бесконечных циклических сомножителей конечно и равно рангу группы (см. 6.3.4 и 6.3.19). Конечно порожденная группа G имеет конечную периодическую часть и вполне определяется набором инвариантов периодической части и своим рангом (см. 6.3.5 и 6.3.6). Набор инвариантов периодической части и ранг составляют полную систему инвариантов конечно порожденной группы в том смысле, что их задание определяет группу с точностью до изоморфизма.

6.3.1.Т.У. Доказать, что в конечно порожденной группе G не существует бесконечного числа различных подгрупп H_i $(i=1, 2, \ldots)$ таких, что

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots H_i \subset \ldots$$

6.3.2.У. Пусть дана абелева группа $A=[a_1, \ldots, a_k]$, и пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — произвольные целые числа, наиболь-

ший общий делитель которых равен единице. Обозначим через b_1 произведение $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k}$. Доказать, что найдутся такие $b_2, b_3, \ldots, b_k$, что $A = [b_1, \ldots, b_k]$.

6.3.3. Доказать, что периодическая часть конечно порожденной абелевой группы есть конечная группа.

6.3.4.Т.У. Доказать, что конечно порожденная абелева группа G представляет собой прямое произведение конечного числа циклических групп, бесконечных или конечных примарных.

6.3.5.Т. Доказать, что если конечно порожденные абелевы группы имеют одинаковые ранги и одинаковые наборы инвариантов периодических частей, то они изоморфны.

6.3.6.Т. Если конечно порожденные абелевы группы G и G' имеют или разные ранги, или разные наборы инвариантов периодических частей, то G и G' неизоморфны. Доказать.

Примечание. Сравнить результат этой задачи с результатами задач 6.3.4 и 6.3.5.

6.3.7 Т.У. Пусть конечно порожденная группа G имеет ранг r_1 и набор инвариантов периодической части

$$\begin{array}{c} p_1^{\alpha_{11}}, \ldots, p_1^{\alpha_{1m}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_i^{\alpha_{i1}}, \ldots, p_i^{\alpha_{im}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k^{\alpha_{k1}}, \ldots, p_k^{\alpha_{km}} \end{array}$$

и пусть H — подгруппа G, имеющая ранг r_2 и набор инвариантов периодической части

$$\begin{array}{c} p_1^{\beta_{11}}, \ldots, p_1^{\beta_{1m}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_i^{\beta_{i1}}, \ldots, p_i^{\beta_{im}}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k^{\beta_{k1}}, \ldots, p_k^{\beta_{km}}. \end{array}$$

Доказать, что $r_1 \geqslant r_2$ и для каждых $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\alpha_{ij} \geqslant \beta_{ij}.$$

6.3.8.У. Группы заданы порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений. Найти ранг и набор

инвариантов:

1) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^3=e$;
2) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^2=a_2$;
3) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^5=e$, $a_2=a_3^2$;
4) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^3a_2^2=e$, $a_1^7a_2=e$;
5) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3a_2^2a_3=e$, $a_1a_2a_3^3=e$;
6) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3a_2^6a_3^6=e$, $a_1^6a_2^{13}a_3^5=e$;
7) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^2a_2^3=e$;
8) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^3a_2^6a_3^9=e$, $a_1^9a_2^{-3}a_3^9=e$;
9) $A=[a_1, a_2, a_3]$, $a_1^2a_2^3a_3^{-2}=e$, $a_1^6a_2^{-2}a_3^{-3}=e$.

Примечание. Из задачи видно, что изоморфные группы могут иметь разные порождающие множества и определяющие соотношения.

6.3.9. Пусть дана группа G с порождающими a_1, a_2, a_3, заданная соотношением $a_1^{10}=e$. Найти:

1) ранг G;
2) периодическую часть G;
3) фактор-группу по периодической части;
4) число периодических подгрупп;
5) все примарные компоненты периодической части.

6.3.10. Дана конечно порожденная группа G ранга 1 с набором инвариантов периодической части 5^2, 5; 3. Определить:

1) существует ли гомоморфизм G на циклическую группу порядка 25;

2) существует ли гомоморфизм G на конечную группу G', заданную инвариантами 3; 5;

3) существует ли гомоморфизм G на группу без кручения, являющуюся прямым произведением трех бесконечных циклических групп;

4) существует ли неединичный гомоморфизм G в конечную группу G', заданную инвариантами 2^3, 2, 2; 7^2, 7, 7^0; 11, 11, 11.

6.3.11. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющим соотношением $a_1=a_2^2$. Существуют ли в G неединичные элементы конечного порядка?

6.3.12. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и соотношениями $a_1^3=e$, $a_2^5=e$. Найти инварианты подгруппы, порожденной элементами a_2^3 и a_1.

6.3.13. Конечно порожденная группа G имеет ранг 2 и набор инвариантов 2^3, 7. Доказать, что существуют такие $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$, что $G=[a_1, a_2, a_3, a_4]$ и совокупность соотношений $a_1^7=e$, $a_2^8=e$ является определяющей относительно порождающего множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

6.3.14. Конечно порожденная группа G имеет ранг 3 и набор инвариантов периодической части 5^2, 5^2; 7^3. Определить:

1) число периодических неединичных характеристических подгрупп;

2) число вполне характеристических периодических неединичных подгрупп;

3) существуют ли вполне характеристические подгруппы G, являющиеся группами без кручения.

6.3.15. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^5=e$. Сколько автоморфизмов существует у группы G?

6.3.16. Группа задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющими соотношениями $a_1^2a_2^5=e$, $a_1^5a_2^{-3}=e$. Какой порядок имеет подгруппа, порожденная элементом $a_1^2a_2$?

6.3.17. Пусть конечно порожденная группа G имеет ранг 5 и набор инвариантов 3^2, 3; 5^3, 5. Определить:

1) существуют ли в G собственные подгруппы, изоморфные G;

2) существует ли эндоморфизм G на себя, не являющийся автоморфизмом.

6.3.18. Доказать, что множество всех неизоморфных конечно порожденных абелевых групп счетно.

§ 4. Бесконечные абелевы группы

Абелева группа G называется *полной*, если для всякого элемента $a \in G$ и всякого натурального числа n уравнение $x^n=a$ имеет в G хотя бы одно решение (см. 5.5.17). Класс полных абелевых групп полностью описан. Важность этого класса объясняется тем, что произвольная абелева группа изоморфна некоторой подгруппе полной группы (см. 6.4.25).

Подгруппа C группы G называется *сервантной*, если для любого элемента $c \in C$ и любого натурального числа n из разрешимости в группе G уравнения $x^n=c$ следует его разрешимость уже в подгруппе C.

Пусть a — элемент группы G, примарной относительно простого числа p. Натуральное число k называется *высотой* элемента a в группе G, если уравнение $x^{p^k}=a$ разрешимо в G, а уравнение $x^{p^{k+1}}=a$ уже не разрешимо в G. Если уравнение $x^{p^k}=a$

разрешимо в G для каждого натурального k, то говорят, что a имеет *бесконечную высоту* в G. Пусть $a \in G$ — элемент бесконечного порядка, и пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Поставим в соответствие элементу a символ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, в котором $\alpha_n = 0$, если уравнение $x^{p_n} = a$ не имеет решения в G; $\alpha_n = k$, если в G может быть решено уравнение $x^{p_n^k} = a$, но уравнение $x^{p_n^{k+1}} = a$ не разрешимо в G; $\alpha_n = \infty$, если все уравнения $x^{p_n^i} = a$ разрешимы в G $(i = 1, 2, \ldots)$. Символ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ называется *характеристикой* элемента a.

Характеристика $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ называется *эквивалентной* характеристике $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$, если $\alpha_n = \beta_n$ для всех n, кроме, может быть, конечного числа, притом таких, что и α_n и β_n отличны от ∞. Все характеристики распадаются на непересекающиеся классы эквивалентных характеристик (см. 6.4.29). Эти классы называются *типами*. Говорят, что тип α' не превосходит β' $(\alpha' \leqslant \beta')$, если существует характеристика α типа α' и характеристика β типа β' такие, что $\alpha_n \leqslant \beta_n$ для всех n. При этом ∞ считается больше любого числа.

6.4.1. Доказать, что если в неперiодической группе G все элементы бесконечного порядка вместе с единицей образуют подгруппу, то G — группа без кручения.

6.4.2.Т. Доказать, что фактор-группа абелевой группы по периодической части есть группа без кручения.

6.4.3. Пусть группа G содержит элементы порядков $p_1, p_2, \ldots, p_n$, где p_i $(i = 1, \ldots, n)$ — взаимно простые числа. Доказать, что G содержит элемент порядка $p_1 p_2 \ldots p_n$.

6.4.4.Т.У. Всякая подгруппа A и фактор-группа G/A группы G конечного ранга сами имеют конечный ранг, причем сумма рангов A и G/A равна рангу G. Доказать.

6.4.5. Доказать, что ранг прямого произведения конечного числа групп конечного ранга равен сумме рангов сомножителей.

6.4.6. Пусть p — простое число, и пусть G' — аддитивная группа всех рациональных чисел, у которых знаменатели суть степени числа p. Обозначим через G'' подгруппу G', состоящую из всех целых чисел. Доказать, что группа $G = G'/G''$ есть бесконечная периодическая группа.

Примечание. Группу G называют обычно группой типа p^∞.

6.4.7. Доказать, что группа типа p^∞ может быть задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и определяю-

щей совокупностью соотношений $a_1^p = e$, $a_{n+1}^p = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

6.4.8. Имеет ли группа типа p^∞ бесконечные собственные подгруппы?

6.4.9. Имеет ли группа G типа p^∞ собственные гомоморфизмы (см. 6.1.16) на группы, не изоморфные G?

6.4.10. Существует ли смешанная группа G, у которой все неединичные гомоморфные образы изоморфны G?

6.4.11. Будут ли полными группами следующие группы: 1) группа типа p^∞; 2) аддитивная группа рациональных чисел; 3) мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел; 4) мультипликативная группа всех корней всех степеней из 1; 5) прямое произведение циклических групп?

6.4.12. Доказать, что если для всех простых чисел p совокупность p-х степеней всех элементов из группы G совпадает с G, то G является полной группой.

6.4.13. Пусть в группе G, примарной относительно простого числа p, каждый элемент порядка p имеет в G бесконечную высоту. Доказать, что G — полная группа.

6.4.14. Может ли полная группа иметь неединичные гомоморфизмы на конечные группы?

6.4.15. Доказать, что в группе A без кручения уравнение $x^n = a$ $(a \in A)$ не может иметь более одного решения.

6.4.16. Всегда ли являются сервантными подгруппами G следующие подгруппы:

1) сама группа G;

2) периодическая часть G;

3) прямой сомножитель G.

6.4.17.Т. Доказать, что подгруппа C примарной относительно простого числа p группы G тогда и только тогда сервантна в G, когда каждый элемент из C имеет в C такую же высоту, как и во всей группе G.

6.4.18. Доказать, что полная группа C является сервантной в любой группе G, содержащей C в качестве подгруппы.

6.4.19. Доказать, что неединичная сервантная подгруппа полной группы не может быть конечной группой.

6.4.20.У. Доказать, что пересечение любого множества сервантных подгрупп группы без кручения является сервантной подгруппой.

6.4.21.Т.У. Пусть C — пересечение всех сервантных подгрупп группы G, содержащих множество $M \subset G$. Доказать,

что C состоит из всех элементов, линейно зависящих от элементов из M.

6.4.22. Доказать, что подгруппа C группы без кручения G сервантна тогда и только тогда, когда G/C является группой без кручения.

6.4.23. Доказать, что бесконечная циклическая группа изоморфна подгруппе некоторой полной группы.

6.4.24.Т. Доказать, что произвольная группа изоморфна фактор-группе прямого произведения бесконечных циклических групп.

6.4.25.Т.У. Доказать, что произвольная группа изоморфна подгруппе некоторой полной группы.

6.4.26.У. Доказать, что произвольная группа без кручения ранга 1 изоморфна подгруппе группы всех рациональных чисел по сложению.

6.4.27. Пусть m — целое число, отличное от нуля. Найти характеристику m: 1) в группе всех рациональных чисел по сложению; 2) в группе всех целых чисел по сложению; 3) в группе по сложению всех дробей, знаменатели которых равны степеням числа два.

6.4.28. Доказать, что отношение, введенное в множестве характеристик во введении к настоящему параграфу, удовлетворяет определению эквивалентности, данному в § 3 гл. I.

6.4.29. Доказать, что отношение $\leqslant$, введенное в множестве типов, есть отношение упорядоченности.

6.4.30. Доказать, что в группе без кручения ранга 1 характеристики всех неединичных элементов эквивалентны между собой.

Примечание. Класс, к которому принадлежат все элементы группы без кручения ранга 1, называется *типом* группы.

6.4.31.Т. Пусть G_1 и G_2 — группы без кручения ранга 1. Для того чтобы G_1 была изоморфна некоторой подгруппе группы G_2, необходимо и достаточно, чтобы тип G_1 был меньше или равен типу группы G_2. Доказать.

6.4.32.Т. Пусть G_1 и G_2 — группы без кручения ранга 1. Для того чтобы группа G_1 была изоморфна группе G_2, необходимо и достаточно, чтобы тип группы G_1 был равен типу группы G_2. Доказать.

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

§ 1. Представления общего типа

Пусть Π — некоторый класс мультипликативных множеств (см. § 3 гл. II). Всякий гомоморфизм φ мультипликативного множества A в некоторое мультипликативное множество, принадлежащее классу Π, называется *представлением* A в классе Π, а множество $\varphi(A)$ — образом представления. Если класс Π состоит из одного мультипликативного множества A, то говорят о представлении в этом множестве A вместо того, чтобы сказать «представление в классе, состоящем из одного мультипликативного множества A». Если этот гомоморфизм является изоморфизмом, то говорят об *изоморфном* или *точном* представлении. Представление в классе полугрупп преобразований называют представлением преобразованиями (подстановками).

Пусть φ_1 — представление мультипликативного множества M преобразованиями множества Ω_1 и φ_2 — представление множества M преобразованиями множества Ω_2. Говорят, что представление φ_2 несущественно отличается от представления φ_1 (или что φ_1 и φ_2 подобны), если существует такое взаимно однозначное отображение ψ множества Ω_1 на Ω_2, что для всяких $a \in M$ и $\alpha \in \Omega_1$ имеет место $\psi(\varphi_1(a)(\alpha)) = \varphi_2(a)(\psi\alpha)$. Очевидно, это означает, что представления φ_1 и φ_2 могут отличаться лишь внутренней природой элементов множеств Ω_1 и Ω_2.

Каждому элементу u мультипликативного множества M можно сопоставить преобразование $\bar{u}$ множества M, согласно которому $\bar{u}(x) = ux (x \in M)$ (элементы u и x перемножаются согласно действию в M). Такое преобразование u называется *левым сдвигом* множества M, соответствующим элементу u.

Совокупность представлений $\Phi = \{\varphi\}$ мультипликативного множества A в классе Π называют *полной системой представлений*, если для всяких двух различных элементов $x, y \in A$ всегда найдется такое представление $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

7.1.1. Мультипликативное множество $\Omega = \{z_1, z_2, z_3\}$ задано таблицей Кэли:

	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_2	z_1
z_2	z_3	z_1	z_3
z_3	z_3	z_3	z_1

Описать все представления Ω в классе Π мультипликативных множеств, состоящем из одного мультипликативного множества $\Omega_1 = \{u_1, u_2\}$:

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_1
u_2	u_1	u_2

7.1.2. Пусть A — мультипликативная полугруппа натуральных чисел, и пусть задано отображение φ полугруппы A в полугруппу всех преобразований множества $\Omega = \{a, b, c\}$, при котором

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Является ли φ представлением полугруппы A преобразованиями?

7.1.3. Пусть полугруппа A задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ (в смысле теории полугрупп) и определяющим множеством соотношений $a_1a_2 = a_2a_1$, $a_1^3 = a_2^2$. Рассмотрим отображение φ порождающего множества полугруппы A в полугруппу всех преобразований множества $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\varphi(a_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \quad \varphi(a_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Можно ли продолжить отображение φ до представления полугруппы A преобразованиями множества Ω (см. гл. I, § 2)?

7.1.4.Т. Пусть представление φ_2 мультипликативного множества M несущественно отличается от представления φ_1. Доказать, что φ_1 будет несущественно отличаться от φ_2.

7.1.5. Пусть φ_1 и φ_2 — два представления мультипликативного множества M, несущественно отличающиеся друг от друга. Доказать, что если одно из них является изоморфным, то и другое будет изоморфным.

7.1.6. Пусть множества Ω_1 и Ω_2 равномощны и φ_1 — представление мультипликативного множества M преобразованиями Ω_1. Доказать, что существует представление φ_2 мультипликативного множества M преобразованиями множества Ω_2, которое несущественно отличается от представления φ_1.

7.1.7. Пусть φ_1 и φ_2 — два представления мультипликативного множества M, несущественно отличающиеся друг от друга. Доказать, что образы этих представлений изоморфны.

7.1.8. В множестве $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ определено умножение, согласно которому $a_i a_j = a_5$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$. Найти все представления M преобразованиями множества $\{1, 2\}$. Выяснить, какие из них несущественно отличаются друг от друга. Есть ли среди этих представлений изоморфные?

7.1.9. Пусть каждому элементу u мультипликативного множества M сопоставлен левый сдвиг $\bar{u}$ множества M, соответствующий элементу u. Если это отображение M в T_M (множество всех преобразований M) является представлением M преобразованиями, то умножение в M ассоциативно, т. е. M является полугруппой. Доказать.

7.1.10. Пусть каждому элементу u полугруппы M сопоставлен левый сдвиг $\bar{u}$. Доказать, что такое отображение M в T_M (см. 7.1.9) является представлением M преобразованиями.

Примечание. Результат сопоставить с 7.1.9. Описанное представление полугруппы будем называть в дальнейшем *представлением левыми сдвигами.*

7.1.11. Найти представления левыми сдвигами следующих полугрупп:

1) моногенной полугруппы типа (3, 5);

2) полугруппы A_1, заданной порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющим множеством соотношений

$$a_2 a_1 = a_1 a_2 = a_2, \quad a_1^2 = a_1, \quad a_2^2 = a_2;$$

3) полугруппы $A_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$, заданной таблицей Кэли:

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_2
a_3	a_1	a_2	a_3

Для каких из указанных выше полугрупп представления левыми сдвигами являются изоморфными представлениями?

7.1.12. Пусть полугруппа A обладает единицей. Доказать, что представление A левыми сдвигами является изоморфным представлением.

7.1.13.Т. Пусть представление полугруппы A левыми сдвигами является изоморфным представлением, и пусть $a_1, a_2 \in A$. Доказать, что если $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A$, то $a_1 = a_2$.

7.1.14.Т. Пусть в полугруппе A не существует элементов $a_1 \neq a_2$ таких, что $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A$. Доказать, что представление полугруппы A левыми сдвигами является изоморфным представлением.

Примечание. В задачах 7.1.13 и 7.1.14 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы представление полугруппы левыми сдвигами было изоморфным представлением.

7.1.15. В множестве M определено действие, согласно которому $xy = x$ для всех $x, y \in M$. Найти представление M левыми сдвигами.

7.1.16. В множестве M определено действие, согласно которому $xy = y$ для всяких $x, y \in M$. Найти представление M левыми сдвигами.

7.1.17. Пусть Π — класс полугрупп, каждая из которых состоит только из взаимно однозначных преобразований, и пусть полугруппа S с единицей имеет изоморфное представление в классе Π. Тогда действие в полугруппе S обладает свойством *сократимости слева* и S не имеет отличных от единицы идемпотентов. Доказать.

Примечание. Полугруппу, у которой действие обладает свойством сократимости слева, называют *полугруппой с левым сокращением*. Аналогично определяются полугруппа с правым сокращением и полугруппа с двусторонним сокращением.

7.1.18.Т.У. Каждая полугруппа A имеет изоморфное представление преобразованиями. Доказать.

Примечание. Таким образом, доказано, что с точностью до изоморфизма все полугруппы исчерпываются полугруппами преобразований.

7.1.19.Т. Пусть в полугруппе A для каждого элемента $a \in A$ существует $z_a \in A$ такой, что $az_a = z_a$, и пусть φ — произвольное изоморфное представление A преобразованиями. Тогда каждое преобразование $\varphi(a) \in \varphi(A)$ имеет неподвижную точку. Доказать.

7.1.20.Т.У. Пусть полугруппа A такова, что при любом изоморфном представлении полугруппы A преобразованиями каждое преобразование из образа представления имеет неподвижную точку. Доказать, что для каждого элемента $a \in A$ существует элемент $z_a \in A$ такой, что $az_a = z_a$.

Примечание. В задачах 7.1.19 и 7.1.20 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы при любом изоморфном представлении полугруппы A преобразованиями каждое преобразование имело неподвижную точку.

7.1.21. Пусть A — мультипликативная полугруппа рациональных чисел. Имеет ли A полную систему представлений в классе П, состоящем из всех групп?

7.1.22. Существует ли полная система представлений моногенной полугруппы типа (5, 7) в классе всех регулярных коммутативных полугрупп (см. гл. II, § 5).

7.1.23. Описать все моногенные полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех групп.

7.1.24. Пусть $C = \{0, 1\}$ — мультипликативная полугруппа (с обычным правилом умножения чисел). Описать все конечные моногенные полугруппы, которые имеют полную систему представлений в полугруппе C.

7.1.25. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех коммутативных полугрупп.

7.1.26. Пусть Π_1 — класс всех полугрупп с левым сокращением, Π_2 — класс всех полугрупп с правым сокращением, Π_3 — класс полугрупп с двусторонним сокращением. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений: 1) в Π_1; 2) в Π_2; 3) в Π_3.

7.1.27. Пусть П — класс всех регулярных коммутативных полугрупп (см. гл. II, § 5). Доказать, что периодическая по-

лугруппа A, имеющая полную систему представлений в классе П, регулярна.

7.1.28.У. Пусть все элементы коммутативной полугруппы A — идемпотенты. Доказать, что полугруппа A имеет полную систему представлений в полугруппе C из задачи 7.1.24.

7.1.29.У. Описать все полугруппы, которые имеют полную систему представлений в классе всех коммутативных полугрупп, все элементы которых идемпотентны.

§ 2. Представления групп преобразованиями

Понятия и терминологию, введенную в предыдущем параграфе для произвольных мультипликативных множеств, мы будем в этом параграфе применять для групп, причем здесь мы будем рассматривать только представления групп обратимыми преобразованиями, называя их просто представлениями преобразованиями.

Если образ некоторого представления φ группы G является транзитивной группой (см. гл. IV, § 9), то представление будем называть *транзитивным*.

Роль транзитивных представлений заключается в том, что каждое представление группы можно в некотором смысле описать при помощи транзитивных представлений этой группы (см. 4.9.29, 7.2.32).

Пусть H — подгруппа группы G. Множество Ω есть множество правых смежных классов группы G по подгруппе H. Для каждого $g \in G$ рассмотрим преобразование u_g^H множества Ω, согласно которому $u_g^H(xH) = gxH$.

Отображение φ_H группы G в полугруппу преобразований T_Ω, определенное равенством

$$\varphi_H(g) = u_g^H,$$

является представлением группы G преобразованиями (см. 7.2.1 и 7.2.2). Представление φ_H будем называть *представлением группы G по подгруппе H*.

Роль представлений φ_H заключается в том, что каждое транзитивное представление любой группы несущественно отличается от некоторого представления этой группы по ее подгруппе (см. 7.2.22).

Среди представлений группы выделяются представления левыми сдвигами (см. 7.1.10).

Представление любой группы левыми сдвигами является изоморфным представлением (см. 7.2.7). Отсюда получаем, что каждая группа изоморфна некоторой группе преобразований.

Иными словами, с точностью до изоморфизма все группы исчерпываются группами преобразований.

7.2.1. Пусть H — подгруппа группы G, Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе H.

Доказать, что преобразование u_g^H множества Ω, определенное равенством $u_g^H(xH) = gxH$, обратимо.

7.2.2.Т.У. Пусть H — подгруппа группы G, Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе H. Доказать, что φ_H является представлением группы G преобразованиями множества Ω.

7.2.3. Доказать, что образ представления группы кватернионов (см. 2.6.39) по подгруппе $H = \{1, -1\}$ есть прямое произведение двух циклических групп второго порядка.

7.2.4. Пусть G — группа из задачи 5.4.18, $H = \{e, (ab)^2\}$. Найти образы элементов a, b при представлении φ_H. Является ли это представление изоморфным?

Примечание. Так как $G = [a, b]$, то, зная образы элементов a, b при некотором представлении, легко найти само представление.

7.2.5. Пусть G — группа. Доказать, что образ представления группы G левыми сдвигами состоит из обратимых преобразований.

7.2.6. Найти представления левыми сдвигами следующих групп:

1) группы кватернионов (см. 2.6.39);
2) группы, заданной в задаче 5.4.18;
3) нециклической группы шестого порядка (см. 5.4.27);
4) циклической группы четвертого порядка.

7.2.7.Т Пусть G — произвольная группа. Доказать, что представление группы G левыми сдвигами является изоморфным представлением.

7.2.8. Доказать, что в каждой группе G найдется подгруппа H такая, что представление φ_H будет являться представлением левыми сдвигами. Что это за подгруппа?

7.2.9. Пусть G — мультипликативная группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные рациональные числа и $a \neq 0$. Пусть H — подгруппа G, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) представление φ_H группы G по подгруппе H несущественно отличается от представления φ группы G преобразованиями множества рациональных чисел, отличных от нуля, согласно которому

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = u_a,$$

где $u_a x = ax$ для любого рационального x;

2) представление φ_H неизоморфное.

7.2.10.У. Пусть G — группа из задачи 5.2.21. Доказать, что:

1) для любого натурального числа n группа G обладает транзитивным представлением преобразованиями степени n;

2) группа G имеет по крайней мере два существенно отличающихся друг от друга представления преобразованиями девятой степени.

7.2.11.Т. Пусть H — подгруппа группы G. Доказать, что образ представления группы G по подгруппе H является транзитивной группой преобразований (см. гл. IV, § 9).

7.2.12. Пусть G — группа из задачи 5.4.18, $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, bab\}$. Доказать, что представления группы G по подгруппам H_1, H_2 несущественно отличаются друг от друга.

7.2.13.У. Пусть H_1 и H_2 — сопряженные подгруппы группы G. Доказать, что представления группы G по подгруппам H_1 и H_2 несущественно отличаются друг от друга.

7.2.14.У. Пусть представления группы G по подгруппам H_1 и H_2 несущественно отличаются друг от друга. Доказать, что H_1 и H_2 — сопряженные подгруппы группы G.

Примечание. В задачах 7.2.13 и 7.2.14 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы два представления группы по подгруппам несущественно отличались друг от друга.

7.2.15. Пусть H — подгруппа группы G, и пусть φ_H — представление группы G по подгруппе H. Доказать, что элементы группы G, преобразующиеся в единицу при этом представлении, содержатся в H и образуют нормальный делитель группы G, который является максимальным среди нормальных делителей G, содержащихся в H.

7.2.16.Т. Доказать, что если подгруппа H группы G содержит неединичный нормальный делитель G, то представление группы G по подгруппе H неизоморфное.

7.2.17.Т.У. Доказать, что если подгруппа H группы G не содержит неединичных нормальных делителей группы G, то представление группы G по подгруппе H изоморфное.

Примечание. В задачах 7.2.16 и 7.2.17 получено необходимое и достаточное условие того, чтобы представление группы по подгруппе было изоморфным.

7.2.18. Пусть $H=[(1234), (24)]$ — подгруппа симметрической группы S_4. Является ли представление группы S_4 по подгруппе H изоморфным?

7.2.19.Т. Пусть φ — представление группы G преобразованиями множества Ω, и пусть α — произвольный, но фиксированный элемент из Ω. Обозначим через H множество элементов $g \in G$ таких, что для $\varphi(g)$ элемент α является неподвижной точкой. Доказать, что H — подгруппа G.

7.2.20.Т. Пусть сохраняются условия и обозначения предыдущей задачи, и пусть для некоторого $x \in G$ выполняется равенство $\varphi(x)(\alpha)=\beta$. Доказать, что для каждого элемента $y \in xH$ выполняется $\varphi(y)(\alpha)=\beta$, а для каждого $z \notin xH$ выполняется $\varphi(z)(\alpha) \neq \beta$.

Примечание. Сопоставьте результаты двух последних задач с результатами задачи 4.9.5.

7.2.21.Т.У. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 7.2.19, и пусть $\varphi(G)$ — транзитивная группа. Доказать, что отображение ω, определенное равенством $\omega(\gamma)=xH$ $(\gamma \in \Omega)$, если $\varphi(x)(\alpha)=\gamma$, является взаимно однозначным отображением множества Ω на множество правых смежных классов группы G по подгруппе H.

7.2.22.Т.У. Пусть сохраняются условия и обозначения задачи 7.2.19, и пусть $\varphi(G)$ — транзитивная группа. Доказать, что представление φ несущественно отличается от представления группы G по подгруппе H.

7.2.23.У. Пусть G — группа, определенная в задаче 5.4.18. Доказать, что G имеет изоморфные транзитивные представления четвертой степени, существенно отличающиеся друг от друга.

7.2.24. Доказать, что группа G из предыдущей задачи имеет три изоморфных транзитивных представления преобразованиями, существенно отличающихся друг от друга. Найти эти представления.

7.2.25.Т. Доказать, что любые два изоморфных транзитивных представления абелевой группы несущественно отличаются друг от друга.

7.2.26. Выяснить, имеет ли группа кватернионов (см. 2.6.39) изоморфные транзитивные представления преобразованиями степени меньше восьми.

7.2.27.У. В симметрической группе S_4 взяты подгруппы $H_1 = [(1234)]$, $H_2 = [(12), (34)]$. Найти образы элементов (12), (1234) при представлениях φ_{H_1}, φ_{H_2}.

7.2.28.У. Доказать, что представления φ_{H_1}, φ_{H_2} предыдущей задачи являются изоморфными представлениями группы S_4, существенно отличающимися друг от друга.

7.2.29.У. Доказать, что симметрическая группа S_4 имеет только два изоморфных транзитивных существенно отличающихся друг от друга представления шестой степени.

7.2.30. Пусть G — нециклическая группа четырнадцатого порядка (см. 5.4.27). Доказать, что G не обладает транзитивными изоморфными представлениями степени меньше семи.

7.2.31. Доказать, что все транзитивные представления седьмой степени группы G из предыдущей задачи несущественно отличаются друг от друга.

7.2.32. Пусть φ — представление группы G преобразованиями множества Ω, у которого группа $\varphi(G) = G'$ интранзитивна. Если M_i — некоторая система интранзитивности группы G', то обозначим через φ_i отображение G в группу преобразований множества M_i, согласно которому $\varphi_i(g) = u_i$, если $\varphi(g) = u$, где u_i — преобразование, определенное в задаче 4.9.28. Доказать, что φ_i — транзитивное представление группы G.

7.2.33. Пусть G — группа, v_g — преобразование множества G, определенное равенством

$$v_g(x) = xg \quad (x \in G).$$

Обозначим через ψ отображение группы G в полугруппу всех преобразований множества G, согласно которому

$$\psi(g) = v_g.$$

Для каких групп это отображение является представлением группы G преобразованиями?

§ 3. Представления групп матрицами

Для работы с настоящим параграфом необходимо знание элементов теории матриц. Все рассматриваемые в этом параграфе матрицы имеют своими элементами комплексные числа. Представление группы G в классе всех групп квадратных неособенных

матриц порядков n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) называется представлением группы G матрицами. Если образ представления состоит из матриц порядка n, то говорят о представлении группы матрицами порядка n.

Два представления T_1 и T_2 группы G квадратными матрицами порядка n называют эквивалентными, если найдется такая неособенная матрица A порядка n, что для каждого $a \in G$ имеет место следующее соотношение:

$$T_2(a) = AT_1(a)\,A^{-1}.$$

Пусть T_i ($i = 1, \ldots, k$) — представления группы G квадратными матрицами порядков m_i. Отображение T, сопоставляющее каждому элементу $a \in G$ клеточно-диагональную матрицу $T(a)$ порядка $n = m_1 + \ldots + m_k$ с диагональными клетками $T_1(a)$, $T_2(a)$, ..., $T_k(a)$, является *представлением группы G матрицами порядка* $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ (см. 7.3.13). Представление T называется *прямой суммой* представлений T_1, T_2, ..., T_k. Представление T группы G матрицами, которое эквивалентно прямой сумме представлений группы G меньших порядков, называется *вполне приводимым представлением*. Иногда вполне приводимые представления называют *разложимыми* представлениями.

Пусть T — представление группы G матрицами порядка n, и пусть найдется такая неособенная матрица P, что для всех $x \in G$ матрицы $S(x) = PT(x)P^{-1}$ имеют следующий вид:

$$S(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ A(x) & T_2(x) \end{pmatrix},$$

где $T_1(x)$ и $T_2(x)$ — квадратные матрицы порядков m_1 и m_2 ($m_1 + m_2 = n$), $A(x)$ — прямоугольная матрица, имеющая m_2 строк и m_1 столбцов, 0 — нулевая матрица, имеющая m_1 строк и m_2 столбцов. Тогда представление T называется *приводимым* представлением группы G, в противном случае T называют *неприводимым* представлением.

Очевидно, что вполне приводимое (разложимое) представление приводимо. Однако обратное утверждение не имеет места (см. 7.3.16).

Для конечных групп каждое приводимое представление является вполне приводимым (см. 7.3.20).

7.3.1. Пусть G — произвольная группа. Доказать, что отображение $T_0 : T_0(a) = E_n$ ($a \in G$), где E_n — единичная матрица порядка n, есть представление группы G квадратными матрицами порядка n. Доказать, далее, что при всяком представлении группы G матрицами порядка n единице G соответствует матрица E_n.

Примечание. Представление T_0 называется *единичным* представлением группы G квадратными матрицами порядка n.

7.3.2. Пусть S_n — симметрическая группа n-й степени, и пусть $s \in S_n$:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через T отображение группы S_n в группу квадратных неособенных матриц порядка n такое, что $T(s) = (a_{ij})$, где $a_{1i_1} = a_{2i_2} = \dots = a_{ni_n} = 1$, а остальные элементы матрицы (a_{ij}) равны нулю. Доказать, что T есть представление группы S_n матрицами.

7.3.3. Пусть G — группа вращений трехмерного векторного пространства R_3 вокруг оси Oz и $g \in G$ — поворот на угол φ_g. Доказать, что отображение T:

$$T(g) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_g & -\sin\varphi_g & 0 \\ \sin\varphi_g & \cos\varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

есть представление G матрицами.

7.3.4. Пусть группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a_2\}$ и определяющей совокупностью соотношений: $a_1^3 = e$, $a_2^2 = e$, $a_2 a_1 = a_1^2 a_2$. Проверить, что $G = \{e, a_1, a_1^2, a_2, a_1a_2, a_1^2a_2\}$. Будет ли представлением G следующее отображение T:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad T(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T(a_1^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T(a_1a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T(a_1^2a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3.5. Пусть G — группа вращений трехмерного пространства R_3 вокруг некоторой оси, и пусть элемент $g \in G$

осуществляет поворот на угол φ_g. Будет ли отображение T:

$$T(g)=\begin{pmatrix}\varphi_g & 0\\ 0 & \varphi_g\end{pmatrix}$$

представлением G квадратными матрицами порядка 3?

7.3.6. Группа G задана порождающим множеством $\{a_1, a$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^2=e$, $a_2^2=$ Определим отображение T порождающего множества $\{a_1, a$ в группу G' квадратных неособенных матриц порядка 2:

$$T(a_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix};\qquad T(a_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Можно ли отображение T продолжить (см. гл. I, § 2) до отображения T' группы G так, чтобы T' было представлением G матрицами порядка 2?

7.3.7. Пусть G — мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел. Доказать, что существует изоморфное представление G матрицами порядка 2 с вещественными элементами.

7.3.8.У. Доказать, что произвольная конечная группа порядка n имеет неединичное представление матрицами порядка n.

7.3.9. Пусть G — группа, и пусть T — представление группы G матрицами порядка n. Если A — произвольная неособенная матрица порядка n, то отображение T_A: $T_A(a)=$ $=AT(a)A^{-1}$ $(a\in G)$ есть представление группы G матрицами. Доказать.

7.3.10. Существуют ли неединичные представления симметрической группы S_n квадратными матрицами порядка n, отличные от представления, указанного в 7.3.2?

7.3.11. Пусть G — группа вращений трехмерного векторного пространства R_3 вокруг оси Ox, и пусть элементу $g\in G$ соответствует угол поворота φ_g. Доказать, что отображение T':

$$T'(g)=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi_g+2\sin\varphi_g & -5\sin\varphi_g & 3\cos\varphi_g+16\sin\varphi_g-3\\ \sin\varphi_g & -2\sin\varphi_g+\cos\varphi_g & 7\sin\varphi_g-2\cos\varphi_g+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

является представлением группы G матрицами порядка три.

7.3.12. Доказать, что все представления группы G матрицами, эквивалентные данному представлению, эквивалентны между собой.

7.3.13.Т. Пусть T_i $(i=1, \ldots, k)$ — представления группы G квадратными матрицами порядков m_i. Обозначим через T следующее отображение группы G в группу квадратных неособенных матриц порядка $n=m_1+\ldots+m_k$.

Каждому элементу $a \in G$ сопоставляется клеточно-диагональная матрица $T(a)$ с диагональными клетками $T_1(a)$, $T_2(a), \ldots, T_k(a)$. Доказать, что отображение T является представлением группы G матрицами порядка n.

7.3.14.Т. Пусть T_1' и T_2' — два эквивалентных представления группы G матрицами порядка m; T_1'' и T_2'' — два эквивалентных представления группы G матрицами порядка k. Обозначим через T_1 прямую сумму представлений T_1' и T_1'', а через T_2 — прямую сумму представлений T_2' и T_2''. Доказать, что T_1 и T_2 — эквивалентные представления группы G матрицами порядка $m+k$.

7.3.15. Пусть $G=[a]$ — бесконечная циклическая группа. Рассмотрим отображение

$$T(a^n)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix} \qquad (n=0, \pm 1, \ldots).$$

Будет ли T вполне приводимым представлением?

7.3.16. Пусть T — неприводимое представление группы матрицами порядка n, и пусть X — ненулевой столбец высоты n, тогда множество всех линейных комбинаций столбцов вида $T(a)X$ представляет собой все пространство столбцов высоты n. Доказать.

7.3.17.Т.У. Пусть представление T группы G матрицами порядка n неприводимо, и пусть квадратная матрица A порядка n перестановочна со всеми матрицами $T(a)$ $(a \in G)$. Доказать, что A — скалярная матрица, т. е. $A=\lambda E_n$ при некотором числе λ (E_n — единичная матрица порядка n).

7.3.18.Т.У. Пусть G — конечная группа и T — приводимое представление G матрицами порядка n. Доказать, что T является вполне приводимым представлением группы G.

7.3.19.Т.У. Каждое приводимое представление конечной группы G матрицами есть прямая сумма неприводимых представлений группы G. Доказать.

7.3.20.У. Пусть T — неприводимое представление конечной группы G матрицами порядка n, и пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через X матрицу $\sum_{g \in G} T(g) A T(g^{-1})$. Доказать, что найдется такое число λ, для которого $X = \lambda E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n.

7.3.21.Т.У. Доказать, что всякое представление абелевой группы матрицами порядка $n \geqslant 2$ приводимо.

§ 4. Группы гомоморфизмов абелевых групп

Пусть A и B — произвольные абелевы группы. Рассмотрим множество $\Phi(A, B)$ всех представлений группы A в классе, состоящем из одной группы B. В множестве $\Phi(A, B)$ введем действие, полагая $\chi_1 \chi_2 = \chi_3$ $(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \Phi(A, B))$, если для любого $a \in A$ в группе B выполняется $\chi_1(a) \cdot \chi_2(a) = \chi_3(a)$ (см. 7.4.1). Относительно указанного выше действия $\Phi(A, B)$ образует абелеву группу (см. 7.4.2).

Группу $\Phi(A, B)$ в этом параграфе будем называть *группой гомоморфизмов* или *группой представлений* группы A в B. Указанное выше действие в множестве $\Phi(A, B)$ можно рассматривать и для произвольных групп, только в этом случае действие может оказаться не всюду определенным на $\Phi(A, B)$.

Если $A = B$, то $\Phi(A, B)$ есть множество эндоморфизмов группы A. Относительно введенного выше действия $\Phi(A, A)$ образует группу, которую будем называть *группой эндоморфизмов*. Таким образом, в множестве $\Phi(A, A)$ имеется два действия: действие, введенное выше, и действие суперпозиции (см. гл. III, § 4). В настоящем параграфе, говоря о действии в $\Phi(A, A)$, будем все время иметь в виду действие, определенное выше.

Хотя новое действие, так же как и действие суперпозиции, будем обозначать точкой, следует помнить, о каком именно действии идет речь в настоящем параграфе.

7.4.1. Пусть χ_1 и χ_2 — гомоморфизмы абелевой группы A в абелеву группу B, тогда отображение χ_3, определенное по следующему правилу: $\chi_3(a) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a)$ $(a \in A)$, есть гомоморфизм группы A в группу B. Доказать.

7.4.2. Доказать, что относительно действия, указанного во введении, множество $\Phi(A, B)$ всех гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B образует абелеву группу.

7.4.3. Пусть A и B — бесконечные циклические группы. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.4. Пусть A — бесконечная циклическая группа. Доказать, что для любой абелевой группы B группа $\Phi(A, B)$ изоморфна B.

7.4.5. Пусть A — периодическая абелева группа; B — абелева группа без кручения. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.6. Пусть A и B — примарные циклические группы порядков $p_1^{k_1}$ и $p_2^{k_2}$ соответственно. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — циклическая группа порядка $p_1^{\min(k_1; k_2)}$, если $p_1 = p_2$, и $\Phi(A, B)$ — единичная группа, если $p_1 \neq p_2$.

7.4.7. Пусть A — циклическая примарная группа порядка p^n, а B — произвольная абелева группа. Определить $\Phi(A, B)$.

7.4.8. Найти группу эндоморфизмов абелевой группы G порядка pq, где p и q — различные простые числа.

7.4.9. Доказать, что группа эндоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел R изоморфна R.

7.4.10.Т. Если группа A является прямым произведением абелевых групп H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то при любой абелевой группе B группа $\Phi(A, B)$ изоморфна прямому произведению групп $\Phi(H_i, B)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Доказать.

7.4.11.У. Пусть абелева группа A задана порождающим множеством $\{a_1, a_2, a_3\}$ и определяющей совокупностью соотношений $a_1^2 = e$, $a_2^5 = e$, и пусть B — бесконечная циклическая группа. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.12.У. Пусть конечно порожденная абелева группа A имеет ранг r, а B — бесконечная циклическая группа. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.13.У. Пусть A — конечная абелева группа, заданная инвариантами 3^2, 3; 2, и пусть B — циклическая группа порядка 2. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.14.У. Пусть конечная абелева группа A задана инвариантами

$$5^3,\ 5^2,\ 5,\ 5,\ 5;$$
$$3^3,\ 3^3,\ 3,\ 3;$$
$$2^8,\ 2^7,\ 2,\ 2,$$

и пусть B — циклическая группа порядка 25. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.15.У. Группа A представляет собой прямое произведение циклической группы порядка 7 и бесконечной циклической группы; B — циклическая группа порядка 49. Найти $\Phi(A, B)$.

7.4.16.У. Пусть B — смешанная абелева группа, периодическая часть которой есть циклическая группа порядка 5,

и пусть A — конечная абелева группа, заданная инвариантами 3^2, 3, 3, 3; 5^5; 7^3, 7, 7, 7. Найти группу $\Phi(A, B)$.

7.4.17.Т. Пусть B — прямое произведение абелевых групп B_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда при любой абелевой группе A группа $\Phi(A, B)$ изоморфна прямому произведению групп $\Phi(A, B_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Доказать.

7.4.18.У. Для следующих пар конечных абелевых групп A и B, заданных инвариантами, найти $\Phi(A, B)$:

1) A — циклическая группа порядка 5, B имеет набор инвариантов 3^2, 3; 5; 7^3, 7;

2) A имеет инварианты 2^3, 2, 2; 3^2, 3; 5, 5, 5;
B имеет инварианты 5^2, 5; 3^3, 3^2; 7^3, 7;

3) A имеет инварианты 5^3, 5^2, 5; 3^3, 3^2, 3; 2;
B имеет инварианты 2; 7^3, 7^2, 7; 11.

7.4.19.У. Для следующих пар абелевых групп A и B, заданных порождающими множествами и определяющими совокупностями соотношений, найти $\Phi(A, B)$:

1) $A = [a_1, a_2, a_3]$, $a_1^5 = e$, $a_1a_2 = a_2a_1$, $a_1a_3 = a_3a_1$, $a_2a_3 = a_3a_2$;
$B = [b_1, b_2]$, $b_1^3 = e$, $b_1b_2 = b_2b_1$;

2) $A = [a_1, a_2]$, $a_1^2a_2^3 = e$, $a_1^4a_2^9 = e$, $a_1a_2 = a_2a_1$;
$B = [b_1, b_2]$, $b_1^3 = e$, $b_1b_2 = b_2b_1$;

3) $A = [a_1, a_2]$, $a_1^5a_2^{-7} = e$, $a_1a_2^2 = e$, $a_1a_2 = a_2a_1$;
$B = [b_1, b_2]$, $b_1^{17} = e$, $b_2^{17} = e$, $b_1b_2 = b_2b_1$.

7.4.20.У. Найти группы эндоморфизмов следующих абелевых групп:

1) конечной группы, заданной инвариантами 2^3, 2^2, 2; 3^3, 3; 5^3, 5^2, 5; 7^2, 7;

2) конечной группы, заданной инвариантами 3, 3, 3; 5^2, 5, 5; 7, 7;

3) конечно порожденной группы ранга 2 с набором инвариантов 5, 5, 5; 7^3, 7;

4) группы, являющейся прямым произведением семи бесконечных циклических групп.

7.4.21.У. Доказать, что, если A и B — конечные абелевы группы, то и $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.22.У. Доказать, что группа эндоморфизмов абелевой группы с конечным числом порождающих есть группа с конечным числом порождающих.

7.4.23.У. Пусть A — конечная абелева группа, а B — абелева группа с конечным числом порождающих. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.24.У. Пусть A — группа с конечным числом порождающих, а B — конечная группа. Доказать, что $\Phi(A, B)$ — конечная группа.

7.4.25. Порядки всех элементов абелевой группы A ограничены в совокупности натуральным числом k. Доказать, что порядки всех элементов группы $\Phi(A, B)$ при любой абелевой группе B ограничены в совокупности тем же числом k.

7.4.26. Пусть A — периодическая абелева группа.

1) Может ли группа эндоморфизмов группы A быть периодической группой с неограниченными в совокупности порядками элементов?

2) Может ли $\Phi(A, A)$ быть полной группой?

7.4.27. Пусть группа эндоморфизмов абелевой группы A есть полная группа. Доказать, что A — полная группа.

7.4.28.У. Когда абелева группа A с конечным числом порождающих имеет своей группой эндоморфизмов: 1) конечную циклическую группу; 2) бесконечную циклическую группу?

7.4.29. Пусть A — абелева группа, примарная относительно простого числа p, и пусть B — произвольная абелева группа. Существуют ли в $\Phi(A, B)$ отличные от единицы элементы χ_0, для которых уравнение $\chi^{p^k} = \chi_0$ разрешимо для любого натурального k?

7.4.30. Пусть B — абелева группа без кручения. Доказать, что для любой абелевой группы A группа $\Phi(A, B)$ есть группа без кручения.

7.4.31. Если B — полная абелева группа без кручения, то и $\Phi(A, B)$ для любой абелевой группы A является полной группой без кручения. Доказать.

7.4.32. Может ли полная абелева группа иметь своей группой эндоморфизмов периодическую абелеву группу?

7.4.33. Пусть A — полная абелева группа. Доказать, что $\Phi(A, B)$ при любой абелевой группе B является группой без кручения.

7.4.34.У. Пусть A — абелева группа с конечным числом порождающих. Выяснить, когда $\Phi(A, A)$ изоморфна A.

§ 5. Характеры групп

Характером представления T группы G квадратными матрицами порядка n называется следующее отображение χ группы G в множество комплексных чисел:

$$\chi(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

где a_{ii} — диагональные элементы матрицы $T(a)$. Для абелевых групп, согласно 7.3.21, неприводимое представление — это гомоморфизм в мультипликативную группу отличных от нуля комплексных чисел. Таким образом, для абелевых групп характер неприводимого представления является гомоморфизмом в мультипликативную группу отличных от нуля комплексных чисел. Совокупность всех гомоморфизмов абелевой группы G в мультипликативную группу всех комплексных чисел, по модулю равных единице, относительно действия, определенного в § 4 настоящей главы, образует группу. Эту группу называют *группой характеров* абелевой группы G.

7.5.1. Найти характеры представлений групп, указанных в задачах 7.3.3, 7.3.4 и 7.3.15.

7.5.2. Пусть T — представление группы S_n, указанное в задаче 7.3.2, и пусть χ — характер этого представления. Доказать, что $\chi(s) = k$ $(s \in S_n)$, где k — число неподвижных точек преобразования s.

7.5.3. Доказать, что характеры эквивалентных представлений группы G матрицами совпадают.

7.5.4. Пусть представление T группы G матрицами является прямой суммой представлений $T_1, T_2, \ldots, T_m$, и пусть χ — характер представления T, а χ_i — характеры представлений T_i $(i = 1, \ldots, m)$. Доказать, что $\chi(a) = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(a)$ для каждого $a \in G$.

7.5.5. Существует ли неединичная группа G, у которой для всякого неизоморфного представления T матрицами порядка n характер χ представления T обладает следующим свойством: $\chi(a) = n$ для каждого $a \in G$?

7.5.6. Пусть x и y — сопряженные элементы группы G, и пусть χ — характер представления T группы G матрицами. Доказать, что $\chi(x) = \chi(y)$.

7.5.7.У. Найти все неприводимые представления циклической группы $[a]$ порядка n.

7.5.8.У. Доказать, что характеры всех неприводимых представлений конечной абелевой группы G представляют собой отображения, образами которых являются только корни из 1.

7.5.9. Найти группу характеров для следующих абелевых групп, заданных порождающим множеством и определяющей совокупностью соотношений:

1) $A=[a]$, $a^{p^k}=e$, где p — простое число;
2) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^3=e$, $a_2^3=e$, $a_1a_2=a_2a_1$;
3) $A=[a_1, a_2]$, $a_1^2=a_2$, $a_2^5=e$, $a_1a_2=a_2a_1$.

7.5.10.Т.У. Доказать, что группа характеров конечной абелевой группы G изоморфна группе G.

7.5.11. Определить группу характеров бесконечной циклической группы.

7.5.12. Пусть G — абелева группа, являющаяся прямым произведением r бесконечных циклических групп. Найти группу характеров.

7.5.13 Каждый характер подгруппы конечной абелевой группы можно продолжить до характера всей группы. Доказать.

7.5.14.У. Пусть G — конечная абелева группа, и пусть $a_1, a_2 \in G (a_1 \neq a_2)$. Тогда существует такой ее характер χ, для которого $\chi(a_1) \neq \chi(a_2)$. Доказать.

Примечание. Из этой задачи следует, что совокупность всех характеров конечной абелевой группы образует полную систему представлений (см. гл. VII, § 1) в классе, состоящем из одной мультипликативной группы всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. Такой же результат имеет место и для произвольной абелевой группы.

ГЛАВА VIII

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

§ 1. Метрические пространства

Пусть M — некоторое множество и ρ — отображение декартова произведения $M \times M$ (гл. I, § 1) в множество вещественных неотрицательных чисел (другими словами, каждой паре (x, y) элементов из M сопоставлено вещественное число $\rho(x, y) \geqslant 0$). Это отображение называется *метрическим* или *метрикой*, если выполняются следующие условия:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всяких $x, y \in M$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всяких $x, y, z \in M$.

Множество M, рассматриваемое относительно некоторой заданной в нем метрики ρ, называется *метрическим пространством* относительно метрики ρ. Элементы метрического пространства называются *точками* этого пространства.

Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и $x, y \in M$. Число $\rho(x, y)$ называют *расстоянием* между точками x и y.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *сходящейся* к точке $x_0 \in M$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$. В этом случае пишут $x_n \to x_0$ или $\lim x_n = x_0$ и говорят, что предел x_n равен x_0. Точка a метрического пространства M называется *предельной* для подмножества $A \in M$, если существует последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ различных точек из A, сходящаяся к точке a.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства M называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{n, m \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Метрическое пространство M называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность сходится в нем к некоторой точке из M.

Метрическое пространство M называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество $A \subset M$ такое, что для каждого элемента $x \in M$ найдется последовательность $x_n \in A$, предел которой равен x. Подмножество E метрического пространства M на-

зывается *компактным* в пространстве M, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества E можно выделить сходящуюся в пространстве M подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Метрическое пространство называется *компактным*, если оно представляет собой компактное в самом себе подмножество.

Подмножество E метрического пространства M называется *ограниченным*, если найдется такое неотрицательное число k, что для любых $x, y \in E$ имеет место $\rho(x, y) \leqslant k$.

Если метрика ρ метрического пространства M такова, что все множество M является ограниченным множеством, то ρ называется *ограниченной метрикой*.

Пусть в множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2 такие, что из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 относительно метрики ρ_1 следует сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 относительно ρ_2, и наоборот. Тогда метрики ρ_1 и ρ_2 называют *эквивалентными*.

Примерами метрических пространств служат так называемые n-мерные векторные пространства R_n $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. декартовы произведения n множеств всех вещественных чисел R, в которых определены сложение и умножение на вещественное число по следующим правилам:

1) $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$;

2) $\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ $(a_i, b_i, \lambda \in R)$, а метрика ρ определена равенством $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (см. 8.1.1, 3)).

8.1.1.У. Для следующих множеств M_i определены отображения ρ_i множеств $M_i \times M_i$ в множество неотрицательных вещественных чисел. Выяснить, какие из них являются метрическими отображениями:

1) M_1 — произвольное множество,

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (x, y \in M_1);$$

2) M_2 — множество вещественных чисел,

$$\rho_2(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in M_2);$$

3) M_3 — n-мерное векторное пространство,

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$;

4) $M_4 = |a|$ — конечная циклическая группа порядка n,

$$\rho_4(a^k, a^l) = |k - l|, \qquad 0 \leqslant k, l < n;$$

5) M_5 — группа квадратных неособенных матриц порядка 2,

$$\rho_5(x, y) = |D_x - D_y|,$$

где D_x и D_y — определители матриц x и y соответственно;

6) M_6 — симметрическая группа S_n,

$$\rho_6(x, y) = |x(1) - y(1)| \qquad (x, y \in S_n);$$

7) M_7 — симметрическая группа S_n,

$$\rho_7(x, y) = \max_{k \in \{1, 2, \ldots, n\}} |x(k) - y(k)| \qquad (x, y \in S_n).$$

8.1.2. Пусть $C_{[a, b]}$ — множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

1) Доказать, что отображение ρ:

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in C_{[a, b]})$$

является метрическим отображением.

2) Будет ли метрикой следующее отображение ρ_1:

$$\rho_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \qquad (f, g \in C_{[a, b]})?$$

8.1.3. В множестве Ω задана метрика ρ. Выяснить, будут ли представлять собой метрику следующие отображения φ_1, φ_2, φ_3:

1) $\varphi_1(x, y) = \rho^2(x, y)$;

2) $\varphi_2(x, y) = \dfrac{1}{\rho(x, y) + 1}$;

3) $\varphi_3(x, y) = e^{\rho(x, y)} - 1$;

4) $\varphi_4(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$.

8.1.4. Пусть S — множество всех числовых последовательностей, и пусть

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) \in S, \qquad y = (\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots) \in S.$$

Положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Доказать, что относительно отображения ρ множество S образует метрическое пространство.

8.1.5. Пусть ρ — метрика в пространстве Ω; k — некоторое вещественное положительное число. Доказать, что отображение $\tilde{\rho}$, согласно которому

$$\tilde{\rho}(x, y) = \min(\rho(x, y); k) \qquad (x, y \in \Omega),$$

является метрическим.

8.1.6. Пусть ρ — метрика в пространстве Ω. Выяснить, каковы должны быть вещественные числа a и b, чтобы отображение φ, согласно которому

$$\varphi(x, y) = a \cdot \rho(x, y) + b \qquad (x, y \in \Omega),$$

также являлось метрикой.

8.1.7. В множестве Ω заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Выяснить, будут ли представлять собой метрику следующие отображения ψ_1, ψ_2, ψ_3:

1) $\psi_1(x, y) = \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)$;

2) $\psi_2(x, y) = e^{\rho_1(x, y)} + e^{\rho_2(x, y)}$;

3) $\psi_3(x, y) = \dfrac{\rho_1(x, y) + 1}{\rho_2(x, y) + 1}$.

8.1.8. Пусть x, y, z, u — произвольные точки метрического пространства с метрикой ρ; тогда

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

Доказать.

8.1.9. Пусть Ω — метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть $x_n, y_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда, если x_n сходится к $x_0 \in \Omega$ и y_n сходится к $y_0 \in \Omega$, то $\rho(x_n, y_n)$ сходится к $\rho(x_0, y_0)$. Доказать.

8.1.10. Пусть в метрическом пространстве Ω последовательность x_n сходится к x_0 и x_n сходится к x_0'. Доказать, что $x_0 = x_0'$.

8.1.11. Пусть в $C_{[a, b]}$ (см. 8.1.2) задана метрика $\rho(f, g) = \max|f(x) - g(x)|$, и пусть последовательность $f_n \in C_{[a, b]}$ сходится к функции f в смысле метрики $C_{[a, b]}$. Будет ли последовательность функций f_n равномерно сходиться к функции f? Пусть последовательность функций $f_n \in C_{[a, b]}$ равномерно сходится к функции $f \in C_{[a, b]}$; будет ли последовательность f_n сходиться к f в смысле метрики ρ?

8.1.12. Доказать, что в метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность фундаментальна.

8.1.13. Доказать, что метрическое пространство вещественных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является полным пространством.

8.1.14. Будут ли полными метрическими пространствами следующие множества:

1) множество рациональных чисел R с метрикой ρ_1:

$$\rho_1(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in R);$$

2) множество числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_n сходится к нулю при $n \to \infty$, с метрикой ρ_2:

$$\rho_2(x, y) = \max_n |x_n - y_n|;$$

3) множество всех ограниченных непрерывных функций, заданных на вещественной прямой, с метрикой ρ_3:

$$\rho_3(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|;$$

4) множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1)?

8.1.15. Пусть в множестве R всех вещественных чисел введена метрика ρ_2 из 8.1.1, 2). Доказать, что R является сепарабельным метрическим пространством.

8.1.16.У. Пусть $C_{[a, b]}$ — метрическое пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1). Доказать, что $C_{[a, b]}$ сепарабельно.

8.1.17.У. Пусть M_T — множество всех вещественных ограниченных функций, определенных на бесконечном множестве T. Можно ли в множестве M_T ввести метрику так, чтобы M_T являлось несепарабельным метрическим пространством?

8.1.18. Будут ли компактными метрическими пространствами следующие множества:

1) множество вещественных чисел относительно метрики ρ:

$$\rho(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in R);$$

2) n-мерное векторное пространство R_n относительно метрики $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$;

3) пространство всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой ρ из 8.1.2, 1).

8.1.19. Доказать, что отрезок является компактным множеством в метрическом пространстве вещественных чисел (см. 8.1.13).

8.1.20.У. Доказать, что любая метрика эквивалентна ограниченной метрике.

8.1.21.Т. Доказать, что компактное подмножество метрического пространства ограничено.

8.1.22.Т. Доказать, что компактное метрическое пространство полно.

8.1.23.Т. Пусть заданы метрические пространства M и N, и пусть $R = M \times N$ — декартово произведение множеств M и N. Определим отображение ρ_1 множества $R \times R$ следующим образом:

$$\rho_1[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$$
$$(x_1, x_2 \in M; \quad y_1, y_2 \in N).$$

Доказать, что R является метрическим пространством относительно отображения ρ_1.

Примечание. Пространство R называется *произведением* пространств M и N.

8.1.24. Пусть метрические пространства M и N компактны. Доказать, что их произведение также компактно.

8.1.25. Пусть метрические пространства M и N полны. Доказать, что их произведение $M \times N$ также является полным пространством.

8.1.26. Пусть M и N — сепарабельные метрические пространства. Доказать, что их произведение также является сепарабельным пространством.

8.1.27. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и M' — подмножество M. Определим отображение ρ' множества $M' \times M'$ в множество вещественных неотрицательных чисел:

$$\rho'(x', y') = \rho(x', y') \qquad (x', y' \in M').$$

Доказать, что относительно отображения ρ' множество M' является метрическим пространством.

Примечание. Пространство M' называют *подпространством* M.

8.1.28. Доказать, что всякое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

8.1.29. Доказать, что всякое подпространство компактного метрического пространства компактно.

8.1.30. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел в 8.1.13. Доказать, что в R существуют компактные подпространства.

Примечание. Результат сравнить с задачей 8.1.18, 1).

8.1.31. Пусть $M=\{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Рассмотрим следующее отображение ρ множества $M \times M$:

$$\rho(i, j)=\begin{cases} 0, & \text{если } i=j; \\ 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ четные } (i \neq j); \\ 2, & \text{если или } i \text{ или } j \text{ нечетное } (i \neq j). \end{cases}$$

Проверить, что ρ является метрикой на множестве M, и доказать, что ρ эквивалентна метрике из задачи 8.1.1, 1).

8.1.32. Пусть $G=[a]$ — бесконечная циклическая группа. Рассмотрим отображение ρ множества $G \times G$ в множество неотрицательных вещественных чисел:

$$\rho(a^k, a^l)=|k-l| \qquad (l, k=0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

Проверить, что отображение ρ является метрикой, и доказать, что ρ эквивалентна метрике из задачи 8.1.1, 1).

§ 2. Группы непрерывных преобразований метрического пространства

Преобразование f метрического пространства M называется *непрерывным*, если для всякой точки $x_0 \in M$ и всякой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к точке $f(x_0)$. Обратимое преобразование f метрического пространства M называется *взаимно непрерывным*, если f само непрерывно и обратное к нему преобразование также непрерывно.

Совокупность всех обратимых взаимно непрерывных преобразований метрического пространства M образует группу относительно действия суперпозиции преобразований (см. 8.2.6). Группа обратимых преобразований G метрического пространства M такая, что всякий элемент f из G является непрерывным преобразованием, называется *группой непрерывных преобразований* M.

Пусть G — группа непрерывных преобразований метрического пространства M, и пусть $f, g \in G$. Тогда если существует

$$\sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x)),$$

то естественно сопоставить паре элементов (f, g) число

$$\rho^*(f, g)=\sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Если для каждой пары элементов f, $g \in G$ существует число $\sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$, то ρ^* является метрикой в множестве G (см. 8.2.17). Обычно ρ^* называют *естественной метрикой* группы непрерывных преобразований метрического пространства M.

Существуют такие метрические пространства, что в группе непрерывных преобразований этих пространств нельзя ввести естественную метрику (см. 8.2.22). Однако в каждом метрическом пространстве M с метрикой ρ существует ограниченная метрика ρ_0, эквивалентная метрике ρ. В группе непрерывных преобразований метрического пространства M относительно метрики ρ_0 уже, конечно, можно ввести естественную метрику (см. 8.2.23).

Обратимое преобразование f метрического пространства M с метрикой ρ называется *изометрическим преобразованием* или *движением* пространства M, если для всяких x, $y \in M$ имеет место

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Если R_3 — трехмерное эвклидово пространство, то R_3 является метрическим пространством относительно метрики 8.1.1, 3) и, следовательно, можно говорить о движениях метрического пространства R_3. Понятие движения метрического пространства R_3 совпадает с понятием движения трехмерного пространства, которое рассматривалось в гл. III, § 5 (см. 8.2.10). Таким образом, понятие движения метрического пространства есть обобщение понятия движения прямой, плоскости, трехмерного пространства, и, следовательно, настоящий параграф в той его части, которая посвящена движениям, является продолжением § 5 гл. III.

8.2.1. Пусть M — метрическое пространство и x_0 — фиксированная точка M. Доказать, что преобразование f такое, что $f(x) = x_0$ для всех $x \in M$, является непрерывным преобразованием M.

8.2.2. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad \text{(см. 8.1.1, 1)).}$$

Доказать, что всякое преобразование M является непрерывным преобразованием, а всякое обратимое преобразование M является взаимно непрерывным.

8.2.3. Какие из следующих функций являются непрерывными преобразованиями метрического пространства вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)):

1) $f_1(x) = x^2 + 5$;

2) $f_2(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$;

3) $f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \end{cases}$

4) $f_4(x) = ax + b$, где a и b — фиксированные вещественные числа;

5) $f_5(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > 2; \\ 0, & \text{если } |x| \leqslant 2. \end{cases}$

8.2.4. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел с метрикой 8.1.1, 2). Какие вещественные функции, определенные на всем R, являются непрерывными преобразованиями R, какие взаимно непрерывными?

8.2.5.Т. Доказать, что произведение двух непрерывных преобразований метрического пространства является непрерывным преобразованием.

8.2.6.Т.У. Доказать, что совокупность всех взаимно непрерывных обратимых преобразований метрического пространства образует группу преобразований.

8.2.7. Доказать, что любое движение метрического пространства M является взаимно непрерывным преобразованием M.

8.2.8. Пусть R_3 — трехмерное векторное пространство. Введем в R_3 метрику, как указано в 8.1.1, 3). Обозначим через Ф некоторую фигуру в R_3 (некоторое подмножество R_3), а через G — группу самосовмещений фигуры Ф (см. гл. III, § 5). Доказать, что G является группой непрерывных преобразований метрического пространства R_3.

8.2.9.У. Доказать, что совокупность всех движений метрического пространства образует группу непрерывных преобразований.

8.2.10. Пусть M — трехмерное векторное пространство, и пусть в M введена метрика, как указано в 8.1.1, 3). Доказать, что преобразование f метрического пространства M является движением метрического пространства тогда и только тогда, когда f удовлетворяет определению движения, данному в гл. III, § 5.

8.2.11. Пусть R — метрическое пространство вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)). Рассмотрим множество G всевозможных преобразований s множества R, определяемых следующим образом: $s(x) = x + a$ $(x \in R)$, где a — произвольное, но фиксированное вещественное число. Доказать, что каждое

преобразование из G является движением метрического пространства R. Образует ли G группу непрерывных преобразований?

8.2.12. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством. Введем в R_n метрику, как указано в 8.1.1, 3). Рассмотрим совокупность G всех преобразований f_α метрического пространства R_n, задаваемых формулой

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$; α — произвольное отличное от нуля вещественное число. Доказать, что каждое f_α является обратимым взаимно непрерывным преобразованием R_n и что G образует группу непрерывных преобразований R_n.

8.2.13. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством. Введем в R_n метрику, как указано в 8.1.1, 3), и пусть G — совокупность всех невырожденных линейных преобразований пространства R_n на себя. Доказать, что каждое $f \in G$ является взаимно непрерывным преобразованием метрического пространства R_n и G образует группу непрерывных преобразований R_n.

8.2.14. Пусть f — непрерывное преобразование метрического пространства M и M' — компактное подмножество M. Доказать, что образ M' при преобразовании f является компактным подмножеством.

8.2.15. Пусть f — непрерывное преобразование компактного метрического пространства с метрикой ρ. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in M$ таких, что $\rho(x, y) < \delta$, имеет место неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Доказать.

8.2.16.У. Пусть M — компактное метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть f и g — непрерывные преобразования пространства M; тогда существует

$$\max_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Доказать.

8.2.17. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ и G — группа непрерывных преобразований пространства M такая, что для всяких $f, g \in G$ существует $\sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$.

Тогда отображение ρ^*:

$$\rho^*(f, g) = \sup_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$$

является метрическим отображением множества $G \times G$, т. е. G допускает естественную метрику. Доказать.

8.2.18.У. Пусть G — группа всех движений компактного метрического пространства M (см. 8.2.9). Доказать, что в G можно ввести естественную метрику.

8.2.19.У. Пусть G — группа всех движений компактного метрического пространства M, и пусть в G введена естественная метрика ρ^* (см. 8.2.18). Доказать, что G является компактным метрическим пространством.

8.2.20. Пусть G — группа взаимно непрерывных преобразований метрического пространства R вещественных чисел (см. 8.1.1, 2)), определенная в 8.2.11. Можно ли ввести в G естественную метрику?

8.2.21. Пусть M — множество точек отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим отображение ρ, согласно которому

$$\rho(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in M).$$

Проверить, что ρ — метрическое отображение. Пусть G — группа всех обратимых взаимно непрерывных преобразований M (см. 8.2.6). Доказать, что в G можно ввести естественную метрику.

8.2.22. Пусть G — группа взаимно непрерывных преобразований метрического пространства R_1 вещественных чисел (см. 8.1.1. 2)), определенная так же, как в 8.2.12. Можно ли ввести в G естественную метрику?

8.2.23.У. Доказать, что в каждом метрическом пространстве M с метрикой ρ существует метрика ρ_0, эквивалентная метрике ρ, такая, что в группе непрерывных преобразований M относительно ρ_0 можно ввести естественную метрику.

§ 3. Топологические пространства

Пусть R — некоторое множество. Преобразование φ множества H_R всех подмножеств R называется *операцией замыкания* на множестве R, если φ удовлетворяет следующим условиям:

1) если $M \subset R$ состоит из одного элемента, то $\varphi(M) = M$;
2) если $M, N \in H_R$, то $\varphi(M \cup N) = \varphi(M) \cup \varphi(N)$;
3) $\varphi(\varphi(M)) = \varphi(M)$ для всякого $M \in H_R$.

Множество $\varphi(M)$ $(M \in H_R)$ называется *замыканием* подмножества M и обозначается через $\overline{M}$. Этого обозначения будем придерживаться в дальнейшем. В случае, когда для множества R задано преобразование φ множества всех подмножеств R, являющееся операцией замыкания, то говорят, что операция замыкания φ *определяет топологию* в R или что в R введена топология. Множество R называют *топологическим пространством* относительно операции замыкания φ.

Подмножество F топологического пространства R называется замкнутым, если $\overline{F} = F$. Другими словами, замкнутые множества и только они являются неподвижными точками преобразования φ. Множество $G \subset R$ называется *открытым*, если $R \setminus G$ — замкнутое множество (см. гл. I, § 1).

Некоторая система открытых множеств Σ топологического пространства R называется *базисом*, если каждое открытое подмножество R может быть представлено в виде объединения множеств из Σ.

Очевидно, что каждое топологическое пространство имеет *базис*. Отображение f топологического пространства R в топологическое пространство R' называется *непрерывным*, если для всякого множества $M \subset R$ выполнено соотношение $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

Отображение f топологического пространства R на топологическое пространство R' называется *гомеоморфным*, или *топологическим*, если оно:

1) взаимно однозначно;

2) сохраняет операцию замыкания, т. е. $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$ для всякого $M \subset R$.

Таким образом, гомеоморфные топологические пространства могут отличаться лишь природой или обозначением элементов.

Отображение f топологического пространства R в топологическое пространство R' называется *открытым*, если всякое открытое множество U топологического пространства R переходит при отображении f в открытое множество $f(U)$.

8.3.1.Т. Пусть M — метрическое пространство и H_M — множество всех подмножеств M. Положим $\varphi(M') = \overline{M'}$ $(M' \subset H_M)$, где $\overline{M'}$ состоит из всех элементов M' и всех его предельных точек. Доказать, что множество M является топологическим пространством относительно преобразования φ.

8.3.2. Для следующих множеств A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ заданы преобразования φ_i множества всех подмножеств A_i.

Какие из указанных преобразований являются операциями замыкания?

1) A_1 — некоторое бесконечное множество. Если M — конечное подмножество, то $\varphi_1(M) = M$; если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_1(M) = A_1$.

2) $A_2 = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Если M — конечное подмножество, то $\varphi_2(M) = M$; если M бесконечное, то

$$\varphi_2(M) = M \cup a_0.$$

3) $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, причем, если $M = \{a_2, a_3\}$, то

$$\varphi_3(M) = \{a_2, a_1\}.$$

4) $A_4 = \{\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Для любого $M \subset A_4$ положим $\varphi_4(M) = M \cup a_0$.

5) $A_5 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_5(M) = M$. Если $M = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, то

$$\varphi_5(M) = M \cup \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}, \text{ где } n = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}.$$

8.3.3. Пусть A — произвольное множество. Доказать, что в A можно ввести топологию и притом единственным образом так, чтобы любое подмножество A в этой топологии было открытым множеством.

Примечание. Указанная в задаче топология называется *дискретной.*

8.3.4. Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Определим замыкание на множестве всех подмножеств A, как указано в задаче 8.3.2, 2).

Выяснить, какие из перечисленных ниже подмножеств открыты, какие замкнуты.

1) $M_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
2) $M_2 = A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$;
3) $M_3 = \{a_3, a_4, a_5\}$;
4) $M_4 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
5) $M_5 = \{a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots\}$.

8.3.5. Пусть R — топологическое пространство, M и N — произвольные подмножества R. Доказать, что выполняются следующие соотношения:

1) $M \subset \overline{M}$; 2) если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$; 3) $M \cap N \subset \overline{M} \cap \overline{N}$;

4) если M — конечное подмножество R, то $\overline{M} = M$.

8.3.6. Пусть k — положительное число, а x_0 — произвольный фиксированный элемент метрического пространства R.

Доказать, что совокупность всех элементов $x \in R$ таких, что $\rho(x, x_0) \leqslant k$, образует замкнутое множество относительно топологии, определенной в 8.3.1.

8.3.7. Пусть R_0 — множество всех вещественных чисел. Введем в R_0 топологию относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in R_0)$, как указано в 8.3.1. Доказать, что в полученном топологическом пространстве каждое открытое множество есть объединение счетного числа замкнутых множеств.

Примечание. Топологическое пространство R_0 называют обычно *вещественной прямой.*

8.3.8. Пусть A — некоторое множество точек на вещественной прямой. Обозначим через A' множество всех предельных точек A. Существует ли на прямой множество A_0 такое, что $A_0'' = (A_0')'$ непусто, а множество $A_0''' = (A_0'')'$ пусто?

8.3.9. Найти замыкание множества всех рациональных точек вещественной прямой (см. 8.3.7).

8.3.10.Т. Доказать, что в топологическом пространстве:

1) пересечение произвольного множества замкнутых множеств есть замкнутое множество;

2) объединение конечного множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.

8.3.11. Пусть M — метрическое пространство, в котором введена топология, как указано в 8.3.1; k — произвольное положительное число. Доказать, что для любого $x_0 \in M$ совокупность всех точек $x \in M$ таких, что $\rho(x, x_0) < k$, образует открытое множество.

8.3.12. Доказать, что всякое замкнутое множество F на вещественной прямой (см. 8.3.7) есть пересечение счетного множества открытых множеств.

8.3.13.Т. Доказать, что в топологическом пространстве:

1) объединение произвольного множества открытых множеств есть открытое множество;

2) пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.

8.3.14. Пусть в полном метрическом пространстве M с метрикой ρ топология введена так, как указано в 8.3.1. Доказать, что всякое замкнутое подмножество $M' \subset M$ является полным метрическим пространством относительно метрики ρ', рассматриваемой на M' (см. 8.1.27).

8.3.15. Пусть M — некоторое подмножество топологического пространства R и Σ — совокупность всех замкнутых подмножеств из R, содержащих M. Обозначим через D пересечение всех множеств из Σ. Доказать, что $\overline{M} = D$.

8.3.16. Пусть R — вещественная прямая (см. 8.3.7). Существуют ли такие различные множества F_1, $F_2 \subset R$, что $\overline{F_1} = \overline{F_2}$?

8.3.17. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ; n — натуральное число, x_0 — точка пространства M. Обозначим через Σ совокупность всех множеств $M_{x_0, n} \subset M$, состоящих из всех элементов $x \in M$, для которых $\rho(x, x_0) < \frac{1}{n}$. Доказать, что Σ образует базис в топологии, введенной в 8.3.1.

8.3.18.Т. Для того чтобы система открытых множеств Σ топологического пространства R была базисом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества $G \subset R$ и всякой точки $a \in G$ нашлось множество $U \in \Sigma$ такое, что $a \in U \subset G$. Доказать. Каждое ли топологическое пространство имеет базис?

8.3.19. Пусть $M \subset R$, где R — топологическое пространство, и пусть Σ — базис R. Доказать, что $a \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда для каждого U из Σ, содержащего a, пересечение множеств U и M не пусто.

8.3.20.Т Пусть Σ — базис топологического пространства R, тогда:

1) для всяких двух различных a, $b \in R$ найдется $U \in \Sigma$ такое, что $a \in U$, но $b \notin U$;

2) для всяких U, $V \in \Sigma$ и для всякого $a \in U \cap V$ найдется $W \in \Sigma$ такое, что $a \in W \subset U \cap V$. Доказать.

8.3.21.Т.У. Пусть R — некоторое множество и Σ — некоторая совокупность его подмножеств, для которой выполнены следующие условия:

1) для всяких двух различных точек a и b из R найдется такое множество U из Σ, что $a \in U$, но $b \notin U$;

2) для всяких двух множеств U и V из Σ, содержащих точку $a \in R$, найдется такое множество W из Σ, что $a \in W \subset U \cap V$.

Пусть M — произвольное подмножество R. Обозначим через $\overline{M}$ совокупность всех элементов $a \in R$, для которых всякое множество U из Σ, содержащее a, имеет с M непу-

стое пересечение. Рассмотрим преобразование φ множества всех подмножеств R такое, что $\varphi(M)=\overline{M}$. Доказать, что преобразование φ является операцией замыкания. Будет ли Σ базисом полученного топологического пространства?

Примечание. Сравнить результаты задач 8.3.20 и 8.3.21.

8.3.22. Пусть R_0 — вещественная прямая (см. 8.3.7). Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех открытых промежутков, концами которых служат рациональные числа.

1) Образует ли Σ базис вещественной прямой?

2) Доказать, что Σ удовлетворяет условию задачи 8.3.21.

3) Пусть в R_0 введена топология с помощью системы Σ, как указано в 8.3.21. Будет ли полученная топология совпадать с топологией, введенной в 8.3.7?

8.3.23. Пусть M — метрическое пространство, а f — непрерывное преобразование M (см. гл. VIII, § 2). Определим в M топологию, как указано в 8.3.1. Является ли f непрерывным преобразованием топологического пространства M?

8.3.24. Пусть $C_{[a,\,b]}$ — метрическое пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с метрикой 8.1.2, 1). Определим в $C_{[a,\,b]}$ топологию, как указано в 8.3.1. Пусть R_0 — множество вещественных чисел с топологией, введенной в 8.3.7.

Непрерывны ли следующие отображения $C_{[a,\,b]}$ в пространстве R_0:

1) $F_1(y)=y(a) \quad (y\in C_{[a,\,b]})$;

2) $F_2(y)=\max\limits_{x\in[a,\,b]}|y(x)| \quad (y\in C_{[a,\,b]})$;

3) $F_3(y)=\max\limits_{x\in[a,\,b]}y(x) \quad (y\in C_{[a,\,b]})$;

4) $F_4(y)=\int\limits_a^b y(x)\,dx \quad (y\in C_{[a,\,b]})$;

5) $F_5(y)$ равно 0, если $y(x)$ принимает хотя бы одно отрицательное значение; $F_5(y)$ равно $^1/_2$, если $y(x)=0$ при всех x; $F_5(y)$ равно 1, если $y(x)\geqslant 0$ и $y(x_0)\neq 0$ хотя бы при одном x_0?

8.3.25. Пусть g — взаимно однозначное отображение топологического пространства R на себя, и пусть g и g^{-1} — непрерывные преобразования. Всегда ли g является гомеоморфизмом топологического пространства R на себя?

8.3.26.Т. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого замкнутого множества $F' \subset R'$ при отображении g был замкнутым множеством. Доказать.

8.3.27.Т Для того чтобы отображение g топологического пространства R в R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого множества $U' \subset R'$ при отображении g был открытым множеством. Доказать.

8.3.28.Т.У. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in R$ и каждого открытого множества $U' \subset R'$, содержащего $a' = g(a)$, нашлось бы открытое множество $U \subset R$ такое, что $g(U) \subset U'$. Доказать.

8.3.29.Т.У. Для того чтобы отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' было открытым, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in R$ и каждого открытого множества U, содержащего a, нашлось такое открытое множество $U' \subset R'$, содержащее $a' = g(a)$, что $U' \subset g(U)$. Доказать.

8.3.30.Т.У. Пусть H — декартово произведение топологических пространств $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Для произвольных открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n$ $(U_i \subset R_i)$ обозначим через $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ множество всех элементов из H, представимых в виде $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in U_i$. Обозначим через Σ совокупность всех множеств $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$, где $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — произвольные открытые множества из $R_1, R_2, \ldots, R_n$ соответственно. Пусть в множестве всех подмножеств H введено преобразование так, как указано в 8.3.21. Доказать, что относительно введенного преобразования H образует топологическое пространство.

Примечание. Полученное топологическое пространство H называется ***прямым произведением*** топологических пространств $R_1, \ldots, R_n$.

8.3.31. Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ, и пусть M' — метрическое пространство, состоящее из всех элементов M, причем метрика в M' определена следующим образом:

$$\rho_1(x, y) = k\rho(x, y) \quad (x, y \in M')$$

(k — фиксированное положительное число; см. 8.1.6). Определим топологии в M и M', исходя из метрик ρ и ρ_1, как указано в 8.3.1. Будут ли полученные топологии совпадать?

8.3.32. Пусть C — множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$; введем в C метрики, как указано в 8.1.2, 1) и 2). Исходя из этих метрик, определим в C топологии (см. 8.3.1). Будут ли полученные топологии совпадать?

8.3.33. Пусть H — прямое произведение n топологических пространств вещественных прямых (см. 8.3.7). Определим в H метрику ρ:

$$x=(x_1, \ldots, x_n)\in H;\quad y=(y_1, \ldots, y_n)\in H;$$
$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Введем в H топологию, исходя из метрики ρ (см. 8.3.1). Доказать, что исходная топология (см. 8.3.30) совпадает с топологией, введенной с помощью метрики ρ.

8.3.34.Т. В множестве R введены различные топологии с базисами Σ_1 и Σ_2 соответственно (см. 8.3.18). Пусть для каждого множества U из Σ_1 и всякой точки $a\in U$ найдется такое U' из Σ_2, что $a\in U'\subset U$, и для каждого V' из Σ_2 и всякой точки $a'\in V'$ найдется множество $V\in\Sigma_1$ такое, что $a'\in V\subset V'$. Доказать, что топологии эти совпадают.

8.3.35. Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению задачи 8.3.34.

8.3.36. Пусть в множестве M даны две эквивалентные метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что топологии, введенные в M, исходя из метрик ρ_1 и ρ_2 (см. 8.3.1), совпадают.

§ 4. Топологические группы

Пусть в множестве G задано некоторое действие (будем называть его умножением), относительно которого G является группой, и операция замыкания, относительно которой G является топологическим пространством. Множество G, рассматриваемое относительно этого действия и этой топологии, называется *топологической группой*, если выполнены следующие условия: для любых двух элементов a, $b\in G$ и всякого открытого множества W, содержащего ab^{-1}, найдутся такие открытые множества U и V, что $a\in U$, $b\in V$ и $UV^{-1}\subset W$, где V^{-1} — совокупность всех элементов, обратных к элементам из V.

Смысл последнего условия, связывающего групповое действие с топологией, заключается в следующем:

1) каждый левый сдвиг G (см. гл. VII, § 2) является непрерывным преобразованием G;

2) преобразование G, заключающееся во взятии обратного элемента для каждого элемента из G, является непрерывным преобразованием G (см. 8.4.5, 8.4.40).

Множество элементов топологической группы G, рассматриваемое только относительно группового действия, будем называть *алгебраической группой*. Указанное выше определение не противоречит определению гл. II, § 6, ибо в каждой группе G можно ввести топологию так, чтобы G относительно этой топологии являлась топологической группой (см. 8.4.15). Вообще в этом параграфе, рассматривая понятие группы, подгруппы, гомоморфизма и тому подобное в отношении лишь группового действия, мы будем обычно добавлять прилагательное «алгебраический»: алгебраическая подгруппа, алгебраический гомоморфизм, алгебраический изоморфизм и т. п. Обычно не вызывает недоразумений то, что алгебраическую группу обозначают той же самой буквой, что и исходную топологическую группу. Мы будем придерживаться такого же обозначения.

Некоторое подмножество H топологической группы G называется *подгруппой* топологической группы G, если:

1) H есть подгруппа алгебраической группы G;

2) H есть замкнутое подмножество топологического пространства G.

Подгруппа N топологической группы G называется ее *нормальным делителем*, если N есть нормальный делитель алгебраической группы G.

Отображение f топологической группы G на топологическую группу G' называется *топологическим изоморфизмом* или просто *изоморфизмом*, если:

1) f является изоморфным отображением алгебраической группы G на алгебраическую группу G';

2) f является топологическим отображением топологического пространства G на топологическое пространство G'.

Отображение g топологической группы G в топологическую группу G' называется *гомоморфным*, если:

1) g является гомоморфизмом алгебраической группы G в алгебраическую группу G';

2) g является непрерывным отображением топологического пространства G в топологическое пространство G'.

Гомоморфное отображение f топологической группы G в топологическую группу G' называется *открытым*, если f есть открытое отображение топологического пространства G в топологическое пространство G'.

Пусть Γ — топологическое пространство, и пусть G — некоторая топологическая группа обратимых преобразований пространства Γ (см. гл. III, § 2). Пусть в G для всяких $x \in G$ и $\xi \in \Gamma$ и всякого открытого множества $W \subset \Gamma$, содержащего $x(\xi)$, найдутся открытые множества $U \subset G$ и $\Phi \subset \Gamma$ такие, что $x \in U$, $\xi \in \Phi$ и для всяких $x' \in U$ и $\xi' \in \Phi$ имеет место $x'(\xi') \in W$. Тогда G называют *непрерыв-*

ной группой преобразований топологического пространства Г. Все преобразования $x \in G$ являются топологическими (см. 8.4.30).

Непрерывная группа преобразований пространства Г называется *транзитивной*, если транзитивна алгебраическая группа G преобразований Г (см. гл. IV, § 9).

8.4.1. Для следущих групп G_1, G_2 заданы преобразования φ_i $(i = 1, 2)$ множества всех подмножеств G_i. Определить, какие из групп G_i являются топологическими группами:

1) G_1 — некоторая группа; $\varphi_1(M) = M$ для любого $M \subset G_1$;

2) G_2 — бесконечная циклическая группа $[a]_g$.

Если M — конечное подмножество, то $\varphi_2(M) = M$. Если M — бесконечное подмножество, то $\varphi_2(M) = M \cup e$.

8.4.2. Пусть D — вещественная прямая (см. 8.3.7). Будет ли D топологической группой относительно обычного сложения?

8.4.3. Пусть R_n является n-мерным векторным пространством, и пусть в R_n введена метрика

$$\rho[(x_1, \ldots, x_n); (y_1, \ldots, y_n)] = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Определим в R_n топологию так, как указано в 8.3.1. Будет ли R_n топологической группой относительно обычного сложения векторов?

8.4 4. Пусть G — множество вещественных матриц $a = (a_{ij})$ порядка n с определителем, отличным от нуля, и пусть k — натуральное число. Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех множеств U_{ak} таких, что U_{ak} содержит те и только те матрицы $x = (x_{ij})$, для которых $|x_{ij} - a_{ij}| < \frac{1}{k}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Доказать, что с помощью системы Σ можно определить топологию в G так, что в полученной топологии Σ будет являться базисом G (см. 8.3.21). Будет ли G топологической группой относительно введенной топологии и обычного умножения матриц?

8 4.5.У. Доказать, что, если a — фиксированный элемент топологической группы G, то каждое из указанных ниже отображений является топологическим отображением пространства G на себя:

1) $f_1(x) = xa$ $(x \in G)$;

2) $f_2(x) = ax$ $(x \in G)$;

3) $f_3(x) = x^{-1}$ $(x \in G)$.

8.4.6. Пусть F — замкнутое множество топологической группы G, U — открытое подмножество G, a — фиксированный элемент из G, P — произвольное подмножество G. Будут ли замкнуты Fa, aF, F^{-1}? Будут ли открыты UP, PU, U^{-1}?

8.4.7.Т. Пусть G — топологическая группа и a, b — произвольные элементы из G. Доказать, что найдется такое топологическое отображение f пространства G на себя, что $f(a)=b$.

8.4.8.Т. Пусть Σ^* — совокупность всех открытых множеств топологической группы G, содержащих единицу. Рассмотрим систему Σ, состоящую из всех множеств вида aU, где $a\in G$, $U\in\Sigma^*$. Доказать, что Σ — базис топологического пространства G.

8.4.9. Пусть G — аддитивная группа целых чисел, a — произвольный элемент из G и p_0 — произвольное фиксированное простое число. Обозначим через U_{ka} множество всех целых чисел вида $a+bp_0^k$ ($b\in G$). Пусть совокупность Σ_{p_0} состоит из всех множеств U_{ka} (k — натуральное число, $a\in G$). Доказать, что Σ_{p_0} удовлетворяет условиям задачи 8.3.21. Будет ли G топологической группой относительно топологии, определяемой совокупностью Σ_{p_0}, и обычного сложения?

Пусть $p\neq q$ — два простых числа. Будут ли совпадать топологии, введенные в G с помощью систем Σ_p и Σ_q?

8.4.10. Пусть D — вещественная прямая. D является топологической группой относительно сложения (см. 8.4.2). Обозначим через C алгебраическую подгруппу целых чисел. Будет ли C топологической подгруппой группы D?

8.4.11.У. Пусть G — множество точек плоскости, G есть топологическая группа относительно действия и топологии, введенных в 8.4.3. Обозначим через N множество точек прямой с угловым коэффициентом α, через H — множество всех точек с целочисленными координатами.

1) Будут ли H и N подгруппами топологической группы G?

2) Выяснить, при каких α множество $P=H+N$ замкнуто.

8.4.12.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — подгруппа алгебраической группы G. Всегда ли $\overline{H}$ является подгруппой топологической группы G?

8.4.13.Т.У. Пусть G — топологическая группа, и пусть N — нормальный делитель алгебраической группы G. Доказать, что $\overline{N}$ является нормальным делителем топологической группы G.

8.4.14. Пусть φ — алгебраический изоморфизм топологической группы G на топологическую группу G', являющийся непрерывным отображением. Всегда ли φ является топологическим изоморфизмом?

8.4.15. Пусть в алгебраической группе G система Σ состоит из всех подмножеств G. Доказать, что: 1) существует и притом единственная топология в G, при которой Σ является базисом; 2) относительно введенной топологии G образует топологическую группу; 3) введенная топология является дискретной топологией (см. 8.3.3). Будет ли всякая алгебраическая подгруппа G топологической подгруппой G? Будет ли любой алгебраический изоморфизм G на топологическую группу G' непрерывным отображением G на G'? Будет ли всякий алгебраический изоморфизм G на топологическую группу G' топологическим изоморфизмом G на G'?

Примечание. Группа с дискретной топологией называется *дискретной группой.*

8.4.16. Пусть R_0 — топологическая группа вещественных чисел по сложению (см. 8.4.2). Пусть R_0' — множество всех положительных вещественных чисел. Определим следующее отображение множества всех подмножеств R_0' в себя: пусть $M \subset R_0'$; поставим в соответствие M множество $\overline{M}$, состоящее из всех элементов $a \in R_0'$, для которых существует последовательность $a_n \in M$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Доказать, что:

1) введенное отображение определяет топологию в R_0';

2) относительно введенной топологии и действия умножения R_0' образует топологическую группу. Изоморфны ли топологические группы R_0 и R_0'?

8.4.17.Т.У. Пусть H — алгебраическая подгруппа топологической группы G. Для того чтобы H была топологической подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы существовало открытое множество U, для которого $U \cap H = U \cap \overline{H} \neq \emptyset$. Доказать.

8.4.18. Пусть G — топологическая группа неособенных вещественных матриц порядка n (см. 8.4.4). Какие из следующих подмножеств будут подгруппами G, какие нормальными делителями G:

1) множество всех неособенных матриц с рациональными определителями;

2) множество всех неособенных диагональных матриц;

3) множество всех неособенных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

4) множество всех матриц с определителем, равным 1?

8.4.19.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Обозначим через G/H совокупность всех правых смежных классов группы G по подгруппе H, а через Σ некоторый базис топологической группы G. Пусть $U \in \Sigma$. Обозначим через U^* множество всех смежных классов xH, где $x \in U$. Совокупность всех множеств U^*, где U — произвольный элемент совокупности Σ, обозначим через Σ^*. Доказать, что в G/H можно ввести топологию так, чтобы Σ^* была базисом G/H.

8.4.20.Т.У. Пусть N — нормальный делитель топологической группы G, а G/N — фактор-группа алгебраической группы G по нормальному делителю N. Введем в G/N топологию, как указано в 8.4.19. Доказать, что G/N будет топологической группой.

Примечание. Топологическая группа G/N называется *фактор-группой* топологической группы G по ее нормальному делителю N.

8.4.21.У. Пусть N — нормальный делитель топологической группы G, и пусть G/N — фактор-группа G по нормальному делителю N. Рассмотрим естественный гомоморфизм φ (см. 2.4.18) алгебраической группы G на алгебраическую группу G/N. Будет ли φ непрерывным отображением топологического пространства G на топологическое пространство G/N? Будет ли φ открытым отображением G на G/N? Найти условие, при котором φ будет топологическим изоморфизмом топологической группы G на G/N.

8.4.22. Пусть f — гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G^*, и пусть N — полный прообраз единицы $e^* \in G^*$ при гомоморфизме φ (ядро гомоморфизма). Доказать, что N будет нормальным делителем топологической группы G.

8.4.23.У. Пусть g — открытое гомоморфное отображение топологической группы G на топологическую группу G^* и

N — ядро гомоморфизма g (см. 8.4.22). Доказать, что факторгруппа G/N (см. 8.4.20) топологически изоморфна топологической группе G^*.

8.4.24.Т. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — топологические группы, и пусть H — декартово произведение $G_1 \times \ldots \times G_n$. Введем в H операцию умножения, как в прямом произведении алгебраических групп $G_1, \ldots, G_n$ (см. 5.6.29). Пусть в H введена топология, как указано в 8.3.30. Доказать, что H является топологической группой.

Примечание. Группу H называют *прямым произведением* топологических групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

8.4.25.У. Пусть H — прямое произведение топологических групп $G_1, \ldots, G_n$. Каждому элементу $x_j \in G_j$ поставим в соответствие элемент $f(x_j) = (e_1, \ldots, e_{j-1}, x_j, e_{j+1}, \ldots, e_n) \in H$, где e_i — единица группы G_i $(i = 1, \ldots, n)$. Доказать, что f есть изоморфизм топологической группы G_j в топологическую группу H.

8.4.26. Пусть Z — топологическая группа комплексных чисел по сложению (см. 8.4.3), и пусть $Z' = R_0 \times R_0$ — прямое произведение топологических групп вещественных чисел (см. 8.4.2). Изоморфны ли топологические группы Z и Z'?

8.4.27. Пусть Z — топологическая группа комплексных чисел по сложению (см. 8.4.3), и пусть A — множество всех пар вещественных чисел (x, y) таких, что $x \geqslant 0$;

$$0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Обозначим через B множество всех пар вещественных чисел вида $(x, 0)$.

1) Будут ли множества A и B замкнутыми?

2) Замкнуто ли множество $A + B$?

8.4.28.Т.У. Пусть G — топологическая группа. Доказать, что для всякого открытого множества U и всякой точки $a \in U$ найдется такое открытое множество V, что $a \in V$ и $\bar{V} \subset U$.

8.4.29.Т.У. Пусть G — топологическая группа, и пусть A — центр алгебраической группы G. Доказать, что A является подгруппой топологической группы G.

8.4.30. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ, и пусть g — произвольный

элемент из G. Доказать, что g — топологическое преобразование пространства Г.

8.4.31. Пусть G' — совокупность всех обратимых топологических преобразований топологического пространства Г. Доказать, что G' образует алгебраическую группу относительно действия суперпозиции преобразований.

8.4.32. Всегда ли произведение двух непрерывных преобразований топологического пространства является непрерывным преобразованием?

8.4.33. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Г. Всякая ли подгруппа H группы G является непрерывной группой преобразований пространства Г? Пусть G — транзитивная группа преобразований пространства Г. Всякая ли подгруппа $H \subset G$ является транзитивной группой преобразований Г?

8.4.34. Пусть G — группа всех вращений плоскости D вокруг точки O. Введем на плоскости D топологию, как указано в 8.4.3. Доказать, что каждый $x \in G$ осуществляет топологическое преобразование D. Каждый поворот $x \in G$ вокруг точки O определяется углом поворота φ, поэтому естественно писать $x = x_\varphi$. Пусть $M \subset G$; поставим в соответствие M множество $\overline{M} \subset G$ следующим образом: будем считать, что элемент $x_0 = x_{\varphi_0} \in G$ тогда и только тогда принадлежит $\overline{M}$, когда существует последовательность углов $\{\varphi_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$ и $x_{\varphi_n} \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказать, что G является топологической группой относительно введенного преобразования множества всех подмножеств. Является ли G непрерывной группой преобразований топологического пространства D?

8.4.35.У. Пусть H — множество точек плоскости. Введем в H топологию, как указано в 8.4.3. Обозначим через G группу всех аффинных преобразований (см. 3.4.27) плоскости H.

1) Доказать, что каждое аффинное преобразование есть топологическое преобразование плоскости H.

2) Можно ли в G ввести недискретную топологию так, чтобы G являлась непрерывной группой преобразований плоскости H?

8.4.36.Т.У. Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Пусть в множестве G/H правых смежных классов топология определена так, как указано в 8.4.19. Определим

преобразование x соотношением $x(\xi)=x\xi$, где $x\in G$, $\xi\in$ $\in G/H$. Доказать, что G есть транзитивная непрерывная группа преобразований топологического пространства G/H.

Примечание. Результат сопоставить с введением к § 2 гл. VII.

8.4.37.Т. Пусть G — непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства Г и α — некоторая фиксированная точка из Г. Обозначим через A_ξ множество всех $x\in G$, для которых $x(\alpha)=\xi$ ($\xi\in\Gamma$). Доказать, что A_α есть подгруппа топологической группы G.

8.4.38.Т.У. Пусть G — непрерывная группа преобразований топологического пространства Г и A_ξ ($\xi\in\Gamma$) определено так же, как в задаче 8.4.37. Доказать, что отображение ψ, согласно которому $\psi(\xi)=A_\xi$, есть взаимно однозначное отображение множества Г на множество G/A_α правых смежных классов G по подгруппе A_α. Будет ли ψ^{-1} непрерывным отображением топологического пространства G/A_α (см. 8.4.19) на пространство Г?

8.4.39.У. Пусть M — метрическое пространство с ограниченной метрикой ρ (см. гл. VIII, § 1). Доказать, что в группе преобразований G метрического пространства M можно ввести естественную метрику ρ^*. Пусть в M и G введены топологии, как указано в 8.3.1, относительно метрик ρ и ρ^* соответственно. Доказать, что G есть непрерывная группа преобразований топологического пространства M.

8.4.40. Пусть в множестве G задано некоторое действие, относительно которого G является группой, и операция замыкания, относительно которой G является топологическим пространством, и пусть выполняются следующие два условия:

1) каждый левый сдвиг G (см. гл. VII, § 2) является непрерывным преобразованием G;

2) преобразование φ такое, что $\varphi(a)=a^{-1}$ ($a\in G$), является непрерывным преобразованием G.

Доказать, что G является топологической группой.

§ 5. Упорядоченные группы

Пусть в множестве элементов группы G определено отношение упорядоченности (см. гл. I, § 3). Если это отношение двусторонне стабильно (см. гл. I, § 3), то G относительно этой упорядоченности называется *упорядоченной группой*. В частности, при линейной упорядоченности говорят о *линейно упорядоченной группе*

(иногда в литературе термин «упорядоченная группа» применяют лишь для линейно упорядоченных групп).

В упорядоченной группе G элемент $x \in G$ называется *положительным*, если $x \geqslant e$, и *отрицательным*, если $x \leqslant e$. Множество всех положительных элементов G обозначается через G^+ и называется *положительной частью* G (также полугруппой положительных элементов, что связано с 8.5.6). Множество всех отрицательных элементов обозначается через G^- и называется *отрицательной частью* G (полугруппой отрицательных элементов). Употребление приведенных терминов делается естественным при аддитивной записи действия в группе. В этом случае единичный элемент группы часто называют *нулем* и обозначают через 0, а обратный элемент к элементу x обозначается через $-x$. Соотношение положительности выглядит при такой записи как $x \geqslant 0$.

8.5.1. Доказать, что в упорядоченной группе G соотношение $x \leqslant y$ имеет место тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \geqslant e$.

Примечание. Отсюда следует, что задание положительной части в упорядоченной группе вполне определяет упорядоченность.

8.5.2. Доказать, что в упорядоченной группе G соотношение $x \leqslant y$ имеет место тогда и только тогда, когда $y^{-1}x \leqslant e$.

Примечание. Отсюда следует, что задание отрицательной части также вполне определяет упорядоченность.

8.5.3. Пусть Z — аддитивная группа комплексных чисел. Выяснить, какие из следующих упорядоченностей в группе Z будут двусторонне стабильными. Найти для них положительную и отрицательную части.

1) $z_1 \geqslant z_2$, если или $a_1 > a_2$, или $a_1 = a_2$, но $b_1 \geqslant b_2$ ($z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$);

2) $z_1 \geqslant z_2$, если $\arg(z_2 - z_1) \in [\alpha, \beta]$, где α и β — фиксированные углы, удовлетворяющие соотношению $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$;

3) $z_1 \geqslant z_2$, если $a_1 \geqslant a_2$, $b_1 \geqslant b_2$;

4) $z_1 \geqslant z_2$, если $\arg z_1 \geqslant \arg z_2$ и $|z_1| \geqslant |z_2|$.

8.5.4. Доказать, что в упорядоченной группе элемент x будет отрицательным тогда и только тогда, когда x^{-1} положителен.

8.5.5. Если в упорядоченной группе G неединичный элемент x имеет конечный порядок, то он не может быть ни положительным, ни отрицательным. Доказать.

8.5.6.Т Доказать, что в упорядоченной группе G ее положительная часть G^+ обладает свойствами:

а) если $x, y \in G^+$, то и $xy \in G^+$;
б) $e \in G^+$;
в) если $x \in G^+$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в G^+;
г) если $x \in G^+$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in G^+$.

Примечание. Свойство а) означает, что G^+ является полугруппой.

8.5.7.Т.У. Пусть H — подмножество группы G, удовлетворяющее условиям:

а) если $x, y \in H$, то и $xy \in H$;
б) $e \in H$;
в) если $x \in H$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в H;
г) если $x \in H$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in H$.

Доказать, что в G можно ввести такую двусторонне стабильную упорядоченность, относительно которой H будет положительной частью группы: $H = G^+$.

Примечание. Сопоставить с 8.5.6.

8.5.8. Пусть в группе G заданы двусторонне стабильные упорядоченности ρ_α, ρ_β, ... Положительные части группы G относительно этих упорядоченностей суть G_α^+, G_β^+, ... Доказать, что $G_\alpha^+ \bigcap G_\beta^+ \bigcap \ldots$ является положительной частью некоторой двусторонне стабильной упорядоченности τ группы G. Как связана упорядоченность τ с ρ_α, ρ_β, ...?

8.5.9. Доказать, что в упорядоченной группе G ее отрицательная часть G^- обладает свойствами:

а) если $x, y \in G^-$, то и $xy \in G^-$;
б) $e \in G^-$;
в) если $x \in G^-$, причем $x \neq e$, то x^{-1} не содержится в G^-;
г) если $x \in G^-$, $z \in G$, то $z^{-1}xz \in G^-$.

Примечание. Результат сопоставить с 8.5.6.

8.5.10. Доказать, что всякое подмножество группы G, являющееся ее положительной частью при некоторой двусторонне стабильной упорядоченности ρ, будет отрицательной частью G при некоторой другой двусторонне стабильной упорядоченности τ. Как связаны между собою эти две упорядоченности?

8.5.11. Доказать, что упорядоченность в упорядоченной группе G будет линейной тогда и только тогда, когда

$$G^+ \bigcup G^- = G.$$

8.5.12.У. Описать все возможные двусторонне стабильные упорядоченности в циклических группах.

8.5.13.У. Пусть G — аддитивная группа всех полиномов с действительными коэффициентами, а подмножество H состоит из всех полиномов, которые неотрицательны на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что H является положительной частью для некоторой двусторонне стабильной упорядоченности ρ. Для следующих элементов: $f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = x^3 + 2, f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$, $f_4(x) = x^8 - 1$ выяснить, какие их пары связаны отношением указанной упорядоченности ρ.

8.5.14.У. Пусть G — множество всех пар вещественных чисел. Введем в G действие

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2} y_1 + y_2).$$

Проверить, что G является группой относительно указанного действия. Доказать, что подмножество H, состоящее из всех элементов (x, y) таких, что или $x > 0$ или $x = 0$ и $y \geqslant 0$, является положительной частью для некоторой линейной двусторонне стабильной упорядоченности.

8.5.15. Пусть G есть прямое произведение групп: $G = \prod\limits_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$, в каждой из которых задана двусторонне стабильная упорядоченность. Полагаем $x \leqslant y$ в группе G, если в каждом сомножителе G_α этого прямого произведения для компонент x_α и y_α элементов x и y (см. 5.6.14) имеет место $x_\alpha \leqslant y_\alpha$.

Выяснить, будет ли полученная упорядоченность в G двусторонне стабильной.

Пусть упорядоченности во всех G_α линейны. Выяснить, когда построенная упорядоченность в G будет линейной.

8.5.16. Пусть G есть свободное произведение групп $G = \prod\limits_{\alpha \in \Gamma}^{*} G_\alpha$, в каждой из которых задана двусторонне стабильная упорядоченность. Полагаем $x \leqslant y$ в группе G, если x и y можно представить в виде

$$x = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n},$$

$$y = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_n},$$

$$x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i};\ x_{\alpha_i} \leqslant y_{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Выяснить, определяет ли это правило упорядоченность в G, и если так, то будет ли эта упорядоченность двусторонне стабильной.

8.5.17. Пусть G — свободное произведение двух циклических групп (конечных или бесконечных): $G=[x]*[y]$. Подмножество H группы G состоит из единичного элемента e и всех таких элементов, которые можно представить в виде

$$z=x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2}\ldots x^{a_n}y^{b_n},$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_n>0.$$

Выяснить, когда существует двусторонне стабильная упорядоченность в G, относительно которой H является положительной частью: $H=G^+$.

8.5.18. Выяснить, когда для неединичного элемента x коммутативной группы G найдется такая двусторонне стабильная упорядоченность G, чтобы имело место $x\geqslant e$.

8.5 19. Доказать, что упорядоченность в бесконечной циклической группе $G=[x]$, согласно которой $x^p\leqslant x^q$ имеет место при $p\leqslant q$, является двусторонне стабильной.

8.5.20. Пусть в бесконечной циклической группе $G=[x]$ задана некоторая двусторонне стабильная упорядоченность, согласно которой $x\leqslant x^2$. Доказать, что тогда $x^p\leqslant x^q$ имеет место тогда и только тогда, когда $p\leqslant q$.

Примечание. Таким образом, соотношение $x\leqslant x^2$ полностью определяет упорядоченность, рассмотренную в 8.5.19.

8.5.21. Пусть в упорядоченной группе для любых двух ее элементов существует верхняя граница. Доказать, что тогда всякие два элемента обладают и нижней границей.

Примечание. Упорядоченные группы, обладающие этим свойством, называются *направленными*.

8.5.22.Т. Пусть G — направленная упорядоченная группа. Доказать, что для каждого $x\in G$ найдутся такие u, $v\in G^+$, что $x=uv^{-1}$.

8.5.23.Т. Пусть в упорядоченной группе G для всякого $x\in G$ всегда найдутся такие u, $v\in G^+$, что $x=uv^{-1}$. Доказать, что G является направленной.

Примечание. Результат сопоставить с результатом 8.5.22.

8.5.24. Выяснить, какие из упорядоченных групп, указанных в задачах 8.5.3, 1), 2) и 8.5.13, являются направленными.

8.5.25. Пусть G — совокупность вещественных матриц вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что:

1) относительно обычного умножения матриц G образует группу;

2) группа G обладает нетривиальной (отличной от диагонали) двусторонне стабильной линейной упорядоченностью.

8.5.26.У. Если абелева группа обладает хотя бы двумя различными двусторонне стабильными упорядоченностями, то число всех таких упорядоченностей в ней бесконечно. Доказать.

8.5.27. Пусть среди элементов центра группы имеются элементы бесконечного порядка. Доказать, что группа обладает нетривиальной (см. 8.5.25) двусторонне стабильной упорядоченностью.

8.5.28. Пусть центр группы обладает нетривиальной (см. 8.5.25) двусторонне стабильной упорядоченностью. Доказать, что тогда вся группа обладает нетривиальной двусторонне стабильной упорядоченностью.

УКАЗАНИЯ

Глава I

1.2.3. Использовать известный факт, что множество всех простых натуральных чисел бесконечно.

1.2.18. Для каждого M_k взять какое-либо его взаимно однозначное отображение φ_k в множество всех натуральных чисел. Выделить в $\bigcup\limits_k M_k$ подмножества N_1, N_2, N_3, ..., для которых $x \in N_k$, если при некотором l имеют место $x \in M_l$ и $l + \varphi_l(x) = k$. Каждое N_k конечно (или пусто) и $\bigcup\limits_k M_k = \bigcup\limits_k N_k$. Применить 1.2.17.

1.2.19. Представить множество всех рациональных чисел в виде объединения его подмножеств M_k ($k = 1, 2, \ldots$), где в M_k включаются такие рациональные числа $\frac{p}{q}$ (p и q — целые числа), что $|p| + |q| = k$. Применить 1.2.17. **1.2.20.** Использовать 1.2.2.

1.2.21. Представить множество всех полиномов с рациональными коэффициентами в виде объединения его подмножеств M_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), где полином $\frac{p_0}{q_0}x^n + \frac{p_1}{q_1}x^{n-1} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}x + \frac{p_n}{q_n}$ (числа $p_0, p_1, \ldots, p_n, q_0, q_1, \ldots, q_n$ — целые) принадлежит M_k, если $n + \sum\limits_{i=0}^{n} |p_i| + \sum\limits_{j=0}^{n} |q_j| = k$. Применить 1.2.17.

1.2.23. Предположить, что существует отображение φ миожества всех натуральных чисел на множество вещественных чисел r таких, что $0 \leqslant r \leqslant 1$. Каждое из этих чисел записать в виде бесконечиой десятичной дроби:

$$\varphi 1 = 0, \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} \ldots,$$
$$\varphi 2 = 0, \varepsilon_{21}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} \ldots,$$
$$\varphi 3 = 0, \varepsilon_{31}\varepsilon_{32}\varepsilon_{33} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(здесь ε_{ij} — знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Определить число $r = 0, \eta_1\eta_2\eta_3 \ldots$, где $\eta_k = 1$, если $\varepsilon_{kk} \neq 1$, и $\eta_k = 2$, если $\varepsilon_{kk} = 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Убедиться, что при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место $\varphi m \neq r$, что противоречит определению φ.

1.2.24. Использовать 1.2.16 и 1.2.23.

1.2.25. Сначала доказать счетность множества всех алгебраических чисел, используя 1.2.17, 1.2.21 и то, что каждый полином имеет

лишь конечное количество корней. Затем доказать несчетность множеств всех вещественных чисел и всех комплексных чисел, используя 1.2.16 и 1.2.23. Наконец, доказать несчетность множеств всех вещественных трансцендентных чисел и всех трансцендентных чисел, используя 1.2.16 и 1.2.18.

1.2.26. Сначала доказать равномощность двух любых отрезков. Затем представить каждое из рассматриваемых множеств в виде непересекающегося объединения счетного множества отрезков.

1.2.27. Доказать существование взаимно однозначного отображения A в M. Допустить существование взаимно однозначного отображения φ множества A на M. Зафиксировать в B два элемента b, $b' \in B$, $b \neq b'$. Рассмотреть отображение ψ множества A в B, согласно которому $\psi a = b$, если φa отображает a в элемент, отличный от b, и $\psi a = b'$, если φa отображает a в b. Показать, что при всех $a \in A$ имеет место $\psi a \neq \varphi a$.

1.2.28. Для каждого подмножества N множества M определить отображение φ_N множества M в множество $\{1, 0\}$, полагая $\varphi_N x = 1$, если $x \in N$, и $\varphi_N x = 0$, если $x \notin N$. Показать, что множество всех φ_N совпадает с множеством всех отображений M в $\{1, 0\}$. Использовать 1.2.15 и 1.2.27.

1.3.18. Доказывать индукцией по числу элементов в множестве. Выделить в Ω один из максимальных элементов τ относительно ρ. Пользуясь индуктивным предположением, установить линейную упорядоченность σ в $\Omega \setminus \{\tau\}$ такую, что для любых элементов α и β этого множества из $\alpha \sim \beta\ (\rho)$ всегда следует $\alpha \sim \beta\ (\sigma)$. Исходя из σ, построить искомую упорядоченность ρ' в Ω.

Глава II

2.1.11. Рассмотреть отображение G на H, ставящее в соответствие числу $r \in G$ число $\lg r \in H$.

2.2.9. Использовать 1.4.1 и 1.4.4.

2.3.12. Взять пару элементов $x \in R$, $y \in L$ и рассмотреть их произведение xy.

2.3.13. Использовать 2.3.12.

2.3.18. Сначала доказать, что для матриц a и b ранг их произведения ab всегда не превосходит наименьшего из рангов матриц a и b. Затем доказать, что для двух матриц a и b равного ранга можно всегда подобрать такие матрицы x и y, что $a = xby$. Последнее можно доказать, используя элементарные преобразования матриц и то, что каждое элементарное преобразование всегда можно осуществить путем умножения матрицы слева или справа на специально подобранную неособенную матрицу.

2.4.22. Использовать 2.4.20 и 2.4.21.

2.5.1. Доказательство проводится по индукции относительно n — длины слова $x_1 x_2 \ldots x_n$. Для данного слова рассматриваются два процесса постепенного сокращения длины слова путем последовательной замены двух каких-либо соседних членов их произведением.

Пусть первый процесс начинается с замены пары $x_i x_{i+1}$ их произведением, а второй процесс — с замены пары $x_j x_{j+1}$ их произве-

дением. Следует рассмотреть порознь два случая. Первый, когда $i+1<j$, и второй, когда $i+1=j$.

2.5.16. Взять какой-либо из элементов a' таких, что $aa'a=a$. Затем рассмотреть элемент $\bar{a}=a'aa'$.

2.5.19. Рассмотреть в A отношение ρ_1, согласно которому $x\sim y\,(\rho_1)$ $(x,\ y\in A)$, если найдутся такие элементы $a,\ b\in A$ и $k,\ k'\in K$, что имеет место одно из четырех условий:

1) $x=akb,\ y=ak'b$; 2) $x=ak,\ y=ak'$; 3) $x=kb,\ y=k'b$; 4) $x=y$.

Рассмотреть в A отношение ρ_2, согласно которому $x\sim y\,(\rho_2)$, если найдутся такие элементы $t_1=x,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n=y\in A$, что $t_i\sim t_{i+1}\,(\rho_1)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Доказать, что ρ_2 двусторонне стабильно. Рассмотреть A/ρ_2 и естественное отображение A на A/ρ_2, ставящее в соответствие каждому $x\in A$ тот ρ_2-класс, который содержит данный x.

2.5.23. Взять некоторый элемент x конечной полугруппы. Рассмотреть $[x]$. Использовать 2.5.10.

2.6.16. В качестве искомых элементов $y_1,\ \ldots,\ y_m$ взять некоторые подходящие степени самого x. Использовать известный из теории чисел факт, что для натуральных чисел $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$, наибольший общий делитель которых есть d, всегда найдутся такие целые числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$, что $x_1k_1+x_2k_2+\ldots+x_mk_m=d$.

2.6.21. Использовать 2.6.7, рассматривая произвольную подгруппу G' группы $G=[x]_g$, выделить в ней элемент x^k с наименьшим натуральным показателем k. Сравнить G' с H_k.

2.6.22. Использовать 2.6.8 и указание к 2.6.21.

2.6.23. Использовать 2.6.21 и 2.6.22.

2.6.24. Использовать 2.6.21 и 2.6.23.

Глава III

3.1.26. Использовать 3.1.22 и 3.1.25.

3.1.31. Если $rv\leqslant n$, то подобрать подстановки s, t так, что $sut=v$.

3.1.34. Использовать 3.1.25 и 3.1.26 и наличие единицы в группе.

3.1.35. Рассмотреть множество G всех преобразований v, удовлетворяющих условиям: 1) $v\alpha=v\beta$ тогда и только тогда, когда $u\alpha=u\beta$; 2) $v\Omega=u\Omega$. Доказать, что G — группа.

3.1.37. Использовать 3.1.18.

3.1.38. Доказывать индукцией по рангу преобразования, начиная с $n-2$.

3.1.39. Использовать тот факт, что преобразование ранга n нельзя представить в виде произведения преобразований меньшего ранга. Доказать, что, умножая подстановку ранга $n-1$ на подходящие выбранные подстановки ранга n, можно получить любую другую подстановку ранга $n-1$.

3.1.40. Использовать указание к предыдущей задаче.

3.2.6. Использовать 3.2.5.

3.2.8. Рассмотреть в множестве Ω бинарное отношение ρ, согласно которому $(\beta,\ \alpha)\in\rho$, если $u\beta=\alpha$. Доказать, что существует $v\in T_\Omega$ такое, что $\rho=\rho_v$ и что v — преобразование, обратное для u.

3.2.9. Использовать 3.2.7.

3.3.14. Доказать равенство $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k) = (\alpha_1\alpha_k)(\alpha_1\alpha_{k-1}) \dots (\alpha_1\alpha_2)$.

3.3.16. Использовать 3.2.23 и 3.2.24. Доказать, что если $u = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ — четная подстановка, то $v_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) > 0$; если u — нечетная подстановка, то $v_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) < 0$.

3.3.17. Использовать 3.2.25. Каждую четную подстановку умножить на транспозицию (12).

3.3.19. Использовать 3.3.5, 3.3.9 и 3.3.14.

3.3.21. Использовать 3.3.9 и 3.3.19. Доказать, что группа [(34), (123) (456)] не более чем тридцатого порядка.

3.3.23. Использовать 3.3.19.

3.3.24. Использовать 3.3.7.

3.3.26. Использовать 3.3.24 и доказать, что если два числа входят в один цикл в разложении подстановки u на независимые циклы, то они входят в разные циклы в разложении подстановки u' и обратно.

3.4.13. Использовать 3.4.4.

3.4.23. Использовать 3.4.4. Рассмотреть в множестве целых чисел упорядоченность, согласно которой натуральные числа упорядочены по величине, а остальные числа несравнимы.

3.4.27. Ввести систему координат и доказать, что если абсциссы точек M_1, M_2, M_3 связаны соотношением $x_1 < x_2 < x_3$, то это же верно и для абсцисс их образов.

3.4.30. Использовать 3.4.6.

3.4.32. 2) Доказать утверждение для преобразований ранга $n-1$ и провести индукцию по рангу.

3.4.34. Доказать, что

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

— эндоморфизм Ω и что u не является регулярным элементом.

3.5.25. Использовать предыдущую задачу и тот факт, что для каждой пары вершин найдется самосовмещение тетраэдра, переводящее одну из этих вершин в другую.

3.5.28. Использовать указание к 3.5.25.

3.5.29. Использовать предыдущую задачу. Доказать, что только тождественная подстановка преобразует в себя каждую из четырех диагоналей куба. Рассмотреть множество преобразований диагоналей куба, соответствующих всем вращениям куба.

3.5.32. Использовать указание к 3.5.25.

3.6.8. Использовать теорему о существовании корней полинома.

3.6.22. Использовать 3.1.40, 3.3.19.

3.6.24. См. предыдущую задачу.

3.6.28. Доказать, что e_M — единица A, и использовать 3.6.5.

3.6.29. Используя свойства обратимости и определения pr_1, pr_2 для произведения, доказать, что для любых элементов u, v данной группы выполняются равенства $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_1 v$, $\mathrm{pr}_2 u = \mathrm{pr}_2 v$. Затем воспользоваться 2.6.1 и 3.6.12.

Глава IV

4.1.1. Использовать 2.6.19.

4.1.2. Использовать 4.1.1.

4.1.4. Объединение всевозможных правых смежных классов в силу 4.1.3 равно G. Исключить из этого объединения повторяющиеся классы, т. е. из каждой совокупности равных между собою классов оставить лишь один. Применить 4.1.2.

4.1.9. Использовать 2.6.21.

4.1.16. Доказать, что Hy^{-1} и Hz^{-1} равны тогда и только тогда, когда $yH = zH$. Учесть, что из $g = x_\xi h$ следует $g^{-1} = h^{-1}x_\xi^{-1}$.

4.1.20. Использовать 4.1.4 и 4.1.19. Правое разложение G по H дает разбиение всех n элементов группы на k подмножеств, каждое из которых состоит из m элементов.

4.1.21. Использовать 4.1.20 и 2.6.9.

4.1.23. Рассмотреть подмножество G, состоящее из всех элементов вида $u^{-1}v$, где $u, v \in K$, и подмножество, состоящее из всех элементов вида uv^{-1}, где $u, v \in K$.

4.1.26. Провести рассуждения, сходные с теми, при помощи которых доказывается возможность правого разложения группы по подгруппе (см. 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4).

4.1.30. Рассмотреть правое разложение H_1 по D, где D — пересечение H_1 и H_2. Умножить обе части получающегося равенства справа на H_2. Использовать 2.6.19.

4.2.10. Использовать 4.1.20 и 4.2.9.

4.2.24. Для $x \in K_1$ обозначаем через s_x число таких пар элементов (y, z) $(y \in K_2, z \in K_3)$, что $x = yz$. Доказать, что $s_x = s_{x'}$ для любых $x, x' \in K_1$. Показать, что $k_2k_3 = k_1s$, где $s = s_x$ для любого $x \in K_1$.

4.2.26. Рассмотреть произведение $(x^{-1}H_1x)\,H_2$. Использовать 4.1.30 и 4.2.25.

4.2.27. Использовать 4.1.19, 4.1.30 и 4.2.26.

4.3.5. Использовать теорему об определителе произведения матриц.

4.3.12. Использовать предыдущую задачу.

4.3.17. Использовать 3.5.5. Доказать, что каждый смежный класс по N, отличный от N, состоит из вращений на некоторый угол φ вокруг всевозможных точек.

4.3.25. Рассмотреть разложение S_4 по группе Клейна. Всем элементам класса поставить в соответствие подстановку из этого класса, имеющую 4 неподвижной точкой.

4.3.26. Использовать 4.3.21 и 2.4.18.

4.3.27. Если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, то найти $\varphi(g_1^{-1}g_2)$.

4.3.28. Использовать 4.3.27. Рассмотреть следующее отображение ψ группы G' в группу G/N: если $g' \in G'$, то $\psi(g') = gN$ — классу элементов, отображающихся в g' при данном гомоморфизме.

4.4.1. Рассмотреть равенство, приведенное в конце введения к § 2 настоящей главы, учитывая следствие 4.2.10.

4.4.2. Использовав 4.3.29 и 4.4.1, доказать коммутативность группы. Рассмотреть произведение двух различных циклических подгрупп группы и применить 4.1.30.

4.4.3. Доказывать по индукции относительно порядка группы. Взять произведение всех циклических подгрупп группы, порождаемых элементами, принадлежащими центру. Если среди этих подгрупп есть подгруппа порядка, делящегося на p, то в ней имеется элемент порядка p. Если этого нет, то согласно 4.1.30 порядок центра не делится на p. В этом случае, применив равенство, приведенное в конце введения к § 2 настоящей главы, получаем, что некоторое k_i не делится на p. Но k_i согласно 4.2.10 есть индекс некоторой собственной подгруппы группы. Раз индекс ее не делится на p, то по 4.1.20 должен делиться на p ее порядок. По индуктивному предположению эта подгруппа обладает элементом порядка p.

4.4.4. Использовать 4.4.3.

4.4.5. Использовать 4.1.30 и 4.4.3.

4.4.6. Доказывать индукцией по порядку группы. Для порядка группы рассмотреть равенство, приведенное в конце введения в § 2 настоящей главы. Учесть, что согласно 4.2.10 каждое $k_i > 1$ есть индекс некоторой подгруппы данной группы. Применить результат 4.4.3 к центру данной группы.

4.4.7. Учесть, что P является нормальным делителем в своем нормализаторе. Учитывая 4.1.30, рассмотреть произведение $[x]P$ для $x \in N$, имеющего порядком некоторую степень числа p.

4.4.10. Пусть P_1 и P_2 — две силовские p-подгруппы G. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (P_1, P_2). Для этого разложения составить равенство 4.2.27.

4.4.11. Пусть P — одна из силовских p-подгрупп группы G и N — ее нормализатор. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (N, P) и связанное с ним равенство 4.2.27. Учесть, что число силовских p-подгрупп в силу 4.2.10 и 4.4.10 равно индексу N в G. Используя 4.4.7, показать, что в разложении G по (N, P) равенство $x^{-1}Nx \cap P = P$ имеет место только для одного из классов NxP.

4.4.12. Использовать 4.4.5 и 4.4.11.

4.4.14. Использовать 4.4.11.

4.4.18. Рассмотреть разложение G по паре подгрупп (P, H), где P — некоторая силовская p-подгруппа G, и связанное с ним равенство 4.2.27.

4.4.19. Показать, что в рассматриваемом случае элементы из различных силовских p-подгрупп перестановочны между собою. Использовать 4.4.1. Рассмотреть множество всех элементов группы, перестановочных с элементами центра одной фиксированной силовской p-подгруппы.

4.4.20. Доказать по индукции относительно порядка группы, используя 4.3.33, 4.4.1 и 4.4.3.

4.5.14. Доказать, что каждый тройной цикл в группе S_n является коммутатором.

4.5.17. Использовать 4.4.20 и тот факт, что группа порядка p абелева.

4.5.18. Показать, что в этом случае коммутант принадлежит центру. Показать, что кроме элементов из коммутанта группа должна обладать и другими элементами четного порядка.

4.5.19. Использовать 2.2.15.

4.5.22. Использовать теорему об определителе произведения матриц.

Представить матрицу с определителем, равным единице, в виде произведений матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.6.3. Использовать 4.4.13.

4.6.5. Использовать 4.5.14 и 4.3.4.

4.6.6. Предположив разрешимость S_n при $n \geqslant 5$, взять последовательность подгрупп типа 4.6.4. Выделить в ней последний из членов H_k, содержащих все тройные циклы. Воспользовавшись 4.5.10, показать, что тогда и H_{k+1} должен был бы содержать все тройные циклы.

4.6.7. Для самóй разрешимой группы G взять последовательность подгрупп типа 4.6.4. Для подгруппы $F \subset G$ рассмотреть последовательность пересечений

$$F \cap H_1, \ F \cap H_2, \ \ldots, \ F \cap H_{m-1}, \ F \cap H_m.$$

4.6.8. Использовать 4.5.20 и 4.6.4.

4.6.9. Построить для G последовательность подгрупп типа 4.6.4, исходя из соответствующих последовательностей для N и G/N. Использовать 4.5.20.

4.6.13. Использовать 2.6.24 и 4.5.12.

4.6.14. Использовать 4.5.17.

4.6.15. Использовать 4.3.7, 4.6.5, 4.6.6, 4.6.7 и 4.6.9.

4.6.18, 4.6.19. Использовать 4.4.11 и 4.6.3.

4.6.20. Использовать 4.3.17.

4.7.4. Использовать 4.6.12 и 4.6.13.

4.7.8. Используя 4.7.7, доказать по индукции относительно k, что $H_k \subset Z_{n-k}$.

4.7.9. Доказать по индукции относительно k, что $H_{n-k} \subset Z_k$.

4.7.10. Использовать 4.7.8 и 4.7.9.

4.7.14. Использовать 4.4.1.

4.7.15. 1) Использовать 4.7.12; 2) использовать 4.7.11; 3) использовать 4.7.12; 4) использовать 4.7.14 и 4.7.4.

4.7.16. Использовать 4.7.14.

4.7.21. Использовать 4.7.4.

4.8.10, 4.8.11. Использовать 4.8.8.

4.8.20. Подсчитать число элементов в каждом классе сопряженных элементов второго порядка. Использовать 4.2.19.

4.8.21. Использовать предыдущую задачу.

4.8.22. Использовать предыдущую задачу. Если φ — автоморфизм S_4 и $\varphi(12) = (\alpha\beta)$, $\varphi(13) = (\alpha\gamma)$, $\varphi(14) = (\alpha\delta)$, то рассмотреть t_u, где

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

4.8.28. Использовать 3.3.20 и 4.8.3. Найти число порождающих множеств знакопеременной группы A_4, состоящих каждое из двух элементов.

4.8.31. Использовать 4.3.29 и 4.8.18.

4.9.6. Использовать предыдущую задачу.

4.9.8. Если u не регулярная подстановка, то при некотором k степень u^k преобразует в себя хотя бы одно число.

4.9.20. Если $G_\alpha \subset G' \subset G$ и uG' — правый смежный класс G по G', то доказать, что $M = \{ug_i\alpha, ug_j\alpha, \ldots\}$, где $g_i, g_j, \ldots \in G'$ — система импримитивности.

4.9.21. Пусть (ij_1), (ij_2), ..., (ij_k) — все транспозиции группы G, содержащие число i; H — группа, порожденная группой G_i и этими транспозициями. Доказать, что $k < n-1$ и что $H \neq G$. Использовать 3.3.19 и 4.9.20.

4.9.22. Использовать 4.9.13 и 4.9.21.

4.9.26. Если H — интранзитивный нормальный делитель транзитивной группы G, то доказать, что совокупность систем интранзитивности H является рядом импримитивности G (см. 4.9.3).

4.9.27. Использовать указание к предыдущей задаче.

4.9.34. Использовать 4.9.6.

Глава V

5.1.5. Доказать, что последние три соотношения являются следствиями предыдущих.

5.1.6. Доказать, что соотношение $a^2 = c^2$ (см. 5.1.5) не является следствием из данного множества соотношений.

5.1.18. Воспользоваться предыдущей задачей.

5.1.19. Воспользоваться предыдущей задачей.

5.1.20. Выяснить, какой вид имеют непосредственные следствия из данной совокупности соотношений.

5.1.24. Использовать 5.1.10.

5.1.27. Использовать 5.1.26.

5.2.4. Использовать 5.1.4.

5.2.7, 5.2.8. Использовать 5.1.19.

5.2.13. Использовать 5.2.9, 5.2.11 и 5.2.12.

5.2.21. Доказать, что каждое слово в группе G можно привести к виду $c^m d^n$, где m, n — целые числа.

5.2.22. Использовать 5.2.3.

5.2.23. Учесть, что если r — решение сравнения $x^p \equiv 1 \pmod q$, то остальными решениями будут r^2, r^3, ..., r^{p-1}.

5.3.4. Доказать, что множество K можно разбить на два непересекающихся равномощных подмножества K_1, K_2 так, что множество всевозможных классов, содержащих $k \in K_1$, будет свободным порождающим множеством группы $\overline{F}_K$.

5.3.8. 3) Использовать предыдущую задачу.

5.3.12. Если $K = \{a, b, \ldots\}$ — свободное порождающее множество, то и $K' = \{ab^n, b, \ldots\}$ — свободное порождающее множество при любом целом n.

5.3.13. Доказать утверждение для группы $\overline{F}_K$ из 5.3.4.

5.3.17. Использовать 5.3.15 и 5.3.16.

5.3.19. Использовать 5.3.11 и 5.3.14.

5.4.1. Построить свободную группу над K и воспользоваться 5.3.15.

5.4.3. Для доказательства некоммутативности G_2, G_3 воспользоваться 5.1.18, 4.3.35 и найти некоммутативные группы, в которых выполняются указанные соотношения.

5.4.4. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.5. Использовать указание к 5.4.3.

5.4.6. Использовать 5.4.2 и 4.3.35.

5.4.7. Использовать 5.1.18 и указание к 5.4.3.

5.4.8. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.10. Построить группу пар $(x^{\varepsilon_1}, y^{m_1})$.

5.4.14. Использовать 5.4.12 и 5.4.13.

5.4.15. Использовать указание к предыдущей задаче.

5.4.16. Использовать 5.4.13.

5.4.18. Использовать 5.2.18; доказать, что при любом автоморфизме элемент $(ab)^2$ переходит в себя.

5.4.20. Использовать 5.4.19, 5.2.16 и 5.2.17.

5.4.22. Использовать 5.4.21, 5.2.15 и 5.2.19.

5.4.23. Использовать 5.4.20 и 5.4.22.

5.4.24. Использовать 4.4.6, 4.4.11 и 4.4.14.

5.4.25. Если a — элемент порядка p, а b — элемент порядка q, то доказать, что все элементы a, $b^{-1}ab$, $b^{-2}ab^2$, ..., $b^{-(q-1)}ab^{q-1}$ различны. Доказать, что в G справедливы соотношения $a^{-j}ba^j = b^{r^j}$ при любом натуральном j. Использовать 4.4.5.

5.4.26. Использовать предыдущую задачу.

5.4.27. Использовать 5.4.26, 5.2.22, 5.2.23 и 4.4.14.

5.4.28. Использовать предыдущую задачу.

5.4.29. Использовать 5.4.27, 5.4.23 и 4.4.3.

5.5.20. Обозначим через s частичное преобразование $s(z) = -\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$, а через t частичное преобразование $t(z) = z + 1$.

Доказать, что элементы s и t образуют порождающее множество G. Пусть v — произвольный элемент из G и v осуществляет преобразование $v(z) = \frac{az+b}{cz+d}\left(z \neq -\frac{d}{c}\right)$. Сначала рассмотрим случай, когда $d = 0$. Если же $d \neq 0$, то пусть сперва $|b| \geqslant |d| > 0$. Показать, что элемент $t^n v$ осуществляет частичное преобразование

$$t^n v(z) = \frac{(a+nc)z + (b+nd)}{cz+d}\left(z \neq -\frac{d}{c}\right)$$

и что можно рассматривать лишь случай, когда $0 \leqslant |b| \leqslant d$. Если v удовлетворяет новым условиям, то рассмотреть элемент sv. Далее, применяя умножение элемента v слева на соответствующие степени элемента t и на элемент s, показать, что v выражается через элементы s и t. Рассмотреть элементы $u = ts$ и s. Доказать, что G порождается элементами u и s. Показать, что $u^3 = s^2 = e$ и, значит, всякий элемент из G может быть записан в виде произведения, в котором чередуются элемент s и элементы u и u^2. Допустить, что для некоторого элемента из G эта запись не однозначна. Показать, что в этом случае имеет место соотношение вида

$su^{\alpha_1}su^{\alpha_2}\ldots su^{\alpha_k}=e$, где все α_i принимают значения 1 и 2. Проведя индукцию по k, получить противоречие.

5.5.24. Рассмотреть совокупность групп $\overline{G}_\xi$ ($\xi\in\Gamma$), изоморфных с G_ξ и не имеющих попарно общих элементов, кроме e, который является единицей каждой из них. Рассмотреть совокупность таких слов $x_1x_2\ldots x_n$ над $M=\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma}\overline{G}_\xi$, у которых никакие два соседних x_i и x_{i+1} не принадлежат одной и той же группе $\overline{G}_\alpha$. В множестве M рассмотреть действие, состоящее в приписывании двух слов над M с последующим перемножением множителей из одной и той же $\overline{G}_\alpha$, если таковые окажутся.

5.6.5. 4) Воспользоваться 4.4.14.

5.6.26. Воспользоваться 5.6.25.

5.6.28. Воспользоваться 5.6.26.

5.6.29. Воспользоваться 5.6.14.

5.6.31. Доказать, что существует гомоморфизм G на прямое произведение n бесконечных циклических групп (см. 5.6.29).

5.6.32. Сравнить мощности (гл. I, § 2) множеств G и множества всех последовательностей $(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ $(a_i\in G_i)$, где лишь конечное число a_i отлично от единиц групп G_i.

Глава VI

6.1.9. Рассмотреть совокупность G'_p всех элементов G, порядки которых являются степенями данного простого числа p, и доказать, что G'_p — подгруппа, причем, если $p_1\neq p_2$, то $G'_{p_1}\cap G'_{p_2}=e$.

6.1.27. Воспользоваться 6.1.26.

6.1.28. Воспользоваться 6.1.24 и 6.1.27.

6.2.6. Пусть H — подгруппа G, рассматриваемая в предыдущей задаче. Доказать, что $[H, a]=[a]\times H=G$.

6.2.7. Использовать 6.1.9 и 6.2.6.

6.2.9. Предварительно решить задачу для примарной конечной группы.

6.2.13. Использовать 6.2.12.

6.3.1. Доказательство провести по индукции относительно числа порождающих.

6.3.2. Доказательство провести по индукции относительно числа $n=|n_1|+\ldots+|n_k|$.

6.3.4. С помощью задачи 6.3.2 найти порождающее множество $\{g_1, \ldots, g_k\}$ группы A такое, что порядки $g_1, g_2, \ldots, g_k$ не убывают, и такое, что не существует порождающего множества $\{g'_1, \ldots, g'_k\}$, для которого порядок g_1 равен порядку g'_1 и т. д., но порядок g_i больше порядка g'_i для некоторого $i=1, 2, \ldots, k$.

6.3.7. Использовать 6.2.13.

6.3.8. 6) Выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2^2a_3^2$; a_2; a_3; 7) выбрать в качестве нового порождающего множества a_1a_2; a_2; 8) выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2^3a_3^3$; a_2; a_3; 9) выбрать в качестве нового порождающего множества $a_1a_2a_3^{-1}$; a_2; a_3.

6.4.4. Рассмотреть совокупность, составленную из всех элементов, входящих в максимальную линейно независимую совокупность A, и представителей всех классов, входящих в максимальную линейно независимую совокупность G/A.

6.4.20. Воспользоваться 6.4.15.

6.4.21. Рассмотреть множество H всех элементов, линейно зависящих от элементов из M, и доказать, что H — сервантная подгруппа G. Воспользоваться результатом задачи 6.4.20.

6.4.25. Воспользоваться 6.4.23 и 6.4.24.

6.4.26. Воспользоваться 6.4.21 и 6.4.25.

Глава VII

7.1.18. Рассмотреть множество $A' = A \bigcup z$ $(z \notin A)$. Показать, что A изоморфно отображается в полугруппу всех преобразований A', для чего рассмотреть отображение φ такое, что

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} z, & a_\alpha, & a_\beta, & \ldots, & a_\xi, & \ldots \\ a, & aa_\alpha, & aa_\beta, & \ldots, & aa_\xi, & \ldots \end{pmatrix} \qquad (a \in A).$$

7.1.20. Использовать представление, данное в указании к 7.1.18.

7.1.28. Рассмотреть следующее отображение полугруппы A в полугруппу C: пусть a_0 — произвольный фиксированный элемент полугруппы A; положим

$$\chi_{a_0}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } aa_0 \neq a_0; \\ 1, & \text{если } aa_0 = a_0 \end{cases} \qquad (a \in A).$$

Доказать, что при всяком $a_0 \in A$ отображение χ_{a_0} есть гомоморфизм.

7.1.29. Воспользоваться предыдущей задачей.

7.2.2. Использовать предыдущую задачу.

7.2.10. Рассмотреть подгруппы $H_1 = \{(a^{\vartheta\alpha}, b^{\beta})\}$, $H_2 = \{(a^{\vartheta\alpha}, b^{\vartheta\beta})\}$, где α, β — любые целые числа.

7.2.13. Если $H_2 = a^{-1}H_1a$, то рассмотреть отображение ψ множества смежных классов по подгруппе H_1 в множество смежных классов по подгруппе H_2, определенное равенством $\psi(xH_1) = xaH_2$.

7.2.14. Пусть ψ — взаимно однозначное отображение множества правых смежных классов по подгруппе H_1 на множество правых смежных классов по подгруппе H_2, удовлетворяющее условию $\psi(u_g^{H_1}(xH_1)) = u_g^{H_2}(\psi(xH_1))$. Доказать, что если $\psi(H_1) = aH_2$, то $\psi(xH_1) = xaH_2$ и $H_2 = a^{-1}H_1a$. Для доказательства использовать тот факт, что $gH_1 = H_1$ тогда и только тогда, когда $g \in H_1$.

7.2.17. Использовать 7.2.15.

7.2.21. Использовать предыдущую задачу.

7.2.22. Использовать 7.2.21.

7.2.23. Использовать 7.2.12.

7.2.27. Использовать 7.2.13, 7.2.14 и доказать, что каждое изоморфное транзитивное представление группы S_4 по подгруппе четвертого порядка несущественно отличается от одного из указанных в 7.2.13.

7.2.28. Использовать 7.2.14.

7.2.29. Использовать 7.2.13, 7.2.14, 7.2.27 и 7.2.28. Доказать, что каждое изоморфное транзитивное представление группы S_4 по под-

группе четвертого порядка несущественно отличается от одного из указанных в 7.2.27.

7.2.31. 1) Рассмотреть отображение ω множества правых смежных классов по подгруппе H_1 в множество правых смежных классов по подгруппе H_2, определенное равенством $\omega(gH_1) = \psi(g)H_2$.

2) Рассмотреть отображение ξ образа представления φ_{H_1} в образ представления φ_{H_2}, определенное равенством $\xi(u_g^{H_1}) = u_{\psi(g)}^{H_2}$.

7.2.33. Пусть ξ — изоморфизм образов представлений φ_{H_1} и φ_{H_2}, а ω — взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами по подгруппам H_1 и H_2. Если α — автоморфизм группы G, определенный изоморфизмом ξ (см. 7.2.32), и если $\omega(H_1) = xH_2$, то доказать, что $\alpha(H_1) = xH_2x^{-1}$. Вывести отсюда, что искомый автоморфизм ψ определяется равенством $\psi(g) = x^{-1}\alpha(g)x$.

7.3.17. Воспользоваться 7.3.16.

7.3.18. Пусть $T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ A(x) & T_2(x) \end{pmatrix}$, где $T_1(x)$ — матрица порядка m_1, а $T_2(x)$ — матрица порядка m_2, и пусть G — группа порядка n. Рассмотреть матрицу $P = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 \\ F & E_{m_2} \end{pmatrix}$, где E_{m_i} — единичные матрицы порядка m_i $(i = 1, 2)$, а $F = \frac{1}{n}\sum\limits_{x \in G} A(x)\,T_1^{-1}(x)$.

7.3.19. Воспользоваться предыдущей задачей.

7.3.20, 7.3.21. Воспользоваться 7.3.17.

7.4.11, 7.4.12. Воспользоваться 7.4.10.

7.4.13—7.4.16. Воспользоваться 7.4.6 и 7.4.10.

7.4.18—7.4.20. Воспользоваться 7.4.6, 7.4.10 и 7.4.17.

7.4.21—7.4.24, 7.4.28, 7.4.34. Воспользоваться 7.4.10 и 7.4.17.

7.5.7, 7.5.8. Воспользоваться 7.3.21.

7.5.10. Воспользоваться 7.4.10 и 7.5.7.

7.5.14. Воспользоваться 7.5.13.

Глава VIII

8.1.1. 3) Воспользоваться неравенством Коши:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

8.1.16. Рассмотреть совокупность многочленов с рациональными коэффициентами и воспользоваться результатом задачи 1.2.21.

8.1.17. Ввести в M_T метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sup |x(t) - y(t)| \qquad (x, y \in M_T).$$

8.1.20. Рассмотреть отображение

$$\rho'(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{если } \rho(x, y) \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } \rho(x, y) > 1. \end{cases}$$

8.2.6. Воспользоваться 8.2.5.

8.2.9. Воспользоваться 8.2.7.

8.2.16. Предварительно доказать, что множество $\{\rho(f(x), g(x))\}$ $(x \in M)$ ограничено в метрическом пространстве вещественных чисел (8.1.1, 2)). Затем воспользоваться известной теоремой о существовании точной верхней границы ограниченного сверху множества и тем, что эта граница достигается.

8.2.18. Воспользоваться 8.2.7 и 8.2.16.

8.2.19. Воспользоваться 8.2.15.

8.2.23. Воспользоваться 8.1.20.

8.3.21. Воспользоваться 8.3.18.

8.3.28, 8.3.29. Воспользоваться 8.3.19.

8.3.30. Воспользоваться 8.3.21.

8.4.5. Воспользоваться 8.3.28.

8.4.11. Пусть α — иррациональное число; из теории чисел известно, что каковы бы ни были положительное число ε и вещественное число d, всегда найдутся такие целые числа m и n, что $|m\alpha - d - n| < \varepsilon$. Воспользоваться этим результатом для решения второй части задачи.

8.4.12, 8.4.13. Воспользоваться 8.3.19.

8.4.17. Пусть $c \in U \bigcap H$. Доказать, что существует такое открытое множество V, содержащее e, что $cV \subset U$. Пусть $a \in \overline{H}$. Доказать, что существует $b \in H$ такое, что $cba^{-1} \in cV \subset U$. Отсюда получить, что $cba^{-1} \in H$, и показать, что $a \in H$.

8.4.19. Воспользоваться 8.3.21, 8.3.19 и 8.4.6.

8.4.20. Воспользоваться 8.4.19.

8.4.21. Воспользоваться 8.4.6, 8.3.25 и 8.3.27, 8.3.29.

8.4.23. Воспользоваться 8.4.21, 8.4.20, 8.3.28 и 8.3.29.

8.4.25. Воспользоваться 8.3.28 и 8.3.29.

8.4.28. Воспользоваться 8.4.5, 8.4.7 и 8.3.19.

8.4.29. Воспользоваться предыдущей задачей и задачей 8.4.13.

8.4.35. Ввести на плоскости систему координат и воспользоваться известной теоремой о том, что формулы, выражающие аффинное преобразование в координатах, линейны.

8.4.36. Воспользоваться 8.4.19 и 8.3.28.

8.4.38. Рассмотреть отображение g, являющееся результатом последовательного применения отображений f и ψ^{-1}, где f — естественное отображение G на множество правых классов G/A_α. Показать, что f открыто. Показать, что из непрерывности g следует непрерывность ψ^{-1}.

8.4.39. Воспользоваться 8.2.23.

8.5.7. Рассмотреть отношение ρ такое, что $x \sim y\,(\rho)$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}y \in H$, и доказать, что ρ — двусторонне стабильная упорядоченность.

8.5.12. Использовать 8.5.5.

8.5.13, 8.5.14. Использовать 8.5.7.

8.5.26. Использовать 8.5.1, 8.5.6 и 8.5.7.

ОТВЕТЫ

Глава I

1.1.1. $1 \in M_1$; $-2, 0, 1 \in M_2$; $-2, 0, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{7} \in M_3$; $1, \frac{3}{5}, \sqrt{2}, \pi, \frac{1}{7} \in M_4$; $0, 1 \in M_5$; $\frac{3}{5}, \sqrt{2}, -2, \pi, \frac{1}{7}, i, -i, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i, 2 + i \in M_6$. **1.1.2.** x, z. **1.1.3.** Три элемента. **1.1.4.** $M_1 \subset M_2 \subset M_3$; $M_1 \subset M_4$; $M_5 \subset M_2 \subset M_3$. **1.1.6.** 0. **1.1.7.** 1) Все вещественные числа; 2) $\emptyset$. **1.1.8.** 1) Множество всех натуральных чисел; 2) $\emptyset$; 3) M_k, где k — наименьшее общее кратное чисел n и m; 4) множество всех натуральных чисел, отличных от 1. **1.1.10.** 1) M; 2) $\emptyset$. **1.1.11.** 1) A; 2) M; 3) $\emptyset$; 4) $\tilde{A} \cap \tilde{B}$; 5) $\tilde{A} \cup \tilde{B}$; 6) A; 7) $A \cup B$; 8) $A \cup B$; 9) $\emptyset$; 10) M. **1.1.12.** 2^4; 14. **1.1.13.** Имеют место три требуемых разбиения: $M_0 \cup M_2 \cup M_3$; $M_4 \cup M_5$; $M_6 \cup M_7 \cup M_1 \cup M_0 \cup M_3$. **1.1.14.** Образует разбиение. **1.1.15.** $\emptyset$. **1.1.17.** 243. **1.1.18.** $(-1, a, a)$; $(-1, b, a)$; $(-1, c, a)$; $(1, a, a)$; $(1, b, a)$; $(1, c, a)$. **1.1.19.** $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$. **1.1.20.** Пусть m — число элементов M. При m четном оба класса должны состоять из $\frac{m}{2}$ элементов каждый. При m нечетном один класс состоит из $\frac{m+1}{2}$ элементов, а другой из $\frac{m-1}{2}$ элементов. **1.2.1.** Общее число отображений m^n; отображения A на B существуют при $n \geqslant m$, взаимно однозначные отображения существуют при $n \leqslant m$; взаимно однозначные отображения A на B существуют при $n = m$, и число их равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$. **1.2.3.** Отображений указанного типа C на A нет; отображение указанного типа C на B существует. **1.2.4.** 175. **1.2.5.** φ взаимно однозначно; $\varphi(M)$ состоит из всех натуральных чисел, за исключением n чисел: $n, n+1, \ldots, 2n-1$. **1.2.6.** φ взаимно однозначно; $\varphi(N) \neq N$, т. е. φ является отображением N в N, но не на N. **1.2.7.** Необходимо и достаточно, чтобы $h(x)$ не принимала значений, равных 0, ни при каком значении x. **1.2.8.** Отображение взаимно однозначно, оно не является отображением множества на себя. Неподвижными точками отображения являются все равносторонние треугольники. **1.2.18.** Множество $\bigcup\limits_k M_k$ конечно тогда и только тогда, когда все M_k конечны и существует такое натуральное число n, что каждое M_i совпадает с одним из $M_1, M_2, \ldots, M_n$. **1.2.31.** φ должно быть взаимно однозначным, а $N \setminus \varphi N'$ бесконеч-

ным. **1.3.3.** 1) $\mathrm{pr}_1\rho_k = \{k+1,\ k+2,\ \ldots\}$, если $k \neq 0$; $\mathrm{pr}_1\rho_0 = N$; 2) $\mathrm{pr}_2\rho_k = \{1,\ 2,\ \ldots\}$; 3) $n \sim m$ (σ) тогда и только тогда, когда $n \geqslant m$; 4) $n \sim m$ (σ^*) тогда и только тогда, когда $m < n$; 5) $n \sim m$ (τ) тогда и только тогда, когда $n \leqslant m$; 6) $n \sim m$ (τ^*) тогда и только тогда, когда $m > n$. **1.3.5.** $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (τ_1), если $a_1 = b_1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$; $\tau_2 = \Delta$; $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n)$ (τ_3), если $a_1 = b_1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$. **1.3.6.** 1) Отношение ρ_1 симметрично; 2) отношение ρ_2 рефлексивно, транзитивно и антисимметрично; 3) отношение ρ_3 антисимметрично; 4) отношение ρ_4 транзитивно, антисимметрично; 5) отношение ρ_5 рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; 6) отношение σ_0 рефлексивно, транзитивно, симметрично, антисимметрично. Отношение σ_k при $k \neq 0$ обладает только свойством антисимметричности. **1.3.11.** Вещественные числа a и b находятся в отношении, являющемся транзитивным замыканием отношения ρ, тогда и только тогда, когда $b \geqslant a$. Транзитивное замыкание $\rho \bigcup \rho^*$ равно ω_R. **1.3.12.** 1) $z_1 \sim z_2$ $(\rho_1 \bigcap \rho_1^*)$ тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$; 2) ω_K; 3) Δ; 4) ω_K. **1.3.13.** $\rho' = \rho \bigcup \rho^*$. **1.3.14.** $\rho' = \rho \bigcup \Delta$. **1.3.15.** ρ_1—упорядоченность; ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 не являются упорядоченностями. **1.3.16.** ρ_1 — упорядоченность, ρ_2 — эквивалентность, ρ_3 не является ни упорядоченностью, ни эквивалентностью, ρ_4 — упорядоченность. **1.3.20.** Все конечные линейно упорядоченные множества и бесконечные линейно упорядоченные множества следующих трех видов:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots,\quad a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots,$$

$$\ldots < a_{-n} < \ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

1.3.21. 1) Не является вполне упорядоченным; 2) вполне упорядочено; 3) не является вполне упорядоченным; 4) не является вполне упорядоченным; 5) не является вполне упорядоченным; 6) вполне упорядочено; 7) не является вполне упорядоченным. **1.3.22.** M — конечное множество. **1.4.1.** $\rho^2 = \rho$; $\rho\sigma = \sigma$; σ^2 — такое бинарное отношение, что $n \sim m$ (σ^2) при $n - m < 1$; $\tau^2 = \omega$; $\rho\lambda_k$ — такое бинарное отношение, что $n \sim m$ $(\rho\lambda_k)$, если n — делитель числа $m + k$ или делитель числа $m - k$; $\lambda_k\rho$ — такое бинарное отношение, что m делится на $n - k$ или на $n + k$; $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ — такое бинарное отношение, что $n \sim m$ $(\sigma\lambda_k)$, если $n < m + k$; $\lambda_k\lambda_l$ — такое бинарное отношение, что $n \sim m$ $(\lambda_k\lambda_l)$, если $|n - m| = k + l$ или $|n - m| = |k - l|$. **1.4.6.** $\rho R = Z$; $R\rho = Z$; $\sigma R = R$; $R\tau = R$; $\rho C = C$; $C\sigma = Z$; $C\tau = C$; ρP есть множество всех комплексных чисел z таких, что $|z| = 1$; $P\sigma$ — множество всех чисел вида bi, где b — положительное вещественное число; $P\tau = \{-i\}$. **1.4.9.** $\omega(\rho_1 \bigcap \rho_2) = \{(a, a), (b, a)\}$; $\omega\rho_1 \bigcap \omega\rho_2 = \omega$. **1.4.10.** $\omega^2 = \omega$; $\omega\overline{\Delta} = \overline{\Delta}\omega = \omega$, если Ω содержит более одного элемента; $\omega\overline{\Delta} = \overline{\Delta}\omega = \emptyset$, если Ω состоит из одного элемента; $\overline{\Delta}^2 = \omega$, если Ω содержит не менее трех элементов; $\overline{\Delta}^2 = \Delta$, если Ω состоит из двух элементов; $\overline{\Delta}^2 = \emptyset$, если Ω состоит из одного элемента. **1.4.11.** $\rho_i\rho_j = \omega$, если $i \neq j$ и $\rho_i^2 = \rho_i$. **1.4.12.** $\rho^2 = \rho$; $\rho\bar{\rho}$ — такое отношение, что $P \sim Q$ $(\rho\bar{\rho})$, если $Q \neq M$, $\bar{\rho}\rho$ — такое отно-

шение, что $P \sim Q\ (\bar{\rho}\rho)$, если $P \neq \emptyset$; $\rho\rho^* = \omega$; $\bar{\rho}\rho^* = \bar{\rho}$. **1.4.13.** $\rho\Delta = \Delta\rho = \rho$; $\omega\rho$ — такое отношение, что $\alpha \sim \beta\ (\omega\rho)$, если $\beta \in \mathrm{pr}_2\,\rho$; $\rho\omega$ — такое отношение, что $\alpha \sim \beta\ (\rho\omega)$, если $\alpha \in \mathrm{pr}_1\,\rho$. **1.4.14.** 1) $\mathrm{pr}_2\rho = \Omega$; 2) $\mathrm{pr}_1\,\rho = \Omega$; 3) $\mathrm{pr}_1\,\rho = \mathrm{pr}_2\,\rho = \Omega$; 4) $\rho \neq \emptyset$, 5) $\alpha\rho \cap \beta\rho \neq \emptyset$ при любых $\alpha, \beta \in \Omega$. **1.4.15.** $\sigma_1^2 = \sigma_1$; $\sigma_2^2 = \sigma_2$; $\sigma_3^2 = \omega$; $f(x) \sim \varphi(x)\ (\sigma_1\sigma_2)$ тогда и только тогда, когда $f(a) \leqslant \varphi(a)$ и $f(b) \leqslant \varphi(b)$; $\sigma_2\sigma_3$ — такое отношение, что $f(x) \sim \varphi(x)\ (\sigma_2\sigma_3)$, если $f(a) \neq \varphi(a)$ и $f(b) \neq \varphi(b)$; $\sigma_3\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3$. **1.4.20.** Из рефлексивности ρ_1 и ρ_2 всегда следует рефлексивность $\rho_1\rho_2$. Для транзитивности, симметричности и антисимметричности соответствующий вопрос получает отрицательный ответ. **1.4.22.** $\rho_1\rho_2$ является линейной упорядоченностью лишь при $\rho_1 = \rho_2$. **1.4.24.** ρ^2 и ρ^3 рефлексивны, симметричны и транзитивны; σ^2 и σ^3 рефлексивны, антисимметричны и транзитивны; $\rho\sigma$; $\sigma\rho$; $\sigma\rho\sigma$; $\rho\sigma\rho$ рефлексивны.

Глава II

2.1.1. 45.

2.1.2.

	1	2	3	4	5
1	—	—	—	—	—
2	1	—	—	—	—
3	2	1	—	—	—
4	3	2	1	—	—
5	4	3	2	1	—

2.1.3. x_2, x_3, x_4, x_0.

2.1.4.

	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	—	—	—	—
z_2	—	z_1	.	.
z_3	—	.	z_1	.
z_4	—	.	.	z_1

На местах, где стоят точки, можно произвольно ставить z_1 или черточку —. **2.1.5.** 1) В N результат действия определен для (a, b), если a и b оба четные или оба нечетные; 2) в N результат действия определен для любой пары (a, b); 3) в N результат действия опрецелен для любой пары (a, b), в которой $a \neq b$. **2.1.8.** M и M_1 изоморфны; M_2 неизоморфно ни с M, ни с M_1. **2.1.12.** 5. **2.1.13.** Два подмножества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\{\beta, \gamma, \varepsilon\}$. **2.1.15.** M изоморфно со всяким своим бесконечным подмножеством. **2.2.1.—2.2.3, 2.2.6.** См. таблицы на стр. 241—243.

2.2.7. Неограниченная применимость, ассоциативность. Имеются единица действия и нуль. Обратными элементами обладают неособенные матрицы. **2.2.8.** Неограниченная применимость при любых p, q, r; коммутативность при $p = q$; ассоциативность при $p = q = 1$ и $p = q = 0$; обратимость слева при $p \neq 0$; обратимость справа при $q \neq 0$; сократимость слева при $q \neq 0$; сократимость справа при $p \neq 0$. **2.2.9.** Неограниченная применимость, ассоциативность. Имеются единица и нуль. **2.2.10.** Неограниченная применимость, коммутативность, обратимость слева, обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. Единицы нет. Нуля нет. Все элементы идемпотентны. **2.2.11.** Неограниченная применимость, обратимость слева, обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. **2.2.12.** Действие совершается по правилу сложения векторов. Выполняются ассоциативность, обратимость слева,

2. 2. 1.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет

2. 2. 2.

Множества	Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Множество всех натуральных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	да	да	да	нет
	Вычитание	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет

Множества	Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы действия	Наличие нуля действия
Миожество всех целых чисел	Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
	Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет
Множество всех рациональных чисел	Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
	Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
	Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет
Множество всех положительных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
	Вычитаиие	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет
	Деление	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Множество всех отрицательных чисел	Сложение	да	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Умножение	нет	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет
	Вычитание	нет	нет	нет	да	нет	да	да	нет	нет
	Деленне	нет	да	да	нет	нет	да	да	нет	нет

2. 2. 3.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие единицы	Наличие нуля
Сложение	да	да	да	да	да	да	да	да	нет
Умножение	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да
Вычитание	да	нет	нет	да	да	да	да	нет	нет
Деление	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	нет	нет

2. 2. 6.

Действие	Неограниченная применимость	Коммутативность	Ассоциативность	Обратимость слева	Обратимость справа	Сократимость слева	Сократимость справа	Наличие левых единиц	Наличие правых единиц	Наличие двусторонних единиц	Наличие левых нулей	Наличие правых нулей	Наличие двусторонних нулей
1	да	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	да	да
2	да	да	да	нет	нет	нет	нет	да	да	да	нет	нет	нет
3	да	нет	нет	нет	нет	да	да	нет	да	нет	да	нет	нет
4	нет	да	нет	нет	нет	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет

1) Все идемпотенты; 2) все идемпотенты; 3) 1; 4) 2.

обратимость справа, сократимость слева, сократимость справа. **2.2.13.** 1) Заполнены все клетки таблицы; 2) таблица симметрична относительно диагонали; 3) в каждом столбце встречаются все элементы; 4) в каждой строке встречаются все элементы; 5) ни в одном из столбцов ни один из элементов не встречается более одного раза; 6) ни в одной из строк ни один из элементов не встречается более одного раза. **2.2.14.** Для коммутативности, ассоциативности, сократимости слева, сократимости справа. **2.2.16.** Действие объединения обладает свойствами неограниченной применимости, коммутативности, ассоциативности. Действие пересечения обладает теми же свойствами. **2.2.17.** Всеми основными свойствами, кроме ассоциативности. **2.3.1.** $RR=RZ=ZR=R$; $ZZ=Z$; $PP=P$; $PN=N$; $NN=P$. **2.3.2.** $(MM)\,M=\{a\}$, $M\,(MM)=\{a, b\}$. **2.3.7.** A — идеал; B замкнуто, но не является идеалом; C_1 замкнуто; C_n при $n>1$ не замкнуто; D_n — идеал; $C_n \cap D_m$ пусто при $n<m$, не замкнуто при $n\geqslant m$, $n\neq 1$, замкнуто, но не является идеалом при $n=m=1$. **2.3.8.** Множество всех вещественных чисел замкнуто, но не является идеалом; множество всех чисто мнимых чисел не замкнуто. **2.3.9.** Множество всех неособенных матриц замкнуто, но не является идеалом; множество всех особенных матриц — идеал. **2.3.16.** T_1 и T_2 являются идеалами; T_1T_2 не является идеалом. **2.3.17.** $\{z\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда z идемпотентен; $\{z\}$ — левый идеал, когда z есть правый нуль M; $\{z\}$ — правый идеал, когда z есть левый нуль M; $\{z\}$ — двусторонний идеал, когда z есть нуль M. **2.3.18.** $n+1$. **2.4.1.** φ_1 и φ_3 — гомоморфизмы; φ_2 и φ_4 гомоморфизмами не являются. **2.4.2.** 1) Гомоморфизм φ_0, отображающий все числа из R в 0; 2) гомоморфизм φ_1, определенный равенствами $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(r)=1$ $(r\neq 0)$; 3) остальные гомоморфизмы устроены следующим образом. Пусть множество R' состоит из -1 и всех простых натуральных чисел, P — произвольное непустое подмножество R'. Гомоморфизм φ_P определен равенствами $\varphi_P(0)=0$, $\varphi_P(1)=1$, $\varphi_P(r)=(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_n}$, где $r=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\times$ $\times\, q_1^{l_1}q_2^{l_2}\ldots q_m^{l_m}$ ($p_1, \ldots, p_n\in P$, $q_1, \ldots, q_m\in R'\setminus P$; $k_1, \ldots, k_n$, $l_1 \ldots l_m$ — целые числа). **2.4.3.** φ_1 и φ_3 — гомоморфизмы; φ_2 гомоморфизмом не является. **2.4.7.** Для любого $k=1, 2, 3, \ldots$ отображение φ_k, согласно которому $\varphi_k(5^n)=5^{kn}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, является гомоморфизмом. Других гомоморфизмов нет. Все φ_k являются изоморфизмами. **2.4.10.** Необходимо и достаточно, чтобы среди элементов M_0 имелся хотя бы один идемпотент. **2.4.12.** $a\sim b$ (σ), но не имеет места $aa\sim bb$ (σ). **2.4.13.** 1) φ_1 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одним и тем же старшим коэффициентом; 2) φ_2 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одним и тем же старшим коэффициентом; 3) φ_3 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одинаковыми значениями при $x=1$; 4) φ_4 гомоморфизмом не является; 5) φ_5 — гомоморфизм, каждый класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов с одинаковыми по модулю свободными членами; 6) φ_6 — гомоморфизм: при $c\neq\pm 1$ каждый

класс соответствующего разбиения состоит из всех полиномов одной и той же степени, при $c=1$ имеется один класс, содержащий все полиномы, при $c=-1$ имеется два класса — один состоит из всех полиномов четной степени и второй из всех полиномов нечетной степени.

2.4.15.

	R^+	R^-	R^0
R^+	R^+	R^-	R^0
R^-	R^-	R^+	R^0
R^0	R^0	R^0	R^0

2.4.17.

M/T_1	1	T_1
1	1	T_1
T_1	T_1	T_1

M/T_2	1	2	T_2
1	1	2	T_2
2	2	T_2	T_2
T_2	T_2	T_2	T_2

M/T_3	1	2	4	T_3
1	1	2	4	T_3
2	2	4	T_3	T_3
4	4	T_3	T_3	T_3
T_3	T_3	T_3	T_3	T_3

2.4.18. φ является изоморфизмом лишь при тождественной эквивалентности ρ. **2.4.21.** Всякая эквивалентность, в которой $a \sim b$, и всякая эквивалентность, в которой ни a ни b не эквивалентны ни с какими другими отличными от них самих элементами. Всего 7. **2.4.22.** 5. **2.5.3.** Множество, состоящее из всех простых чисел и числа 1. **2.5.4.** $[x]$ — множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где n — любое натуральное число; $[x, t]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 2^k & 2^k n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k и n — любые натуральные числа; $[y, z]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^l \end{pmatrix},$$

где k и l — любые натуральные числа; $[y, t]$ — множество всех матриц, имеющих один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где n — любое натуральное число. **2.5.12.** Девять подполугрупп, среди них пять идеалов. **2.5.13.** $(1, p)$, где p — простое число, и $(2, 1)$. **2.5.15.** $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Левым идеалом является всякое

множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит всякий элемент b_{ik}. Правым идеалом является всякое множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит и всякий элемент b_{ki}. Двусторонним идеалом является всякое множество, содержащее 0 и такое, что вместе с a_k оно содержит и всякие элементы b_{ik} и b_{ki}. **2.5.17.** Регулярная полугруппа, в которой регулярно сопряжены всякие два элемента. **2.5.20.** Нормальное подмножество, являющееся подполугруппой. **2.5.21.** Если $A=[x]$, то помимо четырех подмножеств, состоящих из одного элемента каждое, нормальными подмножествами являются

$$\{x, x^3\}, \{x^2, x^4\}, \{x^3, x^4\}, \{x^2, x^3, x^4\}, \{x, x^2, x^3, x^4\}.$$

2.6.3. Среди указанных множеств группами являются лишь множества: второе, четвертое, пятое и шестое. **2.6.4.** M есть множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a \neq 0).$$

2.6.6. Порядки соответственно: два, бесконечный, четыре, бесконечный, бесконечный. **2.6.11.** 8. **2.6.12.** 16. **2.6.24.** 1) Единичная группа; 2) циклическая группа, порядок которой есть простое число; 3) циклическая группа, порядок которой есть квадрат простого числа. **2.6.25.** 1) $\{1, -1, i, -i\}$; 2) $\left\{1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, 3) $\left\{1, -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -i, -1\right\}$; 4) $\{2^{4k}, 2^{4k+1}i, -2^{4k+2}, -2^{4k+3}i\}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 5) $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$ $(k, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 6) $\{1, -1\}$, $\{1\}$, $\{2^{4k}, -2^{4k+2}\}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$ $(k, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2.6.29. Группа должна быть периодической. **2.6.33.** В коммутативных группах. **2.6.38.** H_2 не является нормальным делителем G. **2.6.39.** $\{1\}$, $\{1, -1\}$, $\{1, -1, i, -i\}$, $\{1, -1, j, -j\}$, $\{1, -1, k, -k\}$.

Глава III

3.1.2.

$$uw=\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 8&7&3&1&7&2&4&5 \end{pmatrix}, \quad wu=\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&6&2&8&3&8&4&5 \end{pmatrix},$$

$$v^2u=\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&8&1&2&2&2&8&2 \end{pmatrix}, \quad uw^3=\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 5&2&7&8&2&3&5&1 \end{pmatrix},$$

$$uvw=\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&7&8&8&7&1&3&7 \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Типы элементов u, v, uv, vu соответственно равны (1,3); (2,2); (3,1); (2,1). **3.1.4.** 1) Неограниченной применимостью, ассоциативностью; 2) неограниченной применимостью, ассоциативностью; 3) неограниченной применимостью, ассоциативностью, сократимостью слева и справа; 4) неограниченной применимостью, ассоциативностью, сократимостью слева и справа, обратимостью слева и справа; 5) всеми семью свойствами; 6) неограниченной применимостью, ассоциативностью, коммутативностью, сократимостью слева и справа. **3.1.5.** 1) Левыми нулями являются все постоянные; правых, а значит, и двусторонних нулей нет; 2) правыми нулями являются все функции, принимающие значения из отрезка $[0, 1]$, и только они; левых нулей нет; 3) то же, что и в 1); 4) нулей нет. **3.1.6.** Левыми нулями являются преобразования u_α ($\alpha \in \Omega$), определенные так: $u_\alpha(\xi) = \alpha$ ($\xi \in \Omega$), и только они. **3.1.7.** 1) Полугруппами являются все множества из задачи 3.1.4, из них группами являются 4), 5); 2) оба множества — полугруппы; 3) 4), 5) — полугруппы; 6) не является полугруппой. Ни одна из полугрупп, указанных в 2) — 5), не является группой. **3.1.8.** Тип u равен (1,1), тип v равен (1,2). **3.1.9.** Векторы переноса перпендикулярны данным прямым, длина каждого равна удвоенному расстоянию между данными прямыми, векторы противоположны по знаку. **3.1.11.** 1) Все w_c перестановочны между собой и перестановочны с v; 2) u перестановочно только с w_0, w_1. **3.1.12.** 1) $x\alpha_1 = \alpha_1$, $x\alpha_3 = \alpha_3$, $u(x\alpha_i) = u\alpha_i$ ($\alpha_i \in \Omega, i \neq 1, 3$); 2) $x\alpha_1 = \alpha_3$, $x\alpha_3 = \alpha_1$, $u(x\alpha_i) \neq u\alpha_i$ ($\alpha_i \in \Omega$, $i \neq 1, 3$). **3.1.13.** 1) Полугруппа $[u, v]_S$ состоит из преобразований вида

$$t_{k,l}(n) = \begin{cases} k+1, & \text{если } n \leqslant l+1; \\ n-l+k, & \text{если } n > l+1, \end{cases}$$

где k, l — любая пара целых неотрицательных чисел; 2) полугруппа обладает единственным неприводимым порождающим множеством $\{u, v\}$. **3.1.14.** 1) Регулярно сопряженные с u:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ k & 1 & 2 & \dots & n-1 & \dots \end{pmatrix} \quad (k \in \Omega);$$

регулярно сопряженные с v:

$$u, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 1 & 3 & 4 & \dots & n+1 & \dots \end{pmatrix};$$

2) u, v регулярно сопряжены друг с другом. **3.1.19.** 3) Тождественное преобразование является единственным идемпотентом. **3.1.20.** Подполугруппы — M_3, M_4, M_5, правые идеалы — M_4, M_5, двусторонний идеал — M_4, нормальные подмножества — M_1, M_4, M_5. **3.1.21.** Уравнение $u_2x = v$ не разрешимо. Уравнение $u_1x = v$ имеет единственное решение. Уравнение $u_3x = v$ имеет четыре решения. **3.1.23.** $v\Omega \subset u\Omega$ и для каждого $\beta \in v\Omega$ существует единственный $\alpha \in \Omega$ такой, что $u\alpha = \beta$. **3.1.24.** Уравнения $xu_1 = v$, $xu_2 = v$ разрешимы, $xu_3 = v$ не разрешимо. Первое имеет единственное решение. **3.1.25.** Уравнение $xu = v$ разрешимо тогда и только тогда, когда

из равенства $u\alpha = u\beta$ ($\alpha, \beta \in \Omega$) следует, что $v\alpha = v\beta$. Решение единственно тогда и только тогда, когда кроме этого условия выполняется еще равенство $u\Omega = \Omega$. **3.1.26.** 1) u — взаимно однозначное отображение Ω в себя; 2) $u\Omega = \Omega$; 3) для любого $\alpha \in u\Omega$ выполняется $u\alpha = \alpha$. **3.1.27.** 2) Все элементы T' — идемпотенты; 3) левым идеалом T' является всякое подмножество, содержащее u_0, v_1; правыми идеалами являются $\{u_0\}$, $\{v_1\}$, $\{u_0, v_1\}$, T'. **3.1.28.** Нормальные подмножества — 1), 3), 4). **3.1.32.** Группами являются только M_1, M_3. **3.2.1.** 1) В задаче 3.1.2 обратимым является преобразование u, обратное для него

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

преобразования v, w не являются ни левыми, ни правыми делителями единицы; 2) в задаче 3.1.14 преобразование u является правым делителем единицы, преобразование v является левым делителем единицы. Оба преобразования необратимы. **3.2.2.** $f_1(x)$ — обратимое преобразование при n нечетном, $f_3(x)$ — обратимое преобразование, $f_2(x)$, $f_4(x)$ необратимы. **3.2.3.** $\mathrm{pr}_1 \rho_u = \mathrm{pr}_2 \rho_u = \Omega$, каждый срез состоит из одного элемента. **3.2.5.** $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$. **3.2.6.** Единицей является тождественное преобразование. Обратным элементом для преобразования u является обратное преобразование u^{-1}. **3.2.9.** $u^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{pmatrix}$. **3.2.10.** 1) Первое условие выполняется для w_c ($c \neq 0$), второе условие выполняется для v, w_c ($c \neq 0$); 2) для всех преобразований задачи 3.1.19 выполняются оба условия; 3) в задаче 3.1.36 первое условие выполняется для преобразований a, c, второе для преобразований a, b, c. **3.2.11.** 1) Необратимо; 2) необратимо; 3) необратимо; 4) w_c ($c \neq 0$), $u_{m,n}$ — обратимые преобразования, остальные необратимы.

$$w_c^{-1}[f(x)] = \frac{1}{c} f(x);$$

$$u_{m,n}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \left(\frac{1}{m}\alpha_1 - \frac{n}{m}, \frac{1}{m}\alpha_2 - \frac{n}{m}, \dots\right).$$

3.2.12.
$$u^{-1}\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\dfrac{n\varepsilon - l}{-m\varepsilon + k}\right)}{\varphi\left(\dfrac{n\varepsilon - l}{-m\varepsilon + k}\right)}.$$

3.2.13. 2) Является группой; 3) преобразования второго порядка u, v:

$$u\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f\left(\dfrac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon - k}\right)}{\varphi\left(\dfrac{k\varepsilon + l}{m\varepsilon - k}\right)}, \qquad v\left[\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right] = \frac{f(-\varepsilon)}{\varphi(-\varepsilon)}.$$

3.2.14. 1)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_2	u_2	u_1	u_6	u_5	u_4	u_3
u_3	u_3	u_5	u_1	u_6	u_2	u_4
u_4	u_4	u_6	u_5	u_1	u_3	u_2
u_5	u_5	u_3	u_4	u_2	u_6	u_1
u_6	u_6	u_4	u_2	u_3	u_1	u_5

2) u_1 — единица, u_2, u_3, u_4 обратны для самих себя. **3.2.16.** H — нормальный делитель G, а H'' — подгруппа G. **3.2.18.** Обратимы 1), 3), 4). **3.2.19.** Группами являются множества 1), 2), 4). **3.2.20.** 24. **3.2.21.**

$$e=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad u=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

3.3.1. $u^3=(4865)$, $v^2u=(235846)$, $wzt=(16824)(375)$, $w^4z^2=$ $=(2487356)$, $tzw=(186732)(45)$. **3.3.2.** u — элемент двенадцатого порядка, v — элемент пятого порядка. **3.3.4.** $u=(123)(4568)$, $v=$ $=(1, 9, 2, 12)(3, 8)(4, 11, 10)(5, 6, 7)$, $w=(194)(267)(358)$.

3.3.7. 1)

$$u^k\alpha_i=\begin{cases}\alpha_{i+k}, & \text{если } i+k\leqslant n;\\ \alpha_{i+k-n}, & \text{если } i+k>n,\end{cases}$$

при условии, что $0\leqslant k\leqslant n$. Если $k>n$ и $k=pn+r$ $(0<r\leqslant n)$, то $u^k=u^r$. **3.3.10.** $uzu^{-1}=(43251)(23)(26)$, $t^{-2}wt^2=(847)(7523)(8641)$, $v^{-5}zv^5=(82134)(12)(15)$. **3.3.12.** Степени этого цикла и только они. **3.3.13.** Если $u_1=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$, $u_2=(\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10})$, то перестановочными с u являются произведения всевозможных степеней u_1 и u_2. **3.3.18.** Если $u=(12)(34)$, $v=(13)(24)$, $w=(14)(23)$, то получим таблицу:

	e	u	v	w
e	e	u	v	w
u	u	e	w	v
v	v	w	e	u
w	w	v	u	e

.

3.3.27. $m=1, 2, 3, 4$. **3.4.1.** Монотонно возрастающие функции (не обязательно строго). **3.4.2.** 1) Ни одно из преобразований не является эндоморфизмом; 2) t является эндоморфизмом Ω; 3) z не является эндоморфизмом Ω; 4) w_p является эндоморфизмом Ω. **3.4.3.** Преобразование w_p сохраняет действие сложения, преобразование t сохраняет действие умножения. **3.4.4.** Не является. **3.4.13.** Не справедливо.

3.4.14. $u\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.15. $G' = \{1, -1\}$, единичная подгруппа и сама группа. **3.4.16.** 51. **3.4.17.** Группа автоморфизмов состоит из подстановок вида

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & \beta & \gamma' & \delta' & \varepsilon' \end{pmatrix},$$

где $(\gamma', \delta', \varepsilon')$ — перестановка чисел γ, δ, ε. **3.4.18.** Эндоморфизмами являются следующие преобразования: 1) все преобразования ранга 1; 2) все преобразования ранга, большего 1, удовлетворяющие условию $u\alpha = \alpha$. **3.4.23.** Не справедливо. **3.4.24.** Не справедливо. **3.4.27.** Являются. **3.4.28.** $u(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$, $u(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$.

3.4.32.
$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, i-1, & i, & i+1, & i+2, \ldots, n \\ 1, \ldots, i-1, & i, & i, & i+2, \ldots, n \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, i-1, & i, & i+1, & i+2, \ldots, n \\ 1, \ldots, i-1, & i+1, & i+1, & i+2, \ldots, n \end{pmatrix},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

3.5.3. Элементами конечного порядка являются все вращения на угол $r\pi$ с рациональным r, симметрии и произведения симметрии на параллельный перенос на вектор, перпендикулярный оси симметрии. Элементами второго порядка являются симметрии, вращения на угол π и указанные выше произведения. **3.5.7.** 1) Бесконечный; 2) 2; 3) 1. **3.5.8.** u^{-1} входит в A, если $u(\Phi) = \Phi$. **3.5.9.** Если Φ — шар или правильный многогранник, то A является группой. Для полуплоскости A группой не является. **3.5.10.** Группа всех параллельных переносов плоскости. **3.5.12.** 1) 1; 2) 2; 3) бесконечный. **3.5.13.** G состоит из параллельных переносов плоскости на векторы, параллельные данной прямой, из вращений плоскости на угол π вокруг любой точки, лежащей на данной прямой, и из симметрий плоскости относительно данной прямой и прямых, ей перпендикулярных. **3.5.14.** 1) Группа состоит из вращений ромба вокруг центра на углы 0, π и из симметрий относительно диагоналей ромба; 2) группа восьмого порядка состоит из вращений квадрата вокруг центра на углы 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ и симметрий относительно диагоналей квадрата и прямых, соединяющих середины противоположных сторон; 3) группа состоит из тождественного преобразования и симметрии относительно высоты треугольника; 4) группа единичная. **3.5.15.** Порядок группы равен n. **3.5.16.** Группа порядка $2n$ состоит из вращений вокруг центра на углы $0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ и симметрий относительно осей симметрии многоугольника. **3.5.17.** Группа состоит из вращений вокруг общей вершины на углы 0, π и из симметрий относительно прямой, на которой лежат диагонали квадратов, и прямой, перпендикулярной к ней и проходящей через общую вершину

квадратов. **3.5.20.** Циклическая группа n-го порядка. **3.5.21.** Только для простых чисел n. **3.5.22.** $4n$. **3.5.25.** Группа состоит из вращений тетраэдра вокруг высот на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ вокруг прямых, соединяющих середины противоположных ребер, на угол π и симметрий относительно двенадцати плоскостей симметрии тетраэдра. **3.5.26.** Вращения вокруг осей симметрии тетраэдра. **3.5.27.** Группа шестого порядка состоит из вращений вокруг диагонали куба, проходящей через вершину A, на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и симметрий относительно плоскостей симметрии куба, проходящих через вершину A. **3.5.28.** 48. **3.5.30.** Знакопеременная группа четвертой степени. **3.5.31.** Группа десятого порядка, состоящая из пяти вращений икосаэдра вокруг оси симметрии, проходящей через вершину, на углы $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ и пяти симметрий относительно плоскостей симметрии икосаэдра, проходящих через точку A. **3.5.33.** 1) Вращения на углы $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ вокруг центров треугольников, образованных соседними вершинами Ф, и вращения на угол π вокруг центров ромбов, образованных соседними вершинами Ф. **3.5.34.** 1) Группа состоит из вращений на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ вокруг всевозможных точек с координатами $\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}l\right)$, где k, l — произвольные целые числа одинаковой четности; вращений на угол π вокруг всевозможных точек с координатами $\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}l\right)$, где k, l — произвольные целые числа различной четности; симметрий относительно осей симметрии всевозможных квадратов, образованных соседними точками из Ф; параллельных переносов на векторы, соединяющие любые две точки Ф; 2) подгруппа состоит из вращений вокруг некоторой точки на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ или порождается двумя симметриями относительно взаимно перпендикулярных осей.

3.6.2. 1) $u_2^2 = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, $u_1u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $u_2u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $v_1^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) типы u_1, v_1, v_2 соответственно равны (2,1); (4,1); (4,2).

3.6.3. 1) Тип $u_1 = \begin{cases} (1, 1), \text{ если } \beta = \alpha; \\ (2, 1), \text{ если } \beta \neq \alpha; \end{cases}$

2) тип $u_2 = (1, 1)$; 3) тип $u_3 = (n, 1)$.

3.6.4. $u^{-1} = \begin{pmatrix} 1234578 \\ 7583641 \end{pmatrix}$, $uu^{-1} = \begin{pmatrix} 1234578 \\ 1234578 \end{pmatrix}$, $u^{-1}u = \begin{pmatrix} 1345678 \\ 1345678 \end{pmatrix}$.

3.6.5. uu^{-1} — частично тождественное преобразование, соответствующее множеству $\mathrm{pr}_1 u$, а $u^{-1}u$ — частично тождественное преобразование, соответствующее множеству $\mathrm{pr}_2 u$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u$. **3.6.6.** 1) $\mathrm{pr}_1 [f_1(x)] = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{pr}_2 [f_2 f_3(x)] = \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, где k — любое нечетное число, $\mathrm{pr}_1 [f_2 f_3(x)] = \{0\}$; 2) $\mathrm{pr}_2 [f_1^2(x)] = \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{1+e}\right)$, $f_1^2(x) = \ln \frac{\ln \frac{x}{1-x}}{\ln \frac{e(1-x)}{x}}$, $\mathrm{pr}_2 [f_5 f_4(x)] = \{-1, 1\}$, $f_5 f_4(x) = 0$, $f_5^2 f_4(x) = \theta$; 3) $\mathrm{pr}_2 [f_2^n(x)] = (-\infty, -\sqrt{n}] \cup [\sqrt{n}, \infty)$, $f_2^n(x) = \sqrt{x^2 - n}$. **3.6.7.** 1) Взаимно однозначными являются $f_1(x)$, $f_4(x)$, $f_6(x)$; 2) $\mathrm{pr}_2 f_1^{-1}(x) = (-\infty, \infty)$, $f_1^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $\mathrm{pr}_2 f_4^{-1}(x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_4^{-1}(x) = \sin x$, $\mathrm{pr}_2 f_6^{-1}(x) = \left(-\infty, \frac{a}{c}\right) \cup \left(\frac{a}{c}, \infty\right)$, если $c \neq 0$; $\mathrm{pr}_2 f_6(x) = (-\infty, \infty)$, если $c = 0$; $f_6^{-1}(x) = \frac{dx - b}{a - cx}$; 3) $f_i^{-1} f_i(x) = e_{\mathrm{pr}_2 f_i}$, $f_i f_i^{-1}(x) = e_{\mathrm{pr}_2 f_i^{-1}}$. **3.6.9.** $u^2 = \theta$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u \cap \mathrm{pr}_2 u = \emptyset$; $u^3 = \theta$ тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u \cap \mathrm{pr}_2 u$ выполняется условие $u\alpha \notin \mathrm{pr}_2 u$. **3.6.10.** Только в том случае, если $\mathrm{pr}_1 u_2 \subset \mathrm{pr}_2 u_1$. **3.6.12.** 1) Только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 u \subset \mathrm{pr}_2 u$ и для $\alpha \in \mathrm{pr}_1 u$ выполняется $u^2\alpha = u\alpha$; 2) частично тождественные преобразования и только они. **3.6.13.** 1) Если $\mathrm{pr}_1 u = \Omega$; 2) если $\mathrm{pr}_2 u = \Omega$ и u взаимно однозначно. **3.6.14.** 1) Если $\mathrm{pr}_2 u \neq \Omega$; 2) если $\mathrm{pr}_1 u \neq \Omega$. **3.6.17.** Правый срез ρ по каждому $\alpha \in \Omega$ должен состоять не более чем из одного элемента. **3.6.18.** 1) u — тождественное преобразование; 2) $\mathrm{pr}_1 u = \mathrm{pr}_2 u = M$ и $u^2 = e_M$, где M — подмножество Ω; 3) если $\alpha \in \mathrm{pr}_2 u$ и $u\alpha \neq \alpha$, то $\alpha \notin \mathrm{pr}_1 u$. **3.6.23.** Если Ω — множество всех вещественных чисел, то

$$\mathrm{pr}_2 f^2 = \Omega \setminus \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}, \quad f^2(x) = \frac{x-9}{3x-2};$$

$$\mathrm{pr}_2 f^3 = \Omega \setminus \left\{-1, \frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right\}, \quad f^3(x) = \frac{-7x-12}{4x-11}.$$

3.6.24. R группой не является.

Глава IV

4.1.6. $S_3 = \{e, (12)\} \cup \{(13), (123)\} \cup \{(23), (132)\}$. **4.1.7.** $A_4 = \{e, (123), (132)\} \cup \{(124), (13)(24), (324)\} \cup \{(142), (143), (14)(23)\} \cup \{(234), (134), (12)(34)\}$. **4.1.8.** $K = \{1, -1\} \cup \{i, -i\} \cup \{j, -j\} \cup \{k, -k\}$. Правое и левое разложения совпадают, так как $\{-1, 1\}$ является нормальным делителем группы K.

4.1.9. $G=\{e\}\cup\{x\}\cup\{x^2\}\cup\{x^3\}\cup\{x^4\}\cup\{x^5\}\cup\{x^6\}\cup$
$\cup\{x^7\}\cup\{x^8\}\cup\{x^9\}$,
$G=\{e, x^5\}\cup\{x, x^6\}\cup\{x^2, x^7\}\cup\{x^3, x^8\}\cup\{x^4, x^9\}$,
$G=\{e, x^2, x^4, x^6, x^8\}\cup\{x, x^3, x^5, x^7, x^9\}$,
$G=\{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9\}$.

4.1.10. $G=K_0\cup K_1\cup K_2$, где K_0 — совокупность всех x^n, где n делится на 3; K_1 — совокупность всех x^n, где n при делении на 3 дает остаток 1; K_2 — совокупность всех x^n, где n при делении на 3 дает остаток 2. Через представителей разложение можно записать, например, так:

$$G=[x^3]_g\cup x[x^3]_g\cup x^2[x^3]_g.$$

4.1.11. Разложение G по e является представлением G в виде объединения всех одноэлементных подмножеств. Разложение G по самой G состоит из одного смежного класса, равного самой G. **4.1.14.** 1) $f[f(z)]=f(z)$; 2) $f(z)\,z^{-1}\in H$; 3) $f(hz)=f(z)$. **4.1.18.** 81. **4.1.24.** K_1, K_3, K_5 являются смежными классами; K_2, K_4 не являются. **4.1.25.** Указанное множество будет одновременно правым и левым смежным классом по подгруппе, состоящей из всех матриц, определитель которых равен 1.

4.1.27. $S_4=\{e, (123), (132), (12)(34), (134), (234)\}\cup$
$\cup\{(12), (23), (13), (34), (1342), (1234)\}\cup$
$\cup\{(14), (1423), (1432), (1243), (1324), (24)\}\cup$
$\cup\{(124), (13)(24), (243), (143), (14)(23), (142)\}$.

4.1.28. $S_3=\{e, (12)\}\cup\{(13), (23), (132), (123)\}$. **4.2.4.** $S_3=\{e\}\cup$
$\cup\{(12), (13), (23)\}\cup\{(123), (132)\}$. **4.2.5.** $K=\{1\}\cup\{-1\}\cup\{i, -i\}\cup$
$\cup\{j, -j\}\cup\{k, -k\}$. **4.2.6.** 6. **4.2.8.** Нормализатор x представляет собой множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$. Нормализатор y — вся группа. Нормализатор z представляет собой множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a\neq 0)$. **4.2.13.** Циклическая группа второго порядка. **4.2.14.** Нормализатором элемента вида $(2k+1, m)$ является множество всех элементов вида $(2a, 0)$ и вида $(2a+1, b)$, где a, b — любые целые числа; число элементов, сопряженных с ним, бесконечно. Нормализатором элемента вида $(2k, m)$, где $m\neq 0$, является множество всех элемеитов вида $(2a, b)$ (a, b — любые целые числа); число элементов, сопряженных с ним, равно двум. Нормализатором элемента $(2k, 0)$ является вся группа; число элементов, сопряженных с ним, равно единице.

4.2.20. $S_4=\{e\}\cup\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}\cup$
$\cup\{(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)\}\cup$
$\cup\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}\cup$
$\cup\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

4.2.21. $A_4 = \{e\} \cup \{(123), (134), (142), (243)\} \cup$
$\cup \{(124), (132), (143), (234)\} \cup \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
4.2.22. Сопряженными элементами являются только M_1, M_3. **4.3.1.** e, $\{e, (123), (132)\}$, S_3. **4.3.2.** M_1 порождает S_4; M_2 порождает знакопеременную группу; M_3—нормальный делитель. **4.3.3.** Является. **4.3.12.** N — единица группы, $(xN)^{-1} = x^{-1}N$. **4.3.14.** G/G — единичная группа, G/E совпадает с группой G. **4.3.32.** $\bar{H}_1 = G/N$, $\bar{H}_2 = \{N, xN\}$, где $|x| = -1$, $x \in G$. **4.3.34.** Знакопеременная группа четвертой степени, группа Клейна и подгруппы

$\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1423), (1324)\}$,

$\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}$,

$\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (23), (14), (1342), (1243)\}$.

Нормальными делителями S_4 являются знакопеременная группа и группа Клейна. **4.4.8.** 1) Подгруппы, содержащие группу Клейна (см. 4.3.34); 2) четыре циклические подгруппы, порожденные тройными циклами.

4.4.9. $[(x^2, y^0)]$, $[(x^5, y), (x^0, y^2)]$, $[(x, y), (x^6, y)]$,

$[(x^3, y), (x^8, y)]$, $[(x^7, y), (x^2, y)]$, $[(x^9, y), (x^4, y)]$.

4.5.2. Каждый коммутатор равен единице. **4.5.6.** $(x_1, x_2) = (132)$, $(x_1, x_3) = (142)$, $(x_1, y) = (12)(34)$, $(x_2, x_1) = (123)$, $(x_3, x_1) = (124)$, $(y, x_1) = (12)(34)$. **4.5.7.** -1 и 1. **4.5.8.** $(x, y) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $(y, z) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $(z, x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.5.9. $(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(v, w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$(w, u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.5.10. $(x, y) = (\alpha, \beta, \gamma)$. **4.5.14.** Знакопеременная группа A_n. **4.5.21.** Группа всех параллельных переносов. **4.5.22.** Подгруппа матриц с определителем $+1$. **4.6.12.** Циклические группы простых порядков. **4.6.15.** При $n = 1, 2, 3, 4$. **4.6.16.** Группа разрешима. **4.6.17.** Группа разрешима. **4.7.2.** 1 — для неединичных абелевых групп; 0— для единичной группы. **4.7.3.** 1) S_n не являются нильпотентными ни при каком $n > 2$, S_1 — нильпотентная класса 0, S_2 — нильпотентная класса 1; 2) нильпотентная группа класса 2; 3) нильпотентная клас-

са 2; 4) не является нильпотентной; 5) нильпотентная класса 2. **4.7.6.** Нижний центральный ряд: $H_0 = H$; $H_1 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1); (\varepsilon, k); (\varepsilon, -k)\}$; $H_2 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1)\}$; $H_3 = e$. Верхний центральный ряд: $Z_0 = e$; $Z_1 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1)\}$; $Z_2 = \{(\varepsilon, 1); (\varepsilon, -1); (\varepsilon, k), (\varepsilon, -k)\}$; $Z_3 = H$. **4.7.11.** 2. **4.7.15.** 1) Не является нильпотентной; 2) нильпотентная класса 2; 3) не является нильпотентной; 4) нильпотентная класса 3. **4.7.17.** Среди чисел $k_1, k_2, k_3, \ldots$ должно найтись наибольшее. Оно в этом случае и будет классом нильпотентности группы H. **4.7.20.** Тогда и только тогда, когда среди чисел $k_1, k_2, k_3, \ldots$ найдется наибольшее. **4.8.1.** u_3 — автоморфизм. **4.8.2.** u_1, u_2 — автоморфизмы. **4.8.4.** u_3, u_5 — автоморфизмы. **4.8.5.** Группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе S_3. **4.8.6.** Циклическая группа второго порядка. **4.8.11.** 1) Группа автоморфизмов изоморфна группе Клейна (см. 3.3.18); 2) группа автоморфизмов является циклической группой шестого порядка. **4.8.14.** Пусть $u_3 = (13)$, $u_4 = (23)$, $u_5 = (123)$; тогда

$$t_{u_1} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ e & u_1 & u_5 & u_4 & u_3 & u_2 \end{pmatrix}, \quad t_{u_2} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ e & u_3 & u_2 & u_4 & u_1 & u_5 \end{pmatrix}.$$

4.8.15. $t_{-1} = e$, $t_{-i} = (j, -j)\ (k, -k)$, $t_j = (i, -i)\ (k, -k)$. **4.8.16.** Только тогда, когда она коммутативна. **4.8.17.** 4. **4.8.22.** 24. **4.8.23.** $\varphi(x + yi) = (xa + yc) + (xb + yd)\,i$, где (a, b, c, d) — произвольная четверка целых чисел такая, что $ad - bc = \pm 1$. **4.8.27.** Если $u_1 = (12)\,(34)$, $u_2 = (13)\,(24)$, $u_3 = (14)\,(23)$, то

$$\bar{t}_{(12)} = \bar{t}_{(34)} = \bar{t}_{(1423)} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & u_1 & u_3 & u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}_{(132)} = \begin{pmatrix} e & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & u_2 & u_3 & u_1 \end{pmatrix}.$$

4.8.28. 24. **4.9.4.** G_1 транзитивна; $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{5, 6\}$ — системы интранзитивности группы G_2; $M_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_4 = \{5, 6, 7\}$ — системы интранзитивности G_3. **4.9.14.** $M_1 = \{\alpha, \gamma\}$, $M_2 = \{\beta, \delta\}$. **4.9.15.** 1) A_4, S_4 примитивны; 2) циклические подгруппы четвертого порядка, группа Клейна и все подгруппы восьмого порядка, содержащие группу Клейна, импримитивны (см. 4.3.34). **4.9.17.** Если n — простое число. **4.9.18.** 1), 2) — транзитивные группы; 1) — примитивная группа. **4.9.25.** Множество H из предыдущей задачи. **4.9.31.** 1) Дважды транзитивная группа. **4.9.32.** $n \geqslant 4$. **4.9.33.** 2.

Глава V

5.1.1. Соотношения: $t_1 = t_2$, $t_1 = t_4$, $t_2 = t_4$, $t_3 = t_5$. **5.1.2.** Следствиями остальных являются соотношения: $a^5 = a^8$, $a^7cb^5a^8b^{11} = a^8c$, $bca^8 = cba^2$, $a^8ca = a^8c$, $bc = cb$. **5.1.6.** Не является. **5.1.15.** 11! —1.

5.1.16. 1)

	u	v	uv	vu
u	u	uv	uv	u
v	vu	v	v	vu
uv	u	uv	uv	u
vu	vu	v	v	vu

2) регулярна.

5.1.20. Не будет, за исключением случая, когда K состоит из одного элемента. **5.1.22.** 1) a — единственный идемпотент; 2) a, $a^\alpha c^\delta b^n$, где $\alpha = 0, 1$; δ — произвольное натуральное число; 3) (1, 1), бесконечные. **5.1.23.** 2) (1, 1), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (5, 5), бесконечный; 3) a, ac^m, где $m = 1, 2, 3, 4$. **5.1.27.** 1) Полугруппа A регулярна, 2) регулярно сопряженным с $a^\alpha b^\beta$ является $a^\beta b^\alpha$ (каждый элемент A можно записать в виде $a^\alpha b^\beta$, где α, β — целые неотрицательные числа); 3) A не имеет нетождественных автоморфизмов. **5.3.3.** Единицей группы является класс, содержащий $k\varphi$ (k), а обратным для класса, содержащего k, является класс, содержащий φ (k). **5.3.8.** 1) 2; 2) бесконечный; 3) 4; H_1, H_3 — нормальные делители, H_2 не является нормальным делителем. **5.3.9.** Свободная группа ранга 1, т. е. бесконечная циклическая группа. **5.3.17.** 2^n. **5.4.3.** Коммутативна только G_1. **5.4.5.** Группа бесконечного порядка. **5.4.6.** Подгруппа $[y]$ бесконечна. **5.4.7.** $u_2 = u_5$, $u_3 = u_6$, остальные различны. **5.4.8.** $v_1 = v_4$, $v_6 = v_7 = v_8$, $v_2 = v_3 = v_5$. **5.4.9.** 2^n, где n — число элементов множества K. **5.4.10.** 2) $x^{\varepsilon_1}y^{m_1} = x^{\varepsilon_2}y^{m_2}$, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $m_1 = m_2$, $x^{\varepsilon_2}y^{m_2} = (x^{\varepsilon_1}y^{m_1})^{-1}$, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $m_2 = -m_1$ или если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $m_2 = m_1 - 2$. **5.4.14.** Элементов конечного порядка и элементов бесконечного порядка бесконечное количество. **5.4.15.** Кроме единицы элементами конечного порядка являются элемент $(x_1x_2 \ldots x_n)$ и все элементы, сопряженные с ним. **5.4.18.** 1) 12; 2) $\{e, (ab)^2\}$; 3) группа автоморфизмов изоморфна G. **5.4.20.** 3. **5.4.23.** 5. **5.4.27.** Если $q \not\equiv 1 \pmod p$, то группа одна — циклическая. Если $q \equiv 1 \pmod p$, то группы две — циклическая и группа G_r^{pq} из задачи 5.2.22. **5.4.28.** Одна группа порядка 15, две группы порядка 14.

5.4.29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2

5.5.1. Разложима. **5.5.2.** Свободная группа A разложима в свободное произведение тогда и только тогда, когда A не является бесконечной циклической группой. **5.5.4.** $G = G_1 * G_4$. **5.5.6.** Не существует. **5.5.8.** Не может. **5.5.9.** В G нет элементов конечного порядка, отличных от единицы. **5.5.14.** Подгруппы B и C изоморфны всегда. **5.5.15.** G не является периодической группой. **5.5.17.** Никогда. **5.5.18.** Центр равен e. **5.5.19.** Не может. **5.5.21.** Существует. **5.6.1.** G является прямым произведением четырех циклических групп порядков 7, 13, 3 и 5. **5.6.5.** 1) Неразложима; 2) неразложима; 3) неразложима; 4) разложима; 5) неразложима. **5.6.8.** Неразложима. **5.6.9.** Только одно. **5.6.15.** Существуют. **5.6.16.** $m_1m_2 \ldots m_n$. **5.6.27.** Если порядки всех групп G_i различны. **5.6.32.** Не может.

Глава VI

6.1.2. Подгруппа всех корней всех степеней из единицы. **6.1.12.** Не изоморфны. **6.1.14.** Всегда имеет единственное решение. **6.1.16.** Циклические группы простых порядков и только они. **6.1.17.** Не суще-

ствует. **6.1.19.** 1) Циклическая группа порядка 15; 2) 4; 3) прямое произведение четырех бесконечных циклических групп; 4) прямое произведение циклической группы порядка 3 и четырех бесконечных циклических групп. **6.2.2.** 1) Циклические группы порядков 7 и 3; 2) циклические группы порядков 3, 2 и 5; 3) циклические группы порядков 2, 3, 7, 11; 4) циклическая группа порядка 101. **6.2.3.** 1) 4; 2) 2; 3) 2; 4) 2. **6.2.4.** Прямое произведение циклических групп порядков 2, 3, 5, 7, 11, 13. **6.2.10.** 1) 5, 7; 2) 2^3; 3) 2, 3; 4) 3, 2^2, 5; 5) 2^3, 2, 2. **6.2.11.** Необходимо и достаточно, чтобы G была примарной относительно p. **6.2.14.** $p_1^{k_1}, \ldots, p_n^k n$. **6.2.15.** $p_1^{k_1}, \ldots, p_n^k n$. **6.2.16.** Циклические группы и абелевы группы с инвариантами p, p. **6.2.17.** Циклические группы простого порядка. **6.2.18.** Не существует. **6.2.19.** $p^3 - 1$. **6.2.20.** 1) 10000; 2) существуют подгруппы порядков 25, 10, 40; не существует подгрупп порядков 31, 27, 120; 3) 2, 2, 5 и 2^2, 5. **6.2.21.** Не существует. **6.2.22.** 11. **6.3.8.** 1) Ранг 1, набор инвариантов 3; 2) бесконечная циклическая группа; 3) ранг 1, набор инвариантов 5; 4) циклическая группа порядка 11; 5) группа без кручения ранга 2; 6) ранг 1, набор инвариантов 3; 7) группа без кручения ранга 2; 8) ранг 1, инварианты 3, 3, 2; 9) бесконечная циклическая группа. **6.3.9.** 1) 2; 2) циклическая группа порядка 10; 3) прямое произведение двух бесконечных циклических групп; 4) 4; 5) $[a_1^2]$, $[a_1^5]$. **6.3.10.** 1) Существует; 2) существует; 3) не существует; 4) не существует. **6.3.11.** Не существуют. **6.3.12.** 3; 5. **6.3.14.** 1) 11; 2) 11; 3) существуют. **6.3.15.** 40. **6.3.16.** 31. **6.3.17.** 1) Существуют; 2) не существует. **6.4.9.** Не имеет. **6.4.10.** Не существует. **6.4.11.** 1) Полная; 2) полная; 3) полная; 4) полная; 5) не является полной. **6.4.14.** Не может. **6.4.16.** 1) Всегда; 2) всегда; 3) всегда. **6.4.27.** Пусть $m = p_1^{k_1} \ldots p_n^k n$, где p_i простые, занумерованные в порядке возрастания. Тогда 1) $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$; 2) $(k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$; 3) $(\infty, k_2, \ldots, k_n, 0, \ldots)$.

Глава VII

7.1.1. $\varphi_1(z_i) = u_1, \quad \varphi_2(z_i) = u_2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

других представлений Ω в классе Π не существует. **7.1.2.** φ не является представлением полугруппы A преобразованиями. **7.1.3.** φ нельзя продолжить до представления полугруппы A.

7.1.8.
$$\varphi_1(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Все φ_j $(j = 1, 2, 3)$ несущественно отличаются друг от друга. Среди φ_j $(j = 1, 2, 3)$ нет изоморфных представлений. **7.1.11.** 1) Пусть φ — представление моногенной полугруппы $A = [a]$ левыми сдвигами; тогда

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^6 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a^2) = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & a^4 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^3)=\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & a^4 & a^5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a^4)=\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & a^4 & a^5 & a^6 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^5)=\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^6 & a^7 & a^8 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a^6)=\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^7 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(a^7)=\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

Представление φ не является изоморфным представлением. 2) $A_1=\{a_1, a_2\}$. Пусть φ_1 — представление A_1 левыми сдвигами; тогда

$$\varphi_1(a_1)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(a_2)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Представление φ_1 является изоморфным представлением. 3) Обозначим представление левыми сдвигами A_2 через φ_2; тогда

$$\varphi(a_1)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a_2)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a_3)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

φ — изоморфное представление A_2. **7.1.15.** $\varphi(x)(y)=x$ $(x, y \in M)$. **7.1.16.** Тождественное преобразование множества M. **7.1.21.** A не имеет полной системы представлений в II. **7.1.22.** Не существует. **7.1.23.** Бесконечные моногенные полугруппы, моногенные полугруппы, имеющие тип $(1, d)$, и только такие. **7.1.24.** Только единичная группа. **7.1.25.** Коммутативные полугруппы и только они. **7.1.26.** 1) Полугруппы с левым сокращением и только они; 2) полугруппы с правым сокращением и только они; 3) полугруппы с двусторонним сокращением и только они. **7.1.29.** Коммутативные полугруппы, все элементы которых идемпотентны, и только они.

7.2.4. $$\varphi_H(a)=\begin{pmatrix} H, & aH, & bH, & abH \\ aH, & H, & abH, & bH \end{pmatrix}, \quad \varphi_H(b)=\begin{pmatrix} H, & aH, & bH, & abH \\ bH, & abH, & H, & aH \end{pmatrix}.$$

Представление φ_H не изоморфное.

7.2.6. Обозначим представления данных групп левыми сдвигами соответственно через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; тогда

1) $\varphi_1(1)=e$, $\varphi_1(-1)=(1, -1)(i, -i)(j, -j)(k, -k)$,
$\varphi_1(i)=(1, i, -1, -i)(j, k, -j, -k)$,
$\varphi_1(-i)=(1, -i, -1, i)(j, -k, -j, k)$,
$\varphi_1(j)=(1, j, -1, -j)(i, -k, -i, k)$,
$\varphi_1(-j)=(1, -j, -1, j)(i, k, -i, -k)$,
$\varphi_1(k)=(1, k, -1, -k)(i, j, -i, -j)$,
$\varphi_1(-k)=(1, -k, -1, k)(i, -j, -i, j)$;
2) $\varphi_2(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_2(a)=(e, a)(b, ab)(ba, aba)(bab, (ab)^2),$$
$$\varphi_2(b)=(e, b)(a, ba)(ab, bab)(aba, (ab)^2),$$

$$\varphi_2(ab) = (e,\ ab,\ (ab)^2,\ ba)\ (b,\ a,\ aba,\ bab),$$
$$\varphi_2(ba) = (e,\ ba,\ (ab)^2,\ ab)\ (a,\ b,\ bab,\ aba),$$
$$\varphi_2(aba) = (e,\ aba)\ (a,\ ab)\ (b,\ (ab)^2)\ (bab,\ ba),$$
$$\varphi_2(bab) = (e,\ bab)\ (a,\ (ab)^2)\ (b,\ ba)\ (ab,\ aba),$$
$$\varphi_2[(ab)^2] = (e,\ (ab)^2)\ (ab,\ ba)\ (b,\ aba)\ (a,\ bab);$$

3) если G — нециклическая группа шестого порядка, то ее можно задать так: $G = [a,\ b]$, где $a^2 = b^3 = e$, $a^{-1}ba = b^2$ и, значит, $G = \{e,\ a,\ b,\ b^2,\ ab,\ ab^2\}$; $\varphi_3(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_3(a) = (e,\ a)\ (b,\ ab)\ (b^2,\ ab^2);\quad \varphi_3(b) = (e,\ b,\ b^2)\ (a,\ ab^2,\ ab),$$
$$\varphi_3(b^2) = (e,\ b^2,\ b)\ (a,\ ab,\ ab^2);\quad \varphi_3(ab) = (e,\ ab)\ (b,\ ab^2)\ (a,\ b^2),$$
$$\varphi_3(ab^2) = (e,\ ab^2)\ (a,\ b)\ (ab,\ b^2);$$

4) если $G = \{e, a,\ a^2,\ a^3\}$, то $\varphi_4(e)$ — тождественная подстановка,

$$\varphi_4(a) = (e,\ a,\ a^2,\ a^3);\ \varphi_4(a^2) = (e,\ a^2)\ (a,\ a^3);$$
$$\varphi_4(a^3) = (e,\ a^3,\ a^2,\ a).$$

7.2.8. Единичная подгруппа. **7.2.18.** Представление неизоморфное. **7.2.24.** Представление по подгруппам $\{e,\ a\}$, $\{e,\ b\}$ и представление левыми сдвигами. **7.2.26.** Не имеет.

7.2.27.

1)
$$\varphi_{H_1}(12) = \begin{pmatrix} H_1, & (12)H_1, & (13)H_1, & (14)H_1, & (23)H_1, & (34)H_1 \\ (12)H_1, & H_1, & (34)H_1, & (23)H_1, & (14)H_1, & (13)H_1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{H_1}(12\,34) = \begin{pmatrix} H_1, & (12)H_1, & (13)H_1, & (14)H_1, & (23)H_1, & (34)H_1 \\ H_1, & (23)H_1, & (13)H_1, & (12)H_1, & (34)H_1, & (14)H_1 \end{pmatrix};$$

2)
$$\varphi_{H_2}(12) = \begin{pmatrix} H_2, & (13)H_2, & (14)H_2, & (23)H_2, & (13)(24)H_2, & (24)H_2 \\ H_2, & (23)H_2, & (24)H_2, & (13)H_2, & (13)(24)H_2, & (14)H_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{H_2}(12\,34) = \begin{pmatrix} H_2, & (13)H_2, & (14)H_2, & (23)H_2, & (24)H_2, & (13)(24)H_2 \\ (13)H_2, & (13)(24)H_2, & (23)H_2, & (14)H_2, & H_2, & (24)H_2 \end{pmatrix}.$$

7.2.33. Для коммутативных групп. **7.3.4.** Будет. **7.3.5.** Не будет. **7.3.6.** Отображение T не может быть продолжено до представления группы G. **7.3.10.** Существует. **7.3.15.** Представление T не является вполне приводимым. **7.4.3.** Бесконечная циклическая группа. **7.4.5.** Единичная группа. **7.4.7.** $\Phi(A, B)$ изоморфно подгруппе всех элементов B, порядки которых делят число p^n. **7.4.8.** Группа эндоморфизмов изоморфна G. **7.4.11.** Бесконечная циклическая группа. **7.4.12.** Конечно порожденная абелева группа без кручения ранга r. **7.4.13.** Циклическая группа порядка 2. **7.4.14.** Конечная абелева

группа с инвариантами $5^2, 5^2, 5, 5, 5$. **7.4.15.** Конечная группа с инвариантами $7^2, 7$. **7.4.16.** Циклическая группа порядка 5. **7.4.18.** 1) Циклическая группа порядка 5; 2) конечная абелева группа с инвариантами 5, 5, 5, 5, 5, 5; $3^2, 3^2, 3, 3$; 3) циклическая группа порядка 2. **7.4.19.** 1) Прямое произведение двух бесконечных циклических групп и двух циклических порядка 3; 2) циклическая группа порядка 3; 3) конечная абелева группа с инвариантами 17, 17. **7.4.20.** 1) Конечная абелева группа с инвариантами $5^3, 5^2, 5^2, 5^2, 5, 5, 5, 5, 5$; $7^2, 7, 7, 7$; $3^3, 3, 3, 3$; $2^3, 2^2, 2^2, 2^2, 2, 2, 2, 2, 2$;

2) конечная абелева группа с инвариантами 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3; $5^2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$; 7, 7, 7, 7;

3) конечно порожденная абелева группа ранга 4 с набором инвариантов 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; $7^3, 7^3, 7^3, 7, 7, 7, 7, 7$;

4) прямое произведение сорока девяти бесконечных циклических групп.

7.4.26. 1) Не может; 2) не может.

7.4.28. 1) Необходимо и достаточно, чтобы A была конечной циклической группой; 2) необходимо и достаточно, чтобы A была бесконечной циклической группой. **7.4.29.** Не существует. **7.4.32.** Не может. **7.4.34.** Необходимо и достаточно, чтобы A была или бесконечной циклической группой, или конечной группой, все примарные компоненты которой суть циклические группы. **7.5.1.** 1) $\chi(g) = 2\cos\varphi_g + 1$, 2) $\chi(e) = 3$, $\chi(a_1) = 0$, $\chi(a_1^2) = 0$, $\chi(a_2) = 1$, $\chi(a_1a_2) = 1$, $\chi(a_1^2a_2) = 1$; 3) $\chi(a^k) = 2$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **7.5.5.** Существует, например, циклическая группа простого порядка p. **7.5.7.** Существует только n характеров χ_l $(l = 1, \ldots, n)$ группы $[a]$. Все они описываются следующей формулой:

$$\chi_l(a^k) = \xi^{kl} \quad (l, k = 1, \ldots, n),$$

где ξ — первообразный корень степени n из 1. **7.5.9.** 1) Циклическая группа порядка p^k; 2) конечная абелева группа с инвариантами 3,3; 3) циклическая группа порядка 10. **7.5.11.** Группа характеров изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел, модуль которых равен 1. **7.5.12.** Группа характеров изоморфна прямому произведению r групп, каждая из которых изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел, модуль которых равен 1.

Глава VIII

8.1.1. 1) Метрика; 2) метрика; 3) метрика; 4) метрика; 5) не является метрикой; 6) не является метрикой; 7) метрика. **8.1.2.** 2) Будет. **8.1.3.** 1) Не всегда; 2) не всегда; 3) не всегда; 4) всегда. **8.1.6.** $a > 0$; $b = 0$. **8.1.7.** 1) Всегда; 2) никогда; 3) никогда. **8.1.11.** Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности f_n к функции f в смысле метрики $C_{[a, b]}$ является равномерная сходи-

мость f_n к функции f. **8.1.14.** 1) Не полное; 2) полное; 3) полное; 4) полное. **8.1.17.** Можно. **8.1.18.** 1) Не компактно; 2) не компактно; 3) не компактно. **8.2.3.** 1) Непрерывно; 2) не является непрерывным; 3) не является непрерывным; 4) непрерывно; 5) не является непрерывным. **8.2.4.** Непрерывными преобразованиямн R являются непрерывные функции и только они. Взаимно непрерывными преобразованиями являются монотонно убывающие или монотонно возрастающие непрерывные функции, область изменения которых совпадает с R, и только оии. **8.2.11.** Образует. **8.2.20.** Можно. **8.2.22.** Нельзя. **8.3.2.** Операциями замыкания являются преобразования из 1), 2). **8.3.4.** 1) Открытое; 2) замкнутое и открытое; 3) замкнутое и открытое; 4) замкнутое; 5) замкнутое. **8.3.8.** Существует. **8.3.9.** Все вещественные числа. **8.3.16.** Существуют. **8.3.18.** Каждое топологическое пространство имеет базис. **8.3.21.** Σ является базисом R. **8.3.22.** 1) Σ является базисом R_0; 2) обе топологии совпадают. **8.3.23.** Непрерывное отображение. **8.3.24.** F_1, F_2, F_3, F_4 непрерывны, F_5 не является непрерывным отображением. **8.3.25.** Всегда. **8.3.31.** Обе топологии совпадают. **8.3.32.** Топологии не совпадают. **8.4.1.** 1) Топологическая группа; 2) топологическая группа. **8.4.2.** Топологическая группа. **8.4.3.** Топологическая группа. **8.4.4.** Топологическая группа. **8.4.6.** Fa, aF, F^{-1} — замкнутые множества. UP,PU,U^{-1} — открытые множества. **8.4.9.** Топологнческая группа. Топологии, определяемые Σ_p и Σ_q, не совпадают. **8.4.10.** C — топологическая подгруппа D. **8.4.11.** H и N — нормальные делители G, множество P замкнуто тогда и только тогда, когда α — рациональное число. **8.4.12.** Всегда. **8.4.14.** Не всегда. **8.4.15.** Подгруппами топологической группы G будут все алгебраические подгруппы G. Любой алгебраический изоморфизм G на группу G' будет непрерывным отображением G на G'. Не всякий алгебраический изоморфизм G на G' является топологическим изоморфизмом. **8.4.16.** R_0 топологически изоморфно R_0'. **8.4.18.** 1) Не является подгруппой; 2) подгруппа, но не нормальный делитель; 3) подгруппа, но не нормальный делитель; 4) нормальный делитель. **8.4.21.** Непрерывиое, открытое; φ является топологическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда $N=e$. **8.4.26.** Топологическая группа Z топологически изоморфна топологической группе Z'. **8.4.27.** A и B — замкнутые подмножества, $A+B$ не замкнуто. **8.4.32.** Всегда. **8.4.33.** Всякая подгруппа H является непрерывной группой преобразований пространства Г. Не всякая подгруппа G является транзитивной группой преобразований пространства Г. **8.4.34.** Является. **8.4.35.** Можно. **8.4.38.** Отображение ψ^{-1} непрерывно. **8.5.3.** 1) Отношение двустороине стабильно, положительная часть состоит из всех $z=a+bi$ таких, что или $a>0$ или $a=0$ и $b\geqslant 0$, отрицательная часть состоит из всех $z=a+bi$ таких, что или $a<0$ или $a=0$ и $b\leqslant 0$. 2) Отношение двусторонне стабильно; G^+ состоит из всех z таких, что $\arg z\in[\alpha,\beta]$; G^- состоит из всех z таких, что $\pi+\arg z\in[\alpha,\beta]$. 3) Отношение двусторонне стабильно; G^+ состоит из всех $z=a+bi$ таких, что $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; G^- состоит из всех z таких, что $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$. 4) Отношение не является двусторонне стабильным. **8.5.8.** $\tau=\rho_\alpha\cap\rho_\beta\cap\ldots$ **8.5.10.** $\rho=\tau^{-1}$. **8.5.12.** В конечной циклической группе стабильной упорядоченностью

является только диагональ. Пусть $G = [x]_g$ — бесконечная циклическая группа. Пусть $i = 1, 2, \ldots$ Обозначим через ρ_i следующее отношение в G: $x^l \sim x^k$ (ρ_i) тогда и только тогда, когда $k - l \geqslant 0$ и делится на i. Каждое из ρ_i и ρ_i^{-1} является стабильной упорядоченностью в G и все стабильные упорядоченности в G исчерпываются отношениями ρ_i, ρ_i^{-1} и диагональю. **8.5.13.** $f_2(x) > f_3(x) > f_1(x) > f_4(x)$. **8.5.15.** Двустороние стабильна. Упорядоченность будет линейной тогда и только тогда, когда в прямом произведении имеется не более одного неединичного сомножителя G_α. **8.5.16.** Двусторонне стабильная упорядоченность. **8.5.17.** Циклическая группа $[x]$ должна быть бесконечной. **8.5.18.** x имеет бесконечный порядок. **8.5.24.** Все группы, указаниые в задаче, являются направленными.

ЛИТЕРАТУРА

Приведем книги на русском языке, которые специально посвящены изложению теории групп и пригодны для первоначального ознакомления.

1. Александров П. С., Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1938; изд. 2; Учпедгиз, 1951.
2. Баумгартнер Л., Теория групп, ГТТИ, 1934.
3. Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат, 1944; изд. 2, Гостехиздат, 1953.
4. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
5. Холл М., Теория групп, ИЛ, 1962.
6. Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, изд. 2, ГТТИ, 1933. (См. также «Избранные труды О. Ю. Шмидта», Математика, М., 1959.)

Ниже приводятся некоторые книги, хотя и не специально посвященные теории групп, но в которых имеются главы, знакомящие читателя с первоначальными сведениями из теории групп.

7. Бурбаки Н., Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, 1962.
8. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, Гостехиздат, 1947.
9. Курош А. Г., Высшая алгебра, Физматгиз, 1962.
10. Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение к физике, Гостехиздат, 1958.
11. Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, Учпедгиз, 1941.
12. Постников М. М., Теория Галуа, Физматгиз, 1963.
13. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехизцат, 1957.
14. Смирнов В. Н., Курс высшей математики, т. III, ч. I, Физматгиз, 1958.
15. Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. I, ГТТИ, 1934.
16. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.

В настоящей книге рассматриваются и вопросы, не входящие непосредственно в теорию групп. Ниже приводятся некоторые книги, которые помогут читателю познакомиться с этими вопросами.

17. Александров П. С., Введение в общую теорию миожеств и функций, Гостехиздат, 1948.
18. Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
19. Бурбаки Н., Теория множеств, «Мир», 1965.

20. Бурбаки Н., Общая топология (Основные структуры), Физматгиз, 1958.
21. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, Физматгиз, 1958.
22. Дьедоне А., Основы современного анализа, «Мир», 1964.
23. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 1, изд-во МГУ, 1954.
24. Ляпин Е. С., Полугруппы, Физматгиз, 1960.
25. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
26. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.
27. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
28. Шилов Г. Е., Математический анализ (специальный курс), Физматгиз, 1961.

Е. С. ЛЯПИН

ПОЛУГРУППЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1960

Евгений Сергеевич Ляпин

ПОЛУГРУППЫ

Редактор *Г. П. Акилов*

Технический редактор *Р. Г. Польская* Корректор *Е. А. Максимова*

Сдано в набор 26/V 1959 г. Подписано к печати 25/IV 1960 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 18,5. Усл. печ. л. 30,34. Учет.-изд. л. 30,82. Тираж 6000 экз.
Цена 17 р. 40 к. Т-01087. Заказ № 455.

Государственное Издательство Физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский пр., 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Леисовнархоза. Ленинград,
Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. Понятие полугруппы

§ 1. Мультипликативные множества 9
§ 2. Независимость условий ассоциативности 22
§ 3. Общие полугруппы и полугруппы преобразований . 28
§ 4. Частичные преобразования 45
§ 5. Отношения 52

Глава II. Делимость элементов

§ 1. Понятие и простейшие свойства делимости 65
§ 2. Обратные элементы и единицы 70
§ 3. Делимость преобразований и матриц 78
§ 4. Коммутативные полугруппы идемпотентов 83
§ 5. Полугруппы, все элементы которых имеют правые нули 95
§ 6. Регулярные элементы 104
§ 7. Инверсные полугруппы 113
§ 8. Инверсные полугруппы частичных преобразований . 122

Глава III. Умножение подмножеств

§ 1. Подполугруппы 130
§ 2. Порождающие множества 139
§ 3. Моногенные полугруппы 151
§ 4. Периодические полугруппы 159
§ 5. Увеличительные элементы 166
§ 6. Увеличительные элементы полугрупп с единицей . . 170
§ 7. Подполугрупповая характеристика полугруппы . . . 179

Глава IV. Идеалы

§ 1. Понятие и простейшие свойства идеалов 193
§ 2. О цепях подмножеств произвольного миожества . . 203
§ 3. Главные идеалы и идеальные слои 210
§ 4. Двустороннеидеальные цепи 220
§ 5. Взаимная связь идеальных эквивалентностей 229
§ 6. Изолированные идеалы 239

Глава V. Полугруппы с минимальными идеалами

§ 1. Двусторонние идеалы, являющиеся группой 248
§ 2. Полугруппы с минимальными левыми идеалами . . 253
§ 3. Полугруппы, обладающие и минимальнымн левыми и минимальными правымн идеалами 261

§ 4. Вполне простые полугруппы с нулем 268
§ 5. Строение вполне простых полугрупп с нулем . . . 278
§ 6. Строение вполне простых полугрупп без нуля . . . 289

Глава VI. **Обратимость**
§ 1. Обратимость произведения элементов 299
§ 2. Обратимость увеличительных элементов 308
§ 3. Полугруппы с односторонней обратимостью 312
§ 4. Подполугруппы, правильные относительно обратимости 324
§ 5. Полугруппы преобразований, правильные относительно обратимости 327
§ 6. Полугруппы с отделяющейся групповой частью . . 338
§ 7. Подполугруппы полугруппы с отделяющейся групповой частью 343

Глава VII. **Гомоморфизмы**
§ 1. Гомоморфизмы и их делимость 348
§ 2. Факторполугруппы 360
§ 3. Гомоморфизмы инверсных полугрупп 367
§ 4. Нормальные комплексы 375
§ 5. Продолжение гомоморфизмов 389
§ 6. Некоторые частные виды гомоморфизмов 398

Глава VIII. **Разложения полугрупп в объединения подполугрупп**
§ 1. Связки полугрупп 415
§ 2. Вполне регулярные полугруппы 424
§ 3. Вполне регулярные инверсные полугруппы 434
§ 4. Последовательно аннулирующие связки 445
§ 5. Базисные классы 454

Глава IX. **Соотношения в полугруппах**
§ 1. Определяющие совокупности соотношений 466
§ 2. Преобразования определяющих совокупностей соотношений 473
§ 3. Полугруппы, заданные определяющими отношениями 479
§ 4. Тождества в полугруппах 485
§ 5. Свободные полугруппы 493
§ 6. Определяемость свободных полугрупп подполугрупповой характеристикой 507

Глава X. **Погружение полугрупп**
§ 1. Некоторые случаи погружения 518
§ 2. Погружение в группы 525
§ 3. Линейная упорядоченность в группах 534
§ 4. Потенциальная обратимость элементов 546
§ 5. Свободные и прямые произведения 556

Литература по полугруппам 565

Предметный указатель 590

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга имеет своею целью изложить основы алгебраической теории полугрупп. Полугруппа (иначе — ассоциативная система) есть множество, рассматриваемое относительно определенного в нем бинарного ассоциативного действия. Понятие полугруппы столь просто и естественно, что трудно говорить, когда оно впервые появилось. Как указывает Клейн[1], еще в период, когда теория групп формировалась в качестве особой математической дисциплины, были сомнения, не следует ли в качестве основного исходного понятия взять то, что теперь мы называем полугруппой. Однако задачи, стоящие перед математикой на том этапе ее развития, привели к необходимости остановиться на более узком понятии — группы.

Одной из важнейших причин той большой роли, которую играла теория групп в последующем развитии математики, было то, что по своему существу алгебраическая теория групп явилась абстрактным учением об обратимых преобразованиях. Необходимость рассмотрения таких преобразований встречается в столь разнообразных областях математики, что с понятием и свойствами групп сталкиваются в очень многих математических (и не только математических) дисциплинах.

Однако как бы ни было важно и плодотворно общее понятие обратимого преобразования, по мере развития математических теорий ясно выявилась необходимость рассмотрения наравне с ним и общего понятия преобразования — не обязательно обратимого. Для создания соответствующей общей алгебраической теории понадобилось оформить

---

[1] Ф. Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1, гл. VIII, Гостехиздат, 1937.

соответствующее понятие, каковым и явилось понятие полугруппы. Основная роль алгебраической теории полугрупп в математике, по-видимому, и состоит в том, что эта теория является абстрактным учением об общих преобразованиях.

Для того чтобы сформироваться в особую математическую дисциплину, естественность и важность исходного понятия еще недостаточны. Опыт той же теории групп показал, что успех ее развития, при условии важности исходных идей, объясняется тем, что удачность аксиоматики позволила на ее базе построить весьма глубокую и сложную теорию. В этом отношении более бедная аксиоматика теории полугрупп на первых порах ее развития вызывала естественное сомнение: сможет ли она послужить фундаментом для достаточно обширного здания самостоятельной теории. В настоящее время эти сомнения уже отошли в прошлое.

После первых, сперва разрозненных, исследований о полугруппах, выполненных в 20-х и 30-х годах нашего столетия, за последние полтора десятка лет появилась не одна сотня различных работ по теории полугрупп, которые полностью доказали возможность достаточно развитой и глубокой самостоятельной теории.

Изложение основных результатов этих работ в виде связной систематической теории и является задачей настоящей книги. Разумеется, нет необходимости (да и возможности) излагать все полученные к настоящему времени результаты. Но основные направления современной абстрактной алгебраической теории полугрупп представлены здесь достаточно полно. Что касается конкретных полугрупп, встречающихся в самых разнообразных областях математики (в частности, всюду, где встречается необходимость рассмотрения тех или иных преобразований), то полный обзор их совершенно невозможен ввиду необозримости материала. В этом и нет нужды поскольку математик, вооруженный общей теорией полугрупп, сам уже сможет применить эту теорию в том или ином конкретном вопросе.

Настоящая книга должна по своей идее предоставить такую возможность математикам, работающим в различных областях чистой и прикладной математики. Учитывая это, материал изложен достаточно полно и подробно.

Изложенная теория не опирается на какие-либо иные, недостаточно широко известные теории (те немногочисленные

места, где встречаются объекты таких теорий, могут быть при чтении опущены). Широко используются лишь простейшие общеизвестные понятия и свойства из теории множеств.

В связи с этим сразу же отметим, что, как и обычно в теории множеств, мы, задавая множество указанием его элементов, заключаем их все в фигурные скобки, в отличие от широко распространенного в теории групп обычая употреблять фигурные скобки в ином специальном значении. Мы не будем делать различия между отдельным элементом A некоторого множества и подмножеством этого множества, состоящим из одного элемента $\{A\}$.

Говоря об объединении множеств, в котором никакие две компоненты не имеют общих элементов, мы будем называть его объединением без пересечений, или непересекающимся объединением. Пустое множество будет обозначаться через $\varnothing$. Иногда мы будем употреблять понятие пустого символа. То, что X есть пустой символ, означает, что при чтении всякой формулы, в которой встречается X, его следует мысленно просто выбросить из формулы.

В продолжение всего изложения мы постоянно будем встречаться с парами формулировок, симметричных относительно „лево“ и „право“ (делится слева — делится справа, левый идеал — правый идеал и т. п.). В таких случаях большей частью мы будем ограничиваться лишь одной из двух таких формулировок, считая само собою очевидными смысл и соображения о справедливости симметричной для нее формулировки.

Текст книги разбит на отдельные пункты, занумерованные по десятичному принципу. Например, ссылка на II, 4.11 отсылает читателя ко второй главе, четвертому параграфу, одиннадцатому пункту этого параграфа. При ссылке в пределах одной и той же главы номер главы не указывается.

Литература по абстрактной теории полугрупп, достаточно полная, приведена в конце книги. Конечно, она не охватывает работ, посвященных полностью или частично рассмотрению тех или иных конкретных полугрупп. Как было уже упомянуто, множество таковых необозримо. В общий список литературы включены также и некоторые работы по топологическим полугруппам, хотя теория топологических полугрупп, уже отчетливо консолидирующаяся в особое напра-

вление топологической алгебры, в самой книге не затронута. Ссылки на различные иные работы, не вошедшие в общую библиографию теории полугрупп, делаются в подстрочных примечаниях.

С признательностью отмечаю, что при окончательной обработке рукописи я неоднократно использовал ценные советы и указания, сделанные мне Л. М. Глускиным.

Ленинград, 1958 г.

Е. Ляпин

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ ПОЛУГРУППЫ

§ 1. Мультипликативные множества

1.1. Целью настоящей главы является дать понятие полугруппы — того алгебраического образования, изучению которого посвящена настоящая книга. Разумеется, имеется в виду не только сформулировать определение, которое требует всего несколько строк, но и наметить некоторые связи, определяющие место полугрупп в современной математике. Это поможет уяснить значение, роль и задачи той теории, которая будет изложена в дальнейшем.

В современной алгебре изучается ряд алгебраических образований, определяемых при помощи задания одного или нескольких алгебраических действий в множестве элементов той или иной природы. В зависимости от количества этих действий, их свойств и природы множества получается та или иная алгебраическая теория. Одной из них является теория полугрупп.

1.2. Если в некотором множестве $\mathfrak{N}$ определен закон, который каждой паре элементов из $\mathfrak{N}$, взятых в определенном порядке, сопоставляет некоторый третий элемент из $\mathfrak{N}$, то говорят, что в $\mathfrak{N}$ определено *алгебраическое действие*.

Упомянутый элемент называется *результатом данного действия*, совершенного между исходными двумя элементами.

1.3. Несмотря на всю широту приведенного определения, оно все же не является наиболее общим и допускает дальнейшие обобщения. Например, часто приходится отказываться от того требования, чтобы результат был определен обязательно для любой пары элементов в $\mathfrak{N}$. При соответствующем более общем определении результат действия определен лишь для некоторых (не обязательно всех) пар

элементов множества. Уже действие деления в множестве всех рациональных чисел дает пример сказанного, поскольку результат действия не определен для пары чисел, в которой второе из них (делитель) равно нулю. Нередко встречается необходимость допустить, чтобы результат действия состоял не из одного элемента, но представлял бы собою некоторое подмножество исходного множества. Возможны и другие обобщения. Однако в настоящее время главное внимание в алгебре уделяется действиям в том смысле, как мы определили их в 1.2. В дальнейшем мы, говоря об алгебраическом действии, будем понимать это только в смысле определения 1.2.

1.4. Пусть в множестве $\mathfrak{N}$ задано некоторое алгебраическое действие. Для элемента Z, являющегося результатом этого действия, совершенного между элементами X и Y, употребляют обычно обозначения следующих видов. Пишут рядом элементы X и Y, ставя между ними какой-либо значок, соответствующий данному действию. Например, при действии сложения между числами употребляется значок плюс „$+$“. Результат действия сложения между числами X и Y обозначают $X+Y$. Для многих обычных действий значки общеизвестны и употребление их закреплено. При рассмотрении каких-либо новых действий или при изучении свойств произвольного действия, принадлежащего некоторому классу действий, вводят новые значки, обозначая результат действия над элементами X и Y, например через $X \bigcirc Y$ или $X * Y$ и т. п. Однако чаще всего в этом случае принято употреблять мультипликативную терминологию, обозначая результат действия между элементами X и Y через $X \cdot Y$ или просто XY. При этом результат действия XY даже называют произведением X и Y, а сами элементы X и Y — соответственно левым и правым сомножителями (это существенно, так как результат действия, вообще говоря, зависит от того, в каком порядке взяты элементы исходной пары, как это имеет место, например, при вычитании чисел). Такое употребление мультипликативной терминологии в современной алгебре общеупотребимо, и мы также будем в дальнейшем его придерживаться.

1.5. Непустое множество, в котором задано алгебраическое действие (в смысле 1.2), для которого употреблена мультипликативная запись, будем называть *мультипликативным множеством*. Таким образом, $\mathfrak{M}$ есть мульти-

пликативное множество, если для любой пары его элементов X, $Y \in \mathfrak{M}$ определен третий элемент

$$Z = XY \in \mathfrak{M}.$$

То, что в определение включено такое несущественное обстоятельство, как способ обозначения, не вызовет неудобств, ибо понятие мультипликативного множества играет для нас вспомогательную роль и будет употребляться в основном лишь в настоящей главе. Отметим, что для понятия мультипликативного множества в настоящее время еще нет твердо установившегося термина. Разные авторы употребляют различные термины, например группоид и др.

1.6. Задание действия в мультипликативном множестве $\mathfrak{M}$ может быть произведено различными способами. Наиболее естественным является просто перечисление всех результатов действия для любых пар элементов. Такой способ задания можно представить себе в виде указания *таблицы умножения*, называемой также таблицей Кели.

Для мультипликативного множества $\mathfrak{M} = \{A, B, C, \ldots, R, \ldots, S, \ldots\}$ представляем себе квадратную таблицу:

	A	B	C	. . .	S	. . .
A	$T_{A,A}$	$T_{A,B}$	$T_{A,C}$	. . .	$T_{A,S}$	. . .
B	$T_{B,A}$	$T_{B,B}$	$T_{B,C}$	. . .	$T_{B,S}$	. . .
C	$T_{C,A}$	$T_{C,B}$	$T_{C,C}$	. . .	$T_{C,S}$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
R	$T_{R,A}$	$T_{R,B}$	$T_{R,C}$	. . .	$T_{R,S}$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Здесь на пересечении строки, соответствующей элементу R, и столбца, соответствующего элементу S, стоит тот

элемент $T_{R,S}$, который является произведением элементов R и S, т. е. $T_{R,S} = R \cdot S$.

С точностью до последовательности записи элементов (которая для таблицы умножения считается несущественной) для каждого мультипликативного множества таблица умножения вполне определяется единственным образом. Обратно, задание произвольным образом такой таблицы для некоторого множества определяет в нем действие умножения, т. е. превращает его в мультипликативное множество.

Разумеется, фактическое написание таблицы умножения возможно лишь для конечного мультипликативного множества, имеющего не слишком большое количество элементов. Однако можно себе представлять и употреблять в рассуждениях таблицы умножения для любых, в том числе и бесконечных, мультипликативных множеств.

1.7. В качестве примера рассмотрим в множестве первых шести натуральных чисел $\mathfrak{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ действие, которое в качестве результата действия („умножения“) между числами X и Y дает наибольший общий делитель этих чисел. Таблицей умножения этого мультипликативного множества будет таблица:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

1.8. Абстрактное, как его иногда называют, направление в современной алгебре состоит в том, что одно или несколько алгебраических действий в множестве изучаются только с точки зрения результатов этих действий, безотносительно каких-либо иных свойств элементов, составляющих данное множество. В этом смысле абстрактная теория мультипликативных множеств интересуется только правилом умножения в каждом из них. При таком подходе два мультипликативных множества с одинаковым количеством элементов, в которых действия определены одинаковым образом, отличаются несущественно или даже вовсе могут быть признаны одним и тем же мультипликативными множеством. Точнее эта точка зрения оформляется при помощи понятия изоморфных мультипликативных множеств.

Определение. *Два мультипликативных множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}'$ *называются изоморфными между собою, если между элементами* $\mathfrak{M}$ *и элементами* $\mathfrak{M}'$ *можно установить взаимно однозначное соответствие*:

$$A \sim A', \quad B \sim B', \ldots, \quad S \sim S', \ldots$$

$\mathfrak{M} = \{A, B, \ldots, S, \ldots\}$, $\mathfrak{M}' = \{A', B', \ldots, S', \ldots\}$, *обладающее тем свойством, что из выполнения в* $\mathfrak{M}$

$$XY = Z \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{M})$$

всегда следует выполнение в $\mathfrak{M}'$ *для соответствующих элементов,*

$$X'Y' = Z',$$

и наоборот.

Про изоморфные между собою мультипликативные множества говорят также, что между ними существует изоморфизм.

Очевидно, изоморфные между собою мультипликативные множества равномощны и действия в них по существу (отвлекаясь от природы составляющих их элементов), совершенно „одинаковы". Таким образом, в отношении всех вопросов, связанных лишь с характером действия, изоморфные мультипликативные множества совершенно одинаковы и даже могут в известном смысле рассматриваться как одно и то же мультипликативное множество с различным обозначением элементов (A', B', ... можно рассматривать просто как другие обозначения элементов A, B, ...). При таком подходе к мультипликативным множествам, формулируя то или иное пред-

ложение, обычно добавляют слова „с точностью до изоморфизма". Так, например, очевиден смысл утверждения, что с точностью до изоморфизма существует лишь единственное мультипликативное множество, состоящее из одного элемента.

1.9. Отметим, что последнее условие в определении 1.8, выраженное заключительными словами „и наоборот", в сущности необязательно. Оно выполняется автоматически. Действительно, пусть в $\mathfrak{M}'$

$$X'Y' = Z' \qquad (X',\ Y',\ Z' \in \mathfrak{M}').$$

Обозначим $XY = T$. Согласно предыдущим условиям определения 1.8, имеем $X'Y' = T'$. Таким образом, $Z' = T'$. Но рассматриваемое соответствие взаимно однозначно, поэтому из $Z' = T'$ следует $Z = T$. Таким образом, оказалось: благодаря условиям определения, не включающим последнее, из $X'Y' = Z'$ обязательно следует $XY = Z$.

Отметим также, что из того, что в $\mathfrak{M}$

$$XY \neq Z \qquad (X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{M}),$$

всегда следует в $\mathfrak{M}'$ $\quad X'Y' \neq Z'$.

Действительно, из $X'Y' = Z'$, согласно определению, следовало бы $XY = Z$.

1.10. К понятию изоморфных между собою множеств можно также подойти с несколько другой точки зрения.

Определение. *Взаимно однозначное отображение* φ *мультипликативного множества* $\mathfrak{M}$ *на мультипликативное множество* $\mathfrak{M}'$ *называется изоморфным отображением или просто изоморфизмом, если для любых элементов* $X,\ Y \in \mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{M}'$ *всегда имеет место*

$$\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(XY).$$

1.11. Определения 1.8 и 1.10 связаны между собою очевидным образом.

Если существует изоморфизм φ (1.10) мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ на мультипликативное множество $\mathfrak{M}'$, то соответствие

$$X \sim \varphi(X) \qquad (X \in \mathfrak{M},\ \varphi(X) \in \mathfrak{M}'),$$

благодаря 1.9, очевидно, обладает свойством 1.8. Поэтому $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ оказываются изоморфными в смысле 1.8.

С другой стороны, при наличии соответствия 1.8 между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ отображение φ мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$

$$\varphi(X)=X' \qquad (X\in\mathfrak{M},\ X'\in\mathfrak{M}')$$

(где $X\sim X'$, в согласии с соответстствием 1.8), как легко убедиться, является изоморфизмом $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$ в смысле 1.10.

1.12. Как и для всякого взаимно однозначного отображения, для изоморфизма φ мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ на мультипликативное множество $\mathfrak{M}'$ существует обратное взаимно однозначное отображенне φ^{-1} множества $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что φ^{-1} является изоморфизмом $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{M}$. Действительно, пусть

$$\varphi^{-1}(X')\cdot\varphi^{-1}(Y')=\varphi^{-1}(Z') \qquad (X',\ Y',\ Z'\in\mathfrak{M}').$$

Тогда по свойству изоморфизма φ

$$\varphi[\varphi^{-1}(X')]\cdot\varphi[\varphi^{-1}(Y')]=\varphi[\varphi^{-1}(Z')].$$

Но $\varphi\varphi^{-1}$ есть тождественное отображение. Поэтому

$$X'Y'=Z',$$

т. е. для произвольных X' и Y' из $\mathfrak{M}'$ имеет место

$$\varphi^{-1}(X')\cdot\varphi^{-1}(Y')=\varphi^{-1}(X'Y').$$

1.13. Если φ есть взаимно однозначное отображение мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ в мультипликативное множество $\mathfrak{M}'$, при котором для любых $X,\ Y\in\mathfrak{M}$ выполняется

$$\varphi(X)\cdot\varphi(Y)=\varphi(XY),$$

то, как легко видеть, подмножество $\mathfrak{M}''=\varphi(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}'$ само будет мультипликативным множеством. При этом φ можно рассматривать как изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}''$. В этом случае отображение φ называют *изоморфизмом* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{M}'$.

В дальнейшем, как и обычно в математической литературе, мы будем употреблять термин „изоморфизм“ и в таком смысле. Также следует иметь в виду двоякое употребление термина „изоморфизм“, связанное с определением 1.8 и определением 1.10; если учесть 1.11, никакой путаницы отсюда произойти не может.

Отметим, что для более отчетливого выделения тех случаев, когда изоморфизм $\mathfrak{M}$ осуществляется на всё $\mathfrak{M}'$, иногда употребляют особый термин — *мономорфизм*.

1.14. Конечно, не представляет ни малейшего труда привести неограниченное количество примеров мультипликативных множеств, встречающихся в самых разнообразных областях математики. Алгебраическая теория имеет своей задачей способствовать развитию исследований в этих областях, предоставляя алгебраический аппарат для изучения свойств соответствующих мультипликативных множеств. Здесь следует, однако, различать свойства двух типов. Некоторые свойства связаны с характером элементов, составляющих данное мультипликативное множество. При изоморфизме такие свойства могут нарушаться, поскольку при изоморфизме „сохраняется" лишь действие, но не обязаны сохраняться те свойства элементов, которые не определены с помощью действия. Другие свойства таковы, что, будучи выполнены для одного мультипликативного множества, они обязательно имеют место и для всякого изоморфного с ним мультипликативного множества. Свойства первого типа, связанные, как иногда говорят, с „конкретной" природой данного множества, очевидно, не могут быть полностью уловлены абстрактной теорией. Для их изучения абстрактная алгебраическая теория действий может играть лишь вспомогательную роль. Напротив, изучение свойств второго типа — „абстрактного" характера, т. е. инвариантных относительно изоморфизмов, — целиком может быть отнесено в область абстрактной теории алгебраических действий. Это соображение и определяет в общих чертах роль абстрактной теории алгебраических действий в математической науке.

1.15. Пусть Ξ есть некоторый класс мультипликативных множеств. Всякий изоморфизм φ некоторого мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ на одно из мультипликативных множеств, принадлежащих классу Ξ, называется *изоморфным представлением* (иногда говорят просто — представлением) $\mathfrak{M}$ в классе Ξ.

Класс Γ всех тех мультипликативных множеств, которые обладают изоморфными представлениями в классе Ξ, очевидно, замкнут относительно изоморфизмов, т. е. всякое мультипликативное множество, изоморфное некоторому мультипликативному множеству, принадлежащему Γ, само принадлежит Γ.

Описать состав класса Γ для данного класса Ξ — это значит указать необходимое и достаточное условие того, чтобы произвольное мультипликативное множество было изоморфно

какому-либо мультипликативному множеству, принадлежащему Ξ. Получение такого условия называется обычно нахождением *абстрактной характеристики* для класса мультипликативных множеств Ξ. В связи со сказанным выше употребление такого термина вполне оправдано и естественно. Нахождение абстрактных характеристик для тех или иных важных классов конкретных мультипликативных множеств представляет существенный интерес. Оно обычно определяет развитие того или иного направления абстрактной теории алгебраических действий.

1.16. Разумеется, каждое мультипликативное множество изоморфно самому себе, поскольку тождественное отображение является изоморфизмом. Кроме того, иногда существуют и иные, нетождественные изоморфизмы мультипликативного множества на себя. Всякий такой изоморфизм (тождественный или нетождественный) называется *автоморфизмом* мультипликативного множества. В согласии с высказанной выше точкой зрения на изоморфизм, автоморфизм можно рассматривать как систему переименования элементов мультипликативного множества. Элементы X и X', переходящие один в другой при некотором автоморфизме, играют в мультипликативном множестве одну и ту же роль. Всякое свойство одного из них, относящееся к действию в мультипликативном множестве, присуще и другому.

1.17. Наравне с изоморфизмом в некоторых случаях приходится рассматривать родственное образование. Взаимно однозначное отображение φ мультипликативного множества $\mathfrak{M}$ на мультипликативное множество $\mathfrak{M}'$ называется *антиизоморфизмом* или обратным изоморфизмом, если для любых элементов X, $Y \in \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ всегда выполняется

$$\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(YX).$$

Очевидно, антиизоморфные мультипликативные множества весьма схожи, действия в них аналогичны во всем, кроме „направления“ (ведь результат действия определен для пары элементов, взятых в определенном порядке, или, иначе, указано направление в паре от одного элемента к другому), которое противоположно.

Частным случаем антиизоморфизма при отображении мультипликативного множества на себя является *антиавтоморфизм*. Конечно, далеко не всякое мультипликативное

множество обладает антиавтоморфизмами. Наличие антиавтоморфизма показывает симметричность действия для двух направлений в парах элементов, для которых определяются результаты действия. Для некоторых мультипликативных множеств (полугрупп) В. В. Вагнером [3] произведено исследование антиавтоморфизмов, называемых им инволюциями.

1.18. Общая теория мультипликативных множеств распадается на ряд направлений, каждое из которых посвящено изучению мультипликативных множеств, действия в которых обладают теми или иными основными свойствами. Среди таких свойств важнейшими являются нижеследующие.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть мультипликативное множество.

(α). Действие в $\mathfrak{M}$ называетя *ассоциативным*, если для любых A, B, $C \in \mathfrak{M}$ выполнено

$$(AB)C = A(BC).$$

(β). Действие в $\mathfrak{M}$ называется *коммутативным*, если для любых A, $B \in \mathfrak{M}$ выполнено

$$AB = BA.$$

(γ). Действие в $\mathfrak{M}$ обладает свойством *обратимости слева*, если для любых A, $B \in \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ всегда найдется такой X, что

$$XA = B.$$

(δ). Действие в $\mathfrak{M}$ обладает свойством *обратимости справа*, если для любых A, $B \in \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ всегда найдется такой Y, что

$$AY = B.$$

(ε). Действие в $\mathfrak{M}$ обладает свойством *сокращения слева*, если при любых X, A, $B \in \mathfrak{M}$ из $XA = XB$ всегда следует

$$A = B.$$

(ζ). Действие в $\mathfrak{M}$ обладает свойством *сокращения справа*, если при любых Y, A, $B \in \mathfrak{M}$ из $AY = BY$ всегда следует

$$A = B.$$

Отметим, что свойство сокращения справа (ζ) (аналогично и слева) иногда называется свойством однозначности деления

слева. Это объясняется тем, что соблюдение свойства (ζ) равносильно условию, чтобы ни при каких A, $B \in \mathfrak{M}$ уравнение

$$XA = B$$

относительно неизвестного $X \in \mathfrak{M}$ не имело более одного решения.

Различные направления алгебры характеризуются изучением мультипликативных множеств, действия которых обладают тем или иным фиксированным набором свойств. Разумеется, встречается необходимость рассмотрения для указанной цели и других важных свойств. Кроме того, важным является вопрос о мощности множества всех элементов мультипликативного множества.

Легко видеть, что каждое из указанных выше свойств действий инвариантно относительно изоморфизма мультипликативного множества. Также инвариантна и мощность множества.

1.19. Если действие мультипликативного множества в целом не является коммутативным, то для отдельных пар элементов A и B мультипликативного множества может все же выполняться равенство

$$AB = BA.$$

В этом случае элементы A и B называют *перестановочными* между собою. Говорят также, что A и B коммутируют между собою. Выделение пар перестановочных элементов часто используется при изучении некоммутативных действий.

1.20. Обозначим для любого конечного n

$$X_1X_2X_3 \ldots X_n = ((\ldots((X_1 \cdot X_2) \cdot X_3) \cdot \ldots) \cdot X_n).$$

В случае $n = 2$ мы имеем уже введенное ранее обозначение произведения двух элементов. При $n = 1$ мы имеем произведение, состоящее из одного сомножителя, которое считаем равным элементу, являющемуся этим единственным сомножителем.

Если действие в мультипликативном множестве ассоциативно, то

$$(X_1X_2 \ldots X_m) \cdot (X_{m+1}X_{m+2} \ldots X_n) = X_1X_2 \ldots X_mX_{m+1} \ldots X_n.$$

Доказательство этого без труда проводится по индукции относительно n, поскольку благодаря ассоциативности

$$(X_1X_2 \dots X_m) \cdot (X_{m+1}X_{m+2} \dots X_n) = \\ = (X_1X_2 \dots X_m) \cdot [(X_{m+1}X_{m+2} \dots X_{n-1}) \cdot X_n] = \\ = [(X_1X_2 \dots X_m) \cdot (X_{m+1}X_{m+2} \dots X_{n-1})] \cdot X_n$$

Из указанного равенства следует, что для произвольной последовательности элементов $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ мультипликативного множества с ассоциативным действием значение произведения при любой расстановке скобок, указывающей последовательность перемножения элементов $X_1, X_2, \dots, X_n$, будет равно $X_1X_2 \dots X_n$. В связи с этим скобки при записи сложно составленного произведения нескольких элементов обычно не ставятся. Их ставят лишь в том случае, когда желательно облегчить уяснение состава какого-либо сложно составленного произведения.

В случае, когда все множители произведения равны между собою, говорят о степени элемента и употребляют соответствующее обозначение:

$$\underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{n} = X^n.$$

1.21. Рассмотрим несколько примеров мультипликативных множеств.

(α). Пусть n есть произвольное натуральное число. $\mathfrak{M}$ — множество целых чисел от 0 до $(n-1)$:

$$\mathfrak{M} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Результатом действия в $\mathfrak{M}$ над числами m_1 и m_2 из $\mathfrak{M}$ будем считать остаток от деления $m_1 \cdot m_2$ на n.

Легко убедиться, что описанное действие в таком мультипликативном множестве ассоциативно и коммутативно. Свойством сокращения это действие не обладает ввиду принадлежности нуля к множеству $\mathfrak{M}$.

Если n есть простое число, то подмножество $\mathfrak{M}'$ множества $\mathfrak{M}$, состоящее из чисел $1, 2, \dots, n-1$, относительно того же самого действия также будет мультипликативным множеством с ассоциативным и коммутативным действием. При этом действие в $\mathfrak{M}'$ будет обратимым и будет обладать свойством сокращения. Это следует из того, что, как известно,

для любых $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}'$ вседа найдутся такие целые числа x и y, что

$$xm_1 + yn = m_2, \quad x \in \mathfrak{M}',$$

благодаря чему результатом рассматриваемого нами действия для x' (где x' есть остаток от деления x на n) и m_1 будет m_2.

(β). Множество $\mathfrak{M}_n$ всех комплексных квадратных матриц порядка n относительно обычного умножения матриц является мультипликативным множеством. Как известно, действие в нем ассоциативно, но не обладает другими из указанных в 1.18 свойств. В дальнейшем мы не раз будем возвращаться к этому множеству, сохраняя для него всегда то же обозначение $\mathfrak{M}_n$.

(γ). Неособенные матрицы из $\mathfrak{M}_n$ образуют мультипликативное множество, в котором, помимо 1.18, (α), выполнены также и 1.18, (γ), (δ), (ε), (ζ).

(δ). В множестве всех непрерывных функций двух переменных x и y, заданных в квадрате $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, определяется следующее действие, играющее важную роль в теории интегральных уравнений. Результатом этого действия, совершаемого между функциями $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$, считается функция

$$\int_0^a K_1(x, t) K_2(t, y)\, dt.$$

Как легко следует из простейших свойств интегралов, такое действие ассоциативно.

(ε). Рассмотрим множество функций одного переменного, абсолютно интегрируемых для $0 \leqslant x < \infty$. В ряде разделов математики в указанном множестве рассматривается действие, результатом которого для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ считается функция

$$\int_0^x f_1(t) f_2(x - t)\, dt.$$

Можно показать, что такое действие ассоциативно и коммутативно.

(η). Пусть $\mathfrak{M}$ есть совокупность всевозможных формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами и

свободным коэффициентом, равным нулю:

$$A=\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(A)} x^k.$$

Произведение двух таких рядов A и B определяем следующим образом. Подставляем в ряд A вместо переменного x ряд B:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(A)}\left(\sum_{l=1}^{\infty} d_l^{(B)} x^l\right)^k.$$

Раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями x, получаем новый степенной ряд, называемый „произведением" исходных степенных рядов. Можно доказать, что умножение полученного мультипликативного множества ассоциативно.

§ 2. Независимость условий ассоциативности

2.1. Так как вся эта книга посвящена изучению мультипликативных множеств с ассоциативным умножением, то естественно остановиться более подробно на вопросе о требовании ассоциативности действия. Впрочем, следует отметить, что рассуждения настоящего параграфа, выясняя некоторую сторону условия ассоциативности, сами по себе в дальнейшем не будут использоваться, так что знание настоящего параграфа не необходимо для дальнейшего.

Пусть $\mathfrak{M}=\{A, B, C, \ldots\}$ есть мультипликативное множество. Ассоциативность умножения в $\mathfrak{M}$ означает соблюдение следующих равенств:

$$(AA)A=A(AA);$$
$$(AB)A=A(BA);$$
$$(AA)B=A(AB);$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(AB)C=A(BC);$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Если число элементов в $\mathfrak{M}$ конечно (равно n), то количество таких соотношений равно n^3. Если $\mathfrak{M}$ бесконечно с мощностью $\mathfrak{m}$, то и мощность множества этих равенств равна $\mathfrak{m}$.

Каждое из этих равенств

$$(XY)Z = X(YZ)$$

(здесь X, Y, Z могут быть различными или одинаковыми элементами $\mathfrak{M}$) естественно назвать условием ассоциативности, соответствующим последовательности (X, Y, Z) элементов $\mathfrak{M}$. Соблюдение условий ассоциативности для всевозможных троек элементов (X, Y, Z) и означает ассоциативность действия.

Естественно поставить вопрос, являются ли независимыми все условия ассоциативности, т. е. не следует ли из выполнения некоторых из них выполнение и всех остальных. Изложенные ниже исследования Саса [1] показывают, что за малосущественным исключением имеет место независимость условий ассоциативности.

2.2. Если количество элементов в некотором множестве $\mathfrak{N}$ больше одного, то в $\mathfrak{N}$ можно несколькими различными между собою способами определить действие. Другими словами, существует несколько различных мультипликативных множеств с одним и тем же множеством элементов. Именно с этим обстоятельством и связана формулировка намеченной выше проблемы.

Будем говорить, что *в множестве $\mathfrak{N}$ условия ассоциативности независимы*, если для любой последовательности (A, B, C) из трех элементов, принадлежащих $\mathfrak{N}$, всегда можно в $\mathfrak{N}$ так определить действие умножения, что равенства

$$(XY)Z = X(YZ)$$

будут выполнены для любой последовательности (X, Y, Z) элементов из $\mathfrak{N}$, отличной от (A, B, C), тогда как для этой последней имеет место

$$(AB)C \neq A(BC).$$

2.3. Сразу видно, что ответ на вопрос о том, являются ли условия ассоциативности зависимыми или нет, зависит лишь от количества элементов во множестве.

Теорема. *Если количество элементов в множестве $\mathfrak{N}$ больше трех, то условия ассоциативности в $\mathfrak{N}$ независимы* (2.2).

Доказательство. Пусть (A, B, C) — произвольная последовательность трех элементов из $\mathfrak{N}$. В зависимости от

того, какие из элементов A, B, C различны, а какие одинаковы между собой, рассуждение распадается на пять случаев.

1) $A=B=C$.

Возьмем в $\mathfrak{N}$ три различных элемента U, V, W, отличных от A. Определим в $\mathfrak{N}$ следующим образом действие умножения:

$$AA=U, \quad AU=V,$$

$XY=W$ — во всех остальных случаях.

Сразу замечаем, что при таком определении умножения условие ассоциативности, соответствующее нашей последовательности, не выполнено:

$$(AA)A=UA=W,$$
$$A(AA)=AU=V.$$

Нам надо показать, что условие ассоциативности, соответствующее любой последовательности (X, Y, Z), отличной от (A, A, A), выполняется.

Так как $XY\neq A$, то всегда

$$(XY)Z=W.$$

Если X отлично от A, то

$$X(YZ)=W.$$

Пусть $X=A$; YZ равняться A никогда не может. Элементу U это произведение может равняться лишь при $Y=A$, $Z=A$, когда $(X, Y, Z)=(A, A, A)$. Во всех остальных случаях

$$X(YZ)=A(YZ)=W.$$

2) $A=B\neq C$.

Возьмем в $\mathfrak{N}$ элемент W, отличный от A и C. Действие в $\mathfrak{N}$ определим следующим образом:

$$AC=C,$$

$XY=W$ во всех остальных случаях.

Имеем

$$(AA)C=WC=W,$$
$$A(AC)=AC=C,$$

Для любой последовательности (X, Y, Z), отличной от (A, A, C), получаем

$$(XY)Z = W,$$

так как XY всегда отлично от A. Также

$$X(YZ) = W,$$

так как или $X \neq A$, или $YZ \neq C$ [равенство $YZ = C$ возможно лишь при $Y = A$, $Z = C$, но это при $X = A$ означало бы, что (X, Y, Z) совпадает с (A, A, C)].

3) $A = C \neq B$.

Возьмем в $\mathfrak{N}$ элемент W, отличный от A и B. Определяем в $\mathfrak{N}$ действие:

$$AA = A, \quad BA = A, \quad BB = B,$$

$XY = W$ во всех остальных случаях.

Имеем

$$(AB)A = W,$$
$$A(BA) = AA = A.$$

Для любой последовательности (X, Y, Z), отличной от (A, B, A), в которой хотя бы один из элементов отличен и от A и от B, получаем

$$(XY)Z = W, \quad X(YZ) = W.$$

Пусть каждый из X, Y, Z равен A или B. Если X равен B, то имеем

$$(BY)Z = YZ, \quad B(YZ) = YZ;$$

если Z равен A, то имеем

$$(XY)A = A, \quad X(YA) = XA = A.$$

Наконец, в оставшихся двух последних случаях

$$(AA)B = AB = W, \quad A(AB) = AW = W;$$
$$(AB)B = WB = W, \quad A(BB) = AB = W.$$

4) $A \neq B = C$.

Возьмем в $\mathfrak{N}$ элемент W, отличный от A и B. Определяем в $\mathfrak{N}$ действие:

$$AB = A,$$

$XY = W$ во всех остальных случаях.

Имеем

$$(AB)B = AB = A,$$
$$A(BB) = AW = W.$$

Для любой последовательности (X, Y, Z), отличной от (A, B, B), получаем

$$(XY)Z = W,$$

так как или $XY \neq A$, или (при $X = A$ и $Y = B$) $Z \neq B$.

Также

$$X(YZ) = W,$$

так как $YZ \neq B$.

5) A, B, C — попарно различны.

Возьмем в $\mathfrak{N}$ элемент W, отличный от A, B и C. Определяем в $\mathfrak{N}$ действие:

$$AC = C,$$

$XY = X$ в других случаях, когда X и Y есть элементы A, B, C; $XY = W$ во всех остальных случаях.

Имеем

$$(AB)C = AC = C,$$
$$A(BC) = AB = A.$$

Если в последовательности (X, Y, Z) имеется элемент, отличный от A, B, C, то

$$(XY)Z = W, \quad X(YZ) = W.$$

Пусть X, Y, Z — элементы A, B, C. Если $X \neq A$, то

$$(XY)Z = XZ = X, \quad X(YZ) = X.$$

Если $X = A$ и $Y = C$, то

$$(XY)Z = (AC)Z = CZ = C, \quad X(YZ) = A(CZ) = AC = C.$$

Если $X = A$, $Y = A$, $Z = C$, то

$$(XY)Z = A(AC) = AC = C, \quad X(YZ) = A(AC) = AC = C.$$

Если $X = A$, $Y = A$, $Z \neq C$, то

$$(XY)Z = (AA)Z = AZ = A, \quad X(YZ) = A(AZ) = AA = A.$$

Если $X=A$, $Y=B$, $Z\neq C$, то

$$(XY)Z=(AB)Z=AZ=A, \quad X(YZ)=A(BZ)=AB=A.$$

2.4. Для завершения исследования о независимости условий ассоциативности необходимо еще рассмотреть те случаи, когда множество $\mathfrak{N}$ состоит из одного, двух или трех элементов.

Если $\mathfrak{N}$ состоит из одного элемента, то, согласно 2.2, условия ассоциативности нельзя считать независимыми.

Пусть $\mathfrak{N}$ состоит из двух или трех элементов. Фиксируем один из них — элемент U. Предположим, что в $\mathfrak{N}$ определено такое умножение, при котором условия ассоциативности выполнены для всех последовательностей (X, Y, Z), за исключением последовательности (U, U, U), для которой имеет место $(UU)U\neq U(UU)$.

Обозначим $U^2=V$. Из сделанного предположения следует: $VU\neq UV$. Элемент V отличен от U, ибо иначе $VU=UV$.

Последовательно рассмотрев ряд случаев, убедимся, что в каждом из них сделанное предположение приводит к противоречию. Это будет означать, что условия ассоциативности во множестве, состоящем из двух или трех элементов, не независимы.

1) Пусть $VU=U$, $UV=V$,
тогда

$$U=VU=(UV)U=U(VU)=UU=V.$$

2) Пусть $VU=U$, $UV=W$ (здесь и в дальнейшем W означает элемент, отличный и от U и от V), тогда

$$U=VU=(UU)U=[(VU)U]U=[V(UU)]U=(VV)U=$$
$$=[(UU)V]U=[U(UV)]U=(UW)U=U(WU)=$$
$$=U[(UV)U]=U[U(VU)]=U(UU)=UV=W.$$

3) Пусть $VU=V$, $UV=W$,
тогда

$$V=VU=(VU)U=V(UU)=VV=(VU)V=V(UV)=$$
$$=VW=(UU)W=U(UW)=U[U(UV)]=U[(UU)V]=$$
$$=U(VV)=U[V(UU)]=U[(VU)U]=U(VU)=UV=W.$$

Случаи

1′) $VU = V$, $UV = U$;
2′) $VU = W$, $UV = U$;
3′) $VU = W$, $UV = V$,

очевидно, аналогичны соответствующим рассмотренным случаям 1), 2), 3).

2.5. Для тех случаев, когда условия ассоциативности не являются независимыми, можно было бы продолжить исследования, установив те минимальные совокупности условий ассоциативности, из которых вытекает ассоциативность всего действия. Однако случай зависимости, как мы видели, имеет место лишь для сравнительно мало интересных множеств, имеющих не более трех элементов. Поэтому мы не будем на этом задерживаться. Так как случай коммутативных действий представляет особый интерес, то довольно естественно исследовать вопрос о независимости условий ассоциативности для коммутативных действий. Соответствующее исследование было проведено также Сасом [2].

§ 3. Общие полугруппы и полугруппы преобразований

3.1. Среди различных направлений общей теории алгебраических действий в согласии со сказанным в § 1 должно существовать направление, посвященное изучению мультипликативных множеств с ассоциативным действием. Такие мультипликативные множества называются полугруппами.

Определение. *Полугруппой называется непустое множество* $\mathfrak{A}$, *в котором для любой пары взятых в определенном порядке элементов* $X, Y \in \mathfrak{A}$ *определен новый элемент, называемый их произведением*

$$U = XY \in \mathfrak{A},$$

причем для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{A}$ *всегда выполнено*

$$(XY)Z = X(YZ).$$

Так как в наше определение включен и способ обозначения результата действия в виде произведения, то точнее было бы говорить о мультипликативной полугруппе. Мы не будем этого делать ввиду несущественности способа обозначения результата действия, а также и потому, что в даль-

нейшем не будем употреблять иного обозначения, кроме мультипликативного.

Следует иметь в виду, что в литературе наравне с термином „полугруппа" употребляются некоторые другие равнозначные термины — „ассоциативная система", „ассоциативный группоид" и др. Что касается термина „полугруппа", то его применение иногда ограничивают случаем выполнения свойств сокращения слева и сокращения справа (1.18).

3.2. В согласии со сказанным в 1.18 особо выделяются нижеследующие важные частные виды полугрупп.

(α). *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется коммутативной, если для любых* $A, B \in \mathfrak{A}$ *всегда выполнено*

$$AB = BA.$$

(β). *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется группой, если для любых* $A, B \in \mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}$ *всегда найдутся такие* X *и* Y, *что*

$$XA = B, \quad AY = B.$$

(γ). *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется полугруппой с левым сокращением, если при любых* $X, A, B \in \mathfrak{A}$ *из*

$$XA = XB$$

всегда следует $A = B$.

(δ). *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется полугруппой с правым сокращением, если при любых* $Y, A, B \in \mathfrak{A}$ *из*

$$AY = BY$$

всегда следует $A = B$.

(ε). *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется полугруппой с двусторонним сокращением, если она одновременно является и полугруппой с левым сокращением и полугруппой с правым сокращением.*

Разумеется, эти свойства могут комбинироваться как между собой, так и с другими свойствами, в результате чего мы получаем различные важные классы полугрупп, например класс коммутативных групп, класс счетных полугрупп с левым сокращением и т. п. Очень существенным свойством является мощность множества всех элементов полугруппы. Часто ее называют порядком полугруппы. Наиболее простая из полугрупп — полугруппа, состоящая из одного элемента, — называется *единичной полугруппой* или

единичной группой (поскольку она, очевидно, является группой).

3.3. Теория групп, являющихся частным видом полугрупп, развилась значительно раньше общей теории полугрупп. Даже сам термин „полугруппа" образовался путем видоизменения ранее укрепившегося термина „группа". В настоящее время теория групп представляет собой весьма разветвленную и глубокую обширную алгебраическую теорию. Имея целью изложить основы общей теории полугрупп, мы неоднократно будем сталкиваться с группами. Во многих случаях мы будем сводить вопрос об изучении того или иного свойства общих полугрупп к рассмотрению соответствующего свойства для групп, считая это значительным продвижением вопроса ввиду сравнительно большей изученности групп. Однако специально останавливаться на рассмотрении групповых вопросов мы обычно не будем, считая, что читатель может ознакомиться с ними по книгам и статьям, специально посвященным рассмотрению групп [1].

3.4. Полугруппы встречаются в самых разнообразных областях математики. Все мультипликативные множества, указанные в 1.21, являются полугруппами, поскольку действие во всех рассмотренных там случаях ассоциативно. Из них группой в общем случае является лишь мультипликативное множество неособенных матриц.

Не задерживаясь на рассмотрении других примеров, отметим, что обилие их указывает на важность построения теории полугрупп для различных отраслей математики.

3.5. Наиболее важной из причин, побуждающих к построению теории полугрупп, является связь понятия полугруппы с понятием умножения преобразований.

Пусть Ω есть некоторое множество. Отображение множества Ω в себя называется *преобразованием*. В дальнейшем мы будем записывать действие преобразования на элементы из Ω в операторной форме. Элемент $\beta \in \Omega$, в который отображается элемент $\alpha \in \Omega$ при преобразовании S, будем обозначать в виде произведения S и α:

$$\beta = S\alpha.$$

---

[1] См., например, А. Г. Курош. Теория групп, изд. 2, Гостехиздат, 1953.

связи с таким обозначением иногда говорят об умножении преобразования (оператора) S на α.

Условимся также о следующем обозначении. Если $\mathfrak{N}$ есть некоторая совокупность преобразований множества Ω и $\Gamma \subset \Omega$, то через $\mathfrak{N}\Gamma$ будем обозначать множество всех элементов из Ω представимых в виде $X\alpha$, где $X \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in \Gamma$.

Укажем на обозначение преобразований в виде подстановок. При такой записи все элементы Ω мыслятся записанными в одной строке (в произвольной последовательности). Под каждым из них подписывается тот элемент, в который он отображается (преобразуется) при данном преобразовании S:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \ldots \\ S\alpha & S\beta & S\gamma \ldots \end{pmatrix}$$

(здесь $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$).

3.6. Пусть $\mathfrak{S}_\Omega$ есть множество всех преобразований некоторого непустого множества Ω. В $\mathfrak{S}_\Omega$ естественным образом вводится действие умножения, при котором произведением двух преобразований считается преобразование, получающееся в результате последовательного применения исходных преобразований. Таким образом, для X, Y, $Z \in \mathfrak{S}_\Omega$ имеет место

$$XY = Z,$$

если для всякого $\alpha \in \Omega$ выполнено

$$X(Y\alpha) = Z\alpha.$$

Легко видеть, что это правило для каждых X, $Y \in \mathfrak{S}_\Omega$ определяет XY единственным образом. Благодаря этому $\mathfrak{S}_\Omega$ оказывается мультипликативным множеством.

Указанное действие ассоциативно. Действительно, для любых X, Y, $Z \in \mathfrak{S}_\Omega$ и $\alpha \in \Omega$ имеем

$$[(XY)Z]\alpha = (XY)(Z\alpha) = X[Y(Z\alpha)];$$
$$[X(YZ)]\alpha = X[(YZ)\alpha] = X[Y(Z\alpha)].$$

Поскольку

$$[(XY)Z]\alpha = [X(YZ)]\alpha$$

для любого $\alpha \in \Omega$, преобразования $(XY)Z$ и $X(YZ)$ одинаковы.

Таким образом, *множество* $\mathfrak{S}_\Omega$ *всех преобразований произвольного множества* Ω *относительно действия умножения* (т. е. последовательного применения) *преобразований оказывается полугруппой.*

Если $\mathfrak{A}$ есть некоторое мультипликативное множество преобразований множества Ω (т. е. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_\Omega$), причем произведение двух любых преобразований из $\mathfrak{A}$ всегда принадлежит $\mathfrak{A}$, то, очевидно $\mathfrak{A}$ является полугруппой (поскольку из ассоциативности действия в $\mathfrak{S}_\Omega$ непосредственно вытекает ассоциативность действия в $\mathfrak{A}$). Такая полугруппа называется *полугруппой преобразований множества* Ω.

Необходимость рассматривать различные совокупности преобразований встречается в математике очень часто. Если первоначально такая совокупность не является полугруппой, то ее всегда можно дополнить до полугруппы, присоединяя к ней преобразования, являющиеся произведениями исходных преобразований.

3.7. Конечно, необходимость рассматривать преобразования встречается не только непосредственно в самой математике, но и в других научных дисциплинах. Бегло рассмотрим, например, следующую весьма обычную физическую схему. Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая физическая система состояний, относительно которой известно, что она может находиться в одном из состояний $\mathfrak{n}_\alpha$, $\mathfrak{n}_\beta$, ..., $\mathfrak{n}_\xi$, ..., совокупность которых обозначим через Ω. Система $\mathfrak{A}$ подвергается некоторым воздействиям. Каждое воздействие S определяется указанием, гласящим, что если система находилась в состоянии $\mathfrak{n}_\xi$, то в результате данного воздействия она перейдет в новое состояние $\mathfrak{n}_\eta$ (которое иногда может, конечно, и совпадать с исходным состоянием $\mathfrak{n}_\xi$, если данное состояние устойчиво относительно этого воздействия). Таким образом, каждое воздействие на систему $\mathfrak{A}$ представляет собой не что иное, как преобразование в множестве состояний системы $\Omega = \{\mathfrak{n}_\alpha, \mathfrak{n}_\beta, \ldots, \mathfrak{n}_\xi, \ldots\}$. Результат двух последовательных воздействий также можно рассматривать как воздействие. Преобразование, производимое этим последним, есть, конечно, не что иное, как произведение тех преобразований, которые соответствуют двум последовательным воздействиям, результатом чего явилось данное воздействие. Таким образом, совокупность рассматриваемых воздействий на физическую систему $\mathfrak{A}$, будучи замкнута относительно последова-

тельного применения воздействий (т. е. результат последовательного применения рассматриваемых воздействий на систему сам причисляется к числу этих воздействий), представляет собой не что иное, как полугруппу преобразований множества всех рассматриваемых состояний системы. Все вопросы, связанные с последовательными переходами системы из одного состояния в другое под влиянием последовательно примененных воздействий, определяются умножением элементов указанной полугруппы.

3.8. Укажем также, что эту схему можно усложнить, допустив, что в результате воздействия система может перейти из данного состояния не обязательно в одно определенное, но в несколько различных состояний, причем указаны вероятности того, что в результате этого воздействия она из данного состояния перейдет в другое. Здесь мы опять получаем полугруппу, элементы которой, однако, будут задаваться не просто преобразованиями, но вероятностными матрицами, строки и столбцы которых занумерованы элементами множества состояний, а элементом матрицы является вероятность $p_{\xi\eta}$ перехода системы из состояния π_ξ, соответствующего строке, содержащей данный элемент, в состояние π_η, соответствующее столбцу.

$$\begin{array}{c} \\ \pi_\alpha \\ \pi_\beta \\ \vdots \\ \pi_\xi \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi_\alpha & \pi_\beta & \dots & \pi_\eta \end{array} \dots \\ \left[\begin{array}{cccc} & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_{\xi\eta} \\ & & & \end{array}\right. \end{array} \dots \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

Такие матрицы характеризуются условиями

$$\sum_\eta p_{\xi\eta} = 1, \qquad p_{\xi\eta} \geqslant 0.$$

Последовательному применению воздействий, как легко видеть, соответствует последовательное умножение соответствующих вероятностных матриц. Таким образом, изучение вопросов о последовательных применениях таких воздействий и вероятных последствиях из них сводится к рассмотрению

умножения элементов в соответствующей мультипликативной полугруппе вероятностных матриц (конечных или бесконечных, в зависимости от множества возможных состояний Ω).

3.9. Значение понятия полугруппы для теории преобразований заключается не только в том, что всякое мультипликативное множество преобразований является полугруппой, но и в том, что с абстрактной точки зрения (1.8) справедливо и обратное утверждение.

Для полугруппы $\mathfrak{A}=\{A, B, \ldots, S, \ldots\}$ обозначим через $\Lambda_{\mathfrak{A}}$ множество, состоящее из всех элементов $\mathfrak{A}$ и еще одного нового „отделяющего“ элемента I:

$$\Lambda_{\mathfrak{A}}=\{I, A, B, \ldots, S, \ldots\}.$$

Каждому $S\in\mathfrak{A}$ сопоставим преобразование T_S множества $\Lambda_{\mathfrak{A}}$, называемое левым сдвигом $\Lambda_{\mathfrak{A}}$, соответствующим элементу S:

$$T_S I=S, \quad T_S X=S\cdot X \qquad (X\in\mathfrak{A})$$

(умножение S на X производится, конечно, по правилу умножения элементов в $\mathfrak{A}$).

В виде подстановки левый сдвиг записывается следующим образом:

$$T_S=\begin{pmatrix} I & A & B & \ldots & R & \ldots \\ S & (SA) & (SB) & \ldots & (SR) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Левые сдвиги, соответствующие различным элементам $\mathfrak{A}$, представляют собой различные преобразования $\Lambda_{\mathfrak{A}}$. Действительно,

$$T_S I=S, \qquad T_R I=R.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ множество всех левых сдвигов, соответствующих элементам из $\mathfrak{A}$. Оно образует полугруппу преобразований множества $\Lambda_{\mathfrak{A}}$ (полугруппа левых сдвигов), так как при любых $S, R\in\mathfrak{A}$

$$(T_R T_S) I=T_R(T_S I)=T_R S=RS=T_{(RS)}I,$$

$$(T_R T_S) X=T_R(T_S X)=T_R(SX)=RSX=$$

$$=(RS)X=T_{(RS)}X \qquad (X\in\mathfrak{A}),$$

т. е. $T_R T_S=T_{(RS)}$.

Из последнего равенства следует, что взаимооднозначное отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}$ на полугруппу левых сдвигов $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$

$$\varphi(S) = T_S \qquad (S \in \mathfrak{A})$$

является изоморфизмом.

Таким образом, мы показали, что *всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований* (3.6).

Поскольку всякая полугруппа преобразований содержится в некоторой полугруппе $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$ (3.6), полученный результат объясняет важную роль полугрупп $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$ в теории полугрупп. В некотором смысле изучение любых полугрупп может быть сведено к изучению полугрупп $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$. Этим объясняется, в частности, то внимание, которое будет уделено полугруппам $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$ в дальнейшем.

Конечно, надо оговорить, что сказанное отнюдь не следует понимать как обязательное изоморфное отображение всякой изучаемой полугруппы в некоторую полугруппу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$ при исследовании любого свойства полугруппы. Нередко это было бы совсем нецелесообразно.

3.10. В терминах теории представлений доказанное в 3.9 предложение означает, что всякая полугруппа представима преобразованиями (т. е. представима в классе полугрупп преобразований). Разумеется, всякая полугруппа обладает многими другими представлениями преобразованиями, помимо использованного в 3.9 представления. Однако это представление используется при различных исследованиях наиболее часто. Оно называется *представлением полугруппы левыми сдвигами*.

Что касается естественно возникающей задачи описания и классификации всех представлений полугрупп, то в ее постановке необходимы некоторые дополнительные уточнения и ограничения. Работа в направлении решения этой важной задачи только еще начата. Упомянем работу Столла [1] и исследования В. В. Вагнера [6].

Обозначим через Ξ класс всех мультипликативных множеств преобразований, т. е. класс полугрупп преобразований. Как мы показали, каждая полугруппа представима в классе Ξ. С другой стороны, каждое мультипликативное множество, представимое в Ξ, является полугруппой (так как всякое мультипликативное множество, изоморфное полугруппе,

само является полугруппой). Таким образом, можно сказать, что в классе всех мультипликативных множеств класс всех полугрупп выделяется как класс тех мультипликативных множеств, которые представимы преобразованиями (класс Г в обозначении 1.15). Другими словами, условие ассоциативности умножения в мультипликативном множестве (т. е. принадлежность мультипликативного множества к классу полугрупп) является абстрактной характеристикой класса мультипликативных множеств преобразований (1.15).

3.11. Следует отметить, что в множестве всех преобразований множества Ω, помимо действия, определенного в 3.6, иногда рассматривается симметричное ему действие, которое мы будем обозначать значком $\bigcirc$. Именно для преобразований S и R множества Ω результатом этого действия является преобразование

$$S \bigcirc R = R \cdot S$$

(где произведение $R \cdot S$ понимается в смысле 3.6).

Действие $\bigcirc$ естественно рассматривать тогда, когда знак преобразования пишется не слева, а справа от преобразуемого элемента (что довольно распространено). При такой записи мы имеем

$$\alpha (S \bigcirc R) = (\alpha S) R \qquad (\alpha \in \Omega).$$

Теория определенного в 3.6 действия умножения преобразований, очевидно, вполне аналогична теории действия $\bigcirc$. Мультипликативное множество всех преобразований Ω, рассматриваемое относительно указанного действия $\bigcirc$, будем обозначать через $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$. Легко видеть, что $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$ является полугруппой. Хотя полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ и $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$ состоят из одних и тех же элементов, действия в них различны, и потому полугруппы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{\bigcirc}$ следует рассматривать как различные.

Тождественное отображение множества всех преобразований множества Ω определяет собою антиизоморфизм $\mathfrak{S}_\Omega$ на $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$ (1.17). Так как полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ и $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$ антиизоморфны, то их строение и свойства вполне сходны. Точнее сказать, их свойства симметричны. Полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ и $\mathfrak{S}_\Omega^{\bigcirc}$ неизоморфны (если Ω содержит более одного элемента). Это видно, например, из того, что $\mathfrak{S}_\Omega$ содержит элемент U_α (α произвольный фиксированный элемент из Ω, U_α такое

преобразование, что $U_\alpha\xi=\alpha$ для любого $\xi\in\Omega$), обладающий свойством

$$U_\alpha S=U_\alpha$$

для всякого $S\in\mathfrak{S}_\Omega$. В $\mathfrak{S}_\Omega^\circ$ элемента с таким свойством нет, ибо для всякого $X\in\mathfrak{S}_\Omega^\circ$

$$X\bigcirc U_\alpha=U_\alpha X=U_\alpha,$$
$$X\bigcirc U_\beta=U_\beta X=U_\beta,$$
$$U_\alpha\neq U_\beta\qquad(\alpha\neq\beta;\ \alpha,\ \beta\in\Omega)$$

и либо $X\bigcirc U_\alpha$, либо $X\bigcirc U_\beta$ отлично от X.

3.12. Рассмотрение действия $\bigcirc$ (3.11) естественно вызывает к жизни образования, симметричные левым сдвигам. Для $S\in\mathfrak{A}$ определяем преобразование T_S° множества $\Lambda_\mathfrak{A}$ (3.9), называемое правым сдвигом:

$$T_S^\circ I=S,\qquad T_S^\circ X=X\cdot S,$$
$$T_S^\circ=\begin{pmatrix}I & A & B & \dots & R & \dots\\ F & (AS) & (BS) & \dots & (RS) & \dots\end{pmatrix}.$$

Аналогично 3.9 легко убедиться, что отображение ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{S}_{\Lambda_\mathfrak{A}}^\circ$

$$\psi(S)=T_S^\circ\qquad(S\in\mathfrak{A})$$

является изоморфизмом $\mathfrak{A}$. Это есть так называемое представление $\mathfrak{A}$ правыми сдвигами. Полугруппу правых сдвигов означаем через $\mathfrak{T}_\mathfrak{A}^\circ$.

3.13. Среди преобразований особо выделяются обратимые преобразования. Преобразование S множества Ω называется *обратимым*, если существует такое „обратное“ к нему преобразование S^{-1} того же множества, что

$$SS^{-1}=S^{-1}S=E,$$

где E есть *тождественное преобразование*, т. е. такое что $E\alpha=\alpha$ для всякого $\alpha\in\Omega$.

Из определения непосредственно следует, что само преобразование S в свою очередь является обратным для S^{-1}. Поэтому обратное преобразование само обратимо.

К числу обратимых преобразований принадлежит и само тождественное преобразование E, для которого, очевидно, $E^{-1}=E$.

Кстати, отметим одно простое свойство тождественного преобразования E. Для любого преобразования S того же множества Ω, очевидно, всегда имеет место

$$SE=ES=S.$$

3.14. Можно охарактеризовать обратимое преобразование также и „внутренним" образом.

Теорема. *Для того чтобы преобразование S множества Ω было обратимо, необходимо и достаточно, чтобы*

(α) *при любых* $\xi, \eta \in \Omega$ $(\xi \neq \eta)$ *имело место* $S\xi \neq S\eta$,

(β) $S\Omega=\Omega$ (3.5).

Доказательство. 1) Пусть S обратимо. Если для некоторых ξ, $\eta \in \Omega$ имеет место

$$S\xi = S\eta,$$

то мы имеем

$$\xi = E\xi = S^{-1}S\xi = S^{-1}S\eta = E\eta = \eta.$$

Далее, так как

$$\Omega = E\Omega = SS^{-1}\Omega = S\left(S^{-1}\Omega\right) \subset S\Omega,$$

то $S\Omega=\Omega$.

2) Если для преобразования S выполнены оба условия теоремы (α) и (β), то определяем S^{-1} как такое преобразование Ω, что при $S\xi=\eta$ (благодаря (β) всякое $\eta \in \Omega$ представимо таким образом, а благодаря (α) для каждого η найдется лишь единственное ξ, удовлетворяющее этому соотношению) имеет место

$$S^{-1}\eta = \xi.$$

Для такого S^{-1} имеем

$$SS^{-1}\eta = S\xi = \eta, \qquad S^{-1}S\xi = S^{-1}\eta = \xi.$$

Так как в качестве ξ и η могут фигурировать любые элементы из Ω, то это означает, что как SS^{-1}, так и $S^{-1}S$ является тождественным преобразованием.

3.15. Из теоремы следует, что обратное преобразование к данному обратимому преобразованию S определяется единственным образом. Действительно, пусть преобразования S' и S'' оба обратны к S. Всякий элемент $\eta \in \Omega$ представим в виде $S\xi$. Так как

$$S'(S\xi) = (S'S)\xi = E\xi = (S''S)\xi = S''(S\xi),$$

то $S' = S''$.

При записи преобразований в виде подстановок мы, очевидно, имеем

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{pmatrix}.$$

3.16. Свойство обратимости преобразования связано с понятием группы (3.2).

Полугруппу некоторых обратимых преобразований $\mathfrak{S}$ множества Ω назовем *группой обратимых преобразований*, если $\mathfrak{S}$ вместе с преобразованием S всегда содержит и обратное к S преобразование S^{-1}. Легко видеть, что полугруппа $\mathfrak{S}$ в этом случае действительно является группой.

Для $A, B \in \mathfrak{S}$ при $X = BA^{-1}$ и $Y = A^{-1}B$, где A^{-1} — обратное к A преобразование, имеем благодаря 3.13

$$XA = BA^{-1}A = BE = B, \quad AY = AA^{-1}B = EB = B.$$

С другой стороны, несколько позже (II, 2.17) мы покажем, что всякая группа изоморфна некоторой группе обратимых преобразований.

Таким образом, класс групп характеризуется как класс мультипликативных множеств, обладающих представлениями в классе мультипликативных множеств обратимых преобразований, содержащих для каждого преобразования и ему обратное. Если обозначить класс таких мультипликативных множеств преобразований через Ξ, то в обозначениях 1.15 класс групп будет классом Γ. Другими словами, условие быть группой есть абстрактная характеристика класса мультипликативных множеств преобразований Ξ.

3.17. Сравнивая этот результат с 3.9, мы можем уяснить себе как места общей теории полугрупп и теории групп в математике, так и их взаимное отношение. Алгебраическая теория полугрупп кратко может быть охарактеризована как

абстрактное учение о произвольных преобразованиях. Аналогично теория групп есть абстрактное учение об обратимых преобразованиях. Ввиду важной роли обратимых преобразований очевидно то выдающееся место, которое должна занимать и занимает теория групп. То, что изучение обратимых преобразований естественно раньше привлекало к себе внимание математиков, определило более раннее развитие теории групп. С другой стороны, очевидна невозможность ограничиваться изучением лишь обратимых преобразований. В связи с этим возникла задача построения общей абстрактной теории полугрупп.

3.18. Рассмотрение различных преобразований и их последовательное применение (умножение) столь обычны в современной математике, что не представило бы труда привести неограниченное количество примеров. Мы бегло остановимся лишь на одном направлении теории преобразований, долженствующем сыграть важную роль в теории полугрупп и ее применении в различных областях математики.

Пусть между элементами некоторого множества заданы некоторые соотношения. Пока что мы понимаем термин „соотношение" в общем описательном смысле и не уточняем его (ниже мы дадим одну общую конструкцию, которая, видимо, достаточно точно отражает рассматриваемую идею).

Задание некоторых соотношений в множестве естественно выделяет среди различных преобразований этого множества такие преобразования, которые не нарушают этих соотношений. Такие преобразования множества с данной совокупностью соотношений назовем его *эндоморфизмами* (о другом, более узком, понимании этого термина будет сказано ниже). Таким образом, преобразование множества с соотношениями есть эндоморфизм, если всякая система элементов из этого множества, связанных одним из рассматриваемых соотношений, преобразуется в систему элементов, опять-таки связанных этим же соотношением. Тождественное отображение множества на себя, конечно, всегда является эндоморфизмом. Результат последовательного применения двух эндоморфизмов есть преобразование, которое, очевидно, опять-таки не нарушает рассматриваемых соотношений, т. е. само является эндоморфизмом. Из этого следует, что при любой системе соотношений в произвольном множестве совокупность эндоморфизмов

всегда оказывается полугруппой — полугруппой эндоморфизмов.

Очевидно, алгебраические свойства полугруппы эндоморфизмов определяются свойствами системы соотношений в множестве. В свою очередь алгебраические свойства полугруппы эндоморфизмов в той или иной степени характеризуют исходные соотношения в рассматриваемом множестве.

Таким образом, изучение полугруппы эндоморфизмов может быть использовано для классификации и изучения свойств множеств с теми или иными системами соотношений между их элементами.

Естественно ожидать, что изучение полугрупп эндоморфизмов и установление указанных взаимных связей между их свойствами и свойствами самих множеств должно стать одним из важнейших направлений развития теории полугрупп, по всей вероятности, чрезвычайно богатым приложениями алгебраической теории полугрупп в различных областях математики. В настоящее время соответствующая работа, можно сказать, еще не начата.

3.19. Для иллюстрации сказанного укажем на несколько полугрупп эндоморфизмов.

(α). Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая полугруппа (в частности, может быть группа). Соотношениями в $\mathfrak{A}$ будем считать соотношения, определяющие действие в $\mathfrak{A}$

$$XY = Z \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{A}).$$

Эндоморфизмом будет в этом случае такое отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}$ в себя, при котором для элементов X, Y, Z, связанных соотношением $XY = Z$ всегда выполняется

$$\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(Z).$$

Отметим, что именно для этого случая (причем для группы) термин „эндоморфизм“ применялся до сих пор. Кое-какие, пока еще очень малочисленные, связи между свойствами группы и свойствами ее полугруппы эндоморфизмов уже подмечались в математической литературе.

(β). Пусть Ω есть множество всевозможных одночленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над некоторым полем P:

$$u = \alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n} \qquad (\alpha \in P).$$

В Ω определено соотношение между некоторыми тройками одночленов u, v, w, определяющее умножение этих одночленов в обычном смысле: $uv = w$. Кроме того, особо выделяем одночлены нулевой степени, т. е. элементы поля P. При этом фиксирование каждого из них также считаем соотношением в Ω. Тем самым эндоморфизмами множества Ω мы должны считать такие преобразования X множества Ω, для которых всегда имеет место $X(uv) = X(u) \cdot X(v)$ $(u, v \in \Omega)$ и $X(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \in P)$. Очевидно, всякий такой эндоморфизм X вполне определяется заданием образов для переменных x_i:

$$\begin{aligned}
Xx_1 &= \alpha_1 x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} \ldots x_n^{k_{1n}};\\
Xx_2 &= \alpha_2 x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \ldots x_n^{k_{2n}};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Xx_n &= \alpha_n x_1^{k_{n1}} x_2^{k_{n2}} \ldots x_n^{k_{nn}}.
\end{aligned}$$

При этом задание произвольной последовательности элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из P и целых неотрицательных чисел k_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ очевидным образом определяет некоторый эндоморфизм X.

Указанные эндоморфизмы представляют собой не что иное, как совершенно естественное, непосредственное обобщение так называемых мономиальных подстановок, рассматриваемых в теории групп, где они играют важную роль. Обычные мономиальные групповые подстановки — это такие из указанных эндоморфизмов, у которых $\alpha_i \neq 0$ и все k_{ij} равны нулю, за исключением n показателей $k_{1j_1}, k_{2j_2}, \ldots, k_{nj_n}$ $(j_p \neq j_q$ при $p \neq q)$, равных единице.

(γ). В том же множестве Ω, которое было рассмотрено в (β), определяется соотношение делимости. Элементы u и v связаны этим соотношением, если существует такой $t \in \Omega$, что $u = vt$. Для этого соотношения определяется своя полугруппа эндоморфизмов. Очевидно, всякое преобразование из полугруппы, рассмотренной в (β), принадлежит к этой полугруппе эндоморфизмов, не нарушающих соотношения делимости. Однако эта последняя полугруппа обширнее полугруппы из (β). Она, например, включает преобразование Z

$$Z\left(\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}\right) = \alpha x_1^{s_1+1} x_2^{s_2+1} \ldots x_n^{s_n+1},$$

которое, как легко убедиться, не содержится в полугруппе эндоморфизмов, рассмотренной в (β).

(δ). Пусть $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ есть произвольное подмножество некоторого топологического пространства Ω. Будем говорить, что элементы α, β, ..., составляющие Γ, связаны соотношением, если Γ есть открытое подмножество Ω. Задание такого соотношения равносильно заданию топологии в множестве всех элементов Ω. Эндоморфизмами Ω будут в этом случае преобразования Ω, которые всякое открытое подмножество отображают на открытое же подмножество. Таким образом, в рассматриваемом случае полугруппа эндоморфизмов есть полугруппа открытых отображений пространства Ω в себя.

(ε). Аналогично (δ) можно в Ω рассматривать соотношение, которое связывает элементы α, β, ... в том случае, когда $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ есть замкнутое подмножество Ω. Относительно такого соотношения эндоморфизмами являются замкнутые отображения Ω в себя.

(ζ). Пусть Ω_1 есть поле, являющееся нормальным расширением поля Ω_2. Соотношениями в Ω_1 являются соотношения, определяющие действия сложения и умножения в Ω_1, а также соотношения, фиксирующие каждый из элементов, принадлежащих полю Ω_2. Как известно, все преобразования, сохраняющие указанные соотношения, являются обратимыми взаимно однозначными преобразованиями.

Полугруппа эндоморфизмов в этом случае состоит из обратимых преобразований, так называемых автоморфизмов расширения, и является группой. Связи между свойствами расширения и свойствами группы автоморфизмов хорошо изучены. Они очень глубоки и важны для теории полей. Изучением их занята так называемая теория Галуа, которая тем самым дает великолепный образец для указанного выше направления развития теории полугрупп — изучения полугрупп эндоморфизмов.

3.20. В общем случае определение эндоморфизма, приведенное в 3.18, не было достаточно четким ввиду того, что мы не определили достаточно ясно, что́ в общем случае понимать под соотношением в множестве. Это не помешало нам рассмотреть ряд полугрупп эндоморфизмов, поскольку в каждом конкретном случае мы точно устанавливали, о каких соотношениях в рассматриваемых множествах шла речь.

Остановимся ненадолго на том, чтобы придать понятию эндоморфизма четкий смысл и в общем случае.

Пусть Ω рассматриваемое множество. Зададим множество Σ и будем рассматривать отображения Σ в Ω. Из множества всех таких отображений выделим некоторую совокупность отображений Φ. Она определит собою следующим образом соотношение в Ω. При $\varphi \in \Phi$ будем говорить, что элементы $\varphi(\xi)$, $\varphi(\eta)$, ... множества Ω (где $\Sigma = \{\xi, \eta, \ldots\}$) связаны между собой соотношением, определенным совокупностью Φ.

Если Ω есть множество с совокупностью соотношений, определяемых каждое указанным способом, то эндоморфизмом X будет такое преобразование Ω, при котором отображение $\psi = X\varphi$ (результат последовательного применения сперва отображения φ, затем X) будет принадлежать Φ при любом $\varphi \in \Phi$.

Легко видеть, что приведенные в 3.19 примеры подходят под такое общее определение.

Пусть, например, в множестве Ω задано действие. Берем в качестве Σ множество $\{1, 2, 3\}$. Отображение φ множества Σ в Ω относим к Φ, если для принадлежащих Ω элементов $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$ в Ω имеет место $\varphi(1) \cdot \varphi(2) = \varphi(3)$. Очевидно, так определенное соотношение вполне определяет исходное действие в Ω.

Выделение констант, образующих подмножество Ω' множества Ω, также можно оформить путем введения некоторых соотношений. Для каждого $\lambda \in \Omega'$ соотношение определяется заданием множества Σ, состоящего из одного элемента, причем отображение φ этого $\Sigma = \{\sigma\}$ в Ω относится к Φ только в том случае, когда $\varphi(\sigma) = \lambda$. При включении такого соотношения в число рассматриваемых, эндоморфизм X, очевидно, должен не изменять λ, т. е. $X(\lambda) = \lambda$.

Можно и задание топологии в множестве Ω осуществить заданием некоторого соотношения. Именно берем в качестве Σ множество с мощностью, не меньшей мощности Ω. Отображение Σ в Ω отнесем к классу Φ, если $\varphi(\Sigma)$ есть открытое множество (или замкнутое для примера, рассмотренного в 3.19, (в)). Тем самым преобразованиями, не нарушающими такого соотношения, оказываются открытые отображения топологического пространства в себя.

Легко представить себе и различные другие виды и типы соотношений, получающихся путем конкретизации указанной

общей конструкции. Им также соответствуют и могут быть использованы как орудие исследования соответствующие полугруппы эндоморфизмов.

§ 4. Частичные преобразования

4.1. В некоторых разделах математики встречается необходимость обобщения понятия преобразования.

Пусть Π_1 и Π_2 есть два подмножества множества Ω. Отображение S первого из них Π_1 на второе Π_2 называется *частичным преобразованием множества* Ω.

Как и для преобразований, для частичных преобразований употребляется операторная запись.

$$S\alpha = \beta$$

означает, что $\alpha \in \Pi_1$ и при частичном отображении S элемент α отображается на $\beta \in \Pi_2$. Среди частичных преобразований рассматривается и пустое, для которого Π_1 и Π_2 пусты. Множества Π_1 и Π_2 иногда называются соответственно первой и второй проекцией S (термины естественные при записи частичного отображения в виде бинарного отношения в Ω). Мы обычно будем их обозначать с указанием частичного преобразования S, именно: $\Pi_1^{(S)}$ и $\Pi_2^{(S)}$. Отмечаем, что для задания частичного преобразования S, очевидно, достаточно указать $\Pi_1^{(S)}$ и правило, сопоставляющее каждому $\alpha \in \Pi_1^{(S)}$ соответствующий элемент $S\alpha \in \Omega$. Множество $\Pi_2^{(S)}$ тем самым вполне определяется.

Обычное (как иногда говорят — полное) преобразование S есть частный случай частичного преобразования, когда $\Pi_1^{(S)} = \Omega$.

4.2. В множестве $\mathfrak{P}_\Omega$ всех частичных преобразований множества Ω определяется действие умножения при помощи последовательного применения частичных преобразований. Именно произведением частичных преобразований $X, Y \in \mathfrak{P}_\Omega$ считаем такое частичное преобразование $Z = XY \in \mathfrak{P}_\Omega$, у которого $\Pi_1^{(Z)}$ состоит из всех тех элементов $\alpha \in \Omega$, которые содержатся в $\Pi_1^{(Y)}$, причем $Y\alpha \in \Pi_1^{(X)}$ (если таких α в Ω нет, то Z есть пустое частичное преобразование). Для каждого $\alpha \in \Pi_1^{(Z)}$ полагаем $Z\alpha = X(Y\alpha)$.

Без труда доказывается ассоциативность умножения частичных преобразований. Каждое из тройных произведений

$$(XY)Z, \quad X(YZ)$$

имеет в качестве Π_1 множество таких элементов $\alpha \in \Omega$, которые содержатся в $\Pi_1^{(Z)}$, причем $Z\alpha \in \Pi_1^{(Y)}$ и $Y(Z\alpha) \in \Pi_1^{(X)}$.

Для таких α имеет место

$$(XY)Z\alpha = X(Y(Z\alpha)),$$

$$X(YZ)\alpha = X(Y(Z\alpha)).$$

Таким образом, множество всех частичных преобразований $\mathfrak{P}_\Omega$ оказывается полугруппой.

4.3. При более глубоком изучении частичных преобразований существенным оказывается следующее отношение между частичными преобразованиями. Для X, $Y \in \mathfrak{P}_\Omega$ пишут $X \leqslant Y$, если $\Pi_1^{(X)} \subset \Pi_1^{(Y)}$ и $X\alpha = Y\alpha$ для всякого $\alpha \in \Pi_1^{(X)}$. В этом случае можно сказать, что Y является продолжением частичного преобразования X. В частности, существенную роль играют частично тождественные преобразования, для которых тождественное преобразование является продолжением. Очевидно, каждое частично тождественное частичное преобразование вполне характеризуется множеством Π_1, которое, кстати, совпадает с Π_2.

4.4. Как и в теории преобразований, в теории частичных преобразований приходится рассматривать не только полугруппу всех частичных преобразований $\mathfrak{P}_\Omega$, но и различные ее подмножества, замкнутые относительно умножения, которые и сами, очевидно, являются полугруппами.

Пусть, например, Ω есть множество всех вещественных чисел. Частичные преобразования Ω есть не что иное, как вещественные функции одного переменного. $\Pi_1^{(X)}$ для такого частичного преобразования $X = f(x)$ есть то, что обычно называется областью задания вещественной функции $f(x)$, а $\Pi_2^{(X)}$ — множество ее значений. Произведением двух таких частичных преобразований $X_1 = f_1(x)$ и $X_2 = f_2(x)$ является сложная функция

$$\varphi(x) = f_1[f_2(x)].$$

В теории функций действие умножения таких частичных преобразований называется суперпозицией соответствующих функций.

Множество $\mathfrak{P}_2$, состоящее из всех вещественных функций (включая и „несобственную функцию" с пустыми множествами Π_1 и Π_2), относительно указанного действия образует полугруппу. Ее подмножество, состоящее из всех непрерывных функций, как легко видеть, замкнуто относительно рассматриваемого действия и потому также является полугруппой. Будет полугруппой и подмножество, состоящее из всех функций, области задания которых содержатся в заданном промежутке E вещественной оси. Периодические вещественные функции также будут образовывать полугруппу относительно того же действия.

4.5. Как в общей теории частичных преобразований, так и при рассмотрении частичных преобразований какого-либо конкретного множества Ω особо важную роль играют взаимно однозначные частичные преобразования, которые осуществляют взаимно однозначное отображение Π_1 на Π_2. Совокупность их обозначим через $\mathfrak{Q}_2$. Очевидно, $\mathfrak{Q}_2$ является полугруппой. Упомянутые выше частично тождественные частичные преобразования принадлежат полугруппе $\mathfrak{Q}_2$.

Каждому взаимно однозначному частичному преобразованию X соответствует обратное взаимно однозначное частичное преобразование $\bar{X}$ (часто его обозначают через X^{-1}), у которого $\Pi_1^{(\bar{X})} = \Pi_2^{(X)}$ и $\Pi_2^{(\bar{X})} = \Pi_1^{(X)}$, причем для всяких $\alpha \in \Pi_1^{(X)}$ и $\beta \in \Pi_2^{(X)}$, таких, что $X\alpha = \beta$, имеет место

$$\bar{X}\beta = \alpha.$$

$\bar{X}X$ есть частично тождественное частичное преобразование, соответствующее множеству $\Pi_1^{(X)}$, а $X\bar{X}$ есть частично тождественное преобразование, соответствующее множеству $\Pi_2^{(X)}$. Легко видеть, что в полугруппе $\mathfrak{Q}_2$ отображение, сопоставляющее каждому $X \in \mathfrak{Q}_2$ элемент $\bar{X}$, является антиавтоморфизмом (1.17).

4.6. В. В. Вагнер [3] выяснил, когда совокупность взаимно однозначных частичных преобразований образует группу. Конечно, для этого она в первую очередь должна быть замкнута относительно умножения, т. е. должна являться полугруппой,

Теорема. *Полугруппа некоторых взаимно однозначных частичных преобразований $\mathfrak{A}$ множества Ω будет группой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ вместе с каждым частичным преобразованием содержит и обратное ему и когда в Ω существует такое подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$, что*

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Omega_0$$

для всех частичных преобразований из $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть группа.

Для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ должны найтись такие X, $Y \in \mathfrak{A}$, что

$$XA = B, \quad AY = B.$$

Из способа определения Π_1 и Π_2 для произведения видно, что для соблюдения этих равенств необходимо

$$\Pi_1^{(A)} \supset \Pi_1^{(B)}, \quad \Pi_2^{(A)} \supset \Pi_2^{(B)}.$$

Но аналогично должны выполняться и обратные включения. Таким образом, множества Π_1 для любых A и B должны быть одинаковы и множества Π_2 для любых A и B должны быть одинаковы.

Для $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должно найтись такое частичное преобразование I, что

$$A = AI.$$

Из этого равенства следует, что для каждого $\alpha \in \Pi_1$ имеет место

$$A\alpha = A(I\alpha).$$

Так как A взаимно однозначно, то это возможно лишь при $\alpha = I\alpha$. Следовательно, I есть частично тождественное частичное преобразование. Но у такового $\Pi_1 = \Pi_2$. Следовательно, у всех частичных преобразований из $\mathfrak{A}$ множества Π_1 и Π_2 для всех элементов все равны между собой.

Для $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ существует частичное преобразование A' такое, что

$$A'A = I.$$

Так как I частично тождественно, то, принимая во внимание равенство всех Π_1 и Π_2, заключаем отсюда, что A', принадлежащее $\mathfrak{A}$, должно быть обратным к A взаимно однозначным частичным преобразованием.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ обладает указанными в формулировке теоремы свойствами.

Так как $\Pi_1^{(A)} = \Pi_2^{(A)}$, то для обратного частичного преобразования $\bar{A}$ к частичному преобразованию A мы, очевидно, имеем

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,$$

где I есть частично тождественное частичное преобразование, соответствующее множеству Ω_0. Так как, очевидно,

$$IB = BI = B$$

для произвольного $B \in \mathfrak{A}$, то для $X = B\bar{A}$ и $Y = \bar{A}B$ имеем

$$XA = (B\bar{A})\,A = B\,(\bar{A}A) = BI = B,$$

$$AY = A\,(\bar{A}B) = (A\bar{A})\,B = IB = B.$$

4.7. Изучение полугрупп частичных преобразований может быть сведено к изучению преобразований. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа некоторых частичных преобразований множества Ω. Рассмотрим новое множество Ω', получаемое от присоединения к Ω нового элемента Θ. Каждому частичному преобразованию A из $\mathfrak{A}$ сопоставим преобразование A' множества Ω' такое, что

$$A'\alpha = A\alpha$$

для всех $\alpha \in \Pi_1^{(A)}$ и

$$A'\beta = \Theta$$

для всякого элемента $\beta \in \Omega' \setminus \Pi_1^{(A)}$. Если $A \neq B$ $(A, B \in \mathfrak{A})$, то, очевидно, $A' \neq B'$. Также очевидно, что для любых $A, B \in \mathfrak{A}$

$$(AB)' = A'B'.$$

Отсюда следует, что совокупность $\mathfrak{A}'$, состоящая из всевозможных преобразований A' $(A \in \mathfrak{A})$ множества Ω', образует полугруппу, изоморфную полугруппе $\mathfrak{A}$. При этом соответствие $A \sim A'$ $(A \in \mathfrak{A},\ A' \in \mathfrak{A}')$ не только определяет изоморфизм, но и устанавливает очевидную параллель между свойствами элементов $\mathfrak{A}$, рассматриваемых как частичные преобразования Ω, и соответствующими свойствами элементов $\mathfrak{A}'$, являющихся преобразованиями множества Ω'.

Впрочем, следует иметь в виду, что описанное сведение изучения полугрупп частичных преобразований к полугруппам преобразований целесообразно далеко не всегда. В частности, при рассмотрении взаимно однозначных частичных преобразований оно обычно неудобно, так как соответствующие преобразования нового множества Ω' могут уже не оказаться взаимно однозначными.

4.8. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа некоторых частичных преобразований множества Ω. С точки зрения действия элементов $\mathfrak{A}$ на элементы из Ω последнее множество может иногда оказаться излишне обширным. Поэтому часто целесообразно бывает устроить некоторое приведение множества Ω. Обозначим через Ω' объединение всех $\Pi_2^{(A)}$ $(A \in \mathfrak{A})$. Далее обозначим $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$. Для $\alpha \in \Omega''$ обозначим через Γ_α множество всех таких элементов $\beta \in \Omega''$, что $A\alpha = A\beta$ (в частности, $A\alpha$ и $A\beta$ оба одновременно могут быть и пустыми символами при $\alpha, \beta \notin \Pi_1^{(A)}$). Очевидно, из $\Gamma_\alpha \ni \beta$ следует $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$. Таким образом, Ω'' разбивается на непересекающееся объединение множеств Γ_α. В каждом из них фиксируем некоторый элемент. Объединение множества этих фиксированных элементов и Ω' обозначим через $\tilde{\Omega}$. Каждому $A \in \mathfrak{A}$ естественно сопоставляется частичное преобразование $\tilde{A}$ множества $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A})} = \Pi_1^{(A)} \cap \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Pi}_2^{(\tilde{A})} = \Pi_2^{(A)},$$

$$\tilde{A}\alpha = A\alpha \qquad (\alpha \in \tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A})})$$

(волнистая черта над Π_1 и Π_2 означает, что речь идет о частичных преобразованиях множества $\tilde{\Omega}$).

Пусть $A_1 \neq A_2$ $(A_1, A_2 \in \mathfrak{A})$. Если при этом $\Pi_1^{(A_1)} \not\subseteq \Pi_1^{(A_2)}$ (вполне аналогичен случай $\Pi_1^{(A_2)} \not\subseteq \Pi_1^{(A_1)}$), то при некотором $\xi \in \Pi_1^{(A_1)}$ имеем $\xi \notin \Pi_1^{(A_2)}$. Если $\xi \in \Omega'$, то $\xi \in \tilde{\Omega}$ и потому $\xi \in \tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A}_1)}$, но $\xi \notin \tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A}_2)}$. Если же $\xi \in \Omega''$, то берем выделенный из Γ_ξ элемент ξ_0, принадлежащий $\tilde{\Omega}$. Этот элемент ξ_0 принадлежит $\tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A}_1)}$, но не принадлежит $\tilde{\Pi}_1^{(\tilde{A}_2)}$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$.

Если $\Pi_1^{(A_1)} = \Pi_1^{(A_2)}$, то благодаря $A_1 \neq A_2$ должен найтись такой $\xi \in \Pi_1^{(A_1)}$, что $A_1\xi \neq A_2\xi$. Так как $A_1\xi$, $A_2\xi \in \mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{Q}$, то

$$\tilde{A}_1\xi = A_1\xi \neq A_2\xi = \tilde{A}_2\xi,$$

т. е. опять $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$.

Таким образом, сопоставление частичных преобразований $\tilde{A}$ частичным преобразованиям A является взаимно однозначным. При этом имеет место $\widetilde{A_1A_2} = \tilde{A}_1\tilde{A}_2$. Следовательно, полугруппа $\mathfrak{A}$ изоморфна полугруппе $\tilde{\mathfrak{A}}$, состоящей из частичных преобразований $\tilde{A}$ множества $\tilde{\mathfrak{Q}}$. Это соответствие является даже больше чем изоморфизмом, так как все свойства частичных преобразований из $\mathfrak{A}$ очевидным образом могут быть непосредственно выведены из соответствующих свойств частичных преобразований из $\tilde{\mathfrak{A}}$. В некотором смысле можно говорить, что $\tilde{\mathfrak{A}}$ есть полугруппа тех же самых частичных преобразований A из $\mathfrak{A}$, но только с сокращенной — «приведенной» областью их применения. В некоторых случаях приведенное множество $\tilde{\mathfrak{Q}}$ может оказаться существенно менее обширным по сравнению с $\mathfrak{Q}$ и переход к рассуждениям относительно $\tilde{\mathfrak{Q}}$ может представить известные удобства.

Повторное нетривиальное приведение $\tilde{\mathfrak{Q}}$ уже невозможно. В этом смысле $\tilde{\mathfrak{Q}}$ неприводимо. Действительно, очевидно, что каждый класс $\tilde{\Gamma}_\alpha$ для $\tilde{\mathfrak{Q}}$ (относительно $\tilde{\mathfrak{A}}$) состоит лишь из одного элемента. Таким образом, $\widetilde{(\tilde{\mathfrak{Q}})} = \tilde{\mathfrak{Q}}$.

4.9. Аналогично тому, как это имеет место в теории преобразований, теория частичных преобразований может оказать определенную пользу при исследовании свойств тех или иных соотношений в некотором множестве $\mathfrak{Q}$, если рассматривать такие частичные преобразования, которые сохраняют указанные соотношения в $\mathfrak{Q}$. Их можно назвать частичными эндоморфизмами множества $\mathfrak{Q}$ с данной системой соотношений. Они образуют полугруппу. Эта полугруппа частичных эндоморфизмов, очевидно, включает и все эндоморфизмы (3.18).

При изучении частичных эндоморфизмов следует иметь в виду, что некоторые из них могут быть продолжаемы до

эндоморфизмов. Другими словами, они могут быть получены из некоторых эндоморфизмов путем сокращения области их определения Ω до некоторой части всего множества Ω. Пример исследования с таким направлением дает работа Б. Неймана и Х. Нейман[1].

Изучение частичных преобразований и в особенности взаимно однозначных частичных преобразований, как показал В. В. Вагнер, весьма полезно в некоторых геометрических исследованиях.

§ 5. Отношения

5.1. В дальнейших исследованиях различных свойств полугрупп нам часто будет удобно использовать понятие и некоторые простейшие свойства отношений в полугруппах. *Отношением в множестве* $\mathfrak{M}$ мы будем называть всякое бинарное отношение в $\mathfrak{M}$, т. е. закон, который выделяет некоторые пары элементов из $\mathfrak{M}$ (пара (X, Y) задается двумя элементами X и Y, ее составляющими, и указанием, какой из них считается первой компонентой пары и какой второй компонентой). Конечно, можно понимать под отношением просто само множество выделенных пар элементов из $\mathfrak{M}$. То, что пара (X, Y) $(X, Y \in \mathfrak{M})$ входит в число выделенных пар относительно отношения $\mathfrak{n}$, т. е. элементы X и Y *находятся в отношении* $\mathfrak{n}$, мы будем обозначать обычно в виде $X \sim Y(\mathfrak{n})$. Если элементы X и Y не находятся в отношении $\mathfrak{n}$ (т. е. пара (X, Y) не входит в число выделенных пар), то мы будем писать $X \not\sim Y(\mathfrak{n})$.

Для обозначения того, что элементы X и Y находятся между собой в отношении $\mathfrak{n}$, употребляются также следующие формы записи:

$$X \underset{\mathfrak{n}}{\sim} Y, \quad X \mathfrak{n} Y, \quad X \equiv Y(\mathfrak{n}), \quad X \equiv Y (\mathrm{mod}\, \mathfrak{n}), \quad (X, Y) \in \mathfrak{n}.$$

Если данному отношению в пределах определенного рассуждения присваивается какой-нибудь специальный знак, например, „$\leqslant$“, то для элементов, находящихся в данном отношении, употребляются также обозначения вида $X \leqslant Y$. Мы будем иногда использовать такое обозначение.

---

[1] B. Neumann a. H. Neumann. Extending partial endomorphisms of groups, Proc. London Math. Soc. (3), 2 (1952), 337—348.

Рассматривают также отношения между элементами, принадлежащими различным множествам, однако мы, как условились, будем говорить об отношении только в пределах одного какого-нибудь множества.

Наравне с бинарными отношениями рассматриваются тернарные и вообще n-арные отношения ($n = 1, 2, \ldots$). Однако мы в дальнейшем под отношением будем понимать лишь бинарные отношения.

5.2. Пусть Φ есть совокупность всевозможных отношений в множестве $\mathfrak{M}$ (т. е. совокупность всех подмножеств множества всех пар элементов из $\mathfrak{M}$). В число отношений, принадлежащих Φ, мы включим также и „пустое отношение", относительно которого никакие два элемента из $\mathfrak{M}$ не находятся в данном отношении. Для отношений из Φ естественно определяется действие умножения. Именно для $\mathfrak{f}, \mathfrak{l} \in \Phi$ их произведением $\mathfrak{m} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{l}$ считаем такое отношение $\mathfrak{m}$, согласно которому $X \sim Y(\mathfrak{m})$ ($X, Y \in \mathfrak{M}$) имеет место тогда и только тогда, когда найдется такой $Z \in \mathfrak{M}$, что $X \sim Z(\mathfrak{f})$ и $Z \sim Y(\mathfrak{l})$ (конечно, иногда $\mathfrak{m}$ может оказаться и пустым отношением, но во всяком случае оно всегда вполне определено для данных $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$).

Указанное умножение ассоциативно. Действительно, пусть $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3 \in \Phi$ и

$$(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2)\,\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{m}', \quad \mathfrak{f}_1\,(\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3) = \mathfrak{m}''.$$

$X \sim Y(\mathfrak{m}')$, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда существуют $Z', Z'' \in \mathfrak{M}$ такие, что

$$X \sim Z'(\mathfrak{f}_1), \quad Z' \sim Z''(\mathfrak{f}_2), \quad Z'' \sim Y(\mathfrak{f}_3).$$

Но существование таких Z' и Z'', очевидно, необходимо и достаточно и для $X \sim Y(\mathfrak{m}'')$. Следовательно, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$.

Таким образом, *совокупность всех отношений в некотором множестве оказывается полугруппой.*

5.3. В дальнейшем у нас не будет необходимости изучать в общем виде свойства действия умножения отношений (с этими свойствами, так же как и вообще с основами теории бинарных отношений, можно познакомиться в книгах Бурбаки[1] и Дюбрейля [3]). Остановимся только на вопросе о перестановочности двух каких-либо отношений из Φ относительно

[1] N. Bourbaki. Theorie des ensembles, Paris, 1939.

действия умножения. То, что $X \sim Y(\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2)$ означает существование такого $U \in \mathfrak{M}$, что $X \sim U(\mathfrak{n}_1)$, $U \sim Y(\mathfrak{n}_2)$. То, что $X \sim Y(\mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_1)$ означает существование такого $V \in \mathfrak{M}$, что $X \sim V(\mathfrak{n}_2)$, $V \sim Y(\mathfrak{n}_1)$. Таким образом, условие

$$\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_1$$

означает, что из

$$X \sim U(\mathfrak{n}_1), \quad U \sim Y(\mathfrak{n}_2) \qquad (X, Y, U \in \mathfrak{M})$$

должно следовать существование $V \in \mathfrak{M}$ такого, что

$$X \sim V(\mathfrak{n}_2), \quad V \sim Y(\mathfrak{n}_1).$$

Обратно из последних соотношений должно следовать существование U, удовлетворяющего указанному выше условию.

Свойства, связанные с перестановочностью отношений, рассматривались не раз различными авторами. Например, им уделено значительное внимание в книге Дюбрейля [3]. На значение условия перестановочности отношений было впервые обращено внимание Дюбрейлем и Дюбрейль-Жакотэн [1].

5.4. Понятие отношения в множестве является обобщением понятия преобразования. Именно, преобразование можно определить как такое отношение $\mathfrak{n}$ в множестве $\mathfrak{M}$, которое должно удовлетворять следующему условию. Для каждого $Y \in \mathfrak{M}$ должен найтись и при том единственный $X \in \mathfrak{M}$ такой, что $X \sim Y(\mathfrak{n})$. В этом случае X можно считать результатом применения данного преобразования к элементу Y. Очевидно, описанное выше умножение отношений для случая преобразований дает определенное нами ранее (3.6) умножение преобразований.

Из сказанного, в частности, следует, что всякая полугруппа, будучи изоморфно представима преобразованиями, тем самым представима изоморфно и отношениями.

5.5. Отношение обобщает также и понятие частичного преобразования (4.1). Именно, частичным преобразованием множества $\mathfrak{M}$ можно считать такое отношение $\mathfrak{n}$, которое удовлетворяет условию: из $X \sim Y(\mathfrak{n})$ и $X' \sim Y(\mathfrak{n})$ должно следовать $X = X'$. Множество тех $Y \in \mathfrak{M}$, для которых найдется $X \in \mathfrak{M}$ такой, что $X \sim Y(\mathfrak{n})$, будет составлять Π_1.

---

[1] P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin. Théorie algébrique des relations d'equivalence. J. Math. Pures Appl., 18 (1939), 63—95.

Множество таких $X \in \mathfrak{M}$ для всевозможных $Y \in \Pi_1$ будет составлять Π_2. Элемент X при $X \sim Y(\mathfrak{n})$ является результатом применения данного частичного преобразования к элементу Y из Π_1.

Умножение частичных преобразований, очевидно, является частным случаем умножения отношений.

Играющие особую роль взаимно однозначные частичные преобразования могут быть охарактеризованы как такие отношения, которые удовлетворяют следующему условию. Если $X \sim Y(\mathfrak{n})$ и $X' \sim Y'(\mathfrak{n})$, то из $X = X'$ следует $Y = Y'$, а из $Y = Y'$ следует $X = X'$.

5.6. При рассмотрении отношений бывает весьма существенно, обладают ли они некоторыми важнейшими свойствами.

Определение. *Пусть* $\mathfrak{n}$ *есть некоторое отношение в множестве* $\mathfrak{M}$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется рефлексивным, если для всякого* $X \in \mathfrak{M}$ *имеет место* $X \sim X(\mathfrak{n})$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется транзитивным, если из* $X \sim Y(\mathfrak{n})$ и $Y \sim Z(\mathfrak{n})$ *всегда следует* $X \sim Z(\mathfrak{n})$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется симметричным, если из* $X \sim Y(\mathfrak{n})$ *всегда следует* $Y \sim X(\mathfrak{n})$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется антисимметричным, если из* $X \sim Y(\mathfrak{n})$ *и* $Y \sim X(\mathfrak{n})$ *всегда следует* $X = Y$.

5.7. Среди различных видов отношений наиболее важны для нас два класса отношений. Первый из них состоит из эквивалентностей.

Определение. *Отношение* $\mathfrak{n}$ *в множестве* $\mathfrak{M}$ *называется отношением эквивалентности в* $\mathfrak{M}$ *или просто эквивалентностью, если* $\mathfrak{n}$ *рефлексивно, транзитивно и симметрично.*

5.8. Представление множества $\mathfrak{M}$ в виде непересекающегося объединения некоторых непустых его подмножеств

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{M}_\xi$$

называется *разбиением множества* $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{n}$ есть некоторая эквивалентность в множестве $\mathfrak{M}$. Совокупность всех элементов, эквивалентных относительно $\mathfrak{n}$ с некоторым элементом $X \in \mathfrak{M}$ (т. е. находящихся в отношении $\mathfrak{n}$ с X), мы будем называть классом эквивалентных

относительно $\mathfrak{n}$ элементов или, короче, просто $\mathfrak{n}$-*классом*. Все элементы одного $\mathfrak{n}$-класса эквивалентны относительно $\mathfrak{n}$ между собой и ни один из них неэквивалентен относительно $\mathfrak{n}$ ни с каким из элементов, лежащих вне этого класса. Таким образом, эквивалентности $\mathfrak{n}$ в множестве $\mathfrak{M}$ соответствует разбиение $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{n}$-классы.

Очевидно и обратное. Если дано некоторое разбиение $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{M}_{\xi},$$

то можно определить в $\mathfrak{M}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$ в том и только в том случае, когда элементы X и Y оба принадлежат одной и той же компоненте $\mathfrak{M}_{\xi}$ заданного разбиения. Очевидно, такое отношение будет рефлексивно, транзитивно и симметрично, т. е. является эквивалентностью.

Этой эквивалентности соответствует исходное разбиение $\mathfrak{M}$, поскольку компоненты $\mathfrak{M}_{\xi}$ исходного разбиения будут $\mathfrak{n}$-классами этой эквивалентности.

Таким образом, *задание эквивалентности в* $\mathfrak{M}$ *по существу равносильно заданию соответствующего разбиения* $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем мы не будем делать различия между обеими точками зрения.

5.9. Вторым важным видом отношений являются частичные упорядочения.

Определение. *Отношение* $\mathfrak{n}$ *в множестве* $\mathfrak{M}$ *называется отношением частичной упорядоченности, если* $\mathfrak{n}$ *рефлексивно, транзитивно и антисимметрично* (5.6).

Множество, рассматриваемое относительно некоторого определенного в нем отношения частичной упорядоченности, называется частично упорядоченным множеством.

Для отношения частичной упорядоченности обычно употребляется знак неравенства. Для $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ отношение частичной упорядоченности, пишут $X \leqslant Y$ (равнозначным считается обозначение $Y \geqslant X$).

Мы также обычно будем употреблять этот знак. При этом мы будем говорить, что X *предшествует* Y, а Y *следует за* X относительно данной частичной упорядоченности $\mathfrak{n}$. В частности, каждый элемент из $\mathfrak{M}$ сам предшествует себе и сам следует за собой. Употребление знака неравенства

удобно ввиду естественных ассоциаций с неравенством вещественных чисел (очевидно, отношение вещественных чисел относительно сравнения их по величине является частичной упорядоченностью).

5.10. Если относительно частичной упорядоченности $\mathfrak{n}$ в множестве $\mathfrak{M}$, для X, $Y \in \mathfrak{M}$ имеет место $X \leqslant Y$, причем $X \neq Y$, то пишут также $X < Y$ и $Y > X$. Исходя из отношения $\mathfrak{n}$, можно определить отношение $\mathfrak{m}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{m})$, если $X \sim Y(\mathfrak{n})$ и $X \neq Y$ (т. е. $X < Y$). Отношение $\mathfrak{m}$, очевидно, обладает свойством транзитивности и усиленным свойством антисимметричности, заключающемся в том, что $X \sim Y(\mathfrak{m})$ и $Y \sim X(\mathfrak{m})$ не могут одновременно выполняться ни для каких X, $Y \in \mathfrak{M}$. Отношение $\mathfrak{m}$ с такими свойствами в свою очередь определяет единственным образом отношение частичной упорядоченности в смысле 5.9.

5.11. Если отношение частичной упорядоченности $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{M}$ таково, что для любых X, $Y \in \mathfrak{M}$ обязательно имеет место или $X \sim Y(\mathfrak{n})$, или $Y \sim X(\mathfrak{n})$, то $\mathfrak{n}$ называется отношением *линейной упорядоченности* (иногда говорят просто „упорядоченность“ без добавления слова „линейная“).

5.12. Пусть относительно заданного отношения частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{M}$ для некоторых $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ и $X \in \mathfrak{M}$ имеет место $Z \leqslant X$ при всех $Z \in \mathfrak{M}'$. Тогда X называется *верхней границей для* $\mathfrak{M}'$. Соответственно определяется *нижняя граница*. Если X есть верхняя граница для $\mathfrak{M}'$, причем в множестве $\mathfrak{L}$, состоящем из всех верхних границ для $\mathfrak{M}'$, X является нижней границей множества $\mathfrak{L}$, то X называется *точной верхней границей множества* $\mathfrak{M}'$. Аналогично определяется *точная нижняя граница* $\mathfrak{M}'$.

Конечно, множество $\mathfrak{M}'$ может вовсе не иметь верхних границ или иметь их несколько. Точную верхнюю границу $\mathfrak{M}'$ может иметь не более чем одну. Аналогично обстоит дело с нижними границами.

5.13. Весьма важны следующие классы частично упорядоченных множеств.

Определение. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть частично упорядоченное множество.*

$\mathfrak{M}$ называется полуструктурой (употребляют также термины: полурешетка — demi-treillis, семилаттис — semilattice, полусвязка — Halbverband), если для любой пары элементов существует точная нижняя граница.

$\mathfrak{M}$ *называется структурой (решеткой, латтисом, связкой), если для любой пары элементов существует точная верхняя граница и точная нижняя граница.*

$\mathfrak{M}$ *называется полной структурой, если для любого его подмножества существует точная верхняя граница и точная нижняя граница.*

Теория структур в настоящее время представляет собой широко развитую важную область современной алгебры (см., например, Биркгоф [3]).

5.14. Для самих отношений в произвольном множестве $\mathfrak{M}$ естественным образом определяется отношение частичной упорядоченности. Именно, полагают

$$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m},$$

если из $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ всегда следует $X \sim Y\,(\mathfrak{m})$.

Отношение в множестве задается множеством пар элементов, находящихся между собой в данном отношении; $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ означает, что такое множество пар, соответствующее отношению $\mathfrak{n}$, является подмножеством множества пар, соответствующего отношению $\mathfrak{m}$.

Вполне очевидно, что определенное указанным образом отношение между отношениями в $\mathfrak{M}$ действительно является отношением частичной упорядоченности.

Обозначим через Φ совокупность всех эквивалентностей в некотором множестве $\mathfrak{M}$. Смысл определенной выше частичной упорядоченности применительно к эквивалентностям делается особенно ясным, если характеризовать эквивалентности при помощи соответствующих им разбиений $\mathfrak{M}$ (5.8). Действительно, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \in \Phi)$ означает, что разбиение $\mathfrak{n}$ является более дробным разбиением по сравнению с разбиением $\mathfrak{m}$, как говорят, его подразбиением. Каждый $\mathfrak{m}$-класс в этом случае является непересекающимся объединением некоторых $\mathfrak{n}$-классов.

5.15. Пусть Φ' есть некоторое непустое подмножество Φ, т. е. некоторая непустая совокупность эквивалентностей в множестве $\mathfrak{M}$. Определим отношение $\mathfrak{t}$, полагая

$$X \sim Y\,(\mathfrak{t}) \qquad (X, Y \in \mathfrak{M}),$$

если для каждого $\mathfrak{n} \in \Phi'$ имеет место $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$. Легко видеть, что отношение $\mathfrak{t}$ является эквивалентностью.

Согласно частичной упорядоченности, введенной в 5.14 $\mathfrak{f}$ является нижней границей для Φ'. Пусть $\mathfrak{m}$ произвольная нижняя граница Φ'. Если $X \sim Y(\mathfrak{m})$ $(X, Y \in \mathfrak{m})$, то для произвольного $\mathfrak{n} \in \Phi'$ благодаря $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ должно выполняться $X \sim Y(\mathfrak{n})$. Поскольку $X \sim Y(\mathfrak{n})$ выполнено для всех $\mathfrak{n} \in \Phi'$, то по определению $\mathfrak{f}$ $X \sim Y(\mathfrak{f})$. Таким образом, из $X \sim Y(\mathfrak{m})$ всегда следует $X \sim Y(\mathfrak{f})$, т. е. $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{f}$. Это означает, что $\mathfrak{f}$ *является точной нижней границей для множества эквивалентностей* Φ' (5.12). Отношение $\mathfrak{f}$ можно было бы назвать пересечением эквивалентностей из Φ'. Разбиение $\mathfrak{M}$, вызываемое $\mathfrak{f}$, представляет собой совместный результат всех разбиений, вызываемых эквивалентностями из Φ'.

5.16. Теперь для $\Phi' \subset \Phi$ определим отношение $\mathfrak{l}$, полагая

$$X \sim Y(\mathfrak{l}) \qquad (X, Y \in \mathfrak{M}),$$

если найдутся такие эквивалентности $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s \in \Phi'$ и такие элементы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{s+1} \in \mathfrak{M}$, что

$$Z_i \sim Z_{i+1}(\mathfrak{m}_i),$$
$$X = Z_1, \quad Y = Z_{s+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Легко видеть, что отношение $\mathfrak{l}$ является эквивалентностью.

Если для некоторых $X, Y \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{n} \in \Phi'$ имеет место $X \sim Y(\mathfrak{n})$, то по определению $\mathfrak{l}$ $X \sim Y(\mathfrak{l})$. Отсюда следует, что $\mathfrak{l}$ является верхней границей для множества эквивалентностей Φ'. Пусть эквивалентность $\mathfrak{m}$ является верхней границей для Φ'. Пусть для $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{s+1} \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s \in \Phi'$ имеет место

$$Z_i \sim Z_{i+1}(\mathfrak{m}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Так как $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_i$, то отсюда следует

$$Z_i \sim Z_{i+1}(\mathfrak{m})$$

и потому $Z_1 \sim Z_{s+1}(\mathfrak{m})$. Мы показали, что из $Z_1 \sim Z_{s+1}(\mathfrak{l})$ всегда следует $Z_1 \sim Z_{s+1}(\mathfrak{m})$. Это означает, что $\mathfrak{l} \leqslant \mathfrak{m}$. Таким образом, $\mathfrak{l}$ оказывается *точной верхней границей для множества эквивалентностей* Φ'.

Из проведенных рассуждений следует, что *совокупность всех эквивалентностей в некотором множестве является полной структурой* (*5.13*).

5.17. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа. Среди различных отношений в множестве всех элементов полугруппы

особый интерес с точки зрения теории полугрупп представляют те отношения, которые, как говорят, согласованы с действием в $\mathfrak{A}$, т. е. не нарушаются при умножении на любой элемент полугруппы.

Определение. *Отношение* $\mathfrak{n}$ *в полугруппе* $\mathfrak{A}$ *называется стабильным слева, если из* $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ *при любом* $Z \in \mathfrak{A}$ *всегда следует* $ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n})$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется стабильным справа, если из* $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ *всегда следует* $XZ \sim YZ\,(\mathfrak{n})$.

Отношение $\mathfrak{n}$ *называется двусторонне стабильным* (иногда говорят просто стабильным), *если оно одновременно стабильно и слева и справа.*

5.18. Во многих работах исследуются различные свойства стабильности. Например, в книге Дюбрейля [3] приведен ряд свойств стабильности, называемой там регулярностью. Особое внимание уделяется обычно двусторонне стабильным эквивалентностям, которые часто называются отношениями конгруентности или конгруэнциями. Мы обратимся к их рассмотрению в седьмой главе. В настоящий момент мы ограничимся лишь одним свойством.

Пусть $\mathfrak{n}$ есть транзитивное и рефлексивное отношение в полугруппе. Для того чтобы $\mathfrak{n}$ было двусторонне стабильным, необходимо и достаточно, чтобы из

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}), \quad X' \sim Y'\,(\mathfrak{n})$$

всегда следовало

$$XX' \sim YY'\,(\mathfrak{n}).$$

Действительно, если $\mathfrak{n}$ двусторонне стабильно, то из $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ и $X' \sim Y'\,(\mathfrak{n})$ следует

$$XX' \sim YX'\,(\mathfrak{n}), \quad YX' \sim YY'\,(\mathfrak{n}).$$

Отсюда благодаря транзитивности следует $XX' \sim YY'\,(\mathfrak{n})$.

С другой стороны, если $\mathfrak{n}$ обладает указанным свойством, то из $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ и $Z \sim Z\,(\mathfrak{n})$ следует $ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n})$ и $XZ \sim YZ\,(\mathfrak{n})$.

5.19. Рассмотрим несколько примеров отношений в множестве элементов полугруппы.

(α). Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа.

В дальнейшем большую роль будет играть отношение делимости слева $\mathfrak{n}_l$, которое определяется следующим образом.

$$A \sim B\,(\mathfrak{n}_l) \quad (A, B \in \mathfrak{A})$$

имеет место тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент Z, что $A = BZ$.

Сразу видно, что отношение n_l является стабильным слева.

(β). Аналогично в $\mathfrak{A}$ определяется отношение делимости справа n_r, которое оказывается стабильным справа.

(γ). Согласно 5.2, в полугруппе $\mathfrak{A}$ определяется отношение $n_l \cdot n_r$, являющееся произведением отношений левой и правой делимости.

То, что $A \sim B\,(n_l \cdot n_r)$ означает, что существуют такие X, Y, $C \in \mathfrak{A}$, что

$$A \sim C\,(n_l), \quad C \sim B\,(n_r),$$
$$A = CY, \qquad C = XB.$$

Отсюда следует $A = XBY$. Но легко убедиться и в обратном. Действительно, из $A = XBY$ следует

$$A \sim XB\,(n_l), \quad XB \sim B\,(n_r).$$

Таким образом, $A \sim B\,(n_l \cdot n_r)$ имеет место тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ найдутся такие X и Y, что $A = XBY$.

Вполне аналогично можно убедиться, что существование X и Y, таких, что $A = XBY$, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $A \sim B\,(n_r \cdot n_l)$.

Таким образом, отношение левой делимости n_l и правой делимости n_r оказываются перестановочными (5.3):

$$n_l \cdot n_r = n_r \cdot n_l.$$

(δ). Пусть $\mathfrak{Q}_\Omega$ есть полугруппа всех взаимно однозначных частичных преобразований некоторого множества Ω (4.5). Введем в $\mathfrak{Q}_\Omega$ отношение $\mathfrak{p}_1$, полагая

$$X \sim Y\,(\mathfrak{p}_1) \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{Q}_\Omega),$$

если $\Pi_1^{(X)} = \Pi_1^{(Y)}$. Также определяем отношение $\mathfrak{p}_2$, полагая

$$X \sim Y\,(\mathfrak{p}_2),$$

если $\Pi_2^{(X)} = \Pi_2^{(Y)}$.

Отношение $\mathfrak{p}_1$ стабильно справа. Действительно, при $X \sim Y\,(\mathfrak{p}_1)$ множество $\Pi_1^{(XZ)}$ состоит из тех элементов $\alpha \in \Pi_1^{(Z)}$, для которых $Z\alpha \in \Pi_1^{(X)}$. Оно совпадает с $\Pi_1^{(YZ)}$, поскольку $\Pi_1^{(X)} = \Pi_1^{(Y)}$. Вместе с тем $\mathfrak{p}_1$ не будет стабильным слева, если Ω состоит более чем из одного элемента. Действительно,

пусть $\Pi_1^{(X)} = \Pi_1^{(Y)}$ и α есть один из элементов этого множества. Пусть $X\alpha = \beta$, $Y\alpha = \gamma$, $\beta \neq \gamma$. Возьмем какое-нибудь $Z \in \mathfrak{Q}_2$ такое, что $\Pi_1^{(Z)} \ni \beta$, $\Pi_1^{(Z)} \overline{\ni} \gamma$. Тогда $\alpha \in \Pi_1^{(ZX)}$, но $\alpha \overline{\in} \Pi_1^{(ZY)}$.

Сходными рассуждениями нетрудно убедиться, что отношение $\mathfrak{p}_2$ стабильно слева, но не стабильно справа.

Теперь рассмотрим отношение $\mathfrak{p}_3$ такое, что $X \sim Y\,(\mathfrak{p}_3)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\Pi_1^{(X)} = \Pi_1^{(Y)}, \quad \Pi_2^{(X)} = \Pi_2^{(Y)}.$$

Отношение $\mathfrak{p}_3$ есть не что иное, как точная нижняя граница отношений $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$. Легко убедиться, что $\mathfrak{p}_3$ не является ни стабильным слева, ни стабильным справа.

Пусть $\mathfrak{m}$ некоторая мощность. Определим отношение $\mathfrak{p}_4$ в $\mathfrak{Q}_2$, полагая

$$X \sim Y\,(\mathfrak{p}_4) \qquad (X, Y \in \mathfrak{Q}_2),$$

если $X = Y$ или мощности $\Pi_1^{(X)}$ и $\Pi_1^{(Y)}$ обе меньше $\mathfrak{m}$. При $X = Y$ мы тривиальным образом имеем $XZ \sim YZ\,(\mathfrak{p}_4)$, $ZX \sim ZY\,(\mathfrak{p}_4)$. Если мощность $\Pi_1^{(X)}$ меньше $\mathfrak{m}$, то мощности $\Pi_1^{(XZ)}$ и $\Pi_1^{(ZX)}$ также будут, очевидно, меньше $\mathfrak{m}$. То же имеет место и для Y. Отсюда непосредственно следует двусторонняя стабильность отношения $\mathfrak{p}_4$.

Отметим, что все четыре рассмотренных нами отношения $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$, очевидно, являются эквивалентностями.

5.20. Пусть $\mathfrak{n}$ есть некоторое отношение в множестве всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$. Исходя из $\mathfrak{n}$, определим в $\mathfrak{A}$ новое отношение $\mathfrak{n}'$, которое назовем *первым производным отношением относительно* $\mathfrak{n}$. Полагаем

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}') \qquad (X, Y \in \mathfrak{A})$$

в том и только в том случае, когда найдутся такие T, T', S_1, S_2, являющиеся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, что

$$X = TS_1T', \quad Y = TS_2T',$$

причем S_1 и S_2 или оба одновременно являются пустыми символами, или удовлетворяют одному из условий: $S_1 \sim S_2\,(\mathfrak{n})$ или $S_2 \sim S_1\,(\mathfrak{n})$.

5.21. Исходя из $\mathfrak{n}'$ в $\mathfrak{A}$, определяем *второе производное отношение* $\mathfrak{n}''$, полагая

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}'') \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{A}),$$

если найдется такая конечная последовательность элементов

$$X = Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_r,\ Z_{r+1} = Y,$$

что имеет место

$$Z_i \sim Z_{i+1}\,(\mathfrak{n}') \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

5.22. Отметим несколько свойств производных отношений, справедливость большинства которых очевидна.

(α). Отношение $\mathfrak{n}'$ рефлексивно.

(β). Отношение $\mathfrak{n}'$ симметрично.

(γ). Отношение $\mathfrak{n}''$ рефлексивно.

(δ) Отношение $\mathfrak{n}''$ симметрично.

(ε). Отношение $\mathfrak{n}''$ транзитивно.

(ζ). $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}' \leqslant \mathfrak{n}''$.

(η). Отношение $\mathfrak{n}'$ двусторонне стабильно.

(θ). Отношение $\mathfrak{n}''$ двусторонне стабильно.

Дествительно, если для $Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_{r+1} \in \mathfrak{M}$ имеет место

$$Z_i \sim Z_{i+1}\,(\mathfrak{n}') \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

то благодаря (η) при любом $S \in \mathfrak{M}$

$$SZ_i \sim SZ_{i+1}\,(\mathfrak{n}'),\quad Z_iS \sim Z_{i+1}S\,(\mathfrak{n}') \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Таким образом, из $Z_1 \sim Z_{r+1}\,(\mathfrak{n}'')$ вытекает

$$SZ_1 \sim SZ_{r+1}\,(\mathfrak{n}'') \text{ и } Z_1S \sim Z_{r+1}S\,(\mathfrak{n}'').$$

(ι). Если $X \sim Y\,(\mathfrak{n}'')$ и $X' \sim Y'\,(\mathfrak{n}'')$, то $XX' \sim YY'\,(\mathfrak{n}'')$.

Это непосредственно следует из (γ), (ε), (θ) и 5.18.

5.23. Смысл введения второго производного отношения заключается в следующем. Отношение $\mathfrak{n}''$ есть двусторонне стабильная эквивалентность, такая, что $\mathfrak{n}'' \geqslant \mathfrak{n}$. При этом, если $\mathfrak{m}$ есть такая двусторонне стабильная эквивалентность, что $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, то, как легко видеть, $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}'$, а потому и $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}''$. Следовательно, $\mathfrak{n}''$ *есть точная нижняя граница множества*

всех двусторонне стабильных эквивалентностей $\mathfrak{m}$, *следующих за* $\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$). Можно сказать, что разбиение $\mathfrak{M}$, вызываемое $\mathfrak{n}''$, есть наиболее дробное из разбиений таких, при которых всякие два элемента, находящиеся в отношении $\mathfrak{n}$, обязательно содержатся в одной и той же компоненте этого разбиения (5.8, 5.15).

Если отношение $\mathfrak{n}$ само является двусторонне стабильной эквивалентностью, то, очевидно, $\mathfrak{n}'' = \mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$.

ГЛАВА II.

ДЕЛИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. Понятие и простейшие свойства делимости

1.1. Если полугруппа $\mathfrak{A}$ не является группой, то действие в ней необратимо. Это значит, что не для всякой пары элементов $A, B \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы X и Y, что

$$XB = A, \quad BY = A.$$

Разумеется, для некоторых пар элементов A и B одно или оба из этих уравнений относительно неизвестных X и Y могут иметь решения в $\mathfrak{A}$. Вопрос о том, для каких именно пар элементов эти уравнения разрешимы, а для каких неразрешимы, является в высшей степени существенным при изучении строения всякой полугруппы и при исследовании различных ее свойств.

1.2. ***Определение.*** *Элемент B полугруппы $\mathfrak{A}$ называется правым делителем элемента A той же полугруппы, если в $\mathfrak{A}$ существует такой элемент X, что*

$$XB = A.$$

B называется левым делителем A, если в $\mathfrak{A}$ существует такой элемент Y, что

$$BY = A.$$

Если B есть правый делитель A, то говорят, что A делится на B справа. Если B есть левый делитель A, то говорят, что A делится на B слева.

1.3. Как непосредственно следует из определения группы (I, 3.2), *полугруппа $\mathfrak{A}$ является группой тогда и только тогда, когда каждый ее элемент делится и справа*

и слева на любой элемент $\mathfrak{A}$. *Другими словами,* $\mathfrak{A}$ *является группой тогда и только тогда, когда каждый ее элемент является и правым и левым делителем всякого элемента* $\mathfrak{A}$.

То, насколько далеко удалось продвинуть теорию групп по сравнению с общей теорией полугрупп, может служить косвенным, но убедительным доказательством важности роли делимости в полугруппах.

1.4. Непосредственно из определения 1.2 вытекают некоторые простейшие свойства отношений делимости в полугруппах.

(α). Если B правый делитель A, а C есть правый делитель B, то C является правым делителем A.

(β). Произведение A_1A_2 делится на A_1 слева и на A_2 справа.

(γ). Если B есть правый делитель A, то при любом $Z \in \mathfrak{A}$ элемент ZA делится справа на B.

(δ). Если A делится на B справа и одновременно B делится на A справа, то B является своим собственным правым делителем.

(ε). Для того чтобы элемент B был правым делителем элемента A, необходимо и достаточно, чтобы в таблице умножения (I. 1.6) столбец, соответствующий элементу B, содержал элемент A.

(ζ). Для того чтобы элемент B был левым делителем элемента A, необходимо и достаточно, чтобы в таблице умножения (I, 1.6) строка, соответствующая элементу B, содержала элемент A.

(η). Элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ будет правым делителем всех элементов $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда в столбце таблицы умножения, соответствующем элементу A, встречаются все элементы полугруппы $\mathfrak{A}$.

(θ) A будет левым делителем всех элементов $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда в строке таблицы умножения, соответствующей элементу A, встречаются все элементы полугруппы $\mathfrak{A}$.

(ι). Элемент A делится справа на все элементы $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда A встречается в каждом столбце таблицы умножения.

($\varkappa$). A делится слева на все элементы $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда A встречается в каждой строке таблицы умножения.

1.5. Тогда как в группе каждый элемент является и правым и левым делителем всякого другого элемента, в полугруппе, не являющейся группой, таких элементов может вовсе не быть или же только часть элементов обладает указанным свойством. В главе VI мы подробнее займемся рассмотрением таких элементов, а сейчас выясним природу совокупности всех этих элементов.

Теорема. *Совокупность всех элементов полугруппы* $\mathfrak{A}$, *являющихся одновременно и правыми и левыми делителями всякого элемента* $\mathfrak{A}$, *если она не пуста, является группой.*

Доказательство. Обозначим указанную совокупность через $\mathfrak{B}$. Пусть B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$. Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой X_2, что

$$X_2 B_2 = A.$$

Для X_2 в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой X_1, что

$$X_1 B_1 = X_2.$$

Поэтому

$$X_1 B_1 B_2 = X_2 B_2 = A.$$

Следовательно, $B_1 B_2$ является правым делителем A. Аналогично доказывается, что $B_1 B_2$ будет и левым делителем A. Следовательно, $B_1 B_2 \in \mathfrak{B}$.

Ассоциативность умножения в $\mathfrak{B}$, конечно, имеет место, поскольку $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

Пусть B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$. В $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы X и Y, что

$$XB_2 = B_1, \quad B_2 Y = B_1.$$

Если мы покажем, что X, $Y \in \mathfrak{B}$, то этим будет завершено доказательство того, что $\mathfrak{B}$ есть группа.

Пусть A есть произвольный элемент $\mathfrak{A}$.

Так как при некотором $T \in \mathfrak{A}$ имеет место $B_1 T = A$, то

$$XB_2 T = B_1 T = A,$$

т. е. X оказывается левым делителем A.

В $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы I, C_1, C_2, что

$$B_2 I = B_2, \quad C_1 B_1 = I, \quad B_2 C_2 = I.$$

Так как для любого Z из $\mathfrak{A}$ должен найтись такой $Z' \in \mathfrak{A}$, что $Z = Z'B_2$, то

$$ZI = Z'B_2I = Z'B_2 = Z,$$

т. е. I таков, что для любого $Z \in \mathfrak{A}$ имеет место $ZI = Z$. Пользуясь этим свойством I, получаем

$$A = AI = AB_2C_2 = AB_2IC_2 = AB_2C_1B_1C_2 =$$
$$= AB_2C_1XB_2C_2 = AB_2C_1XI = AB_2C_1X,$$

т. е. X оказывается также и правым делителем A. Таким образом, $X \in \mathfrak{B}$. Совершенно аналогично доказывается, что $Y \in \mathfrak{B}$.

1.6 Некоторую противоположность элементов, являющихся и правыми и левыми делителями всех элементов полугруппы, представляют элементы, сами делящиеся и справа и слева на все элементы полугруппы. Такие элементы были впервые рассмотрены в статье Клиффорда и Миллера [1], где они названы зероидными (zeroid element). К рассмотрению свойств этих элементов мы еще возвратимся в главе V.

Теорема. *Совокупность всех элементов полугруппы* $\mathfrak{A}$, *делящихся и справа и слева на всякий элемент* $\mathfrak{A}$, *если она не пуста, является группой.*

Доказательство. Обозначим указанную совокупность через $\mathfrak{C}$. Пусть C_1, $C_2 \in \mathfrak{C}$. Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой X, что

$$C_1 = AX.$$

Поэтому $C_1C_2 = A(XC_2)$, т. е. C_1C_2 делится слева на произвольный элемент A. Аналогично доказывается, что C_1C_2 делится на A справа. Следовательно, $C_1C_2 \in \mathfrak{C}$.

Ассоциативность умножения в $\mathfrak{C}$, конечно, имеет место, поскольку $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$.

Так как C_1 и C_2 принадлежат $\mathfrak{C}$, то в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы U, V, W, что

$$UC_2^2 = C_2, \quad C_2^2V = C_2, \quad C_1 = C_2W.$$

Мы имеем

$$UC_2 = UC_2C_2V = C_2V.$$

Отсюда получаем

$$C_2(C_2V^2C_1) = (C_2^2V)(VC_1) = C_2VC_1 = UC_2C_1 =$$
$$= UC_2C_2W = C_2W = C_1.$$

Мы показали, что элемент $Y = C_2V^2C_1$ является решением уравнения

$$C_2Y = C_1.$$

Покажем, что $Y \in \mathfrak{C}$. Действительно, для любого $Z \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдутся такие U' и V', что

$$C_1 = U'Z, \quad C_2 = ZV'.$$

Поэтому

$$Y = C_2V^2C_1 = ZV'V^2U'Z,$$

т. е. Y делится на Z и справа и слева. Аналогично можно найти такое решение X уравнения

$$XC_2 = C_1,$$

что $X \in \mathfrak{C}$.

1.7. Выясним, когда $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, рассмотренные в 1.5 и 1.6, имеют общие элементы.

Теорема. *Если в полугруппе $\mathfrak{A}$ существует такой элемент, который является и правым и левым делителем всякого элемента $\mathfrak{A}$ и сам в свою очередь делится и справа и слева на все элементы из $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ является группой.*

Доказательство. Пусть A и B произвольные элементы $\mathfrak{A}$ и D элемент, обладающий указанными в формулировке теоремы свойствами. В $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы X_1, Y_1, X_2, Y_2, что

$$A = X_1D, \quad A = DY_1, \quad D = X_2B, \quad D = BY_2.$$

Отсюда следует, что элементы $X = X_1X_2$ и $Y = Y_2Y_1$ являются решениями уравнений

$$A = XB, \quad A = BY.$$

1.8. Естественно поставить вопрос о том, какие группы могут служить группами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ из 1.5 и 1.6 для каких-нибудь полугрупп. Прежде всего из 1.7 следует, что интерес представляет только тот случай, когда заданные две группы не имеют общих элементов. Покажем, что при этом условии пара любых групп может представлять собою пару групп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ для некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ есть две произвольные группы, не имеющие общих элементов. Множество $\mathfrak{A}$ является объединением множеств $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2.$$

Определяем в $\mathfrak{A}$ действие умножения. Пусть A, $A' \in \mathfrak{A}$. Если A и A' оба содержатся в одной и той же группе $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1,2)$, причем в этой группе имеет место

$$AA' = A'',$$

то и в $\mathfrak{A}$ полагаем

$$AA' = A''.$$

Если же $A \in \mathfrak{G}_1$, $A' \in \mathfrak{G}_2$, то полагаем

$$AA' = A'A = A'.$$

Без труда проверяется ассоциативность введенного действия. Покажем, что в $\mathfrak{A}$ группа $\mathfrak{G}_1$ играет роль группы $\mathfrak{B}$ (1.5), а $\mathfrak{G}_2$ играет роль группы $\mathfrak{C}$ (1.6). Действительно, если $G_1 \in \mathfrak{G}_1$ и $A \in \mathfrak{A}$, то уравнения

$$XG_1 = A, \quad G_1Y = A$$

разрешимы в $\mathfrak{A}$. Если $A \in \mathfrak{G}_1$, то в качестве X и Y берем решения соответствующих уравнений в $\mathfrak{G}_1$. Если же $A \in \mathfrak{G}_2$, то берем $X = Y = A$.

Для $G_2 \in \mathfrak{G}$ уравнения

$$XA = G_2, \quad AY = G_2$$

также разрешимы. Если $A \in \mathfrak{G}_2$, то в качестве X и Y берем решения соответствующих уравнений в $\mathfrak{G}_2$. Если же $A \in \mathfrak{G}_1$, то берем $X = Y = G_2$.

§ 2. Обратные элементы и единицы

2.1. При рассмотрении свойств делимости элементов в некоторых случаях представляет интерес тот второй элемент, который в произведении с данным элементом — делителем дает рассматриваемый элемент — делимое.

Определение. *Если элемент B полугруппы $\mathfrak{A}$ является правым делителем элемента A той же полугруппы, то элемент X, такой, что*

$$XB = A,$$

называется левым обратным для B относительно A.

Аналогично определяются правые обратные элементы.

Элемент, являющийся одновременно и правым обратным для B относительно A и левым обратным для B относительно A, называется двусторонне обратным для B относительно A.

2.2. Из определения непосредственно вытекают свойства.

(α). Если элемент X есть левый обратный для B относительно A, то при любом элементе Z данной полугруппы X будет левым обратным для BZ относительно AZ.

(β). Если элемент X есть левый обратный для B относительно A, то при любом элементе Z данной полугруппы ZX будет левым обратным для B относительно ZA.

(γ). Если X_1 есть левый обратный для B относительно X_2, а X_2 есть левый обратный для C относительно A, то X_1 будет левым обратным для BC относительно A.

(δ). Количество левых обратных для элемента B относительно A равно количеству раз, которое элемент A встречается в столбце, соответствующем элементу B таблицы умножения полугруппы (I, 1.6; II, 1.4).

(ε). Количество правых обратных для элемента B относительно A равно количеству раз, которое элемент A встречается в строке, соответствующей элементу B таблицы умножения полугруппы.

2.3. Особого внимания заслуживают следующие частные случаи.

Определение. *Элемент B полугруппы $\mathfrak{A}$ называется правой единицей элемента A той же полугруппы, а сам A называется левым нулем для B, если B есть правый делитель A, причем A сам является левым обратным для B относительно A:*

$$AB = A.$$

Аналогично определяются левая единица и правый нуль.

Элемент, являющийся и правой и левой единицей элемента, называется его двусторонней единицей. Элемент, являющийся и правым и левым нулем для некоторого элемента, называется его двусторонним нулем.

Элемент I, являющийся своей собственной двусторонней единицей, называется идемпотентом:

$$I^2 = I.$$

2.4. Иногда какой-нибудь элемент полугруппы является правой или левой единицей или нулем одновременно для нескольких элементов. В некоторых случаях такое обстоятельство оказывается важным.

Определение. *Пусть $\mathfrak{N}$ есть подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Элемент $B \in \mathfrak{A}$ называется правой единицей $\mathfrak{N}$, если B является правой единицей каждого элемента N из $\mathfrak{N}$:*

$$NB = N.$$

Аналогично определяются левая единица, правый нуль и левый нуль подмножества.

Если подмножество $\mathfrak{N}$ обладает, например, правыми единицами, то обычно бывает существенно, принадлежат ли некоторые из них самому $\mathfrak{N}$ или нет. Конечно, могут встретиться оба случая.

2.5. Из приведенных определений непосредственно вытекает ряд свойств.

(α). Если C есть правая единица B, а B есть правая единица A, то C является правой единицей A.

(β). Если B есть правая единица A, то B будет правой единицей элемента ZA при любом Z из данной полугруппы.

(γ). Если B есть правый делитель A, то всякая правая единица элемента B будет правой единицей для A.

(δ). Элемент, являющийся сам для себя двусторонним нулем, является идемпотентом.

(ε). Если $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$ и B есть правая единица для $\mathfrak{N}_1$, то B будет правой единицей и для $\mathfrak{N}_2$.

(ζ). Если $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$ и B есть правый нуль для $\mathfrak{N}_1$, то B будет правым нулем и для $\mathfrak{N}_2$.

2.6. Совершенно особое положение занимают элементы, являющиеся двусторонней единицей и двусторонним нулем всей полугруппы.

Определение. *Элемент, являющийся двусторонней единицей всей полугруппы $\mathfrak{A}$, называется единицей полугруппы $\mathfrak{A}$.*

Элемент, являющийся двусторонним нулем всей полугруппы $\mathfrak{A}$, *называется нулем полугруппы.*

Обычно единицу полугруппы мы будем обозначать через $E_{\mathfrak{A}}$, или просто E, нуль будем обозначать через $O_{\mathfrak{A}}$, или просто O.

Полугруппа, обладающая единицей, называется *полугруппой с единицей* и обладающая нулем — *полугруппой с нулем.*

2.7. ***Теорема.*** *Полугруппа может обладать не более чем одной единицей и не более чем одним нулем.*

Доказательство. Пусть E_1 и E_2 оба являются единицами полугруппы $\mathfrak{A}$.

Из того, что E_1 есть единица $\mathfrak{A}$, следует $E_1E_2 = E_2$. Но из того, что E_2 есть единица $\mathfrak{A}$, следует $E_1E_2 = E_1$. Следовательно, $E_2 = E_1$.

Пусть O_1 и O_2 оба являются нулями полугруппы $\mathfrak{A}$.

Из того, что O_1 есть нуль $\mathfrak{A}$, следует $O_1O_2 = O_1$. Но из того, что O_2 есть нуль $\mathfrak{A}$, следует $O_1O_2 = O_2$. Следовательно, $O_1 = O_2$.

2.8. Из определений непосредственно вытекают следующие свойства нуля и единицы полугруппы.

(α). Единица является и правым и левым делителем всякого элемента полугруппы.

(β). Никакой элемент полугруппы, кроме самой единицы, не может являться ни правой, ни левой ее единицей.

(γ). Всякий элемент полугруппы является и правым и левым делителем нуля полугруппы.

(δ). Нуль полугруппы не является ни правым, ни левым делителем никакого элемента, отличного от самого нуля.

(ε). Единица полугруппы является идемпотентом.

(ζ). Нуль полугруппы является идемпотентом.

(η). Все элементы полугруппы являются нулями для ее единицы.

(θ). Все элементы полугруппы являются единицами для ее нуля.

2.9. Наличие единицы в полугруппе в ряде случаев значительно упрощает формулировки и облегчает рассуждения. Поэтому часто бывает целесообразно пополнить полугруппу единицей, если она первоначально ею не обладала. Это можно сделать нижеследующим образом.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}'$, состоящее из всех элементов $\mathfrak{A}$ и еще одного

нового элемента E. В $\mathfrak{A}'$ определим действие умножения. Если для $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ имело место

$$A_1 A_2 = A_3,$$

то и в $\mathfrak{A}'$ полагаем $A_1 A_2 = A_3$.
Кроме того, для всякого $X \in \mathfrak{A}'$ полагаем

$$XE = EX = X.$$

Без труда проверяется ассоциативность определенного в $\mathfrak{A}'$ действия. Таким образом, $\mathfrak{A}'$ оказывается полугруппой, причем элемент E, очевидно, является единицей $\mathfrak{A}'$.

Полугруппа $\mathfrak{A}'$ столь тесно и столь очевидным образом связана с полугруппой $\mathfrak{A}$, что изучение полугруппы $\mathfrak{A}$ обычно можно вполне заменить изучением полугруппы $\mathfrak{A}'$, которая обладает единицей.

2.10. Аналогично пополнению полугруппы единицей можно произвести пополнение ее нулем.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}''$, состоящее из всех элементов $\mathfrak{A}$ и еще одного нового элемента O. В $\mathfrak{A}''$ определяем действие умножения. Если для $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ имело место

$$A_1 A_2 = A_3,$$

то и в $\mathfrak{A}''$ полагаем

$$A_1 A_2 = A_3.$$

Кроме того, для всякого $X \in \mathfrak{A}''$ полагаем

$$XO = OX = O.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{A}''$ есть полугруппа, в которой O является нулем.

2.11. Из построений 2.9 и 2.10 сразу видно, что если сперва пополнить $\mathfrak{A}$ единицей E, а потом пополнить получившуюся полугруппу $\mathfrak{A}'$ нулем O, то в получившейся после этого полугруппе, состоящей из всех элементов $\mathfrak{A}$ и новых элементов E и O, эти новые элементы будут соответственно единицей и нулем.

2.12. Если в полугруппе $\mathfrak{A}$ с единицей $E_{\mathfrak{A}}$ произведение отличных от $E_{\mathfrak{A}}$ элементов всегда отлично от $E_{\mathfrak{A}}$, то говорят, что в $\mathfrak{A}$ единица присоединена внешним образом к полугруппе, состоящей из всех неединичных элементов полу-

группы $\mathfrak{A}$. Построение $\mathfrak{A}'$ в 2.9 явилось тем самым присоединением единицы внешним образом к исходной полугруппе $\mathfrak{A}$.

Аналогично, если в полугруппе $\mathfrak{A}$ с нулем O произведение отличных от O элементов всегда отлично от O, то говорят, что в $\mathfrak{A}$ нуль присоединен внешним образом к полугруппе, состоящей из всех ненулевых элементов полугруппы $\mathfrak{A}$. Построение $\mathfrak{A}''$ в 2.10 было присоединением нуля внешним образом к исходной полугруппе $\mathfrak{A}$.

2.13. Поскольку, как мы уже говорили, единица играет в полугруппе совершенно особую роль, естественна важность элементов, обратных по отношению к единице.

Определение. *Если в полугруппе с единицей E элемент A обладает двусторонне обратным* (2.1) *A' относительно E, то этот элемент A' называется обратным для A и обозначается A^{-1}.*

2.14. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей E. Рассмотрим некоторые свойства обратных элементов.

(α). Если элемент A является и правым и левым делителем E, то A обладает обратным элементом.

Действительно, пусть

$$AA' = E, \quad A''A = E,$$

тогда

$$A' = EA' = (A''A)\,A' = A''(AA') = A''E = A''.$$

Так как $A' = A''$, то, очевидно, $A' = A'' = A^{-1}$.

(β). Если элемент A обладает обратным A^{-1}, то никакой элемент из $\mathfrak{A}$, отличный от A^{-1}, не является ни правым, ни левым обратным для A относительно E. В частности, отсюда следует, что обратный элемент единственный.

Действительно, если $XA = E$, то

$$X = XE = XAA^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}.$$

Аналогично из $AY = E$ следует $Y = E$.

(γ). Если A обладает обратным A^{-1}, то и A^{-1} обладает обратным и $(A^{-1})^{-1} = A$.

(δ). Если каждый из элементов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ обладает обратным, то и их произведение обладает обратным, причем

$$(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Действительно,

$$(A_1A_2 \dots A_k)\cdot\left(A_k^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}\right)=E,$$
$$\left(A_k^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}\right)\cdot(A_1A_2 \dots A_k)=E.$$

(ε). Отличный от E идемпотент не может иметь обратного элемента. Действительно, если $I^2=I$ и $II^{-1}=E$, то

$$I=IE=III^{-1}=II^{-1}=E.$$

2.15. При помощи понятия и свойств единицы и обратных элементов можно охарактеризовать группы.

Теорема. *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была группой, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{A}$ *обладала единицей и чтобы каждый элемент имел обратный.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть группа. Возьмем в $\mathfrak{A}$ некоторый элемент S. В $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы E_1 и E_2, что

$$E_1S=S, \quad SE_2=S.$$

Пусть A произвольный элемент $\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{A}$ существуют такие X и Y, что

$$XS=A, \quad SY=A.$$

Так как

$$E_1A=E_1SY=SY=A,$$
$$AE_2=XSE_2=XS=A,$$

то E_1 оказывается левой единицей $\mathfrak{A}$, а E_2 правой единицей $\mathfrak{A}$. Отсюда, в частности, следует

$$E_1E_2=E_2, \quad E_1E_2=E_1.$$

Следовательно, $E_1=E_2$, и $E=E_1=E_2$ оказывается единицей $\mathfrak{A}$. Каждый элемент $\mathfrak{A}$ является и правым и левым делителем всякого элемента из $\mathfrak{A}$, а потому и единицы E. Согласно 2.14, (α), отсюда следует, что каждый элемент $\mathfrak{A}$ обладает обратным.

2) Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ с единицей E каждый элемент имеет обратный. Тогда для любых $A, B\in\mathfrak{A}$ имеет место

$$\left(BA^{-1}\right)A=BE=B,$$
$$A\left(A^{-1}B\right)=EB=B.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}$ является группой.

2.16. Из теоремы 2.15 следует, что группа *является полугруппой с двусторонним сокращением* (I, 3.2, (ε)).

Действительно, если для элементов X, A, B группы $\mathfrak{G}$ имеет место

$$XA = XB,$$

то

$$A = E_{\mathfrak{G}} A = X^{-1}XA = X^{-1}XB = E_{\mathfrak{G}} B = B.$$

Аналогично для сокращения справа.

2.17. Также с помощью теоремы 2.15 нетрудно доказать уже упомянутую ранее (I, 3.17) теорему о представлении групп обратимыми преобразованиями.

Теорема. *Каждая группа изоморфна некоторой группе обратимых преобразований* (I, 3.17).

Доказательство. В качестве множества Ω преобразуемых элементов возьмем совокупность всех элементов самой группы $\mathfrak{G}$:

$$\Omega = \mathfrak{G} = \{A, B, \ldots, S, \ldots\}.$$

Каждому элементу $S \in \mathfrak{G}$ сопоставим следующее преобразование V_S множества Ω:

$$V_S X = (S \cdot X). \qquad (X \in \mathfrak{G}).$$

Благодаря 2.16 преобразования, соответствующие различным элементам из $\mathfrak{G}$, сами будут различны. Так как для любых S, R, $X \in \mathfrak{G}$

$$(V_S V_R) X = V_S (RX) = SRX = V_{(SR)} X,$$

то

$$V_S V_R = V_{(SR)}.$$

Отсюда следует, что соответствие $S \sim V_S$ представляет собою изоморфизм между группой $\mathfrak{G}$ и мультипликативным множеством $\mathfrak{G}'$, состоящим из всех преобразований V_S. Преобразование $V_{S^{-1}}$ обратно для преобразования V_S, так как

$$V_{S^{-1}} V_S X = V_{S^{-1}} SX = S^{-1}SX = E_{\mathfrak{G}} X = X,$$

$$V_S V_{S^{-1}} X = V_S S^{-1} X = SS^{-1} X = E_{\mathfrak{G}} X = X \quad (X \in \Omega).$$

Следовательно, все преобразования V_S обратимы и $\mathfrak{G}'$ для каждого V_S содержит обратное к нему преобразование $V_{S^{-1}}$.

2.18. Требования выведенного в 2.15 критерия того, чтобы полугруппа являлась группой, могут быть ослаблены нижеследующим образом.

Теорема. *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает правой единицей* I, *причем каждый элемент* $\mathfrak{A}$ *является левым делителем* I, *то* $\mathfrak{A}$ *является группой.*

Доказательство. Для произвольного элемента $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие A' и A'', что

$$AA' = I, \quad A'A'' = I.$$

Отсюда получаем

$$IA = IAI = IAA'A'' = IIA'' = IA'' = AA'A'' = AI = A.$$

Следовательно, I является также и левой, а потому и двусторонней единицей $\mathfrak{A}$. Но тогда

$$A = AI = AA'A'' = IA'' = A''.$$

Следовательно, $AA' = A'A = I$, т. е. A' является для A двусторонне обратным элементом.

Согласно 2.15, $\mathfrak{A}$ есть группа.

2.19. В связи с теоремой 2.18 естественно поставить вопрос о том, что представляет собой полугруппа, обладающая такой правой единицей, для которой каждый элемент является ее правым делителем. Все группы, очевидно, принадлежат к классу таких полугрупп. Помимо этого, в нем имеются полугруппы и не являющиеся группами. Например, в этом классе содержатся весьма просто устроенные полугруппы, в которых произведение двух любых элементов всегда равно левому множителю (в этом случае каждый элемент, очевидно, является правой единицей с указанным свойством). В главе VI мы вернемся к полугруппам с указанным свойством и покажем, что всякая полугруппа, обладающая правой единицей, делящейся справа на каждый элемент полугруппы, может быть получена из полугрупп указанных двух классов при помощи некоторой простой конструкции.

§ 3. Делимость преобразований и матриц

3.1. Посмотрим теперь, как понятия двух предыдущих параграфов конкретизируются применительно к двум важнейшим частным случаям — преобразованиям и матрицам. Сперва

рассмотрим преобразования. Пусть Ω произвольное непустое множество, $\mathfrak{S}_\Omega$ полугруппа всех преобразований Ω. Для всяких $\alpha \in \Omega$ и $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ условимся обозначать через $\Gamma_\alpha^{(S)}$ множество всех таких $\xi \in \Omega$, что $S\xi = S\alpha$.

Для того чтобы в полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$ преобразование B из $\mathfrak{S}_\Omega$ было правым делителем преобразования A из $\mathfrak{S}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\alpha \in \Omega$ имело место $\Gamma_\alpha^{(B)} \subset \Gamma_\alpha^{(A)}$, т. е. чтобы из $B\alpha = B\beta$ ($\alpha, \beta \in \Omega$) *всегда следовало* $A\alpha = A\beta$.

Действительно, если для некоторых α и β из Ω имеет место

$$B\alpha = B\beta, \quad A\alpha \neq A\beta,$$

то при любом $X \in \mathfrak{S}_\Omega$ $XB\alpha = XB\beta$, т. е. XB ни при каком X не равно A.

Пусть теперь $\Gamma_\alpha^{(B)} \subset \Gamma_\alpha^{(A)}$ для каждого $\alpha \in \Omega$. Определим новое преобразование $X \in \mathfrak{S}_\Omega$, полагая для $\xi = B\alpha$ $X\xi = A\alpha$ ($X\xi$ определен этим однозначно независимо от выбора α из $\Gamma_\alpha^{(B)}$, ибо $\Gamma_\alpha^{(B)} \subset \Gamma_\alpha^{(A)}$) и определяя $X\eta$ для $\eta \in B\Omega$ произвольным образом.

Для всякого $\alpha \in \Omega$ мы имеем

$$(XB)\alpha = X(B\alpha) = A\alpha$$

и, следовательно, $XB = A$.

3.2. *Для того чтобы в полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$ преобразование B из $\mathfrak{S}_\Omega$ было левым делителем преобразования A из $\mathfrak{S}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $A\Omega \subset B\Omega$.*

Действительно, так как при любом $Y \in \mathfrak{S}_\Omega$

$$B\Omega \supset BY\Omega,$$

то $BY = A$ возможно лишь при $B\Omega \supset A\Omega$.

Если $B\Omega \supset A\Omega$ имеет место, то для каждого $\xi \in A\Omega$ фиксируем какой-нибудь такой $\xi' \in \Omega$, что $B\xi' = \xi$.

Строим новое преобразование Y. Если $A\alpha = \beta$, то полагаем $Y\alpha = \beta'$. При таком Y имеем

$$BY\alpha = B\beta' = \beta = A\alpha$$

и, следовательно,

$$BY = A.$$

3.3. Укажем несколько следствий для полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$, непосредственно вытекающих из 3.1 и 3.2. В частности, остановимся на вопросе об элементах, имеющих обратные относительно тождественного преобразования E, которое играет особую роль, поскольку оно, очевидно, является единицей полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ (2.6).

(α). Элемент $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ имеет в $\mathfrak{S}_\Omega$ левый обратный относительно тождественного преобразования E тогда и только тогда, когда при любых $\alpha, \beta \in \Omega$ из $\alpha \neq \beta$ всегда следует $S\alpha \neq S\beta$, т. е. S осуществляет взаимно однозначное отображение Ω в себя.

Это непосредственно следует из 3.1.

(β). Элемент $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ имеет в $\mathfrak{S}_\Omega$ правый обратный относительно тождественного преобразования E тогда и только тогда, когда $S\Omega = \Omega$, т. е. S осуществляет отображение Ω на все Ω.

Это непосредственно следует из 3.2.

(γ). Для $\mathfrak{S}_\Omega$ группа $\mathfrak{B}$ (1.5), состоящая из всех преобразований, являющихся одновременно и правыми и левыми делителями каждого преобразования из $\mathfrak{S}_\Omega$, состоит из таких преобразований B, которые удовлетворяют условиям

$$B\Omega = \Omega, \quad B\alpha \neq B\beta \quad (\alpha, \beta \in \Omega;\ \alpha \neq \beta),$$

т. е. осуществляют взаимно однозначные отображения Ω на себя. Согласно I, 3.14, $\mathfrak{B}$ есть множество всех обратимых преобразований множества Ω.

(δ). Для $\mathfrak{S}_\Omega$ множество $\mathfrak{C}$ (1.6) пусто (за исключением тривиального случая, когда Ω состоит из одного элемента). Действительно, пусть U_ξ есть преобразование Ω, преобразующее все $\alpha \in \Omega$ в ξ. Тогда всякое преобразование C, делящееся на U_ξ слева, должно, согласно 3.2, иметь $C\Omega \subset U_\xi\Omega = \xi$ и потому не может делиться слева на U_η при $\eta \neq \xi$.

3.4. Для того чтобы преобразование $B \in \mathfrak{S}_\Omega$ было правой единицей преобразования $A \in \mathfrak{S}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha \in \Omega$

$$A(B\alpha) = A\alpha,$$

т. е. чтобы $B\alpha$ содержался в множестве $\Gamma_\alpha^{(A)}$ (3.1).

Для того чтобы B было левой единицей A, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\xi \in A\Omega$ имело место

$$B\xi = \xi.$$

Действительно, $BA = A$ означает, что для всякого $\alpha \in \Omega$

$$BA\alpha = B(A\alpha) = A\alpha.$$

3.5. Идемпотентами в $\mathfrak{S}_\Omega$ являются такие преобразования I, для которых все элементы из $I\Omega$ являются неподвижными точками преобразования I, т. е. $I\xi = \xi$. Действительно, для идемпотентности I необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in \Omega$

$$I(I\alpha) = I^2\alpha = (I\alpha).$$

Преобразования, являющиеся идемпотентами полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$, можно было бы весьма естественно назвать проектирующими. То свойство, что все элементы из Ω преобразуются при помощи I в такие, которые сами от преобразования I уже не меняются, и является естественным для определения проектирования в общем случае.

Как мы уже отмечали, тождественное преобразование Ω является единицей полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$. Нуля (2.6) полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ благодаря 3.3, (δ) не имеет, так как нуль полугруппы всегда делится на все ее элементы и справа и слева: $OA = AO = O$.

3.6. Теперь обратимся к полугруппе $\mathfrak{M}_n$, состоящей из всех комплексных квадратных матриц порядка n.

Для того чтобы в $\mathfrak{M}_n$ матрица B была правым делителем матрицы A, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

необходимо и достаточно следующее равенство рангов:

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Действительно, равенство $XB = A$ означает выполнение равенств:

$$\begin{aligned}
&x_{k1}b_{11} + x_{k2}b_{21} + \ldots + x_{kn}b_{n1} = a_{k1},\\
&x_{k1}b_{12} + x_{k2}b_{22} + \ldots + x_{kn}b_{n2} = a_{k2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{k1}b_{1n} + x_{k2}b_{2n} + \ldots + x_{kn}b_{nn} = a_{kn}, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}$$

Как известно из теории систем линейных уравнений, для того чтобы нашлись значения $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$, удовлетворяющие этим соотношениям, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ линейно выражалась через последовательности $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$, $(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$, $\ldots$, $(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn})$. Но это будет иметь место при всех k от 1 до n в том и только в том случае, когда выполняется указанное выше условие равенства рангов.

3.7. Совершенно аналогично предыдущему доказывается, что для того чтобы в $\mathfrak{M}_n$ матрица B была левым делителем матрицы A, необходимо и достаточно следующее равенство рангов:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.8. Очевидно, полугруппа $\mathfrak{M}_n$ обладает единицей и нулем:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix}, \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

3.9. Группа $\mathfrak{B}$ (1.5) для $\mathfrak{M}_n$, как следует из 3.6, состоит из тех матриц, ранг которых равен n, т. е. является совокупностью всех неособенных матриц.

Группа $\mathfrak{C}$ (1.6) для $\mathfrak{M}_n$ состоит из одной нулевой матрицы O. Действительно, O делится на всякий элемент $M \in \mathfrak{M}_n$ и справа и слева

$$MO = OM = O.$$

С другой стороны, матрица, отличная от O, не делится на O и потому не может принадлежать $\mathfrak{C}$.

§ 4. Коммутативные полугруппы идемпотентов

4.1. Коммутативные полугруппы идемпотентов, т. е. такие коммутативные полугруппы, все элементы которых являются идемпотентами, играют особую роль ввиду их связи с понятием частичной упорядоченности. В продолжение всего параграфа мы постоянно будем пользоваться простейшими понятиями теории частичной упорядоченности, приведенными в § 5 главы I.

Остановимся сперва на одном частном классе коммутативных полугрупп идемпотентов. Пусть Ω есть некоторое множество и $\mathfrak{B}$ совокупность некоторых его непустых подмножеств такая, что вместе с подмножествами M и M' множества Ω совокупность $\mathfrak{B}$ всегда содержит их пересечение $M \cap M'$. Очевидно, $\mathfrak{B}$ относительно действия пересечения является коммутативной полугруппой идемпотентов. Оказывается, что всякая коммутативная полугруппа идемпотентов может быть изоморфно представлена в виде полугруппы такого типа.

Теорема. *Всякая коммутативная полугруппа идемпотентов изоморфна некоторой полугруппе, элементами которой являются подмножества некоторого множества, а действием — операция пересечения.*

Доказательство. В коммутативной полугруппе идемпотентов $\mathfrak{A}$ для всякого $X \in \mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{N}_X$ совокупность всех элементов из $\mathfrak{A}$, делящихся на X. Для произвольных $X, Y \in \mathfrak{A}$, очевидно, $\mathfrak{N}_{XY} \subset \mathfrak{N}_X \cap \mathfrak{N}_Y$. С другой стороны, если $Z \in \mathfrak{N}_X \cap \mathfrak{N}_Y$, то $Z = UX$, $Z = VY$ при некоторых $U, V \in \mathfrak{A}$. Но $Z = Z^2 = UXVY = (XY)(UV)$ и потому $Z \in \mathfrak{N}_{XY}$. Таким образом, оказалось, что всегда

$$\mathfrak{N}_{XY} = \mathfrak{N}_X \cap \mathfrak{N}_Y.$$

Из этого следует, что совокупность подмножеств множества $\mathfrak{A}$, имеющих вид $\mathfrak{N}_X$ ($X \in \mathfrak{A}$), которую мы обозначим через $\mathfrak{B}$, относительно действия пересечения подмножеств является коммутативной полугруппой идемпотентов.

Пусть $\mathfrak{N}_X = \mathfrak{N}_Y$, так как $X = X^2 \in \mathfrak{N}_X$ и $Y = Y^2 \in \mathfrak{N}_Y$, то при некоторых $R, S \in \mathfrak{A}$ мы имеем $X = RY$, $Y = SX$. Отсюда следует $X = RSX$ и $Y = RSY$. Используя это, получаем

$$X = RSX = RSRY = RSY = Y.$$

Благодаря доказанному отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$

$$\varphi(X) = \mathfrak{N}_X \quad (X \in \mathfrak{A})$$

взаимно однозначно. Ввиду доказанного ранее оно оказывается изоморфным, ибо

$$\varphi(XY) = \mathfrak{N}_{XY} = \mathfrak{N}_X \cap \mathfrak{N}_Y = \varphi(X) \cdot \varphi(Y).$$

4.2. Рассмотренное выше представление произвольной коммутативной полугруппы идемпотентов $\mathfrak{A}$ делает особенно естественным рассмотрение следующего отношения частичной упорядоченности в $\mathfrak{A}$. Будем писать

$$X \leqslant Y \quad (X, Y \in \mathfrak{A}),$$

если X делится на Y (в обозначениях 4.1 это, очевидно, равносильно условию $\mathfrak{N}_X \subset \mathfrak{N}_Y$). В коммутативной полугруппе идемпотентов это условие равносильно тому, что Y является единицей X. Действительно, из $X = YZ$, очевидно, следует, что $XY = X$.

Рефлексивность, транзитивность и антисимметричность (I, 5.6) этого отношения проверяются без труда.

Относительно введенного в $\mathfrak{A}$ отношения частичной упорядоченности произведение XY двух элементов X и Y является точной нижней границей для X и Y.

Действительно,

$$(XY)X = XY, \quad (XY)Y = XY$$

и, следовательно,

$$(XY) \leqslant X, \quad (XY) \leqslant Y.$$

Если $Z \leqslant X$ и $Z \leqslant Y$, т. е.

$$ZX = Z, \quad ZY = Z,$$

то

$$Z(XY) = ZX \cdot Y = ZY = Z,$$

т. е. $Z \leqslant XY$.

4.3. Из 4.2 следует, что относительно введенной частичной упорядоченности множество всех элементов коммутативной полугруппы идемпотентов $\mathfrak{A}$ является полуструктурой (I, 5.13). Будем называть ее *полуструктурой, сопряженной с полугруппой* $\mathfrak{A}$. В свою очередь, $\mathfrak{A}$ будем называть *полугруппой, сопряженной с этой полуструктурой.*

4.4. *Теорема.* *Для каждой полуструктуры существует единственная сопряженная с ней коммутативная полугруппа идемпотентов.*

Доказательство. 1) В полуструктуре $\mathfrak{L}$ введем коммутативное действие умножения, полагая

$$X \cdot Y = Y \cdot X = Z \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{L}),$$

если Z есть точная нижняя граница для $\{X, Y\}$ в $\mathfrak{L}$. Согласно I, 5.12; I, 5.13, произведение определено вполне однозначно для любой пары элементов. Докажем ассоциативность этого действия.

Пусть

$$(XY)Z = U, \quad X(YZ) = V.$$

Мы имеем $V \leqslant X$, $V \leqslant YZ$ и потому $V \leqslant Y$, $V \leqslant Z$. Но из $V \leqslant X$, $V \leqslant Y$ следует $V \leqslant XY$. Отсюда, благодаря $V \leqslant Z$, получаем $V \leqslant (XY)Z = U$. Аналогично доказывается $U \leqslant V$. Таким образом, $U = V$.

Множество всех элементов полуструктуры $\mathfrak{L}$, рассматриваемое относительно определенного таким способом действия, обозначим через $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ является коммутативной полугруппой. При этом все ее элементы, очевидно, являются идемпотентами.

Если в $\mathfrak{A}$ для элементов X и Y имеет место $XY = X$, то X есть точная нижняя граница для X и Y и потому $X \leqslant Y$. В свою очередь, если $X \leqslant Y$, то точная нижняя граница X и Y есть X и потому $XY = X$. Отсюда следует, что полуструктура $\mathfrak{L}$ сопряжена с полугруппой $\mathfrak{A}$.

2) Пусть $\mathfrak{A}'$ есть произвольная коммутативная полугруппа идемпотентов, сопряженная с полуструктурой $\mathfrak{L}$. Множество элементов $\mathfrak{A}'$ совпадает с множеством элементов $\mathfrak{L}$ и совпадает с множеством элементов $\mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ полугруппа, рассмотренная в первой части доказательства).

Согласно 4.2, в $\mathfrak{A}'$ произведение двух произвольных элементов X и Y равно точной нижней границе X и Y в $\mathfrak{L}$. Таким образом, в полугруппах $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}$, состоящих из одних и тех же элементов, действия совпадают. Следовательно, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$.

4.5. Благодаря теореме 4.4, соотношение сопряженности определяет взаимно однозначное соответствие между коммутативными полугруппами идемпотентов и полуструктурами. Это соответствие позволяет свести изучение полуструктур к изучению коммутативных полугрупп идемпотентов.

4.6. Если в некоторой коммутативной полугруппе идемпотентов $\mathfrak{A}$ указано, какие элементы для каких других элементов являются единицами, то тем самым вполне определено отношение частичной упорядоченности в полуструктуре, сопряженной с полугруппой $\mathfrak{A}$. Но, согласно 4.2, это отношение вполне определяет умножение в $\mathfrak{A}$. Таким образом, указание в $\mathfrak{A}$ того, какие элементы для каких других элементов являются единицами, полностью определяет полугруппу $\mathfrak{A}$.

Это же свойство, очевидно, можно формулировать также и следующим образом. Пусть φ есть взаимно однозначное отображение коммутативной полугруппы идемпотентов $\mathfrak{A}$ на коммутативную полугруппу идемпотентов $\mathfrak{A}'$. Если из $XY = X$ ($X, Y \in \mathfrak{A}$) всегда следует $\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(X)$, а из $XY \neq X$ всегда следует $\varphi(X) \cdot \varphi(Y) \neq \varphi(X)$, то φ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$.

4.7. В теории частично упорядоченных множеств структуры (I, 5.13) занимают особое место. Различные их свойства подвергнуты глубокому изучению. Теория структур занимает важное место в современной алгебре. Весьма существенным в этой теории является выделение из общего класса структур некоторых частных классов. Ниже мы покажем, как естественно могут быть охарактеризованы некоторые из этих классов при помощи свойств делимости в полугруппах, сопряженных со структурами, составляющими эти классы.

4.8. ***Теорема.*** *Полуструктура $\mathfrak{L}$ является структурой тогда и только тогда, когда в сопряженной с ней*

полугруппе $\mathfrak{A}$ *множество единиц совокупности двух любых элементов непусто и содержит свой нуль.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{L}$ является структурой. Для $X, Y \in \mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}$ должна существовать точная верхняя граница Z. Поскольку $X \leqslant Z$ и $Y \leqslant Z$, в $\mathfrak{A}$ мы имеем $XZ = X$ и $YZ = Y$, т. е. Z является единицей совокупности $\{X, Y\}$.

Пусть Z' есть произвольная единица совокупности $\{X, Y\}$. Это означает, что в $\mathfrak{L}$ Z' есть верхняя граница для $\{X, Y\}$. Поэтому $Z' \geqslant Z$, т. е. в $\mathfrak{A}$ $Z'Z = Z$. Отсюда следует, что Z является нулем в множестве всех единиц $\{X, Y\}$.

2) Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ для произвольных $X, Y \in \mathfrak{A}$ множество единиц совокупности $\{X, Y\}$ содержит свой нуль Z. Так как Z есть единица X и Y, то в $\mathfrak{L}$ Z есть верхняя граница $\{X, Y\}$. Пусть Z' есть произвольная верхняя граница $\{X, Y\}$. Так как в $\mathfrak{A}$ Z есть нуль для Z', то $Z \leqslant Z'$. Следовательно, для $\{X, Y\}$ Z является точной верхней границей.

4.9. В коммутативной полугруппе идемпотентов $\mathfrak{A}$, сопряженной со структурой $\mathfrak{L}$, условимся обозначать через $X + Y$ элемент, являющийся точной верхней границей $\{X, Y\}$. Множество $\mathfrak{L}$ можно было бы рассматривать и относительно этого действия „сложения“. Мы получили бы тогда новую коммутативную полугруппу идемпотентов, связь которой со структурой $\mathfrak{L}$ носила бы характер, аналогичный связи с $\mathfrak{L}$ сопряженной с ней полугруппы $\mathfrak{A}$ (4.3).

4.10. Линейно упорядоченное множество (I, 5.11), очевидно, является структурой. Если в линейно упорядоченном множестве каждое непустое подмножество содержит свою нижнюю границу (которая, очевидно, автоматически оказывается ее точной нижней границей), то оно называется вполне упорядоченным множеством.

4.11. ***Теорема.*** *Полуструктура* $\mathfrak{L}$ *является линейно упорядоченным множеством тогда и только тогда, когда в сопряженной с ней полугруппе* $\mathfrak{A}$ *из двух любых элементов один является нулем для другого.*

$\mathfrak{L}$ *является вполне упорядоченным множеством тогда и только тогда, когда любое непустое подмножество полугруппы* $\mathfrak{A}$ *содержит свой нуль.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{L}$ линейно упорядоченное множество и $X, Y \in \mathfrak{L}$. Обязательно имеет место одно из

двух: $X \leqslant Y$ или $Y \leqslant X$. В первом случае в $\mathfrak{A}$ X является нулем для Y, а во втором Y нулем для X.

Если $\mathfrak{L}$ вполне упорядочено и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$, $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{M}$ содержит свою нижнюю границу Z. В $\mathfrak{A}$ Z является нулем для каждого элемента из $\mathfrak{M}$.

2) Если в $\mathfrak{A}$ для $X, Y \in \mathfrak{A}$ всегда имеет место или $XY = X$, или $XY = Y$, то в $\mathfrak{L}$ всегда $X \leqslant Y$ или $Y \leqslant X$, т. е. $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено.

Если в $\mathfrak{A}$ для $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, всегда существует $Z_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}$, являющийся нулем $\mathfrak{B}$, т. е. $Z_{\mathfrak{B}} X = Z_{\mathfrak{B}}$ для любого $X \in \mathfrak{B}$, то $Z_{\mathfrak{B}}$ является нижней границей для $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{L}$ вполне упорядочено.

4.12. ***Теорема.*** *Полуструктура $\mathfrak{L}$ является полной структурой* (I, 5.13) *тогда и только тогда, когда сопряженная с ней полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей и для всякого непустого подмножества существуют нули, а в множестве этих нулей имеется единица.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{L}$ есть полная структура. Точная верхняя граница $\mathfrak{L}$ является единицей $\mathfrak{A}$. Точная нижняя граница Z подмножества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, является одним из нулей для $\mathfrak{B}$, причем, как легко видеть, Z есть единица в множестве этих нулей.

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает указанным в формулировке теоремы свойством и $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \varnothing$. Нули множества $\mathfrak{B}$ являются его нижними границами в $\mathfrak{L}$. Единица этого множества нулей будет точной нижней границей для $\mathfrak{B}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество всех единиц $\mathfrak{B}$. Оно не пусто, ибо $E_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{H}$. Через $\mathfrak{H}'$ обозначим множество нулей $\mathfrak{H}$, а через I единицу множества $\mathfrak{H}'$, принадлежащую $\mathfrak{H}'$. Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}'$. Следовательно, I есть верхняя граница для $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{L}$.

Если U есть произвольная верхняя граница $\mathfrak{B}$, то $U \in \mathfrak{H}$. Для I, как и для каждого элемента из $\mathfrak{H}'$, должно иметь место $IU = I$. Следовательно, $I \leqslant U$. Таким образом, I оказывается точной верхней границей $\mathfrak{B}$.

4.13. Существует несколько эквивалентных между собой определений так называемых дистрибутивных структур. Мы выберем одно, хотя и не самое распространенное, но наиболее удобное для наших целей (данное Бергманом доказательство его эквивалентности с другими определениями можно найти у Биркгофа [3], гл. IX, § 1).

Структура $\mathfrak{L}$ называется *дистрибутивной*, если в $\mathfrak{L}$ из условий

$$XY = XZ, \quad X + Y = X + Z \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{L})$$

всегда следует $Y = Z$.

Теорема. *Для того чтобы структура $\mathfrak{L}$ была дистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы в сопряженной с ней полугруппе $\mathfrak{A}$ для любых элементов X, Y, Z, удовлетворяющих условиям*

$$XY = XZ, \quad Y \neq Z,$$

среди единиц элемента X нашелся элемент, являющийся единицей для одного из элементов Y или Z и не являющийся единицей для другого из этих элементов.

Доказательство. 1) Пусть структура $\mathfrak{L}$ дистрибутивна и пусть в сопряженной с ней полугруппе $\mathfrak{A}$ для некоторых элементов X, Y, Z имеет место

$$XY = XZ,$$

причем всякая единица элемента X, являющаяся единицей для одного из элементов Y или Z, является единицей и для второго из них. Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество единиц совокупности $\{X, Y\}$, которое одновременно является множеством всех единиц и для совокупности $\{X, Z\}$.

Так как $\mathfrak{A}$ сопряжена со структурой, то $\mathfrak{K}$ содержит свой нуль W. Элемент W является точной верхней границей для $\{X, Y\}$ и точной верхней границей для $\{X, Z\}$. Таким образом, для наших элементов имеет место

$$XY = XZ, \quad X + Y = X + Z.$$

Благодаря дистрибутивности структуры $\mathfrak{L}$ это возможно только при $Y = Z$.

Из проведенного рассуждения следует, что $\mathfrak{A}$ обладает указанным в теореме свойством.

2) Пусть структура $\mathfrak{L}$ недистрибутивна, т. е. в ней имеются такие элементы X, Y, Z, что

$$XY = XZ, \quad X + Y = X + Z, \quad Y \neq Z.$$

Если I является единицей и для X и для Y, т. е. $I \geqslant X$, $I \geqslant Y$, то $I \geqslant (X + Y)$ и потому

$$I \cdot (X + Z) = I \cdot (X + Y) = X + Y = X + Z.$$

Следовательно, $I \geqslant X+Z \geqslant Z$, а потому I является единицей для Z.

Из проведенного рассуждения следует, что полугруппа $\mathfrak{A}$ не обладает свойством, указанным в формулировке теоремы.

4.14. Рассмотренные выше дистрибутивные структуры входят в более широкий класс так называемых дедекиндовых, или модулярных, структур. Из различных эквивалентных между собой определений этих структур мы возьмем нижеследующее (доказательство его эквивалентности с другими определениями можно найти у Биркгофа [3], гл. V, § 2).

Структура $\mathfrak{L}$ называется *дедекиндовой*, если в $\mathfrak{L}$ из условий

$$XY = XZ, \quad X+Y = X+Z, \quad Y \leqslant Z$$

всегда следует $Y = Z$.

Теорема. *Для того чтобы структура $\mathfrak{L}$ была дедекиндовой, необходимо и достаточно, чтобы в сопряженной с ней полугруппе $\mathfrak{A}$ было выполнено нижеследующее условие. Если элементы X, Y, Z удовлетворяют условию*

$$XY = XZ, \quad YZ = Y, \quad Y \neq Z,$$

то существует элемент, являющийся единицей и для X и для Y, но не являющийся единицей для Z.

Доказательство. 1) Пусть структура $\mathfrak{L}$ является дедекиндовой и в сопряженной с ней полугруппе $\mathfrak{A}$ для некоторых элементов X, Y, Z имеет место

$$XY = XZ, \quad YZ = Y,$$

причем всякий элемент, являющийся единицей и для X и для Y, обязательно является единицей и для Z. Так как из $YZ = Y$ следует, что всякая единица элемента Z является единицей и для Y, то мы можем провести рассуждения, аналогичные рассуждениям первой части доказательства теоремы 4.13. В результате мы получим, что для X, Y, Z в $\mathfrak{L}$ имеет место

$$XY = XZ, \quad X+Y = X+Z,$$

что, благодаря тому, что $Y \leqslant Z$, а $\mathfrak{L}$ дедекиндова, возможно лишь при $Y = Z$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ обладает требуемым свойством.

2) Пусть структура $\mathfrak{L}$ не является дедекиндовой, т. е. в ней найдутся такие X, Y, Z, что

$$XY = XZ, \quad X+Y = X+Z, \quad Y < Z.$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям, проведенным во второй части доказательства теоремы 4.13, приходим к тому, что в $\mathfrak{A}$ всякий элемент, являющийся единицей и для X и для Y, обязательно будет единицей и для Z. Следовательно, $\mathfrak{A}$ не удовлетворяют условию, сформулированному в теореме.

4.15. Структура $\mathfrak{L}$ называется *структурой с дополнениями*, если выполнены следующие условия.

(α). $\mathfrak{L}$ обладает таким элементом E, что $X \leqslant E$ для всех $X \in \mathfrak{L}$.

(β). $\mathfrak{L}$ обладает таким элементом O, что $X \geqslant O$ для всех $X \in \mathfrak{L}$.

(γ). Для каждого элемента $X \in \mathfrak{L}$ найдется элемент X' такой, что $XX' = O$, $X + X' = E$.

Из определения сопряженной полугруппы непосредственно вытекает нижеследующее.

Для того чтобы структура $\mathfrak{L}$ была структурой с дополнением, необходимо и достаточно, чтобы сопряженная ей полугруппа $\mathfrak{A}$ обладала единицей E и нулем O и чтобы для любого элемента $X \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ нашелся такой элемент X', что $XX' = O$ и совокупность $\{X, X'\}$ не обладает единицами, отличными от E.

4.16. Исторически первым типом изучаемых структур, продолжающим и до сих пор играть важную роль, были так называемые булевы алгебры.

Структура $\mathfrak{L}$ называется *булевой алгеброй*, если она дистрибутивна (4.13) и является структурой с дополнениями (4.15). Из 4.13 и 4.15 следует, что структура $\mathfrak{L}$ будет булевой алгеброй тогда и только тогда, когда сопряженная с ней полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает свойствами, сформулированными для $\mathfrak{A}$ в 4.13 и 4.15.

В теории структур доказывается (см., например, Биркгоф [3], гл. X, § 5) следующее свойство. Пусть $\mathfrak{L}$ некоторая совокупность подмножеств некоторого множества Ω (включающая и пустое подмножество), обладающая тем свойством, что $\mathfrak{L}$ вместе со всякими двумя множествами A, $B \subset \Omega$ содержит и их объединение $A \cup B$ и их пересечение $A \cap B$, причем для каждого $A \subset \Omega$ $\mathfrak{L}$ содержит его дополнение $A' = \Omega \setminus A$. Тогда относительно отношения включения $\mathfrak{L}$ будет булевой алгеброй. При этом всякая булева алгебра изоморфна как структура некоторой такой булевой алгебре подмножеств.

Отсюда следует, что относительно действия пересечения всякая совокупность подмножеств некоторого множества $\mathfrak{Q}$, обладающая указанными свойствами, является коммутативной полугруппой идемпотентов, обладающей следующими свойствами.

$\mathfrak{A}$ обладает единицей E и нулем O. Для всякого X найдется такой элемент X', что $XX' = O$, а совокупность $\{X, X'\}$ не имеет единиц, отличных от E. Если $XY = XZ$, где $Y \neq Z$, то среди единиц элемента X существует элемент, являющийся единицей для одного из элементов Y или Z и не являющийся единицей для другого из этих элементов.

При этом всякая коммутативная полугруппа идемпотентов с этими свойствами изоморфна некоторой полугруппе подмножеств, действием в которой является пересечение подмножеств и совокупность которых обладает указанными выше свойствами.

4.17. Посвятив настоящий параграф рассмотрению ряда свойств частичной упорядоченности, мы включим сюда также доказательство одной общей теоремы теории частично упорядоченных множеств, так называемой леммы Цорна, которая в нескольких случаях окажется удобной для вывода некоторых свойств полугрупп. Приводимое доказательство принадлежит Вестону [1].

Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторое непустое частично упорядоченное множество. Обозначим через $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ класс таких его подмножеств (иногда называемых цепями), в каждом из которых частичная упорядоченность $\mathfrak{M}$ индуцирует линейную упорядоченность. В число подмножеств, принадлежащих $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, включается и пустое.

Теорема. *Если частично упорядоченное множество $\mathfrak{M}$ таково, что каждое его подмножество из $\Sigma_{\mathfrak{M}}$ обладает в $\mathfrak{M}$ верхней границей, то $\mathfrak{M}$ обладает максимальным элементом, т. е. таким элементом, который не предшествует никакому отличному от себя самого элементу из $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. 1) Каждому $\mathfrak{L} \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$ сопоставим множество $\overline{\mathfrak{L}}$, состоящее из всех тех верхних границ множества $\mathfrak{L}$, которые не содержатся в $\mathfrak{L}$. Конечно, для неко-

---

[1] J. Weston, A short proof of Zorn's lemma, Arch. der Math., 8 (1957), 279.

торых $\mathfrak{L}$ множество $\overline{\mathfrak{L}}$ может оказаться пустым. Если само $\mathfrak{L}$ пусто, то $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{M}$. В каждом непустом $\overline{\mathfrak{L}}$ ($\mathfrak{L} \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$) фиксируем произвольным образом некоторый элемент $f(\overline{\mathfrak{L}}) \in \overline{\mathfrak{L}}$ [1] (при этом, если $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2$, но $\overline{\mathfrak{L}}_1 = \overline{\mathfrak{L}}_2$, то $f(\overline{\mathfrak{L}}_1) = f(\overline{\mathfrak{L}}_2)$).

2) Обозначим через $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ класс таких непустых множеств $\mathfrak{L}$ из $\Sigma_{\mathfrak{M}}$, которые обладают следующим свойством. Каково бы ни было $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$, такое, что $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, элемент $f(\overline{\mathfrak{N}})$ должен содержаться в $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}$ и быть в этом множестве его нижней границей.

Отметим, что класс $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ не пуст, поскольку множество, состоящее из одного элемента $f(\overline{\varnothing})$, очевидно, принадлежит $\Gamma_{\mathfrak{M}}$.

3) Если $\mathfrak{L} \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{L}} \neq \varnothing$, то, присоединив к $\mathfrak{L}$ элемент $f(\overline{\mathfrak{L}})$, мы получаем отличное от $\mathfrak{L}$ множество $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \cup f(\overline{\mathfrak{L}})$. Докажем, что $\mathfrak{L}'$ принадлежит к $\Gamma_{\mathfrak{M}}$.

Поскольку $f(\overline{\mathfrak{L}})$ есть верхняя граница $\mathfrak{L}$, то, очевидно, $\mathfrak{L}' \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$.

Пусть для некоторого $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}'$ имеем $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}' \neq \varnothing$.

Если $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, то из $\mathfrak{L} \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ следует, что $f(\overline{\mathfrak{N}})$ принадлежит $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}$ и является его нижней границей. Но тогда $f(\overline{\mathfrak{N}})$, очевидно, будет содержаться и в $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}'$ и будет в нем нижней границей.

Если $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L} = \varnothing$, то $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}' = f(\overline{\mathfrak{L}})$. То, что никакой $X \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{N}$ не является для $\mathfrak{N}$ верхней границей, благодаря $\mathfrak{L} \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$ означает, что для $X \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{N}$ всегда найдется такой $Y \in \mathfrak{N}$, что $X \leqslant Y$. Отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{N}}$. Но тогда $f(\overline{\mathfrak{N}}) = f(\overline{\mathfrak{L}})$ содержится в $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}' = f(\overline{\mathfrak{L}})$ и является в нем нижней границей.

4) Пусть $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}' \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ и $X \in \mathfrak{L}$, $X' \in \mathfrak{L}'$, $X' \overline{\in} \mathfrak{L}$. Докажем, что тогда $X < X'$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех элементов из $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$, которые отличны от X' и предшествуют X'. Так как $X' \in \overline{\mathfrak{N}}$,

---

[1] Здесь мы применяем так называемый принцип выбора, о месте которого в математике высказывалось много глубоких и не всегда согласных между собой соображений. Разумеется, в настоящей книге не место останавливаться на рассмотрении этого вопроса.

то пересечение $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}'$ содержит X'. Благодаря определению $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ из $\mathfrak{L}' \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ следует $f(\overline{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{L}'$ и $f(\overline{\mathfrak{N}}) \leqslant X'$.

Если бы $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} \neq \varnothing$, то, по определению $\Gamma_{\mathfrak{M}}$, элемент $f(\overline{\mathfrak{N}})$ принадлежал бы $\mathfrak{L}$. Но это невозможно, так как иначе $f(\overline{\mathfrak{N}})$ принадлежал бы $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$, что благодаря $f(\overline{\mathfrak{N}}) < X'$ (равенство $f(\overline{\mathfrak{N}}) = X'$ в этом случае невозможно, ибо $X' \overline{\in} \mathfrak{L}$) означало бы, что $f(\overline{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{N}$.

Если $X \in \mathfrak{N}$, то $X < X'$ по определению $\mathfrak{N}$.

Если $X \overline{\in} \mathfrak{N}$, то из $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L} = \varnothing$ следует, что X не является для $\mathfrak{N}$ верхней границей. Ввиду $\mathfrak{L} \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$, из этого следует, что для X найдется такой $Z \in \mathfrak{N}$, что $X \leqslant Z$. Так как $Z < X'$, то $X < X'$.

5) Обозначим через $\mathfrak{L}_0$ объединение всех $\mathfrak{L}$, принадлежащих $\Gamma_{\mathfrak{M}}$. Докажем, что $\mathfrak{L}_0 \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$. Пусть X, $Y \in \mathfrak{L}_0$, это значит, что в $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ найдутся такие $\mathfrak{L}_X$ и $\mathfrak{L}_Y$, что $X \in \mathfrak{L}_X$, $Y \in \mathfrak{L}_Y$. Если $Y \in \mathfrak{L}_X$, то из $\mathfrak{L}_X \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$ следует, что $X \leqslant Y$ или $Y \leqslant X$. Если $Y \overline{\in} \mathfrak{L}_X$, то, согласно четвертой части доказательства, $X < Y$. Из сказанного следует, что $\mathfrak{L}_0 \in \Sigma_{\mathfrak{M}}$.

6) Докажем, что $\mathfrak{L}_0 \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$.

Благодаря сказанному во второй части доказательства, $\mathfrak{L}_0$ не пусто.

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}_0$ и $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}_0 \ni X$. Элемент X содержится в некотором $\mathfrak{L} \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ и является верхней границей для $\mathfrak{N}$. Пусть $Z \in \mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}_0$, должен найтись такой $\mathfrak{L}' \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$, что $Z \in \mathfrak{L}'$. Если бы $Z \overline{\in} \mathfrak{L}$, то, согласно доказанному в четвертой части, мы имели бы $Z > X$, что невозможно, ибо $Z \in \mathfrak{N}$, а $X \in \overline{\mathfrak{N}}$. Следовательно, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L} \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L} \ni X$, то $f(\overline{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{L}$ и $f(\overline{\mathfrak{N}}) \leqslant X$. Таким образом, $f(\overline{\mathfrak{N}}) \in \overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}_0$ и $f(\overline{\mathfrak{N}})$ предшествует произвольному X из $\overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{L}_0$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{L}_0 \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$.

7) Пусть P есть верхняя граница для $\mathfrak{L}_0$. Предположим, что $P < Q$ для некоторого $Q \in \mathfrak{M}$. Для любого $X \in \mathfrak{L}_0$ мы имеем $X \leqslant P < Q$. Следовательно, $Q \in \overline{\mathfrak{L}}_0$. Но из $\overline{\mathfrak{L}}_0 \neq \varnothing$, согласно доказанному в третьей части доказательства, следовало бы, что L_0 содержится в некотором $\mathfrak{L}' \in \Gamma_{\mathfrak{M}}$, отличном от $\mathfrak{L}_0$. Однако это невозможно, поскольку $\mathfrak{L}_0$ содержит все множества, принадлежащие к $\Gamma_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, P оказывается искомым максимальным элементом.

4.18. Используем доказанную теорему для вывода условия существования нуля в коммутативных полугруппах идемпотентов.

Пусть в коммутативной полугруппе идемпотентов $\mathfrak{A}$ каждое подмножество, в котором из двух любых элементов один является нулем для другого, всегда обладает нулем. Тогда $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с нулем.

Действительно, определим в $\mathfrak{A}$ отношение, полагая $X \leqslant Y$ ($X, Y \in \mathfrak{A}$), если $XY = Y$. Очевидно, это отношение является частичной упорядоченностью. Благодаря сделанному предположению относительно $\mathfrak{A}$ к этому отношению можно применить теорему 4.17. Согласно этой теореме, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент P такой, что $PX = X$ возможно лишь для $X = P$. Пусть A произвольный элемент из $\mathfrak{A}$. Так как $P(PA) = PA$, то $PA = P$. Таким образом, P оказывается нулем полугруппы $\mathfrak{A}$.

4.19. Аналогичный с 4.18 результат для единицы полугруппы $\mathfrak{A}$ получить невозможно. Коммутативная полугруппа идемпотентов с нулем $\mathfrak{A} = \{O, A, B\}$, у которой $AB = O$, дает пример отсутствия единицы. Можно получить лишь более слабое свойство.

Пусть в коммутативной полугруппе идемпотентов $\mathfrak{A}$ каждое подмножество, в котором из двух любых элементов один является единицей для другого, всегда обладает единицей. Тогда в $\mathfrak{A}$ существует элемент, не имеющий отличных от себя самого единиц.

Справедливость этого утверждения непосредственно получается путем применения теоремы 4.17 к отношению частичной упорядоченности в $\mathfrak{A}$, согласно которой X предшествует Y, если Y есть единица элемента X.

§ 5. Полугруппы, все элементы которых имеют правые нули

5.1. Среди различных вопросов, встающих при изучении полугрупп преобразований, очень важным является вопрос о наличии неподвижных точек у преобразования, т. е. таких элементов преобразуемого множества, которые при данном преобразовании преобразуются сами в себя. В различных областях математики рассматриваются полугруппы преобразований, обладающие тем свойством, что каждое преобра-

зование имеет неподвижную точку. Такое свойство полугруппы преобразований, как только оно бывает установлено, обычно оказывается источником далеко идущих следствий, важных для изучения тех объектов, преобразования которых рассматриваются. Это свойство полугрупп, конечно, не является свойством абстрактного типа как мы определили это понятие в I, 1.8; I, 1.14. Прежде всего, оно вообще может относиться лишь к полугруппам преобразований. Но даже и ограничиваясь полугруппами преобразований, нетрудно дать пример двух таких изоморфных между собой полугрупп преобразований, что все преобразования одной из них имеют неподвижные точки, в то время как во второй полугруппе ни одно из преобразований не имеет неподвижных точек. И все же несмотря на это обстоятельство, как было замечено Е. С. Ляпиным [11], пользуясь понятиями теории делимости в полугруппах, можно подойти к изучению указанного важного свойства преобразований с абстрактной точки зрения.

5.2. Обозначим через П класс таких полугрупп $\mathfrak{A}$, у которых каждый элемент обладает правым нулем.

5.3. ***Теорема.*** *Полугруппы, принадлежащие классу* П, *и только они обладают тем свойством, что при любом представлении преобразованиями полугруппы каждое преобразование представления имеет неподвижную точку.*

Доказательство. 1) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ принадлежит классу П, и φ есть произвольное представление $\mathfrak{A}$, т. е. изоморфизм $\mathfrak{A}$ на некоторую полугруппу преобразований какого-то множества Ω. Для $X \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент U, что $XU = U$. Возьмем произвольный элемент α из Ω. Обозначим $[\varphi(U)]\alpha = \beta$. Тогда

$$[\varphi(X)]\beta = [\varphi(X)] \cdot [\varphi(U)]\alpha = [\varphi(XU)]\alpha = [\varphi(U)]\alpha = \beta,$$

т. е. β оказывается неподвижной точкой преобразования $\varphi(X)$.

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ такова что при любом представлении преобразованиями каждое преобразование представления имеет неподвижную точку. Рассмотрим представление φ полугруппы $\mathfrak{A}$ левыми сдвигами (I, 3.9; I, 3.10). Элемент $T_X = \varphi(X)$, где $X \in \mathfrak{A}$, являющийся преобразованием этого представления, должен иметь неподвижную точку. Отделяющий элемент I не может являться этой неподвижной точкой (так как $T_X I = X$). Следовательно, такой неподвижной точкой

является некоторый элемент $U \in \mathfrak{A}$, для которого мы тем самым получаем

$$U = T_X U = XU.$$

5.4. Конечно, далеко не всякая полугруппа преобразований, все преобразования которой обладают неподвижными точками, содержится в классе Π. Однако, как мы скоро увидим, в известном отношении класс Π может быть использован для характеристики всех таких полугрупп преобразований.

Сперва рассмотрим один важный частный случай.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть такая полугруппа преобразований множества Ω, которая для каждого $\alpha \in \Omega$ содержит преобразование U_α, преобразующее все элементы из Ω в α (т. е. $U_\alpha \xi = \alpha$ при всяком $\xi \in \Omega$). Для того чтобы каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имело неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ принадлежала классу Π.*

Доказательство. 1) Пусть каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ обладает неподвижной точкой.

Для $X \in \mathfrak{A}$ найдется $\alpha \in \Omega$, для которого

$$X\alpha = \alpha.$$

Тогда при любом $\xi \in \Omega$

$$XU_\alpha \xi = X\alpha = \alpha = U_\alpha \xi$$

и, следовательно, $XU_\alpha = U_\alpha$. Таким образом, каждый элемент из $\mathfrak{A}$ имеет правый нуль и $\mathfrak{A} \in \Pi$.

2) Если полугруппа преобразований $\mathfrak{A}$ принадлежит Π, то тождественное отображение $\mathfrak{A}$ на себя, являющееся представлением $\mathfrak{A}$ преобразованиями, согласно 5.3 таково, что каждое преобразование должно иметь неподвижную точку.

5.5. При помощи теоремы 5.4 легко убедиться, что ряд полугрупп преобразований, играющих весьма важную роль в различных областях математики, принадлежат классу Π.

Пусть Ω есть полное метрическое пространство [1] и $\mathfrak{A}$ полугруппа всех операторов сближения, т. е. таких преоб-

[1] См., например, Л. А. Люстерник и В. П. Соболев. Элементы функционального анализа, гл. I, § 2 и 4, Гостехиздат, 1951.

разований A множества Ω, что для каждого из них найдется такое вещественное число θ_A, что $0 \leqslant \theta_A < 1$ и при любых $\alpha, \beta \in \Omega$

$$\rho(A\alpha, A\beta) \leqslant \theta_A \cdot \rho(\alpha, \beta)$$

(здесь ρ означает расстояние между соответствующими элементами).

Легко видеть, что $\mathfrak{A}$ является полугруппой. При этом преобразования U_α (5.4) для всех $\alpha \in \Omega$ принадлежат $\mathfrak{A}$. Поэтому применима теорема 5.4. Как известно [1], согласно так называемому принципу Банаха, каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ обладает неподвижной точкой. Отсюда, согласно 5.4, следует, что полугруппа $\mathfrak{A}$ принадлежит классу II.

5.6. Пусть Ω есть n-мерный шар (можно, конечно, считать n-мерный симплекс) n-мерного пространства. $\mathfrak{A}$ есть совокупность всех непрерывных преобразований Ω.

Согласно теореме Броуэра [2], каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку. По теореме 5.4 $\mathfrak{A}$ должна принадлежать II.

5.7. Одним из наиболее сильных признаков существования неподвижных точек является так называемый принцип Тихонова [3]. Пусть Ω есть выпуклое бикомпактное подмножество линейного локально выпуклого пространства. Согласно указанному принципу, каждое непрерывное преобразование Ω обладает неподвижной точкой. Благодаря теореме 5.4 отсюда следует, что полугруппа всех непрерывных преобразований Ω принадлежит классу II.

5.8. В связи с приведенными примерами естественно возникает вопрос, нельзя ли в этих примерах также, как и в других новых случаях, доказать существование неподвижных точек у каждого преобразования некоторой полугруппы преобразований $\mathfrak{A}$, доказав для этого предварительно, что $\mathfrak{A}$ принадлежит классу II (или содержится в некоторой полугруппе преобразований того же множества, принадлежащей II, что, как мы увидим в теореме 5.9, также достаточно).

---

[1] См., например, Л. А. Люстерник и В. П. Соболев. Элементы функционального анализа, гл. I, § 7, Гостехиздат, 1951.

[2] См., например, В. В. Немыцкий. Метод неподвижных точек в анализе, УМН, в. 1, (1936), § 3.

[3] Там же, § 7.

Разумеется, в принципе это всегда возможно. Практически, однако, такой путь доказательства непрост, так как требует ясного представления о строении полугруппы преобразований $\mathfrak{A}$.

Однако независимо от возможности получения указанным способом новых фактов о неподвижных точках в той или иной математической теории сам факт иного, „чисто алгебраического" подхода к указанному важному свойству может представлять известный интерес. Причину важного факта существования неподвижных точек у преобразований некоторой полугруппы преобразований $\mathfrak{A}$ множества Ω можно в рассматриваемых случаях видеть не в природе множества Ω и не в том, как преобразования из $\mathfrak{A}$ воздействуют на элементы из Ω, но в том, каково алгебраическое строение полугруппы $\mathfrak{A}$. Действительно, преобразования из полугруппы преобразований $\mathfrak{A}'$ некоторого множества Ω' обязательно все будут иметь неподвижные точки, если только $\mathfrak{A}'$ изоморфна, например, полугруппе $\mathfrak{A}$ из 5.6 или из 5.7 и т. д. совершенно независимо от того, какова природа Ω' и каковы преобразования из $\mathfrak{A}'$.

5.9. Роль класса П для изучения рассматриваемого явления не исчерпывается теоремой 5.4. С ее помощью доказывается теорема, показывающая роль П в общем случае.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа некоторых преобразований множества Ω. Если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ полугруппа преобразований того же множества Ω, принадлежащая классу* П, *то каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку.*

Обратно, если каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку, то найдется такая принадлежащая классу П *полугруппа преобразований $\mathfrak{A}'$ того же множества Ω, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}' \in \Pi$. Из того, что $\mathfrak{A}'$ принадлежит классу П, согласно теореме 5.3 следует, что каждое преобразование из $\mathfrak{A}'$, а следовательно, и каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ (поскольку $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$) имеет неподвижную точку.

2) Для каждого $\alpha \in \Omega$ обозначим через U_α такое преобразование Ω, что при любом $\xi \in \Omega$ $U_\alpha \xi = \alpha$. Множество всех преобразований $U_\alpha (\alpha \in \Omega)$ и всех преобразований из $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{A}'$. Множество $\mathfrak{A}'$ является полугруппой.

Действительно, очевидно,

$$U_\alpha U_\beta = U_\alpha,$$
$$U_\alpha A = U_\alpha,$$
$$AU_\alpha = U_{(A\alpha)},$$
$$AB \in \mathfrak{A}, \quad (\alpha, \beta \in \Omega;\ A, B \in \mathfrak{A}).$$

Полугруппа $\mathfrak{A}'$ содержит полугруппу $\mathfrak{A}$. Элемент $\alpha \in \Omega$ является неподвижной точкой для U_α. Поэтому, если каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку, то и все преобразования из $\mathfrak{A}'$ обладают неподвижными точками. В этом случае из 5.4 следует, что полугруппа $\mathfrak{A}'$ должна принадлежать классу Π.

5.10. Рассмотренная во второй части доказательства теоремы 5.9 полугруппа преобразований $\mathfrak{A}'$, охватывающая исходную полугруппу преобразований $\mathfrak{A}$, очевидно, может быть построена для любой полугруппы преобразований $\mathfrak{A}$. При помощи этой полугруппы $\mathfrak{A}'$ можно определить, обладают ли все преобразования из $\mathfrak{A}$ неподвижными точками.

Для того, чтобы все преобразования из полугруппы $\mathfrak{A}$ *обладали неподвижными точками, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа преобразований* $\mathfrak{A}'$ *принадлежала классу* Π.

5.11. Проведенные рассуждения показывают важность определенного нами класса полугрупп Π. Естественно поставить вопрос об изучении строения всех полугрупп этого класса. Однако в столь широкой постановке решение такой задачи нереально. Ведь всякая полугруппа может быть „превращена“ в полугруппу из Π путем внешнего присоединения нуля (2.10; 2.12). Вместо этого мы в главе VIII (§ 5) возвратимся к классу Π и получим то, что можно было бы назвать локальным строением полугрупп этого класса.

5.12. В этих рассуждениях важную роль будут играть две полугруппы из Π, которые мы сейчас и рассмотрим в качестве примера полугрупп из Π.

Пусть $\mathfrak{U}$ есть множество элементов $U_\alpha^\beta (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$ с правилом умножения

$$U_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdot U_{\alpha_2}^{\beta_2} = U_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdot U_{\alpha_1}^{\beta_1} = U_{\alpha_2}^{\beta_2} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2),$$
$$U_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdot U_{\alpha_1}^{\beta_2} = U_{\alpha_1}^{\beta_1+\beta_2}, \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ассоциативность действия видна непосредственно. Отметим, что U_a^β действительно оказывается β-й степенью элемента $U_a^1 = U_a$.

Для каждого $U_{a_1}^{\beta_1}$ все элементы $U_{a_2}^{\beta_2}$ при $\alpha_2 > \alpha_1$ оказываются не только правыми, но и двусторонними нулями. Таким образом, полугруппа $\mathfrak{U}$ принадлежит классу П.

5.13. Пусть $\mathfrak{V}$ есть множество выражений вида

$$(V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1}),$$

где α_i — целые неотрицательные числа, причем $\alpha_n > 0$. В $\mathfrak{V}$ определяем умножение:

$$(V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1}) \cdot (V_m^{\beta_m} V_{m-1}^{\beta_{m-1}} \dots V_2^{\beta_2} V_1^{\beta_1}) =$$
$$= \begin{cases} (V_m^{\beta_m} V_{m-1}^{\beta_{m-1}} \dots V_2^{\beta_2} V_1^{\beta_1}) & (m > n), \\ (V_n^{\alpha_n} \dots V_{m+1}^{\alpha_{m+1}} V_m^{\alpha_m + \beta_m} V_{m-1}^{\beta_{m-1}} \dots V_2^{\beta_2} V_1^{\beta_1}) & (m \leqslant n). \end{cases}$$

Ассоциативность умножения проверяется без труда.

Если обозначить

$$V_n = (V_n^1 V_{n-1}^0 \dots V_2^0 V_1^0),$$

то элемент $(V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1})$ будет не чем иным, как произведением $V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1}$ (где под V_β^0 подразумевается пустой символ).

Для произвольного элемента $(V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1})$ правыми нулями являются все элементы $(V_m^{\beta_m} V_{m-1}^{\beta_{m-1}} \dots V_2^{\beta_2} V_1^{\beta_1})$, у которых $m > n$. Таким образом, $\mathfrak{V}$ принадлежит классу П. Отметим, что в $\mathfrak{V}$, как легко убедиться, ни один элемент не имеет левого нуля.

5.14. Роль полугрупп $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ в известной степени проясняется благодаря следующему свойству.

Лемма. *Если полугруппа $\mathfrak{A}$, не имеющая идемпотентов, принадлежит* П, *то существуют или изоморфизм $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{A}$, или изоморфизм $\mathfrak{V}$ в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. 1) Прежде всего отметим, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ из $A^a = A^b$ всегда следует $a = b$. Действи-

тельно, при $a > b$ благодаря $A^{b+(a-b)} = A^b$ мы получили бы

$$(A^{(a-b)b})^2 = A^{2(a-b)b} = A^{b+(a-b)b} \cdot A^{(a-b)b-b} = \\ = A^b \cdot A^{(a-b)b-b} = A^{(a-b)b}.$$

Ниже мы рассмотрим отдельно два возможных случая.

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ существует такая бесконечная последовательность элементов $A_1, A_2, A_3, \ldots$, в которой каждый последующий элемент является двусторонним нулем предыдущего.

Определяем отображение φ полугруппы $\mathfrak{U}$ (5.12) в $\mathfrak{A}$:

$$\varphi\left(U_\alpha^\beta\right) = A_\alpha^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots).$$

Это отображение взаимно однозначно. Действительно, пусть

$$A_{\alpha_1}^{\beta_1} = A_{\alpha_2}^{\beta_2}.$$

При $\alpha_1 = \alpha_2$, как мы показали выше, обязательно $\beta_1 = \beta_2$. Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то, умножив обе части равенства на A_{α_1}, получаем

$$A_{\alpha_1}^{\beta_1+1} = A_{\alpha_1},$$

что невозможно.

Так как при $\alpha_1 > \alpha_2$ A_{α_1} является двусторонним нулем для A_{α_2}, то элементы $A_\alpha^\beta (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$ перемножаются по тому же правилу, что и элементы U_α^β в полугруппе $\mathfrak{U}$ (5.12). Таким образом, φ оказывается изоморфизмом $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{A}$.

3) Пусть в $\mathfrak{A}$ всякая последовательность элементов $A_1, A_2, \ldots$, в которой каждый последующий элемент является двусторонним нулем для предыдущего, может иметь лишь конечное число членов.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех таких элементов $\mathfrak{A}$, которые не имеют двусторонних нулей, через $\mathfrak{B}^*$ совокупность всех таких элементов $\mathfrak{A}$, никакая степень которых не имеет двустороннего нуля.

Покажем, что для всякого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}^*$ найдется элемент A^*, являющийся для A правым нулем.

Строим последовательность $X_0 = A, X_1, X_2, \ldots$ элементов из $\mathfrak{A}$. X_1 есть некоторый правый нуль элемента A. При этом, если существуют правые нули элемента A, не принадлежащие $\mathfrak{B}$, то X_1 один из них. $X_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ есть двусторонний нуль элемента X_n, при этом, если суще-

ствуют двусторонние нули элемента X_n, не принадлежащие $\mathfrak{B}$, то X_{n+1} один из них. Согласно предположению, эта последовательность должна оборваться на некотором члене $X_m (m \geqslant 1)$. Этот последний элемент принадлежит $\mathfrak{B}$. Покажем, что более того, $X_m \in \mathfrak{B}^*$. Действительно, в противном случае при, некотором k элемент X_m^k имел бы двусторонний нуль, т. е. $X_m^k \in \mathfrak{B}$. Однако из $X_m \in \mathfrak{B}$ следует, что всякий двусторонний нуль элемента X_{m-1} (или правый нуль элемента $A = X_0$, если $m = 1$) должен принадлежать $\mathfrak{B}$. В то же время элемент X_m^k, очевидно, является двусторонным нулем для X_{m-1} (или правым нулем для $A = X_0$, если $m = 1$), но не принадлежит $\mathfrak{B}$.

Элемент X_m, принадлежащий $\mathfrak{B}^*$, очевидно, является правым нулем для A и потому мы можем взять его в качестве искомого A^*.

4) В предположении, сделанном в начале предыдущей части доказательства, строим бесконечную последовательность элементов $\mathfrak{A}$

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

A_0 произвольный элемент из $\mathfrak{A}$; $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ есть элемент A_{n-1}^*, обладающий указанными в предыдущей части доказательства свойствами относительно A_{n-1}.

Каждый элемент $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ принадлежит $\mathfrak{B}^*$ и является правым нулем для всех предшествующих элементов.

Определим отображение φ полугруппы $\mathfrak{B}$ (5.13) в $\mathfrak{A}$:

$$\varphi\left(V_n^{\alpha_n} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots V_2^{\alpha_2} V_1^{\alpha_1}\right) = A_n^{\alpha_n} A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots A_2^{\alpha_2} A_1^{\alpha_1}$$

(A_i^0 означает пустой символ).

Докажем взаимную однозначность φ.

Предположим

$$A_n^{\alpha_n} A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots A_2^{\alpha_2} A_1^{\alpha_1} = A_n^{\beta_n} A_{n-1}^{\beta_{n-1}} \ldots A_2^{\beta_2} A_1^{\beta_1},$$

где $\alpha_n \neq 0$ и $\alpha_j - \beta_j = \delta > 0$, причем $\alpha_i = \beta_i$ при всех $i > j$.

Умножим это равенство справа на A_j. Так как A_j является правым нулем для всех A_i при $i < j$, то мы получим

$$A_n^{\gamma_n} A_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \ldots A_{j+1}^{\gamma_{j+1}} A_j^{\beta_j+\delta+1} = A_n^{\gamma_n} A_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \ldots A_{j+1}^{\gamma_{j+1}} A_j^{\beta_j+1}.$$

Как мы знаем, j не может равняться n.

Обозначив

$$W = A_n^{\gamma_n} A_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \dots A_{j+1}^{\gamma_{j+1}} A_j^{\beta_{j+1}},$$

получаем

$$A_j^{\delta} W = W, \quad W A_j^{\delta} = W,$$

что противоречит тому, что $A_j \in \mathfrak{B}^*$.

Взаимная однозначность отображения φ доказана.

Так как A_p является правым нулем для A_q при $q < p$, то умножение элементов вида $A_n^{\alpha_n} A_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots A_2^{\alpha_2} A_1^{\alpha_1}$ совершается по тому же правилу, как и умножение соответствующих элементов в $\mathfrak{B}$. Поэтому отображение φ оказывается изоморфизмом $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.

§ 6. Регулярные элементы

6.1. В ряде вопросов теории полугрупп оказывается полезным понятие регулярности, заимствованное из теории колец.

Определение. *Элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ называется регулярным, если в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент X, что*

$$AXA = A.$$

Полугруппа, все элементы которой регулярны, называется регулярной полугруппой.

Элемент A называется вполне регулярным, если в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент X, что

$$AXA = A,$$

$$AX = XA.$$

Полугруппа, все элементы которой вполне регулярны, называется вполне регулярной.

Очевидно, в коммутативных полугруппах понятия регулярности и полной регулярности совпадают.

Примером регулярной полугруппы является $\mathfrak{S}_\Omega$ — полугруппа всех преобразований множества Ω (I, 3. 6). Действительно, для всякого $S \in \mathfrak{S}_\Omega$, как легко убедиться, соотношение $S\bar{S}S = S$ выполняется при всяком $\bar{S} \in \mathfrak{S}_\Omega$, таком, что $\bar{S}\alpha$ ($\alpha \in \Omega$) равно какому-либо из элементов β, таких, что $S\beta = \alpha$, и произвольно при $S\Omega \not\ni \alpha$.

Впервые понятие регулярности было введено Дж. Нейманом[1] для элементов кольца. Элемент кольца регулярен, если он является регулярным элементом мультипликативной полугруппы кольца в вышеуказанном смысле. В теории колец выделение регулярных колец представляет значительный интерес с нескольких точек зрения.

В общей теории полугрупп регулярные полугруппы под названием demi-groupes inversifs были впервые рассмотрены Тьерреном [1]. Вполне регулярные полугруппы были введены Клиффордом [4], рассматривавшим их с точки зрения, на которой мы подробно остановимся в главе VIII.

6.2. Свойство регулярности элемента оказывается связанным с вопросом о наличии у него некоторых специальных единиц.

Определение. *Элемент I полугруппы $\mathfrak{A}$, являющийся левой единицей элемента $A \in \mathfrak{A}$ называется регулярной левой единицей A, если I делится слева на A.*

I называется регулярной правой единицей A, если I является правой единицей A и делится справа на A.

I называется регулярной двусторонней единицей A, если I является двусторонней единицей A и делится на A и слева и справа.

Таким образом, для того чтобы $I \in \mathfrak{A}$ был регулярной левой единицей $A \in \mathfrak{A}$, надо, чтобы существовал такой $X \in \mathfrak{A}$, что

$$IA = A, \quad AX = I.$$

Аналогично условие того, что I является правой регулярной единицей.

Двусторонне регулярной единицей элемента A элемент I является тогда и только тогда, когда I является одновременно и регулярной левой единицей и регулярной правой единицей элемента A. Хотя, как мы увидим вскоре, элемент, обладающий регулярной левой единицей, обязательно имеет и регулярную правую единицу, возможен случай, когда элемент имеет двустороннюю единицу, которая является его регулярной левой единицей, но не является регулярной

---

[1] J. Neumann. On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 22, (1936), 707—713.

двусторонней единицей. Пример этого мы получим в III, 6.2 и III, 6.3.

6.3. При рассмотрении свойства регулярности особую роль играют идемпотенты.

Каждый идемпотент вполне регулярен. Он является своей собственной регулярной двусторонней единицей.

Регулярная левая единица любого элемента всегда является идемпотентом.

Действительно, пусть

$$IA = A, \quad AX = I.$$

Тогда

$$I^2 = I \cdot AX = AX = I.$$

Аналогичное свойство справедливо и для регулярных правых единиц.

6.4. *Теорема.* *Нерегулярный элемент полугруппы не имеет ни регулярной левой единицы, ни регулярной правой единицы.*

Регулярный элемент обладает и регулярной левой единицей и регулярной правой единицей.

Вполне регулярный элемент обладает регулярной двусторонней единицей.

Элемент, не являющийся вполне регулярным, регулярной двусторонней единицы не имеет.

Доказательство. 1) Если I есть регулярная левая единица элемента A, т. е. при некотором X

$$IA = A, \quad AX = I,$$

то

$$AXA = IA = A,$$

т. е. A регулярен.

Аналогично доказывается регулярность элемента, имеющего правую регулярную единицу.

2) Если $AXA = A$, то, обозначив $I_A = AX$ и $I^{(A)} = XA$, получаем

$$I_A A = A, \quad I_A = AX,$$

$$AI^{(A)} = A, \quad I^{(A)} = XA,$$

т. е. I_A является регулярной левой единицей A, а $I^{(A)}$ регулярной правой единицей.

3) Если для элементов A, $X \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$AXA = A, \quad AX = XA = I,$$

то

$$AI = AXA = A, \quad IA = AXA = A,$$
$$I = AX = XA,$$

т. е. I является регулярной двусторонней единицей A.

4) Пусть элемент A обладает регулярной двусторонней единицей I:

$$AI = IA = A, \quad I = UA = AV.$$

Обозначим $X = UAV$. Мы имеем

$$AXA = AUAVA = AIVA = AVA = IA = A,$$
$$AX = AUAV = AIV = AV = I,$$
$$XA = UAVA = UIA = UA = I,$$
$$AX = XA.$$

Полученные соотношения между A и X и означают, что элемент A является вполне регулярным.

6.5. Регулярный элемент полугруппы может иметь несколько различных регулярных левых единиц, так же как и несколько регулярных правых. Однако регулярная двусторонняя единица для вполне регулярного элемента определяется единственным образом.

Элемент полугруппы может иметь не более одной регулярной двусторонней единицы.

Действительно, если и I_1 и I_2 являются регулярными двусторонними единицами элемента A, то при некоторых X и Y

$$I_1 = XA, \quad I_2 = AY.$$

Благодаря этому

$$I_1 = XA = XAI_2 = I_1I_2 = I_1AY = AY = I_2.$$

6.6. ***Определение.*** *Если элементы A и B полугруппы $\mathfrak{A}$ связаны соотношениями*

$$ABA = A, \quad BAB = B,$$

то они называются регулярно сопряженными.

Элемент, регулярно сопряженный с элементом A, В. В. Вагнер [1], [2], [3], подробно рассматривавший такую связь

элементов, называет обобщенно обратным для A и обозначает через A^{-1}.

Отметим, что элемент полугруппы может иметь несколько регулярно сопряженных с ним элементов. Например, в полугруппе, в которой произведение двух любых элементов равно левому сомножителю, очевидно, всякие два элемента регулярно сопряжены между собой.

6.7. Элемент, обладающий регулярно сопряженным, очевидно, является регулярным. Оказывается справедливо и обратное.

Теорема. *Всякий регулярный элемент полугруппы обладает регулярно сопряженным. Вполне регулярный элемент обладает таким регулярно сопряженным, который с ним перестановочен.*

Доказательство. Для регулярного элемента A полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой элемент X, что

$$AXA = A.$$

Обозначив $B = XAX$, получаем

$$ABA = A \cdot XAX \cdot A = A \cdot XA \cdot XA = AXA = A,$$

$$BAB = XAX \cdot A \cdot XAX = X \cdot AXA \cdot XAX =$$

$$= XAXAX = XAX = B,$$

т. е. A и B регулярно сопряжены.

Если, кроме того, A вполне регулярен, а X перестановочен с A, то и регулярно сопряженный с A элемент $B = XAX$, очевидно, также будет перестановочен с A.

6.8. Рассмотрим подробнее такие полугруппы, всякие два элемента которых регулярно сопряжены.

Теорема. *Для того чтобы всякие два элемента полугруппы $\mathfrak{A}$ были между собой регулярно сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы все элементы $\mathfrak{A}$ были идемпотентами и для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{A}$ имело место*

$$XYZ = XZ.$$

Доказательство. 1) Пусть всякие два элемента $\mathfrak{A}$ регулярно сопряжены. Для любого $X \in \mathfrak{A}$ регулярно сопря-

женными будут X^4 и X^2, так же как X^6 и X. Благодаря этому получаем

$$X^3 = X^2 \cdot X^4 \cdot X^2 = X^2,$$
$$X^3 = X \cdot X^6 \cdot X = X$$

и, следовательно, $X^2 = X$.

При любых X, Y, $Z \in \mathfrak{A}$ имеем

$$ZXZ = Z,$$
$$X \cdot YZ \cdot X = X.$$

Благодаря этому

$$XYZ = XY \cdot ZXZ = (X \cdot YZ \cdot X) \cdot Z = XZ.$$

2) Если для любых X, Y, $Z \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$XYZ = XZ, \quad X^2 = X,$$

то для произвольных A, $B \in \mathfrak{A}$ получаем

$$ABA = AA = A, \quad BAB = BB = B.$$

6.9. К классу рассматриваемых полугрупп возможен также совсем иной подход, указанный Мак-Лином [1]. Оказывается, что рассматриваемые полугруппы характеризуются свойством, противоположным свойству коммутативности, отчего их и называют антикоммутативными.

Теорема. *Для того чтобы всякие два элемента полугруппы были между собой регулярно сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы для любых* $X, Y \in \mathfrak{A}$, $X \neq Y$, имело место

$$XY \neq YX.$$

Доказательство. 1) Пусть всякие два элемента $\mathfrak{A}$ регулярно сопряжены. Тогда для произвольных X, $Y \in \mathfrak{A}$ имеем

$$(XY) \cdot (YX) = XY^2X = X,$$
$$(YX) \cdot (XY) = YX^2Y = Y.$$

Откуда следует, что при $X \neq Y$ равенство $XY = YX$ невозможно.

2) Пусть для всяких $X, Y \in \mathfrak{A}$ из $X \neq Y$ следует $XY \neq YX$. Так как для любого $X \in \mathfrak{A}$

$$X^2 \cdot X = X \cdot X^2,$$

то должно иметь место $X^2 = X$.

Благодаря этому для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$

$$X \cdot (XYX) = X^2YX = XYX = XYX^2 = (XYX) \cdot X$$

и, следовательно,

$$X = XYX.$$

Но аналогично

$$Y = YXY$$

и потому X и Y оказываются регулярно сопряженными.

6.10. С помощью понятия регулярности можно формулировать ряд критериев того, чтобы полугруппа являлась группой. Без труда доказывается, что группа всегда обладает приведенными ниже свойствами. Как показал Тьеррен [1], выполнение их не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы полугруппа являлась группой.

(α). *Если в полугруппе с единицей единица является левой регулярной единицей каждого элемента полугруппы, то полугруппа является группой.*

Это является непосредственным следствием 2.18.

(β). *Если регулярная полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет лишь один идемпотент, то она является группой.*

Действительно, каждый элемент A из $\mathfrak{A}$ должен иметь регулярную левую единицу I_A и регулярную правую единицу $I^{(A)}$ (6.4), которые являются идемпотентами (6.3). Поэтому I_A и $I^{(A)}$ для всех A равны между собой, т. е. это есть единица полугруппы $\mathfrak{A}$. Отсюда, согласно (α), следует, что $\mathfrak{A}$ есть группа.

(γ). *Регулярная полугруппа с двусторонним сокращением является группой.*

Действительно, возьмем в $\mathfrak{A}$ некоторый элемент A. Будучи регулярным, элемент A обладает левой единицей I (6.4). Для произвольного $X \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$XIA = XA,$$

и так как $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с правым сокращением, то $XI = X$, т. е. I является правой единицей всей полугруппы $\mathfrak{A}$.

Пусть U есть правая регулярная единица элемента X (6.4). Так как

$$XU = XI,$$

а $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левым сокращением, то $U = I$ и, следовательно, I оказывается правой регулярной единицей для X, т. е. I делится справа на произвольный элемент из $\mathfrak{A}$. Аналогично доказываем существование левой единицы I' полугруппы $\mathfrak{A}$. Так как

$$I' = I'I = I,$$

то I оказывается левой единицей $\mathfrak{A}$. Но I делится справа на все элементы $\mathfrak{A}$. Согласно 2.18, отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ есть группа.

6.11. Понятие регулярности в полугруппах может быть обобщено и детализировано при помощи условий, впервые рассмотренных Круазо [5].

Определение. *Пусть m и n целые неотрицательные числа. Классом регулярности $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(m, n)$ называется совокупность всех таких элементов A полугруппы $\mathfrak{A}$, для каждого из которых найдется такой элемент $X \in \mathfrak{A}$, что*

$$A = A^m X A^n$$

(под A^0 здесь подразумевается пустой символ, о котором см. в предисловии).

Связь этого понятия с регулярностью заключается в том, что регулярными элементами являются элементы класса $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 1)$, а общее определение классов регулярности по своему характеру схоже с определением регулярности.

Значение понятия классов регулярности выяснится в связи с установлением связей между этим понятием и некоторыми важными свойствами полугрупп.

6.12. Выясним взаимоотношения между классами регулярности.

Пусть $\mathfrak{A}$ произвольная полугруппа.

(α). $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 0) = \mathfrak{A}$.

(β). *Если* $m_1 \geqslant m_2$ *и* $n_1 \geqslant n_2$, *то*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(m_1, n_1) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(m_2, n_2).$$

Действительно, если $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_1, n_1)$, то

$$A = A^{m_1} X A^{n_1} = A^{m_2} \cdot \left(A^{m_1 - m_2} X A^{n_1 - n_2}\right) \cdot A^{n_2},$$

т. е. $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2, n_2)$.

(γ). *Если* $m_1 \geqslant m_2 \geqslant 2$, *то при любом* n

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_1, n) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2, n).$$

Действительно, если $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2, n)$, то

$$A = A^{m_2} X A^n = A^{m_2 - 1} \cdot A \cdot X A^n = A^{m_2 - 1} A^{m_2} X A^n X A^n =$$

$$= A^{m_2 + 1} \left(A^{m_2 - 2} X A^n X\right) A^n,$$

т. е. $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2 + 1, n)$.

Учитывая (β), отсюда следует

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2, n) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2 + 1, n).$$

Повторяя аналогичное рассуждение $m_1 - m_2$ раз, получаем

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_2, n) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m_1, n).$$

(δ). *Если* $n_1 \geqslant n_2 \geqslant 2$, *то при любом* m

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m, n_1) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(m, n_2).$$

Доказательство аналогично доказательству (γ).

(ε). $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 2) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 1) \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$.

Действительно, согласно (β),

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 2) \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 1) \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Но с другой стороны, если

$$A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 1) \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(0, 2),$$

то

$$A = AXA, \quad A = A^0 Y A^2 = Y A^2.$$

Отсюда получаем

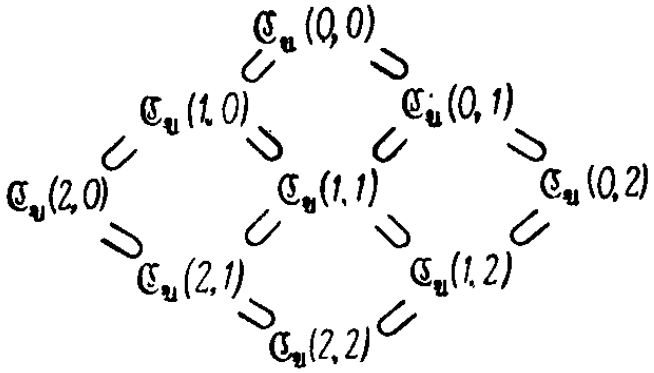
$$A = AXA = AX \cdot YA^2 = A \cdot (XY) A^2$$

и, следовательно, $A \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 2)$.

(ζ). $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(2, 1) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(1, 1) \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}(2, 0)$.

Доказывается аналогично (ε).

6.13. Из 6.12 следует, что, рассматривая классы 6.11, мы на самом деле имеем лишь девять классов, которые в отношении включения располагаются следующим образом:



6.14. Укажем роль некоторых из этих классов с точки зрения наличия единиц у элементов. О классах $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 0)$ и $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 1)$ было уже сказано (6.11) и (6.12). $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 0)$ есть класс всех элементов $\mathfrak{A}$, имеющих правые единицы. $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 1)$ есть класс элементов, имеющих левые единицы. Класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0)$, как легко видеть, состоит из элементов, имеющих правую единицу, делящуюся слева на этот элемент (можно было бы назвать такую единицу правой квазирегулярной единицей). Класс $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$ состоит из элементов, имеющих левую единицу, делящуюся справа на этот элемент. К остальным трем классам мы в свое время обратимся при рассмотрении иных свойств полугрупп.

§ 7. Инверсные полугруппы

7.1. В связи с тем фактом, что регулярный элемент может иметь несколько различных регулярно сопряженных с ним элементов естественно выделяется класс таких регулярных полугрупп, у которых каждый элемент имеет лишь единственный регулярно сопряженный с ним элемент.

Как мы покажем в следующем параграфе, полугруппы этого класса играют важную роль в теории полугрупп частичных преобразований. Роль эта впервые была обнаружена В. В. Вагнером [1], [2]. Несколько позже, но, по-видимому, независимо к тому же результату пришел Престон [1], [3].

В дальнейшем указанные полугруппы не раз служили объектом различных исследований.

Полугруппы указанного класса В. В. Вагнер назвал обобщенными группами. Это название довольно естественно в связи

с их свойствами, являющимися как бы некоторым ослаблением групповых аксиом. Поскольку, однако, термин „обобщенная группа" часто употребляется в более широком (при этом несовпадающем) смысле (иногда для тех случаев, когда мы употребляли в главе I термин „мультипликативное множество"), мы предпочтем название Престона — „инверсная полугруппа" (inverse semi-group), также отражающее важнейшее свойство этих полугрупп, имеющее характер некоторой обратимости.

7.2. Определение. *Инверсной полугруппой называется такая регулярная полугруппа, в которой каждый элемент имеет единственный регулярно сопряженный с ним элемент* (6.1 и 6.6).

В дальнейшем, рассматривая инверсные полугруппы, мы всегда (иногда даже не оговаривая этого) будем обозначать элемент, регулярно сопряженный с элементом A, через $\bar{A}$.

7.3. Пусть $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа. Отметим несколько простейших свойств регулярно сопряженных элементов.

(α). *Для любого* $A \in \mathfrak{A}$

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

(β). *Для всякого идемпотента* I

$$\bar{I} = I.$$

(γ). $(A\bar{A})$ *есть единственная регулярная левая единица элемента* $A \in \mathfrak{A}$ (6.2).

То, что $(A\bar{A})$ является регулярной левой единицей для A, непосредственно следует из определения 6.6. Пусть I есть произвольная регулярная левая единица A. При некотором X

$$IA = A, \quad AX = I.$$

Так как I является идемпотентом (6.3), то

$$I = I^2 = AXI.$$

Но из равенств

$$A \cdot (XI) \cdot A = IA = A,$$
$$(XI) \cdot A \cdot (XI) = XI \cdot I = XI,$$

следует, что $XI = \bar{A}$. Отсюда получаем $I = A \cdot (XI) = A\bar{A}$.

(δ). $(\bar{A}A)$ *есть единственная регулярная правая единица элемента* $A \in \mathfrak{A}$.

7.4. Существует несколько эквивалентных между собой определений инверсных полугрупп. Естественность этих определений и то, что они, апеллируя к различным по своей природе свойствам полугрупп, оказываются эквивалентными между собой, является убедительным показателем важности класса этих полугрупп.

Теорема. *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была инверсной, необходимо и достаточно, чтобы*:

(α). *каждый элемент* $\mathfrak{A}$ *имел регулярную левую единицу* (6.2 и 6.4);

(β). *все идемпотенты* $\mathfrak{A}$ *коммутировали между собой.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ инверсна. Согласно 6.4, каждый элемент $\mathfrak{A}$ обладает регулярной левой единицей.

Пусть I_1 и I_2 есть два произвольных идемпотента $\mathfrak{A}$. Так как

$$(I_1I_2)\cdot(I_2\cdot\overline{I_1I_2})\cdot(I_1I_2)=I_1I_2\cdot\overline{I_1I_2}\cdot I_1I_2=I_1I_2,$$

$$(I_2\cdot\overline{I_1I_2})\cdot(I_1I_2)\cdot(I_2\cdot\overline{I_1I_2})=$$

$$=I_2\cdot(\overline{I_1I_2})\cdot(I_1I_2)\cdot(\overline{I_1I_2})=I_2\cdot(\overline{I_1I_2}),$$

то, согласно единственности регулярно сопряженного элемента,

$$I_2\cdot\overline{I_1I_2}=\overline{I_1I_2}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\overline{I_1I_2}\cdot I_1=\overline{I_1I_2}.$$

Так как

$$\overline{I_1I_2}^{\,2}=(\overline{I_1I_2}\cdot I_1)(I_2\cdot\overline{I_1I_2})=\overline{I_1I_2}\cdot I_1I_2\cdot\overline{I_1I_2}=\overline{I_1I_2},$$

то благодаря 7.3, (α), (β)

$$I_1I_2=\overline{\overline{I_1I_2}}=\overline{I_1I_2}.$$

Мы показали, что I_1I_2 является идемпотентом. Аналогично доказывается, что и I_2I_1 есть идемпотент. Благодаря этому

$$I_1I_2\cdot I_2I_1\cdot I_1I_2=I_1I_2I_1I_2=I_1I_2,$$

$$I_2I_1\cdot I_1I_2\cdot I_2I_1=I_2I_1I_2I_1=I_2I_1,$$

что означает

$$\overline{I_1I_2}=I_2I_1.$$

Но ранее мы показали, что $\overline{I_1 I_2} = I_1 I_2$. Следовательно, $I_2 I_1 = I_1 I_2$.

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (α) и (β) теоремы. Согласно 6.4 и 6.7, для каждого $A \in \mathfrak{A}$ найдутся регулярно сопряженные с ним элементы. Предположим, что для некоторого A и элемент X_1 и элемент X_2 оба являются регулярно сопряженными с A. Так как элементы AX_1, AX_2, X_1A, X_2A, очевидно, являются идемпотентами, то они коммутируют между собой и потому

$$X_1 = X_1AX_1 = X_1 \cdot AX_2A \cdot X_1 = X_1 \cdot AX_2 \cdot AX_1 = \\ = X_1 \cdot AX_1 \cdot AX_2 = X_1AX_2,$$

$$X_2 = X_2AX_2 = X_2 \cdot AX_1A \cdot X_2 = X_2A \cdot X_1A \cdot X_2 = \\ = X_1A \cdot X_2A \cdot X_2 = X_1AX_2,$$

т. е. $X_1 = X_2$.

7.5. ***Следствие.*** *Отображение инверсной полугруппы* $\mathfrak{A}$ *на себя, сопоставляющее каждому элементу* A *регулярно сопряженный с ним элемент* $\overline{A}$, *является антиавтоморфизмом* (I, 1.17).

Доказательство. Так как $A\overline{A}$ и $\overline{A}A$ являются идемпотентами, то, используя коммутативность идемпотентов, получаем

$$A_1A_2 \cdot \overline{A}_2\overline{A}_1 \cdot A_1A_2 = A_1 \cdot A_2\overline{A}_2 \cdot \overline{A}_1A_1 \cdot A_2 = \\ = A_1 \cdot \overline{A}_1A_1 \cdot A_2\overline{A}_2 \cdot A_2 = A_1A_2,$$

$$\overline{A}_2\overline{A}_1 \cdot A_1A_2 \cdot \overline{A}_2\overline{A}_1 = \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_1A_1 \cdot A_2\overline{A}_2 \cdot \overline{A}_1 = \\ = \overline{A}_2 \cdot A_2\overline{A}_2 \cdot \overline{A}_1A_1 \cdot \overline{A}_1 = \overline{A}_2\overline{A}_1.$$

Следовательно,

$$\overline{A}_2\overline{A}_1 = \overline{A_1A_2}.$$

Так как к тому же $\overline{\overline{A}} = A$, то отображение, сопоставляющее элементу A элемент $\overline{A}$, оказывается взаимно однозначным отображением $\mathfrak{A}$ на себя. Это и означает, что указанное отображение является антиавтоморфизмом.

7.6. При исследовании некоторых свойств инверсных полугрупп полезно бывает принимать во внимание одно отношение частичной упорядоченности, которое естественно возникает во всякой инверсной полугруппе.

Будем говорить, что элемент A инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ предшествует элементу B

$$A \leqslant B,$$

если для регулярной левой единицы I_A элемента A имеет место

$$I_A B = A.$$

Проверяем выполнение условий частичной упорядоченности. Конечно,

$$A \leqslant A.$$

Если одновременно

$$A \leqslant B,\ B \leqslant A,$$

т. е.

$$I_A B = A,\ I_B A = B,$$

то

$$I_A I_B A = A,$$

откуда следует, что $I_A I_B$ есть регулярная левая единица A (регулярность ее непосредственно вытекает из регулярности I_A). Согласно 7.3, (γ), $I_A \cdot I_B = I_A$. Аналогично доказываем $I_B I_A = I_B$. Согласно 7.4, из этого следует $I_A = I_B$. Но тогда

$$A = I_A A = I_B A = B.$$

Если

$$A \leqslant B,\ B \leqslant C,$$

т. е.

$$I_A B = A,\ I_B C = B,$$

то

$$(I_A I_B) C = I_A B = A.$$

Но при некотором X

$$I_A = AX.$$

Откуда следует

$$I_A I_B = I_B I_A = I_B \cdot AX = I_B I_A BX =$$
$$= I_A \cdot I_B B \cdot X = I_A BX = AX = I_A.$$

Поэтому полученное выше равенство $(I_A I_B) C = A$ означает

$$I_A C = A,$$

т. е. $A \leqslant C$.

7.7. Вполне аналогично 7.6 можно ввести отношение частичной упорядоченности при помощи регулярных правых единиц, полагая

$$A \leqslant B,$$

если для регулярной правой единицы $I^{(A)}$ элемента A имеет место

$$BI^{(A)} = A.$$

Благодаря 7.3, (γ), последнее равенство переписываем в виде

$$B\bar{A}A = A.$$

Применяя к обоим частям этого равенства антиавтоморфизм, описанный в 7.5, получаем

$$\bar{A}A\bar{B} = \bar{A}.$$

Умножая обе части равенства слева на A и справа на B, получаем

$$A\bar{A}A\bar{B}B = A\bar{A}B,$$

т. е.

$$A\bar{B}B = A\bar{A}B.$$

Но $A\bar{A}$ есть l_A — регулярная левая единица A, а $\bar{B}B = I^{(B)}$ есть правая регулярная единица B, которая, благодаря тому, что $BI^{(A)} = A$ и $I^{(A)}I^{(B)} = I^{(B)}I^{(A)}$, является правой единицей и для A.

Поэтому получаем

$$A = l_A B.$$

Это означает, что A предшествует B в отношении частичной упорядоченности, введенной в 7.6. Совершенно аналогично доказывается и обратное, что предшествование согласно частичной упорядоченности, введенной в 7.6, влечет за собой предшествование согласно частичной упорядоченности, рассматриваемой в настоящем пункте. Таким образом, оказывается, что оба отношения частичной упорядоченности совпадают.

7.8. Введение тем или иным способом отношения частичной упорядоченности в полугруппе бывает особенно полезно в том случае, когда оно согласовано с действием умножения, т. е. двусторонне стабильно (I, 5.17).

Введенное нами отношение частичной упорядоченности в инверсной полугруппе обладает этим свойством. Оно двусторонне стабильно. Действительно,

$$A \leqslant B$$

означает, что

$$I_A B = A.$$

Если $I_{(AX)}$ есть левая регулярная единица для AX, то при некотором Y

$$I_{(AX)} = AXY,$$

откуда следует, что

$$I_{(AX)} = I_A I_{(AX)} = I_{(AX)} I_A.$$

Поэтому

$$I_{(AX)} BX = I_{(AX)} I_A BX = I_{(AX)} AX = AX,$$

т. е.

$$AX \leqslant BX.$$

Вполне аналогично, используя эквивалентное определение той же частичной упорядоченности, указанное в 7.7, получаем

$$XA \leqslant XB.$$

7.9. Остановимся еще на одном возможном подходе к понятию инверсной полугруппы, правда ограничившись случаем наличия единицы.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа с единицей E. В множестве $\mathfrak{A}$ определим следующую тернарную операцию, т. е. закон, который каждой последовательности трех элементов из $\mathfrak{A}$ $[A_1, A_2, A_3]$ ставит в соответствие элемент из $\mathfrak{A}$:

$$[A_1, A_2, A_3] = A_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Определенная таким образом тернарная операция обладает следующими свойствами:

(α). $[[A_1, A_2, A_3], A_4, A_5] = [A_1, [A_4, A_3, A_2], A_5] = [A_1, A_2, [A_3, A_4, A_5]]$;

(β). $[[A_1, A_2, A_2], A_3, A_3] = [[A_1, A_3, A_3], A_2, A_2]$;

(γ). $[A_1, A_1, [A_2, A_2, A_3]] = [A_2, A_2, [A_1, A_1, A_3]]$;

(δ). $[A, A, A] = A$;

(ε). $[A, E, E] = [E, E, A] = A$.

Справедливость равенств (α) следует из того, что благодаря 7.5 каждое из участвующих там выражений равно

$$A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4A_5.$$

Выражения, участвующие в (β), равны

$$A_1\bar{A}_2A_2\bar{A}_3A_3,\ A_1\bar{A}_3A_3,\bar{A}_2A_2,$$

что одно и то же ввиду коммутирования идемпотентов $\bar{A}_2A_2$ и $\bar{A}_3A_3$.

Аналогично обстоит дело с (γ).

Равенства (δ) и (ε) совершенно очевидны.

7.10. Всякое множество, в котором определена некоторая тернарная операция, обладающая свойствами (α), (β), (γ), (δ), (ε), указанными в 7.9, В. В. Вагнер [3] называет *обобщенной грудой с биунитарным элементом E*. Имеются причины, по которым изучение таких образований заслуживает внимания.

Изучение обобщенных груд с биунитарным элементом эквивалентно изучению инверсных полугрупп с единицей благодаря доказанному в 7.9, с одной стороны, и нижеследующему предложению, с другой.

В множестве всех элементов $\mathfrak{A}$ обобщенной груды с биунитарным элементом E всегда можно так определить действие умножения, что $\mathfrak{A}$ будет инверсной полугруппой, имеющей E своей единицей, причем тернарная операция, индуцированная этим умножением методом 7.9, будет совпадать с тернарной операцией данной обобщенной груды.

Действительно, положим

$$A \cdot B = [A, E, B].$$

Для такого умножения имеем:

$$(A \cdot B) \cdot C = [[A, E, B], E, C] =$$

$$= [A, E, [B, E, C]] = A \cdot (B \cdot C),$$

$$A \cdot E = [A, E, E] = A,$$

$$E \cdot A = [E, E, A] = A.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей E. Так как

$$(A \cdot [E, A, E]) \cdot A = [A, E, [E, A, E]] \cdot A =$$
$$= [[A, E, E], A, E] \cdot A = [A, A, E] \cdot A =$$
$$= [[A, A, E], E, A] = [A, A, [E, E, A]] = [A, A, A] = A,$$

то $A \cdot [E, A, E]$ есть регулярная левая единица A.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность элементов вида $[E, A, A]$ $(A \in \mathfrak{A})$. Всякие два элемента из $\mathfrak{B}$ коммутируют между собой. Действительно,

$$[E, A, A] \cdot [E, B, B] = [[E, A, A], E, [E, B, B]] =$$
$$= [[[E, A, A], E, E], B, B] = [[E, A, [A, E, E]], B, B] =$$
$$= [[E, A, A], B, B] = [[E, B, B], A, A] =$$
$$= [[E, B, [B, E, E]], A, A] = [[[E, B, B], E, E], A, A] =$$
$$= [[E, B, B], E, [E, A, A]] = [E, B, B] \cdot [E, A, A].$$

Покажем, что элемент вида $[A, A, E]$ также принадлежит $\mathfrak{B}$. Действительно,

$$[A, A, E] = [[A, E, E], A, E] = [[[E, E, A], E, E], A, E] =$$
$$= [[E, [E, A, E], E], A, E] =$$
$$= [E, [E, A, E], [E, A, E]] \in \mathfrak{B}.$$

Пусть I есть некоторый идемпотент рассматриваемой полугруппы.

$$I = [I, I, I] = [I, I \cdot I, I] = [I, [I, E, I], I] = [I, I, [E, I, I]] =$$
$$= [I, [E, E, I], [E, I, I]] = [[I, I, E], E, [E, I, I]] =$$
$$= [I, I, E] \cdot [E, I, I].$$

Мы видим, что всякий идемпотент представим в виде произведения элементов из $\mathfrak{B}$. Так как элементы из $\mathfrak{B}$ коммутируют между собой, то и идемпотенты должны коммутировать друг с другом.

Из доказанного, согласно 7.4, следует, что наша полугруппа является инверсной. Посмотрим, какую тернарную операцию индуцирует умножение в этой полугруппе. Мы видели, что

$$A \cdot [E, A, E] \cdot A = A.$$

К тому же

$$[E, A, E] \cdot A \cdot [E, A, E] = [[E, A, E], E, A] \cdot [E, A, E] =$$
$$= [E, A, [E, E, A]] \cdot [E, A, E] = [E, A, A] \cdot [E, A, E] =$$
$$= [[E, A, A], E, [E, A, E]] = [[[E, A, A], E, E], A, E] =$$
$$= [[E, A, A], A, E] = [E, [A, A, A], E] = [E, A, E].$$

Следовательно, элемент $[E, A, E]$ регулярно сопряжен с A. Поэтому искомой тернарной операцией будет операция, сопоставляющая последовательности $(A_1, A_2, A_3,)$ элемент

$$A_1\bar{A}_2A_3 = A_1 \cdot [E, A_2, E] \cdot A_3 = [A_1, E, [E, A_2, E]] \cdot A_3 =$$
$$= [[A_1, E, E], A_2, E] \cdot A_3 = [A_1, A_2, E] \cdot A_3 =$$
$$= [[A_1, A_2, E], E, A_3] = [A_1, A_2, [E, E, A_3]] = [A_1, A_2, A_3].$$

Мы видим, что получившаяся тернарная операция совпадает с исходной тернарной операцией в $\mathfrak{A}$. Это и заканчивает доказательство нашего утверждения.

7.11. Мы не будем останавливаться на рассмотрении дальнейших соотношений между инверсными полугруппами и обобщенными грудами. Соответствующие исследования содержатся в работе В. В. Вагнера [3], в которой впервые было получено и рассмотренное выше соотношение. Результат соответствующего исследования при отсутствии единицы имеет более сложный вид (В. В. Вагнер [4], [5]).

§ 8. Инверсные полугруппы частичных преобразований

8.1. Понятие частичного преобразования было дано нами в § 4 первой главы. В настоящем параграфе мы выясним роль инверсных полугрупп для теории частичных преобразований. Наиболее существенным здесь будет доказательство теоремы 8.6, впервые полученной В. В. Вагнером [2], [3] и несколько позже Престоном [3].

8.2. Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая инверсная полугруппа частичных преобразований некоторого множества Ω и пусть $A \in \mathfrak{A}$. $I^{(A)}$ есть регулярная правая единица A, которая, как мы знаем (7.3, (б)), равна $\bar{A}A$. Через A^* будем обо-

значать частичное преобразование того же множества Ω, удовлетворяющее условиям:

$$\Pi_1(A^*) = \Pi_2\left(I^{(A)}\right),$$
$$\Pi_2(A^*) = \Pi_2(A),$$
$$A^*\alpha = A\alpha \ (\alpha \in \Pi_1(A^*)).$$

Отметим, что $\Pi_1(A) = \Pi_1\left(I^{(A)}\right)$, так как A и $I^{(A)}$ делятся друг на друга справа. Далее $\Pi_2\left(I^{(A)}\right) \subset \Pi_1\left(I^{(A)}\right)$, так как $I^{(A)}$ является идемпотентом. Отсюда следует, что $\Pi_1(A^*) \subset \Pi_1(A)$. Именно, $\Pi_1(A^*)$ состоит из таких элементов α, принадлежащих $\Pi_1(A)$, для которых $I^{(A)}\alpha = \alpha$. Можно сказать, что A^* получается из A путем некоторого сокращения множества $\Pi_1(A)$.

Покажем, что для каждого $A \in \mathfrak{A}$ существует указанное частичное преобразование A^*. Действительно, Π_1 для этого искомого A^* определено. Способ, которым A^* преобразует элементы из $\Pi_1(A^*)$, определен (так как $\Pi_1(A^*) \subset \Pi_1(A)$). Остается показать, что для такого частичного преобразования обязательно имеет место

$$\Pi_2(A^*) = \Pi_2(A).$$

Включение $\Pi_2(A^*) \subset \Pi_2(A)$ непосредственно следует из $\Pi_1(A^*) \subset \Pi_1(A)$. Для доказательства обратного включения возьмем произвольный элемент $\alpha = A\beta$ из $\Pi_2(A)$. Так как $A = AI^{(A)}$, то $\alpha = A\left(I^{(A)}\beta\right)$. Поскольку

$$I^{(A)}\beta \subset \Pi_2\left(I^{(A)}\right) = \Pi_1(A^*),$$

имеет место $\alpha = A\left(I^{(A)}\beta\right) = A^*\left(I^{(A)}\beta\right)$. Следовательно, $\alpha \in \Pi_2(A^*)$. Таким образом, действительно $\Pi_2(A^*) = \Pi_2(A)$.

Покажем, что частичное преобразование A^* всегда взаимно однозначно. Пусть для некоторых $\alpha, \beta \in \Pi_1(A^*)$

$$A^*\alpha = A^*\beta,$$

т. е.

$$A\alpha = A\beta, \ \alpha = I^{(A)}\bar{\alpha}, \ \beta = I^{(A)}\bar{\beta}.$$

Так как $I^{(A)} = \bar{A}A$, то

$$\alpha = I^{(A)}\bar{\alpha} = I^{(A)}I^{(A)}\bar{\alpha} = \bar{A}A\alpha = \bar{A}A\beta = I^{(A)}I^{(A)}\bar{\beta} = I^{(A)}\bar{\beta} = \beta.$$

8.3. Покажем, что отображение φ инверсной полугруппы частичных преобразований $\mathfrak{A}$ в полугруппу всех взаимно однозначных частичных преобразований

$$\varphi(A) = A^*$$

является изоморфизмом.

Прежде всего убедимся, что отображение φ взаимно однозначно.

Пусть $\varphi(A) = \varphi(B)$ $(A, B \in \mathfrak{A})$, т. е. $A^* = B^*$.

Если $\xi \in \Pi_1(BI^{(A)})$, то $\xi \in \Pi_1(I^{(A)}) = \Pi_1(A)$. Но, с другой стороны, для всякого $\alpha \in \Pi_1(A)$ мы имеем

$$A\alpha = AI^{(A)}\alpha = A^*I^{(A)}\alpha = B^*I^{(A)}\alpha = BI^{(A)}\alpha.$$

Следовательно, $\alpha \in \Pi_1(BI^{(A)})$. Таким образом, множество Π_1 для A и $BI^{(A)}$ одно и то же, причем всякий элемент из этого множества преобразуется при помощи A и $BI^{(A)}$ одинаково. Следовательно, $A = BI^{(A)}$. Согласно 7.7, это означает $A \leqslant B$. Так как совершенно аналогично доказывается $B \leqslant A$, то $A = B$ (7,6).

Теперь докажем, что взаимно однозначное отображение φ обладает свойством изоморфизма.

Если $\alpha \in \Pi_1(A^*B^*)$, то $\alpha \in \Pi_1(B^*)$ и потому $I^{(B)}\alpha = \alpha$. Далее, $B^*\alpha \in \Pi_1(A^*)$. Следовательно, $I^{(A)}B^*\alpha = B^*\alpha$ и потому $I^{(A)}B\alpha = B\alpha$. Благодаря этому

$$\alpha = I^{(B)}\alpha = \bar{B}B\alpha = \bar{B}I^{(A)}B\alpha = \bar{B}\bar{A}AB\alpha = \overline{AB} \cdot AB\alpha = I^{(AB)}\alpha.$$

Следовательно, $\alpha \in \Pi_1[(AB)^*]$.

С другой стороны, если $\beta \in \Pi_1[(AB)^*]$, то

$$\beta = I^{(AB)}\beta = \overline{AB} \cdot AB\beta = \bar{B}\bar{A}AB\beta,$$

и так как

$$\Pi_1[(AB)^*] \subset \Pi_1(AB) \subset \Pi_1(B) = \Pi_1(I^{(B)}),$$

то

$$I^{(B)}\beta = \bar{B}B\beta = \bar{B}B \cdot \bar{B}\bar{A}AB\beta = \bar{B}B\bar{B} \cdot \bar{A}AB\beta = \bar{B}\bar{A}AB\beta = \beta.$$

Следовательно, $\beta \in \Pi_1(B^*)$.

Благодаря перестановочности идемпотентов $\bar{B}B$ и $\bar{A}A$ (7.4) получаем

$$B\beta = B\bar{B}\bar{A}AB\beta = \bar{A}AB\bar{B}B\beta = \bar{A}AB\beta = I^{(A)}(B\beta).$$

Следовательно, $B^*\beta = B\beta \in \Pi_1(A^*)$. Из этого следует, что $\beta \in \Pi_1[(AB)^*]$.

Мы показали, что $\Pi_1(A^*B^*) = \Pi_1[(AB)^*]$. Но на всякий элемент ξ из этого множества частичные преобразования A^*, B^*, $(AB)^*$ действуют так же, как A, B, AB (соответственно). Поэтому

$$(A^*B^*)\xi = A^*(B^*\xi) = A^*(B\xi) = AB\xi,$$
$$(AB)^*\xi = AB\xi,$$

т. е. $A^*B^* = (AB)^*$.

Таким образом, доказано:

$$\varphi(AB) = (AB)^* = A^*B^* = \varphi(A)\cdot\varphi(B).$$

8.4. Построение изоморфизма φ, рассмотренного в 8.2 и в 8.3, помогает уяснить смысл условия инверсности для полугрупп частичных преобразований. Взаимно однозначное частичное преобразование $\varphi(A) = A^*$ представляет собой по существу то же самое преобразование A, но с несколько сокращенной областью его применения.

Как иногда говорят, A^* есть приведенное частичное преобразование A. В результате такой операции, т. е. при переходе от частичных преобразований A к частичным преобразованиям A^*, мы получаем благодаря изоморфизму φ по существу ту же самую полугруппу частичных преобразований. Однако эта полугруппа состоит уже лишь из взаимно однозначных частичных преобразований. Это показывает, что условие инверсности полугруппы частичных преобразований по существу как бы равносильно требованию того, чтобы эти частичные преобразования были взаимно однозначными (точнее, приводились к таковым). Вскоре мы покажем, что имеет место и обратное в некотором смысле утверждение. Таким образом, выделение из класса всех полугрупп класса инверсных полугрупп в отношении частичных преобразований по существу означает выделение взаимно однозначных частичных преобразований.

8.5. ***Теорема.*** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *есть полугруппа некоторых взаимно однозначных частичных преобразований множества* Ω. $\mathfrak{A}$ *будет инверсной полугруппой тогда и только тогда, когда вместе с каждым частичным преобразованием* A *полугруппа содержит и обратное к нему взаимно однозначное частичное преобразование* (I, 4.5).

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа и $A \in \mathfrak{A}$. Если

$$A\alpha = \beta \qquad (\alpha, \beta \in \Omega),$$

то из

$$A\bar{A}A\alpha = A\alpha = \beta$$

(где $\bar{A}$ есть регулярно сопряженный с A элемент (6.6)) следует

$$A\alpha = \beta \in \Pi_1(\bar{A}).$$

Обозначим

$$\bar{A}\beta = \gamma.$$

Мы имеем

$$A\gamma = A\bar{A}\beta = A\bar{A}A\alpha = A\alpha.$$

Так как A взаимно однозначно, то $\alpha = \gamma$. Таким образом, из $\alpha \in \Pi_1(A)$ всегда следует, что $A\alpha \in \Pi_1(\bar{A})$, причем

$$\bar{A}(A\alpha) = \alpha.$$

Как видно из сказанного, $\Pi_2(A) \subset \Pi_1(\bar{A})$. Но из $\bar{A}A\bar{A}\alpha = \bar{A}\alpha$ ($\alpha \in \Pi_1(\bar{A})$) благодаря тому, что $\bar{A}$ взаимно однозначно, следует $A\bar{A}\alpha = \alpha$, т. е.

$$\Pi_1(\bar{A}) \subset \Pi_2(A)$$

и, следовательно, $\Pi_1(\bar{A}) = \Pi_2(A)$.

Так как $\bar{\bar{A}} = A$, то имеет место и обратная зависимость. Из этого следует, что взаимно однозначное частичное преобразование $\bar{A}$ из $\mathfrak{A}$ является по отношению к A обратным (I, 4.5).

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ вместе с каждым A содержится и обратное к нему взаимно однозначное частичное преобразование A'. Тогда для всякого $\alpha \in \Pi_1(A)$ мы имеем

$$A\alpha = \beta, \quad A'\beta = \alpha.$$

Для каждого $\alpha \in \Pi_1(A)$, очевидно,

$$(AA')A\alpha = A\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$(AA')A = A$$

и AA' является регулярной левой единицей элемента A.

Если I_1 и I_2 есть два идемпотента из $\mathfrak{A}$, то благодаря взаимной однозначности частичных преобразований из $I_i(I_i\alpha) = I_i\alpha$ следует

$$I_i\alpha = \alpha, \qquad (\alpha \in \Pi_1(I_i); \quad i = 1, 2).$$

Отсюда следует, что I_1I_2 таково, что

$$\Pi_1(I_1I_2) = [\Pi_1(I_1)] \cap [\Pi_1(I_2)],$$

причем

$$I_1I_2\alpha = \alpha, \qquad (\alpha \in \Pi_1(I_1I_2)).$$

Совершенно аналогично получаем соответствующие равенства для I_2I_1 и таким образом оказывается

$$I_1I_2 = I_2I_1.$$

Согласно 7.4, $\mathfrak{A}$ оказывается инверсной полугруппой.

8.6. Основным результатом, определяющим роль инверсных полугрупп в теории частичных преобразований, является теорема, доказывающая возможность представления каждой инверсной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями.

Теорема. *Каждая инверсная полугруппа изоморфна некоторой полугруппе взаимно однозначных частичных преобразований.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа. Каждому $A \in \mathfrak{A}$ сопоставим преобразование $\tilde{A}$ множества $\mathfrak{A}$, определяемое умножением слева элементов из $\mathfrak{A}$ на A:

$$\tilde{A}S = (AS), \quad (S \in \mathfrak{A}).$$

Такое отображение является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ в полугруппу всех преобразований $\mathfrak{A}$. Действительно, если для $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ имеет место $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$, то при всяком $S \in \mathfrak{A}$

$$A_1S = A_2S.$$

В частности, полагая $S = \bar{A}_1A_1$ и $S = \bar{A}_2A_2$, получаем

$$A_1 = A_1\bar{A}_1A_1 = A_2\bar{A}_1A_1,$$

$$A_1\bar{A}_2A_2 = A_2\bar{A}_2A_2 = A_2.$$

Отсюда, пользуясь коммутативностью идемпотентов $\bar{A}_2A_2$ и $\bar{A}_1A_1$, получаем

$$A_1 = A_2\bar{A}_1A_1 = A_1\bar{A}_2A_2 \cdot \bar{A}_1A_1 = A_1 \cdot \bar{A}_1A_1 \cdot \bar{A}_2A_2 = A_1\bar{A}_2A_2 = A_2.$$

Следовательно, рассматриваемое отображение взаимно однозначно. Так как к тому же

$$(\tilde{A}_1\tilde{A}_2)\,S = \tilde{A}_1\,(\tilde{A}_2S) = \tilde{A}_1\,(A_2S) = A_1A_2S = (\widetilde{A_1A_2})\,S,$$

то наше отображение оказывается изоморфизмом.

Далее каждому $\tilde{A}$ можно методом, рассмотренным в 8.3, сопоставить взаимно однозначное частичное преобразование $\varphi(\tilde{A})$. Так как это, согласно 8.3. опять дает изоморфизм, то отображение, ставящее каждому $A \in \mathfrak{A}$ в соответствие взаимно однозначное частичное отображение $\varphi(\tilde{A})$, представляет собой изоморфизм $\mathfrak{A}$ в полугруппу всех взаимно однозначных частичных отображений множества $\mathfrak{A}$.

8.7. Из 8.5 и 8.6 следует, что инверсные полугруппы и только они изоморфны таким полугруппам взаимно однозначных частичных преобразований, которые вместе с каждым частичным преобразованием содержат и обратное ему частичное преобразование. Таким образом, условия, определяющие принадлежность полугруппы к классу инверсных полугрупп, представляют собой абстрактную характеристику класса всех полугрупп взаимно однозначных частичных преобразований, обладающих тем свойством, что вместе с каждым частичным преобразованием они всегда содержат и обратное к нему частичное преобразование.

8.8. Выясним еще, что́ представляет собой отношение частичной упорядоченности, введенное для инверсных полугрупп в 7.6, 7.7 и 7.8 для инверсной полугруппы взаимно однозначных частичных преобразований $\mathfrak{A}$.

Пусть $I^{(A)}$ есть регулярная правая единица элемента $A \in \mathfrak{A}$. Так как $I^{(A)}$ есть идемпотент (6.3), то

$$I^{(A)}\left(I^{(A)}\alpha\right) = I^{(A)}\alpha, \quad \left(\alpha \in \Pi_1\left(I^{(A)}\right)\right),$$

откуда благодаря взаимной однозначности $I^{(A)}$

$$I^{(A)}\alpha = \alpha.$$

Из

$$AI^{(A)} = A, \quad I^{(A)} = XA$$

следует, что

$$\Pi_1\left(I^{(A)}\right) = \Pi_1(A).$$

Условие $A \leqslant B$, согласно 7.7, означает

$$BI^{(A)} = A.$$

Из сказанного выше о $I^{(A)}$ следует, что выполнение этого условия равнозначно соблюдению требований:

$$\Pi_1(A) \subset \Pi_1(B),$$
$$A\alpha = B\alpha, \qquad (\alpha \in \Pi_1(A)).$$

С точки зрения свойств частичных преобразований такое отношение представляется в высшей степени естественным и важным. Так как это отношение полностью определяется законом умножения в инверсной полугруппе, то при всяком изоморфизме двух таких полугрупп оно сохраняется. В частности, при представлении инверсной полугруппы при помощи взаимно однозначных частичных преобразований, будет ли оно осуществлено так, как в 8.6, или как-либо иначе, всегда при $A \leqslant B$ (в смысле 7.6) элементы эти преобразуются во взаимно однозначные частичные преобразования $\chi(A)$ и $\chi(B)$, такие, что

$$\Pi_1(\chi(A)) \subset \Pi_1(\chi(B)),$$
$$\chi(A)\alpha = \chi(B)\alpha, \qquad (\alpha \in \Pi_1(\chi(A))).$$

При этом эти условия будут соблюдаться только для таких $\chi(A)$ и $\chi(B)$, для которых $A \leqslant B$.

ГЛАВА III

УМНОЖЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВ

§ 1. Подполугруппы

1.1. Операция умножения элементов полугруппы естественным образом может быть распространена и на ее подмножества.

Определение. *Произведением подмножеств* $\mathfrak{K}$ *и* $\mathfrak{L}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *называется множество, состоящее из всех элементов вида* KL, *где* $K \in \mathfrak{K}$, $L \in \mathfrak{L}$. *Оно обозначается через* $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L}$ *или* $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$.

Поскольку мы условились не делать различия между элементом множества и подмножеством этого множества, состоящим из одного этого элемента, умножение самих элементов в полугруппе является частным случаем умножения ее подмножеств.

Отметим, что обозначений вида $\mathfrak{K}^n$ в том случае, когда подмножество $\mathfrak{K}$ состоит более чем из одного элемента, мы не будем употреблять, поскольку через $\mathfrak{K}^n$ наравне с $\underbrace{\mathfrak{K}\mathfrak{K}\ldots\mathfrak{K}}_{n}$ часто обозначают и множество всех элементов вида K^n ($K \in \mathfrak{K}$).

Рассмотрение ряда вопросов, связанных с указанным способом умножения подмножеств полугруппы, составляет предмет изучения настоящей главы. В частности, с точки зрения такого умножения естественно выделяются те подмножества полугруппы, которые сами являются полугруппами относительно того же самого действия, которое рассматривается в самой полугруппе. С этим же связан и вопрос о порождении, т. е. получение элементов полугруппы из элементов некоторого ее заданного подмножества при помощи перемножения последних.

1.2. Используя понятие умножения подмножеств полугруппы, можно удобно характеризовать группы.

Теорема. *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *является группой в том и только в том случае, когда для любого* $A \in \mathfrak{A}$ *выполняется*

$$\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}, \quad A\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ есть группа, то для любого $B \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы X и Y, что

$$XA = B, \quad AY = B.$$

Это означает, что

$$\mathfrak{A}A \supset \mathfrak{A}, \quad A\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}.$$

Но $\mathfrak{A}A \subset \mathfrak{A}$ и $A\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Таким образом, справедливы требуемые равенства.

С другой стороны, если для любого $A \in \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}, \quad A\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

то для всякого $B \in \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}A \ni B, \quad A\mathfrak{A} \ni B,$$

т. е. при некоторых $X, Y \in \mathfrak{A}$

$$XA = B, \quad AY = B.$$

1.3. Легко убеждаемся в ассоциативности умножения подмножеств. $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)\mathfrak{K}_3$, где $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3 \subset \mathfrak{A}$, состоит из всех элементов вида $(K_1K_2)K_3$, где $K_1 \in \mathfrak{K}_1$, $K_2 \in \mathfrak{K}_2$, $K_3 \in \mathfrak{K}_3$. Одновременно $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3)$ состоит из элементов вида $K_1(K_2K_3) = (K_1K_2)K_3$, т. е. из тех же самых элементов, что и $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)\mathfrak{K}_3$.

Из этого следует, что совокупность всех непустых подмножеств полугруппы относительно описанного действия сама является полугруппой. Если исходная полугруппа была коммутативна, то и полугруппа ее подмножеств, очевидно, будет коммутативной.

При исследовании различных свойств полугрупп постоянно используется действие умножения их подмножеств. Однако сколько-нибудь полного и систематического изучения полугруппы подмножеств полугруппы до сих пор не производилось. Объясняется это, по-видимому, сложностью строения полугруппы подмножеств. Вполне естественно ожидать, что

преодоление связанных с этим трудностей может привести к ценным результатам.

Исследования в указанном направлении проводил Дюбрейль [5]. При этом в полугруппу всех подмножеств полугруппы он включал и пустое подмножество, которое в этом случае оказывается нулем полугруппы всех подмножеств.

1.4. В совокупности подмножеств полугруппы $\mathfrak{A}$ естественным образом определяется отношение частичной упорядочности (I, 5.9). Для $\mathfrak{L}, \mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ множество $\mathfrak{K}$ считается предшествующим $\mathfrak{L}$, если $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$.

Легко убедиться, что если в совокупность подмножеств $\mathfrak{A}$ включить и пустое подмножество, то эта совокупность будет полной структурой (I, 5.13).

Указанное отношение частичной упорядочности в полугруппе подмножеств $\mathfrak{A}$ является двусторонне стабильным (I, 5.17). Действительно, при $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ и любом $\mathfrak{M}$, очевидно,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{K}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}\mathfrak{M} \qquad (\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}).$$

При рассмотрении умножения подмножеств обычно приходится учитывать и отношение включения. Отметим, в частности, что для любых подмножеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}_\lambda$ ($\lambda \in \Gamma$) полугруппы $\mathfrak{A}$ всегда имеет место

$$\mathfrak{M} \cdot \left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{L}_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} (\mathfrak{M}\mathfrak{L}_\lambda).$$

Действительно, и левая и правая части равенства представляют собой множество всевозможных элементов вида XY, где $X \in \mathfrak{M}$, а Y содержится в одном из $\mathfrak{L}_\lambda$ ($\lambda \in \Gamma$).

Аналогично

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{L}_\lambda \right) \cdot \mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} (\mathfrak{L}_\lambda \mathfrak{M}).$$

Для пересечения подобные равенства могут и не иметь места.

В качестве примера рассмотрим в мультипликативной полугруппе целых неотрицательных чисел подмножества $\mathfrak{M} = \{1, 2\}$, $\mathfrak{L}_1 = \{0, 1\}$, $\mathfrak{L}_2 = \{0, 2\}$. Мы имеем:

$$\mathfrak{M} \cdot (\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2) = \{1, 2\} \cdot \{0\} = 0.$$

$$(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{L}_1) \cap (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{L}_2) = \{0, 1, 2\} \cap \{0, 2, 4\} = \{0, 2\}.$$

1.5. Подобно тому, как это имеет место и в других разделах алгебры, особую роль играют такие подмножества, которые сами относительно того же действия удовлетворяют исходным аксиомам.

Определение. *Непустое подмножество* $\mathfrak{B}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *называется* $подполугруппой$ $\mathfrak{A}$, *если*

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}$ *в этом случае называют* $надполугруппой$ $\mathfrak{B}$.

Следует иметь в виду следующее правило в терминологии подполугрупп. Если подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ является группой, то ее называют *подгруппой* полугруппы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$ является коммутативной полугруппой, то ее называют *коммутативной подполугруппой* $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$ является инверсной полугруппой, то ее называют *инверсной подполугруппой* $\mathfrak{A}$ и т. п.

Подполугруппа, являющаяся собственным подмножеством $\mathfrak{A}$, т. е. отличная от $\mathfrak{A}$, называется *собственной подполугруппой*.

Следует отметить, что в тех работах, в которых при определении полугруппы не требуется непустоты множества ее элементов, пустое множество также считается подполугруппой.

1.6. *Относительно действия умножения, определенного во всей полугруппе* $\mathfrak{A}$, *множество элементов подполугруппы само является полугруппой.* Действительно, для любых B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$ произведение B_1B_2 определено (так как оно определено для любых элементов из $\mathfrak{A}$) и принадлежит $\mathfrak{B}$ (так как $B_1B_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$). При этом действие в $\mathfrak{B}$ ассоциативно, так как оно ассоциативно в $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

Разумеется, справедливо и обратное. Если подмножество $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ относительно действия, определенного в $\mathfrak{A}$, само является полугруппой, то произведение любых двух его элементов должно принадлежать $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ оказывается подполугруппой.

1.7. Если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа преобразований некоторого множества Ω и $\Omega' \subset \Omega$, то совокупность всех преобразований A из $\mathfrak{A}$, таких, что

$$A\Omega' \subset \Omega',$$

очевидно, будет подполугруппой $\mathfrak{A}$ (конечно, если она не пуста). В свою очередь ее подполугруппой будет совокупность таких A, что

$$A\Omega' = \Omega'.$$

В полугруппе матриц $\mathfrak{M}_n$ множество всех особенных матриц образует подполугруппу. Также и множество всех неособенных матриц является подполугруппой и даже подгруппой.

В мультипликативной полугруппе всех натуральных чисел будут подполугруппами: множество всех четных чисел, множество всех чисел больших заданного числа, множество всех непростых чисел и т. д.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть совокупность всех вещественных непрерывных функций, определенных на некотором промежутке E, значения которых также принадлежат E. Относительно действия суперпозиции функций $\mathfrak{A}$ является полугруппой. Очевидно, подполугруппами $\mathfrak{A}$ будут, например: множество всех дифференцируемых функций, множество всех монотонно возрастающих функций, множество всех постоянных.

1.8. При исследовании той или иной полугруппы $\mathfrak{A}$ иногда бывает удобно вложить ее в некоторую охватывающую ее надполугруппу $\mathfrak{A}'$. Это может быть целесообразным или потому, что $\mathfrak{A}'$ обладает более удобными для изучения свойствами, или в связи с тем, что для нескольких различных полугрупп найдется одна общая охватывающая их надполугруппа, так что исследование нескольких полугрупп заменяется исследованием одной полугруппы. При вложении часто используется следующая операция отождествления.

Пусть φ есть изоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{B}$, не имеющую с $\mathfrak{A}$ общих элементов. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}'$, получающееся из $\mathfrak{B}$ в результате замены элементов, принадлежащих $\varphi(\mathfrak{A})$, соответствующими им при изоморфизме φ элементами самой $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{B} \setminus \varphi(\mathfrak{A})).$$

В $\mathfrak{A}'$ определяем действие, полагая $X'Y' = Z'$ ($X', Y', Z' \in \mathfrak{A}'$), если в $\mathfrak{B}$ имеет место $XY = Z$ (где $X = \varphi(X')$, если $X' \in \mathfrak{A}$ и $X = X'$, если $X' \notin \mathfrak{A}$; то же и для Y и Z).

Очевидно, $\mathfrak{A}'$ оказывается относительно этого действия полугруппой, изоморфной $\mathfrak{B}$. При этом $\mathfrak{A}'$ есть надполугруппа $\mathfrak{A}$.

Переход от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{A}'$ можно описать как замену элементов из $\mathfrak{B}$, принадлежащих $\varphi(\mathfrak{A})$, соответствующими элементами из $\mathfrak{A}$, или как операцию отождествления каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ с элементом $\varphi(A) \in \mathfrak{B}$.

1.9. В связи со сказанным в 1.8, возникает следующее важное понятие.

Определение. *Класс полугрупп* Γ *называется универсальным классом для класса полугрупп* Ξ, *если каждая полугруппа из* Ξ *изоморфна некоторой подполугруппе какой-нибудь из полугрупп, принадлежащих* Γ.

Изучение полугрупп класса, для которого нам известен универсальный класс Γ, может быть сведено к изучению полугрупп из этого универсального класса. Особенно удобно это в случае, когда полугруппы из Γ сами все содержатся в Ξ. В этом случае, сводя вопрос об изучении полугрупп из Ξ к изучению полугрупп из Γ, мы только сужаем задачу, не выходя за ее первоначальные границы.

1.10. Пусть $\mathfrak{m}$ есть некоторая бесконечная мощность и Ω некоторое множество мощности $\mathfrak{m}$. Благодаря I, 3.9 полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ одна образует универсальный класс для класса всех полугрупп, мощность множества элементов которых не превосходит $\mathfrak{m}$. Правда, сама $\mathfrak{S}_\Omega$, как это следует из простейших свойств мощностей, не содержится в указанном классе.

Для класса всех полугрупп класс полугрупп $\mathfrak{S}_\Omega$ при различных Ω, очевидно, является универсальным.

Пусть Ω есть некоторое счетное множество. Обозначим через $\mathfrak{S}'_\Omega$ множество всех таких преобразований Ω, каждое из которых S оставляет неизменными все элементы из Ω, за исключением лишь конечного их числа (т. е. $S\alpha \neq \alpha$ имеет место лишь для конечного числа элементов $\alpha \in \Omega$). Иногда такие преобразования называют почти тождественными. Так как полугруппа $\mathfrak{S}_\Sigma$ всех преобразований любого конечного множества Σ, очевидно, изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $\mathfrak{S}'_\Omega$, то и всякая конечная полугруппа будет изоморфна некоторой подполугруппе $\mathfrak{S}'_\Omega$. Таким образом, $\mathfrak{S}'_\Omega$

образует универсальный класс для класса всех конечных полугрупп.

Подполугруппа группы сама может и не быть группой. Например, мультипликативная полугруппа натуральных чисел, конечно, не являющаяся группой, есть подполугруппа мультипликативной группы всех положительных рациональных чисел. Про полугруппы, которые являются подполугруппами некоторых групп, говорят, что они *вложимы в группу*. Класс всех полугрупп, вложимых в группы, подвергался многочисленным исследованиям. Изучение его свойств представляет интерес как для общей теории полугрупп, так и специально для теории групп. Из самого определения видно, что класс всех групп, входящий в класс полугрупп, вложимых в группы, является для этого последнего универсальным классом.

Построение и изучение универсальных классов возможно для различных классов полугрупп и способствует их изучению.

1.11. Отметим несколько простейших свойств подполугрупп произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$.

(α). *Полугруппа $\mathfrak{A}$ сама является своей подполугруппой.*

(β). *Пересечение любого множества подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}$, если оно не пусто, само является подполугруппой $\mathfrak{A}$.*

Действительно, если X и Y принадлежат пересечению некоторого множества подполугрупп, то XY принадлежит каждой из этих полугрупп и потому XY содержится и в их пересечении.

(γ). *Если $\mathfrak{A}'$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, то всеми подполугруппами $\mathfrak{A}'$ будут подполугруппы $\mathfrak{A}$, содержащиеся в $\mathfrak{A}'$.*

(δ). *Подмножество $\mathfrak{A}$, состоящее из одного элемента X, будет подполугруппой тогда и только тогда, когда X является идемпотентом.*

(ε). *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает идемпотентами и они все коммутируют между собой, то совокупность всех идемпотентов является подполугруппой.*

Действительно, если

$$I_1^2 = I_1, \quad I_2^2 = I_2, \quad I_1 I_2 = I_2 I_1,$$

то

$$(I_1 I_2)^2 = I_1 I_2 I_1 I_2 = I_1 I_1 I_2 I_2 = I_1 I_2,$$

т. е. произведение двух произвольных идемпотентов само принадлежит множеству всех идемпотентов.

1.12. Отметим следующую важную конструкцию. Пусть Σ есть непустая совокупность полугрупп, обладающая тем свойством, что для любых двух полугрупп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из Σ в Σ всегда найдется такая полугруппа $\mathfrak{L}$, которая является надполугруппой и для $\mathfrak{M}$ и для $\mathfrak{N}$.

Обозначим

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\mathfrak{N} \in \Sigma} \mathfrak{N}.$$

В $\mathfrak{A}$ естественным образом определяется действие. Если $X, Y \in \mathfrak{A}$, то для некоторых $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \Sigma$ имеет место $X \in \mathfrak{M}$, $Y \in \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{L} \in \Sigma$ есть надполугруппа $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Тогда определяем XY в $\mathfrak{A}$ как произведение X и Y, рассматриваемых как элементы полугруппы $\mathfrak{L}$. Такое определение произведения XY не зависит от выбора $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$. Действительно, пусть также $\mathfrak{L}' \in \Sigma$ является надполугруппой $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}'$, где $X \in \mathfrak{M}'$, $Y \in \mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}' \in \Sigma$). В Σ найдется полугруппа $\mathfrak{T}$, являющаяся надполугруппой $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$. Произведение X и Y в $\mathfrak{L}$ должно совпадать с произведением X и Y в $\mathfrak{T}$. То же и для $\mathfrak{L}'$. Следовательно, произведение X и Y определяется и при помощи $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ и при помощи $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{L}'$ одинаково.

Ассоциативность определенного в $\mathfrak{A}$ действия очевидна. Таким образом, $\mathfrak{A}$ оказывается полугруппой. $\mathfrak{A}$ есть объединение полугрупп исходной совокупности Σ.

Частным случаем рассматриваемой конструкции является объединение произвольной совокупности Γ подполугрупп некоторой полугруппы, если Γ такова, что из двух любых полугрупп, входящих в Γ, одна обязательно является подполугруппой другой. Объединение всех полугрупп, входящих в Γ, будет в этом случае подполугруппой исходной полугруппы.

1.13. Приведем несколько примеров подполугрупп произвольных полугрупп.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа. Каждое из следующих его подмножеств, если оно непусто, очевидно, является подполугруппой $\mathfrak{A}$.

Множество всех элементов, являющихся и левыми и правыми делителями любых элементов $\mathfrak{A}$ (II, 1.5).

Множество всех элементов, делящихся и слева и справа на все элементы $\mathfrak{A}$ (II, 1.6).

Множество всех тех элементов, каждый из которых перестановочен с любым элементом $\mathfrak{A}$ (иногда эту подполугруппу называют центром полугруппы $\mathfrak{A}$).

Для произвольного подмножества $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ определяется подмножество $\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}$, состоящее из всех таких элементов $U \in \mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A}U \cap \mathfrak{K} = \varnothing$. Аналогично определяется $\mathfrak{V}_{\mathfrak{K}}$, состоящее из элементов $V \in \mathfrak{A}$, таких, что $V\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} = \varnothing$. Легко видеть, что $\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{V}_{\mathfrak{K}}$, если они непусты, являются подполугруппами $\mathfrak{A}$. Подполугруппы $\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{V}_{\mathfrak{K}}$ были введены Дюбрейлем [1], (см. также [3]). В его исследованиях эти подполугруппы играют важную роль.

1.14. Подгруппы полугруппы, т. е. подполугруппы, являющиеся группами, играют в некоторых вопросах особую роль. Пусть I есть произвольный идемпотент полугруппы $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{G}_I$ множество всех тех вполне регулярных элементов (II, 6.1) полугруппы $\mathfrak{A}$, для которых I является регулярной двусторонней единицей. (II, 6.2; II, 6.4).

$\mathfrak{G}_I$ непусто, так как, согласно II, 6.3, $\mathfrak{G}_I$ содержит I.

Теорема. *$\mathfrak{G}_I$ является подгруппой полугруппы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть G_1, $G_2 \in \mathfrak{G}_I$. Так как I, является для G_1 и G_2 регулярной двусторонней единицей, то при некоторых U_i, $V_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1,2)$

$$I = G_i U_i, \quad I = V_i G_i, \quad (i = 1,\ 2).$$

Отсюда следует:

$$(G_1 G_2)(U_2 U_1) = G_1 I U_1 = G_1 U_1 = I,$$
$$(V_2 V_1)(G_1 G_2) = V_2 I G_2 = V_2 G_2 = I.$$

Так как I, очевидно, является двусторонней единицей элемента $(G_1 G_2)$, то I есть регулярная двусторонняя единица $(G_1 G_2)$, т. е. $(G_1 G_2) \in \mathfrak{G}_I$. Таким образом, $\mathfrak{G}_I$ есть полугруппа. I является ее единицей.

Так как I, очевидно, является двусторонней единицей для $IU_1 I$ и

$$I = II = G_1 U_1 I = G_1 \cdot (IU_1 I),$$
$$I = V_1 G_1 = V_1 II G_1 = V_1 G_1 U_1 I G_1 = (IU_1 I) \cdot G_1,$$

то I является регулярной двусторонней единицей элемента $(IU_1 I)$.

Таким образом, этот элемент содержится в $\mathfrak{G}_I$ и является для G_1 двусторонне обратным относительно I. Из того, что

произвольный элемент G_1 полугруппы $\mathfrak{G}_I$, обладающей единицей, имеет в $\mathfrak{G}_I$ двусторонне обратный, следует, что $\mathfrak{G}_I$ является группой (II, 2.15).

1.15. ***Следствие.*** *Для того чтобы элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ содержался в некоторой подгруппе полугруппы $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы A был вполне регулярным.*

Действительно, вполне регулярный элемент A, имеющий своей регулярной двусторонней единицей идемпотент I, содержится в подгруппе $\mathfrak{G}_I$.

Если некоторый элемент A содержится в какой-нибудь подгруппе $\mathfrak{G}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, то по свойству группы $E_{\mathfrak{G}}$ является для A регулярной двусторонней единицей и потому A вполне регулярен.

1.16. Так как никакой элемент не может иметь двух регулярных двусторонних единиц (II, 6.5), то группы $\mathfrak{G}_I$ попарно не имеют общих элементов. Таким образом, множество $\mathfrak{F}$ всех вполне регулярных элементов полугруппы $\mathfrak{A}$ выражается в виде непересекающегося объединения групп

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{I \in \mathfrak{H}} \mathfrak{G}_I$$

(где $\mathfrak{H}$ есть множество всех идемпотентов $\mathfrak{A}$).

Всякая подгруппа $\mathfrak{G}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержится в одной из компонент полученного объединения, именно в $\mathfrak{G}_{E_{\mathfrak{G}}}$. Сами компоненты $\mathfrak{G}_I$ являются максимальными подгруппами $\mathfrak{A}$, так как ни одна из них не содержится ни в какой подгруппе $\mathfrak{A}$, отличной от самой $\mathfrak{G}_I$.

Отсутствие идемпотентов является необходимым и достаточным условием отсутствия подгрупп в $\mathfrak{A}$. Наличие лишь одного идемпотента означает, что все подгруппы $\mathfrak{A}$ являются подгруппами одной наибольшей, охватывающей их всех, подгруппы $\mathfrak{G}_I$, представляющей собой множество всех вполне регулярных элементов. При числе идемпотентов, большем одного, существует пара элементов, каждый из которых содержится в некоторой подгруппе, но никакая подгруппа не содержит их оба.

§ 2. Порождающие множества

2.1. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторое непустое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Совокупность $\mathfrak{B}$, состоящая из всевозможных элементов B, представимых в виде произведения

элементов из $\mathfrak{K}$ (в том числе и „произведений“, состоящих из одного множителя)

$$B = X_1 X_2 \ldots X_n \qquad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{K}),$$

очевидно, образует подполугруппу. Будем говорить, что подполугруппа $\mathfrak{B}$ *порождается множеством* $\mathfrak{K}$, а $\mathfrak{K}$ будем называть *порождающим множеством для* $\mathfrak{B}$. При этом будем употреблять обозначение

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{K}]$$

(конечно, продолжая употреблять квадратные скобки и обычным образом в качестве отделительного знака, что не будет вызывать никаких недоразумений). Особенно важен случай, когда подмножество $\mathfrak{K}$ является *порождающим для самой полугруппы* $\mathfrak{A}$, т. е. порождает всю полугруппу $\mathfrak{A}$

$$[\mathfrak{K}] = \mathfrak{A}.$$

Возможность выражать элементы полугруппы (все или только некоторые) в виде произведений элементов некоторого ее подмножества представляет очевидный самостоятельный интерес и, кроме того, может быть использована для исследования различных свойств полугрупп. Мы будем этим заниматься как в настоящем параграфе, так и в некоторых последующих параграфах.

2.2. Следует иметь в виду, что в теории групп подмножество $\mathfrak{K}$ группы $\mathfrak{G}$ называется порождающим для подгруппы $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$, что обозначается через $\{\mathfrak{K}\} = \mathfrak{G}'$, если множество $\overline{\mathfrak{K}}$, состоящее из всех элементов $\mathfrak{K}$ и из всех элементов, обратных к элементам из $\mathfrak{K}$, является порождающим для $\mathfrak{G}'$ в смысле 2.1.

2.3. В обозначениях умножения подмножеств полугруппы подполугруппу $\mathfrak{B}$, порождаемую множеством $\mathfrak{K}$, можно, очевидно, записать в виде

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{K}] = \mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}\mathfrak{K}\mathfrak{K} \cup \ldots$$

Отметим также следующие очевидные свойства:

1) $[[\mathfrak{K}]] = [\mathfrak{K}]$;

2) если $\mathfrak{K}_1 \supset \mathfrak{K}_2$, то $[\mathfrak{K}_1] \supset [\mathfrak{K}_2]$.

2.4. К понятию порождающего множества возможен и другой подход. *Именно множество* $\mathfrak{K}$ *будет порождающим для подполугруппы* $\mathfrak{B}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$, *в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{B}$ *является пересечением всех подполугрупп* $\mathfrak{A}$, *содержащих* $\mathfrak{K}$.

Действительно, всякая подполугруппа $\mathfrak{N}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащая $\mathfrak{K}$, должна содержать и все возможные произведения элементов из $\mathfrak{K}$, т. е. $\mathfrak{N} \supset [\mathfrak{K}]$. Следовательно, $[\mathfrak{K}]$ содержится в указанном пересечении. С другой стороны, сама $[\mathfrak{K}]$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$, содержащей $\mathfrak{K}$, и потому содержит рассматриваемое пересечение.

Из сказанного, в частности, следует, что порождающими множествами самой полугруппы будут те множества, которые не содержатся ни в какой собственной подполугруппе полугруппы.

2.5. Конечно, всякая полугруппа обладает порождающими множествами. Например, совокупность всех элементов полугруппы есть ее порождающее множество. При этом обычно полугруппа имеет несколько различных порождающих множеств. Это видно, например, из того, что всякое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащее некоторое ее порождающее множество, очевидно, само всегда является порождающим множеством $\mathfrak{A}$.

При выборе порождающего подмножества для изучения полугруппы обычно бывает удобно, чтобы оно обладало по возможности меньшим количеством элементов. Особенно удобно бывает иметь дело с так называемыми *неприводимыми порождающими множествами* полугруппы, т. е. такими порождающими множествами, у которых никакое собственное подмножество уже не является порождающим множеством полугруппы.

2.6. Всякая конечная полугруппа обладает неприводимыми порождающими множествами (их может быть и несколько). Неприводимое порождающее множество конечной полугруппы можно получить из любого ее порождающего множества, откидывая последовательно элементы, которые могут быть представлены в виде произведения остальных элементов данного множества.

Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает конечным порождающим множеством $\mathfrak{K}$, то во всяком ее порождающем множестве $\mathfrak{K}'$ имеется конечное подмножество, являющееся неприводимым

порождающим множеством полугруппы (отсюда, в частности, следует, что в этом случае все неприводимые порождающие множества конечны, хотя, может быть, и с различным числом элементов). Действительно, для каждого элемента из $\mathfrak{K}$ выберем некоторое представление его в виде произведения элементов из $\mathfrak{K}'$. Обозначим через $\mathfrak{K}''$ совокупность всех тех элементов из $\mathfrak{K}'$, которые входят в выбранные выражения. Так как в каждое такое выражение входит лишь конечное число элементов и самих выражений, как и элементов $\mathfrak{K}$, конечное число, то множество $\mathfrak{K}''$ будет конечным. Так как $[\mathfrak{K}''] \supset \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{K}''$ является порождающим множеством $\mathfrak{A}$. Если один из элементов $\mathfrak{K}''$ может быть представлен в виде произведения остальных элементов из $\mathfrak{K}''$, то, исключив его, получим новое порождающее множество $\mathfrak{K}'''$ с меньшим числом элементов. Повторяя подобное исключение, мы, наконец, получим конечное порождающее множество $\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{K}'$, в котором уже ни один элемент не будет выражаться в виде произведения прочих элементов. $\mathfrak{K}^*$ и будет искомым неприводимым порождающим множеством $\mathfrak{A}$.

Что касается произвольных бесконечных полугрупп, то таковые иногда и вовсе не обладают неприводимыми порождающими множествами.

В качестве примера укажем полугруппу $\mathfrak{A}$, состоящую из всех натуральных чисел, действием в которой является нахождение наибольшего общего делителя. Если $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество такой полугруппы и число n произвольный элемент из $\mathfrak{K}$, то и $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \setminus n$ будет порождающим множеством. Действительно, числа $2n$ и $3n$ должны представляться при помощи нашего действия через числа из $\mathfrak{K}$. Поэтому они представляются и через числа из $\mathfrak{K}'$ (очевидно, в выражениях чисел $2n$ и $3n$ через числа из $\mathfrak{K}$ число n входить не может). Но n есть результат нашего действия между числами $2n$ и $3n$. Таким образом, в $[\mathfrak{K}']$ содержится $\mathfrak{K}' \cup n = \mathfrak{K}$.

Следовательно, $[\mathfrak{K}'] \supset [\mathfrak{K}] = \mathfrak{A}$.

2.7. Если элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ неразложим, т. е. не может быть представлен в виде $A = XY$, где $X, Y \in \mathfrak{A}$, то A, очевидно, обязан входить во всякое порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$. В случае, когда совокупность всех неразложимых элементов порождает полугруппу, она является единственным неприводимым порождающим множеством этой полугруппы.

Совокупностью всех неразложимых элементов, очевидно, является множество

$$\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}\mathfrak{A}.$$

2.8. Пусть $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$. Представление элементов из $\mathfrak{A}$ в виде произведений элементов из $\mathfrak{K}$ часто оказывается весьма полезным для исследования тех или иных свойств полугруппы. С его помощью мы можем относительно наглядно представить себе состав множества элементов полугруппы, мысля его в виде множества всевозможных произведений элементов из $\mathfrak{K}$. Одно обстоятельство, однако, сильно осложняет использование такого подхода. Дело в том, что обычно один и тот же элемент полугруппы допускает несколько различных представлений в виде произведения элементов из $\mathfrak{K}$. Таким образом, множеством всех элементов является, собственно говоря, не само множество всевозможных произведений элементов из $\mathfrak{K}$, но множество классов, на которые разбивается это множество, если отнести к одному классу все те произведения, которые равны одному и тому же элементу $\mathfrak{A}$. Однако в большинстве случаев выяснение того, когда два произведения элементов из порождающего множества $\mathfrak{K}$ равны между собой (конечно, имеется в виду равны как элементы из $\mathfrak{A}$), представляет значительные трудности. Степень этих трудностей, конечно, зависит от природы полугруппы $\mathfrak{A}$ и от того, каким способом она нам задана.

Обычный путь, используемый для решения указанной выше задачи, состоит в следующем. Среди всевозможных произведений элементов из порождающего множества $\mathfrak{K}$ стремятся выбрать некоторые произведения, обладающие следующими свойствами: 1) никакие два из выбранных произведений, имеющих внешне различный вид, не должны быть равны как элементы $\mathfrak{A}$; 2) всякое произведение элементов из $\mathfrak{K}$ должно быть равно как элемент из $\mathfrak{A}$ некоторому из выбранных произведений. Произведения, входящие в совокупность выбранных произведений, обладающую обоими указанными свойствами, обычно называют каноническими выражениями, или каноническими формами элементов из $\mathfrak{A}$. Если построение канонических форм осуществлено, то каждый элемент обладает единственной канонической формой. Таким образом, совокупность построенных канонических форм

можно рассматривать как множество всех элементов полугруппы. Если в добавление к этому имеется достаточно удобный способ перемножения этих канонических форм, т. е. способ нахождения канонической формы для элемента, который представлен в виде произведения двух сомножителей, заданных в канонической форме, то мы получаем полное задание данной полугруппы: состав множества ее элементов и правило действия между ними.

Разумеется, относительно одного и того же порождающего множества может существовать несколько различных систем канонических форм. Выбор наиболее удачной из них во многом предрешает успешность применения описанного способа задания полугруппы для исследования ее свойств.

2.9. Одним из простейших примеров, иллюстрирующих сказанное, является мультипликативная полугруппа $\mathfrak{A}$ всех натуральных чисел. Множество $\mathfrak{K}$, состоящее из единицы и всех простых чисел, является порождающим для этой полугруппы. Никакое число n из $\mathfrak{K}$ не может быть представлено в виде произведения чисел из $\mathfrak{A}$, отличных от n. Таким образом, $\mathfrak{K}$ является единственным неприводимым порождающим множеством $\mathfrak{A}$. Представление числа 1 в виде „произведения“, состоящего из одного множителя 1, и представление всех остальных чисел в виде произведения расположенных по величине простых чисел составляют систему канонических форм элементов из $\mathfrak{A}$. Известный простой способ перемножения чисел, заданных в виде разложений на простые множители, является упомянутым в 2.8 способом перемножения канонических форм.

2.10. Более трудный пример дает полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$, состоящая из всех преобразований конечного множества Ω.

Пусть S есть произвольное преобразование из $\mathfrak{S}_\Omega$. Назовем элементы α и β из Ω эквивалентными относительно S, если при некоторых натуральных k и l

$$S^k\alpha = S^l\beta.$$

Указанное отношение, очевидно, симметрично и рефлексивно. Оно и транзитивно, так как из

$$S^k\alpha = S^l\beta, \quad S^p\beta = S^q\gamma$$

следует:

$$S^{k+p}\alpha = S^p(S^k\alpha) = S^p(S^l\beta) = S^{p+l}\beta =$$

$$= S^l(S^p\beta) = S^l(S^q\gamma) = S^{l+q}\gamma.$$

Таким образом, все элементы из $\mathfrak{Q}$ разбиваются на попарно непересекающиеся классы элементов, эквивалентных между собой относительно S. Отметим, что из эквивалентности относительно S элементов α и $S\alpha$ (вытекающей из $S^2\alpha = S(S\alpha)$) следует, что для всякого класса Γ, эквивалентных относительно S элементов, имеет место $S\Gamma \subset \Gamma$.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность преобразований P из $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$, обладающих следующим свойством. Среди классов, эквивалентных относительно P элементов множества $\mathfrak{Q}$, лишь один класс может обладать более чем одним элементом. Покажем, что $\mathfrak{P}$ является порождающим множеством для $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$.

Пусть S произвольное преобразование из $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$. Разобьем $\mathfrak{Q}$ на классы элементов, эквивалентных относительно S

$$\mathfrak{Q} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_m.$$

Для каждого класса Γ_i строим преобразование P_i, которое каждый элемент из Γ_i преобразует так же, как и преобразование S, а элементов из остальных классов не изменяет:

$$P_i\alpha = S\alpha, \quad P_i\beta = \beta \qquad (\alpha \in \Gamma_i, \ \beta \in \mathfrak{Q} \setminus \Gamma_i).$$

P_i принадлежит $\mathfrak{P}$, так как все элементы из Γ_i эквивалентны относительно P_i, а ни один из элементов, не принадлежащих Γ_i, не эквивалентен никакому отличному от него самого элементу.

Так как для каждого $\alpha \in \Gamma_i$

$$S\alpha = P_i\alpha, \quad P_j(P_i\alpha) = P_i\alpha, \quad P_j\alpha = \alpha, \qquad (j \neq i),$$

то

$$S\alpha = P_1P_2 \ldots P_m\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$S = P_1P_2 \ldots P_m.$$

Полученное произведение характерно тем, что все его множители принадлежат $\mathfrak{P}$ и ни для каких двух множителей не существует такого $\alpha \in \mathfrak{Q}$, что $P_i\alpha \neq \alpha$, $P_j\alpha \neq \alpha$ $(i \neq j)$.

Множители такого произведения, как легко видеть, перестановочны между собой. Если взять два таких произведения, отличающихся не только порядком сомножителей, то они будут представлять собою различные элементы $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}$, так как хотя бы один из элементов $\mathfrak{Q}$ будет по-разному преобразовываться в результате преобразования одним и другим из этих

произведений. Таким образом, если условиться относительно какого-нибудь порядка записи сомножителей в произведении, то произведения описанного типа будут представлять собой канонические формы элементов $\mathfrak{S}_\Omega$ относительно порождающего множества $\mathfrak{P}$.

Следует отметить, что порождающее множество $\mathfrak{P}$ не будет неприводимым, если только Ω содержит более одного элемента.

Действительно, выберем в Ω два элемента α и β и рассмотрим три элемента из $\mathfrak{P}$, записав их в виде подстановок:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

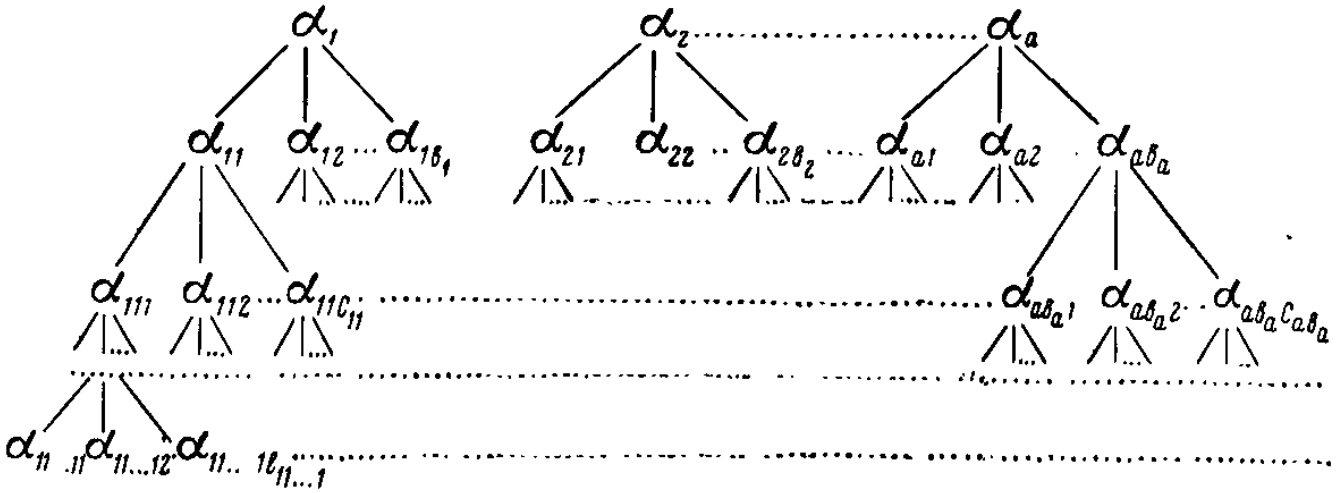
(не выписанные элементы из Ω преобразуются подстановкой сами в себя). Так как

$$P_1 = P_3 P_2,$$

то множество, получаемое из $\mathfrak{P}$ исключением подстановки P_1, также будет порождающим.

2.11. В связи с доказанным в 2.10 естественно выяснить более подробно строение преобразований из $\mathfrak{P}$.

Рассмотрим некоторые специальным образом устроенные элементы из $\mathfrak{S}_\Omega$. Пусть из Ω взяты некоторые различные между собою элементы, которые снабжены индексами по следующей схеме π:



При помощи указанной схемы π строим следующее преобразование P_π:

$$P_\pi \alpha_1 = \alpha_2 \quad P_\pi \alpha_2 = \alpha_3, \quad \ldots, \quad P_\pi \alpha_{a-1} = \alpha_a, \quad P_\pi \alpha_a = \alpha_1,$$

$$P_\pi \alpha_{s_1 s_2 \ldots s_{r-1} s_r} = \alpha_{s_1 s_2 \ldots s_{r-1}},$$

$P_\pi \xi = \xi$, для всех ξ, не входящих в схему π.

Легко видеть, что построенное преобразование P_π принадлежит $\mathfrak{P}$. Покажем, что всякое преобразование $P \in \mathfrak{P}$ построено таким образом.

Пусть Γ есть тот единственный класс эквивалентных относительно P элементов Ω, который содержит более одного элемента (случай, когда все классы имеют по одному элементу тривиален). Возьмем в Γ произвольный элемент α и рассмотрим последовательность

$$P\alpha, \quad P^2\alpha, \quad P^3\alpha, \quad \ldots$$

Ввиду конечности Ω в этой последовательности должны встретиться одинаковые элементы

$$P^k\alpha = P^l\alpha, \qquad (k > l).$$

Отсюда

$$P^{k-l}\left(P^l\alpha\right) = \left(P^l\alpha\right).$$

Таким образом, в Γ должны существовать такие элементы β, что при некотором m $P^m\beta = \beta$. Совокупность их обозначим через Γ'. Как мы видели, для произвольного элемента $\alpha \in \Gamma$ найдется такое l, что $P^l\alpha \in \Gamma'$. Пусть $\beta_1 \in \Gamma'$. Рассмотрим последовательность

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_a; \quad P\beta_i = \beta_{i+1} \quad P\beta_a = \beta_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, (a-1)).$$

Так как

$$P^m\beta_1 = \beta_1,$$

то

$$P^m\beta_i = P^m\left(P^{i-1}\beta_1\right) = P^{m+i-1}\beta_1 = P^{i-1}\left(P^m\beta_1\right) = P^{i-1}\beta_1 = \beta_i,$$

т. е. все элементы нашей последовательности принадлежат Γ'. Других элементов Γ' не содержит, так как из

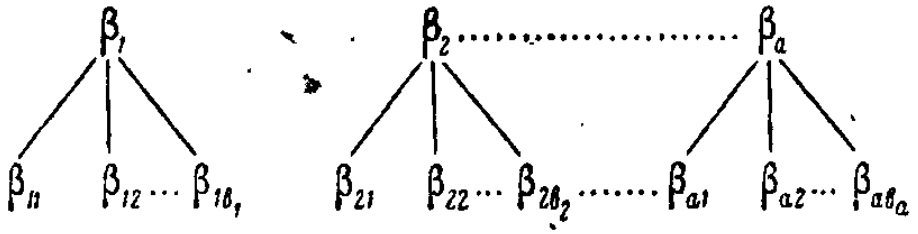
$$P^r\gamma = \gamma, \quad P^s\beta_1 = P^t\gamma$$

следует

$$\gamma = P^{rt}\gamma = P^{(r-1)t}\left(P^t\gamma\right) = P^{(r-1)t}\left(P^s\beta_1\right) =$$

$$= P^{(r-1)t+s}\beta_1 = \beta_l \in \Gamma'.$$

Теперь возьмем те элементы из $\Gamma \setminus \Gamma'$, которые в результате преобразования P преобразуются в элементы из Γ', и подпишем их под соответствующим β_j:



Затем возьмем те элементы, которые в результате преобразования P преобразуются в элементы второй строки, и подпишем их снизу в виде третьей строки. Продолжая так далее, мы исчерпаем все элементы из Γ, так как из отмеченного выше следует, что для каждого $\alpha \in \Gamma$ при некотором s имеет место $P^s\alpha = \beta_i$, т. е. каждый $\alpha \in \Gamma$ попадает в нашу схему. Очевидно, преобразование P есть преобразование $P_{\mathfrak{n}}$ для полученной выше схемы $\mathfrak{n}$.

Представление преобразования $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ в виде указанного в 2.10 произведения преобразований из $\mathfrak{P}$ есть не что иное, как обобщение известного в теории групп подстановок разложения групповых подстановок на произведения независимых циклов. Преобразования из $\mathfrak{P}$ представляют собой обобщенные циклы. Они превращаются в обычные групповые циклические подстановки в том случае, когда рассмотренная выше схема $\mathfrak{n}$ состоит из одной верхней строчки. Элемент $S \in \mathfrak{S}_\Omega$, разложенный в произведение типа 2.10 элементов из $\mathfrak{P}$, является взаимно однозначным преобразованием (групповой подстановкой), если каждый из множителей P_i соответствует описанной схеме, состоящей из одной строчки.

2.12. Теперь перейдем к неприводимым порождающим множествам полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$. Идя по пути, намеченному Н. Н. Воробьевым [5], выясним, когда порождающее множество полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ будет неприводимым. Обозначим через n количество элементов в множестве Ω. Для каждого $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ обозначим через $\chi(S)$ количество элементов в $S\Omega$. Элементы S, у которых $\chi(S) = n$, являются взаимно однозначными преобразованиями множества Ω. Совокупность их обозначим через $\mathfrak{S}_\Omega$. Она является группой (так называемая симметрическая группа n-й степени).

Легко видеть, что если в произведении элементов из $\mathfrak{S}_2$ имеется множитель X, у которого $\chi(X)=k$, то значение χ для всего произведения не может превосходить k.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторое неприводимое порождающее множество полугруппы $\mathfrak{S}_2$. Обозначим

$$\mathfrak{K}\cap\mathfrak{G}_2=\mathfrak{K}', \qquad \mathfrak{K}\setminus\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}''.$$

Согласно сказанному, произведение элементов, содержащих хотя бы один множитель из $\mathfrak{K}''$, не может принадлежать $\mathfrak{G}_2$. Отсюда следует, что каждый элемент из $\mathfrak{G}_2$ представим в виде произведения элементов из $\mathfrak{K}'$, которые все содержатся в $\mathfrak{G}_2$. Следовательно, $\mathfrak{K}'$ должно быть порождающим множеством для $\mathfrak{G}_2$. При этом оно есть неприводимое порождающее множество $\mathfrak{G}_2$, так как иначе $\mathfrak{K}$ не могло бы быть неприводимым в $\mathfrak{S}_2$.

Сразу видно, что для любых $G\in\mathfrak{G}_2$ и $S\in\mathfrak{S}_2$ имеет место

$$\chi(GS)=\chi(SG)=\chi(S).$$

Отсюда вытекает, что если бы $\mathfrak{K}$ не содержало ни одного элемента X, такого, что $\chi(X)=n-1$, то никакое произведение элементов из $\mathfrak{K}$ не могло бы равняться преобразованию S, у которого $\chi(S)=n-1$. Следовательно, на самом деле порождающее множество $\mathfrak{K}$ обязательно содержит такое преобразование X, у которого $\chi(X)=n-1$.

Докажем, что всякое множество $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{S}_2$, состоящее из некоторого неприводимого порождающего множества $\mathfrak{K}'$ группы $\mathfrak{G}_2$ и одного преобразования X, такого, что $\chi(X)=n-1$, будет порождающим множеством $\mathfrak{S}_2$. Благодаря сказанному ранее из этого будет следовать, что такое множество $\mathfrak{K}$ является неприводимым порождающим и что всякое неприводимое порождающее множество в $\mathfrak{S}_2$ устроено таким образом.

Для доказательства высказанного утверждения докажем по индукции относительно $(n-\chi(S))$, что $S\in[\mathfrak{K}'\cup X]$. Если $(n-\chi(S))=0$, то $S\in\mathfrak{G}_2$ и потому

$$S\in[\mathfrak{K}']\subset[\mathfrak{K}'\cup X].$$

Пусть $n-\chi(S)>0$. Запишем преобразования X и S в виде подстановок. Учитывая, что $\chi(X)=n-1$ и

$\chi(S) \leqslant n-1$, эти подстановки будут иметь вид:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \mu_2 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \dots & \nu_n \\ \xi_2 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n\} = \Omega$ и элементы $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ все различны между собой. Через μ_1 обозначим элемент Ω, отличный от всех $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, а через ξ_1 — элемент, отличный от всех $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. Так как имеет место

$$S = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \dots & \nu_n \\ \xi_2 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \mu_2 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \dots & \nu_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то S оказывается произведением трех множителей, из которых один есть X, другой принадлежит $\mathfrak{S}_2$ и третий имеет значение χ, превосходящее $\chi(S)$. Таким образом, все три множителя принадлежат $[\mathfrak{K}]$, а потому и $S \in [\mathfrak{K}]$.

Мы свели задачу об определении всех неприводимых порождающих множеств полугруппы $\mathfrak{S}_2$ к этой же задаче для группы $\mathfrak{S}_2$. В согласии с установкой нашей книги мы не будем заниматься этой групповой задачей. Ограничимся тем, что приведем одно из известных непризодимых порождающих множеств группы $\mathfrak{S}_2$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad T_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_n \\ \lambda_n & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

При помощи этого множества мы благодаря сказанному выше можем получить, например, следующее неприводимое порождающее множество полугруппы $\mathfrak{S}_2$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \ T_2, \ T_3, \ \dots, \ T_n.$$

Что касается канонической формы элементов $\mathfrak{S}_2$ для этого порождающего множества, так же как и для других неприводимых порождающих множеств $\mathfrak{S}_2$, то их получение представляет значительные трудности (см. А. Я. Айзенштат [2]). Простейшие сведения о порождающих множествах группы $\mathfrak{S}_2$ содержатся в книгах, посвященных теории групп или теории Галуа. Кроме того, имеется целый ряд специальных работ (см. например: H. Coxeter, W. Moser, Generators and rela-

tions for discrete groups, Springer-Verlag, B. — G. — H, 1957; А. Я. Айзенштат [2] и серию работ Пикар (S. Piccard), в частности, три ее работы, опубликованные в 1955 г. в C. R. Acad. Sci. Paris).

§ 3. Моногенные полугруппы

3.1. Особо остановимся на полугруппах, обладающих минимальным по количеству элементов порождающим множеством.

Определение. *Полугруппа называется моногенной, если она обладает порождающим множеством, состоящим из одного элемента.* Моногенные полугруппы (этот термин принадлежит В. В. Вагнеру) называются также циклическими. Последнее название распространено даже шире. Оно заимствовано из теории групп, где оно весьма естественно для конечных групп. Для полугрупп эта естественность теряется. К тому же благодаря различному пониманию порождающего множества в теории групп и в теории полугрупп (2.2) в теории полугрупп удобнее употреблять иной термин.

3.2. Если элемент X образует порождающее множество моногенной полугруппы

$$\mathfrak{A} = [X],$$

то

$$X,\ X^2,\ \ldots,\ X^n,\ \ldots$$

есть множество всех элементов $\mathfrak{A}$. Действие между этими элементами коммутативно, так как оно совершается по правилу сложения показателей степеней

$$X^n \cdot X^m = X^{n+m}.$$

Сказанное не является исчерпывающим описанием строения $\mathfrak{A}$, так как задание элементов $\mathfrak{A}$ в виде X^n может быть неоднозначным. Различные степени X могут представлять собой в $\mathfrak{A}$ один и тот же элемент.

3.3. Моногенные полугруппы бывают конечными и бесконечными. Сперва мы рассмотрим конечные моногенные полугруппы,

Для этого нам понадобится следующая функция $\bar{k} = f(k, a, b)$ от трех переменных, значениями которых могут быть любые натуральные числа:

$$\bar{k} = \begin{cases} k \text{ (если } k < a+b), \\ k - k'b, \text{ где натуральное число } k' \text{ таково,} \\ \text{что, } a \leqslant \bar{k} < a+b \text{ (если } k \geqslant a+b). \end{cases}$$

Отметим, что, как легко убедиться, при заданных a и b для любых k_1 и k_2 имеет место

$$\overline{k_1 + \bar{k}_2} = \overline{k_1 + k_2}.$$

3.4. ***Лемма.*** *Если в моногенной полугруппе $\mathfrak{A} = [X]$ для некоторых натуральных чисел a и b имеет место*

$$X^{a+b} = X^a,$$

то для всякого $X^k \in \mathfrak{A}$ выполняется

$$X^k = X^{\bar{k}},$$

где $\bar{k} = f(k, a, b)$.

Доказательство. Если $k < a+b$, то $k = \bar{k}$. Пусть $k \geqslant a+b$. Совершим деление с остатком $(k-a)$ на b:

$$k - a = bs + r, \qquad 0 \leqslant r < b.$$

Так как X^b является единицей элемента X^a, то

$$X^k = X^a \cdot X^{k-a} = X^a \cdot X^{bs+r} = X^a \cdot (X^b)^s \cdot X^r = \\ = X^a \cdot X^r = X^{a+r}.$$

Так как $a \leqslant a+r < a+b$ и $a+r = k - bs$, то $a+r = f(k, a, b)$.

3.5. ***Лемма.*** *В конечной моногенной полугруппе всегда найдется элемент, обладающий единицей.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A} = [X]$ конечна, то среди различных степеней элемента X должны встретиться равные элементы

$$X^p = X^q, \qquad (p > q).$$

В этом случае X^{p-q} является единицей элемента X^q:

$$X^q \cdot X^{p-q} = X^p = X^q.$$

3.6. Будем обозначать через $d(\mathfrak{A})$ количество всех элементов конечной моногенной полугруппы $\mathfrak{A}$, обладающих единицами, и через $(h(\mathfrak{A}) - 1)$ количество ее элементов, не обладающих единицами.

Теорема. *Для любой пары натуральных чисел d и h существует и при том с точностью до изоморфизма единственная конечная моногенная полугруппа $\mathfrak{A}$, такая, что*

$$d(\mathfrak{A}) = d, \qquad h(\mathfrak{A}) = h.$$

Доказательство. 1) Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество формальных степеней

$$X,\ X^2,\ X^3,\ \ldots,\ X^{h+d-1}.$$

Определим в этом множестве действие:

$$X^p \cdot X^q = X^{\overline{p+q}},$$

где

$$\overline{p+q} = f(p+q,\ h,\ d).$$

Это действие ассоциативно, так как благодаря отмеченному в 3.3 свойству функции f имеет место:

$$(X^p \cdot X^q) \cdot X^r = X^{\overline{p+q}} \cdot X^r = X^{\overline{\overline{p+q}+r}} = X^{\overline{p+q+r}},$$

$$X^p \cdot (X^q \cdot X^r) = X^p \cdot X^{\overline{q+r}} = X^{\overline{p+\overline{q+r}}} = X^{\overline{p+q+r}}.$$

Каждая формальная степень X^p $(p = 1,\ 2,\ \ldots,\ d+h-1)$ является p-й степенью X относительно этого действия. Поэтому $\mathfrak{A}$ есть конечная моногенная полугруппа с $(d+h-1)$ элементами, у которой элемент X является порождающим множеством.

Так как

$$X^{h+d} = X^{\overline{h+d}} = X^h,$$

то для элементов $X^h,\ X^{h+1},\ \ldots,\ X^{h+d-1}$ элемент X^d является единицей.

Если $m < h$, то при любом l, где $1 \leqslant l < h + d$, благодаря определению $f(k, h, d)$:

$$X^m \cdot X^l = X^{\overline{m+l}}, \qquad h \leqslant \overline{m+l} \leqslant h + d - 1.$$

Следовательно, элементы X, X^2, ..., X^{h-1} не имеют в $\mathfrak{A}$ единиц.

Таким образом,

$$d(\mathfrak{A}) = d, \qquad h(\mathfrak{A}) = (h-1) + 1 = h.$$

2) Пусть $\mathfrak{A}_1 = [X_1]$ и $\mathfrak{A}_2 = [X_2]$ две конечные моногенные полугруппы, у которых

$$d(\mathfrak{A}_1) = d(\mathfrak{A}_2) = d, \qquad h(\mathfrak{A}_1) = h(\mathfrak{A}_2) = h.$$

Элементы X_i, X_i^2, ..., X_i^{h+d-1} все различны между собой, так как в случае равенства каких-либо двух из этих элементов из леммы 3.4 следовало бы, что количество всех элементов $\mathfrak{A}_i$ меньше $h + d - 1$ ($i = 1, 2$).

Так как X_i^{h+d} является элементом $\mathfrak{A}_i$, то при некотором n, где $1 \leqslant n < h + d$, должно иметь место

$$X_i^{h+d} = X_i^n.$$

Все элементы X^n, X^{n+1}, ..., X^{h+d-1} имеют элемент X_i^{h+d-n} своей единицей. Элементы X_i, X_i^2, ..., X_i^{n-1} не имеют единиц, так как, согласно 3.4, при $m < n$

$$X_i^m \cdot X_i^l = X_i^{\overline{m+l}},$$

где $\overline{m+l} = f(m+l, n, h+d-n) > m$. Следовательно,

$$d + h - n = d,$$

т. е. $n = h$.

Из равенства

$$X_i^{h+d} = X_i^h,$$

согласно лемме 3.4, следует, что

$$X_i^p \cdot X_i^q = X_i^{p+q} = X_i^{\overline{p+q}},$$

где $\overline{p+q} = f(p+q, h, d)$. Благодаря соответствию

$$X_1 \sim X_2, \quad X_1^2 \sim X_2^2, \quad \ldots, \quad X_1^{h+d-1} \sim X_2^{h+d-1}$$

между полугруппами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ они оказываются изоморфными.

3.7. Доказанная теорема дает полную классификацию конечных моногенных полугрупп. Каждой из таких полугрупп соответствует пара натуральных чисел

$$\chi(\mathfrak{A}) = (h, d), \quad h = h(\mathfrak{A}), \quad d = d(\mathfrak{A}).$$

Для каждой пары натуральных чисел (h, d) существует такая конечная моногенная полугруппа $\mathfrak{A}$, для которой

$$\chi(\mathfrak{A}) = (h, d).$$

Две конечные моногенные полугруппы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\chi(\mathfrak{A}_1) = \chi(\mathfrak{A}_2).$$

Пару чисел $\chi(\mathfrak{A}) = (h, d)$ будем называть *типом конечной моногенной полугруппы* $\mathfrak{A}$, а также типом и того элемента X, для которого $[X] = \mathfrak{A}$. В произвольной полугруппе $\mathfrak{A}$ элемент X называется *элементом конечного типа* (иногда говорят также — конечного порядка), если $[X]$ конечна. X называется элементом *бесконечного типа* (бесконечного порядка), если $[X]$ бесконечна.

3.8. Задание типа $\chi(\mathfrak{A}) = (h, d)$ конечной моногенной полугруппы $\mathfrak{A} = [X]$ вполне определяет удобным образом ее строение. Действительно, как следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.6, $\mathfrak{A}$ состоит из элементов $X, X^2, \ldots, X^{h+d-1}$.

Умножение их производится по правилу сложения степеней, причем степени с показателями большими, чем $h + d - 1$, могут быть преобразованы к степеням с указанными показателями благодаря равенству

$$X^{h+d} = X^h.$$

3.9. Пусть $\mathfrak{A} = [X]$ есть конечная моногенная полугруппа. Покажем, как зависят свойства $\mathfrak{A}$ от значений чисел, составляющих ее тип $\chi(\mathfrak{A}) = (h, d)$.

Если $h > 1$, то $\mathfrak{A}$ не имеет единицы, что следует из того, что элементы $X, X^2, \ldots, X^{h-1}$ не имеют единиц. Поэтому при $h > 1$ $\mathfrak{A}$ не является группой.

Если $h = 1$, то $\mathfrak{A}$ обладает единицей.

Действительно, в этом случае

$$X^{d+1} = X.$$

Поэтому X^d будет единицей для X, а потому и для всей полугруппы $\mathfrak{A}$. Каждый элемент X^k $(k=1, 2, \ldots, d)$ обладает обратным:

$$X^{d-k} \cdot X^k = X^d, \quad X^k \cdot X^{d-k} = X^d, \qquad (k=1, 2, \ldots, d-1).$$

Следовательно, при $h=1$ $\mathfrak{A}$ является группой.

Нулем в $\mathfrak{A}$, очевидно, может быть только X^{h+d-1}, так как всякий другой элемент меняется от умножения на X.

Для того чтобы X^{h+d-1} был нулем, необходимо и достаточно, чтобы

$$X \cdot X^{h+d-1} = X^{h+d-1},$$

т. е.

$$X^{h+d} = X^{h+d-1}.$$

Но

$$X^{h+d} = X^h.$$

Следовательно, для существования нуля в $\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно, чтобы $d=1$.

3.10. Выясним вопрос о делимости элементов в конечной моногенной полугруппе $\mathfrak{A}=[X]$.

Если $p \geqslant h$, то X^p делится на всякий элемент полугруппы $\mathfrak{A}$.

Действительно, для $X^q \in \mathfrak{A}$ $(1 \leqslant q < h+d)$, согласно 3.4, имеем

$$X^q \cdot X^{p+qd-q} = X^{p+qd} = X^{\overline{p+qd}} = X^p$$

(так как $h \leqslant p < h+d$).

Если $p < h$, то X^p делится на такие X^q, у которых $1 \leqslant q < p$.

Действительно, если $1 \leqslant q < p$, то

$$X^p = X^q \cdot X^{p-q}.$$

Если $q \geqslant p$, то при любом s

$$X^q \cdot X^s = X^{q+s} = X^{\overline{q+s}} \neq X^p,$$

ибо $\overline{q+s}$ или равно $q+s$ или не меньше h. В обоих случаях $\overline{q+s} > p$.

3.11. Согласно II, 1.6, из 3.10 следует, что совокупность $\{X^h, X^{h+1}, \ldots, X^{h+d-1}\}$ образует группу. Это мак-

симальная подгруппа $\mathfrak{A}$. Действительно, ни один из элементов $X, X^2, \ldots, X^{h-1}$ не содержится ни в какой подгруппе $\mathfrak{A}$, так как не имеет единицы.

Из сказанного, в частности, следует, что конечная моногенная полугруппа всегда обладает одним единственным идемпотентом — единицей указанной группы.

3.12. Если $h > 1$, т. е. $\mathfrak{A} = [X]$ не является группой, то X, согласно 3.10, не делится ни на какой элемент. Отсюда следует, что X не может быть представлен в виде произведения каких-либо элементов, кроме несобственного представления $X = X$. Из этого вытекает, что всякое порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$ должно содержать X. Таким образом, при $h > 1$ единственным неприводимым порождающим множеством конечной моногенной полугруппы $\mathfrak{A} = [X]$ является множество, состоящее из одного элемента X.

3.13. Пусть $h = 1$, т. е. $\mathfrak{A} = [X]$ является группой. Рассмотрим произвольное подмножество $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{R} = \{X^{k_1}, X^{k_2}, \ldots, X^{k_m}\} \quad (1 \leqslant k_i < d+1;\ i = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначим через l наибольший общий делитель натуральных чисел: $d, k_1, k_2, \ldots, k_m$. Как известно, существуют такие целые числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что

$$l = \alpha_0 d + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_m k_m.$$

Прибавив к обеим частям равенства натуральное число Nd, при достаточно большом N получим равенство

$$l + Nd = \beta_0 d + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_m k_m,$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ будут натуральными числами.

Из этого равенства получаем

$$X^l \cdot (X^d)^N = X^{l+dN} = X^{\beta_0 d + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_m k_m} =$$
$$= (X^d)^{\beta_0} \cdot (X^{k_1})^{\beta_1} \cdot (X^{k_2})^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot (X^{k_m})^{\beta_m}.$$

Но из $X^{d+1} = X$ следует, что X^d есть единица X, а потому единица всей полугруппы $\mathfrak{A}$. Поэтому полученное равенство означает

$$X^l = (X^{k_1})^{\beta_1} \cdot (X^{k_2})^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot (X^{k_m})^{\beta_m}.$$

Если $l=1$, то $[\mathfrak{K}]$ содержит X и потому

$$[\mathfrak{K}]=\mathfrak{A},$$

т. е. $\mathfrak{K}$ является порождающим множеством полугруппы $\mathfrak{A}$.

Если $l>1$, то любой элемент Y из $[\mathfrak{K}]$

$$Y=(X^{k_1})^{\gamma_1}\cdot(X^{k_2})^{\gamma_2}\cdot\ \ldots\ \cdot(X^{k_m})^{\gamma_m}$$

имеет вид

$$Y=X^{l\lambda}$$

и потому

$$Y^{\left(\frac{d}{l}\right)}=(X^{l\lambda})^{\frac{d}{l}}=X^{d\lambda}=X^{d}.$$

Но

$$X^{\left(\frac{d}{l}\right)}\neq X^{d},$$

так как иначе из 3.4 следовало бы, что количество элементов в $\mathfrak{A}$ меньше d. Следовательно, $[\mathfrak{K}]$ не содержит X. Таким образом, при $l>1$ $\mathfrak{K}$ не является порождающим множеством для $\mathfrak{A}=[X]$.

Из сказанного, в частности, следует, что элемент X^k $(1\leqslant k<h+d)$ тогда и только тогда будет образовывать порождающее множество $\mathfrak{A}$, когда k взаимно просто с d.

3.14. Из 3.12 вытекает, что при $h>1$ полугруппа $\mathfrak{A}=[X]$ не имеет других автоморфизмов, кроме тождественного. Действительно, при всяком автоморфизме полугруппы порождающее множество отображается на порождающее множество. Поэтому X должен отображаться на X, но тогда и всякий элемент X^k отобразится на X^k.

3.15. Если $h=1$ и $d=1$, то $\mathfrak{A}$ есть единичная группа и потому, конечно, не имеет нетождественных автоморфизмов.

Если $h=1$ и $d>1$, т. е. $\mathfrak{A}$ есть не единичная группа, то для любого k $(1\leqslant k<d+1)$, взаимно простого с d, отображение φ_k полугруппы $\mathfrak{A}$ в себя

$$\varphi_k(X^n)=X^{kn},$$

как легко видеть, будет автоморфизмом. Других автоморфизмов $\mathfrak{A}$ иметь не будет, ибо при всяком автоморфизме ψ число k, где

$$\psi(X)=X^k,$$

должно быть, согласно 3.13, взаимно просто с d. В этом случае, очевидно, $\psi = \varphi_k$.

Таким образом, при $h = 1$, $d = 2$ группа $\mathfrak{A}$ не имеет нетождественных автоморфизмов. При $h = 1$, $d > 2$ $\mathfrak{A}$ обладает нетождественным автоморфизмом φ_{d-1}.

3.16. Теперь перейдем к рассмотрению бесконечной моногенной полугруппы $\mathfrak{A} = [X]$. Мы будем говорить, что ее *тип бесконечен.*

Все элементы X, X^2, ..., X^n, ... моногенной полугруппы $\mathfrak{A} = [X]$ бесконечного типа должны быть различны благодаря 3.4. Действие в $\mathfrak{A}$ определяется по правилу сложения показателей степеней. Отсюда следует, что все бесконечные моногенные полугруппы изоморфны между собой. Вопрос о делимости решается очень просто: X^p делится на X^q тогда и только тогда, когда $p > q$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ не имеет идемпотентов.

Единственное неприводимое порождающее множество есть множество, состоящее из одного элемента X. Нетождественных автоморфизмов $\mathfrak{A}$ не имеет.

3.17. Конечные моногенные полугруппы, являющиеся группами (т. е. в случае $h = 1$), называются также конечными циклическими группами. К циклическим группам относят еще бесконечные циклические группы. Бесконечной циклической группой называется группа $\mathfrak{A}$, все элементы которой могут быть представлены в виде

$$\ldots, A^{-2}, A^{-1}, A^0 = E, A, A^2, \ldots, A^n, \ldots,$$

причем все они различны между собой, а умножение их производится по правилу сложения показателей степеней. Отметим, что, как очевидно, $\mathfrak{A} = [A, A^{-1}]$.

Смысл выделения класса циклических групп состоит в том, что, как легко видеть, это есть все группы, обладающие состоящим из одного элемента множеством, являющимся порождающим в смысле теории групп (2.2).

§ 4. Периодические полугруппы

4.1. Каждый элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ порождает моногенную подполугруппу $[A]$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Тем самым $\mathfrak{A}$ оказывается объединением своих моногенных подполугрупп. Ряд

свойств полугруппы $\mathfrak{A}$ определяется свойствами этих моногенных полугрупп. Например, особо выделяется класс так называемых периодических полугрупп, охватывающий класс конечных полугрупп.

Определение. *Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется периодической, если все ее моногенные подполугруппы конечны.*

Так как каждая конечная моногенная полугруппа имеет идемпотент, а бесконечные моногенные полугруппы не имеют идемпотентов, то периодические полугруппы можно определить так же, как полугруппы, у которых каждая подполугруппа обладает идемпотентом. Пользуясь тем, что в конечной моногенной полугруппе $\mathfrak{A}$ некоторая степень элемента A является идемпотентом, можно периодические полугруппы определить так же, как полугруппы, в которых каждый элемент, возведенный в некоторую степень, является идемпотентом.

Ниже мы рассмотрим некоторые свойства периодических полугрупп, основная часть которых была получена Шварцем [5].

4.2. В классе периодических полугрупп группы (являющиеся, как мы знаем, полугруппами с двусторонним сокращением) могут быть выделены при помощи нижеследующего свойства.

Теорема. *Для того чтобы периодическая полугруппа с сокращением слева была группой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала одним единственным идемпотентом.*

Доказательство. 1) Если полугруппа $\mathfrak{A}$ есть группа, то, как известно, $E_{\mathfrak{A}}$ есть ее единственный идемпотент.

2) Пусть I есть единственный идемпотент периодической полугруппы с сокращением слева $\mathfrak{A}$. Произвольный элемент $A \in \mathfrak{A}$ порождает в $\mathfrak{A}$ конечную моногенную полугруппу $[A]$, тип которой обозначим через (h, d) (3.7). Если бы $h > 1$, то из

$$A^{h+d} = A^h$$

следовало бы

$$A \cdot (A^{h+d-1}) = A \cdot A^{h-1},$$

что противоречило бы тому, что $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с сокращением слева, так как по определению типа моногенной полугруппы

$$A^{h+d-1} \neq A^{h-1}.$$

Следовательно, $h = 1$, что означает, что $[A]$ есть группа (3.11). Единицей группы $[A]$ должен быть идемпотент, т. е. I. Следовательно, I есть двусторонняя единица произвольного элемента A полугруппы $\mathfrak{A}$, причем A обладает относительно I двусторонне обратным. Это и означает, что $\mathfrak{A}$ есть группа.

4.3. Отметим, что только все три рассмотренных в предыдущей теореме условия — периодичность, сокращение слева, единственность идемпотента — в совокупности достаточны для того, чтобы полугруппа была группой. Покажем на примерах, что наличие любых двух из них для этого еще не достаточно.

1) Аддитивная полугруппа всех целых неотрицательных чисел обладает свойствами сокращения слева и имеет единственный идемпотент (число 0), но не является группой.

2) Полугруппа с нулем, у которой произведение двух любых элементов равно нулю, периодична и имеет нуль своим единственным идемпотентом, но не является группой, если количество ее элементов больше одного.

3) Полугруппа, в которой произведение двух любых элементов равно правому множителю, является периодической полугруппой с сокращением слева. Однако при количестве элементов большем одного она не есть группа.

4.4. Так как каждая конечная моногенная полугруппа имеет лишь один единственный идемпотент, то каждому элементу A периодической полугруппы $\mathfrak{A}$ однозначно сопоставляется идемпотент, равный некоторой степени элемента A. Это сопоставление существенно и часто используется для изучения периодических полугрупп. Все элементы периодической полугруппы распределяются при помощи этого сопоставления на попарно непересекающиеся классы элементов $\mathfrak{K}_I$, содержащие каждый класс по одному идемпотенту I, причем некоторая степень каждого элемента из $\mathfrak{K}_I$ равна I:

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{I \in \mathfrak{H}} \mathfrak{K}_I, \quad \mathfrak{K}_I \cap \mathfrak{K}_{I'} = \varnothing, \quad (I \neq I'),$$

(где $\mathfrak{H}$ есть множество всех идемпотентов полугруппы $\mathfrak{A}$).

4.5. Классы $\mathfrak{K}_I$, как будет видно из примера 4.11, не обязаны являться подполугруппами полугруппы $\mathfrak{A}$. Случаи, когда все $\mathfrak{K}_I$ являются полугруппами, заслуживают особого внимания. Укажем несколько из них.

(α). Легко доказывается, что если $\mathfrak{A}$ коммутативна, то все $\mathfrak{K}_I$ являются полугруппами.

(β). Исеки [4] обратил внимание на то, что все $\mathfrak{K}_I$ будут подполугруппами в полугруппах одного класса, введенного Тьерреном [16], которые характеризуются некоторой обобщенной коммутативностью.

Пусть периодическая полугруппа $\mathfrak{A}$ такова, что для любых двух элементов A и B всегда найдутся такие натуральные числа r, s, t, что

$$(AB)^r = A^s B^t = B^t A^s.$$

Тогда каждый класс $\mathfrak{K}_I$ является подполугруппой.

Действительно, пусть A, $B \in \mathfrak{K}_I$, т. е.

$$A^a = I, \quad B^b = I.$$

Так как при некоторых r, s, t

$$(AB)^r = A^s B^t = B^t A^s,$$

то благодаря перестановочности A^s и B^t получаем

$$(AB)^{rab} = \left[(AB)^r\right]^{ab} = \left(A^s B^t\right)^{ab} = \left(A^s\right)^{ab} \cdot \left(B^t\right)^{ab} =$$
$$= \left(A^a\right)^{bs} \cdot \left(B^b\right)^{at} = I^{bs} \cdot I^{at} = I.$$

Следовательно, из A, $B \in \mathfrak{K}_I$ вытекает $AB \in \mathfrak{K}_I$, т. е. $\mathfrak{K}_I$, действительно, является подполугруппой.

(γ). Не только свойство коммутативности и близкие его обобщения, но и свойство в некотором отношении противоположное является достаточным для выполнения рассматриваемого свойства.

Если в $\mathfrak{A}$ для любых двух различных между собой идемпотентов I и I' имеет место

$$II' \neq I'I,$$

то каждый класс $\mathfrak{K}_I$ является подполугруппой.

Действительно, пусть A, $B \in \mathfrak{K}_I$, т. е.

$$A^a = I, \quad B^b = I.$$

Произведение AB принадлежит некоторому $\mathfrak{K}_{I'}$:

$$(AB)^c = I', \quad I'^2 = I'.$$

Так как I перестановочен и с A и с B, то I должен быть перестановочен и с AB, а потому и с I'. Согласно условию, это означает, что $I = I'$, т. е. $AB \in \mathfrak{K}_I$.

4.6. Так как $\mathfrak{K}_I$ в общем случае не является подполугруппой, то естественно поставить вопрос о подполугруппах полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащихся в $\mathfrak{K}_I$, и, в частности, о таких максимальных подполугруппах. Для этой цели мы воспользуемся некоторой общей леммой, которая может оказаться полезной и в других случаях. Эта лемма является простым следствием теоремы, доказанной нами в II, 4.17.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{P}$ есть совокупность некоторых подмножеств множества Ω, обладающая следующим свойством. Если $\mathfrak{Q}$ такое подмножество $\mathfrak{P}$, что для любых M и M' из $\mathfrak{Q}$ одно из них обязательно является подмножеством другого, то объединение всех множеств, входящих в $\mathfrak{Q}$, всегда должно принадлежать $\mathfrak{P}$. Тогда в $\mathfrak{P}$ найдется максимальное множество M_0, т. е. такое $M_0 \in \mathfrak{P}$, что M_0 не является собственным подмножеством ни для какого M из $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Отношение включения в множестве $\mathfrak{P}$, очевидно, является отношением частичной упорядоченности, удовлетворяющим условию теоремы II, 4.17. Поэтому из этой теоремы непосредственно следует справедливость утверждения леммы.

4.7. Сразу же отметим одно следствие из доказанной леммы, которое нам понадобится в дальнейшем.

Следствие. *Если $\mathfrak{M}$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{K}$ такое подмножество $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{A}$ обладает такой подполугруппой $\mathfrak{N}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{K}$ причем $\mathfrak{N}$ не содержится ни в какой подполугруппе $\mathfrak{N}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, отличной от $\mathfrak{N}$ и такой, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{K}$.*

Действительно, применяем лемму 4.6, выделяя в качестве совокупности $\mathfrak{P}$ класс таких подполугрупп $\mathfrak{A}$, которые содержат $\mathfrak{M}$ и содержатся в $\mathfrak{K}$. Выполнение требуемого в 4.6 условия следует из 1.12.

4.8. В периодической полугруппе $\mathfrak{A}$ фиксируем некоторый произвольный идемпотент I и некоторую подполугруппу $\mathfrak{M}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащую I в качестве единственного идемпотента. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}_I$ (4.4), то к $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}_I$ можно применить следствие 4.7. Из него следует, что $\mathfrak{M}$ содержится в такой подполугруппе $\mathfrak{N}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{K}_I$ и $\mathfrak{N}$

не содержится ни в какой подполугруппе $\mathfrak{N}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, такой, что $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{K}_I$ и $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{N}$.

Сказанное означает, что каждая подполугруппа периодической полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащая единственный идемпотент, содержится в некоторой максимальной подполугруппе $\mathfrak{N}$, которая обладает лишь одним идемпотентом и сама не содержится ни в какой, отличной от $\mathfrak{N}$, подполугруппе $\mathfrak{A}$, обладающей лишь одним идемпотентом.

Класс $\mathfrak{K}_I$ для произвольного идемпотента I представим в виде объединения подполугрупп, каждая из которых не содержится ни в какой отличной от нее подполугруппе $\mathfrak{A}$, обладающей одним идемпотентом.

4.9. Пусть элемент A произвольной периодической полугруппы принадлежит классу $\mathfrak{K}_I$, т. е. в некоторой степени равен идемпотенту I. Если I является левой (а потому и правой) единицей A, то I есть регулярная двусторонняя единица A.

Действительно, из

$$A^r = I, \quad AI = A,$$

следует

$$IA = A^r A = AA^r = AI,$$

$$A^{r-1}A = I, \quad AA^{r-1} = I.$$

Если I не является левой единицей A, то A не имеет регулярных двусторонних единиц. Действительно, предположим, что для некоторого идемпотента $I' \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$A = AI' = I'A, \quad I' = AX = YA.$$

Так как

$$A^{2r} = II = I = A^r, \quad A(AX)X = AI'X = I',$$

то

$$I = A^r I' = A^{2r} X^r = A^r X^r = I',$$

что противоречит предположению.

4.10. Если элемент A периодической полугруппы $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{K}_I$, т. е. $A^r = I$, то $AI = IA \in \mathfrak{K}_I$. При этом для элемента AI идемпотент I является регулярной двусторонней единицей.

Если сам A обладал регулярной двусторонней единицей, то таковой, согласно 4.9, являлся I и потому $AI = IA = A$. Отсюда следует, что

$$I\mathfrak{K}_I = \mathfrak{K}_I I$$

есть множество всех тех элементов $\mathfrak{A}$, для которых I является регулярной двусторонней единицей. В обозначениях 1.14

$$\mathfrak{G}_I = I\mathfrak{K}_I = \mathfrak{K}_I I.$$

$\mathfrak{G}_I$ есть максимальная подгруппа $\mathfrak{A}$, имеющая своей единицей I.

Если обозначить через $\mathfrak{H}$ совокупность всех идемпотентов периодической полугруппы $\mathfrak{A}$, то, согласно 1.16,

$$\mathfrak{H}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{H}$$

есть множество всех элементов $\mathfrak{A}$, содержащихся в подгруппах полугруппы $\mathfrak{A}$.

4.11. Отметим одно свойство подгруппы $\mathfrak{G}_I$ периодической полугруппы $\mathfrak{A}$. Если для некоторого элемента $A \in \mathfrak{A}$ идемпотент I является правой единицей, причем I делится на A слева, то $A \in \mathfrak{G}_I$.

Действительно, пусть

$$AI = A, \quad AB = I.$$

Из этих равенств, очевидно, следует, что при любом натуральном k имеет место $A^k B^k = I$. Элемент A, как и всякий элемент периодической полугруппы, в некоторой степени является идемпотентом

$$(A^r)^2 = A^r.$$

Благодаря этому

$$I = A^r B^r = A^r A^r B^r = A^r I = A^r.$$

Отсюда, согласно 4.9, следует, что $A \in \mathfrak{G}_I$.

4.12. В качестве примера рассмотренных выше построений рассмотрим мультипликативную матричную полугруппу $\mathfrak{M}$, состоящую из девяти матриц

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Идемпотентами полугруппы $\mathfrak{M}$ являются элементы O, M_{11}, M_{22}. Классы $\mathfrak{K}_I$ суть

$$\mathfrak{K}_O = \{O,\ M_{12},\ M_{21},\ N_{12},\ N_{21}\},$$
$$\mathfrak{K}_{M_{11}} = \{M_{11},\ N_{11}\},$$
$$\mathfrak{K}_{M_{22}} = \{M_{22},\ N_{22}\}.$$

Классы $\mathfrak{K}_{M_{11}}$ и $\mathfrak{K}_{M_{22}}$ являются подполугруппами. Класс $\mathfrak{K}_O$ подполугруппой не является. Он представляет собой объединение двух максимальных подполугрупп, обладающих одним идемпотентом

$$\mathfrak{K}_O = \{O,\ M_{12},\ N_{12}\} \cup \{O,\ M_{21},\ N_{21}\}.$$

Максимальные подгруппы $\mathfrak{M}$ суть

$$\mathfrak{G}_O = O,\ \mathfrak{G}_{M_{11}} = \mathfrak{K}_{M_{11}},\ \mathfrak{G}_{M_{22}} = \mathfrak{K}_{M_{22}}.$$

§ 5. Увеличительные элементы

5.1. Среди элементов полугрупп выделяются своими особыми свойствами некоторые так называемые увеличительные элементы, введенные Е. С. Ляпиным [9]. В последующем мы не раз будем возвращаться к рассмотрению этих элементов.

Определение. *Элемент U полугруппы $\mathfrak{A}$ называется правым увеличительным, если в $\mathfrak{A}$ найдется такое собственное подмножество $\mathfrak{A}'$, что*

$$\mathfrak{A}'U = \mathfrak{A} \quad (\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}).$$

Элемент V называется левым увеличительным, если в $\mathfrak{A}$ найдется такое собственное подмножество $\mathfrak{A}''$, что

$$V\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \quad (\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{A}).$$

Из определения непосредственно вовсе не видно, существуют ли полугруппы, обладающие увеличительными элементами. Положительный ответ на этот вопрос мы дадим лишь в следующем параграфе, а пока займемся рассмотрением некоторых свойств увеличительных элементов.

5.2. ***Теорема.*** *Никакой элемент полугруппы не может быть одновременно ее правым увеличительным и левым увеличительным элементом.*

Доказательство. Предположим, это элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ является одновременно ее правым увеличительным и левым увеличительным. Это означает, что для некоторых $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}$ имеет место

$$\mathfrak{A}'X = \mathfrak{A}, \quad X\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{A}.$$

Из $\mathfrak{A}'X = \mathfrak{A}$ следует, что в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы Z_1 и Z_2, что

$$Z_1X = X, \quad Z_2X = Z_1.$$

Так как $X\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$, то каждый элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ может быть представлен в виде XA'' $(A'' \in \mathfrak{A}'')$. Отсюда следует

$$Z_1A = Z_1XA'' = XA'' = A,$$

т. е. Z_1 оказывается левой единицей $\mathfrak{A}$. Благодаря этому

$$Z_2\mathfrak{A} = Z_2X\mathfrak{A}'' = Z_1\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''.$$

Но, с другой стороны,

$$Z_2\mathfrak{A} \supset Z_2X\mathfrak{A} = Z_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Мы получили $\mathfrak{A}'' \supset \mathfrak{A}$, что противоречит предположению.

5.3. Разумеется, далеко не все полугруппы обладают увеличительными элементами. Укажем несколько классов полугрупп без увеличительных элементов.

(α). *Конечные полугруппы не имеют увеличительных элементов.*

Действительно, если $\mathfrak{A}'$ есть какое-нибудь собственное подмножество конечной полугруппы $\mathfrak{A}$, то множество $X\mathfrak{A}'$ (так же, как и $\mathfrak{A}'X$) при любом $X \in \mathfrak{A}$ содержит меньше элементов, чем их имеется в $\mathfrak{A}$, и потому отлично от $\mathfrak{A}$.

(β). *Коммутативные полугруппы не имеют увеличительных элементов.*

Действительно, в коммутативной полугруппе всякий правый увеличительный элемент должен был бы быть и левым увеличительным, что, согласно 5.2, невозможно.

(γ). *Полугруппы с двусторонним сокращением не имеют увеличительных элементов.*

Действительно, предположим, что в полугруппе с двусторонним сокращением $\mathfrak{A}$ для некоторых $U \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ имеет место

$$\mathfrak{A}'U = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}.$$

Возьмем какой-нибудь элемент B из $\mathfrak{A}$, не принадлежащий $\mathfrak{A}'$. Так как $\mathfrak{A}'U = \mathfrak{A}$, то при некотором $A' \in \mathfrak{A}'$ мы имеем $A'U = BU$. В полугруппе с правым сокращением это возможно лишь при $A' = B$, что противоречит тому, что A' принадлежит $\mathfrak{A}'$, а B не принадлежит $\mathfrak{A}'$.

(δ). *Группы не имеют увеличительных элементов.* Действительно, всякая группа является полугруппой с двусторонним сокращением (II, 2.16).

5.4. ***Теорема.*** *Пусть среди элементов полугруппы $\mathfrak{A}$ некоторые являются правыми увеличительными, а некоторые не являются. Тогда совокупность всех правых увеличительных элементов $\mathfrak{A}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$ и совокупность всех элементов $\mathfrak{A}$, не являющихся ее правыми увеличительными, тоже есть подполугруппа $\mathfrak{A}$.*

(Аналогично для левых увеличительных).

Доказательство. 1) Пусть U_1 и U_2 два произвольных правых увеличительных элемента полугруппы $\mathfrak{A}$. При некоторых $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_1 U_1 = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_2 U = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_2 \neq \mathfrak{A}.$$

Так как

$$\mathfrak{A}_1 (U_1 U_2) = \mathfrak{A} U_2 \supset \mathfrak{A}_2 U_2 = \mathfrak{A},$$

то $U_1 U_2$ также является правым увеличительным элементом $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что совокупность правых увеличительных элементов образует подполугруппу $\mathfrak{A}$.

2) Пусть X_1 и X_2 два элемента $\mathfrak{A}$, не являющиеся правыми увеличительными. Если бы их произведение было правым увеличительным, то при некотором $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ мы имели бы

$$\mathfrak{A}' X_1 X_2 = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{A}' X_1 = \mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{A}$, так как X_1 не является правым увеличительным. Но тогда соотношения

$$\mathfrak{A}'' X_2 = \mathfrak{A}' X_1 X_2 = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{A}$$

противоречили бы тому, что X_2 не является правым увеличительным.

5.5. Обозначим через $\mathfrak{A}^{(r)}$ совокупность всех правых увеличительных элементов полугруппы $\mathfrak{A}$, через $\mathfrak{A}^{(l)}$ — совокупность всех левых увеличительных и через $\mathfrak{A}^{(n)}$ — совокупность всех элементов, не являющихся ни правыми, ни левыми

увеличительными элементами $\mathfrak{A}$. Согласно 5.2, пересечение $\mathfrak{A}^{(r}$ и $\mathfrak{A}^{(l)}$ пусто. Поэтому $\mathfrak{A}^{(r)} \cup \mathfrak{A}^{(n)}$ есть совокупность элементов, не являющихся левыми увеличительными элементами $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}^{(l)} \cup \mathfrak{A}^{(n)}$ есть совокупность элементов, не являющихся правыми увеличительными элементами. Обе эти совокупности, согласно 5.4, если они непусты, являются подполугруппами. Отсюда следует, что их пересечение $\mathfrak{A}^{(n)}$, если оно непусто, оказывается подполугруппой. Из этого, используя также 5.2 и 5.4, получаем следующий вывод.

Полугруппа $\mathfrak{A}$ является объединением следующих трех попарно непересекающихся подмножеств

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(r)} \cup \mathfrak{A}^{(l)} \cup \mathfrak{A}^{(n)},$$

каждое из которых является подполугруппой или пустым множеством.

5.6. Сами полугруппы $\mathfrak{A}^{(r)}$, $\mathfrak{A}^{(l)}$, $\mathfrak{A}^{(n)}$ в отношении наличия в них увеличительных элементов обладают следующими свойствами.

(α). *Полугруппа $\mathfrak{A}^{(r)}$ не имеет своих левых увеличительных элементов.*

Действительно, предположим, что элемент $X \in \mathfrak{A}^{(r)}$ является левым увеличительным элементом полугруппы $\mathfrak{A}^{(r)}$. Тогда в $\mathfrak{A}^{(r)}$ должен найтись такой элемент Z, что $XZ = X$. Из того, что $Z \in \mathfrak{A}^{(r)}$ следует, что при некотором $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ имеет место

$$\mathfrak{A}'Z = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}.$$

Возьмем в $\mathfrak{A}$ произвольный элемент A. Так как $X \in \mathfrak{A}^{(r)}$, то при некотором $Y \in \mathfrak{A}$ имеет место $YX = A$. Отсюда следует, что

$$AZ = YXZ = YX = A.$$

Таким образом, Z оказался правой единицей полугруппы $\mathfrak{A}$. Но тогда $\mathfrak{A}'Z = \mathfrak{A}'$, что противоречит тому, что $\mathfrak{A}'$ было выбрано так, что $\mathfrak{A}'Z = \mathfrak{A}$.

(β). *Полугруппа $\mathfrak{A}^{(l)}$ не имеет своих правых увеличительных элементов.*

Доказывается вполне аналогично свойству (α).

(γ). *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет единицу, то $\mathfrak{A}^{(n)}$ непусто и является полугруппой, не имеющей ни правых, ни левых увеличительных элементов.*

Действительно, $\mathfrak{A}^{(n)}$ непусто, так как, очевидно, содержит единицу $E_{\mathfrak{A}}$.

Предположим, что элемент $X \in \mathfrak{A}^{(n)}$ является правым увеличительным элементом полугруппы $\mathfrak{A}^{(n)}$. Тогда при некотором $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}^{(n)}$ имеет место

$$\mathfrak{A}' X = \mathfrak{A}^{(n)}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}^{(n)}.$$

В частности, в $\mathfrak{A}'$ должен найтись такой Y, что $YX = E_{\mathfrak{A}}$. Отсюда следует

$$(\mathfrak{A}Y)\,X = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}.$$

Но X не является правым увеличительным для $\mathfrak{A}$. Поэтому должно иметь место $\mathfrak{A}Y = \mathfrak{A}$. Из этого равенства следует, что при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ выполняется $ZY = E_{\mathfrak{A}}$, откуда следует

$$X = E_{\mathfrak{A}}X = ZYX = ZE_{\mathfrak{A}} = Z.$$

Отсюда получаем

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}'ZY = \mathfrak{A}'XY = \mathfrak{A}^{(n)}Y \supset \mathfrak{A}^{(n)}ZY = \mathfrak{A}^{(n)}$$

что противоречит тому, что $\mathfrak{A}'$ есть собственное подмножество $\mathfrak{A}^{(n)}$.

§ 6. Увеличительные элементы полугрупп с единицей

6.1. В этом параграфе мы рассмотрим одну конкретную полугруппу, обладающую увеличительными элементами, которая не только послужит нам первым примером, доказывающим существование увеличительных элементов в некоторых полугруппах, но и сыграет определенную роль в изучении общих свойств увеличительных элементов полугрупп, обладающих единицей.

Изучая упомянутую полугруппу, мы попутно получим иллюстрации для некоторых общих понятий и свойств полугрупп, введенных ранее.

6.2. Обозначим через $h(x)$ следующую вещественную функцию:

$$h(x) = \begin{cases} x & (\text{если } x \geqslant 0), \\ 0 & (\text{если } x < 0). \end{cases}$$

$\mathfrak{P}$ есть совокупность всевозможных упорядоченных пар целых неотрицательных чисел $[a, b]$ (a, $b = 0, 1, 2, \ldots$). Определим в $\mathfrak{P}$ следующее правило умножения:

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 + h(a_2 - b_1), b_2 + h(b_1 - a_2)].$$

Проверим ассоциативность этого действия:

$$\begin{aligned}
&([a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2]) \cdot [a_3, b_3] = \\
&\quad = [a_1 + h(a_2 - b_1), b_2 + h(b_1 - a_2)] \cdot [a_3, b_3] = \\
&\quad = [a_1 + h(a_2 - b_1) + h\{a_3 - b_2 - h(b_1 - a_2)\}, \\
&\qquad b_3 + h\{b_2 + h(b_1 - a_2) - a_3\}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[a_1, b_1] \cdot ([a_2, b_2] \cdot [a_3, b_3]) = \\
&\quad = [a_1, b_1]([a_2 + h(a_3 - b_2), b_3 + h(b_2 - a_3)]) = \\
&\quad = [a_1 + h\{a_2 + h(a_3 - b_2) - b_1\}, b_3 + h(b_2 - a_3) + \\
&\qquad + h\{b_1 - a_2 - h(a_3 - b_2)\}].
\end{aligned}$$

Убедиться в равенстве обоих тройных произведений удобнее всего, перебрав последовательно четыре случая: 1) $a_2 \geqslant b_1$, $a_3 \geqslant b_2$; 2) $a_2 \geqslant b_1$, $a_3 < b_2$; 3) $a_2 < b_1$, $a_3 \geqslant b_2$; 4) $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$.

Если при этом учесть, что, как, очевидно, $h\{h(x)\} = h(x)$ и $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ для положительных x_1 и x_2, то равенство двух полученных выражений видно непосредственно.

6.3. В полугруппе $\mathfrak{P}$ обозначим

$$[0, 0] = U^0 = V^0 = E, \quad [1, 0] = U, \quad [0, 1] = V.$$

Как непосредственно следует из правила умножения в $\mathfrak{P}$, элемент E является единицей полугруппы. Далее для произвольного элемента из $\mathfrak{P}$ имеем

$$[a, b] = [a, 0] \cdot [0, b] = U^a V^b.$$

Таким образом, пара элементов U и V оказывается порождающим множеством для $\mathfrak{P}$, а каждый элемент из $\mathfrak{P}$ может быть задан, и притом, очевидно, единственным образом, в виде $U^a V^b$ (если $a = 0$, то можно писать просто V^b, аналогично в случае $b = 0$ U^a). Таким образом, задание элемента полугруппы в виде $U^a V^b$ можно считать канонической формой элемента относительно порождающего множества $\{U, V\}$.

Так как

$$VU = [0,\ 1] \cdot [1,\ 0] = \\ = [0 + h(1-1),\ 0 + h(1-1)] = [0,\ 0] = E,$$

то умножение элементов в указанной канонической форме производится очень просто:

$$U^{a_1}V^{b_1} \cdot U^{a_2}V^{b_2} = \begin{cases} U^{a_1+a_2-b_1}V^{b_2} & (\text{если } a_2 \geqslant b_1), \\ U^{a_1}V^{b_2+b_1-a_2} & (\text{если } b_1 \geqslant a_2). \end{cases}$$

Из сказанного следует, что полугруппа $\mathfrak{P}$ может быть так и определена как множество всевозможных выражений

$$U^aV^b \quad (a,\ b = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

умножаемых по указанному правилу.

6.4. Выясним, какими автоморфизмами (I, 1.16) обладает полугруппа $\mathfrak{P}$. При дальнейшем использовании этой полугруппы знание ее автоморфизмов нам будет полезно. Для этой цели нам сперва придется доказать одну вспомогательную лемму.

Лемма. *Для всякого элемента X полугруппы $\mathfrak{P}$, отличного от U и от V, найдется элемент X', отличный от E и не являющийся степенью X, который перестановочен с X.*

В случае $X = U$ или $X = V$ не существует элемента X' с такими свойствами.

Доказательство. Если $X = U^aV^b$, где $a > 0$, $b > 0$, $a + b > 2$, то в качестве искомого X' можно взять отличный от E элемент $X' = UV$.

Действительно,

$$XX' = U^aV^b \cdot UV = U^aV^b,$$
$$X'X = UV \cdot U^aV^b = U^aV^b.$$

Кроме того, предположив $X' = X^n$, мы получаем

$$UV = U^aV^bU^aV^b \ldots U^aV^b.$$

Но при умножении справа элемента U^a на какой-либо элемент из $\mathfrak{P}$ мы всегда получаем элемент U^cV^d, у которого $c \geqslant a$. Аналогично обстоит дело и с V^b. Поэтому указан-

ное равенство возможно лишь при $a=1$, $b=1$, что противоречит условию $a+b>2$.

Если $X=UV$, то в качестве искомого X' можно взять элемент $X'=U^2V^2\neq E$. Сразу убеждаемся, что

$$U^2V^2\cdot UV=UV\cdot U^2V^2.$$

Так как $(UV)^2=UV$, то U^2V^2 не является степенью элемента UV.

Если $X=U^a$ $(a>1)$, то в качестве X' можно взять элемент $X'=U\neq E$. Действительно,

$$UU^a=U^aU.$$

U не является степенью U^a, так как $(U^a)^n=U^{an}$ отлично от U.

Если $X=V^b$ $(b>1)$, то в качестве X' можно взять $X'=V$.

Теперь предположим, что некоторый элемент $U'=U^aV^b\neq E$ обладает рассматриваемыми свойствами по отношению к элементу U. Так как U' не должен быть степенью U, то $b\neq 0$. Но тогда

$$UU'=U\cdot U^aV^b=U^{a+1}V^b,$$
$$U'U=U^aV^b\cdot U=U^aV^{b-1}$$

и U' оказывается неперестановочным с U.

Аналогично доказывается, что не существует элемента V', обладающего рассматриваемыми свойствами по отношению к элементу V.

6.5. При помощи леммы 6.4 мы докажем, что полугруппа $\mathfrak{P}$ не имеет иных автоморфизмов, кроме тождественного.

Предположим, что φ есть некоторый нетождественный автоморфизм полугруппы $\mathfrak{P}$. Если элемент X обладает отличным от единицы элементом X', перестановочным с X и не являющимся степенью X, то, очевидно, элемент $\varphi(X')$ будет обладать теми же свойствами по отношению к $\varphi(X)$. Благодаря этому из леммы 6.4 следует, что никакой элемент, отличный от U и V, не может при автоморфизме φ отобразиться на U или на V. Таким образом, мыслимы только два случая: или

$$\varphi(U)=U,\ \varphi(V)=V,$$

или

$$\varphi(U)=V,\ \varphi(V)=U.$$

В первом из этих случаев мы получаем для любого элемента

$$\varphi(U^aV^b) = [\varphi(U)]^a [\varphi(V)]^b = U^aV^b,$$

что противоречит тому, что φ предположен нетождественным автоморфизмом.

Но и во втором случае получаем противоречие:

$$\varphi(U^2V) = [\varphi(U)]^2 \cdot \varphi(V) = V^2U = V = \varphi(U), \quad U^2V \neq U.$$

6.6. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть некоторая полугруппа, изоморфная полугруппе $\mathfrak{P}$. В этом случае существует лишь единственный изоморфизм $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$. Действительно, если отображения φ и ψ оба являются изоморфизмами $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$, то $\varphi^{-1}\psi$, очевидно, будет автоморфизмом полугруппы $\mathfrak{P}$. Согласно 6.5, $\varphi^{-1}\psi$ должен быть тождественным автоморфизмом, откуда следует, что отображения φ и ψ одинаковы.

Пусть φ есть изоморфизм $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$. Ввиду единственности такого изоморфизма и того, что элементы U и V вполне определены в $\mathfrak{P}$ своими свойствами независимо от способа задания $\mathfrak{P}$, в полугруппе $\mathfrak{Q} = \varphi(\mathfrak{P})$ элементы $\varphi(U)$ и $\varphi(V)$ вполне определены единственным образом самой полугруппой $\mathfrak{Q}$ независимо от способа ее задания. Рассмотренное свойство полугруппы $\mathfrak{P}$ следует иметь в виду при анализе и применении существенной теоремы 6.8, к которой мы обратимся в ближайшее время.

6.7. Рассмотрим увеличительные элементы полугруппы $\mathfrak{P}$. В полугруппе $\mathfrak{P}$ все элементы вида U^a $(a > 0)$ являются правыми увеличительными. Действительно,

$$(\mathfrak{P}V^a)U^a = \mathfrak{P}V^aU^a = \mathfrak{P}E = \mathfrak{P}.$$

При этом множество $\mathfrak{P}V^a$, очевидно, состоящее из всех элементов $\mathfrak{P}$ вида U^cV^{d+a} $(d \geqslant 0)$, отлично от $\mathfrak{P}$, так как не содержит, например, U.

Аналогично элементы вида V^b $(b > 0)$ оказываются левыми увеличительными, так как

$$V^b(U^a\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P} \neq U^a\mathfrak{P} \ni V.$$

Что касается прочих элементов полугруппы $\mathfrak{P}$, то ни один из них не является увеличительным. Для единицы E это очевидно. Для U^aV^b $(a > 0,\ b > 0)$ имеем:

$$U^aV^b\mathfrak{P} \ni V, \quad \mathfrak{P}U^aV^b \ni U.$$

Отсюда следует, что ни для какого собственного подмножества $\mathfrak{P}$ не могут выполняться равенства 5.1, характеризующие элемент как увеличительный.

6.8. Теперь выясним ту особую роль, которую играет полугруппа $\mathfrak{P}$ в теории увеличительных элементов. Окажется, что увеличительные элементы полугруппы с единицей содержатся в таких ее подполугруппах, изоморфных $\mathfrak{P}$ и содержащих единицу этой полугруппы, что при изоморфизмах этих подполугрупп с $\mathfrak{P}$ они соответствуют элементам U и V. При этом только увеличительные элементы обладают этим свойством.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей.*

Для того чтобы элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ был правым увеличительным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой изоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, при котором $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi(U) = X$.

Для того чтобы элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ был левым увеличительным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой изоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, при котором $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi(V) = X$.

Доказательство. 1) Пусть X есть правый увеличительный элемент полугруппы $\mathfrak{A}$. Тогда при некотором $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}' X = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}.$$

Отсюда следует, что в $\mathfrak{A}'$ найдется элемент Y такой, что

$$YX = E_{\mathfrak{A}}.$$

Рассмотрим полугруппу

$$\mathfrak{Q} = [X, Y].$$

Из того, что YX есть единица $\mathfrak{A}$, следует, что каждый элемент из $\mathfrak{Q}$ может быть представлен в виде

$$X^a Y^b$$

(здесь X^0 и Y^0 означает $E_{\mathfrak{A}}$).

Выясним, могут ли два произведения с различными показателями степеней изображать одинаковые элементы. Пусть

$$X^{a_1} Y^{b_1} = X^{a_2} Y^{b_2},$$

где $a_1 \geqslant a_2$. Умножив наше равенство слева на Y^{a_2}, получим

$$X^{a_1-a_2} Y^{b_1} = Y^{b_2}.$$

Если бы $a_1 = a_2$ и $b_1 \neq b_2$, то, умножив равенство справа на X^c, где c наибольшее из b_1 и b_2, мы получили бы, что некоторая степень правого увеличительного элемента X равна элементу $E_{\mathfrak{A}}$, который увеличительным не является. Но благодаря 5.4 это невозможно.

Итак, пусть $a_1 > a_2$. Тогда из полученного выше равенства вытекает

$$X\mathfrak{A} \supset X \cdot X^{a_1-a_2-1} Y^{b_1} \mathfrak{A} = Y^{b_2}\mathfrak{A} \supset Y^{b_2} X^{b_2} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

и, следовательно, при некотором $Z \in \mathfrak{A}$

$$XZ = E.$$

Но тогда из

$$\mathfrak{A}' X = \mathfrak{A},$$

умножая справа на Z, мы получаем

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}Z,$$

откуда

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}Z \supset \mathfrak{A}XZ = \mathfrak{A},$$

что противоречит выбору $\mathfrak{A}'$.

Мы показали, что полугруппа $\mathfrak{Q}$ является множеством произведений вида $X^a Y^b$, которые все между собой различны. Благодаря тому, что $YX = E_{\mathfrak{A}} = E_{\mathfrak{Q}}$, умножение этих произведений совершается как раз по тому же правилу, по какому умножаются элементы $\mathfrak{P}$, заданные в канонической форме 6.3. Таким образом, отображение φ полугруппы $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$

$$\varphi(U^a V^b) = X^a Y^b$$

является изоморфизмом $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$. При этом изоморфизме

$$\varphi(U) = X, \quad \varphi E_{\mathfrak{P}} = E_{\mathfrak{A}}.$$

2) Пусть теперь X есть левый увеличительный элемент полугруппы. Рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениям первой части доказательства, показываем, что в $\mathfrak{A}$ существует содержащая $E_{\mathfrak{A}}$ подполугруппа $\mathfrak{Q}'$, изоморфная $\mathfrak{P}$, такая, что при изоморфизме φ полугруппы $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}'$ имеет место $\varphi(V) = X$, $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$.

3) Пусть φ есть такой изоморфизм $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, при котором $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$.

Мы имеем

$$\varphi(U)\cdot\varphi(V) = \varphi(UV) \neq \varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}},$$
$$\varphi(V)\cdot\varphi(U) = \varphi(VU) = \varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}.$$

Элемент $\varphi(U) \in \mathfrak{A}$ не имеет в $\mathfrak{A}$ правого обратного по отношению к $E_{\mathfrak{A}}$. Действительно, в противном случае, обладая к тому же и левым обратным (таковым является $\varphi(V)$), он должен был бы иметь обратный элемент (II, 2.14), который совпал бы с левым обратным $\varphi(V)$ (II, 2.14). Однако это не так, ибо произведение $\varphi(U)\cdot\varphi(V)$, как мы показали, отлично от $E_{\mathfrak{A}}$. Аналогично убеждаемся, что $\varphi(V)$ не имеет левого обратного по отношению к $E_{\mathfrak{A}}$. Отсюда следует:

$$[\mathfrak{A}\cdot\varphi(V)]\cdot\varphi(U) = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A},$$
$$\varphi(V)\cdot[\varphi\text{-}(U)\cdot\mathfrak{A}] = E_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

причем

$$\mathfrak{A}\cdot\varphi(V) \ni E_{\mathfrak{A}}, \quad \varphi(U)\cdot\mathfrak{A} \ni E_{\mathfrak{A}},$$

т. е.

$$\mathfrak{A}\cdot\varphi(V) \neq \mathfrak{A}, \quad \varphi(U)\cdot\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}.$$

Это и доказывает, что в $\mathfrak{A}$ $\varphi(V)$ является левым увеличительным элементом, а $\varphi(U)$ правым увеличительным.

6.9. *Следствие.* *В полугруппе с единицей каждый увеличительный элемент порождает бесконечную моногенную полугруппу.*

6.10. *Следствие.* *В полугруппе с единицей каждый увеличительный элемент является регулярным.*

Действительно, пусть X есть правый увеличительный элемент полугруппы с единицей $\mathfrak{A}$. Рассмотрим соответствующий элементу X изоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, указанный в 6.8. Мы имеем

$$\varphi(U)\cdot\varphi(V)\cdot\varphi(U) = \varphi(UVU) = \varphi(U),$$

откуда следует регулярность $X = \varphi(U)$.

Аналогично рассуждаем для левых увеличительных элементов.

6.11. *Следствие.* *Для того чтобы в полугруппе с единицей $\mathfrak{A}$ существовали увеличительные элементы,*

необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ *обладала подполугруппой, содержащей* $E_{\mathfrak{A}}$ *и изоморфной* $\mathfrak{P}$.

6.12. *Следствие.* *Если в полугруппе с единицей имеются правые увеличительные элементы, то имеются и левые увеличительные, и наоборот.*

Действительно, согласно предыдущему следствию, полугруппа $\mathfrak{A}$ должна обладать подполугруппой $\mathfrak{P}'$, изоморфной $\mathfrak{P}$ и содержащей единицу $E_{\mathfrak{A}}$. Но тогда, по теореме 6.8, $\mathfrak{A}$ должна обладать и левыми и правыми увеличительными элементами.

6.13. Отметим, что последнее свойство на полугруппы без единицы, вообще говоря, не распространяется. Приведем соответствующий пример.

Пусть $\mathfrak{U}$ есть полугруппа с нулем O, в которой произведение двух любых элементов равно O. Количество элементов $\mathfrak{U}$ не меньше двух. $\mathfrak{V}$ произвольная полугруппа. В множестве

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$$

определим действие. Если два элемента $\mathfrak{A}$ оба одновременно принадлежат $\mathfrak{U}$ или $\mathfrak{V}$, то их произведение определяется по правилу умножения элементов соответственно в $\mathfrak{U}$ или в $\mathfrak{V}$. Если $X \in \mathfrak{U}$ и $Y \in \mathfrak{V}$, то полагаем

$$XY = O, \quad YX = X.$$

Легко доказывается ассоциативность этого действия. Пусть

$$Z_1 = (A_1 A_2) A_3, \quad Z_2 = A_1 (A_2 A_3).$$

Если A_1 или A_2 принадлежат $\mathfrak{U}$, то $Z_1 = O$ и $Z_2 = O$. Если $A_1, A_2 \in \mathfrak{V}$ и $A_3 \in \mathfrak{U}$, то $Z_1 = A_3$ и $Z_2 = A_3$. Если же $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{V}$, то $Z_1 = Z_2$ благодаря ассоциативности умножения в $\mathfrak{V}$.

Выясним, каковы увеличительные элементы полугруппы $\mathfrak{A}$. Пусть

$$X \in \mathfrak{U}, \quad Y \in \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{U}' \cup \mathfrak{V}', \quad \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}.$$

(Здесь $\mathfrak{U}'$ или $\mathfrak{V}'$ могут быть и пустыми.)

Рассмотрим произведения:

$$X\mathfrak{A}' = X\mathfrak{U}' \cup X\mathfrak{V}' \subset O \cup O = O,$$
$$\mathfrak{A}'X = \mathfrak{U}'X \cup \mathfrak{V}'X \subset O \cup X,$$
$$Y\mathfrak{A}' = Y\mathfrak{U}' \cup Y\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{U}' \cup Y\mathfrak{V}',$$
$$\mathfrak{A}'Y = \mathfrak{U}'Y \cup \mathfrak{V}'Y \subset O \cup \mathfrak{V}'Y.$$

Сразу видно, что никакой элемент из $\mathfrak{U}$ не может быть ни правым, ни левым увеличительным элементом $\mathfrak{A}$. Что касается элемента $Y \in \mathfrak{B}$, то он не может быть правым увеличительным. Левым увеличительным Y может быть. Это будет тогда, когда в третьем случае мы возьмем $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}$ и $Y\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$. Таким образом, левыми увеличительными элементами полугруппы $\mathfrak{A}$ оказываются все левые увеличительные элементы полугруппы $\mathfrak{B}$. Если в качестве $\mathfrak{B}$ взять какую-нибудь полугруппу, обладающую левыми увеличительными (например $\mathfrak{P}$), то полугруппа $\mathfrak{A}$ будет обладать левыми увеличительными, а правыми увеличительными обладать не будет.

§ 7. Подполугрупповая характеристика полугруппы

7.1. В продолжение этого параграфа условимся обозначать совокупность всех подполугрупп произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ через $\Sigma(\mathfrak{A})$. В $\Sigma(\mathfrak{A})$ рассмотрим действие умножения, полагая для $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \Sigma(\mathfrak{A})$

$$\mathfrak{B} \bigcirc \mathfrak{B}' = [\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'].$$

Мы вынуждены употреблять для этого действия значок $\bigcirc$, отличный от обычного знака умножения, поскольку указанное действие, вообще говоря, отлично от действия умножения подмножеств полугруппы, каковыми являются, в частности, подполугруппы.

Указанное различие может иметь место даже в коммутативных полугруппах. Пусть, например, $\mathfrak{A}'$ произвольное непустое множество, элемент O не принадлежит $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \cup O$. Определяем в $\mathfrak{A}$ действие, полагая $XY = O$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$. Очевидно, подполугруппами $\mathfrak{A}$ являются все подмножества $\mathfrak{A}$, содержащие O. Для любых $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \Sigma(\mathfrak{A})$ мы, очевидно, имеем:

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}' = O, \quad \mathfrak{B} \bigcirc \mathfrak{B}' = [\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'] = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'.$$

7.2. Действие $\bigcirc$ в $\Sigma(\mathfrak{A})$, как легко убедиться, ассоциативно и коммутативно, все элементы $\Sigma(\mathfrak{A})$ относительно этого действия являются идемпотентами. Таким образом, $\Sigma(\mathfrak{A})$ является коммутативной полугруппой идемпотентов. Ее можно было бы называть полугруппой подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}$.

Мы будем называть $\Sigma(\mathfrak{A})$ *подполугрупповой характеристикой полугруппы* $\mathfrak{A}$.

В дальнейших рассуждениях надо всегда внимательно следить за тем, когда некоторая подполугруппа $\mathfrak{B}$ из $\Sigma(\mathfrak{A})$ рассматривается как подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$, а когда — как элемент полугруппы $\Sigma(\mathfrak{A})$.

7.3. Поскольку $\Sigma(\mathfrak{A})$ является коммутативной полугруппой идемпотентов, для нее, согласно II, 4.3, II, 4.4, определяется сопряженная с ней полуструктура $\bar{\Sigma}$. Эта полуструктура состоит из всех элементов полугруппы $\Sigma(\mathfrak{A})$, т. е. из всех подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}$. В ней $\mathfrak{B}$ предшествует $\mathfrak{B}'$ ($\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}'$), если

$$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \qquad (\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}' \in \Sigma(\mathfrak{A})),$$

что, очевидно, означает, что $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$.

Как следует из II, 4.4; II, 4.5, для взаимно сопряженных полугруппы $\Sigma(\mathfrak{A})$ и полуструктуры $\bar{\Sigma}$ задание одной из них полностью определяет другую. С этим связано одно обстоятельство, на которое мы уже обращали внимание (II, 4.6). Именно, в $\Sigma(\mathfrak{A})$, как и во всякой коммутативной полугруппе идемпотентов, закон умножения полностью определен, если указано, какие элементы для каких других элементов являются единицами.

При изучении множества $\Sigma(\mathfrak{A})$ можно с равным основанием положить в основу определенное выше действие умножения или отношение включения.

Мы будем пользоваться и умножением и отношением включения, но исходным будем считать умножение. Тем самым $\Sigma(\mathfrak{A})$ для нас в первую очередь будет коммутативной полугруппой идемпотентов.

На соотношение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$ ($\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}' \in \Sigma(\mathfrak{A})$) мы будем смотреть, как на условие того, что $\mathfrak{B}$ является единицей для $\mathfrak{B}'$ в $\Sigma(\mathfrak{A})$.

7.4. Полуструктура $\bar{\Sigma}$, сопряженная с подполугрупповой характеристикой $\Sigma(\mathfrak{A})$ полугруппы $\mathfrak{A}$, вообще говоря, не является структурой, так как пересечение двух подполугрупп $\mathfrak{A}$ может быть пустым. Однако если причислить к подполугруппам $\mathfrak{A}$ и пустое множество, то получившееся после этого расширения множество $\Sigma'(\mathfrak{A})$ относительно отношения включения, очевидно, будет структурой (и даже полной).

Конечно, там, где представляется удобным пользоваться результатами теории структур, так и целесообразно сделать.

7.5. В множестве $\Sigma'(\mathfrak{A})$ (7.4) можно рассматривать также и действие пересечения

$$\mathfrak{B} * \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' \qquad (\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}' \in \Sigma'(\mathfrak{A})).$$

Относительно этого действия $\Sigma'(\mathfrak{A})$ будет коммутативной полугруппой идемпотентов. Эта полугруппа, очевидно, сопряжена с полуструктурой дуальной к рассмотренной выше полуструктуре всех подполугрупп (с добавленным пустым подмножеством). Разумеется, исследования, основанные на рассмотрении полугруппы $\Sigma'(\mathfrak{A})$, вполне симметричны исследованиям $\Sigma(\mathfrak{A})$ и приводят к тем же самым результатам.

7.6. При исследовании некоторых свойств тех или иных полугрупп иногда оказывается возможным и целесообразным свести изучение вопроса к исследованию некоторых свойств коммутативных полугрупп идемпотентов, переходя от рассмотрения самих полугрупп к рассмотрению их подполугрупповых характеристик. Именно для данного свойства $\mathfrak{l}$, которым некоторые полугруппы обладают, а некоторые не обладают, отыскивается такое свойство $\mathfrak{l}'$ коммутативных полугрупп идемпотентов, что полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathfrak{l}$ тогда и только тогда, когда ее подполугрупповая характеристика $\Sigma(\mathfrak{A})$ обладает свойством $\mathfrak{l}'$.

Изучение различных свойств полугрупп, очевидно, равносильно рассмотрению классов полугрупп, поскольку каждое свойство характеризуется тем классом полугрупп, которые этим свойством обладают, а каждому классу соответствует свойство принадлежности полугруппы к данному классу. В связи с этим идея сведения изучения свойств полугрупп к изучению свойств их подполугрупповых характеристик может быть оформлена при помощи нижеследующего понятия.

Можно говорить, что некоторый класс полугрупп Γ *определяется подполугрупповой характеристикой* (подразумевается: определяется с точностью до изоморфизмов), если из изоморфизма полугрупп $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$, где $\mathfrak{A}_1 \in \Gamma$, всегда следует, что $\mathfrak{A}_2$ изоморфна какой-либо полугруппе, принадлежащей классу Γ. В частности, если Γ состоит из одной полугруппы $\mathfrak{A}$, то при выполнении описанного

свойства говорят, что полугруппа $\mathfrak{A}$ *определяется полугрупповой характеристикой.*

Изоморфизм полугрупп $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ (или, вернее, изоморфизм структур $\Sigma'(\mathfrak{A}_1)$ и $\Sigma'(\mathfrak{A}_2)$, получаемых от присоединения в качестве элемента еще и пустого множества—7.4) называется иногда структурным изоморфизмом полугрупп $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Таким образом, вопрос о том, определяется ли некоторая полугруппа $\mathfrak{A}$ подполугрупповой характеристикой, можно формулировать как вопрос о том, всегда ли из наличия структурного изоморфизма с $\Sigma(\mathfrak{A})$ вытекает наличие изоморфизма с самой полугруппой $\mathfrak{A}$.

Подполугрупповые характеристики принадлежат к классу коммутативных полугрупп идемпотентов, который является значительно более простым и обозримым. Поэтому сведение изучения свойств самих полугрупп к изучению некоторых свойств их подполугрупповых характеристик всегда может быть рассматриваемо как принципиально важный шаг на пути изучения общих полугрупп.

Следует также иметь в виду, что изучение подполугрупповых характеристик может быть осуществлено с помощью теории структур, что также открывает богатые перспективы на пути соответствующих исследований.

7.7. Разумеется, далеко не всякий класс полугрупп и не всякая отдельная полугруппа определяются при помощи подполугрупповой характеристики. Рассмотрим в качестве примера полугруппы, состоящие из двух элементов. Полугруппа $\Sigma(\mathfrak{A})$ для всякой такой полугруппы $\mathfrak{A}$ состоит из двух или из трех элементов, один из которых является нулем $\Sigma(\mathfrak{A})$ (сама полугруппа $\mathfrak{A}$).

Существует лишь единственная коммутативная полугруппа, состоящая из двух идемпотентов. В то же время имеются две неизоморфные между собой полугруппы, состоящие каждая из двух элементов и имеющие подполугрупповую характеристику, состоящую из двух элементов. Это, во-первых, циклическая группа, состоящая из двух элементов (т. е. моногенная полугруппа типа (1,2) и, во-вторых, моногенная полугруппа типа (2,1)—см. 3.7. Они неизоморфны, хотя их подполугрупповые характеристики изоморфны между собой.

У полугруппы $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\}$, состоящей из двух элементов, полугруппа $\Sigma(\mathfrak{A})$ состоит из трех элементов тогда и только тогда, когда элементы A_1 и A_2 идемпотенты.

В этом случае $\Sigma(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}, A_1, A_2\}$, где $\mathfrak{A}$ есть нуль $\Sigma(\mathfrak{A})$ и $A_1 \cap A_2 = \{A_1, A_2\} = \mathfrak{A}$. Легко убедиться, что существуют три неизоморфные между собой полугруппы, состоящие каждая из двух идемпотентов $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\}$. Они определяются следующими законами действий:

1) $A_1A_2 = A_2A_1 = A_1^2 = A_1, \quad A_2^2 = A_2;$
2) $A_iA_j = A_i \qquad (i, j = 1, 2);$
3) $A_iA_j = A_j \qquad (i, j = 1, 2).$

Наконец, отметим, что и сам класс полугрупп, состоящих из двух элементов, не определяется подполугрупповой характеристикой, поскольку циклическая группа, состоящая из p элементов, где p любое простое число, очевидно, имеет подполугрупповую характеристику, состоящую из двух элементов, которая тем самым изоморфна подполугрупповой характеристике некоторых полугрупп, состоящих из двух элементов.

7.8. ***Лемма.*** *В подполугрупповой характеристике* $\Sigma(\mathfrak{A})$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *элемент* $\mathfrak{B} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ *тогда и только тогда не имеет отличных от себя самого единиц, когда* $\mathfrak{B}$ *состоит лишь из одного идемпотента полугруппы* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Для $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \Sigma(\mathfrak{A})$ соотношение

$$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' = [\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'] = \mathfrak{B}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ состоит из одного элемента, то это, очевидно, невозможно ни при каком $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}$ содержит более одного элемента. Для $X \in \mathfrak{B}$ рассмотрим $[X] \subset \mathfrak{B}$. Если $[X]$ бесконечная моногенная полугруппа, то $[X^2] \neq [X]$ и потому $\mathfrak{B}' = [X^2]$ является единицей для $\mathfrak{B}$, отличной от $\mathfrak{B}$. Если $[X]$ конечна, то она содержит идемпотент I (3.11) и тогда $\mathfrak{B}' = I$ является единицей для $\mathfrak{B}$, отличной от $\mathfrak{B}$.

7.9. Укажем несколько классов полугрупп, определяемых подполугрупповой характеристикой.

Теорема. *Пусть для полугрупп* $\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathfrak{A}_2$ *их подполугрупповые характеристики* $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ *и* $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ *изоморфны между собой.*

Если $\mathfrak{A}_1$ *есть единичная полугруппа, то и* $\mathfrak{A}_2$ *есть единичная полугруппа.*

Если $\mathfrak{A}_1$ *конечна, то и* $\mathfrak{A}_2$ *конечна.*

Если $\mathfrak{A}_1$ *бесконечна, то и* $\mathfrak{A}_2$ *бесконечна.*

Если $\mathfrak{A}_1$ *есть бесконечная моногенная полугруппа, то и* $\mathfrak{A}_2$ *есть бесконечная моногенная полугруппа.*

Если $\mathfrak{A}_1$ *периодическая полугруппа* (4.1), *то и* $\mathfrak{A}_2$ *есть периодическая полугруппа.*

Если все элементы $\mathfrak{A}_1$ *бесконечного типа, то и все элементы* $\mathfrak{A}_2$ *бесконечного типа* (3.7).

Если в $\mathfrak{A}_1$ *имеются и элементы конечного типа и элементы бесконечного типа, то и в* $\mathfrak{A}_2$ *имеются элементы конечного и бесконечного типов.*

Доказательство. Пусть φ есть изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$.

Если $\mathfrak{A}_1$ есть единичная полугруппа, то единичность $\mathfrak{A}_2$ непосредственно следует из 7.8.

Предположим, что в $\mathfrak{A}_1$ имеется элемент X конечного типа. Тогда $\mathfrak{A}_1$ обладает идемпотентом I (3.11). Согласно 7.8, отсюда следует, что в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ I является элементом, не имеющим отличной от себя единицы. Но тогда и в $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ $\varphi(I)$ будет обладать тем же свойством и потому в $\mathfrak{A}_2$ $\varphi(I)$ является полугруппой, состоящей из одного идемпотента (7.8), тип которого конечен.

Предположим, что в $\mathfrak{A}_1$ имеется элемент Y бесконечного типа. В $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ $[Y]$ является таким элементом, всякая единица которого имеет отличную от себя свою единицу. Отсюда следует, что $\varphi[Y]$ в $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ обладает тем же свойством. Но это означает, что в подполугруппе $\varphi[Y]$ полугруппы $\mathfrak{A}_2$ нет идемпотентов, поэтому для всякого $Y' \in \varphi[Y]$ $(Y' \in \mathfrak{A}_2)$ полугруппа $[Y']$ бесконечна.

Аналогично из существования в $\mathfrak{A}_2$ элементов конечного типа следует существование таких элементов в $\mathfrak{A}_1$ и из существования в $\mathfrak{A}_2$ элементов бесконечного типа следует существование таких элементов в $\mathfrak{A}_1$.

Из доказанного непосредственно вытекает справедливость трех последних утверждений теоремы.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ конечна. Тогда $\mathfrak{A}_1$ периодична, а потому и $\mathfrak{A}_2$ периодична. $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$, а потому и $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ конечны. Таким образом, $\mathfrak{A}_2$ имеет лишь конечное число различных моногенных подполугрупп, каждая из которых обладает лишь конечным числом элементов. Так как каждый элемент $\mathfrak{A}_2$ содержится в одной из этих моногенных подполугрупп, то $\mathfrak{A}_2$ имеет лишь конечное число элементов.

Если $\mathfrak{A}_1$ бесконечна, то $\mathfrak{A}_2$ не может быть конечной, ибо из конечности $\mathfrak{A}_2$, используя изоморфизм φ^{-1}, мы благодаря доказанному выше заключили бы о конечности $\mathfrak{A}_1$.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ есть бесконечная моногенная полугруппа: $\mathfrak{A}_1=[A_1]$. Ее подполугруппа $\mathfrak{B}_1=\{A_1^2, A_1^3, A_1^4, \ldots\}$ содержит все подполугруппы $\mathfrak{A}_1$, отличные от самой $\mathfrak{A}_1$. Следовательно, $\mathfrak{B}_1$ является нулем для всех элементов $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$, отличных от $\mathfrak{A}_1$. Отсюда следует, что $\mathfrak{B}_2=\varphi(\mathfrak{B}_1)\in\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ также является нулем для всех элементов из $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$, отличных от $\mathfrak{A}_2$. Так как $\mathfrak{B}_1\neq\mathfrak{A}_1$, то $\mathfrak{B}_2\neq\mathfrak{A}_2$. Возьмем некоторый элемент A_2 из $\mathfrak{A}_2\setminus\mathfrak{B}_2$. Так как $[A_2]\subseteq\mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{B}_2$ не является нулем для $[A_2]$. Поэтому $[A_2]=\mathfrak{A}_2$. При этом моногенная полугруппа $\mathfrak{A}_2=[A_2]$ не может быть конечной, ибо $\mathfrak{A}_1$ бесконечна, а $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ изоморфны.

7.10. Пусть для полугрупп $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дан изоморфизм φ $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$. Отметим несколько свойств этого изоморфизма.

(α). *Для всякой* $\mathfrak{B}_1\in\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ *существует изоморфизм* $\Sigma(\mathfrak{B}_1)$ *на* $\Sigma[\varphi(\mathfrak{B}_1)]$.

Действительно, $\Sigma(\mathfrak{B}_1)$ состоит из всех подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}_1$, которые в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ являются единицами для $\mathfrak{B}_1$, а $\Sigma[\varphi(\mathfrak{B}_1)]$ из всех подполугрупп $\mathfrak{A}_2$, которые в $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ являются единицами для $\varphi(\mathfrak{B}_1)$. Изоморфизм φ осуществляет взаимно однозначное отображение $\Sigma(\mathfrak{B}_1)$ на $\Sigma[\varphi(\mathfrak{B}_1)]$. Это отображение, очевидно, является изоморфизмом.

(β). *Если* I *есть идемпотент полугруппы* $\mathfrak{A}_1$, *то* $\varphi(I)$ *есть идемпотент полугруппы* $\mathfrak{A}_2$.

Действительно, согласно (α), $\Sigma[\varphi(I)]$ изоморфна $\Sigma(I)$ и потому благодаря 7.9 $\varphi(I)$ есть единичная полугруппа.

(γ) *Если тип элемента* $A_1\in\mathfrak{A}_1$ *бесконечен, то в* $\mathfrak{A}_2$ *существует единственный элемент бесконечного типа* A_2, *такой, что* $\varphi[A_1]=[A_2]$.

Действительно, согласно (α), $\Sigma[A_1]$ и $\Sigma(\varphi[A_1])$ изоморфны. Отсюда благодаря 7.9 следует, что $[A_1]$ и $\varphi[A_1]$ изоморфны, т. е. $\varphi[A_1]$ есть бесконечная моногенная полугруппа $[A_2]$. Из строения бесконечной моногенной полугруппы непосредственно следует, что $[A_2]=[A_2']$ имеет место лишь при $A_2=A_2'$.

(δ). *Если для* $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i^{(\alpha)}, \mathfrak{B}_i^{(\beta)}, \ldots\in\Sigma(\mathfrak{A}_i)$ *имеет место* $\mathfrak{B}_i=[\mathfrak{B}_i^{(\alpha)}, \mathfrak{B}_i^{(\beta)}, \ldots]$, $\varphi(\mathfrak{B}_1^{(\xi)})=\mathfrak{B}_2^{(\xi)}$ $(i=1, 2; \xi=\alpha, \beta, \ldots)$, *то* $\varphi(\mathfrak{B}_1)=\mathfrak{B}_2$.

Действительно, рассмотрим подполугруппы $\mathfrak{B}_1' \in \Sigma(\mathfrak{A}_1)$ и $\mathfrak{B}_2' \in \Sigma(\mathfrak{A}_2)$:

$$\varphi(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B}_2', \quad \varphi(\mathfrak{B}_1') = \mathfrak{B}_2.$$

Так как в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ каждая $\mathfrak{B}_1^{(\xi)}$ является единицей для $\mathfrak{B}_1$, то в $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ $\mathfrak{B}_2^{(\xi)}$ является единицей для $\mathfrak{B}_2'$ и потому

$$\mathfrak{B}_2' \supset \mathfrak{B}_2.$$

Так как в $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ каждая $\mathfrak{B}_2^{(\xi)}$ является единицей для $\mathfrak{B}_2$, то в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ $\mathfrak{B}_1^{(\xi)}$ является единицей для $\mathfrak{B}_1'$ и потому

$$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_1'.$$

Из того, что $\mathfrak{B}_1$ является единицей $\mathfrak{B}_1'$, следует, что $\mathfrak{B}_2'$ является единицей для $\mathfrak{B}_2$:

$$\mathfrak{B}_2' \subset \mathfrak{B}_2.$$

Совместно с полученным ранее включением это означает, что $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2'$ и потому $\varphi(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B}_2$.

(ε). *Для элементов бесконечного типа* $X_1^{(\alpha)}, X_1^{(\beta)}, \ldots$ $\ldots, \in \mathfrak{A}_1$ *существуют такие* $X_2^{(\alpha)}, X_2^{(\beta)}, \ldots \in \mathfrak{A}_2$, что

$$\varphi[X_1^{(\alpha)}] = [X_2^{(\alpha)}], \quad \varphi[X_1^{(\beta)}] = [X_2^{(\beta)}], \ldots;$$
$$\varphi[X_1^{(\alpha)}, X_1^{(\beta)}, \ldots] = [X_2^{(\alpha)}, X_2^{(\beta)}, \ldots].$$

Это непосредственно следует из (γ) и (δ), поскольку

$$[X_i^{(\alpha)}, X_i^{(\beta)}, \ldots] = [[X_i^{(\alpha)}], [X_i^{(\beta)}], \ldots].$$

(ζ). *Если тип элемента* $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ *бесконечен и* $\varphi[A_1] = [A_2]$, *то при любом натуральном* n

$$\varphi[A_1^n] = [A_2^n].$$

Согласно (γ), для всякого элемента $X_1 \in \mathfrak{A}_1$, имеющего бесконечный тип, и для всякого натурального числа n найдутся такие элементы $X_2, Y_2 \in \mathfrak{A}_2$, что

$$\varphi[X_1] = [X_2], \quad \varphi[X_1^n] = [Y_2].$$

Так как $[X_1] \supset [X_1^n]$, то и $[X_2] \supset [Y_2]$, т. е. $Y_2 = X_2^m$.

Предположим, что существуют такие элементы бесконечного типа X_1 и натуральные числа n, что $m \neq n$ и будем

считать, что n наименьшее из всех таких чисел (относительно всевозможных элементов бесконечного типа полугруппы $\mathfrak{A}_1$).

Так как $[X_i^{(l)}]$ $(l=1, 2, \ldots)$ есть всевозможные единицы элемента $[X_i]$ в $\Sigma(\mathfrak{A}_i)$, являющиеся в $\mathfrak{A}_i$ бесконечными моногенными полугруппами и $\varphi[X_1]=[X_2]$, то φ ввиду 7.9 осуществляет взаимно однозначное отображение множества $\{[X_1], [X_1^2], [X_1^3], \ldots\}$ на $\{[X_2], [X_2^2], [X_2^3], \ldots\}$, причем $\varphi[X_1^s]=[X_2^s]$ для $s=1, 2, \ldots, n-1$ и $\varphi[X_1^n]=[X_2^m]$, $m>n$. Обозначим

$$\mathfrak{B}_i^{(s)}=\{X_i^{(s)}, X_i^{s+1}, X_i^{s+2}, \ldots\}\in\Sigma(\mathfrak{A}_i)\ (s=1, 2, 3, \ldots; i=1, 2).$$

Благодаря сказанному выше ввиду (ε) имеем:

$$\varphi(\mathfrak{B}_1^{(s)})=\mathfrak{B}_2^{(s)} \qquad (s=1, 2, \ldots, n),$$
$$\varphi(\mathfrak{B}_1^{(n+1)})=[X_2^n, \ldots, X_2^{m-1}, X_2^{m+1}, X_2^{m+2}, \ldots]=\mathfrak{B}_2'.$$

Предположим $n=2$. Равенство

$$\mathfrak{B}_i^{(2)}=[X_i^p]\cap[X_i^q]=[X_i^p, X_i^q] \qquad (i=1, 2),$$

очевидно, соблюдается лишь тогда, когда p и q есть числа 2 и 3.

Так как $\varphi[X_1^2]\neq[X_2^2]$, то

$$\varphi[X_1^2]=[X_2^3], \quad \varphi[X_1^3]=[X_2^2].$$

Но $[X_1^2]\cap[X_1^5]=[X_1^2, X_1^4, X_1^5, X_1^6, \ldots]$ содержит все единицы $\mathfrak{B}_1^{(2)}$, являющиеся в $\mathfrak{A}_1$ моногенными полугруппами, кроме одной: $[X_1^3]$, тогда как $[X_2^3]\cap[X_2^l]=[X_2^3, X_2^l]$ не содержит $[X_2^2]$ и $[X_2^4]$ при любом $l>4$ и не содержит $[X_2^2]$ и $[X_2^5]$ при $l=4$. Следовательно, n не может равняться двум.

Предположим, что n четно и больше двух. Так как $[X_1^2]\supset[X_1^n]$ и $\varphi[X_1^2]=[X_2^2]$, то $[X_2^2]\supset[X_2^m]$, т. е. m четно. Для элементов $Y_1=X_1^2$ и $Y_2=X_2^2$ мы получаем

$$\varphi\left[Y_1^{\frac{n}{2}}\right]=\left[Y_2^{\frac{m}{2}}\right], \quad \frac{n}{2}\neq\frac{m}{2},$$

что противоречит минимальности числа n среди чисел с соответствующим свойством.

Осталось предположить, что n нечетно.

Так как $[X_1^n] \subseteq \mathfrak{B}_1^{n+1}$, то $[X_2^m] \subseteq \mathfrak{B}_2'$. Отсюда следует $m < 2n$, т. е. $0 < m - n < n$. В $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ мы имеем

$$[X_2^{m-n}] \circ \mathfrak{B}_2' \supseteq [X_2^m].$$

Поэтому в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$

$$[X_1^{m-n}] \circ \mathfrak{B}_1^{(n+1)} \supseteq [X_1^n].$$

Но

$$[X_1^{m-n}] \circ \mathfrak{B}_1^{(n+1)} = [X_1^{m-n}, X_1^{n+1}, X_1^{n+2}, \ldots] \ni X_1^n$$

возможно лишь тогда, когда $X_1^n = (X_1^{m-n})^k$. Это означает, что $m - n$ есть делитель n. Поэтому $m - n$ нечетно. Учитывая, что и n нечетно, m должно быть четным. Но тогда, учитывая минимальность n и то, что $n > 2$, получаем противоречие:

$$\varphi[X_1^n] = [X_2^m] = \left[\left(X_2^{\frac{m}{2}}\right)^2\right] = \varphi\left[\left(X_1^{\frac{m}{2}}\right)^2\right] = \varphi[X_1^m],$$

$$[X_1^n] \neq [X_1^m].$$

7.11. Как следует из 7.7, класс всех групп не относится к тем классам полугрупп, которые определяются подполугрупповой характеристикой. В связи с этим естественно возникает вопрос о том, каковы группы, у которых подполугрупповая характеристика изоморфна с подполугрупповой характеристикой какой-либо полугруппы, не являющейся группой. Аналогичный вопрос состоит в том, каковы не являющиеся группами полугруппы, у которых подполугрупповая характеристика изоморфна с подполугрупповой характеристикой какой-либо группы. Оба эти вопроса были подробно разобраны Р. В. Петропавловской [4], [5], [6]. Ею были описаны строения групп, обладающих указанным свойством. Наравне с этим ею были выявлены некоторые классы групп, определяемые подполугрупповой характеристикой. Разберем один такой случай. Если все неединичные элементы группы имеют бесконечный тип, то группа называется группой без кручения. Выделение класса групп без кручения играет важную роль в теории групп. Мы покажем, что этот класс определяется подполугрупповой характеристикой.

7.12. Сперва покажем, что бесконечная циклическая группа определяется подполугрупповой характеристикой.

Теорема. *Если* $\mathfrak{A}_1$ *есть бесконечная циклическая группа и полугруппа* $\mathfrak{A}_2$ *такова, что* $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ *и* $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ *изоморфны, то и* $\mathfrak{A}_2$ *является бесконечной циклической группой.*

Доказательство. $\mathfrak{A}_1 = [A_1, A_1^{-1}, E_1]$, где E_1 есть единица $\mathfrak{A}_1$. Согласно 7.10, $\mathfrak{A}_2$ имеет единственный идемпотент E_2 и $\varphi(E_1) = E_2$. $\mathfrak{A}_1$ обладает разбиением на три подполугруппы:

$$\mathfrak{A}_1 = [A_1] \cup [A_1^{-1}] \cup E_1.$$

Три компоненты этого разбиения в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ являются элементами, не имеющими попарно общих единиц, при этом всякая бесконечная моногенная подполугруппа $\mathfrak{A}_1$ является в $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ единицей или для $[A_1]$, или для $[A_1^{-1}]$. Отсюда благодаря 7.10, (γ) следует, что и $\mathfrak{A}_2$ обладает разбиением:

$$\mathfrak{A}_2 = [A_2] \cup [A_2'] \cup E_2,$$

$$\varphi[A_1] = [A_2], \quad \varphi[A_1^{-1}] = [A_2'], \quad \varphi(E_1) = E_2,$$

где $[A_2]$ и $[A_2']$ бесконечны.

Так как $[A_1] \cap [A_1^{-1}] \supset E_1$, то $[A_2] \cap [A_2'] \supset E_2$. Отсюда следует, что $A_2^{\alpha_1} A_2'^{\beta_1} A_2^{\alpha_2} A_2'^{\beta_2} \ldots A_2'^{\beta_l} = E_2$, $\alpha_1 \geqslant 1$ (случай, когда $A_2^{\alpha_1}$ есть пустой символ, вполне аналогичен). Предполагая, что это самое короткое из разложений E_2 такого вида, мы можем считать, что $A_2 X = E_2$, где $X \neq E_2$. Так как $[A_1] \ni E_1$, то $[A_2] \ni E_2$ и потому $X \in [A_2]$. Следовательно, $X = A_2'^s$. Если бы $A_2 A_2' \neq E_2$, то мы имели бы $A_2 A_2' = A_2^p$ или $A_2 A_2' = A_2'^q$ и из $A_2 A_2'^s = E_2$ получили бы $A_2^m = E_2$ или $A'^m = E_2$. Но и то и другое невозможно. Следовательно, $A_2 A_2' = E_2$.

Так как

$$(A_2' A_2)^3 = A_2' \cdot A_2 A_2' \cdot A_2 A_2' \cdot A_2 = A_2' \cdot A_2 A_2' \cdot A_2 = (A_2' A_2)^2,$$

то $A_2' A_2 = E_2$.

Элемент $A_2 E_2$ не может принадлежать $[A_2']$, так как иначе из $A_2 E_2 = A_2'^m$, умножая на A_2', мы получили бы $E_2 = A_2'^{m+1}$. Следовательно, или $A_2 E_2 = E_2$, или $A_2 E_2 = A_2^r$. Предположим

$A_2E_2 = E_2$. Тогда $E_2A_2 \cdot E_2A_2 = E_2A_2$, т. е. $E_2A_2 = E_2$. Из $A_2E_2 = E_2$ и $E_2A_2 = E_2$, умножая эти равенства на A_2', получаем $A_2'E_2 = E_2$, $E_2A_2' = E_2$. Отсюда следует, что $[A_2^2] \cap [A_2'] = [A_2^2, A_2']$ состоит из элементов вида A_2^{2k}, $A_2'^k$, E_2 $(k = 1, 2, \ldots)$ и потому не содержит A_2, что противоречит тому, что $[A_1^2] \cap [A_1^{-1}] \supset [A_1]$. Следовательно, A_2E_2 не может равняться E_2.

Из $A_2E_2 = A_2^r$ получаем

$$A_2^r = A_2E_2 = A_2E_2E_2 = A_2^rE_2 = A_2^{r-1} \cdot A_2E_2 = A_2^{r-1}A_2^r = A_2^{2r-1}.$$

Так как $[A_2]$ бесконечна, то это возможно лишь при $r = 1$.

Аналогично тому, как мы доказали $A_2E_2 = A_2$, убеждаемся, что $E_2A_2 = A_2$, $A_2'E_2 = A_2'$, $E_2A_2' = A_2'$. Эти соотношения совместно с доказанными ранее $A_2A_2' = E_2$, $A_2'A_2 = E_2$ и означают, что бесконечная полугруппа $\mathfrak{A}_2 = [A_2, A_2', E_2]$ является бесконечной циклической группой.

7.13. ***Теорема.*** *Если* $\mathfrak{A}_1$ *есть группа без кручения* (7.11) *и* $\mathfrak{A}_2$ *такая полугруппа, что* $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ *и* $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$ *изоморфны, то и* $\mathfrak{A}_2$ *является группой без кручения.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}_1$ имеет единственный идемпотент $E_{\mathfrak{A}_1}$, то, согласно 7.10, и $\mathfrak{A}_2$ обладает единственным идемпотентом E_2. За исключением $E_{\mathfrak{A}_1}$ всякая подполугруппа $\mathfrak{A}_1$ бесконечна. Следовательно, благодаря 7.9 и 7.10, (α) и всякая отличная от E_2 подполугруппа $\mathfrak{A}_2$ бесконечна.

Пусть φ есть изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$; A_2 произвольный элемент $\mathfrak{A}_2$, отличный от E_2. Согласно 7.10, (γ), для $[A_2]$ найдется такой $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, что $\varphi[A_1] = [A_2]$. В $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ существует бесконечная циклическая группа $\mathfrak{B}_1$, такая, что $\mathfrak{B}_1 \supset [A_1]$. Благодаря 7.10, (α) и 7.12 $\varphi(\mathfrak{B}_1)$ есть бесконечная циклическая группа, причём $\varphi(\mathfrak{B}_1) \supset [A_2]$. Следовательно, произвольный отличный от E_2 элемент A_2 полугруппы $\mathfrak{A}_2$ имеет E_2 своей единицей, относительно которой A_2 обладает обратным элементом. Отсюда и следует, что $\mathfrak{A}_2$ есть группа, причем благодаря сказанному выше группа без кручения.

7.14. Дальнейшее продвижение в намеченном направлении было осуществлено в теории коммутативных полугрупп. Р. В. Петропавловская [3] показала, что всякая непериодическая коммутативная группа определяется подполугрупповой характеристикой.

7.15. Помимо рассмотрения полугруппы $\Sigma(\mathfrak{A})$ всех подполугрупп данной полугруппы, аналогичные задачи об определимости самой $\mathfrak{A}$ могут быть поставлены для некоторых других полугрупп подполугрупп. Так, например, при рассмотрении групп естественно рассматривать для группы множество ее подгрупп $\Sigma^*(\mathfrak{A})$. Оно является подполугруппой полугруппы $\Sigma(\mathfrak{A})$. В направлении, намеченном в настоящем параграфе, вопрос о том, для каких групп из изоморфизма $\Sigma^*(\mathfrak{A}_1)$ и $\Sigma^*(\mathfrak{A}_2)$ всегда следует изоморфизм $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, исторически и был первым. Существенные результаты в этой области впервые были получены Бэром [1] и А. Е. Садовским [2]. В последующем это направление получило дальнейшее развитие [3]. Интересно отметить, что основной результат Бэра впоследствии был выведен Р. В. Петропавловской [3] из результатов, относящихся к рассмотрению полугруппы всех подполугрупп группы.

7.16. При получении упомянутого результата известную роль играет следующее обстоятельство.

Теорема. *Пусть для групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ их подполугрупповые характеристики $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ изоморфны. Тогда изоморфны и полугруппы подгрупп $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ и $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$.*

Доказательство. Пусть φ есть изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ и

$$\varphi(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{B}_2 \in \Sigma(\mathfrak{G}_1), \quad \mathfrak{B}_2 \in \Sigma(\mathfrak{G}_2).$$

Предположим, что $\mathfrak{B}_2 \in \Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$. Возьмем в $\mathfrak{B}_1$ произвольный элемент X_1. Если тип X_1 конечен, то в $[X_1]$ содержится элемент, обратный к X_1. Следовательно, $X_1^{-1} \in \mathfrak{B}_1$. Если тип X_1 бесконечен, то, согласно 7.9 и 7.10, (α) $\varphi[X_1]$ является бес-

---

[1] The significance of the system of sub groups for the structure of groups. Amer. J. of Meth., **61** (1939), 1—44.

[2] О структурных изоморфизмах свободных групп. ДАН СССР, **32** (1941), 171—174.

Структурные изоморфизмы свободных групп и свободных произведений, Матем. сб. (нов. сер.), 14 (1944), 155—173.

О структурных изоморфизмах произведений групп, Матем. сб. (нов. сер.), **21** (1947), 63—82.

[3] См., например, M. Suzuki. Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956, 1—96.

Б. И. Плоткин. Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы, УМН, 13 (1958), в. 4, 89—172.

конечной моногенной полугруппой: $\varphi[X_1]=[X_2]$. Так как $[X_1]\subset\mathfrak{B}_1$, то $[X_2]\subset\mathfrak{B}_2$. Но $\mathfrak{B}_2$ есть группа, поэтому $[X_2, X_2^{-1}]\subset\mathfrak{B}_2$. Но тогда для некоторой $\mathfrak{H}\in\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ имеем

$$[X_1]\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{B}_1,\quad \varphi(\mathfrak{H})=[X_2, X_2^{-1}].$$

Согласно 7.9 и (7.10), (α), $\mathfrak{H}$ должна быть бесконечной циклической группой. Следовательно, $X_1^{-1}\in\mathfrak{H}\subset\mathfrak{B}_1$. Так как $\mathfrak{B}_1$ вместе с каждым элементом X_1 содержит и обратный ему элемент X_1^{-1}, то $\mathfrak{B}_1\in\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$.

Совершенно аналогично показываем, что из $\mathfrak{B}_1\in\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ вытекает $\mathfrak{B}_2\in\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$.

Мы убедились, что изоморфизм φ полугруппы $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ осуществляет взаимно однозначное отображение $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$, которое тем самым является изоморфизмом $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$.

7.17. Полученный результат означает, что для групп всякий изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ может быть получен как продолжение некоторого изоморфизма $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$. Как было показано Р. В. Петропавловской [3], обратное утверждение вообще говоря, не верно. Для некоторых групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ существуют изоморфизмы $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$, которые не могут быть продолжены до изоморфизмов $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$. Более того, существуют такие группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ (причем даже коммутативные), у которых $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ и $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$ изоморфны, тогда как $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ неизоморфны.

Таким образом, требование изоморфизма $\Sigma(\mathfrak{G}_1)$ и $\Sigma(\mathfrak{G}_2)$ для групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ является более сильным по сравнению с требованием об изоморфизме $\Sigma^*(\mathfrak{G}_1)$ на $\Sigma^*(\mathfrak{G}_2)$.

ГЛАВА IV

ИДЕАЛЫ

§ 1. Понятие и простейшие свойства идеалов

1.1. Мы имели возможность убедиться в особой роли подполугрупп, т. е. таких подмножеств полугруппы, перемножение элементов которых не выводит за пределы подмножества. Естественным усилением этого условия является требование, чтобы умножение элементов подмножества на любые элементы полугруппы не выводило за пределы подмножества. Подмножества полугрупп с такими свойствами играют важную роль в теории полугрупп.

Определение. *Непустое подмножество* $\mathfrak{T}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *называется левым идеалом* $\mathfrak{A}$, *если*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{T}$ *называется правым идеалом, если*

$$\mathfrak{T}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{T}$ *называется двусторонним идеалом, если оно является одновременно и левым и правым идеалом, т. е. непустое и таково, что*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{T}$ *называется идеалом, если оно является левым или правым идеалом* $\mathfrak{A}$.

В коммутативных полугруппах понятия идеала, левого идеала, правого идеала и двустороннего идеала, очевидно, совпадают.

Так как

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}\mathfrak{A},$$

то идеал всегда является подполугруппой.

Следует иметь в виду, что нередко идеалами называют лишь двусторонние идеалы. О левых и правых идеалах иногда говорят, как об односторонних идеалах.

Термин „идеал" появился впервые в теории алгебраических чисел, где его употребление имело известные причины. В дальнейшем он перешел и в другие отрасли алгебры, где укоренился настолько, что менять его, несмотря на всю его несообразность, уже не представляется возможным.

Свойства левых, правых и в особенности двусторонних идеалов полугруппы, интересные сами по себе, тесно связаны с различными другими ее свойствами. Например, сразу видна их роль для делимости. Во многих случаях строение полугруппы в той или иной мере определяется, в зависимости от наличия и взаимной связи ее идеалов. Значительная часть работ, посвященных исследованию полугрупп, в той или иной степени использует понятие и свойства идеалов. И настоящая глава и последующая полностью будут посвящены рассмотрению различных свойств идеалов. Так же и в дальнейшем изложении мы не раз будем иметь дело с идеалами.

1.2. В мультипликативной полугруппе натуральных чисел множество всех четных чисел является идеалом.

В полугруппе всех вещественных функций, определенных на всей вещественной оси, рассматриваемых относительно действия суперпозиции, множество всех постоянных является двусторонним идеалом. Множество всех периодических функций является левым идеалом. Множество всех функций, отличных от нуля при всех значениях независимого переменного, есть правый идеал.

В мультипликативной полугруппе $\mathfrak{M}_n$ всех комплексных квадратных матриц порядка n, множество матриц, у которых равны нулю все элементы данного фиксированного столбца, очевидно, является левым идеалом. Однако правым идеалом при $n > 1$ оно не является. Множество матриц, у которых равны нулю все элементы данной фиксированной строки, является правым идеалом, но не левым идеалом при $n > 1$. Множество всех особенных матриц есть двусторонний идеал.

В произвольной полугруппе $\mathfrak{A}$ для любого непустого подмножества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$ произведение $\mathfrak{AN}$, очевидно, является левым идеалом, произведение $\mathfrak{NA}$ — правым идеалом и $\mathfrak{ANA}$ — двусторонним идеалом. Множество всех разложимых элементов, т. е. $\mathfrak{AA}$, очевидно, есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$.

Если элемент X неразложим, то множество $\mathfrak{A} \setminus X$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

1.3. В конечной моногенной полугруппе $\mathfrak{A} = [X]$, имеющей тип (h, d) (III, 3.7), множество

$$\mathfrak{T}_k = \{X^k, X^{k+1}, \ldots, X^{h+d-1}\}$$

при всяком $k = 1, 2, \ldots, h$, как легко видеть, образует идеал $\mathfrak{A}$. Других идеалов в $\mathfrak{A}$ нет. Действительно, пусть X^k есть наименьшая степень X, принадлежащая некоторому идеалу $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Тогда в $\mathfrak{T}$ содержатся и $X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots, X^{h+d-1}$.

Число k не может быть больше h, так как из $X^{h+r} \in \mathfrak{T}$ $(0 < r < d)$ вытекает

$$X^h = X^{h+d} = X^{h+r} \cdot X^{d-r} \in \mathfrak{T} \cdot X^{d-r} \subset \mathfrak{T}.$$

Из этого, между прочим, следует, что первая компонента пары (h, d) может быть определена как число идеалов в полугруппе $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A} = [X]$ есть бесконечная моногенная полугруппа, то всеми ее идеалами, как легко видеть, являются множества вида

$$\{X^k, X^{k+1}, X^{k+2}, \ldots\} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

1.4. Известна важная роль идеалов в теории колец и алгебр.

Очевидно, всякий левый, правый или двусторонний идеал кольца будет соответственно левым, правым или двусторонним идеалом мультипликативной полугруппы этого кольца. Обратное заключение, вообще говоря, несправедливо. Примером этого может служить уже кольцо всех целых чисел. Его подмножество, состоящее из нуля и всех целых чисел, по абсолютной величине превосходящих некоторое произвольное фиксированное натуральное число, очевидно, будет двусторонним идеалом мультипликативной полугруппы всех целых чисел, но не будет идеалом самого кольца.

Для колец с единицей легко выяснить, в каких случаях все идеалы мультипликативной полугруппы кольца оказываются идеалами самого кольца. (Ауберт [1] формулировал этот результат для коммутативного случая).

Теорема. *Для того чтобы в кольце с единицей всякий левый идеал мультипликативной полугруппы кольца являлся левым идеалом самого кольца, необходимо и*

достаточно, чтобы для любых двух элементов один из них являлся правым делителем другого.

Доказательство. 1) Пусть всякий левый идеал мультипликативной полугруппы кольца $\mathfrak{A}$ является левым идеалом самого кольца. Для любых X, $Y \in \mathfrak{A}$ множество $\mathfrak{A}X \cup \mathfrak{A}Y$, очевидно, является левым идеалом полугруппы. Так как оно должно являться и левым идеалом кольца, то в нем должен содержаться элемент $X+Y$. Пусть $(X+Y) \in \mathfrak{A}X$. Тогда при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$X+Y=ZX,$$

$$Y=(Z-E_{\mathfrak{A}})X.$$

2) Пусть из двух любых элементов $\mathfrak{A}$ один всегда является правым делителем другого. $\mathfrak{L}$ есть произвольный левый идеал мультипликативной полугруппы кольца $\mathfrak{A}$. Пусть X, $Y \in \mathfrak{L}$ и $A \in \mathfrak{A}$. Мы имеем $AX \in \mathfrak{L}$. Если к тому же $Y=ZX$, то

$$X-Y=E_{\mathfrak{A}}X-ZX=(E_{\mathfrak{A}}-Z)X \in \mathfrak{L},$$

$$(Y-X)=(-E_{\mathfrak{A}})(X-Y) \in \mathfrak{L}$$

и, следовательно, $\mathfrak{L}$ является левым идеалом кольца.

1.5. Хотя даже для мультипликативных полугрупп колец теория идеалов колец и теория идеалов полугрупп не совпадают, тем не менее между теорией идеалов колец и теорией идеалов полугрупп существует определенная связь. Поскольку содержание целого ряда свойств колец связано лишь с действием умножения, естественно стоит вопрос о том, чтобы перенести эти свойства непосредственно или в обобщенном смысле в теорию полугрупп. Среди таких свойств важное место занимают свойства различных разложений, носящие арифметический характер, которые существенно связаны с идеалами. Примером исследований, имеющих указанную тенденцию, являются работы И. В. Арнольда [1], Асано и Мурата [1], Ауберта [1], Вивера [2], Дюбрейль-Жакотэн [2], Кавадо и Конто [1], Клиффорда [2], Лесье [3], Мак-Кензи [1], Л. М. Рыбакова [1], Сколема [2], [3], [5].

1.6. Укажем несколько простейших свойств идеалов. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа.

(α). *$\mathfrak{A}$ сама является своим двусторонним идеалом.*

(β). *Если $\mathfrak{A}$ имеет нуль $O_{\mathfrak{A}}$, то $O_{\mathfrak{A}}$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.*

(γ). *Объединение любого множества левых идеалов само является левым идеалом.*

Действительно, если $\mathfrak{B}_\lambda$ ($\lambda \in \Gamma$) являются левыми идеалами $\mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{A} \cdot \left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{B}_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{B}_\lambda.$$

(δ). *Пересечение любого множества левых идеалов, если оно не пусто, само является левым идеалом.*

Действительно, используя обозначения (γ) при любом $\mu \in \Gamma$ получаем

$$\mathfrak{A} \cdot \left(\bigcap_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{B}_\lambda \right) \subset \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\mu \subset \mathfrak{B}_\mu.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A} \cdot \left(\bigcap_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{B}_\lambda \right) \subset \bigcap_{\mu \in \Gamma} \mathfrak{B}_\mu.$$

(ε). *Если $\mathfrak{B}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ левый идеал $\mathfrak{A}$ и пересечение $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{T}$ непусто, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}$ является левым идеалом $\mathfrak{B}$.*

Действительно, так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, то

$$\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}) \subset \mathfrak{B}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T},$$

а так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}$, то

$$\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}) \subset \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}) \subset \mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}.$$

(ζ). *Если элемент X содержится в некотором левом идеале $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, а элемент Y не содержится в $\mathfrak{T}$, то Y не делится справа на X.*

Действительно, если бы Y делилось справа на X, т. е.

$$Y = ZX, \quad Z \in \mathfrak{A},$$

то

$$Y = ZX \subset \mathfrak{A}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}.$$

(η) *Если $\mathfrak{T}$ есть полугруппа без неразложимых элементов (т. е. $\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$), $\mathfrak{A}$ есть такая надполугруппа $\mathfrak{T}$, что $\mathfrak{T}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}'$ такая надполугруппа $\mathfrak{A}$,*

что $\mathfrak{A}$ *есть левый идеал* $\mathfrak{A}'$, *то* $\mathfrak{T}$ *является левым идеалом полугруппы* $\mathfrak{A}'$.

Действительно,

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{T} = \mathfrak{A}'\mathfrak{T}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}.$$

1.7. В связи со свойством 1.6, (η) следует отметить, что в общем случае отношение „быть левым идеалом" нетранзитивно. Если $\mathfrak{T}$ есть левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}$ есть левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}'$, то $\mathfrak{T}$ не обязан быть левым идеалом $\mathfrak{A}'$. То же относится и к правым и к двусторонним идеалам.

В качестве примера рассмотрим полугруппу, состоящую из четырех элементов

$$\mathfrak{A}' = \{A, B, C, O\},$$

в которой произведение любых двух элементов равно O, за исключением одного произведения $AB = C$.

Ассоциативность действия проверяется без труда, поскольку для любых трех элементов X, Y, Z из $\mathfrak{A}'$, очевидно,

$$(XY)Z = O, \quad X(YZ) = O.$$

$\mathfrak{A} = \{B, C, O\}$, очевидно, есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}'$. Его подмножество $\mathfrak{T} = \{B, O\}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Вместе с тем $\mathfrak{T}$ не является даже левым идеалом $\mathfrak{A}'$, так как

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{T} \ni AB = C.$$

1.8. Полугруппы обычно весьма богаты идеалами. При этом чем дальше в некотором смысле полугруппа по своему строению от группы, тем больше у нее идеалов. Группы представляют собою крайний случай в этом отношении.

Полугруппа является группой тогда и только тогда, когда она не имеет собственных идеалов.

Действительно, если $\mathfrak{A}$ есть группа, то всякий ее элемент делится и слева и справа на любой элемент $\mathfrak{A}$. Поэтому, согласно 1.6, (ζ), никакой элемент $\mathfrak{A}$ не может содержаться в каком-либо собственном левом или правом идеале.

Если в $\mathfrak{A}$ нет собственных идеалов, то при любом $A \in \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}, \quad A\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

(так как $\mathfrak{A}A$ и $A\mathfrak{A}$ являются соответственно левым и правым идеалом $\mathfrak{A}$). Согласно III, 1.2, отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ есть группа.

1.9. Укажем несколько простейших свойств двусторонних идеалов. При этом, имея в виду особо важную роль двусторонних идеалов, приведем в том числе и некоторые такие свойства, справедливость которых непосредственно вытекает из свойств левых и правых идеалов, рассмотренных в 1.6.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа.

(α). *Объединение любого множества двусторонних идеалов полугруппы* $\mathfrak{A}$ *само является двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$.

(β). *Произведение двух двусторонних идеалов* $\mathfrak{A}$ *является двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$.

(γ). *Пересечение любого множества двусторонних идеалов* $\mathfrak{A}$, *если оно непусто, является двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$.

(δ). *Пересечение двух двусторонних идеалов* $\mathfrak{A}$ *является двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$.

Действительно, если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ двусторонние идеалы $\mathfrak{A}$, то их пересечение непусто, так как, очевидно, содержит их произведение $\mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2$. Но тогда, согласно ($\gamma$), это пересечение является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

(ε). *Подмножество* $\mathfrak{A}$, *состоящее из одного элемента* X, *является двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$ *тогда и только тогда, когда* X *есть нуль полугруппы* $\mathfrak{A}$.

(ζ). *Если* $\mathfrak{A}$ *обладает нулем* $O_{\mathfrak{A}}$, *то* $O_{\mathfrak{A}}$ *содержится во всяком двустороннем идеале* $\mathfrak{A}$.

(η). *Если* $\mathfrak{B}$ *есть подполугруппа* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{T}$ *двусторонний идеал* $\mathfrak{A}$, *то пересечение* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T}$, *если оно непусто, является двусторонним идеалом полугруппы* $\mathfrak{B}$.

(θ). *Если* $\mathfrak{T}$ *есть двусторонний идеал* $\mathfrak{A}$, *то множество* $\mathfrak{U}$, *состоящее из всех элементов* $U \in \mathfrak{A}$ *таких, что*

$$U\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T},$$

является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

Действительно, множество $\mathfrak{U}$ непусто, так как, очевидно, $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{T}$. Далее, при любых $U \in \mathfrak{U}$ и $A \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$(AU)\,\mathfrak{A} \subset A\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T},$$

$$(UA)\,\mathfrak{A} \subset U\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T},$$

т. е. AU, $UA \in \mathfrak{U}$.

1.10. Из 1.9 следует, что в множестве всех двусторонних идеалов Γ полугруппы $\mathfrak{A}$ можно несколькими естественными способами ввести действия, относительно каждого из которых оно будет полугруппой.

Из 1.9, (α) следует, что Γ относительно действия объединения множеств является коммутативной полугруппой.

Из 1.9, (β) следует, что Γ относительно действия умножения подмножеств полугруппы является полугруппой.

Из 1.9, (δ) следует, что Γ относительно действия пересечения множеств является коммутативной полугруппой.

1.11. Свойства указанных в 1.10 полугрупп всех двусторонних идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$ связаны со свойствами самой $\mathfrak{A}$.

Не останавливаясь подробнее на этой связи, рассмотрим в качестве иллюстрации вопрос о единицах и нулях этих полугрупп.

(α). Рассмотрим Γ относительно действия объединения множеств.

Сама $\mathfrak{A}$, являющаяся элементом Γ, очевидно, будет нулем полугруппы Γ.

Двусторонний идеал $\mathfrak{N}$ будет единицей Γ, если при объединении его с любым двусторонним идеалом $\mathfrak{T}$ мы получим опять $\mathfrak{T}$.

Но это имеет место лишь в том случае, когда $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{T}$. Таким образом, единицей Γ является такой двусторонний идеал $\mathfrak{N}$, который содержится во всяком двустороннем идеале $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что полугруппа Γ обладает единицей тогда и только тогда, когда пересечение множества всех двусторонних идеалов $\mathfrak{A}$ непусто.

(β). Рассмотрим Γ относительно действия умножения подмножеств полугруппы $\mathfrak{A}$.

Нулем полугруппы Γ будет такой двусторонний идеал $\mathfrak{N}$, что $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ для любого двустороннего идеала $\mathfrak{T}$. Но $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, следовательно, $\mathfrak{N}$ должен содержаться во всех двусторонних идеалах полугруппы $\mathfrak{A}$.

Если такой двусторонний идеал $\mathfrak{N}$ существует, т. е. пересечение множества всех двусторонних идеалов $\mathfrak{A}$ непусто, то он обязательно будет нулем полугруппы Γ. Действительно, для такого $\mathfrak{N}$ при любом двустороннем идеале $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ произведения $\mathfrak{N}\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ являются двусторон-

ними идеалами $\mathfrak{A}$, принадлежащими $\mathfrak{N}$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}.$$

Если двусторонний идеал $\mathfrak{M}$ есть единица полугруппы Γ, то, в частности, должно выполняться $\mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$. Но $\mathfrak{A}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ и потому $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$.

Таким образом, в Γ единицей может являться лишь сама полугруппа $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей, то $\mathfrak{A}$ обязательно является единицей полугруппы Γ. Действительно, для любого $\mathfrak{T} \in \Gamma$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{T}E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{T},$$

т. е. $\mathfrak{T}\mathfrak{A} = \mathfrak{T}$. Аналогично $\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$.

Если $\mathfrak{A}$ единицей не обладает, то в некоторых случаях $\mathfrak{A}$ может не являться единицей полугруппы Γ и, следовательно, Γ в этом случае вовсе не будет иметь единицы. Примером этого служит мультипликативная полугруппа всех четных натуральных чисел, для которой $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{A}$ не является единицей Γ.

(γ). Рассмотрим Γ относительно действия пересечения подмножеств.

Подобно предыдущему случаю Γ будет обладать нулем тогда и только тогда, когда непусто пересечение множества всех двусторонних идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$. Это пересечение и является нулем Γ.

Единицей Γ, как легко видеть, будет всегда сама полугруппа $\mathfrak{A}$.

1.12. Если Γ' есть совокупность всех двусторонних идеалов некоторого кольца $\mathfrak{A}$, то в Γ' рассматривается следующее действие (обычно называемое умножением идеалов). Если $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \in \Gamma'$, то $\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_1 \bigcirc \mathfrak{T}_2$ есть совокупность всех элементов из $\mathfrak{A}$, представимых в виде

$$T_1^{(1)}T_2^{(1)} + T_1^{(2)}T_2^{(2)} + \ldots + T_1^{(n)}T_2^{(n)}$$

$$\left(T_1^{(i)} \in \mathfrak{T}_1 \quad T_2^{(i)} \subset \mathfrak{T}_2; \quad i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Нетрудно убедиться, что относительно этого действия Γ' является полугруппой. Рассмотрение этой полугруппы идеалов играет важную роль в теории колец[1].

---

[1] См., например, Н. Джекобсон. Теория колец, ИЛ, 1947.

1.13. Многие свойства полугрупп могут быть охарактеризованы при помощи тех или иных свойств системы идеалов полугруппы. Как показал Исеки [11], важное свойство регулярности полугруппы (II, 6.1) может быть охарактеризовано таким образом. Здесь имеет место известное сходство с положением дел в теории колец[1].

Теорема. *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы для всякого ее левого идеала* $\mathfrak{L}$ *и всякого ее правого идеала* $\mathfrak{R}$ *имело место*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}.$$

Доказательство. 1) Так как $\mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ регулярна. Возьмем в $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$ произвольный элемент A. Для него найдется $X \in \mathfrak{A}$, такой, что $A = AXA$. Но благодаря $A \in \mathfrak{L}$ имеет место $XA \in \mathfrak{L}$.

Поэтому

$$A = AXA = A \cdot XA \in \mathfrak{R}\mathfrak{L}.$$

Следовательно, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ и потому $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$.

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ имеет место указанное свойство идеалов. Для $A \in \mathfrak{A}$ берем правый идеал $\mathfrak{R} = A\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}$. Согласно предположению,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{R}\mathfrak{A} = (A\mathfrak{A} \cup A)\mathfrak{A} \subset A\mathfrak{A}.$$

Следовательно, $A \in A\mathfrak{A}$.

Аналогично доказывается, что $A \subset \mathfrak{A}A$.

Но $A\mathfrak{A}$ есть правый идеал $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}A$ левый идеал $\mathfrak{A}$. Поэтому

$$A \in A\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}A = A\mathfrak{A}\mathfrak{A}A \subset A\mathfrak{A}A,$$

откуда следует, что при некотором $X \in \mathfrak{A}$ имеет место $A = AXA$.

1.14. ***Следствие.*** *Для того чтобы коммутативная полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы для всякого ее идеала* $\mathfrak{T}$ *имело место*

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}.$$

---

[1] Ковач (L. Kovács). A note on regular rings, Publ. Math. Debrecen, 4 (1956), 465—468.

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ регулярна, то, согласно 1.13,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}.$$

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ выполнено указанное свойство идеалов. Для произвольных ее идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ их пересечение $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ само является идеалом. Поэтому

$$\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 = (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2) \cdot (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2) \subset \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2,$$

а так как всегда $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 \supset \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$, то мы получаем $\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$. Отсюда, согласно 1.13, следует регулярность $\mathfrak{A}$.

§ 2. О цепях подмножеств произвольного множества

2.1. Рассмотрим некоторые общие понятия и свойства подмножеств произвольного множества. Их выбор определен нашим желанием вывести с их помощью в последующих параграфах ряд свойств идеалов полугрупп, которые путем непосредственных построений были получены Н. Н. Воробьевым [3], [6] и Грином [1].

Пусть Γ есть некоторая непустая совокупность непустых подмножеств некоторого множества $\mathfrak{M}$.

Определение. *Множество* $M \in \Gamma$ *называется минимальным в* Γ, *если ни одно из его собственных подмножеств не принадлежит* Γ.

Множество $M \in \Gamma$ *называется универсально минимальным в* Γ, *если оно является подмножеством всякого множества, принадлежащего* Γ.

Аналогично определяются *максимальные и универсально максимальные множества в* Γ.

2.2. В дальнейшем, в продолжении всего этого параграфа, не оговаривая этого особо, будем понимать под Γ произвольную непустую совокупность непустых подмножеств множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющую условиям:

(α) само множество $\mathfrak{M}$ принадлежит Γ;

(β) объединение любой непустой совокупности множеств из Γ принадлежит Γ;

(γ) пересечение любой совокупности множеств Γ, если оно непусто, принадлежит Γ.

2.3. Если пересечение M_0 всех множеств из Γ непусто, то M_0, очевидно, является универсально минимальным множеством в Γ. В этом случае Γ не имеет других минимальных множеств, кроме M_0.

Если указанное пересечение M_0 пусто, то в Γ, как нетрудно убедиться, не существует универсально минимального множества.

2.4. Очевидно, нижеследующее отношение в $\mathfrak{M}$ является эквивалентностью.

Определение. *Элементы x и y из $\mathfrak{M}$ назовем* Γ-*эквивалентными, если всякое множество из* Γ, *содержащее один из этих элементов, обязательно содержит и второй.*

Класс Γ-*эквивалентных элементов называется* Γ-*слоем.*

2.5. $\mathfrak{M}$ *является непересекающимся объединением классов* Γ-*эквивалентных между собой элементов, т. е. непересекающимся объединением всех своих* Γ-*слоев.*

2.6. Для непустого подмножества N множества $\mathfrak{M}$ назовем его Γ-*оболочкой* пересечение всех множеств из Γ, содержащих N. Таковые, конечно, имеются, ибо само $\mathfrak{M}$ принадлежит Γ. Очевидно, Γ-оболочка есть универсально минимальное множество в совокупности тех множеств из Γ, которые содержат N.

2.7. ***Теорема.*** *Два элемента x и y из $\mathfrak{M}$ принадлежат одному и тому же* Γ-*слою тогда и только тогда, когда их* Γ-*оболочки совпадают.*

Доказательство. 1) Пусть Γ-оболочки элементов x и y совпадают. Если некоторое множество $M \in \Gamma$ содержит x, то оно содержит и Γ-оболочку x, а следовательно, Γ-оболочку y и потому сам y. Аналогично обратное. Таким образом, x и y оказываются Γ-эквивалентными.

2) Пусть x и y Γ-эквивалентны. Γ-оболочка x, поскольку она принадлежит Γ и содержит x, должна содержать и y. Отсюда следует, что Γ-оболочка x содержит Γ-оболочку y. Аналогично и обратное. Следовательно, Γ-оболочки x и y совпадают.

2.8. К понятию Γ-слоя возможен еще один подход, отличный от тех, какие были использованы в 2.4 и 2.7.

Определение. *Два различных между собой множества из* Γ *называются соседними в* Γ, *если одно из них* M_1

содержит второе M_2, *причем, кроме самих* M_1 *и* M_2, *в* Γ *не существует такого* M', *что*

$$M_1 \supset M' \supset M_2.$$

2.9. ***Теорема.*** *Множество* $N \subset \mathfrak{M}$ *будет* Γ*-слоем тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий*:

1) N *принадлежит* Γ *и является минимальным множеством в* Γ;

2) *в* Γ *найдутся два таких соседних множества* $M_1 \supset M_2$, *что*

$$N = M_1 \setminus M_2.$$

Доказательство. 1) Пусть N есть некоторый Γ-слой. Обозначим через M_1 Γ-оболочку N и через M_2 объединение всех множеств из Γ, содержащихся в M_1 и не имеющих общих элементов с N (M_2 может быть и пустым).

Очевидно, $M_1 \setminus M_2 \supset N$. Пусть $x \in N$ и $y \in M_1 \setminus M_2$. Если x содержится в некотором множестве $M' \in \Gamma$, то, согласно определению Γ-слоя, $M' \supset N$, т. е. $M' \supset M_1$, а потому $M' \ni y$. Если y содержится в некотором множестве $M'' \in \Gamma$, то $M_1 \cap M'' \ni y$. Так как $y \overline{\in} M_2$, то $M_1 \cap M''$ не содержится в M_2. Поэтому $M_1 \cap M''$ обладает элементом z, принадлежащим N. Но тогда $M_1 \cap M'' \ni x$, т. е. $x \in M''$. Из сказанного следует, что x и y Γ-эквивалентны. Отсюда вытекает $M_1 \setminus M_2 \subset N$. Таким образом,

$$N = M_1 \setminus M_2.$$

Из определения Γ-слоя следует, что не существует такого $M_3 \in \Gamma$, что $M_1 \supset M_3 \supset M_2$, причем $M_3 \neq M_1$, $M_3 \neq M_2$. Если M_2 пусто, то $N = M_1$ оказывается минимальным множеством в Γ.

2) Если M есть минимальное в Γ множество, то всякое множество M' из Γ или содержит M, или не имеет общих элементов с M. Действительно, в ином случае $M \cap M'$ являлось бы множеством из Γ, содержащимся в M и отличным от M. Таким образом, всякие два элемента из M Γ-эквивалентны. Что касается элементов, не принадлежащих M, то они не могут быть Γ-эквивалентными с элементами из M.

Пусть множества M_1 и M_2 соседние в Γ, причем $M_1 \supset M_2$.

Ни один элемент из $M_1 \setminus M_2$, очевидно, не может быть Γ-эквивалентен ни с каким элементом, не содержащимся в $M_1 \setminus M_2$. Если мы покажем, что всякие два элемента из $M_1 \setminus M_2$ Γ-эквивалентны между собой, то это и будет означать, что $M_1 \setminus M_2$ есть Γ-слой. Допустим противное. Пусть некоторые два элемента x и y из $M_1 \setminus M_2$ не являются Γ-эквивалентными. Это значит, что один из них x содержится в некотором множестве $M' \in \Gamma$, в котором не содержится y. Но тогда множество из Γ

$$M'' = (M' \cap M_1) \cup M_2$$

содержится в M_1 и содержит M_2. При этом оно отлично от M_1, так как не содержит y, и отлично от M_2, так как содержит x. Существование такого множества противоречит тому, что M_1 и M_2 соседние.

2.10. К понятию Γ-слоя возможен еще один подход, связанный понятием Γ-цепи.

Определение. *Непустая совокупность $\Sigma \subset \Gamma$ называется Γ-цепью, если из двух любых множеств, принадлежащих Σ, одно обязательно является подмножеством другого.*

Γ-цепь Σ называется главной Γ-цепью, если не существует такой отличной от Σ Γ-цепи Σ', что $\Sigma \subset \Sigma'$.

2.11. ***Теорема.*** *Всякая главная Γ-цепь Σ сама обладает свойствами* 2.2, (α), (β), (γ).

Доказательство. Присоединив к Σ множество $\mathfrak{M}$, мы, очевидно, получим Γ-цепь, содержащую Σ. Она должна совпадать с Σ. Следовательно, $\mathfrak{M} \in \Sigma$.

Пусть M есть объединение некоторых множеств из Σ.

$$M = \bigcup_{\lambda} M_\lambda.$$

По свойству Γ M принадлежит Γ.

Возьмем произвольное множество $\mathfrak{L}$ из Σ. Если $\mathfrak{L}$ содержится в некоторой компоненте M_ξ нашего объединения $\mathfrak{L} \subset M_\xi$, то $\mathfrak{L} \subset M$. Если же $\mathfrak{L}$ не содержится ни в одной из компонент M_λ, то, по свойству Γ-цепи, $\mathfrak{L}$ должно содержать все M_λ и, следовательно, $\mathfrak{L} \supset M$. Отсюда следует, что совокупность, состоящая из Σ и из множества M, будет Γ-цепью, содержащей Σ. Она должна совпадать с Σ. Следовательно, $M \in \Sigma$.

Аналогично, если M' есть непустое пересечение некоторых множеств из Σ, то оно или содержит, или содержится во всяком множестве из Σ. Поэтому, присоединив к Σ множество M', мы получим Γ-цепь, содержащую Σ. Она должна совпадать с Σ, откуда следует $M' \in \Sigma$.

2.12. Роль главных Γ-цепей определяется тем, что любая Γ-цепь всегда может быть дополнена до главной Γ-цепи.

Теорема. *Для любой Γ-цепи Σ всегда найдется такая главная Γ-цепь Σ', что $\Sigma \subset \Sigma'$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}$ есть совокупность всех Γ-цепей, содержащих данную Γ-цепь Σ. Если $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, причем $\mathfrak{Q}$ такова, что из двух любых Γ-цепей, принадлежащих $\mathfrak{Q}$, всегда одна содержится в другой, то $\Sigma_{\mathfrak{Q}}$ — объединение всех Γ-цепей из $\mathfrak{Q}$ — само будет Γ-цепью. Действительно, пусть M_1, $M_2 \in \Sigma_{\mathfrak{Q}}$. Тогда в $\mathfrak{Q}$ найдутся Γ-цепи Σ_1 и Σ_2, такие, что $M_1 \in \Sigma_1$ и $M_2 \in \Sigma_2$. Если $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, то множества M_1 и M_2 оба принадлежат цепи Σ_2 и потому одно из них является подмножеством другого. Это и означает, что $\Sigma_{\mathfrak{Q}}$ есть Γ-цепь.

Благодаря сказанному мы можем применить к $\mathfrak{P}$ лемму III, 4.6. Согласно этой лемме, в $\mathfrak{P}$ найдется такая Γ-цепь Σ', которая не содержится ни в какой другой Γ-цепи из $\mathfrak{P}$. Очевидно, Σ' и будет искомой главной Γ-цепью.

2.13. Благодаря теореме 2.11 для главной Γ-цепи Σ применимы все определения и результаты, изложенные выше применительно к самой совокупности Γ. Очевидно, Σ для самой совокупности Σ является Σ-цепью. При этом она, очевидно, есть главная Σ-цепь и никаких других, отличных от самой Σ, главных Σ-цепей не существует.

Рассмотрение главной Γ-цепи Σ полезно в связи с тем, что понятия Γ-слоя и Σ-слоя оказываются эквивалентными.

Теорема. *Если Σ есть главная Γ-цепь, то каждой Γ-слой является Σ-слоем, а каждый Σ-слой является Γ-слоем.*

Доказательство. 1) Предположим, что в некотором Γ-слое N найдутся два элемента, принадлежащих двум различным Σ-слоям. Это значит, что один из этих элементов содержится в некотором множестве N' из Σ, в котором не содержится второй из этих элементов y. Но это невозможно, ибо x и y Γ-эквивалентны, а $N' \in \Sigma \subset \Gamma$.

2) Теперь предположим, что в некотором Σ-слое P найдутся два элемента, принадлежащие двум различным Γ-слоям. Это значит, что один из этих элементов u

содержится в некотором множестве M из Γ, в котором не содержится второй из этих элементов v.

P не может быть минимальным в Σ множеством. Действительно, иначе, присоединив к Σ множество $P \cap M$, которое непусто, так как содержит u, и отлично от P, так как не содержит v, мы получили бы новую Γ-цепь, содержащую Σ и отличную от Σ. Но это противоречило бы тому, что Σ есть главная Γ-цепь.

Так как P не есть минимальное в Σ множество, то, согласно 2.9, в Σ найдутся два таких соседних в Σ множества M_1 и M_2, что

$$P = M_1 \setminus M_2.$$

Множество из Γ

$$M'' = (M \cap M_1) \cup M_2$$

содержится в M_1 и содержит M_2. Оно отлично от M_2, так как содержит u, и отлично от M_1, так как не содержит v. Следовательно, M'' не принадлежит Σ. Но тогда, присоединив к Σ множество M'', мы, очевидно, получили бы новую Γ-цепь, содержащую Σ и отличную от Σ, что невозможно.

3) Согласно 2.5, множество $\mathfrak{M}$ представляется в виде объединения всех Γ-слоев и, согласно 2.11, в виде объединения всех Σ-слоев. Если мы возьмем одну из компонент первого разложения N и одну из компонент второго разложения P, то, как следует из рассуждений, проведенных в двух первых частях доказательства, N и P будут или совпадать, или не будут иметь общих элементов. Отсюда непосредственно следует, что оба рассматриваемых объединения состоят из одних и тех же компонент. Таким образом, каждый Γ-слой входит во второе объединение, т. е. является некоторым Σ-слоем, и наоборот.

2.14. Из теоремы 2.13 следует, что все Γ-слои могут быть получены исходя из любой главной Γ-цепи.

Следствие. *Если Σ есть некоторая главная Γ-цепь, то множество N будет Γ-слоем тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий.*

1) *N принадлежит Σ и является в Σ минимальным (а потому и универсально минимальным) множеством.*

2) *В Σ найдутся два таких соседних в Σ множества $M_1 \supset M_2$, что*

$$N = M_1 \setminus M_2.$$

2.15. Отметим также следующее следствие из 2.13.

Следствие. *Если* Σ_1 *и* Σ_2 *есть две главные* Γ*-цепи, то совокупность всех* Σ_1*-слоев совпадает с совокупностью всех* Σ_2*-слоев.*

Действительно, согласно 2.13, каждая из совокупностей всех Σ_1-слоев и всех Σ_2-слоев совпадает с совокупностью всех Γ-слоев.

2.16. При рассмотрении совокупности Γ во многих случаях важную роль играют условия минимальности и максимальности. Говорят, что Γ удовлетворяет *условию минимальности*, если всякое непустое подмножество Γ' множества Γ обладает минимальным в Γ' множеством. Из определения непосредственно следует, что в Γ, удовлетворяющем свойству минимальности, всякая Γ-цепь, образующая убывающую последовательность

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \ldots,$$

обладает тем свойством, что, начиная с некоторого n, все члены ее совпадают. Нетрудно убедиться и в обратном. Пусть в Γ выполнено указанное условие об убывающих последовательностях. В произвольном $\Gamma' \subset \Gamma$ возьмем произвольное множество $M_1 \in \Gamma'$. Если M_1 не минимально в Γ', то возьмем какое-нибудь $M_2 \in \Gamma'$, такое, что $M_2 \subset M_1$, $M_2 \neq M_1$. Затем, исходя из M_2, выберем $M_3 \subset M_2$, $M_3 \neq M_2$ и т. д. Согласно предположению, построение такой последовательности должно оборваться на некотором члене M_n. Очевидно, $M_n \in \Gamma'$ будет минимальным в Γ'.

2.17. Аналогично определяется *условие максимальности* и устанавливается его эквивалентность с условием стабилизированности всякой растущей последовательности.

Также необходимым и достаточным условием для выполнения условия максимальности является требование, чтобы в каждом $M \in \Gamma$ нашлось такое конечное подмножество $M' \subset M$, что Γ-оболочка M' равна M.

Действительно, пусть выполнено условие максимальности. Возьмем в множестве $M \in \Gamma$ произвольный элемент x_1 и рассмотрим его Γ-оболочку X_1. Если $X_1 \neq M$, то возьмём в $M \setminus X_1$ элемент x_2 и рассмотрим Γ-оболочку X_2 множества $\{x_1, x_2\}$. Затем строим X_3 и т. д. Мы получаем растущую последовательность множеств из Γ

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots,$$

Так как $X_{i-1} \neq X_i$, то последовательность должна оборваться на некотором члене X_m, что означает, что $M = X_m$, т. е. M есть Г-оболочка конечного множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Пусть теперь каждое множество из Г есть Г-оболочка некоторого конечного множества.

Рассмотрим произвольную растущую последовательность множеств из Г: $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$

Множество $N = \bigcup_n M_n$ принадлежит Г и является Г-оболочкой некоторого конечного множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. При некотором k все x_i содержатся в M_k. Следовательно, $M_k = N \supset M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. $M_k = M_{k+1} = \ldots$

2.18. Совокупность Г удовлетворяет одновременно и условию минимальности и условию максимальности только в том случае, когда она конечна. Действительно, благодаря условию минимальности в Г должно существовать минимальное множество M_1. В совокупности всех множест из Г, содержащих M_1, но отличных от M_1, должно найтись минимальное множество M_2. Повторяя рассуждение, получаем растущую последовательность, которая должна оборваться:

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n.$$

Из построения следует, что нами получена главная Г-цепь. Количество ее слоев конечно. Отсюда благодаря 2.13 следует, что и количество всех Г-слоев конечно. Так как каждое множество из Г есть объединение некоторых Г-слоев, то и количество всех множеств из Г тем самым является конечным.

§ 3. Главные идеалы и идеальные слои

3.1. Как уже было сказано, рассмотрение свойств совокупностей подмножеств произвольного множества, чему был посвящен предыдущий параграф, нужно нам для того, чтобы применить полученные там результаты к совокупностям идеалов полугрупп. Соответствующие свойства идеалов были получены частью Грином [1], частью Н. Н. Воробьевым [3], [6].

Возьмем в качестве $\mathfrak{M}$ множество всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$ и в качестве Г совокупность некоторых идеалов $\mathfrak{A}$, такую, что сама $\mathfrak{A}$ принадлежит Г и объединение любой совокупности идеалов из Г, так же как и пересечение, если

оно непусто, принадлежат Г. Тогда для такой совокупности идеалов автоматически оказываются выполненными все результаты, полученные в § 2.

3.2. Нас будут интересовать три совокупности указанного типа:

(α) *совокупность всех левых идеалов полугруппы*;

(β) *совокупность всех правых идеалов полугруппы*;

(γ) *совокупность всех двусторонних идеалов полугруппы*.

То, что каждая из них обладает указанным выше свойством, следует из 1.6, (α), (γ), (δ).

Для каждой из этих совокупностей идеалов справедливы все результаты, полученные в § 2 для совокупности Г.

Каждый из них, сформулированный для совокупности (α), или (β), или (γ), является важным свойством идеалов полугрупп. Очевидно, нет необходимости подробно переформулировать результаты § 2 для указанных совокупностей идеалов, так как это делается без малейшего труда и совершенно автоматически.

3.3. Применительно к идеалам термины, введенные в предыдущем параграфе, соответственно изменяются.

Пусть Г есть совокупность всех левых идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$.

Идеал, минимальный в Г, называется *минимальным левым идеалом* $\mathfrak{A}$. Г-эквивалентность называется *левоидеальной эквивалентностью*. Г-слой называется *левоидеальным слоем*. Г-оболочка называется *левоидеальной оболочкой*.

Аналогично строятся соответствующие понятия, когда Г есть совокупность всех правых идеалов $\mathfrak{A}$ или совокупность всех двусторонних идеалов.

3.4. ***Теорема.*** *Если* $\mathfrak{N}$ *есть непустое подмножество полугруппы* $\mathfrak{A}$, *то*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}$$

есть левоидеальная оболочка $\mathfrak{N}$;

$$\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$$

есть правоидеальная оболочка $\mathfrak{N}$;

$$\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$$

есть двустороннеидеальная оболочка $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Так как

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N},$$

то $\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий $\mathfrak{N}$. Но всякий левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий $\mathfrak{N}$, должен содержать и $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}$ есть пересечение множества всех левых идеалов $\mathfrak{A}$, содержащих $\mathfrak{N}$.

Аналогично рассуждение для правых идеалов.

Так как

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \subset$$
$$\subset \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N},$$

то $\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий $\mathfrak{N}$. Аналогично убеждаемся, что он является и правым идеалом. Легко видеть, что всякий двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, содержащий $\mathfrak{N}$, должен содержать и $\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{N}$. Таким образом, этот двусторонний идеал оказывается пересечением множества всех двусторонних идеалов $\mathfrak{A}$, содержащих $\mathfrak{N}$.

3.5. В случае, когда $\mathfrak{A}$ обладает единицей, выражения для идеальных оболочек упрощаются, поскольку

$$\mathfrak{A}\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N},\ \mathfrak{N}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{N},\ \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{N},\ \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{N}\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{N}.$$

Следствие. *Если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей, то $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ есть левоидеальная оболочка $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$. $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ есть правоидеальная оболочка и $\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ есть двустороннеидеальная оболочка.*

3.6. Особо важен случай, когда подмножество $\mathfrak{N}$ состоит из одного элемента.

Определение. *Левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, являющийся левоидеальной оболочкой одного из ее элементов, называется главным левым идеалом.*

Аналогично определяются *главный правый идеал и главный двусторонний идеал.*

Из 3.4 и 3.5 непосредственно следует, что главный левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A}X \cup X,$$

где X некоторый элемент $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ обладает единицей, то

$$\mathfrak{A}X \cup X = \mathfrak{A}X.$$

Аналогично главный правый идеал имеет вид $X\mathfrak{A} \cup X$ или $X\mathfrak{A}$ при наличии единицы. Главный двусторонний идеал имеет вид

$$\mathfrak{A}X\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}X \cup X\mathfrak{A} \cup X$$

или $\mathfrak{A}X\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ имеет единицу.

3.7. Соотношение включения между главными левыми идеалами элементов полугруппы определяет важное отношение делимости справа (аналогично для делимости слева).

Теорема. *Пусть A и B есть два различных элемента полугруппы $\mathfrak{A}$. Элемент A делится справа на элемент B в том и только в том случае, когда левоидеальная оболочка элемента A содержится в левоидеальной оболочке элемента B.*

Доказательство. Если при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$A = XB,$$

то

$$\mathfrak{A}A \cup A = \mathfrak{A}XB \cup XB \subset \mathfrak{A}B \cup B.$$

С другой стороны, если

$$\mathfrak{A}A \cup A \subset \mathfrak{A}B \cup B,$$

то, учитывая $A \neq B$, имеем

$$A \subset \mathfrak{A}B,$$

т. е. при некотором $X \in \mathfrak{A}$ должно иметь место

$$A = XB.$$

3.8. *Согласно 2.5, полугруппа может быть представлена как непересекающееся объединение всех своих левоидеальных слоев*, а также как *непересекающееся объединение всех правоидеальных слоев* и как *непересекающееся объединение всех двустороннеидеальных слоев*. Как было показано в предыдущем параграфе, идеальный (лево, право или двусторонне) слой может быть определен несколькими различными способами. Согласно 2.7, *два элемента A и B полугруппы $\mathfrak{A}$ принадлежат одному и тому же левоидеальному слою, если совпадают левоидеальные оболочки*. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы A содержался в левоидеальной оболочке B, а B

в левоидеальной оболочке A. Можно также использовать теорему 3.7.

Для того чтобы два различных элемента полугруппы содержались в одном и том же левоидеальном слое, необходимо и достаточно, чтобы каждый из них делился справа на другой.

Разумеется, аналогичное утверждение справедливо для правоидеальных слоев.

3.9. Если левый идеал $\mathfrak{L}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержит некоторый элемент X, то, по определению левоидеальной эквивалентности, $\mathfrak{L}$ будет содержать и все элементы, левоидеально эквивалентные с X. Отсюда следует, что левый идеал $\mathfrak{L}$ является непересекающимся объединением некоторых левоидеальных слоев полугруппы. Конечно, в общем случае не всякое объединение левоидеальных слоев является левым идеалом.

Левый идеал $\mathfrak{L}$ может быть также получен из главных левых идеалов. Для каждого $X \in \mathfrak{L}$ левоидеальная оболочка X содержится в $\mathfrak{L}$ и содержит X. Поэтому $\mathfrak{L}$ есть объединение левоидеальных оболочек всех элементов X, содержащихся в $\mathfrak{L}$. Разумеется, и обратное: любое объединение главных левых идеалов является левым идеалом. Если в таком объединении участвуют левоидеальная оболочка элемента X и левоидеальная оболочка элемента Y, причем X делится справа на Y, то, согласно 3.7, левоидеальную оболочку элемента X можно исключить из объединения. Таким образом, в некоторых случаях (но, конечно, не всегда), например, когда $\mathfrak{A}$ конечна, каждый левый идеал можно представить в виде объединения главных левых идеалов, таких, что никакие два из них не являются левоидеальными оболочками элементов, из которых один делится на другой справа. Очевидно, в таком объединении уже нельзя выкинуть ни один из входящих в него главных левых идеалов. Представление левого идеала $\mathfrak{L}$ в виде указанного объединения $\mathfrak{L} = \bigcup_{\nu} \mathfrak{T}_\nu$ обладает следующим важным свойством. *Если* $\mathfrak{L}$ *представлен в виде какого-нибудь объединения главных левых идеалов* $\mathfrak{L} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{U}_\xi$, *то в число компонент* $\mathfrak{U}_\xi$ *обязательно входят все* $\mathfrak{T}_\nu$. Действительно, если $\mathfrak{T}_\nu$ есть левоидеальная оболочка элемента T_ν, то T_ν содержится в не-

котором $\mathfrak{U}_\mu$, который является левоидеальной оболочкой некоторого элемента A_μ. Но A_μ должен содержаться в некотором $\mathfrak{T}_\lambda$. По свойству левоидеальных оболочек мы получаем $\mathfrak{T}_\nu \subset \mathfrak{U}_\mu$, $\mathfrak{U}_\mu \subset \mathfrak{T}_\lambda$, т. е. $\mathfrak{T}_\nu \subset \mathfrak{T}_\lambda$. Согласно предположению, это возможно лишь при $\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{T}_\lambda$, а тогда $\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{U}_\mu$. Из доказанного, в частности, следует, что всякий левый идеал может обладать не более чем одним представлением в виде объединения главных левых идеалов, таких, что никакие два из них не являются левоидеальными оболочками элементов, из которых один делится на другой справа.

Аналогично обстоит дело и с правыми идеалами.

Также и двусторонними идеалами являются всевозможные объединения главных двусторонних идеалов.

3.10. Как было обнаружено в работе Манна и Пенроза [1] (см. также Миллера и Клиффорда [1]), наличие и свойства идемпотентов в левоидеальных и правоидеальных слоях связано с некоторыми важными свойствами полугруппы.

Прежде всего мы рассмотрим связь между идемпотентами, содержащимися в одном и том же левоидеальном слое.

Теорема. *Если идемпотенты I_1 и I_2 оба содержатся в одном и том же левоидеальном слое, то каждый из них является левым нулем для другого. Если они оба содержатся в одном и том же правоидеальном слое, то каждый из них является правым нулем для другого.*

Доказательство. I_2 содержится в левом идеале $\mathfrak{A}I_2$. Поскольку I_1 принадлежит к тому же левоидеальному слою, что и I_2, он также должен содержаться в этом левом идеале, т. е. при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$I_1 = XI_2.$$

Но тогда

$$I_1 I_2 = XI_2 \cdot I_2 = XI_2 = I_1.$$

3.11. ***Следствие.*** *Никакие два различных идемпотента, содержащихся в одном и том же левоидеальном слое, не могут быть перестановочны между собой.*

Действительно, согласно предыдущему, для указанных идемпотентов I_1 и I_2 имеем

$$I_1 I_2 = I_1, \quad I_2 I_1 = I_2$$

и потому при $I_1 I_2 = I_2 I_1$ получаем $I_1 = I_2$.

3.12. ***Теорема.*** *Для того чтобы элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ был регулярен (II, 6.1), необходимо и достаточно, чтобы в левоидеальном слое, содержащем A, имелся идемпотент.*

Доказательство. 1) Если A регулярен, то при некотором $B \in \mathfrak{A}$

$$ABA = A, \quad (BA)^2 = BA.$$

Так как $A = ABA$ делится справа на BA, а BA делится справа на A, то благодаря 3.8 A и идемпотент BA лежат в одном и том же левоидеальном слое.

2) Если идемпотент I лежит в том же левоидеальном слое, что и A, то при некоторых B, $C \in \mathfrak{A}$

$$I = BA, \quad A = CI.$$

Отсюда получаем

$$ABA = AI = CI \cdot I = CI = A,$$

т. е. A оказывается регулярным.

3.13. Из теоремы непосредственно следует, что во всяком левоидеальном (аналогично и в правоидеальном) слое либо все элементы регулярны, либо все нерегулярны. Если все левоидеальные слои содержат идемпотенты, то и все правоидеальные слои содержат идемпотенты, и наоборот. Наличие идемпотентов во всех левоидеальных слоях является необходимым и достаточным условием того, чтобы полугруппа была регулярной.

3.14. ***Теорема.*** *Для того чтобы полугруппа была инверсной* (II, 7.2), *необходимо и достаточно, чтобы в каждом ее левоидеальном слое содержался один единственный идемпотент и в каждом правоидеальном слое содержался один единственный идемпотент.*

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа, то она регулярна и потому, согласно 3.12, в каждом ее левоидеальном слое и в каждом правоидеальном слое должны иметься идемпотенты.

Так как все идемпотенты инверсной полугруппы перестановочны (II, 7.4), то, согласно 3.11, ни в каком слое не может содержаться более одного идемпотента.

2) Пусть в каждый левоидеальный слой и каждый правоидеальный слой полугруппы $\mathfrak{A}$ имеют ровно по одному идемпотенту. Согласно 3.12, $\mathfrak{A}$ регулярна.

Предположим, что и элемент B_1 и элемент B_2 оба регулярно сопряжены с некоторым элементом $A \in \mathfrak{A}$.

Так как B_iA и A (равный AB_iA) делятся друг на друга справа, то благодаря 3.8 идемпотент B_iA содержится в том же левоидеальном слое, что и A. Следовательно, должно иметь место $B_1A = B_2A$. Аналогично рассматривая правоидеальные слои, получаем $AB_1 = AB_2$. Благодаря этому

$$B_1 = B_1AB_1 = B_2AB_1 = B_2AB_2 = B_2.$$

Таким образом, произвольный элемент A имеет лишь один регулярно сопряженный с ним элемент.

3.15. При помощи доказанной теоремы можно также ослабить условие, выделяющее инверсные полугруппы из класса всех регулярных полугрупп.

Следствие. *Если в регулярной полугруппе ни один идемпотент не имеет другого регулярно сопряженного с ним элемента, кроме самого себя, то полугруппа является инверсной.*

Доказательство. Согласно 3.12, в каждом левоидеальном слое имеются идемпотенты. Предположим, что в некотором из них содержится два идемпотента I_1 и I_2. Согласно 3.10,

$$I_1I_2 = I_1, \quad I_2I_1 = I_2.$$

Отсюда получаем

$$I_1I_2I_1 = I_1I_1 = I_1, \quad I_2I_1I_2 = I_2I_2 = I_2,$$

т. е. I_1 и I_2 регулярно сопряжены. Согласно условию, это возможно лишь при $I_1 = I_2$. Аналогично рассуждение для правоидеальных слоев. Согласно теореме 3.14, полугруппа инверсна.

3.16. ***Следствие.*** *Если в регулярной полугруппе* $\mathfrak{A}$ *для всякого идемпотента* I *равенство*

$$IXI = I \quad (X \in \mathfrak{A})$$

соблюдается только при $X = I$, *то* $\mathfrak{A}$ *является группой.*

Доказательство. Согласно 3.15, $\mathfrak{A}$ является инверсной полугруппой. Отсюда следует, что все ее идемпотенты перестановочны между собой (II, 7.4).

Пусть I_1 и I_2 являются идемпотентами $\mathfrak{A}$. Так как они перестановочны, то и I_1I_2 является идемпотентом. Очевидно,

$$(I_1I_2)\,I_1\,(I_1I_2) = I_1I_2, \quad (I_1I_2)\,I_2\,(I_1I_2) = I_1I_2.$$

Поэтому $I_1 = I_1 I_2$ и $I_2 = I_1 I_2$, т. е. $I_1 = I_2$. Следовательно, в $\mathfrak{A}$ имеется лишь единственный идемпотент и благодаря II, 6.10, (β) $\mathfrak{A}$ является группой.

3.17. Теорема 3.14 позволяет выяснить строение систем главных левых идеалов и главных правых идеалов инверсной полугруппы (II, 7.2)

Пусть $\mathfrak{A}$ есть инверсная полугруппа и $\mathfrak{H}$ коммутативная подполугруппа ее идемпотентов (II, 7.4). Пусть $\mathfrak{L}$ есть произвольный главный левый идеал $\mathfrak{A}$, являющийся левоидеальной оболочкой элемента A. В том же левоидеальном слое, в котором содержится A, согласно 3.14, должен находиться некоторый идемпотент I. Так как левоидеальные оболочки A и I должны совпадать, то

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I \cup I = \mathfrak{A}I.$$

Если идемпотенты I_1 и I_2 различны, то равенство $\mathfrak{A}I_1 = \mathfrak{A}I_2$ невозможно, ибо оно означало бы, что I_1 и I_2 лежат в одном и том же левоидеальном слое, что противоречит 3.14.

Таким образом, между идемпотентами $\mathfrak{A}$ и ее главными левыми идеалами устанавливается взаимно однозначное соответствие

$$I \sim \mathfrak{A}I.$$

Аналогично устанавливается соответствующее взаимно однозначное соответствие между идемпотентами и главными правыми идеалами

$$I \sim I\mathfrak{A}.$$

Соответствия эти таковы, что они сохраняют отношения частичного упорядочения, определенные в множествах главных идеалов и в $\mathfrak{H}$. В первом из этих множеств упорядоченность определяется как отношение включения, а в $\mathfrak{H}$ нижеследующим образом.

Полагаем $I_1 \geqslant I_2$, если $I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_2$.

Действительно, если

$$\mathfrak{A}I_1 \supset \mathfrak{A}I_2,$$

то при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$XI_1 = I_2.$$

Откуда следует:

$$I_2 I_1 = XI_1 \cdot I_1 = XI_1 = I_2.$$

Обратно, при $I_2 I_1 = I_2$ имеем

$$\mathfrak{A} I_2 = \mathfrak{A} I_2 I_1 \subset \mathfrak{A} I_1.$$

3.18. Так как для $I_1, I_2 \in \mathfrak{H}$

$$I_3 = I_1 I_2 \in \mathfrak{H}, \quad I_1 I_3 = I_3, \quad I_2 I_3 = I_3,$$

то из доказанного в 3.17 следует:

$$\mathfrak{A} I_3 \subset \mathfrak{A} I_1, \quad \mathfrak{A} I_3 \subset \mathfrak{A} I_2.$$

Но с другой стороны, если $X \in \mathfrak{A} I_1 \cap \mathfrak{A} I_2$, то при некоторых $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$

$$X = A_1 I_1 = A_2 I_2.$$

И так как I_1 и I_2 перестановочны между собой (II, 7.4), то

$$X = A_2 I_2 = A_2 I_2 I_2 = XI_2 = A_1 I_1 I_2 = A_1 I_1 I_1 I_2 = XI_1 I_2 = XI_3.$$

Это означает что $X \in \mathfrak{A} I_3$.
Таким образом, мы показали, что

$$\mathfrak{A} I_1 \cap \mathfrak{A} I_2 = \mathfrak{A} I_3.$$

Оказалось, что пересечение главных левых идеалов инверсной полугруппы само является главным левым идеалом. Из этого следует, что относительно действия пересечения совокупность всех главных левых идеалов образует коммутативную полугруппу идемпотентов. Из доказанного равенства

$$\mathfrak{A} I_1 \cap \mathfrak{A} I_2 = \mathfrak{A} (I_1 I_2)$$

следует, что соответствие

$$\mathfrak{A} I \sim I$$

является изоморфизмом между этой полугруппой и подполугруппой всех идемпотентов $\mathfrak{H}$ полугруппы $\mathfrak{A}$.

§ 4. Двустороннеидеальные цепи

4.1. Свойства идеальных слоев полугруппы тесно связаны со свойствами цепей идеалов.

Если Γ есть совокупность всех двусторонних идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$, то Γ-цепь называется *двустороннеидеальной цепью*.

Аналогично определяются *левоидеальные цепи и правоидеальные цепи*.

Из 2.12 следует, что *всякая двустороннеидеальная цепь может быть дополнена до главной двустороннеидеальной цепи*. Аналогично для левоидеальных и правоидеальных цепей.

Свойства, связанные с выполнением условий минимальности и максимальности в совокупности всех левых, или правых, или двусторонних идеалов, формулируются непосредственно исходя из свойств, рассмотренных в 2.16, 2.17, 2.18.

4.2. К области изучения идеальных цепей относится и рассмотрение соседних идеалов (2.8). Действительно, тот факт, что два двусторонних идеала являются соседними, равносилен тому, что они образуют двустороннеидеальную цепь, обладающую тем свойством, что не существует иной двустороннеидеальной цепи, для которой данные идеалы служили бы ее концами.

Согласно 2.9, *подмножество $\mathfrak{N}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ является двустороннеидеальным слоем тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ есть минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$ или когда в $\mathfrak{A}$ существуют два таких соседних двусторонних идеала $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ что*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2.$$

Аналогично для левоидеальных и правоидеальных слоев.

4.3. Если Σ есть главная двустороннеидеальная цепь, то благодаря 2.13 и 2.14 все двустороннеидеальные слои могут быть получены как Σ-слои, т. е. всеми двустороннеидеальными слоями являются минимальный двусторонний идеал, принадлежащий Σ (если такой имеется), и множества вида $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$ где $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ соседние члены в цепи Σ. Аналогично для левоидеальных и правоидеальных слоев и цепей.

4.4. Дальнейшие рассуждения этого параграфа будут относиться лишь к двустороннеидеальным цепям. Это объ-

ясняется как большим значением двусторонних идеалов по сравнению с односторонними, так и тем, что рассматриваемая ниже конструкция идеальных факторов осуществима лишь для двустороннеидеальных слоев.

Прежде всего отметим особую роль минимальных двусторонних идеалов[1]. *Полугруппа может обладать не более чем одним минимальным двусторонним идеалом.* Справедливость этого вытекает из 2.2 и из следующего свойства.

Минимальный двусторонний идеал полугруппы всегда является универсально минимальным двусторонним идеалом.

Действительно, пересечение минимального двустороннего идеала $\mathfrak{T}$ с произвольным двусторонним идеалом $\mathfrak{T}'$, согласно 1.9, (δ), есть двусторонний идеал полугруппы, содержащийся в $\mathfrak{T}$. Следовательно, он должен совпадать с $\mathfrak{T}$, откуда следует, что $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}'$.

Наличие в полугруппе минимального двустороннего идеала всегда оказывается важным свойством. Его роль существенна при рассмотрении различных свойств полугруппы. В литературе минимальный двусторонний идеал часто называют ядром полугруппы, или идеальным ядром, или ядром Сушкевича. Последнее название объясняется тем, что А. К. Сушкевич [3] первый обратил внимание на роль таких идеалов и исследовал различные их свойства. Многочисленные последующие работы в этом направлении в значительной степени посвящены развитию и обобщению первоначальных результатов А. К. Сушкевича.

4.5. ***Определение.*** *Пусть $\mathfrak{N}$ есть двустороннеидеальный слой полугруппы $\mathfrak{A}$. Идеальным фактором, соответствующим $\mathfrak{N}$, назовем следующую полугруппу $\mathfrak{N}^*$.*

1) *Если $\mathfrak{N}$ есть полугруппа, то $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}$.*

2) *Если $\mathfrak{N}$ не является полугруппой, то $\mathfrak{N}^*$ состоит из всех элементов $\mathfrak{N}$ и нового элемента O^*. При этом, если в $\mathfrak{A}$ для $X, Y, Z \in \mathfrak{N}$ имеет место $XY = Z$, то*

---

[1] Следует иметь в виду, что в литературе термину «минимальный двусторонний идеал» иногда придают иной, более широкий смысл, относя к минимальным двусторонним идеалам и минимальные ненулевые двусторонние идеалы, о которых мы будем говорить в § 3 и § 4 следующей главы.

и в $\mathfrak{N}^*$ *полагаем* $XY = Z$. *Во всех остальных случаях полагаем* $N_1 N_2 = O^* (N_1,\ N_2 \in \mathfrak{N}^*)$.

Ассоциативность определенного в $\mathfrak{N}^*$ действия проверяется без труда.

Отметим, что в литературе иногда и в первом случае идеальный фактор определяют путем присоединения внешним образом нуля к полугруппе $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что связанное с этим отличие совершенно несущественно. Принимая во внимание 4.2, довольно естественным является употребляющееся иногда обозначение для идеального фактора $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$.

4.6. Покажем на примере, что конструкция факторов, вообще говоря, не может быть осуществлена для левоидеальных слоев. Пусть Ω есть счетное множество

$$\Omega = \{\alpha_1\ \alpha_2,\ \ldots,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\}.$$

В полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$ рассмотрим следующие три преобразования, заданные подстановками:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \ldots \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \ldots & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \ldots \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Из II, 3.1 следует, что A делится справа на B, а B делится справа на A. Ни A, ни B не делятся справа на C. Обозначим через $\mathfrak{N}$ левоидеальный слой полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$, содержащий A. Согласно 3.8, $B \in \mathfrak{N}$, но $C \notin \mathfrak{N}$. Путем непосредственного перемножения убеждаемся, что $AB = B$, $AA = C$.

Так как $AA \notin \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}$ не является полугруппой. Рассмотрим множество $\mathfrak{N}^*$, состоящее изо всех элементов $\mathfrak{N}$ и из нового элемента O^*. В $\mathfrak{N}^*$ определяем действие так, как это было сделано в 4.5. В результате этого $\mathfrak{N}^*$ оказывается мультипликативным множеством. Однако $\mathfrak{N}^*$ не является полугруппой, ибо в $\mathfrak{N}^*$ не выполнено свойство ассоциативности. Действительно, так как, согласно действию в $\mathfrak{A}$, $AB = B$ и $AA \notin \mathfrak{N}$, то в $\mathfrak{N}^*$

$$A(AB) = AB = B, \qquad (AA)B = O^*B = O^*.$$

4.7. *Теорема.* *Пусть $\mathfrak{N}^*$ есть идеальный фактор полугруппы $\mathfrak{A}$, соответствующий двустороннеидеальному слою $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}^*$ есть полугруппа, не имеющая собственных двусторонних идеалов. Если $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N} \cup O^*$, то или $\mathfrak{N}^*$ есть полугруппа, не имеющая иных собственных двусторонних идеалов, кроме нулевого идеала O^*, или $\mathfrak{N}^*$ есть полугруппа, в которой произведение двух любых элементов равно нулевому элементу O^*.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}$. Согласно 4.2,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2,$$

где $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ соседние двусторонние идеалы (или $\mathfrak{T}_2$ есть пустое множество, а $\mathfrak{T}_1$ — минимальный двусторонний идеал).

Пусть $\mathfrak{H}$ есть произвольный двусторонний идеал $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{H} \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2.$$

Так как $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ являются двусторонними идеалами $\mathfrak{A}$, то и $\mathfrak{H}'$, очевидно, будет двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$, причем

$$\mathfrak{T}_1 \supset \mathfrak{H}' \supset \mathfrak{T}_2.$$

$\mathfrak{H}' \neq \mathfrak{T}_2$, так как

$$\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}\mathfrak{H}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}_2 = \varnothing.$$

Следовательно, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$. Но $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{H} \mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{H} \cup \mathfrak{T}_2$. Поэтому $\mathfrak{H}'$ будет содержать $\mathfrak{N}$ только тогда, когда $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ не может быть собственным идеалом $\mathfrak{N}$.

2) Пусть $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N} \cup O^*$ и, как в первой части,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2.$$

Пусть полугруппа $\mathfrak{N}^*$ такова, что среди ее элементов имеются такие, которые в произведении дают элемент, отличный от нуля O^*, т. е. $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_1 \not\subset \mathfrak{T}_2$. Пусть $\mathfrak{H}^*$ есть произвольный двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{H}^*$, обладающий и другими элементами помимо нуля O^*. Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество всех элементов из $\mathfrak{A}$, входящих в $\mathfrak{H}^*$. Множество $\mathfrak{H}$ непусто.

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{H} \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$$

есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, принадлежащий $\mathfrak{T}_1$ и содержащий $\mathfrak{T}_2$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ совокупность таких элементов F из $\mathfrak{T}_1$, что $\mathfrak{T}_1 F \subset \mathfrak{T}_2$. $\mathfrak{F}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, так как

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{A} F \subset \mathfrak{T}_1 F \subset \mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{T}_1 F \mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}_2 \mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}_2.$$

При этом $\mathfrak{T}_1 \supset \mathfrak{F} \supset \mathfrak{T}_2$. Но $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{T}_2$. Отсюда следует, что для всякого $T \in \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$ найдется такой $T' \in \mathfrak{T}_1$, что $T'T \overline{\in} \mathfrak{T}_2$. Совершенно аналогично доказываем, что для всякого $T \in \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$ найдется такой T'', что $TT'' \overline{\in} \mathfrak{T}_2$.

Пусть $H \in \mathfrak{H}$. При некотором $H' \in \mathfrak{T}_1$

$$H'H \overline{\in} \mathfrak{T}_2$$

и при некотором $H'' \in \mathfrak{T}_1$

$$(H'H)H'' \overline{\in} \mathfrak{T}_2 .$$

Отсюда следует, что двусторонний идеал $\mathfrak{H}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$ отличен от $\mathfrak{T}_2$. Следовательно, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{T}_1$. Но из того, что $\mathfrak{H}^*$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{N}^*$, согласно правилу умножения в $\mathfrak{N}^*$ следует, что

$$\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H} \cup \mathfrak{T}_2.$$

Это возможно лишь при $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$. Но тогда $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{N}^*$, т. е. двусторонний идеал $\mathfrak{H}^*$ полугруппы $\mathfrak{N}^*$ не может быть ее собственным идеалом.

4.8. Если $\mathfrak{K}$ есть минимальный двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, то, согласно 4,2, $\mathfrak{K}$ является двустороннеидеальным слоем. При этом, согласно 4.5, $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}$. Отсюда благодаря 4.7 получается следующее важное свойство (которое, впрочем, без труда может быть выведено самостоятельно).

Следствие. *Если $\mathfrak{K}$ есть минимальный двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{K}$ является полугруппой, не имеющей своих собственных двусторонних идеалов.*

4.9. Упомянем, что более детальное исследование идеальных факторов при некоторых ограничениях, наложенных на полугруппу, было проведено Н. Н. Воробьевым [6]. Им также рассмотрены и некоторые свойства умножения элементов в левоидеальных слоях.

4.10. Мы знаем, что всякая полугруппа является объединением всех своих двустороннеидеальных слоев, которые попарно не имеют общих элементов.

Каждому двустороннеидеальному слою, согласно 4.5, соответствует естественным образом тесно связанная с ним полугруппа — идеальный фактор. Этот идеальный фактор состоит из тех же элементов, что и сам слой, разве лишь иногда с добавкой одного нового нулевого элемента O^*. Таким образом, полугруппу $\mathfrak{A}$ в некотором смысле можно рассматривать как бы составленной из множества полугрупп — всех ее идеальных факторов. Последние, как мы показали в 4.7, являются или чрезвычайно просто устроенными полугруппами, в которых произведение двух любых элементов равно нулю, или же представляют собой полугруппы, вовсе не имеющие своих собственных двусторонних идеалов или имеющие лишь один собственный двусторонний нулевой идеал. Это обстоятельство объясняет интерес к полугруппам, не имеющим собственных ненулевых двусторонних идеалов. Такие полугруппы часто называются простыми (в дальнейшем мы не будем употреблять этого термина). Изучению таких полугрупп мы посвятим значительную часть следующей главы.

4.11. Пусть Σ есть произвольная главная двустороннеидеальная цепь полугруппы $\mathfrak{A}$. Все идеальные факторы $\mathfrak{A}$ получаются из ее двустороннеидеальных слоев. Но совокупность последних совпадает с совокупностью всех Σ-слоев. Таким образом, все идеальные факторы полугруппы $\mathfrak{A}$ могут быть получены из Σ-слоев.

Пусть Σ_1 и Σ_2 есть две главные двустороннеидеальные цепи полугруппы $\mathfrak{A}$. Как мы уже отмечали (2.15), совокупность всех Σ_1-слоев и совокупность всех Σ_2-слоев одинаковы. Таким образом, и совокупность идеальных факторов, полученных из Σ_1-слоев, совпадает с совокупностью идеальных факторов, полученных из Σ_2-слоев. Это утверждение является усиленной параллелью результатов ряда групповых теорем типа Жордана—Хёльдера[1]. Первоначально соответствующий результат и был получен Рисом [1] в виде по форме и содержанию сходном с теоретико-групповыми рассуждениями. В дальнейшем Н. Н. Воробьев [6] усилил этот результат до той предельной степени, в какой он здесь изложен.

---

[1] См., например, А. Г. Курош. Теория групп, изд. 2, § 16 и 56, Гостехиздат, 1953.

4.12. Некоторые полугруппы обладают одной единственной главной двустороннеидеальной цепью. Так как всякий двусторонний идеал может быть включен в некоторую главную двустороннеидеальную цепь (4.1), то указанное обстоятельство имеет место для тех и только для тех полугрупп, у которых множество всех двусторонних идеалов линейно упорядочно относительно включения.

Теорема. *Пусть совокупность двусторонних идеалов полугруппы* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию максимальности* (2.17.). *Для того чтобы* $\mathfrak{A}$ *обладала лишь одной единственной главной двустороннеидеальной цепью, необходимо и достаточно, чтобы все двусторонние идеалы* $\mathfrak{A}$ *были главными двусторонними идеалами.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ обладает единственной главной двустороннеидеальной цепью. Пусть $\mathfrak{T}$ есть произвольный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Согласно 2.17, он является двустороннеидеальной оболочкой некоторого своего конечного подмножества $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Рассмотрим двустороннеидеальные оболочки элементов этого множества $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$. Так как все они входят в одну и ту же двустороннеидеальную главную цепь, то при соответствующей нумерации мы имеем

$$\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{T}_n.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{T}_n$ есть главный двусторонний идеал, содержащий элементы $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Так как к тому же $\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{T}$, то $\mathfrak{T}_n = \mathfrak{T}$.

2) Пусть все двусторонние идеалы $\mathfrak{A}$ являются главными. Возьмем два произвольных двусторонних идеала $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$, являющихся двустороннеидеальными оболочками элементов A_1 и A_2. Двусторонний идеал $\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ также является двустороннеидеальной оболочкой некоторого элемента A_3. Этот элемент содержится в $\mathfrak{T}_1$ или $\mathfrak{T}_2$. Пусть $A_3 \in \mathfrak{T}_1$. Это означает, что $A_3 = XA_1Y$, где X и Y являются элементами из $\mathfrak{A}$ или пустыми символами. В свою очередь, $A_2 \in \mathfrak{T}_3$ и потому $A_2 = UA_3V$, где U и V являются элементами из $\mathfrak{A}$ или пустыми символами. Таким образом, $A_2 = UXA_1YV$, откуда следует, что $A_2 \in \mathfrak{T}_1$ и потому $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$. Мы показали, что из двух произвольных двусторонних идеалов $\mathfrak{A}$ один обязательно содержится в другом. Из этого следует, что $\mathfrak{A}$ обладает единственной главной двустороннеидеальной цепью.

4.13. Покажем, что к числу рассмотренных выше полугрупп принадлежит мультипликативная полугруппа $\mathfrak{M}_n$ всех комплексных квадратных матриц порядка n. Обозначим через $\mathfrak{T}_k (0 \leqslant k \leqslant n)$ множество матриц из $\mathfrak{M}_n$, ранг которых не превосходит k. Как известно ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей. Отсюда следует, что $\mathfrak{T}_k$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{M}_n$. Оказывается, что $\mathfrak{M}_n$ не имеет иных двусторонних идеалов.

Пусть M есть матрица наибольшего ранга r, принадлежащая двустороннему идеалу $\mathfrak{U}$ полугруппы $\mathfrak{M}_n$, и N произвольная матрица ранга $\rho \leqslant r$. Как известно из теории матриц, путем так называемых элементарных преобразований матрицы M и N могут быть приведены к виду

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \Big\} r,$$

$$N' = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \Big\} \rho$$

(невыписанные элементы равны нулю). Но элементарные преобразования, как известно, могут быть осуществлены путем умножения матрицы слева и справа на неособенные матрицы. Таким образом,

$$M' = P_1 M P_2, \quad N' = Q_1 N Q_2,$$

где P_1, P_2, Q_1, Q_2 неособенны и потому обладают обратными матрицами. Так как, очевидно, $N' = M'N'$, то

$$N = Q_1^{-1}N'Q_2^{-1} = Q_1^{-1}M'N'Q_2^{-1} = Q_1^{-1}P_1MP_2N'Q_2^{-1}$$

и потому $N \in \mathfrak{U}$.

Из проведенных рассуждений следует, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}_r$.

Таким образом, полугруппа $\mathfrak{M}_n$ обладает лишь следующими двусторонними идеалами, образующими ее единственную главную двустороннеидеальную цепь:

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{T}_n \supset \mathfrak{T}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{T}_1 \supset \mathfrak{T}_0 = O.$$

Отметим, что согласно 4.12, каждый из этих идеалов является главным двусторонним идеалом.

4.14. Для произвольного непустого множества Ω, мощность которого обозначим через $\mathfrak{m}$, рассмотрим полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$ всех его преобразований. Для всякой мощности $\mathfrak{n} > 1$, не превосходящей $\mathfrak{m}$, обозначим через $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ совокупность всех преобразований $X \in \mathfrak{S}_\Omega$ таких, что мощность $X\Omega$ меньше $\mathfrak{n}$.

Для любых $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ и $X \in \mathfrak{T}_\mathfrak{n}$

$$(XS)\,\Omega = X(S\Omega) \subset X\Omega,$$

и потому $XS \in \mathfrak{T}_\mathfrak{n}$. Так как мощность $X\Omega$ меньше $\mathfrak{n}$, то и мощность $(SX)\,\Omega = S(X\Omega)$ будет меньше $\mathfrak{n}$ и потому $SX \in \mathfrak{T}_\mathfrak{n}$. Таким образом, $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ оказывается двусторонним идеалом. Как показал А. И. Мальцев [4], иных собственных двусторонних идеалов $\mathfrak{S}_\Omega$ не имеет.

Пусть $\mathfrak{U}$ есть произвольный двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$, отличный от $\mathfrak{S}_\Omega$. Возьмем произвольное преобразование $U \in \mathfrak{U}$, для которого мощность $U\Omega$ обозначим через $\mathfrak{l}$. Пусть V есть произвольное преобразование, у которого мощность $V\Omega$ не превосходит $\mathfrak{l}$.

Множество Ω можно представить в виде непересекающегося объединения

$$\Omega = \bigcup_\xi \Omega_\xi^{(U)},$$

где каждая компонента $\Omega_\xi^{(U)}$ состоит из всех элементов Ω, преобразуемых преобразованием U в один и тот же элемент. Аналогично для преобразования V

$$\Omega = \bigcup_\eta \Omega_\eta^{(V)}.$$

Поскольку мощность множества компонент первого объединения есть $\mathfrak{l}$, а второго не превосходит $\mathfrak{l}$, существует взаимно однозначное отображение φ совокупности компонент второго объединения в первое. Выделив в каждом $\Omega_\xi^{(U)}$ по произвольному элементу σ_ξ, определим преобразование $Y \in \mathfrak{S}_\Omega$, такое, что для $\alpha \in \Omega_\eta^{(V)}$ имеет место $Y\alpha = \sigma_{\varphi(\eta)}$. Так как $U\sigma_{\xi_1} \neq U\sigma_{\xi_2}$ (если $\xi_1 \neq \xi_2$), то из $V\mu_1 \neq V\mu_2$ (что означает, что μ_1 и μ_2 содержатся в различных компонентах $\Omega_\eta^{(V)}$), следует, что $UY\mu_1 \neq UY\mu_2$. Отсюда по II, 3.1 следует, что преобразование UY является правым делителем преобразования V, т. е. при некотором $X \in \mathfrak{S}_\Omega$

$$V = XUY.$$

Так как $U \in \mathfrak{U}$, то отсюда вытекает, что и $V \in \mathfrak{U}$.

Из проведенных рассуждений следует, что двустороннему идеалу $\mathfrak{U}$ соответствует класс мощностей, обладающих тем свойством, что вместе с некоторой мощностью и все меньшие принадлежат данному классу. Это есть такие мощности, для которых существует $U \in \mathfrak{U}$, такое что $U\Omega$ имеет данную мощность. Можно считать, что для данного класса найдется такая мощность $\mathfrak{n}$, что этот класс является классом всех мощностей меньших мощности $\mathfrak{n}$. Согласно предшествующим рассуждениям, $\mathfrak{U}$ будет не чем иным, как $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$.

Так как из каждых двух неравных мощностей $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ одна меньше другой и из $\mathfrak{n}_1 > \mathfrak{n}_2$, очевидно, следует, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{n}_1} \supset \mathfrak{T}_{\mathfrak{n}_2}$, то множество всех двусторонних идеалов полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ оказывается линейно упорядоченным по включению, т. е. образует единственную главную двустороннеидеальную цепь полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$.

§ 5. Взаимная связь идеальных эквивалентностей

5.1. Помимо интереса, который представляет самостоятельное независимое изучение каждой из идеальных эквивалентностей — левоидеальной, правоидеальной, и двустороннеидеальной, существенна связь между этими эквивалентностями.

Прежде всего рассмотрим одно важное соотношение между левоидеальной эквивалентностью и правоидеальной эквивалентностью, полученное Грином [1].

Пусть элемент A_1 полугруппы $\mathfrak{A}$ принадлежит левоидеальному слою $\mathfrak{L}_1$ и правоидеальному слою $\mathfrak{R}_1$. Соответственно элемент A_2 принадлежит слоям $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{R}_2$.

Если пересечение $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ непусто, то непусто и пересечение $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{R}_1$.

Действительно, пусть

$$\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{R}_2 \ni Z.$$

Если $Z \neq A_1$ и $Z \neq A_2$, то, согласно 3.8, в полугруппе должны найтись такие элементы T, U, V, W что

$$TA_1 = Z, \quad UZ = A_1, \quad ZV = A_2, \quad A_2W = Z.$$

Возьмем элемент

$$X = A_1V = UZV = UA_2.$$

Так как

$$A_1 = UZ = UA_2W = XW, \quad X = A_1V,$$

то, по 3.8, X и A_1 содержатся в одном и том же правоидеальном слое, т. е. $X \in \mathfrak{R}_1$.

Аналогично из

$$A_2 = ZV = TA_1V = TX, \quad X = UA_2$$

следует, что $X \in \mathfrak{L}_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{L}_2 \ni X$.

В случае, когда $Z = A_1$, мы имеем $A_1 \in \mathfrak{R}_2$, т. е. $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1$ и потому

$$\mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{R}_2 \ni A_2.$$

Аналогично, при $Z = A_2$

$$\mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{R}_1 \ni A_1.$$

5.2. Если использовать понятие умножения отношений (I, 5.2), то тот факт, что для некоторых элементов A_1 и A_2 пересечение $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ непусто, означает, что A_1 и A_2 находятся в отношении $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{l}$ означает левоидеальную эквивалентность, а $\mathfrak{r}$ правоидеальную эквивалентность. Аналогично $\mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{R} \neq \varnothing$ означает, что A_1 и A_2 находятся в отношении $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}$. Таким образом, доказанное в 5.1 свойство означает не что иное, как перестановочность отношений $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{r}$ (I, 5.3): $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}$.

5.3. Отношение $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}$ (5,2) было введено и подробно рассмотрено Грином [1]. В дальнейшем оно изучалось в работе Клиффорда [9] и в работе Миллера и Клиффорда [1]. Как показал Грин, в некоторых случаях это отношение совпадает с двустороннеидеальной эквивалентностью. Например, это имеет место для периодических полугрупп.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ есть периодическая полугруппа. Если два ее различных элемента A и B связаны отношением $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}$ (5.2), то существует такой элемент X, что A и X делятся друг на друга справа, а B и X делятся друг на друга слева. Отсюда следует, что X принадлежит двустороннеидеальной оболочке A, а A, в свою очередь, принадлежит двустороннеидеальной оболочке X. Следовательно, X и A двустороннеидеально эквивалентны. Также двустороннеидеально эквивалентны X и B. Следовательно, A и B двустороннеидеально эквивалентны.

Пусть теперь A и B двустороннеидеально эквивалентны. Тогда, согласно 3.6, при некоторых X_1, X_2, X_3, X_4, которые являются элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами,

$$X_1 A X_2 = B, \quad X_3 B X_4 = A.$$

Отсюда получаем

$$B = (X_1 X_3)\, B\, (X_4 X_2),$$

а потому и

$$B = (X_1 X_3)^k B\, (X_4 X_2)^k$$

при любом натуральном k. Возьмем k таким, чтобы $(X_4 X_2)^k$ был идемпотентом, что возможно, так как $\mathfrak{A}$ периодична. Тогда из указанного равенства следует

$$B\,(X_4 X_2)^k = B.$$

Для $Z = BX_4$ мы имеем

$$Z \cdot X_2 (X_4 X_2)^{k-1} = B X_4 X_2\, (X_4 X_2)^{k-1} = B\,(X_4 X_2)^k = B$$

(или $ZX_2 = B$, если $k = 1$). Отсюда следует, что B и Z правоидеально эквивалентны. Аналогично убеждаемся, что левоидеально эквивалентны $Z' = X_3 B$ и B. Это значит, что Z' и B делятся друг на друга справа. Но тогда и $Z'X_4$ и BX_4 будут делиться друг на друга справа, т. е. будут левоидеально эквивалентны. Но $Z'X_4 = A$, а $BX_4 = Z$. Таким образом, A и Z левоидеально эквивалентны.

Учитывая доказанное выше, мы получаем, что A и B связаны отношением $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}$ (5.2).

5.4. Пересечение произвольных левоидеального слоя и правоидеального слоя полугруппы, как показал Грин [1], часто оказывается группой. Им было получено условие этого.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{L}$ есть некоторый левоидеальный слой, а $\mathfrak{R}$ правоидеальный слой полугруппы $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$. Если*

$$\mathfrak{K}\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing,$$

то $\mathfrak{K}$ является группой.

Доказательство. Пусть X и Y такие элементы из $\mathfrak{K}$, что $XY \in \mathfrak{K}$. Согласно 3.8, должны найтись такие U и V, являющиеся элементами из $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, что

$$U \cdot XY = Y, \quad XY \cdot V = X.$$

Для элемента $I = UXYV$ мы, очевидно, имеем

$$I = YV, \quad I = UX,$$

$$XI = XYV = X, \quad IY = UXY = Y,$$

$$I^2 = I \cdot I = UX \cdot YV = I.$$

Отсюда следует, что X и I левоидеально эквивалентны, т. е. $I \in \mathfrak{L}$, а Y и I правоидеально эквивалентны, т. е. $I \in \mathfrak{R}$. Таким образом, $I \in \mathfrak{K}$.

Пусть $Z \in \mathfrak{K}$. Так как Z и J левоидеально и правоидеально эквивалентны, то при некоторых Z_1, Z_2, Z_3, $Z_4 \in \mathfrak{A}$

$$Z_1 J = Z, \quad IZ_2 = Z, \quad Z_3 Z = I, \quad ZZ_4 = I.$$

Отсюда следует:

$$IZ = Z, \quad ZI = Z.$$

Таким образом, I оказывается двусторонней единицей в множестве $\mathfrak{K}$.

Так как

$$IZ_3I \cdot Z = IZ_3Z = II = I, \quad Z \cdot IZ_4I = ZZ_4I = II = I,$$

$$IZ_3I = IZ_3I \cdot I = IZ_3I \cdot Z \cdot IZ_4I = I \cdot IZ_4I = IZ_4I,$$

то элемент IZ_3I левоидеально эквивалентен с I и потому принадлежит $\mathfrak{L}$. Аналогично $IZ_3I \in \mathfrak{R}$. Таким образом, IZ_3I

принадлежит $\mathfrak{K}$ и является двусторонне обратным к Z по отношению к I.

Пусть T, $Z \in \mathfrak{K}$ и $ZZ' = I$. Поскольку TZ делится на T слева и T делится на TZ слева

$$T = TI = T \cdot ZZ' = TZ \cdot Z',$$

оба элемента T и TZ должны содержаться в одном и том же правоидеальном слое, т. е. $TZ \in \mathfrak{R}$. Аналогично показываем, что $TZ \in \mathfrak{L}$. Следовательно, $TZ \in \mathfrak{K}$, что и завершает доказательство того, что $\mathfrak{K}$ есть группа.

5.5. Непустота пересечения $\mathfrak{K}\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}$ будет, в частности, обеспечена, если $\mathfrak{K}$ содержит идемпотент.

Следствие. *Если $\mathfrak{L}$ есть левоидеальный слой и $\mathfrak{R}$ правоидеальный слой полугруппы, причем $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ содержит идемпотент, то $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ является группой* (и, следовательно, такой идемпотент единственный).

5.6. Пусть I есть произвольный идемпотент полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}_I$ множество всех вполне регулярных элементов, для которых I является двусторонне регулярной единицей. Как мы показали в III, 1.14; III, 1.16, $\mathfrak{G}_I$ есть максимальная подгруппа $\mathfrak{A}$, имеющая I своей единицей. Так как все элементы группы делятся друг на друга и слева и справа, то все элементы из $\mathfrak{G}_I$ будут и левоидеально и правоидеально эквивалентны с I.

Учитывая 5.5, отсюда заключаем, что $\mathfrak{G}_I = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{L}$ есть левоидеальный слой, содержащий I, а $\mathfrak{R}$ правоидеальный слой, содержащий I.

5.7. Так как всякий двусторонний идеал полугруппы является и левым ее идеалом и правым, то элементы левоидеально эквивалентные или правоидеально эквивалентные будут обязательно и двустороннеидеально эквивалентными. Отсюда следует, что каждый двустороннеидеальный слой представляет собой непересекающееся объединение некоторых левоидеальных слоев, а также непересекающееся объединение некоторых правоидеальных слоев.

5.8. Вопрос о том, из каких левоидеальных слоев составлен двустороннеидеальный слой и как они могут быть получены, в некоторой степени выясняется при помощи нижеследующей теоремы, полученной Н. Н. Воробьевым [6].

Теорема. *Если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ есть два соседних* (2.8) *двусторонних идеала полугруппы $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{T}_1 \supset \mathfrak{T}_2)$ и некоторый*

левоидеальный слой $\mathfrak{L}$ *содержится в* $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$ *и таков, что* $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}$ *есть левый идеал* $\mathfrak{A}$, *то при всяком левоидеальном слое* $\mathfrak{L}'$, *содержащемся в* $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$, *множество* $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}'$ *будет левым идеалом полугруппы* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Обозначим через Σ множество всех таких левоидеальных слоев полугруппы $\mathfrak{A}$, что каждый из них $\mathfrak{N}$ содержится в $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$ и таков, что $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{N}$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Σ непусто, так как $\mathfrak{L} \in \Sigma$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{P} = \left(\bigcup_{\mathfrak{N} \in \Sigma} \mathfrak{N}\right) \cup \mathfrak{T}_2 = \bigcup_{\mathfrak{N} \in \Sigma} (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2).$$

Так как $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$ при $\mathfrak{N} \in \Sigma$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, то и $\mathfrak{P}$ является левым идеалом.

$\mathfrak{P}$ содержится в $\mathfrak{T}_1$, содержит $\mathfrak{T}_2$ и отличен от $\mathfrak{T}_2$ (так как $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{T}_2$). Если нам удастся показать, что $\mathfrak{P}$ есть правый, а следовательно, и двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то это будет означать, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{T}_1$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость утверждения нашей теоремы, ибо $\mathfrak{L}'$ как один из левоидеальных слоев, принадлежащих $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{T}_2$ обязан будет совпадать с некорым $\mathfrak{N} \in \Sigma$.

2) Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и $X \in \mathfrak{P}$. При некотором $\mathfrak{N} \in \Sigma$ элемент X принадлежит левому идеалу $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$.

Предположим, что существует не менее двух левоидеальных слоев, содержащихся в левом идеале $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$, но не содержащихся в $\mathfrak{T}_2$. Это означает, что в

$$(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \setminus [\mathfrak{T}_2 \cap (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A]$$

имеется не менее двух левоидельных слоев. Согласно 2.9, отсюда следует, что соответствующие левые идеалы не являются соседними, т. е. между ними лежит некоторый, отличный от них обоих, левый идеал $\mathfrak{L}''$:

$$(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \supset \mathfrak{L}'' \supset \mathfrak{T}_2 \cap (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ совокупность всех таких элементов $Y \in \mathfrak{A}$, что $YA \in \mathfrak{L}''$, и через $\mathfrak{L}_2$ — пересечение $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2)$ и $\mathfrak{L}_1$. Если $T \in \mathfrak{T}_2$, то $TA \in (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$ и $TA \in \mathfrak{T}_2$, а потому $TA \in \mathfrak{T}_2 \cap (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \subset \mathfrak{L}''$. Следовательно, $T \in \mathfrak{L}_1$. Таким образом, $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L}_1$. $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ являются левыми идеалами.

Так как $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1$, то из определения $\mathfrak{L}_1$ следует, что $\mathfrak{L}_2 A \subset \mathfrak{L}''$. Если $L'' \subset \mathfrak{L}''$, то $L'' = ZA$, где $Z \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$. По

определению $\mathfrak{L}_1$ элемент Z должен принадлежать $\mathfrak{L}_1$. Следовательно, $Z \in \mathfrak{L}_2$. Если бы $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{T}_2$, то и Z принадлежал бы $\mathfrak{T}_2$, а потому и произвольный элемент L'' из $\mathfrak{L}''$ принадлежал бы $\mathfrak{T}_2$, что невозможно, ибо $\mathfrak{L}''$ содержится в $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$, но содержит $\mathfrak{T}_2 \cap (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$ и отлично от него. Таким образом, на самом деле $\mathfrak{L}_2$ не может содержаться в $\mathfrak{T}_2$.

Так как $\mathfrak{L}_2$ содержится в $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$, то $\mathfrak{L}_2$ имеет общие элементы с $\mathfrak{N}$ и потому, будучи левым идеалом, обязан содержать весь левоидеальный слой $\mathfrak{N}$.

Выше мы показали, что $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L}_1$. Так как $\mathfrak{L}_2 = (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) \cap \mathfrak{L}_1$, то $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L}_2$, а так как $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}_2$, то $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L}_2$ и потому благодаря определению $\mathfrak{L}_2$

$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2.$$

Так как $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1$, то

$$(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \subset \mathfrak{L}'',$$

что противоречит исходному предположению относительно $\mathfrak{L}''$. Полученное противоречие означает, что на самом деле $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$ не может содержать более одного левоидеального слоя, не содержащегося в $\mathfrak{T}_2$.

3) Если $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \subset \mathfrak{T}_2$, то

$$XA \in (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \in \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{P}.$$

Если среди элементов $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$ есть не принадлежащие $\mathfrak{T}_2$, то все они, согласно доказанному во второй части, образуют один левоидеальный слой $\mathfrak{N}'$. Так как $\mathfrak{N} \in \Sigma$, то $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, а потому и $(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A$ есть левый идеал. Поэтому

$$\mathfrak{N}' \cup \mathfrak{T}_2 = (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \cup \mathfrak{T}_2$$

есть левый идеал, т. е. $\mathfrak{N}' \in \Sigma$. Отсюда следует:

$$XA \in (\mathfrak{N} \cup \mathfrak{T}_2) A \subset \mathfrak{N}' \cup \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{P}.$$

Поскольку в обоих возможных случаях $XA \in \mathfrak{P}$, множество $\mathfrak{P}$ оказывается правым идеалом.

5.9. *Следствие.* *Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ совокупность главных левых идеалов удовлетворяет условию минимальности. Если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ есть два соседних двусторонних идеала $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{N}$ левоидеальный слой, содержащийся в $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$, то $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{N}$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. В множестве всех главных левых идеалов, содержащихся в $\mathfrak{T}_1$, но не содержащихся в $\mathfrak{T}_2$, должен существовать идеал $\mathfrak{L}$, являющийся минимальным в этом множестве. Левые идеалы $\mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}$ являются соседними. Действительно, если $\mathfrak{L}'$ есть такой левый идеал, что

$$\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L}' \subset \mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}' \neq \mathfrak{T}_2,$$

то возьмем в $\mathfrak{L}' \setminus \mathfrak{T}_2$ некоторый элемент X и рассмотрим его левоидеальную оболочку $\mathfrak{L}_X$. Так как $X \overline{\in} \mathfrak{T}_2$, то $X \in \mathfrak{L}$, а потому и $\mathfrak{L}_X \subset \mathfrak{L}$. Благодаря минимальности $\mathfrak{L}$ отсюда следует $\mathfrak{L}_X = \mathfrak{L}$. Но $\mathfrak{L}_X \subset \mathfrak{L}'$. Следовательно, $\mathfrak{L}' \supset \mathfrak{L}$ и потому $\mathfrak{L}' = \mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}$.

Из доказанного следует, что $(\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{L}) \setminus \mathfrak{T}_2$ есть левоидельный слой. Его объединение с $\mathfrak{T}_2$ дает левый идеал $\mathfrak{A}$. Отсюда, согласно 5.8, следует, что объединение левоидеального слоя $\mathfrak{N}$ с $\mathfrak{T}_2$ также должно давать левый идеал.

5.10. Всякая двустороннеидеальная цепь полугруппы является ее левоидеальной цепью. Конечно, главная двустороннеидеальная цепь, вообще говоря, не будет главной левоидеальной цепью. Согласно 2.12, она может быть дополнена до главной левоидельной цепи. Обычно это может быть сделано несколькими различными способами.

При помощи выведенного следствия 5.9 можно описать, как могут быть осуществлены все такие возможные дополнения при соответствующем предположении.

Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ совокупность главных левых идеалов удовлетворяет условию минимальности. Σ есть произвольная главная двустороннеидеальная цепь $\mathfrak{A}$. Для произвольных соседних двусторонних идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ цепи Σ рассмотрим совокупность Φ всех левоидеальных слоев, содержащихся в $\mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2$.

Согласно 5.9, для любого $\mathfrak{N} \in \Phi$ объединение $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{N}$ является левым идеалом. Отсюда следует, что для любого множества $\Phi' \subset \Phi$ объединение

$$\left(\bigcup_{\mathfrak{N} \in \Phi'} \mathfrak{N}\right) \cup \mathfrak{T}_2$$

будет левым идеалом $\mathfrak{A}$, содержащим $\mathfrak{T}_2$ и содержащимся в $\mathfrak{T}_1$. Очевидно, таким способом могут быть получены все такие левые идеалы, поскольку каждый из них содержит

весь слой $\mathfrak{N} \in \Phi$, если только хотя бы один элемент из $\mathfrak{N}$ принадлежит ему.

Произведем произвольным образом линейное упорядочение в Φ. Рассмотрим такие подмножества Φ' множества Φ, что, если $\mathfrak{N} \in \Phi'$, то Φ' содержит и всякое такое $\mathfrak{N}'$, которое предшествует $\mathfrak{N}$, согласно введенному упорядочению. Согласно полученному выше, $\left(\bigcup_{\mathfrak{N} \in \Phi'} \mathfrak{N}\right) \cup \mathfrak{T}_2$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий $\mathfrak{T}_2$ и содержащийся в $\mathfrak{T}_1$. Множество всех таких левых идеалов, построенных для любой пары соседних двусторонних идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ из цепи Σ, образует левоидеальную цепь Σ', являющуюся дополнением двустороннеидеальной цепи Σ. Она является главной левоидеальной цепью $\mathfrak{A}$. Действительно, пусть присоединение левого идеала $\mathfrak{L}$ к цепи Σ' дает левоидеальную цепь $\mathfrak{A}$. Пусть

$$\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{L} \subset \mathfrak{T}_1,$$

где $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ соседние двусторонние идеалы, принадлежащие Σ. $\mathfrak{L}$, как и всякий левый идеал, является объединением некоторых левоидеальных слоев. Следовательно,

$$\mathfrak{L} = \left(\bigcup_{\mathfrak{N} \in \Psi} \mathfrak{N}\right) \cup \mathfrak{T}_2.$$

Пусть $\mathfrak{N} \in \Psi$ и $\mathfrak{N}'$ предшествует $\mathfrak{N}$ в отношении указанной выше упорядоченности. Рассмотрим левый идеал из Σ':

$$\mathfrak{L}' = \left(\bigcup_{\mathfrak{N} \in \Phi'} \mathfrak{N}\right) \cup \mathfrak{T}_2,$$

где Φ' состоит из всех $\mathfrak{N}''$, предшествующих $\mathfrak{N}'$. Если $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{L}'$ не содержит $\mathfrak{L}$ и потому по свойству цепи должен сам содержаться в $\mathfrak{L}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{N}'$, т. е. $\mathfrak{N}' \in \Psi$. Мы показали, что Ψ таково, что $\mathfrak{L}$ сам оказывается идеалом, принадлежащим Σ'.

Совершенно очевидно, что всякая главная левоидеальная цепь, являющаяся дополнением данной главной двухстороннеидеальной цепи Σ, может быть получена описанным способом.

5.11. Полученные результаты, так же как и различные другие исследования, проведенные Н. Н. Воробьевым [6] и Грином [1], показывают важность условий минимальности

для главных идеалов. В связи с этим существенной оказывается связь между такими условиями, установленная Грином.

Теорема. *Если в полугруппе совокупность всех главных левых идеалов удовлетворяет условию минимальности и совокупность всех главных правых идеалов удовлетворяет условию минимальности, то и совокупность всех главных двусторонних идеалов удовлетворяет условию минимальности.*

Доказательство. Пусть Γ' есть некоторое непустое множество главных двусторонних идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех элементов $\mathfrak{A}$, двустороннеидеальные оболочки которых принадлежат Γ'. Через Φ обозначим множество левоидеальных оболочек таких элементов X, что

$$(X \cup X\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing.$$

Так как Φ, очевидно, непусто, то благодаря условию теоремы в Φ должен найтись минимальный идеал $\mathfrak{L}_0$. Он является левоидеальной оболочкой некоторого элемента X_0.

Через Ψ обозначим множество правоидеальных оболочек таких элементов Y, что $X_0Y \in \mathfrak{K}$. Если Ψ непусто, то оно содержит минимальный идеал $\mathfrak{R}_0$. Он является правоидеальной оболочкой некоторого элемента Y_0.

Обозначим через $\mathfrak{T}_0$ двустороннеидеальную оболочку элемента X_0Y_0. Так как $X_0Y_0 \in \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{T}_0 \in \Gamma'$.

Предположим, что двустороннеидеальная оболочка некоторого элемента Z принадлежит Γ' и содержится в $\mathfrak{T}_0$. Тогда при некоторых A и B, являющихся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами,

$$Z = AX_0Y_0B.$$

Так как $Z \in \mathfrak{K}$, то левоидеальная оболочка $\mathfrak{L}'$ элемента AX_0 по определению Φ должна принадлежать Φ. При этом $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}_0$. Следовательно, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_0$. Это значит, что AX_0 и X_0 левоидеально эквивалентны. Но тогда, очевидно, будут левоидеально эквивалентными и элементы $(AX_0).(Y_0B)$ и X_0Y_0B, получающиеся от умножения этих элементов справа на общий множитель. Эти элементы будут и двустороннеидеально эквивалентны. Таким образом, $X_0Y_0B \in \mathfrak{K}$ и потому $Y_0B \in \Psi$. Так как правоидеальная оболочка элемента Y_0B содержится в правоидеальной оболочке $\mathfrak{R}_0$ элемента Y_0, то благодаря минималь-

ности последней в Ψ эти оболочки должны совпадать, т. е. Y_0 и Y_0B должны быть правоидеально эквивалентны. Но тогда правоидеально эквивалентными будут и элементы X_0Y_0 и X_0Y_0B. Выше мы показали, что второй из них двустороннеэквивалентен элементу Z. Следовательно, Z двустороннеидеально эквивалентен с X_0Y_0, т. е. его двусторонне-идеальной оболочкой является $\mathfrak{T}_0$. Показав это, мы доказали минимальность $\mathfrak{T}_0$ в Γ'.

Если Ψ пусто, то $X_0 \in \mathfrak{K}$ и аналогично предыдущему (считая Y_0 пустым символом) показываем, что двусторонне-идеальная оболочка элемента X_0 является минимальным множеством в Γ'.

§ 6. Изолированные идеалы

6.1. Роль подполугруппы $\mathfrak{B}$ некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$ в значительной степени зависит от того, как ведут себя по отношению к $\mathfrak{B}$ элементы из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Существенно, могут ли произведения некоторых элементов из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ равняться какому-либо элементу из $\mathfrak{B}$ и, в частности, может ли некоторая степень какого-нибудь элемента из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ равняться какому-либо элементу из $\mathfrak{B}$.

Определение. *Подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется изолированной, если для всякого $X \in \mathfrak{A}$ и любого натурального n из $X^n \in \mathfrak{B}$ всегда следует $X \in \mathfrak{B}$.*

$\mathfrak{B}$ называется вполне изолированной, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$, из $XY \in \mathfrak{B}$ всегда следует, что X или Y принадлежат $\mathfrak{B}$.

Исследование свойств изолированности и полной изолированности в основном проводилось до сих пор для идеалов. Вполне изолированные идеалы называются в литературе также простыми идеалами, изолированные иделы (этот термин принадлежит П. Г. Конторовичу) называются иногда полупростыми (например, так их называет Круазо).

6.2. Отметим несколько свойств изолированных подполугрупп произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$.

(α). *Вполне изолированная подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$ является изолированной.*

(β). *Сама $\mathfrak{A}$ является своей вполне изолированной подполугруппой.*

(γ). *Подполугруппа* $\mathfrak{B}$ *будет вполне изолированной тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ *является подполугруппой или пусто.*

(δ). *Пересечение любого множества изолированных подполугрупп, если оно непусто, само является изолированной подполугруппой.*

(ε). *Объединение любого множества изолированных левых идеалов есть изолированный левый идеал.*

(ζ). *Объединение любого множества вполне изолированных левых идеалов есть вполне изолированный левый идеал.*

(η). *Для того чтобы идеал* $\mathfrak{B}$ *был изолированным, достаточно, чтобы для всякого* $X \in \mathfrak{A}$ *из* $X^2 \in \mathfrak{B}$ *всегда следовало* $X \in \mathfrak{B}$.

Действительно, пусть идеал $\mathfrak{B}$ не является изолированным. Это значит, что для некоторого элемента X из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ имеет место $X^n \in \mathfrak{B}$.

Пусть X из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ и натуральное число n выбраны так, что n наименьшее из всех возможных чисел с таким свойством (при любых элементах $X \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$). Число n не может быть четным, отличным от двух, так как иначе

$$\left(X^{\frac{n}{2}}\right)^2 \in \mathfrak{B}$$

и оба возможных случая

$$1)\ X^{\frac{n}{2}} \in \mathfrak{B}; \quad 2)\ X^{\frac{n}{2}} = Y \in \mathfrak{B}, \quad Y^2 \in \mathfrak{B}$$

противоречат минимальности n.

Число n не может быть нечетным (конечно, $n \neq 1$), так как иначе

$$X^{n+1} \in \mathfrak{B}$$

(что следует из того, что $X^{n+1} = X \cdot X^n = X^n \cdot X$, $X^n \in \mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ есть левый или правый идеал) и опять-таки оба возможных случая

$$1)\ X^{\frac{n+1}{2}} \in \mathfrak{B}; \quad 2)\ X^{\frac{n+1}{2}} = Y \in \mathfrak{B}, \quad Y^2 \in \mathfrak{B}$$

противоречат минимальности n. Следовательно, $n = 2$, т. е. для неизолированного идеала обязательно найдется такой элемент $X \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$, что

$$X^2 \in \mathfrak{B}.$$

(θ). *Если* $\mathfrak{B}$ *есть изолированный двусторонний идеал полугруппы* $\mathfrak{A}$, *которая является двусторонним идеалом некоторой ее надполугруппы* $\mathfrak{A}'$, *то* $\mathfrak{B}$ *есть двусторонний идеал полугруппы* $\mathfrak{A}'$.

Действительно, при любых $X \in \mathfrak{A}'$ и $B \in \mathfrak{B}$ произведение XB принадлежит $\mathfrak{A}$, поскольку $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}$ является двусторонним идеалом для $\mathfrak{A}'$. Предположим, что $XB \overline{\in} \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ изолирован в $\mathfrak{A}$, то и $(XB)^2 \overline{\in} \mathfrak{B}$. Однако это невозможно, ибо

$$(XB)^2 = XBX \cdot B \in (XBX)\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}.$$

Аналогично убеждаемся, что и $BX \overline{\in} \mathfrak{B}$ невозможно. Следовательно, $\mathfrak{B}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}'$.

6.3. Отметим, что для вполне изолированных подполугрупп свойство аналогичное (δ) не имеет места. В качестве примера укажем полугруппу из трех элементов A, B, O, у которой $A^2 = A$, $B^2 = B$, $XY = O$ во всех остальных случаях. И $\{A, O\}$ и $\{B, O\}$ являются вполне изолированными двусторонними идеалами. В то же время их пересечение O не является вполне изолированной подполугруппой, так как $AB = O$.

Заметим также, что для подполугрупп, не являющихся идеалами, не имеет места свойство, аналогичное (η). В качестве примера укажем подполугруппу $\mathfrak{B}$ мультипликативной полугруппы всех натуральных чисел, состоящую из чисел вида 8^k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Очевидно, $N^2 = 8^k$ возможно лишь для $N \in \mathfrak{B}$. Однако $\mathfrak{B}$ не является изолированной подполугруппой, ибо $2^3 \in \mathfrak{B}$, но $2 \overline{\in} \mathfrak{B}$.

6.4. Выделение полугрупп, характеризующихся изолированностью тех или иных идеалов, как заметил Круазо [5], удобно произвести, используя понятие классов регулярности (II, 6.11).

(α). *Для того чтобы все левые идеалы полугруппы* $\mathfrak{A}$ *были изолированными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Действительно, пусть все левые идеалы $\mathfrak{A}$ изолированные. Для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ изолированным является левый идеал $\mathfrak{A}A^2$. Но $A^3 \in \mathfrak{A}A^2$. Поэтому $A \in \mathfrak{A}A^2$, т. е. при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$A = XA^2,$$

что и означает, что $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$.

В свою очередь, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$, $\mathfrak{L}$ есть некоторый левый идеал $\mathfrak{A}$ и $A^2 \in \mathfrak{L}$ ($A \in \mathfrak{A}$), то при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$A = XA^2.$$

Так как $A^2 \in \mathfrak{L}$, то отсюда следует, что и $A \in \mathfrak{L}$. Согласно 7.2, (η), это означает изолированность $\mathfrak{L}$.

(β). *Для того чтобы все правые идеалы полугруппы* $\mathfrak{A}$ *были изолированными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0).$$

Доказательство аналогично доказательству (α).

(γ). *Для того чтобы все идеалы (и левые и правые) полугруппы* $\mathfrak{A}$ *были изолированными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0).$$

Это непосредственное следствие (α) и (β).

(δ). *Для того чтобы все двусторонние идеалы полугруппы* $\mathfrak{A}$ *были изолированными, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $A \in \mathfrak{A}$ *имело место*

$$A \in \mathfrak{A}A^2\mathfrak{A}.$$

Действительно, если всякий двусторонний идеал является изолированным, то, в частности, изолированным будет и двусторонний идеал $\mathfrak{A}A^2\mathfrak{A}$. Но $A^4 \in \mathfrak{A}A^2\mathfrak{A}$. Поэтому $A \in \mathfrak{A}A^2\mathfrak{A}$.

Пусть теперь всякий элемент A содержится в $\mathfrak{A}A^2\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{T}$ есть произвольный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Если $A^2 \in \mathfrak{T}$ ($A \in \mathfrak{A}$), то $A \in \mathfrak{A}A^2\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{T}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}$ является изолированным идеалом (6.2, (η)).

6.5. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторое непустое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим совокупность всех изолированных подполугрупп $\mathfrak{A}$, содержащих $\mathfrak{K}$. Благодаря 6.2, (β) она непуста. Минимальная подполугруппа в этой совокупности (2.1) называется *минимальной над* $\mathfrak{K}$ *изолированной подполугруппой* $\mathfrak{A}$. Аналогично минимальная полугруппа в совокупности всех вполне изолированных подполугрупп $\mathfrak{A}$, содержащих $\mathfrak{K}$, называется *минимальной над* $\mathfrak{K}$ *вполне изолированной подполугруппой* $\mathfrak{A}$.

Согласно сказанному в 2.3, из свойств 6.2, (α), (β), (δ) следует, что существует универсально минимальная над $\mathfrak{K}$ изолированная подполугруппа $\mathfrak{A}$. Она является единственной

минимальной над $\mathfrak{K}$ изолированной подполугруппой $\mathfrak{A}$. Часто ее называют изолятором $\mathfrak{K}$. Что касается минимальных над $\mathfrak{K}$ вполне изолированных подполугрупп, то таких может быть и несколько.

Очевидно, для изолированных подполугрупп и только для них минимальная над ней изолированная подполугруппа совпадает с самой подполугруппой.

Для вполне изолированных подполугрупп и только для них минимальная над ней вполне изолированная подполугруппа совпадает с самой подполугруппой.

6.6. Свойство изолированности подробно было исследовано П. Г. Конторовичем [1], [2], [3] для одного класса полугрупп, вложимых в группы (III, 1.10). Ниже мы рассмотрим полученные им описания минимальных над заданным идеалом изолированных и вполне изолированных подполугрупп. Мы отнесем эти исследования к одному классу полугрупп, охватывающему класс полугрупп, вложимых в группы.

6.7. Будем говорить, что полугруппа $\mathfrak{A}$ удовлетворяет *коммутаторному условию*, если для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ всегда найдутся такие элементы $L_{A,B}$, $R_{A,B}$, что

$$AB = L_{A,B}A, \quad AB = BR_{A,B}.$$

Очевидно, коммутаторное условие означает совпадение отношений левой делимости и правой делимости. Значение этого условия существенно, в частности, потому, что ему удовлетворяет всякая коммутативная полугруппа и всякая такая полугруппа $\mathfrak{A}$, для которой существует такая надгруппа $\mathfrak{G}$, что

$$G^{-1}\mathfrak{A}G \subset \mathfrak{A}$$

для всякого $G \in \mathfrak{G}$. Действительно, для такой полугруппы в качестве $L_{A,B}$ и $R_{A,B}$, очевидно, можно взять

$$L_{A,B} = ABA^{-1}, \quad R_{A,B} = B^{-1}AB,$$

где A^{-1} и B^{-1} есть элементы, обратные соответственно к A и B в $\mathfrak{G}$ (благодаря условию для $\mathfrak{G}$ и $L_{A,B}$ и $R_{A,B}$ принадлежат $\mathfrak{A}$).

6.8. ***Лемма.*** *Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ удовлетворяет коммутаторному условию* (6.7), *тогда всякий идеал $\mathfrak{A}$ является двусторонним.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$. Если $X \in \mathfrak{L}$ и $A \in \mathfrak{A}$, то

$$XA = L_{AX}X \in \mathfrak{L}.$$

Следовательно, $\mathfrak{L}$ является одновременно и правым идеалом $\mathfrak{A}$.

Аналогично показываем, что и всякий правый идеал $\mathfrak{A}$ обязательно является двусторонним.

6.9. *Теорема.* *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа, удовлетворяющая коммутаторному условию, $\mathfrak{T}$ некоторый ее идеал.*

Минимальными над $\mathfrak{T}$ вполне изолированными подполугруппами $\mathfrak{A}$ являются те, и только те подполугруппы $\mathfrak{P}$, для которых $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, максимальная в множестве подполугрупп $\mathfrak{A}$, содержащихся в $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Если же это множество пусто, то сама $\mathfrak{A}$ является минимальной над $\mathfrak{T}$ вполне изолированной подполугруппой $\mathfrak{A}$.

Подполугруппа $\mathfrak{P}$ является идеалом $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{Q}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, принадлежащая $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ и не содержащаяся ни в какой, отличной от самой $\mathfrak{Q}$, подполугруппе, принадлежащей $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ (если в $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ не содержится подполугрупп $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{Q}$ есть пустое множество). Обозначим через $\mathfrak{N}$ идеал, являющийся объединением всех идеалов $\mathfrak{A}$, лежащих в $\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{Q}$. Так как $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P} \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$, то $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}$ и потому $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{N}$. Предположим, что произведение некоторых элементов A_1 и A_2 из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ содержится в $\mathfrak{N}$. Оба множества

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{A}A_1 \cup A_1, \quad \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{A}A_2 \cup A_2,$$

очевидно, являются левыми идеалами. Так как они не содержатся в $\mathfrak{N}$, то они должны иметь общие элементы с $\mathfrak{Q}$:

$$F_1 = S_1A_1 \in \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{Q}, \quad F_2 = S_2A_2 \in \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{Q}$$

(случай, когда $F_i = A_i$, вполне аналогичен). Но

$$F_1F_2 = S_1A_1S_2A_2 = S_1L_{A_1S_2}A_1A_2 \in \mathfrak{N} \subset \mathfrak{P},$$

что противоречит тому, что F_1F_2 есть произведение элементов, принадлежащих полугруппе $\mathfrak{Q}$, и потому должно содержаться в $\mathfrak{Q}$. Из этого следует, что $\mathfrak{N}$ есть вполне изолированный идеал. Так как $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{T}$, то $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ есть под-

полугруппа $\mathfrak{A}$, принадлежащая $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Благодаря

$$\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N} \supset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$$

это возможно лишь при $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}$, т. е. когда $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}$. Таким образом, $\mathfrak{P}$ оказывается вполне изолированной подполугруппой и идеалом. Пусть $\mathfrak{P}'$ есть вполне изолированная подполугруппа $\mathfrak{A}$, такая, что

$$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}.$$

Тогда $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}'$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, принадлежащая $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ и содержащая $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}$. По исходному предположению относительно $\mathfrak{Q}$ отсюда следует, что $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}' = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}$, т. е. $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$. Это доказывает, что $\mathfrak{P}$ есть минимальная над $\mathfrak{T}$ вполне изолированная подполугруппа $\mathfrak{A}$.

2) Пусть $\mathfrak{P}$ есть минимальная над $\mathfrak{T}$ вполне изолированная подполугруппа. $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, принадлежащая $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ (6.2, (γ)). Согласно III, 4.7, в $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ найдется такая подполугруппа $\mathfrak{Q}'$, содержащая $\mathfrak{Q}$, которая не содержится ни в какой подполугруппе, отличной от $\mathfrak{Q}'$ и принадлежащей $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Согласно доказанному в первой части, $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{Q}'$ есть минимальная над $\mathfrak{T}$ вполне изолированная подполугруппа. Так как $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$, то благодаря предположению о $\mathfrak{P}$ отсюда следует $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}$, т. е. $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$. Это и заканчивает доказательство, поскольку $\mathfrak{Q}'$ обладает требуемым для $\mathfrak{Q}$ свойством.

6.10. *Теорема.* *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа, удовлетворяющая коммутаторному условию, и $\mathfrak{T}$ есть идеал $\mathfrak{A}$. Тогда минимальная над $\mathfrak{T}$ изолированная подполугруппа сама является идеалом $\mathfrak{A}$, состоит из всех элементов, некоторая степень которых содержится в $\mathfrak{T}$, и равна пересечению всех минимальных над $\mathfrak{T}$ вполне изолированных подполугрупп полугруппы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{T}'$ есть минимальная над $\mathfrak{T}$ изолированная подполугруппа и $\mathfrak{B}$ множество всех таких элементов, некоторая степень которых принадлежит $\mathfrak{T}$. Если $X^n \in \mathfrak{T}$ ($X \in \mathfrak{A}$), то $X \in \mathfrak{T}'$. Следовательно, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}'$.

$\mathfrak{B}$ есть идеал $\mathfrak{A}$. Действительно, из $X^n \in \mathfrak{T}$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ получаем:

$$(XA)^n = XAXAXA \ldots XA = XXR_{A,X}AXA \ldots XA =$$
$$= XXXR_{(R_{A,X},AX)}A \ldots XA = \ldots = X^nY \in \mathfrak{T},$$

т. е. из $X \in \mathfrak{B}$ следует $XA \in \mathfrak{B}$.

Изолированность $\mathfrak{B}$ очевидна. Из нее следует $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{T}'$. Учитывая доказанное ранее обратное включение, получаем $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}'$.

2) Обозначим через $\mathfrak{C}$ пересечение всех минимальных над $\mathfrak{T}$ вполне изолированных подполугрупп $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{T}'$, так как $\mathfrak{T}'$ содержится в каждой изолированной подполугруппе, содержащей $\mathfrak{T}$ (6.2, (δ); 6.5).

Пусть $X \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}'$. Так как $\mathfrak{T}'$ изолированная подполугруппа, то $[X] \cap \mathfrak{T}' = \varnothing$, т. е $[X] \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}' \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Пусть $\mathfrak{N}$ есть такая подполугруппа, содержащая $[X]$, которая принадлежит $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$, но не содержится ни в какой отличной от самой $\mathfrak{N}$ подполугруппе, принадлежащей $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ (III, 4.7). Согласно 6.9, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$ есть идеал, являющийся минимальной над $\mathfrak{T}$ вполне изолированной подполугруппой $\mathfrak{A}$. Так как $X \in \mathfrak{N}$, то $X \bar{\in} \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$, поэтому $X \bar{\in} \mathfrak{C}$. Мы показали, что $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}'$ и $\mathfrak{C}$ не могут иметь общих элементов. Следовательно, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{T}'$. Ввиду полученного ранее обратного включения имеет место $\mathfrak{T}' = \mathfrak{C}$.

6.11. Среди полугрупп имеются и такие, которые вовсе не имеют собственных изолированных идеалов. Условие этого для коммутативных полугрупп было найдено Тьерреном [16].

В коммутативной полугруппе $\mathfrak{A}$ введем отношение $\mathfrak{n}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{n})$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$, если

$$X\mathfrak{A} \cap [Y] \neq \varnothing.$$

Если в $\mathfrak{A}$ для любых элементов X и Y имеет место $X \sim Y(\mathfrak{n})$, то в $\mathfrak{A}$ нет собственных изолированных идеалов.

Действительно, предположим, что $\mathfrak{B}$ есть собственный изолированный идеал $\mathfrak{A}$. Пусть $B \in \mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Так как $B \sim A(\mathfrak{n})$, то при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ и некотором натуральном числе n должно иметь место $BZ = A^n$. Но $BZ \in \mathfrak{B}$, а $A^n \bar{\in} \mathfrak{B}$ ввиду изолированности $\mathfrak{B}$.

Если в $\mathfrak{A}$ найдутся элементы X и Y такие, что $X \not\sim Y(\mathfrak{n})$, то $\mathfrak{A}$ обладает собственными вполне изолированными идеалами.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех таких элементов B, что $B \not\sim Y(\mathfrak{n})$, и через $\mathfrak{C}$ — совокупность всех таких элементов C, что $C \sim Y(\mathfrak{n})$.

$\mathfrak{B}$ непуста, ибо $X \in \mathfrak{B}$, а $\mathfrak{C}$ непуста, ибо $Y \in \mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ есть идеал $\mathfrak{A}$, так как при любых $B \in \mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{A}$ из $B\mathfrak{A} \cap [Y] = \varnothing$ следует $BA\mathfrak{A} \cap [Y] = \varnothing$.

Покажем, что $\mathfrak{B}$ вполне изолирован. Предположим, что $C_1C_2 \in \mathfrak{B}$, причем C_1, $C_2 \in \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Последнее означает, что при некоторых Z_1, $Z_2 \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$C_1Z_1 = Y^n, \quad C_2Z_2 = Y^m.$$

Но тогда

$$(C_1C_2)(Z_1Z_2) = Y^{n+m},$$

что противоречит тому, что $C_1C_2 \in \mathfrak{B}$.

6.12. Из 6.11, в частности, следует, что если коммутативная полугруппа не имеет собственных вполне изолированных идеалов, то она не имеет и собственных изолированных идеалов.

6.13. Наравне с условиями изолированности и полной изолированности иногда приходится рассматривать родственные условия. Например, для подполугруппы $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ иногда требуют, чтобы $XY \in \mathfrak{B}$ было возможно лишь при X, $Y \in \mathfrak{B}$ (Мак-Кензи [1]). Иногда ограничиваются требованием, чтобы из $XY \in \mathfrak{B}$ следовало $X^n \in \mathfrak{B}$ или $Y^n \in \mathfrak{B}$ при некотором натуральном n (Ауберт [1]).

Указанные условия, так же как и условия изолированности и полной изолированности, могут быть заданы исходя из дополнения $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ к полугруппе $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{B}$ будет изолированной, если $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ вместе с каждым элементом X содержит и X^2.

$\mathfrak{B}$ будет вполне изолированной, если $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$ или пусто.

$\mathfrak{B}$ удовлетворяет тому условию, что $XY \in \mathfrak{B}$ влечет X, $Y \in \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{B}$ удовлетворяет тому условию, что $XY \in \mathfrak{B}$ влечет $X^n \in \mathfrak{B}$ или $Y^n \in \mathfrak{B}$ при некотором n, если $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ таково, что из $[X]$, $[Y] \subset \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ всегда следует $XY \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$.

ГЛАВА V

ПОЛУГРУППЫ С МИНИМАЛЬНЫМИ ИДЕАЛАМИ

§ 1. Двусторонние идеалы, являющиеся группой

1.1. В настоящей главе мы займемся рассмотрением минимальных левых, минимальных правых и минимальных двусторонних идеалов полугрупп (IV, 3.3). Конечно, не всякая полугруппа обладает такими идеалами. Факт наличия в полугруппе тех или иных минимальных идеалов, интересный и сам по себе, оказывает существенное влияние также и на некоторые другие свойства полугрупп. Так как при этом многие свойства полугрупп, обладающих минимальными идеалами, поддаются более глубокому изучению, а строение самих минимальных идеалов удается выяснить относительно в большей степени, то минимальные идеалы привлекали большое внимание математиков, изучающих полугруппы.

Первые результаты в этом направлении получил А. К. Сушкевич [3], который занимался в основном конечными полугруппами, в которых минимальные левые, правые и двусторонние идеалы, конечно, всегда существуют. В дальнейшем, исследования были продолжены и на бесконечные полугруппы в работах Риса [1], [2], Клиффорда [6], [7], Рича [1], Шварца [1], [3], [4], Хасимото [2], [3], Л. М. Глускина [3], [6], Тесье [2], [4], Тамура [9].

1.2. Прежде всего мы займемся вопросом о существовании универсально минимального идеала в совокупности всех идеалов (левых и правых, в том числе и двусторонних) полугруппы. Мы покажем ниже, что если такой идеал существует, то он является двусторонним. Таким образом, в случае существования такого идеала, он является единственным минимальным левым, единственным минимальным правым и единственным минимальным двусторонним идеалом.

Как мы покажем, вопрос о существовании универсально минимального идеала в совокупности всех идеалов эквивалентен с вопросом о существовании двусторонних идеалов, являющихся группой.

Примеры двусторонних идеалов, являющихся группой, мы уже видели (II, 1.8). Конечно, не всякая полугруппа обладает двусторонним идеалом, являющимся группой. Например, бесконечная моногенная полугруппа вообще не имеет подполугрупп, являющихся группами.

Теорема. *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает двусторонним идеалом* $\mathfrak{T}$, *являющимся группой, то* $\mathfrak{T}$ *содержится во всяком идеале* $\mathfrak{A}$, *таким образом* $\mathfrak{T}$ *является универсально минимальным идеалом в совокупности всех идеалов* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ есть произвольный левый идеал (рассуждения для правого идеала вполне аналогичны). Так как $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{L}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{T}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}.$$

При этом $\mathfrak{T}\mathfrak{L}$, очевидно, есть левый идеал $\mathfrak{T}$. Но $\mathfrak{T}$ как группа не имеет идеалов, отличных от самой себя (IV, 1.8). Следовательно,

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{T}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}.$$

Содержась во всех идеалах полугруппы $\mathfrak{A}$ и сам будучи идеалом, $\mathfrak{T}$ тем самым является пересечением совокупности всех идеалов $\mathfrak{A}$, т. е. универсально минимальным множеством в этой совокупности (IV, 2.3).

1.3. ***Следствие.*** *Полугруппа может иметь не более одного двустороннего идеала, являющегося группой.*

1.4. Вопрос о наличии в полугруппе двустороннего идеала, являющегося группой, оказывается тождественным с вопросом о существовании в полугруппе зероидных элементов (II, 1.6) Клиффорда и Миллера [1].

Теорема. *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *имеет двусторонний идеал, являющийся группой тогда и только тогда, когда среди ее элементов имеются элементы, делящиеся и справа и слева на всякий элемент* $\mathfrak{A}$. *В этом случае двусторонний идеал, являющийся группой, состоит из всех элементов, делящихся и справа и слева на всякий элемент* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, являющийся группой.

A произвольный элемент $\mathfrak{A}$, T произвольный элемент $\mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал, то

$$TA = T' \in \mathfrak{T}.$$

Так как $\mathfrak{T}$ есть группа, то при некотором $X \in \mathfrak{T}$ имеем

$$XT' = T,$$

откуда

$$(XT)A = XT' = T.$$

Аналогично доказывается, что T делится на A и слева.

2) Пусть множество $\mathfrak{C}$, состоящее из всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$, делящихся и справа и слева на всякий элемент $\mathfrak{A}$, непусто. В II, 1.6 мы уже показали, что $\mathfrak{C}$ есть группа. Пусть A есть произвольный элемент $\mathfrak{A}$. Единица $E_{\mathfrak{C}}$ группы $\mathfrak{C}$ делится слева на элемент $AE_{\mathfrak{C}}$:

$$E_{\mathfrak{C}} = AE_{\mathfrak{C}}Y.$$

Умножая это равенство справа на $E_{\mathfrak{C}}$, получаем

$$E_{\mathfrak{C}} = AE_{\mathfrak{C}}YE_{\mathfrak{C}} = AC_0.$$

Из того, что $E_{\mathfrak{C}}$ делится на всякий элемент $\mathfrak{A}$ и справа и слева, следует, что и элемент $C_0 = E_{\mathfrak{C}}YE_{\mathfrak{C}}$ обладает этим свойством (II, 1.4, (α)), т. е. $C_0 \in \mathfrak{C}$. Таким образом,

$$A\mathfrak{C} = AE_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} = AC_0C_0^{-1}\mathfrak{C} = E_{\mathfrak{C}}C_0^{-1}\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$$

(здесь C_0^{-1} есть обратный к C_0 относительно $E_{\mathfrak{C}}$). Следовательно, $\mathfrak{C}$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{C}$ есть правый идеал.

Итак, оказалось, что, если $\mathfrak{C}$ непусто, то оно есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, являющийся группой.

1.5. *Следствие.* *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает двусторонним идеалом, являющимся группой, то всякий элемент $\mathfrak{A}$, делящийся слева на все элементы $\mathfrak{A}$, будет делиться на все элементы $\mathfrak{A}$ и справа; каждый элемент, делящийся справа на все элементы $\mathfrak{A}$, будет делиться на все элементы $\mathfrak{A}$ и слева.*

Действительно, пусть T есть некоторый элемент из двустороннего идеала $\mathfrak{T}$ являющегося группой. A — произволь-

ный элемент $\mathfrak{A}$, делящийся слева на все элементы $\mathfrak{A}$. При некотором $Y \in \mathfrak{A}$ должно иметь место

$$A = TY.$$

Так как $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то отсюда следует $A \in \mathfrak{T}$. Поэтому, согласно 1.4, A должен делиться справа на всякий элемент $\mathfrak{A}$.

1.6. Отметим, что в полугруппе, не обладающей двусторонним идеалом, являющимся группой, свойство 1.5 может и не соблюдаться. Например, в полугруппе с количеством элементов не меньшим двух, в которой $XY = Y$ для любых элементов X и Y, каждый элемент делится на все элементы слева. В то же время в этой полугруппе нет элементов, делящихся на все элементы справа.

1.7. Пользуясь 1.4, нетрудно доказать, что полученное в 1.2 достаточное условие существования универсально минимального идеала в совокупности всех левых и правых идеалов является также и необходимым условием.

Теорема. *Если совокупность всех идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$ обладает универсально минимальным идеалом, т. е. пересечение всех идеалов $\mathfrak{A}$ непусто (IV, 2.3), то это пересечение есть двусторонний идеал, являющийся группой.*

Доказательство. Пусть пересечение $\mathfrak{T}$ всех идеалов $\mathfrak{A}$ непусто. Возьмем произвольные элементы A из $\mathfrak{A}$ и T из $\mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{A}A$ и $A\mathfrak{A}$ являются идеалами $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}A \supset \mathfrak{T}$ и $A\mathfrak{A} \supset \mathfrak{T}$. Это значит, что при некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$

$$XA = T, \quad AY = T.$$

Следовательно, T делится и справа и слева на всякий элемент полугруппы $\mathfrak{A}$.

С другой стороны, если $Z \in \mathfrak{A}$ делится и справа и слева на все элементы $\mathfrak{A}$, то Z содержится в каждом идеале полугруппы $\mathfrak{A}$. Действительно, если $\mathfrak{L}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$ (для правого идеала аналогично) и $L \in \mathfrak{L}$, то при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$Z = XL,$$

и так как $\mathfrak{L}$ есть левый идеал, то $Z \in \mathfrak{L}$. Из доказанного следует, что $Z \in \mathfrak{T}$.

Мы показали, что $\mathfrak{T}$ есть множество всех элементов $\mathfrak{A}$, делящихся и справа и слева на всякий элемент $\mathfrak{A}$. Согласно 1.4, отсюда вытекает доказываемое свойство $\mathfrak{T}$.

1.8. Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает двусторонним идеалом $\mathfrak{T}$, являющимся группой, то единица этой группы $E_{\mathfrak{T}}$ есть элемент, обладающий следующими свойствами:

(α). $E_{\mathfrak{T}}$ есть идемпотент;

(β). $E_{\mathfrak{T}}$ делится слева и справа на любой элемент $\mathfrak{A}$ (1.4);

(γ). $E_{\mathfrak{T}}$ перестановочен со всяким элементом $\mathfrak{A}$.

Действительно, при любом $A \in \mathfrak{A}$

$$AE_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{T}, \quad E_{\mathfrak{T}}A \in \mathfrak{T},$$

и потому

$$AE_{\mathfrak{T}} = E_{\mathfrak{T}}(AE_{\mathfrak{T}}) = (E_{\mathfrak{T}}A)E_{\mathfrak{T}} = E_{\mathfrak{T}}A.$$

(δ). Для всякого идемпотента I полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет место

$$IE_{\mathfrak{T}} = E_{\mathfrak{T}}I = E_{\mathfrak{T}}.$$

Действительно, согласно (γ), $IE_{\mathfrak{T}} = E_{\mathfrak{T}}I$ и

$$(E_{\mathfrak{T}}I)^2 = E_{\mathfrak{T}}I \cdot E_{\mathfrak{T}}I = E_{\mathfrak{T}}^2 I^2 = E_{\mathfrak{T}}I.$$

$E_{\mathfrak{T}}I$ принадлежит $\mathfrak{T}$. Поскольку $\mathfrak{T}$ как группа имеет лишь один идемпотент $E_{\mathfrak{T}}I = E_{\mathfrak{T}}$.

Наличие в $\mathfrak{A}$ элемента со свойством (β) благодаря 1.4 является также и достаточным для того, чтобы $\mathfrak{A}$ обладала двусторонним идеалом, являющимся группой. Полугруппу, обладающую элементом, удовлетворяющим свойствам (α), (β), (γ), Тьеррен [6] назвал гомогруппой. Таким образом, гомогруппа есть не что иное, как полугруппа, обладающая двусторонним идеалом, являющимся группой. Помимо свойств, приведенных выше, для гомогрупп получен еще целый ряд свойств (см., например, Тьеррен [19]).

Отметим, что, согласно 1.4, всякая конечная коммутативная полугруппа является гомогруппой, поскольку произведение всех ее элементов, очевидно, делится и слева и справа на каждый ее элемент. Группы относятся к гомогруппам, причем гомогруппа будет группой тогда и только тогда, когда она не имеет собственных двусторонних идеалов.

§ 2. Полугруппы с минимальными левыми идеалами

2.1. Как мы уже отмечали, не всякая полугруппа обладает минимальными левыми, правыми или двусторонними идеалами. В настоящем параграфе мы будем рассматривать полугруппы, обладающие минимальными левыми идеалами. Мы выясним связь между различными минимальными левыми идеалами и их взаимоотношения с минимальным двусторонним идеалом. Разумеется, аналогичные результаты имеют место для полугрупп, обладающих минимальными правыми идеалами. Упомянутые результаты были получены частью Клиффордом [6], частью Шварцем [3].

2.2. Оказывается, что все минимальные левые идеалы могут быть легко получены исходя из одного из них.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *есть минимальный левый идеал полугруппы* $\mathfrak{A}$. *Тогда при любом* $S \in \mathfrak{A}$ *произведение* $\mathfrak{L}S$ *также является минимальным левым идеалом* $\mathfrak{A}$, *причем всякий минимальный левый идеал* $\mathfrak{A}$ *может быть представлен в виде* $\mathfrak{L}S$ *при некотором* $S \in \mathfrak{A}$.

Различные минимальные левые идеалы $\mathfrak{A}$ *не имеют общих элементов,*

Доказательство. 1) $\mathfrak{L}S$, очевидно, является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Пусть некоторый левый идеал $\mathfrak{L}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержится в $\mathfrak{L}S$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех таких элементов X из $\mathfrak{L}$, для которых $XS \in \mathfrak{L}'$. Так как каждый элемент из $\mathfrak{L}'$ содержится в $\mathfrak{L}S$, т. е. представим в виде XS, где $X \in \mathfrak{L}$, то множество $\mathfrak{N}$ непусто. Из того, что $\mathfrak{L}'$ есть левый идеал, следует, что при любых $X \in \mathfrak{N}$ и $Z \in \mathfrak{A}$

$$ZXS \subset Z\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}',$$

т. е. $ZX \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{N}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$. Но $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$, и так как $\mathfrak{L}$ есть минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{L}'$ содержится в $\mathfrak{N}S$. Но по определению $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}S$ содержится в $\mathfrak{L}'$. Следовательно,

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{N}S = \mathfrak{L}S.$$

Отсюда заключаем, что $\mathfrak{L}S$ есть минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$.

2) Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторый минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$. Возьмем в $\mathfrak{M}$ некоторый элемент $S \in \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ есть левый идеал, то

$$\mathfrak{L}S \subset \mathfrak{A}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}.$$

$\mathfrak{L}S$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в минимальном левом идеале $\mathfrak{M}$. По определению это возможно лишь при $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}S$.

3) Пусть минимальные левые идеалы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ полугруппы $\mathfrak{A}$ имеют общий элемент X. Пересечение $\mathfrak{M}_0$ левых идеалов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, будучи непустым, само является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Оно содержится и в $\mathfrak{M}_1$ и в $\mathfrak{M}_2$, а так как они минимальные левые идеалы, то $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_2$.

2.3. *Следствие.* *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает минимальными левыми идеалами, то в каждом левом идеале $\mathfrak{A}$ содержится некоторый минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ есть некоторый минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ произвольный левый идеал $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{L}N$ при всяком $N \in \mathfrak{N}$ принадлежит $\mathfrak{N}$. Согласно 2.2, $\mathfrak{L}N$ есть минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$.

2.4. Как мы уже отмечали, отношение, состоящее в свойстве быть левым или правым идеалом, не является транзитивным. Поэтому из определения непосредственно еще не следует, не могут ли минимальные левые и правые идеалы сами иметь свои собственные соответственно левые или правые идеалы. Покажем, что этого быть не может. Отсюда, в частности, будет следовать, что левый идеал полугруппы будет минимальным левым идеалом тогда и только тогда, когда он является полугруппой, не имеющей собственных левых идеалов.

Теорема. *Если $\mathfrak{L}$ есть минимальный левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{L}$ является полугруппой, не имеющей собственных левых (а следовательно, и двусторонних) идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ есть произвольный левый идеал полугруппы $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\mathfrak{L}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}.$$

Но так как $\mathfrak{L}$ есть левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{L}\mathfrak{N}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{L})\mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}\mathfrak{N}.$$

Следовательно, $\mathfrak{L}\mathfrak{N}$ оказывается левым идеалом $\mathfrak{A}$, содержащимся в минимальном левом идеале $\mathfrak{L}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Это возможно лишь при $\mathfrak{L}\mathfrak{N} = \mathfrak{L}$. Но, как мы показали раньше, $\mathfrak{L}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{L},$$

т. е. $\mathfrak{L}$ не имеет собственных левых идеалов.

2.5. Среди различных идеалов полугруппы по ряду причин, с некоторыми из которых мы уже познакомились выше, а другие вскоре выяснятся, особый интерес представляет минимальный двусторонний идеал полугруппы. Как мы уже отметили, такой идеал, если он существует, является универсально минимальным двусторонним идеалом (IV, 4.4). В § 1 мы рассмотрели частный случай такого идеала, именно двусторонние идеалы, являющиеся группами. Однако минимальные двусторонние идеалы могут существовать и в других случаях. Одним достаточным признаком существования минимального двустороннего идеала в полугруппе является наличие в ней минимальных левых (или правых) идеалов. В этом случае минимальный двусторонний идеал является их объединением.

Теорема. *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает минимальным левым идеалом, то* $\mathfrak{A}$ *обладает минимальным двусторонним идеалом, который равен объединению всех минимальных левых идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ есть один из минимальных левых идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$. Из 2.2 следует, что

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \bigcup_{S \in \mathfrak{A}} \mathfrak{L}S$$

есть объединение всех минимальных левых идеалов $\mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{T}$ есть произвольный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Произведение $\mathfrak{T} \cdot (\mathfrak{L}S)$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$, содержащимся в минимальном левом идеале $\mathfrak{L}S$. Следовательно,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{L}S = \mathfrak{L}S.$$

Но, с другой стороны, из того, что $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, следует, что

$$\mathfrak{T}\mathfrak{L}S \subset \mathfrak{T}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{L}S \subset \mathfrak{T}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{T},$$

т. е. $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ является универсально минимальным двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

2.6. Для случая, рассмотренного в теореме 2.5, легко выяснить, каковы левые идеалы минимального двустороннего идеала полугруппы.

Теорема. *Пусть полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает минимальными левыми идеалами.* $\mathfrak{K}$ *есть минимальный двусторонний идеал* $\mathfrak{A}$. *Тогда левые идеалы* $\mathfrak{A}$, *содержащиеся в* $\mathfrak{K}$, *и только они, являются левыми идеалами полугруппы* $\mathfrak{K}$.

Доказательство. То, что всякий левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{K}$, будет левым идеалом полугруппы $\mathfrak{K}$ — очевидно.

Пусть $\mathfrak{T}$ есть произвольный левый идеал полугруппы $\mathfrak{K}$. T произвольный элемент $\mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{K}$, согласно 2.5, есть объединение минимальных левых идеалов $\mathfrak{A}$, то T содержится в некотором минимальном левом идеале $\mathfrak{L}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{K}T$ есть левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}$. Следовательно,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{K}T.$$

В частности, $T \subset \mathfrak{K}T$. Таким образом, каждый элемент $\mathfrak{T}$ содержится в $\mathfrak{K}\mathfrak{T}$, т. е.

$$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{K}\mathfrak{T}.$$

Но, с другой стороны, из того, что $\mathfrak{T}$ есть левый идеал $\mathfrak{K}$, следует

$$\mathfrak{T} \supset \mathfrak{K}\mathfrak{T}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{K}\mathfrak{T}.$$

Но $\mathfrak{K}\mathfrak{T}$, очевидно, является левым идеалом полугруппы $\mathfrak{A}$.

2.7. Вопросы о существовании в полугруппе минимальных левых, правых и двусторонних идеалов, а также взаимная связь их между собой представляют большую важность для изучения многих свойств полугрупп. В 2.5 было показано, что если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает минимальными левыми или минимальными правыми идеалами, то она обладает и минимальным двусторонним идеалом $\mathfrak{K}$. При этом $\mathfrak{K}$, согласно 2.5, содержит все минимальные левые и минимальные правые идеалы полугруппы $\mathfrak{A}$, которые, согласно 2.6, являются соответственно минимальными левыми и правыми идеалами полугруппы $\mathfrak{K}$. Но $\mathfrak{K}$, как было показано в IV, 4.8, является полугруппой, не имеющей собственных двусторонних идеалов.

Таким образом, вопрос о взаимной связи минимальных левых и минимальных правых идеалов произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ оказывается равносильным вопросу о взаимной связи минимальных левых и минимальных правых идеалов полугруппы $\mathfrak{R}$, являющейся полугруппой без собственных двусторонних идеалов. Это обстоятельство представляет собой еще одну причину, определяющую интерес к полугруппам без собственных двусторонних идеалов (попутно напоминаем, что в IV, 4.10 мы уже обращали внимание на большую принципиальную важность таких полугрупп).

2.8. Условие отсутствия в полугруппе собственных двусторонних идеалов, очевидно, равносильно тому, чтобы сама полугруппа являлась своим минимальным двусторонним идеалом. При наличии в полугруппе минимальных левых идеалов это, согласно 2.5, будет иметь место тогда и только тогда, когда полугруппа является объединением всех своих минимальных левых идеалов.

2.9. ***Теорема.*** *Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает минимальными левыми идеалами. Для того чтобы в $\mathfrak{A}$ не существовало собственных двусторонних идеалов, необходимо и достаточно, чтобы каждый главный левый идеал (IV, 3.6) был минимальным левым идеалом.*

Доказательство. 1) Каждый элемент содержится в своем главном левом идеале. Отсюда следует, что если все главные левые идеалы являются минимальными левыми идеалами, то $\mathfrak{A}$ есть объединение минимальных левых идеалов и потому не имеет собственных двусторонних идеалов (2.8).

2) Если $\mathfrak{A}$ не имеет собственных двусторонних идеалов, то, согласно 2.8, каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ содержится в некотором минимальном левом идеале $\mathfrak{L}$. Главный левый идеал элемента A содержится в левом идеале $\mathfrak{L}$, содержащем A. Из минимальности $\mathfrak{L}$ вытекает, что главный левый идеал A совпадает с $\mathfrak{L}$.

2.10. ***Теорема.*** *Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает минимальными левыми идеалами. Для того чтобы в $\mathfrak{A}$ не существовало собственных двусторонних идеалов, необходимо и достаточно, чтобы всякий правый делитель произвольного элемента полугруппы сам всегда делился бы справа на этот элемент.* (Это условие означает симметричность отношения делимости справа).

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ не имеет собственных двусторонних идеалов.

Нам надо показать, что из того, что некоторый элемент A делится справа на B

$$A = XB \quad (A, B, X \in \mathfrak{A}),$$

следует, что и B делится справа на A.

Если $A = B$, то это очевидно. Пусть $A \neq B$. Так как

$$\mathfrak{A}A \cup A = \mathfrak{A}XB \cup XB \subset \mathfrak{A}B \cup B,$$

где $\mathfrak{A}A \cup A$ и $\mathfrak{A}B \cup B$ суть главные левые идеалы $\mathfrak{A}$, то, согласно 2.9,

$$\mathfrak{A}A \cup A = \mathfrak{A}B \cup B.$$

Так как $B \neq A$, то отсюда следует $B \in \mathfrak{A}A$, т. е. при некотором $Y \in \mathfrak{A}$

$$B = Y\mathfrak{A}.$$

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ всякий правый делитель произвольного элемента сам делится справа на этот элемент.

Покажем, что произвольный главный левый идеал $\mathfrak{L} = A \cup \mathfrak{A}A$ $(A \in \mathfrak{A})$ полугруппы $\mathfrak{A}$ является минимальным левым идеалом. Согласно, 2.9, отсюда будет следовать, что $\mathfrak{A}$ не имеет собственных двусторонних идеалов.

Пусть $\mathfrak{L}'$ есть некоторый левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}$ и $B \in \mathfrak{L}'$. Если $B = A$, то, очевидно, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$. Пусть $B \neq A$. Так как $\mathfrak{L}'$ есть левый идеал, то

$$B \cup \mathfrak{A}B \subset \mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}.$$

Так как $B \in \mathfrak{L}$ и $B \neq A$, то при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$B = XA.$$

Отсюда, согласно сделанному относительно $\mathfrak{A}$ предположению, следует, что A, в свою очередь, должно делиться справа на B

$$A = YB.$$

Благодаря этому

$$\mathfrak{L} = A \cup \mathfrak{A}A = YB \cup \mathfrak{A}YB \subset \mathfrak{A}B \subset \mathfrak{L}'$$

и, следовательно, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.

2.11. Особо остановимся на разобранном Клиффордом и Миллером [1] случае, когда полугруппа имеет один единственный минимальный левый идеал. Такой идеал, согласно 2.3,

будет универсально минимальным левым идеалом. Для существования такого идеала имеет место необходимое и достаточное условие, непосредственно получающееся из нижеследующей теоремы.

Теорема. *Если среди элементов полугруппы* $\mathfrak{A}$ *имеются элементы, делящиеся справа на все элементы* $\mathfrak{A}$, *то совокупность таких элементов есть минимальный двусторонний идеал* $\mathfrak{A}$, *являющийся универсально минимальным левым идеалом* $\mathfrak{A}$.

Если среди элементов $\mathfrak{A}$ *нет элементов, делящихся справа на все элементы* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A}$ *или вовсе не имеет минимальных левых идеалов, или же количество таковых больше одного.*

Доказательство. 1) Пусть совокупность $\mathfrak{U}$ всех элементов $\mathfrak{A}$, делящихся справа на все элементы $\mathfrak{A}$, непуста. Для любых A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$ и $U \in \mathfrak{U}$ в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент X, что

$$U = XA_1.$$

Поэтому

$$(A_2U) = (A_2X) \cdot A_1.$$

Следовательно, A_2U делится справа на любой элемент A_1 из $\mathfrak{A}$, т. е. $A_2U \in \mathfrak{U}$. Это означает, что $\mathfrak{U}$ является левым идеалом.

Если $\mathfrak{V}$ есть произвольный левый идеал $\mathfrak{A}$, то для любых $U \in \mathfrak{U}$ и $V \in \mathfrak{V}$ найдется такой $Z \in \mathfrak{A}$, что

$$U = ZV.$$

Так как $\mathfrak{V}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, то $ZV \in \mathfrak{V}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{U}$ является универсально минимальным левым идеалом. Других минимальных левых идеалов $\mathfrak{A}$, конечно, не имеет, поэтому, согласно 2.5, $\mathfrak{U}$ есть минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$.

2) Пусть $\mathfrak{L}$ есть единственный минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$. При всяком $A \in \mathfrak{A}$ произведение $\mathfrak{L}A$, согласно 2.2, также обязано быть минимальным левым идеалом $\mathfrak{A}$. Следовательно,

$$\mathfrak{L}A = \mathfrak{L}.$$

Но это означает, что для всякого $L \in \mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}$ найдется такой X, что

$$XA = L.$$

Следовательно, элементы из $\mathfrak{L}$ таковы, что каждый из них делится справа на каждый элемент $\mathfrak{A}$. Только при наличии таких элементов $\mathfrak{A}$ может обладать единственным минимальным левым идеалом.

2.12. В 1.2 мы обратили внимание на то, что при наличии в полугруппе двустороннего идеала, являющегося группой, полугруппа имеет один единственный минимальный левый идеал и один единственный минимальный правый идеал. Благодаря теореме 2.11 оказывается возможным сделать и обратное заключение.

Следствие. *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет один единственный минимальный левый идеал $\mathfrak{U}$ и один единственный минимальный правый идеал $\mathfrak{V}$, то $\mathfrak{U}$ равен $\mathfrak{V}$ и является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$, являющимся группой.*

Доказательство. Согласно 2.11, $\mathfrak{U}$ есть минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Аналогично $\mathfrak{V}$ есть минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{V}$. Следовательно, $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$. При этом $\mathfrak{U}$, равный $\mathfrak{V}$, является совокупностью всех элементов, делящихся справа на все элементы $\mathfrak{A}$, и одновременно совокупностью всех элементов, делящихся слева на все элементы из $\mathfrak{A}$. Согласно 1.4, эта совокупность есть двусторонний идеал, являющийся группой.

2.13. Благодаря полученному следствию мы легко можем выяснить вопрос о минимальных левых идеалах инверсных полугрупп (II, 7.2), которыми подробно занимался Престон [2]. Оказывается, что инверсная полугруппа может иметь не более одного минимального левого идеала, который в этом случае оказывается одновременно и минимальным правым идеалом. Это вытекает из нижеследующей теоремы, если принять во внимание теорему 1.2.

Теорема. *Если в множестве идемпотентов инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ идемпотент I_0 является двусторонним нулем этого множества, то*

$$\mathfrak{A}I_0\mathfrak{A} = \mathfrak{A}I_0 = I_0\mathfrak{A} = I_0\mathfrak{A}I_0$$

есть двусторонний идеал, являющийся группой.

Если в множестве идемпотентов ни один из них не является двусторонним нулем этого множества, то в $\mathfrak{A}$ нет ни минимальных левых идеалов, ни минимальных правых идеалов.

Доказательство. 1) Пусть идемпотент I_0 является нулем в множестве всех идемпотентов $\mathfrak{A}$. Для произвольного идемпотента I из $I_0 I = I_0$ следует, что левый идеал $\mathfrak{A}I_0$ содержится в главном левом идеале $\mathfrak{A}I$. Так как всякий главный левый идеал имеет вид $\mathfrak{A}I$ (IV, 3.17), то $\mathfrak{A}I_0$ содержится во всяком левом идеале, т. е. является универсально минимальным левым идеалом. Аналогично $I_0\mathfrak{A}$ есть универсально минимальный правый идеал. Согласно 2.12,

$$\mathfrak{A}I_0 = I_0\mathfrak{A}$$

есть двусторонний идеал, являющийся группой. В частности, отсюда следует, что

$$\mathfrak{A}I_0\mathfrak{A} = \mathfrak{A}I_0 = I_0\mathfrak{A} = I_0\mathfrak{A}I_0.$$

2) Пусть $\mathfrak{L}$ есть минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$. Он, очевидно, является левоидеальной оболочкой всякого элемента из $\mathfrak{L}$. Согласно IV, 3.17, $\mathfrak{L}$ содержит идемпотент I, причем

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I.$$

Пусть I' есть произвольный идемпотент $\mathfrak{A}$. Пересечение левых идеалов $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I$ и $\mathfrak{A}I'$ непусто, так как содержит II'. Но это пересечение есть левый идеал, содержащийся в $\mathfrak{L}$. Следовательно, оно совпадает с $\mathfrak{L}$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}I' \supset \mathfrak{A}I.$$

Согласно IV, 3.17, отсюда следует $I'I = II' = I$. Следовательно, идемпотент I есть двусторонний нуль в множестве всех идемпотентов.

2.14. В связи с теоремой 2.13 следует отметить, что инверсная полугруппа, имеющая лишь конечное число идемпотентов (в частности, всякая конечная инверсная полугруппа), всегда обладает идемпотентом, являющимся нулем в множестве всех идемпотентов. Как легко следует из перестановочности идемпотентов в инверсной полугруппе, таким идемпотентом является в указанном случае произведение всех идемпотентов инверсной полугруппы.

§ 3. Полугруппы, обладающие и минимальными левыми и минимальными правыми идеалами

3.1. В предыдущем параграфе мы видели, какую важную роль играет самый факт существования в полугруппе минимальных левых идеалов. Конечно, аналогичные результаты

имеют место и при наличии в полугруппе минимальных правых идеалов. Тем более важен случай, когда полугруппа обладает одновременно и минимальными левыми и минимальными правыми идеалами. Такими полугруппами занимались Рис [1], Шварц [3], Клиффорд [6], Хасимото [2], [3]. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые из этих свойств.

3.2. Легко видеть, что пересечение любого левого идеала с любым правым идеалом всегда непусто (ибо содержит их произведение, в котором левым множителем берется правый идеал). Для случая, когда эти идеалы минимальные, получаем важные свойства этого пересечения.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *есть некоторый минимальный левый, а* $\mathfrak{R}$*—некоторый минимальный правый идеал полугруппы* $\mathfrak{A}$. *Тогда* $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ *является группой, причем*

$$\mathfrak{R} = E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{L}$ есть левый идеал, то

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}.$$

Следовательно $\mathfrak{G}$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$.

Пусть G есть произвольный элемент $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G} \in \mathfrak{R}$, то $G\mathfrak{R}$ есть принадлежащий $\mathfrak{R}$ правый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$. Следовательно,

$$G\mathfrak{R} = \mathfrak{R},$$

откуда, умножая справа на $\mathfrak{L}$, получаем

$$G\mathfrak{G} = \mathfrak{G}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathfrak{G}G = \mathfrak{G},$$

откуда и следует, что $\mathfrak{G}$ есть группа.

Так как $E_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}$. Следовательно,

$$\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L},$$

что означает, что $\mathfrak{L}$ есть множество всех тех элементов $\mathfrak{A}$, для которых $E_{\mathfrak{G}}$ есть правая единица. Аналогично доказываем, что

$$E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A} = \mathfrak{R},$$

т. е. $\mathfrak{R}$ есть множество всех тех элементов $\mathfrak{A}$, для которых $E_{\mathfrak{G}}$ есть левая единица. Отсюда следует, что $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$ есть мно-

жество всех тех элементов $\mathfrak{A}$, для которых $E_{\mathfrak{G}}$ является двусторонней единицей. Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = E_{\mathfrak{G}} \mathfrak{A} E_{\mathfrak{G}},$$

откуда, в частности, следует

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} \supset E_{\mathfrak{G}} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} E_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}.$$

Но, с другой стороны, если $X \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$, то

$$X = X E_{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{G}.$$

3.3. Благодаря теореме 3.2 можно вполне выяснить характер совокупности тех идемпотентов рассматриваемых полугрупп, которые содержатся в минимальном двустороннем идеале. Интерес представляет, например, уже тот факт, что каждый минимальный левый идеал обладает идемпотентами.

Пусть $\Gamma^{(l)}$ есть множество всех минимальных левых идеалов полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\Gamma^{(r)}$ множество всех правых минимальных идеалов.

Согласно 3.2, пересечение

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}}, \quad (\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}, \ \mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)})$$

всегда непусто и содержит один единственный идемпотент — единицу группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}}$, которую обозначим через $E_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}}$.

Согласно 2.5, минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ может быть представлен в виде объединений

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}} \mathfrak{L} = \bigcup_{\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}} \mathfrak{R},$$

причем компоненты каждого объединения попарно не имеют общих элементов. Отсюда следует:

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}} \mathfrak{G}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}} \qquad (\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}),$$

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}} \mathfrak{G}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}} \qquad (\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}),$$

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{\substack{\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)} \\ \mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}}} \mathfrak{G}_{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}},$$

где компоненты каждого объединения непусты и попарно не пересекаются.

Из сказанного следует, что идемпотентами $\mathfrak{K}$ являются $E_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}}$. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между идемпотентами полугруппы, содержащимися в ее минимальном двустороннем идеале $\mathfrak{K}$, и парами идеалов

$$E_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}} \sim (\mathfrak{L}, \mathfrak{R}) \qquad (\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}, \mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}).$$

3.4. Особо отметим следующее свойство идемпотентов, которое нам потом понадобится.

Следствие. *Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет минимальные левые и минимальные правые идеалы. Тогда никакой идемпотент из минимального двустороннего идеала $\mathfrak{K}$ не может быть двусторонней единицей ни для какого отличного от него самого идемпотента.*

Доказательство. Пусть для идемпотентов I_1 и I_2 полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет место

$$I_1 I_2 I_1 = I_2,$$

причем $I_1 \in \mathfrak{K}$. Согласно 3.3,

$$I_1 = E_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}} \qquad (\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}, \mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}).$$

Поэтому

$$I_2 = I_1 I_2 I_1 \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L} I_2 \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L} I_2 \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}}.$$

Но в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}}$ имеется лишь один идемпотент $E_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}} = I_1$. Следовательно, $I_2 = I_1$.

3.5. Как мы уже знаем (2.5), наличие в полугруппе минимальных левых или минимальных правых идеалов влечет за собой существование и минимальных двусторонних идеалов. Рассмотрим связь между этими минимальными идеалами.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{L}$ есть минимальный левый, $\mathfrak{R}$ минимальный правый и $\mathfrak{K}$ минимальный двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$. Тогда*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}\mathfrak{A}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{R}.$$

Доказательство. Согласно 2.5, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$. Аналогично $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{K}$. Отсюда следует, что каждое из множеств $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ содержится в $\mathfrak{K}$. Но все они, очевидно,

являются двусторонними идеалами. Поскольку $\mathfrak{K}$ есть минимальный двусторонний идеал, каждый из этих шести двусторонних идеалов должен совпадать с $\mathfrak{K}$.

3.6. ***Следствие.*** *Если* $\mathfrak{L}$ *и* $\mathfrak{L}'$ *суть минимальные левые идеалы* $\mathfrak{A}$, *а* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}'$ *минимальные правые идеалы* $\mathfrak{A}$, *то*

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}'\mathfrak{R}'.$$

Действительно, согласно 3.5, и $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}'\mathfrak{R}'$ оба равны $\mathfrak{K}$.

3.7. Отметим также, что для минимального левого идеала $\mathfrak{L}$ и минимального правого идеала $\mathfrak{R}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ группа $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ (3.2) содержится в минимальном двустороннем идеале $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Это справедливо, поскольку, согласно 2.5, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$.

3.8. В рассматриваемом нами случае мы без труда можем выяснить, как могут быть получены все минимальные левые и правые идеалы полугруппы.

Теорема. *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает минимальными левыми и минимальными правыми идеалами, то левоидеальные оболочки идемпотентов, принадлежащих минимальному двустороннему идеалу, и только они, являются минимальными левыми идеалами полугруппы.*

Аналогично для правых идеалов.

Доказательство. 1) Пусть I есть идемпотент, содержащийся в минимальном двустороннем идеале $\mathfrak{K}$. Так как I есть идемпотент, то его левоидеальная оболочка есть $\mathfrak{A}I$.

Согласно 2.5, I содержится в некотором минимальном левом идеале $\mathfrak{L}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Аналогично I содержится в некотором минимальном правом идеале $\mathfrak{R}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Согласно 3.2, $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ является группой. Так как $I = I \cdot I \in \mathfrak{R}\mathfrak{L}$, то I есть единица этой группы и благодаря 3.2 $\mathfrak{A}I = \mathfrak{L}$.

2) Пусть $\mathfrak{L}$ есть произвольный минимальный левый идеал $\mathfrak{A}$. Возьмем какой-нибудь минимальный правый идеал $\mathfrak{R}$ полугруппы $\mathfrak{A}$. Согласно 3.2, $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ есть группа и $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}$. При этом $\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}$, очевидно, является левоидеальной оболочкой идемпотента $E_{\mathfrak{G}}$, который благодаря 3.5 принадлежит $\mathfrak{K}$.

3.9. В IV, 4.10 мы обратили внимание на важную роль полугрупп, не имеющих собственных двусторонних идеалов, в деле выяснения строения произвольных полугрупп. В общем случае такие полугруппы сами могут быть достаточно сложны, и мы не имеем еще достаточно ясного представления о их строении. Однако при одном дополнительном довольно

естественном предположении возможно получить предельно ясное описание строения таких полугрупп.

Определение. *Если полугруппа, не имеющая собственных двусторонних идеалов, обладает минимальными левыми и минимальными правыми идеалами, то она называется вполне простой полугруппой без нуля.*

Слова „без нуля", участвующие в названии указанных полугрупп, оправданы тем, что за исключением тривиального случая, когда полугруппа состоит из одного элемента, определяемая полугруппа не может иметь нуль, так как он являлся бы ее собственным двусторонним идеалом. Необходимость этих слов возникает в связи с необходимостью рассматривать родственный класс полугрупп, обладающих нулем, чему будут посвящены два следующих параграфа.

Следует иметь в виду, что для определения вполне простых полугрупп часто используют совокупность некоторых их свойств, наличие которых равносильно тому, чтобы полугруппа удовлетворяла приведенному выше определению. Выяснение возможности того подхода к вполне простым полугруппам, который мы употребляем в настоящей книге, принадлежит Клиффорду [6], [7].

Этот подход представляется более естественным, нежели первоначальный подход Риса [1], который первый дал в общем случае то описание строения вполне простых полугрупп, которое будет изложено ниже. Впоследствии многие математики (см. 1.1) занимались изучением различных свойств вполне простых полугрупп. Исходными для всех этих работ явились исследования А. К. Сушкевича [3], которым большинство этих свойств было получено для конечных полугрупп.

3.10. Первоначальное определение вполне простых полугрупп, данное Рисом [1], [2], опирается на понятие так называемого примитивного идемпотента. Ненулевой идемпотент I называется *примитивным*, если он не является двусторонней единицей ни для какого другого ненулевого идемпотента. Из 3.2 следует, что вполне простая полугруппа без нуля, не являющаяся единичной полугруппой, всегда обладает ненулевыми идемпотентами, а, согласно 3.4, все они примитивны.

Как мы покажем в 6.15, наличия хотя бы одного примитивного идемпотента в полугруппе, не имеющей собственных двусторонних идеалов, достаточно для того, чтобы она была вполне простой полугруппой без нуля.

3.11. Отметим, что различные свойства минимальных идеалов, полученные нами выше, дают целый ряд свойств вполне простых полугрупп без нуля (например, существование для каждого элемента двусторонней единицы, являющейся идемпотентом, что непосредственно следует из 2.8 и 3.2 и т. д.). Пользуясь этими свойствами, мы могли бы уже сейчас дать описание строения произвольных вполне простых полугрупп без нуля. Однако для экономии места мы отложим это до § 6, где это будет осуществлено при помощи простых следствий из рассуждений, посвященных исследованиям полугрупп одного родственного класса.

3.12. Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает нулем, то свойства минимальных идеалов $\mathfrak{A}$, рассмотренные как в настоящем, так и в предыдущем параграфах, становятся для такой полугруппы совершенно тривиальными. Действительно, подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$, состоящее из одного элемента $O_{\mathfrak{A}}$, будет в $\mathfrak{A}$ одновременно и минимальным левым идеалом, и минимальным правым идеалом, и минимальным двусторонним идеалом. Никаких других минимальных идеалов $\mathfrak{A}$, конечно, не имеет. Все найденные выше соотношения между минимальными идеалами различных наименований соблюдаются тривиальным образом. Полугруппой с нулем, не имеющей собственных двусторонних идеалов, оказывается лишь полугруппа, состоящая из одного элемента.

Поскольку, однако, подход к изучению свойств полугрупп без нуля с точки зрения рассмотрения свойств их минимальных идеалов дает ценные результаты, естественно возникло желание попытаться видоизменить этот подход так, чтобы он оказался пригодным и для изучения полугрупп с нулем. В этом направлении был произведен ряд успешных попыток. Вместо понятия идеала в основу кладется понятие ненулевого идеала.

3.13. ***Определение.*** *Идеал (левый, правый или двусторонний) называется ненулевым, если среди его элементов имеются элементы, не являющиеся нулем полугруппы.*

Минимальный идеал в множестве всех левых ненулевых идеалов называется минимальным левым ненулевым идеалом. Аналогично определяются *минимальные правые ненулевые идеалы* и *минимальные левые ненулевые идеалы.*

3.14. Возникающая в связи с этими понятиями теория минимальных ненулевых идеалов в значительной степени параллельна теории минимальных идеалов полугрупп без нуля. Многие результаты переносятся, хотя обычно с теми или иными оговорками и осложнениями, ослабляющими их силу. Причина этого вполне ясна, поскольку классы ненулевых идеалов, конечно, менее естественны.

Первое существенное осложнение возникает уже по той причине, что пересечение двух ненулевых идеалов иногда может состоять из одного нуля, т. е. не принадлежит к классу ненулевых идеалов. В связи с этим минимальный двусторонний ненулевой идеал может не являться универсально минимальным двусторонним ненулевым идеалом. Больше того, полугруппа может иметь несколько таких идеалов, что видно уже из примера полугруппы с нулем, в которой произведение любых двух элементов равны нулю (в этом случае любой элемент X совместно с нулем, очевидно, образует минимальный двусторонний ненулевой идеал $\{X, O\}$). Этот же пример показывает, что теорема 2.5, столь существенная для рассмотренной выше теории, не может быть полностью перенесена в теорию ненулевых идеалов.

В связи с обоими упомянутыми выше причинами (частичный параллелизм с теорией минимальных идеалов и относительно меньшая законченность и цельность теории) мы не будем специально заниматься теорией минимальных ненулевых идеалов (укажем в связи с этим на статьи Риса [1], Клиффорда [7] и Шварца [4], содержащие ряд свойств таких идеалов). Мы ограничимся лишь тем, что в следующем параграфе рассмотрим некоторые свойства из этой теории (полученные в основном в тех же упомянутых работах), которые связаны с рассмотрением одного важного класса полугрупп.

§ 4. Вполне простые полугруппы с нулем

4.1. Учитывая потребности дальнейших исследований, нам необходимо остановиться на одном из направлений упомянутой в конце предыдущего параграфа теории минимальных ненулевых идеалов. Именно, мы дожны рассмотреть полугруппы с нулем, не имеющие собственных двусторонних идеалов помимо нулевого. На весьма важную роль таких полугрупп мы обратили внимание в IV, 4.10. Полное изучение их свойств и строения возможно в настоящее время

при условии некоторых дополнительных ограничений, аналогичных тем, которые делались в предыдущих параграфах.

4.2. *Определение.* *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *с нулем, обладающая свойством*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}},$$

не имеет собственных двухсторонних ненулевых идеалов и обладает минимальными левыми ненулевыми идеалами и минимальными правыми ненулевыми идеалами (*3.13*), *то она называется вполне простой полугруппой с нулем.*

4.3. Отметим, что условие

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}$$

включено только для того, чтобы исключить две полугруппы: полугруппу, состоящую из одного элемента, и полугруппу, состоящую из двух элементов A и O с правилом умножения

$$AO = OA = A^2 = O^2 = O.$$

Остальным условиям определения обе эти полугруппы, очевидно, удовлетворяют. Однако если бы благодаря требованию

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}$$

эти две полугруппы не были исключены из числа вполне простых полугрупп с нулем (для каждой из них, конечно, имеет место $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$), то при изложении дальнейшей теории пришлось бы делать постоянные утомительные оговорки.

Что касается всякой другой полугруппы, отличной от указанных двух полугрупп, то свойство $\mathfrak{A}\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}$ является следствием условия отсутствия собственных двусторонних ненулевых идеалов. Действительно, полугруппа с количеством элементов большим двух, для которой $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$, имеет собственным двусторонним ненулевым идеалом множество, состоящее из $O_{\mathfrak{A}}$ и любого ненулевого элемента.

Отметим попутно, что во вполне простой полугруппе с нулем рассмотренное условие означает выполнение равенства

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Действительно, так как $\mathfrak{A}\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}$, то $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ есть двусторонний ненулевой идеаль $\mathfrak{A}$ и потому должно равняться $\mathfrak{A}$.

4.4. Приступим к выводу ряда свойств вполне простых полугрупп с нулем. Выбор этих свойств объясняется глав-

ным образом потребностью основной теоремы следующего параграфа, которая полностью выяснит строение вполне простых полугрупп с нулем, а в дальнейшем поможет выяснить и строение вполне простых полугрупп без нуля. Упомянутые свойства заметно схожи со многими свойствами идеалов, рассмотренными в § 2 и § 3. Все же имеются достаточно существенные различия, препятствующие объединению обоих теорий.

4.5. *Теорема.* *Вполне простая полугруппа с нулем* $\mathfrak{A}$ *равна объединению всех своих минимальных левых ненулевых идеалов, которые попарно не имеют общих элементов, кроме* $O_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ есть некоторый минимальный левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$. Если бы идеал $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ состоял лишь из нуля, то это означало бы, что $\mathfrak{L}$ является двусторонним идеалом, т. е. совпадает с самой полугруппой $\mathfrak{A}$. Но тогда мы получили бы

$$O_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

что для вполне простой полугруппы с нулем невозможно.

Следовательно,

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ произведение $\mathfrak{L}A$, очевидно, является левым идеалом. Пусть $\mathfrak{L}'$ есть левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}A$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех таких элементов X из $\mathfrak{L}$, для которых $XA \in \mathfrak{L}'$. Среди таких элементов есть и отличные от нуля, поскольку $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}A$ и $\mathfrak{L}'$ есть ненулевой идеал. Так как $\mathfrak{L}'$ есть левый идеал, то при любых $Z \in \mathfrak{A}$ и $X \in \mathfrak{N}$ элемент ZX также будет принадлежать $\mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ оказывается левым ненулевым идеалом $\mathfrak{A}$, содержащимся в $\mathfrak{L}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}$ и потому

$$\mathfrak{L}A \subset \mathfrak{L}'.$$

Но $\mathfrak{L}'$, в свою очередь, содержится в $\mathfrak{L}A$. Следовательно, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}A$, т. е. $\mathfrak{L}A$ не имеет собственных левых ненулевых идеалов.

Таким образом, каждое произведение $\mathfrak{L}A$ ($A \in \mathfrak{A}$), если только оно отлично от $O_{\mathfrak{A}}$, оказывается минимальным левым ненулевым идеалом. Полученное ранее равенство означает,

что $\mathfrak{A}$ есть объединение всех множеств вида $\mathfrak{L}A$. Из этого объединения можно исключить компоненты, равные $O_{\mathfrak{A}}$, ибо $O_{\mathfrak{A}}$ и так содержится в тех $\mathfrak{L}A$, которые отличны от $O_{\mathfrak{A}}$. После этого мы получим представление $\mathfrak{A}$ в требуемом виде.

Что касается пересечения двух различных минимальных левых ненулевых идеалов, то таковое само, будучи левым идеалом $\mathfrak{A}$, не может отличаться от $O_{\mathfrak{A}}$. Действительно, иначе оно должно было бы совпадать с каждым из этих идеалов, что противоречит тому, что они различны.

4.6. ***Следствие.*** *Вполне простая полугруппа с нулем $\mathfrak{A}$ является объединением всевозможных произведений вида*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L},$$

где $\mathfrak{R}$ есть минимальный правый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{L}$ есть минимальный левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$. Компоненты этого объединения попарно имеют лишь один общий элемент $O_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Согласно теореме 4.5 (применяя ее также и относительно правых идеалов), мы имеем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \Big(\bigcup_{\mathfrak{R}} \mathfrak{R}\Big)\Big(\bigcup_{\mathfrak{L}} \mathfrak{L}\Big) = \bigcup_{\mathfrak{L},\ \mathfrak{R}} \mathfrak{R}\mathfrak{L}.$$

Если $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ не имеют общих элементов, кроме $O_{\mathfrak{A}}$ (4.5). Так как при любых $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}'\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{R}',$$

то $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}'\mathfrak{L}'$ не имеют иных общих элементов, кроме нуля. Аналогично рассуждаем при $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}'$.

4.7. В связи с полученным следствием делается естественной роль произведений вида $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$. Рассмотрим подробно их строение.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа с нулем, $\mathfrak{L}$ некоторый минимальный левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R}$ некоторый минимальный правый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$. Тогда*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{L} \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Если $\mathfrak{L}\mathfrak{R} \neq O_{\mathfrak{A}}$, то $\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$, а $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ является группой с внешне присоединенным нулем (II, 2.12), причем

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{R} = E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}}.$$

Доказательство. 1) В процессе доказательства теоремы 4.5 мы показали, что $\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Аналогично $\mathfrak{A}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$. Поэтому

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L}\mathfrak{A},$$

откуда следует, что $\mathfrak{R}\mathfrak{L} \neq O_{\mathfrak{A}}$.

2) В дальнейшем будем предполагать, что

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Так как $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$, очевидно, является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$, то тем самым

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}.$$

3) $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ является подполугруппой:

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}\mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cdot [(\mathfrak{L}\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{H}.$$

Пусть G есть произвольный ненулевой элемент $\mathfrak{H}$. Так как $G \in \mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{A}G \subset \mathfrak{L}$. Но $\mathfrak{A}G$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$. Поэтому должно иметь место или $\mathfrak{A}G = \mathfrak{L}$ или $\mathfrak{A}G = O_{\mathfrak{A}}$. В случае второго из этих равенств мы получили бы, что $\{O_{\mathfrak{A}}, G\}$ является левым ненулевым идеалом, содержащимся в $\mathfrak{L}$, т. е. $\{O_{\mathfrak{A}}, G\} = \mathfrak{L}$. Но это противоречило бы тому, что $\mathfrak{R}\mathfrak{L} \neq O_{\mathfrak{A}}$. Следовательно, на самом деле $\mathfrak{A}G = \mathfrak{L}$.

$G\mathfrak{R}$ есть правый идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{R}$. Поэтому должно иметь место или $G\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, или $G\mathfrak{R} = O_{\mathfrak{A}}$. Второе из этих равенств повлекло бы за собой благодаря доказанному выше равенству $\mathfrak{A}G = \mathfrak{L}$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}G\mathfrak{R} = O_{\mathfrak{A}}.$$

Следовательно, на самом деле $G\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Отсюда, умножая справа на $\mathfrak{L}$, получаем

$$G\mathfrak{H} = \mathfrak{H}.$$

Аналогично для второго ненулевого элемента $G' \in \mathfrak{H}$, имеем $G'\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, откуда

$$GG'\mathfrak{H} = G\mathfrak{H} = \mathfrak{H}.$$

Следовательно, $GG' \neq O_{\mathfrak{A}}$, т. е. совокупность всех ненулевых элементов $\mathfrak{H}$ образует полугруппу, которую обозначим через $\mathfrak{G}$.

Так как $GO_{\mathfrak{A}} = O_{\mathfrak{A}}$, то из $G\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ следует

$$G\mathfrak{G} = \mathfrak{G}.$$

Совершенно аналогично доказываем, что $\mathfrak{G}G = \mathfrak{G}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ есть группа, а $\mathfrak{H}$ тем самым есть группа с внешне присоединенным нулем.

Так как $E_{\mathfrak{G}} = E_{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}$. При этом $\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}} \ni E_{\mathfrak{H}}E_{\mathfrak{H}} = E_{\mathfrak{H}} \neq O_{\mathfrak{A}}$. Следовательно,

$$\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{L}.$$

Аналогично

$$E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A} = \mathfrak{R}.$$

Отсюда, принимая во внимание $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, получаем

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} = E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}} = E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}}.$$

Так как

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L},$$

то

$$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}.$$

Но, с другой стороны,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L} = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R} = E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = E_{\mathfrak{H}} \cdot (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}) \cdot E_{\mathfrak{H}} \subset E_{\mathfrak{H}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{H}.$$

4.8. *Следствие.* *Для всякого минимального левого ненулевого идеала $\mathfrak{L}$ вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$ всегда найдется такой минимальный правый ненулевой идеал $\mathfrak{R}$, что*

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Как было показано при доказательстве теоремы 4.5, имеет место

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Согласно 4.5, $\mathfrak{A}$ есть объединение своих минимальных правых ненулевых идеалов, поэтому невозможно, чтобы для каждого из них $\mathfrak{R}$ имело место

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = O_{\mathfrak{A}}.$$

Если для некоторого из этих $\mathfrak{R}$ имеет место

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} \neq O_{\mathfrak{A}},$$

то, согласно 4.7, отсюда следует

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}.$$

4.9. Важно, что все минимальные левые и правые ненулевые идеалы вполне простой полугруппы с нулем могут быть заданы при помощи идемпотентов полугруппы.

Теорема. *Если I есть ненулевой идемпотент вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}I$ является ее минимальным левым ненулевым идеалом, а $I\mathfrak{A}$ — минимальным правым ненулевым идеалом, при этом каждый минимальный левый или правый ненулевой идеал может быть задан в такой форме при помощи некоторого ненулевого идемпотента полугруппы.*

Доказательство. Согласно 4.5, I содержится в некотором минимальном левом ненулевом идеале $\mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathfrak{A}I$ есть левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{A}I \ni II = I$, то $\mathfrak{A}I \neq O_{\mathfrak{A}}$. Поэтому должно иметь место $\mathfrak{A}I = \mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ есть некоторый минимальный левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$. Согласно 4.8, для этого $\mathfrak{L}$ найдется минимальный правый ненулевой идеал $\mathfrak{R}$, такой что

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Отсюда благодаря 4.7 следует, что $\mathfrak{R}\mathfrak{L}$ обладает единицей E, причем

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}E, \quad E^2 = E.$$

Рассуждения для правых идеалов аналогичны.

4.10. ***Следствие.*** *Каждый элемент X вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$ имеет левую единицу и правую единицу, являющиеся идемпотентами.*

Доказательство. По теореме 4.5 X должен содержаться в некотором минимальном левом ненулевом идеале $\mathfrak{L}$ и в некотором правом ненулевом идеале $\mathfrak{R}$. Из 4.9 следует, что в $\mathfrak{A}$ существуют такие идемпотенты I и I', что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I, \quad \mathfrak{R} = I'\mathfrak{A}.$$

Очевидно,

$$XI = X, \quad I'X = X,$$

4.11. *Следствие.* *Если X есть ненулевой элемент вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$, то*

$$\mathfrak{A}X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Доказательство. $\mathfrak{A}X\mathfrak{A}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Пусть I есть левая единица X, а I' — правая единица X (4.10). Тогда

$$\mathfrak{A}X\mathfrak{A} \ni IXI' = X \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}X\mathfrak{A}$ есть ненулевой двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, каким может быть лишь сама $\mathfrak{A}$.

4.12. Пусть $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа с нулем. Для любого ненулевого идемпотента I множеством всех элементов, имеющих I своей двусторонней единицей является $I\mathfrak{A}I$. Такие множества весьма существенны при изучении $\mathfrak{A}$. Это связано с тем, что каждая подгруппа $\mathfrak{G}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержится в множестве вида $E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}}$. Здесь мы ограничимся доказательством лишь двух свойств таких множеств.

Теорема. *Если I есть ненулевой идемпотент вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$, то $I\mathfrak{A}I$ есть группа с внешне присоединенным нулем. При этом при всяком ненулевом идемпотенте I' для $X \in I\mathfrak{A}I'$ всегда имеет место*

$$X \cdot I'\mathfrak{A}I = I\mathfrak{A}I, \quad I'\mathfrak{A}I \cdot X = I'\mathfrak{A}I'.$$

Доказательство. 1) Так как $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, то

$$I\mathfrak{A}I = (I\mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{A}I).$$

Согласно 4.9, $\mathfrak{A}I$ есть минимальный левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$ и $I\mathfrak{A}$ — минимальный правый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$.

При этом

$$(\mathfrak{A}I) \cdot (I\mathfrak{A}) \ni I$$

и, следовательно,

$$(\mathfrak{A}I) \cdot (I\mathfrak{A}) \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Отсюда, по теореме 4.7, следует, что

$$(I\mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{A}I) = I\mathfrak{A}I$$

есть группа с внешне присоединенным нулем.

2) Так как $X \in I\mathfrak{A}I'$, то

$$IX = X, \quad XI' = X.$$

Поэтому $X\mathfrak{A}$ есть правый ненулевой идеал, содержащийся в минимальном правом ненулевом идеале $I\mathfrak{A}$ (4.9). Следовательно,

$$X\mathfrak{A} = I\mathfrak{A}.$$

Отсюда получаем

$$I\mathfrak{A}I = X\mathfrak{A}I = XI'\mathfrak{A}I.$$

Аналогично доказывается и второе требуемое равенство

4.13. *Следствие.* *Пусть I есть ненулевой идемпотент вполне простой полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$. Тогда никакой отличный от I идемпотент $\mathfrak{A}$ не может быть двусторонней единицей I.*

Действительно, если идемпотент I' является двусторонней единицей I, то $I' \neq O_{\mathfrak{A}}$ и, согласно 4.12, $I'\mathfrak{A}I'$ есть группа с внешне присоединенным нулем. Ненулевые идемпотенты I и I' оба принадлежат ей. Это возможно лишь при $I' = I$.

4.14. Свойство 4.13 означает, что каждый ненулевой идемпотент вполне простой полугруппы с нулем является примитивным (3.10). Оказывается, что оно даже в ослабленном виде совместно с требованием отсутствия собственных двусторонних ненулевых идеалов дает достаточное условие для того, чтобы полугруппа была вполне простой полугруппой с нулем.

Теорема. *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ с нулем не имеет собственных двусторонних ненулевых идеалов и обладает примитивным идемпотентом, то $\mathfrak{A}$ является вполне простой подгруппой с нулем.*

Доказательство. 1) Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех таких элементов B, что $B\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$.

При любом $X \in \mathfrak{A}$

$$(XB)\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}, \quad (BX)\mathfrak{A} \subset B\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}.$$

Следовательно, $\mathfrak{B}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, а потому $\mathfrak{B} = O_{\mathfrak{A}}$ или $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Последнее означало бы $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{A}\mathfrak{A} \ni II = I \neq O_{\mathfrak{A}}$. Следовательно, $\mathfrak{B} = O_{\mathfrak{A}}$.

2) При всяком $A \in \mathfrak{A}$ произведение $\mathfrak{A}A\mathfrak{A}$ является двусторонним идеалом. Поэтому имеет место одно из двух:

$$\mathfrak{A}A\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{A}A\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Согласно первой части доказательства, при ненулевом A имеем

$$A\mathfrak{A} \neq O_{\mathfrak{A}}$$

Возьмем в $A\mathfrak{A}$ некоторый ненулевой элемент C. Предположение $\mathfrak{A}A\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$ влечет за собою $\mathfrak{A}C = O_{\mathfrak{A}}$.

Однако, подобно тому как это было доказано в первой части, доказывается невозможность существования ненулевых элементов, удовлетворяющих такому условию. Следовательно, при $A \neq O_{\mathfrak{A}}$ мы обязательно должны иметь

$$\mathfrak{A}A\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

3) Множество $\mathfrak{A}I$, содержащее $II = I$, является левым ненулевым идеалом $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{L}$ есть некоторый левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{A}I$. Возьмем в $\mathfrak{L}$ какой-нибудь ненулевой элемент L. Как было показано во второй части,

$$\mathfrak{A}L\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Следовательно, в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы U и V, что

$$ULV = I.$$

Рассмотрим элемент

$$I' = IVIUL$$

Так как $L \in \mathfrak{A}I$, то $LI = L$. Поэтому

$$I'I' = IVIUL \cdot IVIUL = IVI \cdot ULV \cdot IUL = \\ = IVI \cdot I \cdot IUL = IVIUL = I',$$

т. е. I' является идемпотентом. Так как к тому же

$$IULI'V = IUL \cdot IVIUL \cdot V = I \cdot ULV \cdot I \cdot ULV = I,$$

а I есть ненулевой элемент, то и I' не есть нуль полугруппы.

Из самого выражения для I' благодаря $LI = L$ и $I^2 = I$ следует, что

$$I'I = I', \quad II' = I'.$$

По условию теоремы это возможно лишь при $I' = I$.

Но тогда

$$\mathfrak{A}I = \mathfrak{A}IVIUL \subset \mathfrak{L}.$$

Мы показали, что в $\mathfrak{A}I$ не содержится никакого собственного левого ненулевого идеала. Следовательно, $\mathfrak{A}I$ есть минимальный левый ненулевой идеал. Аналогично рассуждаем и для правых идеалов. Отмечая, наконец, что $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ отлично

от нуля, ибо содержит ненулевой элемент $II = I$, мы пр ходим к заключению, что $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруп с нулем.

§ 5. Строение вполне простых полугрупп с нулем

5.1. Для изучения строения вполне простых полугру Рис [1] использовал некоторую общую конструкцию, нап минающую конструкцию Веддерберна в теории простых алгеб

Пусть $\mathfrak{H}$ есть полугруппа с нулем, Γ и Γ' — два прои вольных непустых множества индексов. Пусть кажд паре (α, β), где $\alpha \in \Gamma$, $\beta \in \Gamma'$, сопоставлен некоторый элеме полугруппы $P_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{H}$. Закон, задающий это соответстви можно представить себе в виде матрицы P (конечной или бе конечной), у которой Γ есть множество строк, Γ' есть мн жество столбцов и все элементы принадлежат $\mathfrak{H}$. В случ конечных (или даже счетных) Γ и Γ', которые в этом случ естественно считать множествами натуральных чисел, так представление вполне наглядно:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \qquad (P_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{H}).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ множество, состоящее из вс возможных троек

$$(H, \xi, \eta) \qquad (H \in \mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}},\ \xi \in \Gamma',\ \eta \in \Gamma)$$

и из элемента $O_{\mathfrak{S}}$. Последний элемент для однообразия посл дующих выкладок будем также обозначать и в виде тройк $(O_{\mathfrak{H}}, \xi, \eta)$ при любых $\xi \in \Gamma'$, $\eta \in \Gamma$.

В множестве $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ определяем умножение

$$(H_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (H_2, \xi_2, \eta_2) = (H_1 P_{\eta_1 \xi_2} H_2, \xi_1, \eta_2).$$

Докажем ассоциативность этого действия:

$$[(H_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (H_2, \xi_2, \eta_2)] \cdot (H_3, \xi_3, \eta_3) =$$
$$= (H_1 P_{\eta_1 \xi_2} H_2, \xi_1, \eta_2) \cdot (H_3, \xi_3, \eta_3) = (H_1 P_{\eta_1 \xi_2} H_2 P_{\eta_2 \xi_3} H_3, \xi_1, \eta_3)$$
$$(H_1, \xi_1, \eta_1) \cdot [(H_2, \xi_2, \eta_2) \cdot (H_3, \xi_3, \eta_3)] =$$
$$= (H_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (H_2 P_{\eta_2 \xi_3} H_3, \xi_2, \eta_3) = (H_1 P_{\eta_1 \xi_2} H_2 P_{\eta_2 \xi_3} H_3, \xi_1, \eta_3)$$

Таким образом, $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ оказывается полугруппой. Элемент $O_{\mathfrak{S}}$, очевидно, является ее нулем. Мы будем называть полугруппу $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ *полугруппой матричного типа над* $\mathfrak{H}$, *соответствующей матрице* P. Если $\mathfrak{H}$ есть группа с внешне присоединенным нулем (II, 2.12) и в каждой строке P, так же как и в каждом столбце P, найдутся элементы, отличные от $O_{\mathfrak{H}}$, то $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ будем называть *вполне простой полугруппой с нулем матричного типа над* $\mathfrak{H}$, *соответствующей матрице* P.

Свое оправдание последнее название найдет в 5.3 и 5.4.

5.2. Смысл закона умножения, введенного в $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, и название, присвоенное выше таким полугруппам, делаются вполне ясными и наглядными, если прибегнуть к матричной интерпретации. Ограничимся для этого конечными Γ и Γ', которые будем считать множествами натуральных чисел:

$$\Gamma = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \Gamma' = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Тройку (H, ξ, η) $(H \neq O_{\mathfrak{H}})$ можно представить в виде матрицы с n строками и m столбцами (в отличие от P у этой матрицы Γ' есть множество строк, а Γ — множество столбцов), у которой элемент, стоящий в ξ-й строке и η-м столбце, равен H, а все прочие элементы равны $O_{\mathfrak{H}}$. $O_{\mathfrak{S}}$ есть матрица, все элементы которой равны $O_{\mathfrak{H}}$.

Если определить сложение между элементом $O_{\mathfrak{H}}$ и всеми элементами из $\mathfrak{H}$ по правилу

$$O_{\mathfrak{H}} + H = H + O_{\mathfrak{H}} = H \qquad (H \in \mathfrak{H}),$$

то умножение троек из $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ можно представить в виде матричного умножения со вставкой матрицы P:

$$(H_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (H_2, \xi_2, \eta_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} O & \ldots & O & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & (H_1)_{\xi_1\eta_1} & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & O & \ldots & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} O & \ldots & O & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & (H_2)_{\xi_2\eta_2} & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & O & \ldots & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \ldots & O & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & (H_1 P_{\eta_1\xi_2} H_2)_{\xi_1\eta_2} & \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & O & \ldots & O \end{bmatrix} =$$

$$= (H_1 P_{\eta_1\xi_2} H_2, \xi_1, \eta_2).$$

5.3. ***Теорема.*** *Вполне простая полугруппа с нуле матричного типа* $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1) *всегда является вполн простой полугруппой с нулем* (4.2).

Доказательство. Группу всех ненулевых элеме тов $\mathfrak{H}$ обозначим через $\mathfrak{G}$.

Как непосредственно следует из правила умножени в $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, для каждого $\nu \in \Gamma$ множество $\mathfrak{L}_\nu$, состоящее и всех элементов вида

$$(H, \xi, \nu),$$

является левым идеалом. Докажем, что этот идеал являет минимальным левым ненулевым идеалом. Возьмем два прои вольных ненулевых элемента из этого идеала:

$$L_1 = (G_1, \xi_1, \nu), \quad L_2 = (G_2, \xi_2, \nu).$$

При $X = (G_3, \sigma, \tau)$ мы имеем

$$XL_1 = (G_3 P_{\tau\xi_1} G_1, \sigma, \nu).$$

Если в X положить $\sigma = \xi_2$, τ выбрать так, чтобы $P_{\tau\xi_1} \in$ (такой индекс τ найдется по свойству матрицы P) и взят в качестве G_3 элемент из $\mathfrak{G}$

$$G_3 = G_2 G_1^{-1} P_{\tau\xi_1}^{-1},$$

то при таком X мы получим

$$XL_1 = L_2.$$

Отсюда следует, что всякий левый идеал $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, содержа щий один из ненулевых элементов $\mathfrak{L}_\nu$, обязательно содержи и всякий другой элемент из $\mathfrak{L}_\nu$. Это означает, что $\mathfrak{L}_\nu$ ест минимальный левый ненулевой идеал полугруппы.

Аналогично убеждаемся в существовании минимальны правых ненулевых идеалов.

Полугруппа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ не имеет собственных двусторонни ненулевых идеалов. Действительно, возьмем два произволь ных ненулевых элемента:

$$S_1 = (G_1, \xi_1, \eta_1), \quad S_2 = (G_2, \xi_2, \eta_2).$$

Аналогично предыдущему можно подобрать такой эле мент X, что

$$XS_1 = (G_2, \xi_2, \eta_1).$$

Сходным рассуждением можно найти такой Y, что

$$(XS_1)\cdot Y=(G_2,\ \xi_2,\ \eta_1)\cdot Y=(G_2,\ \xi_2,\ \eta_2)=S_2.$$

Отсюда следует, что двусторонний идеал $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, содержащий какой-либо ненулевой элемент полугруппы, будет содержать и всякий другой ее элемент. Из этого следует, что в полугруппе $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ единственным двусторонним ненулевым идеалом является сама полугруппа. Легко убедиться, что $\mathfrak{S}(P\mathfrak{H})\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})\neq 0_{\mathfrak{S}}$.

5.4. Роль вполне простых полугрупп с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1) определяется тем, что, как было показано в общем случае Рисом [1], ими с точностью до изоморфизма исчерпывается класс вполне простых полугрупп с нулем (4.2).

Теорема. *Всякая вполне простая полугруппа с нулем изоморфна некоторой вполне простой полугруппе с нулем матричного типа* $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1).

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа с нулем. Обозначим через $\Gamma^{(l)}$ совокупность всех ее минимальных левых ненулевых идеалов и через $\Gamma^{(r)}$ — совокупность всех минимальных правых ненулевых идеалов. Фиксируем какую-нибудь пару идеалов $\mathfrak{L}_0\in\Gamma^{(l)}$, $\mathfrak{R}_0\in\Gamma^{(r)}$, такую, чтобы $\mathfrak{L}_0\mathfrak{R}_0=\mathfrak{A}$ (4.8). Согласно (4.7), $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{R}_0\mathfrak{L}_0$ есть группа с внешне присоединенным нулем. Группу всех ее ненулевых элементов обозначим через $\mathfrak{G}_0$, а единицу — через E_0. Согласно 4.7, $\mathfrak{H}_0=E_0\mathfrak{A}E_0$. Так как $\mathfrak{H}_0\ni O_{\mathfrak{A}}$, то $O_{\mathfrak{H}_0}=O_{\mathfrak{A}}$. Согласно 4.9, в каждом идеале $\mathfrak{L}\in\Gamma^{(l)}$ и в каждом идеале $\mathfrak{R}\in\Gamma^{(r)}$ найдутся такие идемпотенты $I_{\mathfrak{L}}$ и $I_{\mathfrak{R}}$, что

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}},\quad \mathfrak{R}=I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}.$$

Фиксируем их для каждого $\mathfrak{L}\in\Gamma^{(l)}$ и каждого $\mathfrak{R}\in\Gamma^{(r)}$.

Очевидно, $I_{\mathfrak{L}}$ является правой единицей $\mathfrak{L}$, а $I_{\mathfrak{R}}$ — левой единицей $\mathfrak{R}$.

Благодаря 4.12

$$I_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}E_0\cdot E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}=I_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}\ni I_{\mathfrak{L}}.$$

Поэтому можно выбрать и фиксировать такие элементы $U_{\mathfrak{L}}$, $V_{\mathfrak{L}}$, что $U_{\mathfrak{L}}V_{\mathfrak{L}}=I_{\mathfrak{L}}$, $U_{\mathfrak{L}}\in I_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}E_0$, $V_{\mathfrak{L}}\in E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}$.

Благодаря 4.14 из $U_{\mathfrak{L}} \in I_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}E_0$ следует:

$$E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}} \cdot U_{\mathfrak{L}} = E_0\mathfrak{A}E_0 \ni E_0.$$

Поэтому можно выбрать и фиксировать такой элемент $W_{\mathfrak{L}}$, ч

$$W_{\mathfrak{L}}U_{\mathfrak{L}} = E_0, \quad W_{\mathfrak{L}} \in E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}.$$

Совершенно аналогично для $\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}$ фиксируем так элементы $U_{\mathfrak{R}}$, $V_{\mathfrak{R}}$, $W_{\mathfrak{R}}$, что

$$U_{\mathfrak{R}}V_{\mathfrak{R}} = I_{\mathfrak{R}}, \quad U_{\mathfrak{R}} \in I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}E_0, \quad V_{\mathfrak{R}} \in E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{R}},$$
$$V_{\mathfrak{R}}W_{\mathfrak{R}} = E_0, \quad W_{\mathfrak{R}} \in I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}E_0.$$

Для произвольной пары $\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}$, $\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}$ обозначим

$$P_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}} = V_{\mathfrak{L}}U_{\mathfrak{R}} \in E_0\mathfrak{A}E_0 = \mathfrak{H}_0.$$

Матрицу над группой с внешне присоединенным нулем $\mathfrak{H}$ множество строк которой есть $\Gamma^{(l)}$, множество столбцов $\Gamma^{(r}$ а элементами являются $P_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}}$, обозначим через P.

Отметим, что в каждой строке (аналогично и для столбцо этой матрицы встречаются элементы, отличные от $O_{\mathfrak{H}_0} = O_{\mathfrak{A}}$. Действительно, для $\mathfrak{L} \in \Gamma^{(l)}$ возьмем $\mathfrak{R} = I_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$. Согласно 4.5 $\mathfrak{R} \in \Gamma^{(r)}$. Так как

$$I_{\mathfrak{L}} = I_{\mathfrak{L}}I_{\mathfrak{L}} = U_{\mathfrak{L}}V_{\mathfrak{L}}I_{\mathfrak{L}} \in U_{\mathfrak{L}}V_{\mathfrak{L}}\mathfrak{R} = U_{\mathfrak{L}}V_{\mathfrak{L}}U_{\mathfrak{R}}V_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A},$$

то $V_{\mathfrak{L}}U_{\mathfrak{R}} = P_{\mathfrak{L},\mathfrak{R}} \neq O_{\mathfrak{A}}$, так как иначе оказалось бы: $I_{\mathfrak{L}} = C$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}} = O_{\mathfrak{A}}$.

2) Пусть $\mathfrak{A}'$ есть вполне простая полугруппа с нуле матричного типа над группой с внешне присоединенны нулем $\mathfrak{H}_0$, соответствующая построенной выше матрице P (5.1 Согласно 4.5, для каждого ненулевого элемента $A \in \mathfrak{A}$ нах дутся единственным образом определенные идеалы $\mathfrak{L}^{(A)} \in \Gamma^{(l}$ $\mathfrak{R}^{(A)} \in \Gamma^{(r)}$, такие, что $A \in \mathfrak{R}^{(A)}\mathfrak{L}^{(A)}$. Так как

$$V_{\mathfrak{R}(A)} \in E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{R}(A)}, \quad U_{\mathfrak{L}(A)} \in I_{\mathfrak{L}(A)}\mathfrak{A}E_0,$$

то

$$V_{\mathfrak{R}(A)}AU_{\mathfrak{L}(A)} \in E_0\mathfrak{A}E_0 = \mathfrak{H}_0.$$

Поэтому следующее отображение χ полугруппы $\mathfrak{A}$ ест отображение ее в $\mathfrak{A}'$:

$$\chi(A) = \left(V_{\mathfrak{R}(A)}AU_{\mathfrak{L}(A)}, \ \mathfrak{R}^{(A)}, \ \mathfrak{L}^{(A)}\right),$$
$$\chi(O_{\mathfrak{A}}) = O_{\mathfrak{A}'}.$$

Покажем, что отображение χ взаимно однозначно. Пусть

$$\chi(A)=\chi(B), \quad (A,\ B\in\mathfrak{A}).$$

Это значит, что $\mathfrak{R}^{(A)}=\mathfrak{R}^{(B)}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}^{(A)}=\mathfrak{L}^{(B)}=\mathfrak{L}$ и

$$V_{\mathfrak{R}}AU_{\mathfrak{L}}=V_{\mathfrak{R}}BU_{\mathfrak{L}}.$$

Умножая последнее равенство слева на $U_{\mathfrak{R}}$ и справа на $V_{\mathfrak{L}}$, мы получим

$$I_{\mathfrak{R}}AI_{\mathfrak{L}}=I_{\mathfrak{R}}BI_{\mathfrak{L}}.$$

Но $I_{\mathfrak{R}}$ есть левая единица идеала $\mathfrak{R}$, в котором содержатся и A и B, а $I_{\mathfrak{L}}$ есть правая единица идеала $\mathfrak{L}$, в котором содержатся и A и B. Поэтому последнее равенство означает $A=B$.

Образом $\mathfrak{A}$ при отображении χ является вся полугруппа $\mathfrak{A}'$. Действительно, пусть

$$A'=(G,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{L})\in\mathfrak{A}' \quad (G\in\mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{L}\in\Gamma^{(l)},\ \mathfrak{R}\in\Gamma^{(r)}).$$

Возьмем элемент

$$A=W_{\mathfrak{R}}GW_{\mathfrak{L}}.$$

Так как

$$W_{\mathfrak{R}}\in I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}E_0, \quad W_{\mathfrak{L}}\in E_0\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}},$$

то

$$A\in I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}=I_{\mathfrak{R}}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}I_{\mathfrak{L}}=\mathfrak{R}\mathfrak{L}.$$

Таким образом,

$$\chi(A)=(V_{\mathfrak{R}}W_{\mathfrak{R}}GW_{\mathfrak{L}}U_{\mathfrak{L}},\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{L})=(E_0GE_0,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{L})=(G,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{L})=A',$$

$$\chi(O_{\mathfrak{A}})=O_{\mathfrak{A}'}$$

3) Покажем, что взаимно однозначное отображение χ полугруппы $\mathfrak{A}$ на вполне простую полугруппу с нулем матричного типа $\mathfrak{A}'=\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_0, P)$ является изоморфизмом.

Принимая во внимание 4.6, пусть

$$A_1,\ A_2\in\mathfrak{A};\quad A_1\in\mathfrak{R}_1\mathfrak{L}_1;\quad A_2\in\mathfrak{R}_2\mathfrak{L}_2;\quad \mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2\in\Gamma^{(l)};\quad \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2\in\Gamma^{(r)}.$$

Согласно правилу умножения в $\mathfrak{A}'$, получаем

$$\begin{aligned}\chi(A_1)\cdot\chi(A_2)&=(V_{\mathfrak{R}_1}A,\ U_{\mathfrak{L}_1},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{L}_1)\cdot(V_{\mathfrak{R}_2}A_2U_{\mathfrak{L}_2},\ \mathfrak{R}_2,\ \mathfrak{L}_2)=\\&=(V_{\mathfrak{R}_1}A_1U_{\mathfrak{L}_1}P_{\mathfrak{L}_1,\mathfrak{R}_2}V_{\mathfrak{R}_2}A_2U_{\mathfrak{L}_2},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{L}_2)=\\&=(V_{\mathfrak{R}_1}A_1U_{\mathfrak{L}_1}V_{\mathfrak{L}_1}U_{\mathfrak{R}_2}V_{\mathfrak{R}_2}A_2U_{\mathfrak{L}_2},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{L}_2)=\\&=(V_{\mathfrak{R}_1}A_1I_{\mathfrak{L}_1}I_{\mathfrak{R}_2}A_2U_{\mathfrak{L}_2},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{L}_2),\end{aligned}$$

Так как $A_1 \in \mathfrak{L}_1$, а $I_{\mathfrak{L}_1}$ есть правая единица $\mathfrak{L}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{R}$ а $I_{\mathfrak{R}_2}$ есть левая единица $\mathfrak{R}_2$, то

$$\chi(A_1) \cdot \chi(A_2) = (V_{\mathfrak{R}_1} A_1 A_2 U_{\mathfrak{L}_2},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{L}_2) = \chi(A_1 A_2).$$

5.5. Представление вполне простых полугрупп с нуле в виде полугрупп матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1) позволяе легко получить различные их свойства. Выясним, наприме как устроены системы левых и правых идеалов вполне пр стой полугруппы с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$.

Обозначим через Γ множество строк матрицы P через Γ' множество ее столбцов.

Пусть Σ есть некоторое непустое подмножество множ ства Γ. Как непосредственно следует из правила умножени во вполне простых полугруппах матричного типа, совоку ность всех элементов вида (G, ξ, η), у которых $\eta \in$ является левым идеалом $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$. Других левых ненулевы идеалов, отличных от получаемых при помощи подмн жеств Σ, полугруппа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ не имеет. Это следует того, что если некоторый левый идеал $\mathfrak{L}$ полугруппы $\mathfrak{S}(P,$ содержит элемент (G, ξ, η) $(G \neq O_{\mathfrak{H}})$, то, как легко виде (в сущности мы это уже показывали в процессе предш ствующих рассуждений), $\mathfrak{L}$ будет содержать и всякий др гой элемент вида (G', ξ', η).

Таким образом, во вполне простой полугруппе с нул левые идеалы находятся во взаимно однозначном соотве ствии с непустыми подмножествами множества Γ. Минимал ными левыми ненулевыми идеалами являются те, котор соответствуют подмножеству, состоящему из одного эл мента множества Γ. Если сопоставить нулевому идеалу пол группы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ пустое подмножество множества Γ, то м получим взаимно однозначное соответствие между все левыми идеалами полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ и всеми подмнож ствами (в том числе и пустым) множества Γ.

Аналогично обстоит дело и с правыми идеалами, кот рые оказываются во взаимно однозначном соответств с подмножествами множества Γ'.

5.6. Во вполне простой полугруппе с нулем матрично типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ ненулевым идемпотентом будет элемент ви $(P_{\eta\xi}^{-1}, \xi, \eta)$, у которого $P_{\eta\xi} \neq O_{\mathfrak{H}}$. Максимальная подгруп соответствующая этому идемпотенту (III, 1.16), очевид

является множеством, состоящим из всех элементов вида (G, ξ, η). Отображение φ группы $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{A}}$ на эту группу

$$\varphi(G) = (GP_{\eta\xi}^{-1}, \xi, \eta)$$

взаимно однозначно. Оно является изоморфизмом, так как

$$\varphi(G_1) \cdot \varphi(G_2) = (G_1 P_{\eta\xi}^{-1} \xi, \eta) \cdot (G_2 P_{\eta\xi}^{-1} \xi, \eta) =$$
$$= (G_1 P_{\eta\xi}^{-1} \cdot P_{\eta\xi} \cdot G_2 P_{\eta\xi}^{-1}, \xi, \eta) = \varphi(G_1 G_2).$$

Таким образом, все отличные от нуля максимальные подгруппы полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ изоморфны между собой, ибо каждая из них изоморфна группе $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}}$.

5.7. Благодаря сказанному выше видно, насколько важно и удобно представление вполне простых полугрупп с нулем в виде полугрупп матричного типа. Для завершения вопроса о представлении их в таком виде необходимо еще выяснить, единственным ли образом может быть осуществлено такое представление и если нет, то как связаны между собой вполне простые полугруппы с нулем матричного типа, изоморфные данной вполне простой полугруппе с нулем. Очевидно, вопрос этот эквивалентен вопросу о том, когда две заданные вполне простые полугруппы с нулем матричного типа изоморфны между собой.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ и $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S}(\overline{P}, \overline{\mathfrak{H}})$ *есть две вполне простые полугруппы с нулем матричного типа* (5.1). Γ *есть множество строк матрицы* P, Γ' *— множество ее столбцов;* $\overline{\Gamma}$ *и* $\overline{\Gamma}'$ *— соответственно для* $\overline{P}$; $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}}$; $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{H}} \setminus O_{\overline{\mathfrak{H}}}$.

Для того чтобы $\mathfrak{A}$ *и* $\overline{\mathfrak{A}}$ *были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали:*

1) *взаимно однозначное отображение* μ Γ *на* $\overline{\Gamma}$
$\mu(\eta) = \overline{\eta}$ $(\eta \in \Gamma, \overline{\eta} \in \overline{\Gamma})$;

2) *взаимно однозначное отображение* ν Γ' *на* $\overline{\Gamma}'$
$\nu(\xi) = \overline{\xi}$ $(\xi \in \Gamma', \overline{\xi} \in \overline{\Gamma}')$;

3) *изоморфизм* σ *группы* $\mathfrak{G}$ *на* $\overline{\mathfrak{G}}$;

4) *элементы* $\overline{G}_{\overline{\eta}} \in \overline{\mathfrak{G}}$ $(\overline{\eta} \in \overline{\Gamma})$;

5) *элементы* $\overline{G}'_{\overline{\xi}} \in \overline{\mathfrak{G}}$ $(\overline{\xi} \in \overline{\Gamma}')$, *такие, что*

$$\overline{P}_{\overline{\eta}\,\overline{\xi}} = \overline{G}_{\overline{\eta}} \cdot \sigma(P_{\eta\xi}) \cdot \overline{G}'_{\overline{\xi}} \quad (\eta \in \Gamma, \xi \in \Gamma'),$$

Доказательство. 1) Пусть для $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ имеют место условия, указанные в пяти пунктах формулировки теоремы. Определим отображение χ полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\overline{\mathfrak{A}}$

$$\chi(G, \xi, \eta) = \left(\overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}} \cdot \sigma(G) \cdot \overline{G}^{-1}_{\overline{\eta}}, \overline{\xi}, \overline{\eta}\right) \in \overline{\mathfrak{A}}$$
$$(\overline{\xi} = \nu(\xi), \overline{\eta} = \mu(\eta)).$$

Если $G = O_{\mathfrak{G}}$, то полагаем $\sigma(G) = O_{\overline{\mathfrak{G}}}$ и потому $\chi(O_{\mathfrak{A}}) = O_{\overline{\mathfrak{A}}}$. Когда при данных ξ и η G пробегает группу $\mathfrak{G}$, то, по свойству изоморфизма, $\sigma(G)$ будет пробегать $\sigma(\mathfrak{G}) = \overline{\mathfrak{G}}$. Пользуясь этим, заключаем, что отображение χ является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$.

Используя связь между P и $\overline{P}$ покажем, что χ является изоморфизмом.

$$\chi(G_1, \xi_1, \eta_1) \cdot \chi(G_2, \xi_2, \eta_2) =$$
$$= \left(\overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}_1} \cdot \sigma(G_1) \cdot \overline{G}^{-1}_{\overline{\eta}_1}, \overline{\xi}_1, \overline{\eta}_1\right) \cdot \left(\overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}_2} \cdot \sigma(G_2) \cdot \overline{G}^{-1}_{\overline{\eta}_2}, \overline{\xi}_2, \overline{\eta}_2\right) =$$
$$= \left(\overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}_1} \cdot \sigma(G_1) \cdot \overline{G}^{-1}_{\overline{\eta}_1} \cdot \overline{P}_{\overline{\eta}_1 \overline{\xi}_2} \cdot \overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}_2} \cdot \sigma(G_2) \cdot \overline{G}^{-1}_{\overline{\eta}_2}, \overline{\xi}_1, \overline{\eta}_2\right) =$$
$$= \left(\overline{G}'^{-1}_{\overline{\xi}_1} \cdot \sigma(G_1) \cdot \sigma(P_{\eta_1 \xi_2}) \cdot \sigma(G_2) \cdot \overline{G}'^{-1}_{\overline{\eta}_2}, \overline{\xi}_1, \overline{\eta}_2\right) =$$
$$= \chi(G_1 P_{\eta_1 \xi_2} G_2, \xi_1, \eta_2) = \chi[(G_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (G_2, \xi_2, \eta_2)].$$

2) Пусть существует изоморфизм χ полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$. При фиксированном $\eta \in \Gamma$ множество $\mathfrak{L}_\eta$, состоящее из всех элементов вида (G, ξ, η) (5.5), образует минимальный ненулевой левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}$. При изоморфизме χ он должен отобразиться на некоторый минимальный ненулевой левый идеал полугруппы $\overline{\mathfrak{A}}$, т. е. на множество $\mathfrak{L}_{\overline{\eta}}$, состоящее из элементов вида $(\overline{G}, \overline{\xi}, \overline{\eta})$ при некотором $\overline{\eta} \in \overline{\Gamma}$: $\chi(\mathfrak{L}_\eta) = \overline{\mathfrak{L}}_{\overline{\eta}}$. Отображение μ

$$\mu(\eta) = \overline{\eta},$$

очевидно, представляет собой взаимно однозначное отображение Γ на $\overline{\Gamma}$. Совершенно аналогично определяем взаимно однозначное отображение ν множества Γ' на $\overline{\Gamma}'$ при помощи минимальных ненулевых правых идеалов $\nu(\xi) = \overline{\xi}$: $\chi(\mathfrak{R}_\xi) = \overline{\mathfrak{R}}_{\overline{\xi}}$.

Фиксируем некоторую пару (ξ_0, η_0) $(\xi_0 \in \Gamma', \eta_0 \in \Gamma)$, так, чтобы $P_{\eta_0\xi_0} \neq O_{\mathfrak{H}}$. Такая пара найдется согласно определению вполне простой полугруппы с нулем матричного типа. В этом случае мы имеем и $\overline{P}_{\overline{\eta}_0\overline{\xi}_0} \neq O_{\overline{\mathfrak{H}}}$. Действительно, из $P_{\eta_0\xi_0} \neq O_{\mathfrak{H}}$ следует, что произведение всяких двух элементов вида $(G, \xi_0, \eta_0)(G \neq O_{\mathfrak{H}})$ отлично от $O_{\mathfrak{A}}$. Но тогда благодаря определению μ и ν $(\mu(\xi_0) = \overline{\xi}_0, \nu(\eta_0) = \overline{\nu}_0)$ и произведение всяких двух элементов вида $(\overline{G}, \overline{\xi}_0, \overline{\eta}_0)(\overline{G} \neq O_{\overline{\mathfrak{H}}})$ должно отличаться $O_{\overline{\mathfrak{A}}}$ (так как эти элементы есть образы указанных выше элементов из $\overline{\mathfrak{A}}$ при изоморфизме χ). Последнее, как это непосредственно следует от правила умножения в рассматриваемых полугруппах матричного типа, возможно лишь при $\overline{P}_{\overline{\eta}_0\overline{\xi}_0} \neq O_{\overline{\mathfrak{A}}}$.

Взаимно однозначное отображение φ группы $\mathfrak{G}$ на $(\mathfrak{L}_{\eta_0} \cap \mathfrak{R}_{\xi_0}) \setminus O_{\mathfrak{A}}$

$$\varphi(G) = (GP^{-1}_{\eta_0\xi_0}, \xi_0, \eta_0) \qquad (G \in \mathfrak{G}),$$

как мы показали в 5.6, является изоморфизмом.

Аналогичное отображение ψ группы $\overline{\mathfrak{G}}$ на $(\overline{\mathfrak{L}}_{\overline{\eta}_0} \cap \overline{\mathfrak{R}}_{\overline{\xi}_0}) \setminus O_{\overline{\mathfrak{A}}}$ также есть изоморфизм.

Согласно тому, как мы определили отображения μ и ν, изоморфизм χ полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$ осуществляет изоморфизм $\mathfrak{L}_{\eta_0} \cap \mathfrak{R}_{\xi_0}$ на $\overline{\mathfrak{L}}_{\overline{\eta}_0} \cap \overline{\mathfrak{R}}_{\overline{\xi}_0}$. Поэтому отображение

$$\sigma = \psi^{-1}\chi\varphi$$

является изоморфизмом $\mathfrak{G}$ на $\overline{\mathfrak{G}}$.

Рассмотрим элементы

$$\overline{N}_{\overline{\xi}} = (\overline{P}^{-1}_{\overline{\eta}_0\overline{\xi}_0}, \overline{\xi}, \overline{\eta}_0) \in \overline{\mathfrak{A}}, \quad \overline{M}_{\overline{\eta}} = (E_{\overline{\mathfrak{G}}}, \overline{\xi}_0, \overline{\eta}) \in \overline{\mathfrak{A}},$$
$$(\overline{\xi} \in \overline{\Gamma}', \ \overline{\eta} \in \overline{\Gamma}).$$

Благодаря выбору ξ_0 и η_0 эти элементы отличны от $O_{\overline{\mathfrak{A}}}$.

Согласно правилу умножения в $\overline{\mathfrak{A}}$ имеем

$$\overline{M}_{\overline{\eta}}\overline{N}_{\overline{\xi}} = (E_{\overline{\mathfrak{G}}}, \overline{\xi}_0, \overline{\eta}) \cdot (\overline{P}^{-1}_{\overline{\eta}_0\overline{\xi}_0}, \overline{\xi}, \overline{\eta}_0) =$$
$$= (E_{\overline{\mathfrak{G}}}\overline{P}_{\overline{\eta}\overline{\xi}}\overline{P}^{-1}_{\overline{\eta}_0\overline{\xi}_0}, \overline{\xi}_0, \overline{\eta}_0) = \psi(\overline{P}_{\overline{\eta}\overline{\xi}}).$$

Благодаря выбору отображений μ и ν при некоторых $C_\xi \in \mathfrak{G}$ и $D_\eta \in \mathfrak{G}$ имеем

$$\chi^{-1}(\overline{N}_{\overline{\xi}}) = (C_\xi,\ \xi,\ \eta_0), \quad \chi^{-1}(\overline{M}_{\overline{\eta}}) = (D_\eta,\ \xi_0,\ \eta).$$

При этом C_ξ и D_η не являются нулями, так как $\overline{N}_{\overline{\xi}}$ и $\overline{M}_{\overline{\eta}}$ не нули.

Для выбранных таким образом C_ξ и D_η получаем

$$\overline{P}_{\overline{\eta}\,\overline{\xi}} = \psi^{-1}\chi\varphi\varphi^{-1}\chi^{-1}\psi(\overline{P}_{\overline{\eta}\,\overline{\xi}}) = \psi^{-1}\chi\varphi\varphi^{-1}\chi^{-1}(\overline{M}_{\overline{\eta}}\overline{N}_{\overline{\xi}}) =$$
$$= \sigma\varphi^{-1}[\chi^{-1}(\overline{M}_{\overline{\eta}}) \cdot \chi^{-1}(\overline{N}_{\overline{\xi}})] = \sigma\varphi^{-1}[(D_\eta,\ \xi_0,\ \eta)\cdot(C_\xi,\ \xi,\ \eta_0)] =$$
$$= \sigma\varphi^{-1}(D_\eta P_{\eta\xi} C_\xi,\ \xi_0,\ \eta_0) = \sigma(D_\eta P_{\eta\xi} C_\xi P_{\eta_0\xi_0}) =$$
$$= \sigma(D_\eta) \cdot \sigma(P_{\eta\xi}) \cdot \sigma(C_\xi P_{\eta_0\xi_0}).$$

Положив

$$\overline{G}_{\overline{\eta}} = \sigma(D_\eta), \quad \overline{G}_{\overline{\xi}} = \sigma(C_\xi P_{\eta_0\xi_0}) \quad (\overline{\eta} \in \overline{\Gamma},\ \overline{\xi} \in \overline{\Gamma}')$$

мы и получаем требуемое выражение для элементов матрицы $\overline{P}$.

5.8. Условия изоморфизма двух вполне простых полугрупп с нулем матричного типа, рассмотренные в 5.7, допускают также и несколько другой подход к ним.

Для матрицы P над полугруппой с нулем $\mathfrak{H}$ следующие изменения ее, т. е. переход от P к новой матрице $\overline{P}$, назовем элементарными преобразованиями матрицы P:

1) взаимно однозначное отображение множества строк Γ на некоторое равномощное множество $\overline{\Gamma}$ („перестановка строк“);

2) взаимно однозначное отображение множества Γ' на некоторое равномощное множество $\overline{\Gamma}'$ („перестановка столбцов“);

3) изоморфизм полугруппы $\mathfrak{H}$ на новую полугруппу $\overline{\mathfrak{H}}$;

4) умножение слева каждой строки матрицы P на произвольный свой элемент из $\mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}}$;

5) умножение справа каждого столбца матрицы P на произвольный свой элемент из $\mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}}$.

Если у двух вполне простых полугрупп с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P,\ \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}(\overline{P},\ \overline{\mathfrak{H}})$ матрица $\overline{P}$ может быть получена из P при помощи одного из этих элементарных преобразований (причем, конечно, в случае третьего преобразования и в элементах самой полугруппы $\mathfrak{S}(P,\ \mathfrak{H})$ первая

компонента из $\mathfrak{H}$ заменяется соответствующим элементом из $\overline{\mathfrak{H}}$), то, согласно 5.7, полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}(\overline{P}, \overline{\mathfrak{H}})$ изоморфны. Разумеется, изоморфизм будет иметь место и в том случае, когда $\overline{P}$ получена из P в результате нескольких последовательных элементарных преобразований. В связи с этим в случае конечного числа строк или столбцов последние два преобразования можно заменить преобразованиями, когда умножается лишь одна строка или лишь один столбец.

Как следует из теоремы 5.7, всякий изоморфизм вполне простой полугруппы матричного типа на другую вполне простую полугруппу матричного типа может быть получен в результате последовательного применения некоторых элементарных преобразований (при этом каждое из пяти преобразований можно произвести лишь один раз).

§ 6. Строение вполне простых полугрупп без нуля

6.1. Исследование строения вполне простых полугрупп с нулем позволяет легко получить соответствующие свойства и для вполне простых полугрупп без нуля (конечно, эти свойства могут быть выведены и непосредственно путем ассуждений, сходных с рассуждениями предыдущего параграфа). Основанием для этого служит нижеследующая связь между полугруппами обоих классов.

Теорема. *Если во вполне простой полугруппе с нулем* $\mathfrak{A}$ *нуль присоединен внешним образом* (II, 2.12), *то множество всех ненулевых элементов полугруппы* $\mathfrak{A}$ *является вполне простой полугруппой без нуля.*

Если к вполне простой полугруппе без нуля $\mathfrak{A}'$ *присоединить внешним образом нуль, то полученная полугруппа будет вполне простой полугруппой с нулем.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с внешне присоединенным нулем и $\mathfrak{A}'$ — подполугруппа ее ненулевых элементов.

Если $\mathfrak{L}$ есть левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{L} \setminus O_{\mathfrak{A}}$, как легко видеть, будет левым идеалом полугруппы $\mathfrak{A}'$. При этом таким способом могут быть получены все левые идеалы $\mathfrak{A}'$, так как из того, что $\mathfrak{L}'$ есть левый идеал $\mathfrak{A}'$, очевидно, следует, что $\mathfrak{L}' \cup O_{\mathfrak{A}}$ есть левый ненулевой идеал $\mathfrak{A}$. Аналогично для правых и двусторонних идеалов.

2) Если $\mathfrak{A}$ вполне простая полугруппа с нулем, $\mathfrak{L}$ ее минимальный левый ненулевой идеал, и $\mathfrak{R}$ минимальный правый ненулевой идеал, то, согласно сказанному выше, $\mathfrak{L} \setminus O_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{R} \setminus O_{\mathfrak{A}}$ будут соответственно минимальным левым и минимальным правым идеалом полугруппы $\mathfrak{A}'$. Так как в $\mathfrak{A}$ нет собственных ненулевых двусторонних идеалов, то в $\mathfrak{A}'$ нет собственных двусторонних идеалов.

3) Если $\mathfrak{A}'$ вполне простая полугруппа без нуля и $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{R}'$ — ее минимальные левый и правый идеалы, то $\mathfrak{L}' \cup O_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{R}' \cup O_{\mathfrak{A}}$ будут соответственно минимальным левым ненулевым идеалом и минимальным правым ненулевым идеалом $\mathfrak{A}$. Из того, что $\mathfrak{A}'$ не имеет собственных двусторонних идеалов, следует, что $\mathfrak{A}$ не будет иметь собственных двусторонних ненулевых идеалов.

6.2. В связи с доказанной теоремой, имея целью рассмотреть вполне простые полугруппы без нуля, надо выяснить когда во вполне простых полугруппах с нулем нуль присоединен внешним образом. При этом благодаря теореме 5. можно ограничиться вполне простыми полугруппами с нулем матричного типа.

Теорема. *Во вполне простой полугруппе с нулем матричного типа* $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1) *нуль присоединен внешним образом тогда и только тогда, когда все элементы матрицы* P *отличны от нуля полугруппы* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Из самого определения умножения в $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ следует, что если все элементы P отличны от $O_{\mathfrak{H}}$, то произведение любых ненулевых элементов полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ также является ненулевым элементом, т. е. нуль $O_{\mathfrak{S}}$ присоединен в $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ внешним образом.

Если некоторый элемент матрицы P равен нулю $\mathfrak{H}$

$$P_{\eta\xi} = O_{\mathfrak{H}},$$

то при любых H_1, $H_2 \in \mathfrak{H} \setminus O_{\mathfrak{H}}$ оказывается равным $O_{\mathfrak{S}}$ следующее произведение ненулевых элементов:

$$(H_1, \xi, \eta) \cdot (H_2, \xi, \eta) = (H_1 P_{\eta\xi} H_2, \xi, \eta) = (O_{\mathfrak{H}}, \xi, \eta) = O_{\mathfrak{S}}$$

6.3. Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа и P матрица (конечная и бесконечная) с множеством строк Γ и множеством столбцов Γ', элементы которой $P_{\eta\xi}$ принадлежат $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ множество всех троек вида

$$(G, \xi, \eta) \quad (G \in \mathfrak{G}, \xi \in \Gamma', \eta \in \Gamma).$$

В $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ определяем действие

$$(G_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (G_2, \xi_2, \eta_2) = (G_1 P_{\eta_1 \xi_2} G_2, \xi_1, \eta_2).$$

Очевидно $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ будет не чем иным, как множеством всех ненулевых элементов вполне простой полугруппы с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ есть полугруппа, получающаяся из $\mathfrak{G}$ путем внешнего присоединения нуля.

Так как все элементы P отличны от $O_{\mathfrak{H}}$, то, согласно 6.2, $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ есть полугруппа с внешне присоединенным нулем. Отсюда, согласно 6.1, следует, что $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ является вполне простой полугруппой без нуля. Назовем $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{H})$ вполне *простой полугруппой без нуля матричного типа.*

6.4. Роль описанных в 6.3 полугрупп $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ определяется тем, что ими с точностью до изоморфизма исчерпываются все вполне простые полугруппы без нуля.

Теорема. *Всякая вполне простая полугруппа без нуля* $\mathfrak{A}$ *изоморфна некоторой вполне простой полугруппе без нуля матричного типа* (6.3).

Доказательство. Присоединив к $\mathfrak{A}$ внешним образом нуль O, получим полугруппу $\mathfrak{B}$, которая, согласно 6.1, будет вполне простой полугруппой с нулем. Благодаря теореме 5.4 $\mathfrak{B}$ изоморфна некоторой вполне простой полугруппе с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, у которой $\mathfrak{H}$ представляет собой группу $\mathfrak{G}$ с внешне присоединенным нулем $O_{\mathfrak{H}}$. Так как $\mathfrak{B}$, а потому и $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, есть полугруппа с внешне присоединенным нулем, то, согласно 6.2, все элементы матрицы P принадлежат группе $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что множеством всех ненулевых элементов полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ является не что иное, как полугруппа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ (6.3). Эта полугруппа изоморфна подполугруппе всех ненулевых элементов полугруппы $\mathfrak{B}$ и, следовательно, изоморфна исходной группе $\mathfrak{A}$.

6.5. Таким образом, и для вполне простых полугрупп без нуля мы получили полное описание их строения, родственное тому, которое было получено раньше для вполне простых полугрупп с нулем. Вопрос об изоморфизме, т. е. о том, как связаны между собой различные представления описанного вида одной и той же вполне простой полугруппы без нуля, также легко решается путем использования соответствующего результата для вполне простых полугрупп с нулем.

Пусть даны две вполне простые полугруппы без нуля матричного типа (6.3) $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ и $\mathfrak{S}'(\overline{P}, \overline{\mathfrak{G}})$. Присоединив

к ним внешним образом нули O и $\bar{O}$, мы получим вполне простые полугруппы с нулем $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}(\bar{P}, \bar{\mathfrak{H}})$, где $\mathfrak{H}$ есть группа $\mathfrak{G}$ с внешне присоединенным нулем $O_{\mathfrak{H}}$, а $\bar{\mathfrak{H}}$ есть группа $\bar{\mathfrak{G}}$ с внешне присоединенным нулем $O_{\bar{\mathfrak{H}}}$. Очевидно, полугруппы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ и $\mathfrak{S}'(\bar{P}, \bar{\mathfrak{G}})$ будут изоморфны между собой тогда и только тогда, когда изоморфны между собой полугруппы $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{S}(\bar{P}, \bar{\mathfrak{H}})$. Необходимое и достаточное условие изоморфизма таких полугрупп было дано в 5.7. Пользуясь им, непосредственно получаем необходимое и достаточное условие для изоморфизма и самих полугрупп $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ и $\mathfrak{S}(\bar{P}, \bar{\mathfrak{G}})$. Его даже нет необходимости заново формулировать, поскольку оно дословно совпадает с условием 5.7. Оно состоит из указанных там пяти пунктов, которые все относятся к группам $\mathfrak{G}$ и $\bar{\mathfrak{G}}$ и матрицам P и $\bar{P}$.

6.6. Пусть $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ есть вполне простая полугруппа без нуля матричного типа (6.3) и $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ — вполне простая полугруппа с нулем матричного типа, полученная из $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ путем внешнего присоединения нуля O. При доказательстве теоремы 6.1 мы отметили, как связаны между собой идеалы полугрупп, связанных таким способом. Благодаря этой связи пользуясь тем, что в 5.5 мы выяснили, как устроены системы левых и правых идеалов полугрупп вида $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, мы непосредственно получаем системы левых и правых идеалов полугруппы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$.

Пусть Γ есть множество строк матрицы P и Γ' множество ее столбцов. Для любого непустого подмножества $\Sigma \subset \Gamma$ множество всех элементов вида (G, ξ, η) $(G \in \mathfrak{G})$, у которых $\eta \in \Sigma$, является левым идеалом полугруппы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$. Других левых идеалов, кроме идеалов такого вида для различных $\Sigma \subset \Gamma$, эта полугруппа не имеет. Минимальным левым идеалом будет тот левый идеал, у которого Σ состоит из одного элемента.

Если $\Sigma' \subset \Gamma'$, то множество всех элементов вида $(G, \xi, \eta$ $(G \in \mathfrak{G})$, у которых $\xi \in \Sigma'$ является правым идеалом $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ при этом такими идеалами исчерпываются все правы идеалы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$.

6.7. Разберем еще одно важное свойство вполне просты полугрупп без нуля. Пусть Γ есть множество строк и Γ' множество столбцов матрицы P вполне простой полугруппы бе

нуля матричного типа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ (6.3). Для $\xi \in \Gamma'$, $\eta \in \Gamma$ обозначим через $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$ совокупность всех элементов вида (G, ξ, η) $(G \in \mathfrak{G})$. Благодаря 5.6 $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$ является группой, изоморфной группе $\mathfrak{G}$. Таким образом, все $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$ оказываются изоморфными между собой. Так как $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ есть их непересекающееся объединение, то отсюда благодаря 6.4 для произвольной вполне простой полугруппы без нуля получаем следующие свойства.

(α). *Всякая вполне простая полугруппа без нуля является непересекающимся объединением изоморфных между собой групп.*

(β). *Всякая вполне простая полугруппа без нуля вполне регулярна.*

Это следует из (α) и из III, 1.15.

(γ). *Всякие два различных идемпотента вполне простой полугруппы без нуля неперестановочны между собой.*

Действительно, идемпотентами $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ являются единицы групп $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$, но по правилу умножения в $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ элементы из $\mathfrak{G}_{\xi_1\eta_1}$ и $\mathfrak{G}_{\xi_2\eta_2}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$ или при $\eta_1 \neq \eta_2$, очевидно, неперестановочны.

(δ). *Если вполне простая полугруппа без нуля имеет лишь единственный идемпотент, то она является группой.*

Это непосредственно следует из (α).

6.8. Из полученного свойства следует, что каждый элемент вполне простой полугруппы без нуля имеет двустороннюю единицу, являющуюся идемпотентом. В полугруппе $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ такой единицей элемента (G, ξ, η), очевидно, будет $(P^{-1}_{\eta\xi}, \xi, \eta)$.

Отметим попутно, что, за исключением групп, вполне простые полугруппы без нуля никогда не имеют двусторонней единицы всей полугруппы. Действительно, если множество строк матрицы P вполне простой полугруппы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ содержит хотя бы два элемента, то

$$(G_1, \xi_1, \eta_1) \cdot (G_2, \xi_2, \eta_2) = \\ = (G_1 P_{\eta_1\xi_2} G_2, \xi_1, \eta_2) \neq (G_1, \xi_1, \eta_1) \qquad (\eta_1 \neq \eta_2)$$

и (G_1, ξ_1, η_1) не может быть единицей полугруппы. Аналогично, если множество столбцов матрицы P содержит не менее двух элементов. Если же и множество строк и множество столбцов полугруппы $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ состоят каждое лишь из одного элемента, то $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ изоморфна группе $\mathfrak{G}$ (6.7).

6.9. Несмотря на значительное сходство вполне простых полугрупп без нуля и вполне простых полугрупп с нулем, между ними имеются и различия. Например, свойства 6.7 и 6.8 не переносятся в класс вполне простых полугрупп с нулем. В качестве примера рассмотрим следующую вполне простую полугруппу с нулем матричного типа.

Пусть $\mathfrak{G} = \{E\}$ есть единичная группа, множества индексов Γ и Γ' состоят каждое из двух элементов: $\{1, 2\}$. В качестве матрицы P возьмем единичную матрицу

$$P = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

(в результате чего умножение в нашей полугруппе, очевидно, сведется к обычному матричному умножению). Соответствующая вполне простая полугруппа с нулем матричного типа состоит из пяти элементов

$$E_{11} = (E, 1, 1) = \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}; \quad E_{12} = (E, 1, 2) = \begin{bmatrix} O & E \\ O & O \end{bmatrix};$$

$$E_{21} = (E, 2, 1) = \begin{bmatrix} O & O \\ E & O \end{bmatrix}; \quad E_{22} = (E, 2, 2) = \begin{bmatrix} O & O \\ O & E \end{bmatrix};$$

$$O = \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

и, как непосредственно убеждаемся, обладает следующей таблицей умножения:

	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}	O
E_{11}	E_{11}	E_{12}	O	O	O
E_{12}	O	O	E_{11}	E_{12}	O
E_{21}	E_{21}	E_{22}	O	O	O
E_{22}	O	O	E_{21}	E_{22}	O
O	O	O	O	O	O

Мы видим, что ненулевые элементы E_{12} и E_{21} не только не содержатся в подгруппах, но и вообще не имеют двусторонних единиц.

6.10. Нетрудно выяснить, как видоизменяется свойство 6.7 применительно ко вполне простым полугруппам с нулем. Рассмотрим вполне простую полугруппу с нулем матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$ (5.1). Ее произвольный ненулевой элемент $S=(G, \xi, \eta)$ содержится в минимальном правом идеале $\mathfrak{R}_\xi$, состоящем из всех элементов вида (H, ξ, λ) $(H \in \mathfrak{H}, \lambda \in \Gamma)$ (5.5), и в минимальном левом идеале $\mathfrak{L}_\eta$, состоящем из всех элементов вида (H, μ, η) $(H \in \mathfrak{H}, \mu \in \Gamma')$ (5.5). Если $P_{\eta\xi} \neq O_{\mathfrak{S}}$, то

$$\mathfrak{L}_\eta \mathfrak{R}_\xi \ni (E_{\mathfrak{H}}, \xi, \eta) \cdot (E_{\mathfrak{H}}, \xi, \eta) = (P_{\eta\xi}, \xi, \eta) \neq O_{\mathfrak{S}},$$

откуда, согласно 4.7, следует, что $\mathfrak{R}_\xi \mathfrak{L}_\eta$ является группой с внешне присоединенным нулем. Наш элемент S содержится в группе $\mathfrak{R}_\xi \mathfrak{L}_\eta \setminus O_{\mathfrak{S}}$, так как он принадлежит $\mathfrak{R}_\xi \cap \mathfrak{L}_\eta = \mathfrak{R}_\xi \mathfrak{L}_\eta$ (4.7).

Если $P_{\eta\xi} = O_{\mathfrak{H}}$, то

$$S^2 = (G, \xi, \eta) \cdot (G, \xi, \eta) = (GP_{\eta\xi}G, \xi, \eta) = O_{\mathfrak{S}}$$

и S тем самым не может содержаться ни в какой группе из $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$.

Из сказанного следует, что во вполне простой полугруппе с нулем все элементы, квадрат которых отличен от нуля, содержатся в подгруппах и потому являются вполне регулярными (III, 1.18). Элементы, квадрат которых равен нулю, таковыми, конечно, не являются.

6.11. Рассмотрение вполне простых полугрупп без нуля позволяет выяснить строение вполне регулярных полугрупп, всякие два элемента которых регулярно сопряжены между собой. Такие полугруппы мы рассматривали в II, 6.8; II, 6.9.

Пусть Γ' и Γ — два произвольных непустых множества. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всевозможных пар вида (ξ, η), где $\xi \in \Gamma'$, $\eta \in \Gamma$. Определив в $\mathfrak{B}$ умножение

$$(\xi_1, \eta_1) \cdot (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_2)$$

превращаем $\mathfrak{B}$ в полугруппу. Очевидно, $\mathfrak{B}$ есть не что иное, как вполне простая полугруппа без нуля матричного типа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$, у которой $\mathfrak{G}$ есть единичная группа, а P — ма-

трица, множество строк которой есть Γ, множество столбцов Γ', а все элементы равны единице E — единственному элементу группы $\mathfrak{G}$.

Если $\xi_1 \neq \xi_2$ или $\eta_1 \neq \eta_2$, то

$$(\xi_1, \eta_1) \cdot (\xi_2, \eta_2) \neq (\xi_2, \eta_2) \cdot (\xi_1, \eta_1).$$

Поэтому, согласно II, 6.9, $\mathfrak{B}$ является полугруппой, всякие два элемента которой регулярно сопряжены между собой.

6.12. Покажем, что всякая полугруппа $\mathfrak{A}$, каждые два элемента которой регулярно сопряжены, изоморфна некоторой полугруппе $\mathfrak{B}$ рассмотренного в 6.11 типа.

Пусть X и Y два произвольных элемента $\mathfrak{A}$. Так как $XYX = X$, то всякий двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, содержащий Y, будет содержать и X. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ не имеет собственных двусторонних идеалов.

При любом $A \in \mathfrak{A}$ множество элементов вида XA ($X \in \mathfrak{A}$) является левым идеалом. При этом он является минимальным левым идеалом, так как всякий левый идеал, содержащий элемент XA, содержит благодаря II, 6.8 и элемент $YA = YXA$ при любом $Y \in \mathfrak{A}$. Аналогично $A\mathfrak{A}$ есть минимальный правый идеал. Таким образом, $\mathfrak{A}$ оказывается вполне простой полугруппой без нуля. Благодаря 6.4 $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторой полугруппе $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$. Группа $\mathfrak{G}$ обязана быть единичной, так как, с одной стороны, согласно 6.6, $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ является объединением групп изоморфных $\mathfrak{G}$, а с другой, все элементы $\mathfrak{A}$ идемпотентны (II, 6.8). Полугруппа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ при единичной $\mathfrak{G}$ очевидным образом изоморфна полугруппе типа, рассмотренного в 6.11.

6.13. Рассуждения 6.11 и 6.12 дают исчерпывающее описание строения полугрупп, у которых всякие два элемента регулярно сопряжены между собой. Они дают также и классификацию таких полугрупп, поскольку, как можно непосредственно убедиться (это также следует и из условий изоморфизма вполне простых полугрупп матричного типа), две полугруппы $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ типа 6.11 будут изоморфны тогда и только тогда, когда равномощны соответствующие множества Γ_1' и Γ_2' и равномощны Γ_1 и Γ_2.

6.14. Полугруппы рассмотренного нами класса могут быть также охарактеризованы как вполне простые полугруппы без нуля, все элементы которых идемпотентны. Что

все они обладают этими свойствами, уже было показано. Обратно, пусть $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа без нуля, все элементы которой идемпотентны. Она изоморфна некоторой полугруппе матричного типа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{S})$ (6.4). Так как все элементы $\mathfrak{A}$ идемпотентны, то в $\mathfrak{A}$ нет подгрупп не являющихся единичными группами. Отсюда благодаря 6.4 следует, что $\mathfrak{S}$ есть единичная группа. Но мы уже обращали внимание на то, что в том случае, когда $\mathfrak{S}$ единична, полугруппа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{S})$ изоморфна некоторой полугруппе $\mathfrak{B}$ типа 6.10.

6.15. В заключение покажем, как с помощью понятия примитивного идемпотента (3.10) могут быть естественно объединены в один общий класс вполне простых полугрупп вполне простые полугруппы без нуля и вполне простые полугруппы с нулем.

Теорема. *Для того чтобы неединичная полугруппа, не имеющая собственных двусторонних ненулевых идеалов, была вполне простой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала примитивным идемпотентом.*

Доказательство. Из 4.10 следует, что всякая вполне простая полугруппа с нулем обладает ненулевыми идемпотентами. Все они, как было отмечено в 4.14, примитивны.

Вполне простая полугруппа без нуля, согласно 3.10, обладает примитивными идемпотентами.

Если полугруппа с нулем, не имеющая собственных двусторонних ненулевых идеалов, обладает примитивными идемпотентами, то, согласно 4.14, она является вполне простой полугруппой с нулем.

Если полугруппа без нуля $\mathfrak{A}$ не имеет собственных двусторонних идеалов и содержит примитивный идемпотент I, то присоединим к ней внешним образом нуль. Мы получим полугруппу $\mathfrak{B}$, которая, как легко видеть, не будет иметь собственных двусторонних ненулевых идеалов и в которой I будет также примитивным идемпотентом. Таким образом, $\mathfrak{B}$ должна являться вполне простой полугруппой с нулем. Согласно 6.1, множество ее ненулевых элементов $\mathfrak{A}$ будет вполне простой полугруппой без нуля.

6.16. Проведенное выше описание строения вполне простых полугрупп без нуля и вывод рассмотренных выше свойств, так же как и некоторых других свойств, на которых мы не останавливались, без труда осуществляются

исходя из представления вполне простых полугрупп без нуля при помощи представления их полугруппами матричного типа. Именно этот подход и был использован Рисом [1] и рядом других авторов в последующих работах. Однако наравне с этим многие из этих свойств могут быть выведены и непосредственно без использования упомянутого представления. Такой подход употребляет Шварц [3].

ГЛАВА VI

ОБРАТИМОСТЬ

§ 1. Обратимость произведения элементов

1.1. В этой главе мы возвратимся к вопросу, который бегло уже был затронут во второй главе.

Определение. *Элемент S полугруппы $\mathfrak{A}$ называется обратимым справа, если он является левым делителем всякого элемента из $\mathfrak{A}$.*

Элемент S называется обратимым слева, если он является правым делителем всякого элемента из $\mathfrak{A}$.

Элемент обратимый и справа и слева называется двусторонне обратимым элементом.

В коммутативной полугруппе свойства обратимости справа, слева и двусторонней обратимости совпадают и мы можем говорить просто об обратимости.

Выделение в полугруппе обратимых элементов представляется вполне естественным. В частности, обилие элементов с теми или иными свойствами обратимости характеризует степень близости полугруппы к группе. В полугруппах преобразований, как мы увидим, выполнение свойства обратимости весьма существенно для некоторых важных свойств преобразований.

1.2. Согласно определению, элемент S обратим справа, если при любом $A \in \mathfrak{A}$ уравнение

$$SY = A$$

относительно Y разрешимо в $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что S будет обратимым справа тогда и только тогда, когда

$$S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Аналогично S обратим слева, если при любом $A \in \mathfrak{A}$ уравнение

$$XS = A$$

относительно неизвестного X разрешимо в $\mathfrak{A}$, что равносильно выполнению равенства

$$\mathfrak{A}S = \mathfrak{A}.$$

S двусторонне обратим тогда и только тогда, когда

$$S\mathfrak{A}S = \mathfrak{A}.$$

1.3. Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей E, то для обратимости S справа необходимо и достаточно, чтобы S обладал правым обратным относительно E.

Действительно, из

$$S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

следует, что при некотором S' имеет место $SS' = E$. В свою очередь, из $SS' = E$ следует

$$\mathfrak{A} = E\mathfrak{A} = SS'\mathfrak{A} \subset S\mathfrak{A},$$

т. е. $S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Совершенно аналогично доказывается, что для обратимости S слева необходимо и достаточно, чтобы S обладал левым обратным относительно E.

Принимая во внимание II, 2.14, (α) из сказанного следует, что элемент S, принадлежащий полугруппе $\mathfrak{A}$ с единицей, будет двусторонне обратимым в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда он обладает обратным элементом S^{-1}

$$SS^{-1} = S^{-1}S = E.$$

При этом S^{-1}, очевидно, также будет двусторонне обратимым.

1.4. ***Теорема.*** *Множество всех двусторонне обратимых элементов полугруппы, если оно непусто, образует группу, единица которой является единицей всей полугруппы.*

Доказательство. То, что множество всех двусторонне обратимых элементов $\mathfrak{G}$, т. е. множество всех элементов, являющихся и правыми и левыми делителями всякого элемента полугруппы $\mathfrak{A}$, образует группу, было дока-

зано нами в II, 1.5. В II, 2.15 мы показали, что группа всегда обладает единицей E.

Пусть A есть произвольный элемент $\mathfrak{A}$. Поскольку $E \in \mathfrak{G}$, в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы A' и A'', что

$$A = EA', \quad A = A''E.$$

Так как $E^2 = E$, то, очевидно, $EA = A$ и $AE = A$.

1.5. *Следствие.* *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладала двусторонне обратимыми элементами, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{A}$ *имела единицу.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ имеет двусторонне обратимые элементы, то, согласно 1.4, единица группы всех двусторонне обратимых элементов будет единицей $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ обладает единицей E, то для любого $A \in \mathfrak{A}$

$$EA = A, \quad AE = A,$$

т. е. E является и правым и левым делителем A, т. е. двусторонне обратимым элементом.

1.6. Для произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{G}$ множество всех ее двусторонне обратимых элементов. Множество всех элементов, обратимых справа, но необратимых слева, обозначим через $\mathfrak{R}$; множество всех элементов обратимых слева, но необратимых справа, обозначим через $\mathfrak{L}$.

Множество всех элементов, необратимых ни справа, ни слева, обозначим через $\mathfrak{K}$.

Из определения следует, что множества $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ попарно не пересекаются, причем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}.$$

Разумеется, для некоторых полугрупп некоторые из подмножеств $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ могут быть и пусты.

В принятых обозначениях $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$ есть множество всех элементов $\mathfrak{A}$, обратимых справа, и $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$ есть множество всех элементов, обратимых слева.

1.7. Выясним, что можно сказать об обратимости произведения двух элементов. Как показал Е. С. Ляпин [15], обратимость произведения зависит от обратимости сомножителей, хотя одним этим не определяется. Результаты исследования мы оформим в виде таблицы, смысл которой заключается в том, что для подмножеств $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{A}$ произведение их $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ содержится в подмножестве $\mathfrak{Z}$, указанном на пересе-

чении строки, соответствующей $\mathfrak{X}$, и столбца, соответствующего $\mathfrak{Y}$ (при этом, однако, $\mathfrak{XY}$ может и не совпадать с $\mathfrak{Z}$).

Теорема. *Для всякой полугруппы* $\mathfrak{A}$ *имеет место:*

	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{K}$
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{K}$
$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{G}\cup\mathfrak{R}\cup\mathfrak{L}\cup\mathfrak{K}$	$\mathfrak{R}\cup\mathfrak{K}$
$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{K}$
$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}\cup\mathfrak{K}$	$\mathfrak{K}$

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $XY\in\mathfrak{G}$, то $X\in\mathfrak{G}\cup\mathfrak{R}$ и $Y\in\mathfrak{G}\cup\mathfrak{L}$.

Действительно, согласно 1.2,

$$XY\mathfrak{A}XY=\mathfrak{A}.$$

Отсюда получаем

$$X\mathfrak{A}\supset X(Y\mathfrak{A}XY)=\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}Y\supset(XY\mathfrak{A}X)Y=\mathfrak{A},$$

что означает, что X обратим справа, а Y обратим слева.

Теперь рассмотрим последовательно все шестнадцать клеточек нашей таблицы. В дальнейшем под G, R, L, K (также и со штрихами) будем подразумевать произвольные элементы соответственно из $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$.

(1). То, что $GG'\in\mathfrak{G}$ следует из 1.4.

(2). Так как

$$GR\mathfrak{A}=G\mathfrak{A}=\mathfrak{A},$$

то $GR\in\mathfrak{G}\cup\mathfrak{R}$. При этом $GR\in\mathfrak{G}$, благодаря сказанному вначале, невозможно, так как $R\overline{\in}\mathfrak{G}\cup\mathfrak{L}$.

(3). Так как

$$\mathfrak{A}GL=\mathfrak{A}L=\mathfrak{A},$$

то $GL\in\mathfrak{G}\cup\mathfrak{L}$. Если бы $GL\in\mathfrak{G}$, то благодаря $G^{-1}\in\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{A}=G^{-1}\mathfrak{A}=G^{-1}GL\mathfrak{A}=L\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что L необратим справа.

(4). Если бы имело место

$$GK\in\mathfrak{G}\cup\mathfrak{R},$$

то благодаря $G^{-1} \in \mathfrak{G}$ мы получили бы

$$\mathfrak{A} = G^{-1}\mathfrak{A} = G^{-1}GK\mathfrak{A} = K\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что K необратим справа.

Если бы имело место

$$GK \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}GK = \mathfrak{A}K,$$

что противоречило бы тому, что K необратим слева. Следовательно, $GK \in \mathfrak{K}$.

(5). Так как

$$RG\mathfrak{A} = R\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

то $RG \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$.

Если бы $RG \in \mathfrak{G}$, то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}G^{-1} = \mathfrak{A}RG \cdot G^{-1} = \mathfrak{A}R,$$

что противоречило бы тому, что R необратим слева.

(6). Так как

$$RR'\mathfrak{A} = R\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

то $RR' \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$. Но $RR' \in \mathfrak{G}$ противоречило бы благодаря сказанному вначале тому, что $R' \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$.

(7). Так как $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K} = \mathfrak{A}$, то RL, конечно, принадлежит этому множеству.

(8). Если бы имело место

$$RK \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}RK \subset \mathfrak{A}K,$$

что противоречит тому, что K необратим слева.

(9). Так как

$$\mathfrak{A}LG = \mathfrak{A}G = \mathfrak{A},$$

то $LG \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$. При этом $LG \in \mathfrak{G}$, согласно сказанному вначале, противоречило бы тому, что

$$L \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

(10). Если бы имело место

$$LR \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = LR\mathfrak{A} = L\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что L необратим справа.

Аналогично доказывается невозможность $LR \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$.

Следовательно, $LR \in \mathfrak{K}$.

(11). Так как

$$\mathfrak{A}LL' = \mathfrak{A}L' = \mathfrak{A},$$

то $LL' \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$. Но $LL' \in \mathfrak{G}$ противоречило бы благодаря сказанному вначале тому, что $L \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$.

(12). Если бы имело место

$$LK \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = LK\mathfrak{A} \subset L\mathfrak{A}.$$

Но $\mathfrak{A} = L\mathfrak{A}$ противоречит тому, что L необратим справа.

Если бы имело место

$$LK \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}LK = \mathfrak{A}K,$$

что противоречило бы тому, что K необратим слева. Следовательно, $LK \in \mathfrak{K}$.

(13). Если бы имело место

$$KG \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = KG\mathfrak{A} = K\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что K необратим справа.

Если бы имело место

$$KG \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L},$$

то благодаря тому, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}G^{-1}$, мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}G^{-1} = \mathfrak{A}KGG^{-1} = \mathfrak{A}K,$$

что противоречило бы тому, что K необратим слева.

(14). Если бы имело место

$$KR \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = KR\mathfrak{A} = K\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что K необратим справа.

Если бы имело место

$$KR \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}KR \subset \mathfrak{A}R,$$

что противоречило бы тому, что R необратим слева.

(15). Если бы имело место

$$KL \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = KL\mathfrak{A} \subset K\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что K необратим справа.

(16). Если бы имело место

$$KK' \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R},$$

то мы получили бы

$$\mathfrak{A} = KK'\mathfrak{A} \subset K\mathfrak{A},$$

что противоречило бы тому, что K необратим справа. Аналогично предположение $KK' \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$ привело бы нас к противоречию с тем, что K' необратим слева.

1.8. Из 1.7. непосредственно видно, какие из объединений множеств $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ образуют подполугруппы.

Следствие. *Следующие подмножества являются подполугруппами* $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}$;

$\mathfrak{G}$ — *множество двусторонне обратимых элементов*;

$\mathfrak{R}$ — *множество обратимых справа, но необратимых слева элементов*;

$\mathfrak{L}$ — *множество обратимых слева, но необратимых справа элементов*;

$\mathfrak{K}$ — *множество элементов, необратимых ни справа, ни слева*;

$\mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$ — *множество элементов, обратимых справа*;

$\mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$ — *множество элементов, обратимых слева;*
$\mathfrak{G} \cup \mathfrak{K}$ — *множество двусторонне обратимых элементов и элементов, необратимых ни справа, ни слева;*
$\mathfrak{R} \cup \mathfrak{K}$ — *множество элементов, необратимых слева;*
$\mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}$ — *множество элементов, необратимых справа;*
$\mathfrak{G} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{K}$ — *множество элементов, обратимых справа, и элементов, необратимых ни справа, ни слева;*
$\mathfrak{G} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}$ — *множество элементов, обратимых слева, и элементов, необратимых ни справа, ни слева.*

1.9. Некоторые из клеток таблицы 1.7 содержат не одно из множеств $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$, но объединение нескольких из них. Покажем на примере, что сократить количество этих множеств в таких клетках невозможно, т. е., что существуют такие полугруппы, в которых различные произведения элементов соответствующих множеств принадлежат всем указанным в каждой такой клетке множествам.

Пусть Ω есть множество всех чисел натурального ряда. Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований Ω. Возьмем следующие элементы этой полугруппы, записанные в виде подстановок:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \end{pmatrix};$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \dots \end{pmatrix};$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & (n-2) & \dots \end{pmatrix};$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \dots \end{pmatrix};$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & (n+1) & \dots \end{pmatrix};$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & (n+2) & \dots \end{pmatrix};$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \end{pmatrix};$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Согласно II, 3.3, R_1, R_2, R_3 являются в $\mathfrak{S}_2$ левыми делителями подстановки E, являющейся единицей $\mathfrak{S}_2$, и не являются правыми делителями E. Поэтому, согласно 1.3, $R_1, R_2, R_3 \in \mathfrak{R}$. Элементы L_1, L_2 являются правыми делителями E и не являются левыми делителями E. Поэтому, согласно 1.3, $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$. Элементы K_1 и K_2 принадлежат $\mathfrak{K}$ и E принадлежит $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим седьмую клетку таблицы 1.7. В множестве, соответствующем этой клетке, содержатся элементы:

$$R_1L_1 = E \in \mathfrak{G};$$

$$R_2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \dots \end{pmatrix} = R_1 \in \mathfrak{R};$$

$$R_3L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & (n+1) & \dots \end{pmatrix} = L_1 \in \mathfrak{L};$$

$$R_3L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \end{pmatrix} = K_1 \in \mathfrak{K}.$$

Таким образом, для полугруппы $\mathfrak{S}_2$ произведение $\mathfrak{RL}$ действительно содержит элементы из каждого из четырех множеств $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$, объединение которых записано в седьмой клетке таблицы.

Теперь рассмотрим восьмую клетку. В множестве $\mathfrak{RK}$, соответствующем этой клетке, содержатся элементы:

$$R_1K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \dots \end{pmatrix} = R_1 \in \mathfrak{R};$$

$$R_1K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} = K_2 \in \mathfrak{K}.$$

Опять мы обнаружили в $\mathfrak{RK}$ элементы из обоих множеств $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{K}$, объединение которых записано в восьмой клетке.

Наконец, рассмотрим пятнадцатую клетку. В множестве $\mathfrak{KL}$, соответствующем этой клетке, содержатся элементы:

$$K_1L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & (n+1) & \dots \end{pmatrix} = L_1 \in \mathfrak{L};$$

$$K_2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} = K_2 \in \mathfrak{K}.$$

$\mathfrak{KL}$ содержит элементы и из $\mathfrak{L}$ и из $\mathfrak{K}$, объединение которых записано в пятнадцатой клетке.

Наконец, отметим, что в качестве искомого примера мы, конечно, можем взять не всю полугруппу $\mathfrak{S}_2$, но ее счетную подполугруппу, порождаемую элементами E, R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, K_1, K_2. Легко видеть, что каждый из этих элементов будет принадлежать соответствующему множеству $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ этой полугруппы.

1.10. Отметим, что рассмотренные свойства обратимости элементов тесно связаны с вопросом о принадлежности элементов к собственным идеалам полугруппы.

Теорема. *Для того чтобы элемент S полугруппы $\mathfrak{A}$ был обратим справа, необходимо и достаточно, чтобы S обладал правой единицей и не содержался ни в каком собственном правом идеале полугруппы $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. 1) Пусть S обратим справа

$$S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Тогда $S\mathfrak{A} \ni S$, т. е. при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ должно выполняться $SZ = S$. При этом, если $\mathfrak{R}$ есть правый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий S, то

$$\mathfrak{A} = S\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R},$$

т. е. $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$.

2) Пусть S обладает обоими указанными в формулировке теоремы свойствами. Так как S обладает правой единицей, то $S \in S\mathfrak{A}$. Таким образом, множество $S\mathfrak{A}$, очевидно, являющееся правым идеалом $\mathfrak{A}$, должно совпадать с $\mathfrak{A}$, что и означает, что S обратим справа.

1.11. Принимая во внимание 1.5, мы непосредственно получаем из 1.10 следствие.

Следствие. *Для того чтобы элемент S полугруппы $\mathfrak{A}$ был двусторонне обратим в $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ обладала единицей и чтобы S не содержался ни в каком собственном левом или правом идеале $\mathfrak{A}$.*

§ 2. Обратимость увеличительных элементов

2.1. Как показал Е. С. Ляпин [14], свойство увеличительности элементов, рассмотренное нами в § 5 и § 6 третьей главы, тесно связано со свойством обратимости элементов.

Теорема. *Всякий правый увеличительный элемент полугруппы обратим слева, но необратим справа.*

Всякий левый увеличительный обратим справа, но необратим слева.

Доказательство. Если U есть правый увеличительный элемент полугруппы $\mathfrak{A}$, то при некотором $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ мы имеем

$$\mathfrak{A}'U = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}U = \mathfrak{A}$, т. е. U обратим слева. Предположим, что U одновременно обратим и справа. Тогда U является двусторонне обратимым элементом. Согласно 1.4, из существования в $\mathfrak{A}$ двусторонне обратимых элементов следует, что $\mathfrak{A}$ обладает единицей $E_{\mathfrak{A}}$, а двусторонне обратимый элемент U имеет обратный U^{-1}. Но из этого вытекает

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}'UU^{-1} = \mathfrak{A}U^{-1} = \mathfrak{A}UU^{-1} = \mathfrak{A}E_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A},$$

что противоречит выбору $\mathfrak{A}'$.

Рассуждения для левого увеличительного аналогичны.

2.2. Обратного утверждения по отношению к теореме сделать без каких-либо дополнительных оговорок нельзя. Действительно, в полугруппе $\mathfrak{A}$, имеющей более одного элемента, в которой для любых элементов X и Y имеет место $XY = Y$, очевидно, каждый элемент обратим справа:

$$X\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

однако ни один элемент не является левым увеличительным, ибо

$$X\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'$$

при любых $X \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$.

2.3. Обратное утверждение по отношению к теореме 2.1 все же справедливо в полугруппах с единицей. Оказывается, что $\mathfrak{R}$ (в обозначениях § 1) есть множество всех левых увеличительных элементов и $\mathfrak{L}$ — множество правых увеличительных.

Теорема. *В полугруппе с единицей правые увеличительные элементы, и только они, являются элементами, обратимыми слева и необратимыми справа.*

Левые увеличительные элементы, и только они являются элементами, обратимыми справа и необратимыми слева.

Доказательство. То, что правый увеличительны элемент обратим слева и необратим справа, было доказан в 2.1.

Пусть элемент L полугруппы с единицей $\mathfrak{A}$ обрати слева и необратим справа

$$\mathfrak{A}L = \mathfrak{A}, \qquad L\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}.$$

При некотором $R \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$RL = E_{\mathfrak{A}}.$$

Из этого следует

$$R(L\mathfrak{A}) = \mathfrak{A},$$

что означает, что R есть левый увеличительный элемент $\mathfrak{A}$

Рассмотрим подполугруппу

$$\mathfrak{Q} = [L, R].$$

Всякий элемент этой полугруппы

$$Q = L^{\alpha_1}R^{\beta_1}L^{\alpha_2}R^{\beta_2} \ldots L^{\alpha_k}R^{\beta_k},$$

заменяя RL единицей, очевидно, можно провести к виду

$$Q = L^{\alpha}R^{\beta}$$

(здесь и в последующем некоторые показатели степени могу равняться нулю, что означает $L^0 = R^0 = E_{\mathfrak{A}}$).

Выясним, единственным ли образом может быть зада в таком виде каждый элемент $\mathfrak{Q}$.

Пусть

$$L^{\alpha_1}R^{\beta_1} = L^{\alpha_2}R^{\beta_2}.$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то, умножая равенство слева на R^{α_1} и принимая во внимание, что $RL = E_{\mathfrak{A}}$, мы получим

$$R^{\beta_1} = R^{\beta_2}.$$

Если $\beta_1 > \beta_2$, то, умножая это равенство справа на R^{β_2} мы получим

$$R^{\beta_1 - \beta_2} = E_{\mathfrak{A}}.$$

Благодаря III, 5.4 это невозможно, так как R есть левый увеличительный элемент $\mathfrak{A}$, а $E_{\mathfrak{A}}$ не есть левый увеличительный элемент $\mathfrak{A}$.

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то, умножая равенство

$$L^{\alpha_1}R^{\beta_1} = L^{\alpha_2}R^{\beta_2}$$

слева на R^{α_2}, мы получим

$$L^{\alpha_1-\alpha_2}R^{\beta_1} = R^{\beta_2}.$$

Но R есть левый увеличительный элемент. Поэтому $R\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и из полученного равенства вытекает

$$L\mathfrak{A} \supset L^{\alpha_1-\alpha_2}R^{\beta_1}\mathfrak{A} = R^{\beta_2}\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

что противоречит тому, что $L\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$.

Таким образом, мы показали, что подполугруппа $\mathfrak{Q}$ представляет собой множество произведений вида

$$L^{\alpha}R^{\beta},$$

причем два произведения, отличающиеся хотя бы одним из показателей, различны. Умножение этих произведений благодаря тому, что $RL = E_{\mathfrak{A}}$, производится по правилу

$$L^{\alpha_1}R^{\beta_1} \cdot L^{\alpha_2}R^{\beta_2} = \begin{cases} L^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1}R^{\beta_2} & (\text{если } \alpha_2 \geqslant \beta_1); \\ L_1^{\alpha_1}R^{\beta_1-\alpha_2+\beta_2} & (\text{если } \alpha_2 \leqslant \beta_1). \end{cases}$$

Из всего этого следует, что полугруппа $\mathfrak{Q}$ изоморфна полугруппе $\mathfrak{P}$ (III, 6.3). Так как при изоморфизме $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$ элементу $U \in \mathfrak{P}$ соответствует элемент $L \in \mathfrak{Q}$, то, согласно III, 6.8, L является правым увеличительным элементом полугруппы $\mathfrak{A}$.

Рассуждения для левых увеличительных аналогичны.

2.4. Благодаря III, 6.8 из доказанной теоремы вытекает следствие.

Следствие. *Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей. Элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ является обратимым слева, но необратимым справа тогда и только тогда, когда существует изоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{P}$ (III, 6.2; III, 6.3) в $\mathfrak{A}$, при котором $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi(U) = X$.*

Элемент X является обратимым справа, но необратимым слева тогда и только тогда, когда существует

изоморфизм φ *полугруппы* $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, *при котором* $\varphi(E_{\mathfrak{P}}) = E_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi(V) = X$.

2.5. ***Следствие.*** *Если в полугруппе* $\mathfrak{A}$ *с единицей для некоторого элемента* $X \in \mathfrak{A}$ *имеет место*

$$X\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

но

$$X\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$$

при всяком $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, *отличном от* $\mathfrak{A}$, *то элемент* X *является двусторонне обратимым.* (Аналогично для умножения справа.)

Действительно, X обратим справа, но не является левым увеличительным и потому, согласно 2.3, не может быть необратимым слева.

2.6. Отметим, что в формулировке следствия 2.5 нельзя опустить требование существования единицы. Это видно из следующего примера. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с количеством элементов не меньшим двух и такая, что $XY = Y$ для любых X, $Y \in \mathfrak{A}$. Тогда в $\mathfrak{A}$ для всякого X имеет место

$$X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad X\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'.$$

Однако, очевидно, ни один элемент полугруппы $\mathfrak{A}$ не является двусторонне обратимым.

§ 3. Полугруппы с односторонней обратимостью

3.1. В связи с осуществленным в первом параграфе разбиением произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ на четыре подполугруппы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ естественно выделяются полугруппы, совпадающие со своей подполугруппой $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{L}$ (или аналогично $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{R}$). Такие полугруппы были рассмотрены в свое время А. К. Сушкевичем [3], [12], в связи с чем Н. Н. Воробьев [6] называет их системами Сушкевича. Их называют также полугруппами с левым делением и полугруппами простыми слева.

Определение. *Если все элементы полугруппы обратимы слева, то она называется* ***полугруппой с левой обратимостью.***

Аналогично определяется полугруппа с правой обратимостью.

Только группы являются полугруппами одновременно и с левой и с правой обратимостью.

3.2. *Полугруппа $\mathfrak{A}$ является полугруппой с левой обратимостью тогда и только тогда, когда она не имеет собственных левых идеалов.*

Действительно, если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левой обратимостью, то для любого $A \in \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}$ и потому A не может содержаться в собственном левом идеале $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ не имеет собственных левых идеалов, то для любого $A \in \mathfrak{A}$ имеет место $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}$.

Отметим, что благодаря V,2.4 из сказанного следует, что к полугруппам с левой обратимостью относятся минимальные левые идеалы всякой полугруппы.

3.3. Полугруппы с левой обратимостью существенно разделяются на два класса в зависимости от того, имеются ли среди их элементов идемпотенты или нет.

Теорема. *Если в полугруппе с левой обратимостью имеются идемпотенты, то каждый из них является такой правой единицей полугруппы, которая делится справа на все элементы полугруппы.*

Если в полугруппе с левой обратимостью нет идемпотентов, то ни один ее элемент не имеет правых единиц.

Доказательство. 1) Пусть I есть произвольный идемпотент полугруппы с левой обратимостью $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левой обратимостью, то для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие U и V, что

$$UA = I, \quad VI = A.$$

Благодаря второму равенству получаем

$$AI = VII = VI = A.$$

2) Пусть в полугруппе с левой обратимостью $\mathfrak{A}$ элемент X имеет правую единицу

$$XY = X \quad (X, Y \in \mathfrak{A}).$$

При некотором $Z \in \mathfrak{A}$ должно выполняться $ZX = Y$. Отсюда сразу получаем существование в $\mathfrak{A}$ идемпотента

$$Y^2 = ZX \cdot Y = Z \cdot XY = ZX = Y.$$

3.4. Как следует из теоремы 3.3, класс полугрупп с левой обратимостью, обладающих идемпотентами, совпадает с классом полугрупп, обладающих такой правой единицей, которая делится справа на всякий элемент полугруппы. Действительно, пусть некоторая полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает такой правой единицей I. Для любого $A \in \mathfrak{A}$ найдется такой $X \in \mathfrak{A}$, что $XA = I$. Отсюда для всякого $B \in \mathfrak{A}$ получаем

$$(BX)A = BI = B.$$

При этом $\mathfrak{A} \ni I$ и $I^2 = I$.

Из сказанного следует, что когда ниже мы исследуем строение полугрупп с левой обратимостью, обладающих идемпотентами, то тем самым мы получим ответ на вопрос, поставленный во втором параграфе второй главы о том, каковы полугруппы, обладающие правой единицей, делящейся справа на все элементы полугруппы.

Исследование ряда свойств полугрупп с левой обратимостью, обладающих идемпотентами, было произведено А. К. Сушкевичем [12]. Позже, развивая далее это направление, Мэнн [1] дал исчерпывающее описание строения таких полугрупп и произвел их полную классификацию.

3.5. Пусть $\mathfrak{H}$ есть такая полугруппа, в которой для любых $U, V \in \mathfrak{H}$ имеет место $UV = U$ и $\mathfrak{G}$ произвольная группа. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество всевозможных пар

$$(U, G) \quad (U \in \mathfrak{H}, G \in \mathfrak{G}).$$

Определим в $\mathfrak{T}$ умножение

$$(U, G) \cdot (U', G') = (UU', GG') = (U, GG')$$
$$(U, U' \in \mathfrak{H};\ G, G' \in \mathfrak{G}).$$

Ассоциативность действия очевидна. $\mathfrak{T}$ является полугруппой с левой обратимостью, так как для любых $(U, G), (U'G') \in \mathfrak{T}$ мы имеем

$$(U', G'G^{-1}) \cdot (U, G) = (U', G').$$

Элементы вида $(U, E_{\mathfrak{G}})$, как легко видеть, являются идемпотентами, причем других идемпотентов $\mathfrak{T}$ не имеет.

3.6. Строение описанной полугруппы $\mathfrak{T}$ целиком определяется мощностью множества $\mathfrak{H}$ и группой $\mathfrak{G}$.

Полугруппу $\mathfrak{T}$ можно рассматривать как вполне простую полугруппу без нуля матричного типа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ (V,6.3),

у которой матрица $\dot{P}$ состоит из одного столбца, причем все ее элементы равны $E_{\mathfrak{S}}$.

3.7. Значение полугрупп указанного вида объясняется тем, что, как мы покажем ниже, *всякая полугруппа с левой обратимостью, обладающая идемпотентами, изоморфна некоторой полугруппе типа 3.5.*

3.8. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа с левой обратимостью, обладающая идемпотентами, совокупность которых обозначим через $\mathfrak{H}$. Выведем ряд свойств полугруппы $\mathfrak{A}$.

(α) Если $U, V \in \mathfrak{H}$, то $UV = U$.

Это непосредственно следует из 3.3.

(β). Если $U \in \mathfrak{H}$, $X \in \mathfrak{A}$ и $UX = U$, то $X \in \mathfrak{H}$.

Действительно, благодаря 3.3

$$X^2 = XUX = XU = X.$$

(γ). Если $U \in \mathfrak{H}$, то множество $U\mathfrak{A}$ является группой, единица которой есть U.

Действительно, если $X, Y \in U\mathfrak{A}$, то, очевидно, $XY \in U\mathfrak{A}$. Элемент $U \in U\mathfrak{A}$ есть, очевидно, левая единица подполугруппы $U\mathfrak{A}$. Для всякого $X \in U\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой элемент X', что $U = X'X$. Так как

$$U = UU = (UX') \cdot X, \quad UX' \in U\mathfrak{A},$$

то U делится справа в $U\mathfrak{A}$ на произвольный элемент из $U\mathfrak{A}$. Отсюда, согласно II, 2.18, следует, что $U\mathfrak{A}$ есть группа.

(δ) Для всякого $X \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$ найдется один единственный элемент I_X, являющийся левой единицей для X.

Для произвольного $U \in \mathfrak{H}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой X', что $U = X'X$. Для $I_X = XX'$ мы, пользуясь 3.4, получаем

$$I_X X = XX'X = XU = X,$$
$$I_X^2 = XX'XX' = XUX' = XX' = I_X.$$

Если V произвольная левая единица X, являющаяся идемпотентом, то благодаря (α) получаем

$$V = VI_X = VXX' = XX' = I_X.$$

3.9. Выведенные в 3.8 свойства полугруппы с левой обратимостью, обладающей идемпотентами $\mathfrak{A}$, позволяют доказать справедливость утверждения 3.7.

Фиксируем один из идемпотентов $U \in \mathfrak{H}$. Пользуясь 3,8, (δ) сопоставим каждому элементу $X \in \mathfrak{A}$ пару

$$X \sim (I_X, UX).$$

Покажем, что различным элементам полугруппы $\mathfrak{A}$ соответствуют различные пары. Пусть для $X, Y \in \mathfrak{A}$

$$(I_X, UX) = (I_Y, UY),$$

т. е.

$$I_X = I_Y, \quad UX = UY.$$

Тогда

$$X = I_X X = I_X UX = I_Y UY = I_Y Y = Y.$$

Теперь покажем, что для произвольной пары (V, G), где $V \in \mathfrak{H}$ и $G \in U\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдется элемент, которому эта пара соответствует. В качестве такого элемента возьмем $Z = VG$. Так как

$$VZ = VVG = VG = Z, \quad V \in \mathfrak{H},$$

то $I_Z = V$. Так как $G \in U\mathfrak{A}$, то

$$UZ = UVG = UG = G.$$

Следовательно,

$$Z \sim (I_Z, UZ) = (V, G)$$

3.10. Обозначим через $\mathfrak{T}$ полугруппу типа 3.5, построенную для полугруппы $\mathfrak{H}$ (в которой благодаря 3.8, (α) произведение двух любых элементов равно левому множителю) и для группы $U\mathfrak{A}$ (3.8, (γ)). В 3.9 между элементами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{T}$ было установлено взаимно однозначное соответствие. Покажем, что это соответствие обладает свойством изоморфизма, и тем самым докажем справедливость утверждения 3.7.

Пусть $XY = Z$ и

$$X \sim (I_X, UX), \; Y \sim (I_Y, UY), \; Z \sim (I_Z, UZ).$$

Так как $I_X I_Y = I_X \in \mathfrak{H}$ (3.8, (α)) и

$$(I_X I_Y) \cdot Z = (I_X I_Y) \cdot (XY) = I_X XY = XY = Z,$$

то благодаря 3.8, (δ) $I_X I_Y = I_Z$.

Далее,

$$(UX)\cdot(UY)=U\cdot XU\cdot Y=UXY=UZ.$$

Таким образом, согласно установленному в 3.5 действию, между парами, являющимися элементами $\mathfrak{T}$, мы получаем, что элементу $Z=XY$ соответствует следующая пара:

$$(I_Z, UZ)=(I_XI_Y, (UX)\cdot(UY))=(I_X, UX)\cdot(I_Y, UY).$$

3.11. Изоморфное представление рассматриваемых нами полугрупп в виде полугрупп пар не только выясняет их строение и позволяет вывести различные их свойства, но и является классификацией полугрупп с левой обратимостью, имеющих идемпотенты. Это обстоятельство вытекает из того, что две полугруппы пар, полугруппа $\mathfrak{T}_1$, построенная из $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{G}_1$, и полугруппа $\mathfrak{T}_2$, построенная из $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{G}_2$, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ (для чего, очевидно, достаточна равномощность $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$) и изоморфны группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$. Для доказательства этого, очевидно, достаточно показать, что в полугруппе пар типа 3.5 $\mathfrak{T}$ полугруппа $\mathfrak{H}$ и группа $\mathfrak{G}$ определяются с точностью до изоморфизма единственным образом. Покажем это. $\mathfrak{H}$ равномощно множеству всех идемпотентов $\mathfrak{T}$, ибо таковыми являются только пары вида $(H, E_{\mathfrak{G}})$ $(H\in\mathfrak{H})$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ определено для $\mathfrak{T}$ с точностью до изоморфизма единственным образом. $\mathfrak{G}$ изоморфна группе, состоящей из всех элементов $\mathfrak{T}$, имеющих данный (произвольный) идемпотент $(H,E_{\mathfrak{G}})$ своей двусторонней единицей (таковыми элементами являются, очевидно, пары вида (H, G)). Следовательно, и $\mathfrak{G}$ определяется для $\mathfrak{T}$ с точностью до изоморфизма единственным образом.

3.12. Совершенно очевидно, что рассмотрение свойств, описание строения и классификация полугрупп с правой обратимостью, имеющих идемпотенты, производится способом вполне аналогичным предыдущим рассуждениям.

3.13. Теперь перейдем к рассмотрению полугрупп с левой обратимостью, не имеющих идемпотентов. Пусть $\mathfrak{A}$ одна из таких полугрупп. Она обязательно бесконечна, так как всякая конечная полугруппа имеет идемпотенты. Напомним также, что в $\mathfrak{A}$ благодаря 3.3 ни один элемент не может иметь правой единицы.

3.14. Рассмотрим следующий важный пример полугрупп с указанными свойствами. Этот пример был построен Тесье [5]. Он является некоторым развитием коиструкции Бэра и Леви [1] и играет важную роль для всего класса рассматриваемых полугрупп.

Пусть в бесконечном множестве Ω задана произвольным образом эквивалентность $\mathfrak{n}$, такая что количество $\mathfrak{n}$-классов бесконечно.

В полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$, состоящей из всех преобразований Ω, выделим преобразования X, обладающие тремя свойствами:

(α) если $\alpha \sim \beta\,(\mathfrak{n})$ ($\alpha,\ \beta \in \Omega$), то $X\alpha = X\beta$;

(β) если $\alpha \not\sim \beta\,(\mathfrak{n})$ ($\alpha,\ \beta \in \Omega$), то $X\alpha \not\sim X\beta\,(\mathfrak{n})$;

(γ) множество всех таких $\mathfrak{n}$-классов Ω', что $X\Omega \cap \Omega' = \varnothing$, равномощно множеству всех $\mathfrak{n}$-классов.

Легко видеть, что совокупность преобразований X из $\mathfrak{S}_\Omega$, обладающих всеми тремя свойствами, является подполугруппой, которую будем обозначать через $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$.

3.15. Выведем ряд свойств определенной таким образом полугруппы $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$.

(α). $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ не имеет идемпотентов.

Действительно, предположим, что для некоторого $X \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ имеет место $X^2 = X$. Согласно 3.14, (γ), найдется такой $\mathfrak{n}$-класс Ω', что Ω' не имеет общих элементов с $X\Omega$. Пусть $\alpha \in \Omega'$. Так как

$$X(X\alpha) = X^2\alpha = X\alpha = X(\alpha),$$

то благодаря 3.14, (β) $X\alpha \sim \alpha\,(\mathfrak{n})$ и потому $X\alpha \in \Omega'$, что противоречит тому, что $X\Omega \cap \Omega' = \varnothing$.

(β). Каждый элемент $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ является правым увеличительным элементом этой полугруппы.

Пусть $X,\ Y \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$. Обозначим $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})} \setminus X = \mathfrak{P}$. Множество всех $\mathfrak{n}$-классов Ω', удовлетворяющих условию $X\Omega \cap \Omega' \neq \varnothing$, обозначим через Γ_1, а удовлетворяющих условию $Y\Omega \cap \Omega' = \varnothing$ — через Γ_2. Разобьем Γ_2 на два непересекающихся подмножества $\Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, имеющих каждое мощность, равную мощности множества всех $\mathfrak{n}$-класов. В каждом $\mathfrak{n}$-классе $\Omega^{(\xi)} \in \Gamma_1$ фиксируем некоторый элемент $\lambda_\xi \in \Omega^{(\xi)}$. Выберем некоторое взаимно однозначное отбражение φ множества Γ_1 на Γ_3 и каждому $\lambda_\xi \in \Omega^{(\xi)}$ поставим в соответствие некоторый элемент $\lambda_\xi^\varphi \in \varphi\left(\Omega^{(\xi)}\right)$

так, что хотя бы для одного λ_ξ имело место $\lambda_\xi^\varphi \neq X\lambda_\xi$. Введем новое преобразование $S \in \mathfrak{S}_\Omega$, полагая:

1) $S\alpha = \beta$, если существует такой элемент $\gamma \in \Omega$, что $X\gamma \sim \alpha(\mathfrak{n})$ и $Y\gamma = \beta$;

2) $S\alpha = \lambda_\xi^\varphi$, если $\alpha \in \Omega^{(\xi)}$, где $\Omega^{(\xi)} \in \Gamma_1$.

Легко видеть, что оба условия определяют $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ единственным образом. Согласно определению φ, $S \in \mathfrak{P}$. Сразу видно, что S удовлетворяет условиям 3.14, (α), (β). Так как для всякого $\Omega^{(\tau)} \in \Gamma_4$ имеют место $S\Omega \cap \Omega^{(\tau)} = \emptyset$, то S обладает также и свойством 3.14, (γ).

Согласно определению S, мы для всякого $\nu \in \Omega$ имеем $SX\nu = Y\nu$. Таким образом, $SX = Y$, а так как Y — произвольный элемент из $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ и $S \in \mathfrak{P}$, то $\mathfrak{P}X = \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$.

(γ). $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ есть полугруппа с левой обратимостью. Это непосредственно вытекает из (β) и 2.1.

(δ). В $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ нет левых увеличительных элементов. Это непосредственно вытекает из (β) и III, 5.2.

(ε). Никакой элемент из $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ не имеет в $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ правых единиц.

Это непосредственно вытекает из (α), (γ) и 3.3.

(ζ). Если каждый $\mathfrak{n}$-класс состоит из одного элемента, то $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ является полугруппой с левым сокращением.

Действительно, пусть $X \neq Y$ $(X, Y \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})})$. При некотором $\alpha \in \Omega$ должно быть $X\alpha \neq Y\alpha$. Но это означает, что $X\alpha \not\sim Y\alpha(\mathfrak{n})$ и потому, согласно 3.14, (β), $SX\alpha \neq SY\alpha$ при любом $S \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$.

(η). Если хотя бы один $\mathfrak{n}$-класс содержит более одного элемента, то $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ не является полугруппой с левым сокращением.

Действительно, если $\alpha \sim \beta(\mathfrak{n})$ и $\alpha \neq \beta$, то возьмем какое-нибудь преобразование $X \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$, такое, чтобы $X\Omega \ni \alpha$. Построим преобразование $X' \in \mathfrak{S}_\Omega$, такое, что $X'\nu = X\nu$, если $X\nu \neq \alpha$ и $X'\nu = \beta$, если $X\nu = \alpha$. Легко видеть, что $X' \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$. Так как $S\alpha = S\beta$ при любом $S \in \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ (ибо $\alpha \sim \beta(\mathfrak{n})$), то $SX = SX'$, хотя $X \neq X'$.

(θ). $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ не является полугруппой с правым сокращением.

Действительно, возьмем в $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ два таких элемента $X \neq X'$, у которых $X\alpha = X'\alpha$ для всех $\alpha \in \Omega$, за исключением α,

принадлежащих одному фиксированному $\mathfrak{n}$-классу $\Omega^{(\xi)}$. Z из $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ возьмем таким, что $Z\Omega \cap \Omega^{(\xi)} = \varnothing$. Для таких элементов, очевидно, получаем $XZ = X'Z$.

3.16. Выведенные свойства $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ характеризуют ее как полугруппу, весьма интересную с разных точек зрения. В частности, мы впервые получили пример полугруппы, все элементы которой являются ее правыми увеличительными элементами. Вместе с тем, как показала Тесье [5], значение полугрупп $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$ далеко выходит за рамки интересного примера. Это следует из приведенного ниже рассуждения.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полугруппа с левой обратимостью, не имеющая идемпотентов. Обозначим через Ω множество, состоящее из всех элементов $\mathfrak{A}$ и еще одного „отделяющего" элемента I (I, 3.9). В множестве Ω определяем отношение эквивалентности $\mathfrak{n}$, полагая $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$, если $X = Y = I$ или если $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $AX = AY$ при всяком $A \in \mathfrak{A}$. Симметричность, рефлексивность и транзитивность $\mathfrak{n}$ очевидны. Отметим также, что если X и Y из $\mathfrak{A}$ таковы, что при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ имеет место $ZX = ZY$, то $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$. Действительно, пусть A произвольный элемент из $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левой обратимостью, то при некотором $S \in \mathfrak{A}$ $SZ = A$. Поэтому

$$AX = SZX = SZY = AY.$$

Для эквивалентности $\mathfrak{n}$ в Ω строим полугруппу $\mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$. Она является подполугруппой полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$. Рассмотрим изоморфизм φ (I, 3.9) полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{S}_\Omega$, являющейся ее представлением левыми сдвигами (I, 3.10), и докажем, что $\varphi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{T}_\Omega^{(\mathfrak{n})}$.

Для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ рассматриваем преобразование $\bar{A} = \varphi(A) \in \mathfrak{S}_\Omega$.

Пусть X и Y есть два различных элемента из Ω, принадлежащих одному и тому же $\mathfrak{n}$-классу.

Так как $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$, то

$$\bar{A}(X) = AX = AY = \bar{A}(Y).$$

Таким образом, $\bar{A}$ обладает свойством 3.14, (α).

Если X и Y принадлежат разным $\mathfrak{n}$-классам, причем оба являются элементами из $\mathfrak{A}$, то, благодаря отмеченному выше, элемент $\bar{A}(X)=AX$ и элемент $\bar{A}(Y)=AY$ не могут находиться в отношении $\mathfrak{n}$.

Если $X\in\mathfrak{A}$ и $Y=I$, то

$$\bar{A}(X)=AX,\quad \bar{A}(I)=A$$

и $AX\sim A(\mathfrak{n})$ невозможно, так как иначе, по определению $\mathfrak{n}$, мы получили бы $AAX=AA$, что противоречит отсутствию правых единиц у A^2 (3.3).

Таким образом, $\bar{A}$ обладает свойством 3.14, (β).

Для всякого $S\in\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись такой элемент $R^{(S)}$, что $A=R^{(S)}S$. Обозначим через $\Omega^{(S)}$ совокупность всех элементов из $\mathfrak{A}$, эквивалентных относительно $\mathfrak{n}$ элементу $R^{(S)}$.

Множества $\bar{A}\Omega$ и $\Omega^{(S)}$ не имеют общих элементов. Действительно, в противном случае для некоторого $X\in\Omega$ мы имели бы $AX\sim R^{(S)}(\mathfrak{n})$. Откуда вытекало бы $\left(SR^{(S)}\right)SX=SR^{(S)}$, что противоречило бы отсутствию правых единиц у элемента $SR^{(S)}$ (3.3). Мы сопоставили каждому $S\in\mathfrak{A}$ $\mathfrak{n}$-класс $\Omega^{(S)}$, удовлетворяющий условию $\bar{A}\Omega^{(S)}\cap\Omega^{(S)}=\varnothing$. Сейчас мы покажем, что если $S_1\not\sim S_2(\mathfrak{n})$, т. е. S_1 и S_2 взяты из разных $\mathfrak{n}$-классов, то $\Omega^{(S_1)}\neq\Omega^{(S_2)}$. Отсюда непосредственно будет вытекать выполнение свойства 3.14, (γ) для преобразования $\bar{A}$.

Так как

$$A=R^{(S_1)}S_1,\quad A=R^{(S_2)}S_2,$$

то для всякого $B\in\mathfrak{A}$ мы имеем

$$BR^{(S_1)}S_1=BR^{(S_2)}S_2.$$

Но $S_1\not\sim S_2(\mathfrak{n})$, поэтому $BR^{(S_1)}\neq BR^{(S_2)}$. Это означает, что $R^{(S_1)}\not\sim R^{(S_2)}(\mathfrak{n})$ и потому $\mathfrak{n}$-классы $\Omega^{(S_1)}$ и $\Omega^{(S_2)}$ различны.

3.17. Проведенные рассуждения показывают, что *полугруппы вида* $\mathfrak{T}_\Omega^{\mathfrak{n}}$ *образуют универсальный класс (III, 1.9) для класса всех полугрупп с левой обратимостью, не имеющих идемпотентов.* При этом они сами принадлежат этому классу (3.15, (α), (γ)). Если ограничиться полугруппами,

мощность множества элементов которых не превосходит некоторой мощности $\mathfrak{m}$, то нетрудно построить такую полугруппу $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$, которая одна будет универсальной полугруппой для всего этого класса (правда, она сама этому классу принадлежать не будет, обладая большей мощностью).

Получение указанного универсального класса для класса полугрупп с левой обратимостью без идемпотентов в известном смысле выясняет характер полугрупп этого класса. При изучении какой-либо из полугрупп этого класса ее можно, не выходя за пределы класса, погрузить в соответствующую полугруппу $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$ и продолжать изучение уже для последней. Конечно, такой результат далеко уступает полному описанию строения полугрупп с левой обратимостью обладающих идемпотентами, но дело заключается в принципиально большей сложности устройства наших полугрупп в случае отсутствия идемпотентов.

3.18. В заключение остановимся на полугруппах $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$ у которых эквивалентность $\mathfrak{n}$ является тождественной, т. е каждый $\mathfrak{n}$-класс состоит лишь из одного элемента. Мы получаем в этом случае конструкцию Бэра и Леви [1], послужившую исходной точкой проведенных выше рассуждений В этом случае полугруппа $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$ будет полугруппой с левой обратимостью и с левым сокращением, не обладающая идемпотентами (3.15, (ζ)). Как непосредственно видно из рассуждений 3.16, произвольная полугруппа, обладающей указанными тремя свойствами, отображается изоморфно в некоторую такую полугруппу $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$. Таким образом, полугруппы $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$ с тождественной эквивалентностью $\mathfrak{n}$ не только принадлежат классу полугрупп с указанными тремя свойствами, но образуют универсальный класс для этого класса.

3.19. В общем случае свойства сокращения и обратимости независимы. Бесконечная моногенная полугруппа обладает свойством двустороннего сокращения. Однако она, очевидно не является ни полугруппой с левой обратимостью, ни полугруппой с правой обратимостью. С другой стороны, полугруппа $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}}^{(n)}$ является полугруппой с левой обратимостью (3.15), (γ)), но никогда не является полугруппой с правым сокращением (3.15, (θ)) и, за исключением случая, отмеченного в 3.15, (η), не является полугруппой с левым сокращ

нием. Полугруппа, антиизоморфная полугруппе $\mathfrak{T}_2^{(n)}$, является полугруппой с правой обратимостью, но не является ни полугруппой с левым сокращением, ни полугруппой с правым сокращением (за исключением случая, соответствующего 3.15, (η)).

В связи с этим представляет интерес отмеченная в работе Хьюета и Цукермана [1] связь между этими важными свойствами в классе периодических полугрупп (III, 4.1).

Теорема. *Периодическая полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством правого сокращения тогда и только тогда, когда она является полугруппой с левой обратимостью.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с правым сокращением. Для произвольных идемпотентов U и V полугруппы $\mathfrak{A}$ имеем

$$(UV)V = UV^2 = UV,$$

откуда следует $UV = U$.

Произвольный элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ порождает конечную моногенную полугруппу $[A]$, тип которой (III, 3.7) обозначим через (h, d). Если бы $h > 1$, то мы получили бы

$$A^{h+d} = A^h,\ A^{h+d-1} \cdot A = A^{h-1} \cdot A,\ A^{h+d-1} \neq A^{h-1},$$

что противоречило бы условию сокращения справа. Значит на самом деле обязательно $h = 1$, что означает, что $[A]$ есть группа (III, 3.11).

Из доказанного следует, что для двух произвольных элементов A и B полугруппы $\mathfrak{A}$ должны найтись такие A', B', U', $V' \in \mathfrak{A}$, что

$$AU' = A,\ A'A = U',\ B'B = V',$$

где U' и V' идемпотенты. Благодаря этому получаем

$$A = AU' = AU'V' = AU'B'B = (AU'B') \cdot B.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левой обратимостью.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левой обратимостью. Так как $\mathfrak{A}$ есть периодическая полугруппа, то она обладает идемпотентами. Отсюда благодаря 3.7 и 3.9 следует, что $\mathfrak{A}$ изоморфна полугруппе, описанной в 3.5. Но полугруппа $\mathfrak{T}$

является полугруппой с правым сокращением, ибо для любых $T_i = (U_i, G_i) \in \mathfrak{T}$ $(i = 1, 2, 3)$ из

$$T_1 T_3 = T_2 T_3$$

следует $T_1 = T_2$. Действительно,

$$T_1 T_3 = (U_1, G_1) \cdot (U_3, G_3) = (U_1, G_1 G_3),$$
$$T_2 T_3 = (U_2, G_2) \cdot (U_3, G_3) = (U_2, G_2 G_3)$$

и $T_1 T_3 = T_2 T_3$ влечет за собой $U_1 = U_2$ и $G_1 G_3 = G_2 G_3$, т. е. $G_1 = G_3$ (поскольку G_1, G_2, G_3 являются элементами группы).

§ 4. Подполугруппы, правильные относительно обратимости

4.1. Пусть $\mathfrak{B}$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$ и B — некоторый элемент $\mathfrak{B}$. Обратимость B в $\mathfrak{B}$ может отличаться от обратимости B в $\mathfrak{A}$. Возможен случай, когда B является обратимым справа элементом $\mathfrak{B}$, но не обратимым справа в $\mathfrak{A}$. С другой стороны, возможен случай, когда B не является обратимым справа элементом $\mathfrak{B}$, но обратим справа в $\mathfrak{A}$. Аналогичные случаи могут встретиться в отношении левой и двусторонней обратимости.

4.2. Приведем пример указанных в 4.1 возможностей. Возьмем коммутативную полугруппу

$$\mathfrak{A} = \{\ldots, A^{-1}, A^0, A, A^2, \ldots, I\},$$

в которой A^n и A^m умножаются по правилу сложения показателей степеней, $IA^n = A^n I = A^n$ $(n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ и $I^2 = I$. Можно сказать, что $\mathfrak{A}$ получается из бесконечной циклической группы путем внешнего присоединения единицы I (II, 2.12).

Рассмотрим полугруппы

$$\mathfrak{A}_1 = \{A, A^2, A^3, \ldots\}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\ldots, A^{-1}, A^0, A, A^2, \ldots\}.$$

Так как $A\mathfrak{A}_1 \overline{\ni} A$, то A не является обратимым элементом $\mathfrak{A}_1$. В то же самое время A, очевидно, является обратимым элементом для $\mathfrak{A}_2$, являющейся надполугруппой полугруппы $\mathfrak{A}_1$.

Одновременно с этим мы замечаем, что A не является обратимым элементом $\mathfrak{A}$, так как, очевидно,

$$A\mathfrak{A} \overline{\ni} I.$$

Таким образом, $\mathfrak{A}$ является такой надполугруппой полугруппы $\mathfrak{A}_2$, в которой A необратим, хотя он является обратимым элементом полугруппы $\mathfrak{A}_2$.

4.3. В связи с отмеченным выше явлением естественно возникает нижеследующее понятие, введенное и рассмотренное Е. С. Ляпиным [14].

Определение. *Подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется правильной относительно обратимости справа подполугруппой, если всякий элемент B из $\mathfrak{B}$ будет в $\mathfrak{A}$ обратимым справа тогда и только тогда, когда он обратим справа в $\mathfrak{B}$.*

Аналогично определяются подполугруппы правильные относительно обратимости слева и правильные относительно двусторонней обратимости.

4.4. Из определения следует, что полугруппа $\mathfrak{B}$ будет правильной относительно обратимости справа, если для всякого $B \in \mathfrak{B}$ из выполнения равенства $B\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ следует $B\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и, наоборот, из выполнения $B\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ следует $B\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Аналогично для обратимости слева одно из равенств

$$\mathfrak{B}B = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}B = \mathfrak{A}$$

должно следовать из другого.

4.5. Отметим несколько простейших свойств правильных относительно обратимости справа подполугрупп (очевидным образом соответствующие свойства имеют место для полугрупп, правильных относительно обратимости слева и правильных относительно двусторонней обратимости).

(α). Сама полугруппа является правильной относительно обратимости справа своей подполугруппой.

(β). Если $\mathfrak{A}_1$ есть правильная относительно обратимости справа подполугруппа $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_2$ является правильной относительно обратимости справа подполугруппой $\mathfrak{A}_3$, то $\mathfrak{A}_1$ есть правильная относительно обратимости справа подполугруппа $\mathfrak{A}_3$.

(γ). Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей E и подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержит E.

Для того чтобы $\mathfrak{B}$ была правильной относительно обратимости справа подполугруппой $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $B \in \mathfrak{B}$, для которого уравнение $BY = E$ разрешимо в $\mathfrak{A}$, это уравнение было разрешимо в $\mathfrak{B}$.

Для того чтобы $\mathfrak{B}$ была правильной относительно обратимости слева подполугруппой $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $B \in \mathfrak{B}$, для которого уравнение $XB = E$ разрешимо в $\mathfrak{A}$, это уравнение было разрешимо в $\mathfrak{B}$.

(δ). Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей E. $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ есть ее подполугруппы, причем

$$E \in \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{A}.$$

Если $\mathfrak{B}_1$ есть правильная относительно обратимости справа подполугруппа $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}_1$ будет правильной относительно обратимости справа подполугруппой $\mathfrak{B}_2$.

(ε). Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей E и подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержит E. Для того чтобы $\mathfrak{B}$ была правильной относительно обратимости справа подполугруппой $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы всякий элемент $B \in \mathfrak{B}$, обратимый справа в $\mathfrak{A}$, был обратим справа и в $\mathfrak{B}$.

4.6. Если интересующая нас подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ не является правильной относительно обратимости справа, а нам существенно наличие этого свойства у рассматриваемой полугруппы (вскоре мы встретимся с вопросом, когда это может быть существенным), то можно погрузить $\mathfrak{B}$ в надполугруппу $\mathfrak{B}'$, являющуюся правильной относительно обратимости справа подполугруппой полугруппы $\mathfrak{A}$. Что это всегда возможно, следует хотя бы из того, что в качестве $\mathfrak{B}'$ можно взять саму $\mathfrak{A}$. Однако обычно бывает выгодно, чтобы для перехода от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}'$ добавлялось по возможности меньше новых элементов, не входящих в $\mathfrak{B}$.

В некоторых случаях удается построить минимальную надполугруппу $\mathfrak{B}$, являющуюся правильной относительно обратимости справа подполугруппой $\mathfrak{A}$. Однако это возможно не всегда.

4.7. Приведем пример для указанного выше случая.

Рассмотрим коммутативную полугруппу $\mathfrak{A}$, состоящую из элементов $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, действие между которыми определяется правилом

$$I_i I_k = I_k I_i = I_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots;\ i \leqslant k).$$

Выясним, какие из подполугрупп $\mathfrak{A}$ являются правильными относительно обратимости. Если подполугруппа

$\mathfrak{B} = \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_m}\}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m)$ конечна, то, согласно 4.4, она не является правильной, так как

$$\mathfrak{B} I_{\alpha_m} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} I_{\alpha_m} \neq \mathfrak{A}.$$

Последнее неравенство следует из того, что ни при каком I_β произведение $I_\beta I_{\alpha_m}$ не может равняться I_{α_m+1}.

Если $\mathfrak{B} = \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots\}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots)$ бесконечная, то она правильна относительно обратимости. Это следует из того, что ни при каком I_{α_k} не имеет места ни $\mathfrak{B} I_{\alpha_k} = \mathfrak{B}$, ни $\mathfrak{A} I_{\alpha_k} = \mathfrak{A}$. Для произвольной конечной подполугруппы $\mathfrak{B} = \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_m}\}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m)$ нашей полугруппы $\mathfrak{A}$, правильной относительно обратимости, ее надполугруппой будет любая содержащая ее бесконечная подполугруппа $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{B}, I_{\beta_1}, I_{\beta_2}, \ldots, I_{\beta_j}, \ldots\}$$
$$(\beta_j \neq \alpha_i;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots).$$

Среди таких подполугрупп $\mathfrak{B}'$ не имеется минимальной. Действительно, для данной $\mathfrak{B}'$ можно всегда взять подполугруппу $\mathfrak{B}'' = \{\mathfrak{B}, I_{\beta_2}, I_{\beta_3}, \ldots\}$, которая правильна относительно обратимости, содержит $\mathfrak{B}$ и вместе с тем является подполугруппой $\mathfrak{B}'$, отличной от $\mathfrak{B}'$.

§ 5. Полугруппы преобразований, правильные относительно обратимости

5.1. Как мы уже упоминали, необходимость рассмотрения различных свойств тех или иных преобразований возникает в самых разнообразных отраслях математики. В зависимости от объекта и от цели исследования интерес могут представлять различные свойства преобразований. Особенно часто встречается необходимость исследования вопросов о разрешимости и единственности следующего уравнения.

Пусть S есть некоторое преобразование множества Ω, α — некоторый заданный элемент Ω и ξ — неизвестный искомый элемент Ω. Упомянутое уравнение имеет вид

$$S\xi = \alpha.$$

Ввиду произвольности множества Ω и того, что S является произвольным его преобразованием (оператором), многочисленные виды конкретных уравнений являются частными случаями этого столь общо заданного уравнения. Поэтому Е. С. Ляпин [14], изучавший некоторые свойства этого уравнения, рассмотренные ниже, называл его уравнением общего вида. При рассмотрении этого уравнения обычно в первую очередь возникает необходимость рассмотрения следующих двух главных вопросов. Во-первых, разрешимо ли это уравнение относительно неизвестного ξ (проблема существования). И, во-вторых, если оно разрешимо, то единственно ли или нет решение (проблема единственности). Е. С. Ляпиным [14] был рассмотрен ряд свойств полугрупп, которые оказываются связанными со свойствами указанного уравнения. Последующая часть настоящей главы и будет посвящена изложению соответствующих результатов.

5.2. Фактически чаще всего приходится рассматривать не одно какое-либо отдельное уравнение указанного в 5.1 типа, но совокупность уравнений с одним и тем же преобразованием — оператором S, но с различными правыми частями α.

В связи с этим задача получает следующую постановку. Для данного преобразования — оператора S нужно выяснить, с одной стороны, при всех ли α из Ω уравнение $S\xi = \alpha$ разрешимо в Ω, с другой, — при всех ли тех α, при которых это уравнение разрешимо, оно имеет единственное решение.

Поставленные вопросы можно формулировать также и по-другому. Нужно выяснить, имеет ли место равенство $S\Omega = \Omega$ (что равносильно тому, что $S\xi = \alpha$ разрешимо при всех $\alpha \in \Omega$) и всегда ли различны между собой $S\lambda$ и $S\mu$ при любых неравных между собой λ и μ (что равносильно единственности решения $S\xi = \alpha$ при всех тех α, при которых это уравнение разрешимо).

5.3. Положительное или отрицательное решение поставленных в 5.2 вопросов является важнейшим свойством оператора — преобразования S. Если рассматривать S как элемент полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований множества Ω, то ответы на указанные вопросы получаются сразу.

Из II, 3.2 следует, что для того чтобы имело место $S\Omega = \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы S был левым де-

лителем всех элементов из $\mathfrak{S}_\Omega$, т. е., согласно 1.1, был обратимым в $\mathfrak{S}_\Omega$ справа. Поскольку $\mathfrak{S}_\Omega$ обладает единицей E, из 1.3 следует, что для этого достаточно, чтобы S обладал в $\mathfrak{S}_\Omega$ правым обратным относительно E.

Из II, 3.1 следует, что для того чтобы имело место $S\lambda \neq S\mu$ при любых $\lambda \neq \mu$, необходимо и достаточно, чтобы S был правым делителем всех элементов из $\mathfrak{S}_\Omega$, т. е., согласно 1.1, был обратимым в $\mathfrak{S}_\Omega$ слева. Из 1.3 следует, что для этого достаточно, чтобы S обладал в $\mathfrak{S}_\Omega$ левым обратным относительно E.

5.4. Указанный в 5.3 подход к решению основных двух вопросов для уравнений 5.1 является в своем первоначальном виде слишком поверхностным и потому недостаточно плодотворным. При исследовании тех или иных операторов — преобразований обычно является естественным и по существу важным рассматривать их как элементы полугруппы тех или иных преобразований, обладающих рядом свойств, которыми обладает и данный оператор — преобразование. Однако при переходе от полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ к какой-либо ее подполугруппе $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_\Omega$ эквивалентность интересующих нас свойств преобразования S со свойствами обратимости S может нарушиться. Это следует из того, что S может быть обратим справа в $\mathfrak{S}_\Omega$, но необратим справа в $\mathfrak{A}$, и наоборот. О возможности подобных явлений мы говорили в предыдущем параграфе. Рассуждения этого параграфа подсказывают выход из указанного затруднения.

5.5. ***Определение.*** *Полугруппа некоторых преобразований множества* Ω *называется правильной относительно обратимости справа, если она является правильной относительно обратимости справа подполугруппой полугруппы всех преобразований* $\mathfrak{S}_\Omega$ (4.3).

Аналогично определяется правильность относительно обратимости слева и относительно двусторонней обратимости.

5.6. Благодаря этому определению из сказанного в 5.3 вытекает следующий вывод.

Пусть $\mathfrak{A}$ *есть полугруппа преобразований множества* Ω, *правильная относительно обратимости справа; преобразование* S *принадлежит* $\mathfrak{A}$. ***Для того чтобы уравнение***

$$S\xi = a$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{Q}$ было разрешимо при любых значениях $\alpha \in \mathfrak{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы S был обратимым справа элементом полугруппы $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа преобразований множества $\mathfrak{Q}$, правильная относительно обратимости слева; преобразование S принадлежит $\mathfrak{A}$. Для того чтобы уравнение

$$S\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{Q}$ при всяком $\alpha \in \mathfrak{Q}$ имело не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы S был обратимым слева элементом полугруппы $\mathfrak{A}$.

5.7. Из 5.6 следует, что изучение указанных важнейших свойств операторов — преобразований, принадлежащих некоторой полугруппе преобразований $\mathfrak{A}$, сводится к изучению чисто алгебраического вопроса о делимости элементов в полугруппе $\mathfrak{A}$. Важно отметить, что такой подход сводит исследование вопроса, относящегося к конкретной полугруппе, к изучению некоторого абстрактного свойства (в смысле I, 1.8; I, 1.14). Действительно, свойства обратимости справа и слева, очевидно, сохраняются при изоморфизмах полугруппы.

Указанное сведéние может представить принципиальный интерес. Однако оно имеет место лишь в том случае, когда $\mathfrak{A}$ есть правильная относительно обратимости полугруппа преобразований. Вопрос о том, какие из полугрупп преобразований правильны в отношении свойств обратимости, может быть решен, конечно, только в результате рассмотрения конкретных свойств данного множества $\mathfrak{Q}$ и свойств тех преобразований, которые составляют данную полугруппу преобразований. Необходимые для этого исследования в основном относятся к областям соответствующих отраслей математики. Для иллюстрации мы проведем ниже такие исследования для нескольких важных случаев.

5.8. Пусть $\mathfrak{Q}$ есть некоторое линейное пространство над полем Γ [1]. В дальнейшем, чтобы не делать очевидных ого-

[1] Определения линейного пространства, линейной зависимости, базиса и их простейшие свойства употребляются в том смысле, как они даны в книге А. И. Мальцева. Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948 или 1956. (см. § 1 и § 2 главы II указанной книги).

ворок, будем считать, что Ω состоит не только из одного нулевого элемента θ.

Преобразование S множества Ω называется *линейным*, если при любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma$ имеет место

$$S(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n) = \\ = \lambda_1(S\alpha_1) + \lambda_2(S\alpha_2) + \ldots + \lambda_n(S\alpha_n).$$

Обозначим множество всех линейных преобразований через $\mathfrak{M}$. Нетрудно убедиться, что произведение двух линейных преобразований опять является линейным преобразованием и, следовательно, $\mathfrak{M}$ есть полугруппа.

5.9. ***Лемма.*** *Пусть Ω' есть некоторое линейное независимое подмножество линейного пространства Ω и φ произвольное отображение Ω' в Ω. Тогда найдется такое линейное преобразование S, что для всех ξ из Ω' имеет место*

$$S\xi = \varphi(\xi).$$

Доказательство. Обычное доказательство существования базиса в линейном пространстве [1] нетрудно уточнить в том смысле, что любое линейно независимое подмножество может быть включено в некоторый базис. Пусть Ω'' есть базис Ω, содержащий Ω'. Отображение φ Ω' в Ω продолжаем до отображения ψ базиса Ω'', полагая $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$ для $\xi \in \Omega'$ и $\psi(\xi) = \theta$ для $\xi \in \Omega'' \setminus \Omega'$.

Для всякого $\alpha \in \Omega$ существует единственное линейное выражение через элементы базиса

$$\alpha = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n \\ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Omega''; \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma).$$

Определим следующее преобразование S пространства Ω:

$$S\alpha = S(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n) = \\ = \lambda_1\psi(\xi_1) + \lambda_2\psi(\xi_2) + \ldots + \lambda_n\psi(\xi_n).$$

Легко убедиться, что $S \in \mathfrak{M}$. При этом для любого ξ из Ω'

$$S(\xi) = \psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

---

[1] См., например, А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры, гл. II, § 2, теорема 2, Гостехиздат, 1948 или 1956.

5.10. ***Теорема.*** *Полугруппа $\mathfrak{M}$ всех линейных преобразований линейного пространства Ω является правильной и относительно обратимости справа и относительно обратимости слева.*

Доказательство. Так как тождественное преобразование E, являющееся единицей полугруппы всех преобразований $\mathfrak{S}_\Omega$ линейно, то для доказательства нашей теоремы мы можем воспользоваться свойством 4.5, (γ).

Пусть $AY = E$, где $A \in \mathfrak{M}$ и $Y \in \mathfrak{S}_\Omega$. Выберем в Ω какой-нибудь базис Ω'. Пользуясь леммой 5.9, построим линейное преобразование $B \in \mathfrak{M}$ такое, что для всякого $\xi \in \Omega'$ имеет место

$$B\xi = Y\xi.$$

Для произвольного элемента $\alpha \in \Omega$ найдется его линейное выражение через элементы базиса Ω':

$$\alpha = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n$$
$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Omega';\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma).$$

Так как преобразования A и B линейные и $AY = E$, то

$$AB\alpha = A[\lambda_1(B\xi_1) + \lambda_2(B\xi_2) + \ldots + \lambda_n(B\xi_n)] = A[\lambda_1(Y\xi_1) + \lambda_2(Y\xi_2) + \ldots + \lambda_n(Y\xi_n)] = \lambda_1(AY\xi_1) + \lambda_2(AY\xi_2) + \ldots + \lambda_n(AY\xi_n) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n = \alpha,$$

т. е. $AB = E$. Таким образом, мы показали, что из разрешимости уравнения $AY = E$ в $\mathfrak{S}_\Omega$ следует его разрешимость в $\mathfrak{M}$. Согласно 4.5, (γ), отсюда вытекает, что $\mathfrak{M}$ есть правильная относительно обратимости справа подполугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$, т. е. правильная относительно обратимости справа полугруппа преобразований.

Пусть теперь $XA = E$, где $A \in \mathfrak{M}$ и $X \in \mathfrak{S}_\Omega$. Выберем некоторый базис Ω' линейного пространства Ω. Докажем линейную независимость множества $A\Omega'$. Пусть

$$\lambda_1(A\xi_1) + \lambda_2(A\xi_2) + \ldots + \lambda_n(A\xi_n) = \theta \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma)$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ различные между собой элементы из Ω'. Тогда имеем

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n = E(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n) = XA(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n) = X[\lambda_1(A\xi_1) + \lambda_2(A\xi_2) + \ldots + \lambda_n(A\xi_n)] = X\theta = \theta$$

Для элементов базиса $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ это возможно лишь при

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Для элементов μ из $A\mathfrak{Q}'$ определим отображение φ в $\mathfrak{Q}$:

$$\varphi(\mu) = X\mu \quad (\mu \in A\mathfrak{Q}').$$

Так как множество $A\mathfrak{Q}'$ линейно независимо, то, согласно лемме 5.9, найдется такое преобразование $C \in \mathfrak{M}$, что

$$C\mu = X\mu$$

для всех $\mu \in A\mathfrak{Q}'$.

Пусть α есть произвольный элемент $\mathfrak{Q}$. Он выражается линейно через элементы базиса $\mathfrak{Q}'$:

$$\alpha = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n$$
$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{Q}'; \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma).$$

Так как $CA \in \mathfrak{M}$ и $XA = E$, то

$$CA\alpha = CA[\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n] = \lambda_1 C(A\xi_1) +$$
$$+ \lambda_2 C(A\xi_2) + \ldots + \lambda_n C(A\xi_n) = \lambda_1 X(A\xi_1) + \lambda_2 X(A\xi_2) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n X(A\xi_n) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n = \alpha,$$

т. е. $CA = E$.

Согласно 4.5, (γ), из доказанного вытекает, что $\mathfrak{M}$ является правильной относительно обратимости слева полугруппой преобразований.

5.11. Благодаря 5.6 из теоремы 5.10 вытекает следующее следствие.

Пусть S есть линейное преобразование линейного пространства $\mathfrak{Q}$. Для того чтобы уравнение

$$S\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{Q}$ имело решение при всех $\alpha \in \mathfrak{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы S был обратимым справа элементом полугруппы $\mathfrak{M}$ всех линейных преобразований $\mathfrak{Q}$.

Для того чтобы уравнение

$$S\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{Q}$ при всяком $\alpha \in \mathfrak{Q}$ имело не более одного решения, необходимо и достаточно чтобы S был обратимым слева элементом полугруппы $\mathfrak{D}$ всех линейных преобразований $\mathfrak{Q}$.

5.12. Пусть теперь $\mathfrak{L}$ есть произвольное частично упорядоченное множество (I, 5.9). Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех таких преобразований $\mathfrak{L}$ этого множества, которые не нарушают частичной упорядоченности. Более точно: B принадлежит $\mathfrak{L}$ в том и только в том случае, если из $\alpha \leqslant \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{L}$) и $B\alpha \geqslant B\beta$ всегда следует $B\alpha = B\beta$. Таким образом, в $\mathfrak{B}$ не входят только такие преобразования S множества $\mathfrak{L}$, для которых в $\mathfrak{L}$ найдутся такие $\alpha < \beta$, что $S\alpha > S\beta$.

5.13. ***Теорема.*** *Полугруппа $\mathfrak{B}$ всех преобразований частично упорядоченного множества $\mathfrak{L}$, не нарушающих частичной упорядоченности* (5,12), *является правильной относительно обратимости справа.*

Доказательство. Так как тождественное преобразование E, являющееся единицей полугруппы $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ всех преобразований $\mathfrak{L}$, очевидно, содержится в $\mathfrak{B}$, то мы можем воспользоваться свойством 4.5, (γ).

Пусть $BY = E$, где $B \in \mathfrak{B}$, $Y \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$. Если бы $Y \notin \mathfrak{B}$, то при некоторых α, $\beta \in \mathfrak{L}$ мы имели бы

$$\alpha < \beta, \quad Y\alpha > Y\beta.$$

Однако соотношения

$$Y\alpha > Y\beta,$$

$$B(Y\alpha) = \alpha < \beta = B(Y\beta)$$

противоречат тому, что $B \in \mathfrak{B}$.

5.14. Что касается правильности относительно обратимости слева, то в общем случае полугруппа $\mathfrak{B}$ всех не нарушающих частичную упорядоченность преобразований этим свойством не обладает.

Приведем соответствующий пример. Пусть $\mathfrak{L}$ есть множество всех положительных рациональных чисел меньших единицы. Будем считать число α предшествующим β, если α не превосходит β по величине. Рассмотрим преобразование B такое, что $B\alpha = \frac{1}{2}\alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{L}$).

В $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ уравнение

$$XB = E$$

разрешимо (в качестве X можно взять любое преобразование $\mathfrak{L}$ такое, что $X\alpha = 2\alpha$ для всех α таких, что $0 < \alpha < \frac{1}{2}$).

Возьмем произвольное решение X этого уравнения. Обозначим $X\left(\frac{1}{2}\right)=\rho$. Выберем рациональное число ρ' такое, что $\rho<\rho'<1$.

Мы имеем

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\rho',\ X\left(\frac{1}{2}\right)=\rho<\rho'=E\rho'=XB\rho'=X\left(\frac{1}{2}\rho'\right),$$

откуда следует, что X не принадлежит $\mathfrak{B}$. Из этого, согласно 4.5, (γ), следует, что $\mathfrak{B}$ не является правильной относительно обратимости слева подполугруппой $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$.

5.15. Теперь покажем, что при некоторых весьма широких ограничениях все же можно утверждать правильность относительно обратимости слева полугруппы всех преобразований частично упорядоченного множества, не нарушающих частичной упорядоченности.

Будем говорить, что частично упорядоченное множество $\mathfrak{L}$ *обладает отделяющими элементами*, если $\mathfrak{L}$ обладает следующим свойством.

Пусть $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{N}''$ два произвольных (в частности, может быть и пустых) подмножества $\mathfrak{L}$, таких, что отношение $\alpha'\geqslant\alpha''$, где $\alpha'\in\mathfrak{N}'$, $\alpha''\in\mathfrak{N}''$, возможно только при $\alpha'=\alpha''$. Тогда должен существовать такой отделяющий их элемент γ, что: 1) $\alpha'\geqslant\gamma$ для $\alpha'\in\mathfrak{N}'$ возможно только при $\alpha'=\gamma$ и 2) $\alpha''\leqslant\gamma$ для $\alpha''\in\mathfrak{N}''$ возможно только при $\alpha''=\gamma$.

5.16. ***Теорема.*** *Если частично упорядоченное множество $\mathfrak{L}$ обладает отделяющими элементами (5.15), то полугруппа $\mathfrak{B}$ всех его преобразований, не нарушающих частичной упорядоченности (5.12), является правильной относительно обратимости слева.*

Доказательство. 1) Предположим, что для некоторых $B\in\mathfrak{B}$ и $C\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ имеет место

$$CB=E.$$

Согласно 4.5, (γ), нам достаточно показать, что отсюда следует существование в $\mathfrak{B}$ такого элемента B', что $B'B=E$. 2) Будем рассматривать частичные преобразования множества $\mathfrak{L}$ (I, 4.1). В частности, обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех таких из этих частичных преобразований X, что одновременное выполнение $\alpha<\beta$ и $X\alpha>X\beta$ невозможно ни

для каких α, $\beta \in \Pi_1 X$. Сразу же отметим, что, очевидно, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{R}$.

3) В множестве всех частичных преобразований множества $\mathfrak{L}$ определим отношение частичной упорядоченности, полагая $X \leqslant Y$, если $\Pi_1 X \subset \Pi_1 Y$ и $X\xi = Y\xi$ для всякого $\xi \in \Pi_1 X$.

4) Обозначим через P_0 такое частичное преобразование $\mathfrak{L}$, у которого $\Pi_1 P_0 = B\mathfrak{L}$ и $P_0\xi = C\xi$ для всякого $\xi \in B\mathfrak{L}$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех частичных преобразований из $\mathfrak{R}$, которые следуют за P_0.

Докажем, что $P_0 \in \mathfrak{M}$, для чего достаточно показать, что $P_0 \in \mathfrak{R}$. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $P_0\alpha > P_0\beta$ для некоторых α, $\beta \in \Pi_1 P_0 = B\mathfrak{L}$. Тогда $\alpha = B\alpha'$, $\beta = B\beta'$. Мы имеем

$$\alpha' = E\alpha' = CB\alpha' = P_0 B\alpha' = P_0\alpha > P_0\beta =$$
$$= P_0 B\beta' = CB\beta' = E\beta' = \beta',$$
$$B\alpha' = \alpha < \beta = B\beta'.$$

Но это противоречит тому, что $B \in \mathfrak{B}$.

5) Пусть $\mathfrak{N}$ есть такое подмножество $\mathfrak{M}$, что для любых X и Y из $\mathfrak{N}$ один всегда предшествует другому. Обозначим через N_0 такое частичное преобразование, для которого $\Pi_1 N_0$ есть объединение всех $\Pi_1 X$, где $X \in \mathfrak{N}$, и $N_0\alpha = \beta$, если для некоторого $X \in \mathfrak{N}$ имеет место $X\alpha = \beta$. Очевидно, β не зависит от выбора X из $\mathfrak{N}$, поскольку выполнено указанное предположение относительно $\mathfrak{N}$. Сразу видно, что N_0 является верхней границей для $\mathfrak{N}$. Конечно, $N_0 \geqslant P_0$. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $N_0\alpha > N_0\beta$ для некоторых, $\alpha\beta \in \mathfrak{L}$. Тогда для некоторых X, $Y \in \mathfrak{N}$ имеем $X\alpha = N_0\alpha$ и $Y\beta = N_0\beta$. Пусть Z есть тот из X и Y, который следует и за X, и за Y. Тогда α, $\beta \in \Pi_1 Z$ и $Z\alpha = N_0\alpha$, $Z\beta = N_0\beta$. Так как соотношения $\alpha < \beta$ и $Z\alpha > Z\beta$ противоречат тому, что $Z \in \mathfrak{R}$, то сделанное предположение несправедливо. Следовательно, $N_0 \in \mathfrak{R}$, а потому $N_0 \in \mathfrak{M}$.

6) Из выполнения выведенного свойства $\mathfrak{M}$ следует, что к $\mathfrak{M}$ можно применить теорему II, 4.17. Согласно этой теореме, в $\mathfrak{M}$ найдется элемент P_1, за которым в $\mathfrak{M}$ не следует никакой отличный от P_1 элемент.

Предположим, что в $\mathfrak{L}$ найдется элемент λ, не содержащийся в $\Pi_1 P_1$. Обозначим через $\mathfrak{L}'$ множество всех элементов из $\mathfrak{L}$, предшествующих λ, через $\mathfrak{L}''$ — множество всех

элементов, следующих за λ. Тем самым $\lambda' \leqslant \lambda''$ для всяких $\lambda' \in \mathfrak{L}'$ и $\lambda'' \in \mathfrak{L}''$. Поскольку $P_1 \in \mathfrak{R}$, ни для каких $\mu' \in P_1\mathfrak{L}'$ и $\mu'' \in P_1\mathfrak{L}''$ мы не можем иметь $\mu' > \mu''$. Согласно условию существования отделяющих элементов (5.15), для $P_1\mathfrak{L}'$ и $P_1\mathfrak{L}''$ найдется отделяющий элемент γ. Построим новое частичное преобразование P_2, такое, что $P_2 \geqslant P_1$ и $\Pi_1 P_2 = \Pi_1 P_1 \cup \lambda$, причем $P_2\lambda = \gamma$.

Покажем, что $P_2 \in \mathfrak{M}$, для чего достаточно показать, что $P_2 \in \mathfrak{R}$. Предположим, что $\alpha < \beta$ и $P_2\alpha > P_2\beta$ для некоторых α, $\beta \in \Pi_1 P_2$. Если бы α, $\beta \in \Pi_1 P_1$, то мы получили бы противоречие с тем, что $P_2 \geqslant P_1$ и $P_1 \in \mathfrak{R}$. Если бы $\alpha = \lambda$, то мы имели бы $\gamma > P_2\beta$, где $\beta \in \mathfrak{L}''$ (поскольку $\beta > \alpha = \lambda$), что для γ невозможно. Если бы $\beta = \lambda$, то мы имели бы $P_2\alpha > \gamma$, где $\alpha \in \mathfrak{L}'$ ($\alpha < \beta = \lambda$), что для γ невозможно. Следовательно, $P_2 \in \mathfrak{R}$.

Таким образом, предположение $\lambda \bar{\in} \Pi_1 P_1$ привело нас к существованию в $\mathfrak{M}$ элемента P_2, отличного от P_1 и следующего за ним. Невозможность этого означает, что на самом деле $\Pi_1 P_1 = \mathfrak{L}$, т. е. $P_1 \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$. Так как при этом $P_1 \in \mathfrak{R}$, то $P_1 \in \mathfrak{B}$.

7) Для произвольного $\xi \in \mathfrak{L}$ мы имеем $B\xi \in \Pi_1 P_0$.

Так как при этом $P_1 \geqslant P_0$, то

$$P_1 B\xi = P_0 B\xi = CB\xi = E\xi.$$

Отсюда следует $P_1 B = E$, причем $P_1 \in \mathfrak{B}$.

5.17. Из теорем 5.13 и 5.16 вытекает следующее следствие.

Пусть $\mathfrak{L}$ есть частично упорядоченное множество, обладающее отделяющими элементами (5.15); $\mathfrak{B}$ полугруппа всех его преобразований, не нарушающих частичной упорядоченности (5.12) и $B \in \mathfrak{B}$.

Для того чтобы уравнение

$$B\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{L}$ имело решение при всех $\alpha \in \mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы B был обратимым справа элементом полугруппы $\mathfrak{B}$.

Для того чтобы уравнение

$$B\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \mathfrak{L}$ при всяком $a \in \mathfrak{L}$ имело не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы B был обратимым слева элементом полугруппы $\mathfrak{B}$.

§ 6. Полугруппы с отделяющейся групповой частью

6.1. Мы уже обращали внимание на важную роль двусторонне обратимых элементов полугруппы, т. е. таких элементов, которые являются и правыми и левыми делителями всех элементов полугруппы. В продолжение настоящего параграфа совокупность двусторонне обратимых элементов полугруппы $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. В 1.4 мы показали, и теперь все время должны иметь это в виду, что $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$, если она непуста, является группой, причем единица $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ является единицей для всей полугруппы $\mathfrak{A}$.

Введем также обозначение для совокупности всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$, не входящих в $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{G}(\mathfrak{A}).$$

Таким образом, с точки зрения обозначений, которые мы употребляли в § 1, мы имеем

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{H}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}.$$

6.2. Тогда как множество $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ всегда замкнуто относительно умножения, множество $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ не для всякой полугруппы обладает аналогичным свойством. Например, у полугруппы всех преобразований счетного множества, как мы убедились в 1.9, совокупность элементов, не являющихся двусторонне обратимыми, не является подполугруппой. В то же время у ряда других важных полугрупп $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является подполугруппой. Примером этого может служить полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований конечного множества Ω. Как непосредственно следует из II, 3.1 и II, 3.2, $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}_\Omega)$ состоит из всех преобразований, осуществляющих взаимно однозначное отображение Ω на себя (иногда их называют собственными подстановками). $\mathfrak{H}(\mathfrak{S}_\Omega)$, состоящая из всех остальных преобразований (несобственные подстановки), очевидно, образует подполугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$.

В полугруппе $\mathfrak{M}_n$ всех комплексных квадратных матриц порядка n, $\mathfrak{G}(\mathfrak{M}_n)$, как следует из II, 3.9, есть совокуп-

ность всех неособенных матриц. $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}_n)$ есть совокупность всех особенных матриц, которая также является подполугруппой.

Помимо того, что многие важные полугруппы обладают указанным свойством, класс полугрупп, у которых $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является подполугруппой, характеризуется рядом дополнительных важных свойств. Среди этих свойств есть относящиеся к области абстрактной теории и есть важные для теории преобразований.

6.3. То, что совокупность $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ замкнута относительно умножения, означает, другими словами, что никакой двусторонне обратимый элемент не может быть представлен в виде произведения элементов из $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$. Более того, как мы вскоре покажем, в этом случае произведение элементов из $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ только тогда, когда все множители принадлежат $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. Таким образом, рассматриваемый случай характеризуется обособлением, выделением группы двусторонне обратимых элементов $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$.

Определение. *Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется полугруппой с отделяющейся групповой частью, если она обладает единицей (т. е., согласно* 1.5, *если $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ непусто) и если произведение ее любых не являющихся двусторонне обратимыми элементов само не является двусторонне обратимым элементом (т. е. если $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$ или пустым множеством).*

Отметим, что понятие полугруппы с отделяющейся групповой частью весьма родственно с понятием сверхгруппы, введенным Раутером [1] (см. также § 51 книги А. К. Сушкевича [12]).

6.4. ***Теорема.*** *Не являющаяся группой полугруппа с единицей $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда есть полугруппа с отделяющейся групповой частью, когда она представима в виде объединения двух непересекающихся подполугрупп*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = \varnothing,$$

таких, что $\mathfrak{A}_1$ является подгруппой, а $\mathfrak{A}_2$ — идеалом. В этом случае

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{H}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_2,$$

причем идеал $\mathfrak{A}_2$ является двусторонним.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью. $\mathfrak{A}$ является объединением $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$, причем $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$, согласно 1.4, является группой.

Пусть $H \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$, $A \in \mathfrak{A}$. Если $A \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$, то, согласно определению полугруппы с отделяющейся групповой частью, $HA \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ и $AH \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$. Если $A \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$, то ни AH, ни HA не могут принадлежать $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. Действительно, в случае $HA = G \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ мы получили бы $H = GA^{-1} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. Аналогично рассуждаем и для AH.

Таким образом, при любом $A \in \mathfrak{A}$ имеет место $HA \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ и $AH \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$, т. е. $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является двусторонним идеалом.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ распадается указанным в теореме образом:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = \varnothing.$$

Поскольку $\mathfrak{A}_2$ есть идеал $\mathfrak{A}$, единица E полугруппы $\mathfrak{A}$ должна содержаться в $\mathfrak{A}_1$. Так как $\mathfrak{A}_1$ является группой, то для любого $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ найдутся такие X, $Y \in \mathfrak{A}_1$, что

$$XA_1 = E, \quad A_1 Y = E.$$

Отсюда, согласно 1.3, следует, что A_1 есть двусторонне обратимый элемент полугруппы $\mathfrak{A}$. Но, с другой стороны, элементы из $\mathfrak{A}_2$ не могут быть двусторонне обратимыми элементами $\mathfrak{A}$, поскольку $\mathfrak{A}_2$ является идеалом.

Поэтому $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1$, откуда следует $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_2$, т. е. $\mathfrak{A}$ оказывается полугруппой с отделяющейся групповой частью. Согласно доказанному в первой части, идеал $\mathfrak{A}_2$ оказывается двусторонним.

6.5. *Следствие.* *В полугруппе $\mathfrak{A}$ с отделяющейся групповой частью $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$ или пустым множеством.*

6.6. *Следствие.* *В полугруппе $\mathfrak{A}$ с отделяющейся групповой частью подполугруппы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ (если последняя непуста) являются вполне изолированными* (IV, 6.1).

6.7. В классе полугрупп с единицей полугруппы с отделяющейся групповой частью могут быть выделены при помощи требования пустоты подмножеств $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}$, рассмотренных нами в § 1.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей.*

Если $\mathfrak{A}$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то в $\mathfrak{A}$ каждый обратимый справа элемент обратим слева, и наоборот.

Если $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то в $\mathfrak{A}$ имеются и элементы, обратимые справа, которые не являются обратимыми слева, и элементы, обратимые слева, которые не являются обратимыми справа.

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью, то никакой элемент H из $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ не может быть обратим ни справа, ни слева. Это следует из того, что $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$ (6.5). Поэтому при любом $A \in \mathfrak{A}$ элементы AH и HA принадлежат $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ и тем самым обязательно отличны от $E_{\mathfrak{A}}$.

2) Если $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы X, $Y \in \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$, что $XY = G \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. Благодаря 1.2

$$X\mathfrak{A} \supset XY\mathfrak{A} = G\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

т. е. X обратим справа. В то же время слева X необратим, так как иначе X принадлежал бы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$. Аналогично доказывается, что Y обратим слева, но необратим справа.

6.8. Теорема 6.7 объясняет роль полугрупп преобразований, являющихся полугруппами с отделяющейся групповой частью.

Для преобразований из такой полугруппы, если она является правильной относительно обратимости, условие разрешимости уравнения $S\xi = \alpha$, о котором мы говорили в § 5, оказывается эквивалентным условию единственности решения.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая правильная и относительно обратимости справа и относительно обратимости слева полугруппа преобразований множества Ω* (5.5), *содержащая тождественное преобразование E.*

Если $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью, то для всякого $S \in \mathfrak{A}$ из разрешимости при любом $\alpha \in \Omega$ уравнения

$$S\xi = \alpha$$

относительно неизвестного $\xi \in \Omega$ следует, что решение всегда единственно. В свою очередь, из того, что указанное уравнение при некоторых $\alpha \in \Omega$ неразрешимо, следует, что при некоторых $\alpha \in \Omega$ оно имеет более одного решения.

Если $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то в $\mathfrak{A}$ найдутся такие S_1, S_2, что уравнение

$$S_1\xi = \alpha$$

разрешимо при всех $\alpha \in \Omega$, но при некоторых из них имеет более одного решения. Уравнение

$$S_2\xi = \alpha$$

при некоторых $\alpha \in \Omega$ неразрешимо, но при всяком $\alpha \in \Omega$ имеет не более одного решения.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью. Согласно 5.6, из разрешимости нашего уравнения следует, что S обратим в $\mathfrak{A}$ справа. Отсюда по 6.6 следует, что S обратим в $\mathfrak{A}$ и слева. Поэтому, согласно 5.6, уравнение при всяком $\alpha \in \Omega$ имеет не более одного решения.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью. Согласно 6.7, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент S_1, обратимый справа, но необратимый слева, и элемент S_2, обратимый слева, но необратимый справа. Согласно 5.6, уравнение

$$S_1\xi = \alpha$$

разрешимо при всех $\alpha \in \Omega$, но при некоторых из них имеет более одного решения. Уравнение

$$S_2\xi = \alpha$$

ни при каком $\alpha \in \Omega$ не имеет более одного решения. При некоторых α оно неразрешимо.

6.9. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью, причем $\mathfrak{A}$ не является группой. Так как двусторонне обратимые элементы не могут содержаться ни в каком собственном идеале полугруппы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ благодаря 6.5 является универсально максимальным собственным идеалом $\mathfrak{A}$.

6.10. Следует отметить, что наличие в полугруппе универсально максимального собственного идеала в общем случае недостаточно для того, чтобы она являлась полугруппой с отделяющейся групповой частью. Приведем соответствующий пример.

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа и G_0 — некоторый фиксированный ее элемент. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$, получаемое

от присоединения к $\mathfrak{G}$ нового элемента X. Элементы из $\mathfrak{G}$ перемножаются в $\mathfrak{A}$ по правилу умножения элементов группы $\mathfrak{G}$. Для X полагаем:

$$XG = G_0G,\ GX = GG_0,\ X^2 = G_0^2 \qquad (G \in \mathfrak{G}).$$

Ассоциативность действия очевидна. $\mathfrak{G}$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{T}$ есть некоторый левый идеал $\mathfrak{A}$, содержащий X, то для любого $G \in \mathfrak{G}$ имеем

$$\left(GG_0^{-1}\right) \cdot X = GG_0^{-1}G_0 = G.$$

Следовательно, $\mathfrak{T}$, содержащий X, содержит и любой элемент из $\mathfrak{G}$, а потому совпадает с $\mathfrak{A}$. Так же убеждаемся в отсутствии собственных правых идеалов, содержащих X.

Таким образом, $\mathfrak{G}$ оказывается единственным собственным идеалом $\mathfrak{A}$ и тем самым универсально максимальным собственным идеалом. Тем не менее $\mathfrak{A}$ не есть полугруппа с отделяющейся групповой частью, поскольку $\mathfrak{A}$ не имеет единицы.

6.11. Вопросы о существовании и свойствах максимальных собственных левых идеалов, аналогично правых и двусторонних, были рассмотрены Шварцем [6], [7]. Особое внимание им было уделено вопросу о строении множества элементов, не содержащихся в том или ином максимальном идеале. Из результатов Шварца, в частности, вытекают некоторые достаточные признаки того, чтобы полугруппа была полугруппой с отделяющейся групповой частью.

§ 7. Подполугруппы полугруппы с отделяющейся групповой частью

7.1. Теперь займемся подполугруппами полугрупп с отделяющейся групповой частью. Прежде всего отметим, что всякая полугруппа может быть включена в качестве подполугруппы в некоторую полугруппу с отделяющейся групповой частью. Более того, она может быть сделана даже ее подполугруппой всех элементов, не являющихся двусторонне обратимыми элементами. Действительно, пусть $\mathfrak{G}$ есть произвольная группа и $\mathfrak{A}$ — произвольная полугруппа, не имеющая общих элементов с $\mathfrak{G}$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}.$$

Определим в нем действие. Если оба элемента $\mathfrak{A}'$ содержатся одновременно в одной и той же полугруппе $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{A}$, то их произведение определим при помощи умножения соответственно в $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{A}$. Для $G \in \mathfrak{G}$ и $A \in \mathfrak{A}$ полагаем:

$$GA = AG = A.$$

Из 6.4 следует, что $\mathfrak{A}'$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью, причем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H}(\mathfrak{A}').$$

7.2. Подполугрупп правых и левых увеличительных элементов (III, 5.4) полугруппы с отделяющейся групповой частью не имеют.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с единицей.*

Если $\mathfrak{A}$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то $\mathfrak{A}$ не имеет ни правых, ни левых увеличительных элементов (III, 5.1).

Если $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то $\mathfrak{A}$ имеет правые и левые увеличительные элементы.

Доказательство. Согласно 2.1, каждый увеличительный элемент обратим с одной стороны, но необратим с другой. Согласно 6.7, таких элементов в полугруппе с отделяющейся групповой частью быть не может.

Если $\mathfrak{A}$ не является полугруппой с отделяющейся групповой частью, то, согласно 6.7, в $\mathfrak{A}$ должны существовать элементы, обратимые справа, которые не являются обратимыми слева, и элементы, обратимые слева, которые не являются обратимыми справа. Согласно 2.3, эти элементы являются левыми и правыми увеличительными элементами полугрупп.

7.3. Благодаря III, 6.8 из теоремы 7.2 непосредственно вытекает следствие.

Следствие. *Для того чтобы полугруппа с единицей $\mathfrak{A}$ была полугруппой с отделяющейся групповой частью, необходимо и достаточно, чтобы среди ее подполугрупп, содержащих $E_{\mathfrak{A}}$, не было изоморфных полугруппе $\mathfrak{P}$* (III, 6.2; III, 6.3).

7.4. Из теоремы 7.2 благодаря III, 5.3 вытекает, что полугруппы ряда классов полугрупп являются полугруппами с отделяющейся групповой частью.

(α). *Всякая конечная полугруппа с единицей является полугруппой с отделяющейся групповой частью.*

(β). *Всякая коммутативная полугруппа с единицей является полугруппой с отделяющейся групповой частью.*

(γ). *Всякая полугруппа с двусторонним сокращением, обладающая единицей, является полугруппой с отделяющейся групповой частью.*

7.5. Пользуясь 7.3, легко указать еще один класс полугрупп с отделяющейся групповой частью.

Пусть дана последовательность полугрупп с отделяющейся групповой частью, в которой каждый член является подполугруппой последующего:

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ \ldots \ \subset \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1} \subset \ \ldots$$

Их объединение

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n.$$

Как мы уже отмечали в III, 1.12, $\mathfrak{B}$ является полугруппой. Если $\mathfrak{B}$ имеет единицу, то $\mathfrak{B}$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью.

Действительно, если бы $\mathfrak{B}$ не было полугруппой с отделяющейся групповой частью, то, согласно 7.3, $\mathfrak{B}$ имела бы подполугруппу, изоморфную $\mathfrak{P}$ и содержащую $E_{\mathfrak{B}}$. Оба порождающих этой полугруппы заключались бы в некоторой $\mathfrak{A}_n$, в которой они порождали бы подполугруппу, изоморфную $\mathfrak{P}$ и содержащую $E_{\mathfrak{B}} = E_{\mathfrak{A}_n}$. Но это противоречило бы благодаря 7.3 тому, что $\mathfrak{A}_n$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью.

7.6. ***Теорема.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью. Если подполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержит ее единицу $E_{\mathfrak{A}}$, то она сама является полугруппой с отделяющейся групповой частью.*

Доказательство. $E_{\mathfrak{A}}$, очевидно, является единицей $\mathfrak{A}'$. Так как в $\mathfrak{A}$, согласно 7.3, нет подполугрупп, изоморфных $\mathfrak{P}$ и содержащих $E_{\mathfrak{A}}$, то таких подполугрупп не может быть и в ее подполугруппе $\mathfrak{A}'$. Но тогда, по 7.3, $\mathfrak{A}'$ является полугруппой с отделяющейся групповой частью.

7.7. Пользуясь 7.4, мы можем указать еще один обширный класс полугрупп с отделяющейся групповой частью.

Напомним, что полугруппа $\mathfrak{A}$ называется полугруппой, представимой матрицами, если при некотором n существует изоморфизм $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{M}_n$ всех комплексных квадратных матриц порядка n.

Теорема. *Всякая полугруппа с единицей, представимая матрицами, является полугруппой с отделяющейся групповой частью.*

Доказательство. Пусть n есть наименьшее из натуральных чисел, таких, что существует изоморфизм φ заданной полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}_n$. Приведем матрицу $\varphi(E_{\mathfrak{A}})$ к нормальной форме Жордана[1]. Это значит, что при некоторой неособенной матрице $P \in \mathfrak{M}_n$ матрица

$$P^{-1}\varphi(E_{\mathfrak{A}})P$$

имеет нормальную форму Жордана. Рассмотрим новое отображение ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}_n$:

$$\psi(A) = P^{-1}[\varphi(A)]P.$$

Очевидно, ψ является представлением $\mathfrak{A}$ матрицами. Так как элемент $E_{\mathfrak{A}}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ идемпотентен, то матрица $\psi(E_{\mathfrak{A}})$, имеющая нормальную форму Жордана, удовлетворяет условию

$$[\psi(E_{\mathfrak{A}})]^2 = \psi(\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}).$$

Как непосредственно следует из определения нормальной формы Жордана, это условие может быть удовлетворено лишь в том случае, когда матрица $\psi(E_{\mathfrak{A}})$ является диагональной, причем все ее диагональные элементы равны нулю или единице. Предположим, что i-й диагональный элемент этой матрицы равен нулю. Так как для произвольного элемента $A \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$AE_{\mathfrak{A}} = A, \quad E_{\mathfrak{A}}A = A,$$

то отсюда следует

$$[\psi(A)] \cdot [\psi(E_{\mathfrak{A}})] = \psi(A), \quad [\psi(E_{\mathfrak{A}})] \cdot [\psi(A)] = \psi(A).$$

Учитывая, что матрица $\psi(E_{\mathfrak{A}})$ диагональная и ее i-й диагональный элемент равен нулю, заключаем, что все элементы i-й строки и i-го столбца матрицы $\psi(A)$ равны

---

[1] См., например, А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры, гл. IV, § 3, Гостехиздат, 1948 или 1956.

нулю. Легко проверить, что матрицы $\chi(A)$, получающиеся из $\psi(A)$ вычеркиванием i-й строки и i-го столбца, будут опять давать матричное представление $\mathfrak{A}$ (случай, когда $n=1$ и $\psi(E_{\mathfrak{A}})$ есть нулевая матрица, можно ввиду его тривиальности не рассматривать). Но матрицы $\chi(A)$ содержатся в $\mathfrak{M}_{n-1}$, что противоречит исходному предположению относительно n. Отсюда следует, что $\varphi(E_{\mathfrak{A}})$ есть единичная матрица.

Таким образом, мы приходим к выводу, что ψ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ на некоторую полугруппу $\psi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M}_n$, содержащую единичную матрицу $\psi(E_{\mathfrak{A}})=E$. Ранее в 6.2 мы уже указывали, что $\mathfrak{M}_n$ есть полугруппа с отделяющейся групповой частью. Согласно 7.6, отсюда следует, что $\psi(\mathfrak{A})$, а потому и сама $\mathfrak{A}$ являются полугруппами с отделяющейся групповой частью.

7.8. Что касается полугрупп бесконечных матриц, то на них проведенное выше рассуждение не распространяется. Например, множество всех счетных матриц, в каждой строке и в каждом столбце которых имеется лишь конечное число отличных от нуля элементов, очевидно, образует полугруппу, единицей которой является счетная единичная матрица E. Эта полугруппа не является полугруппой с отделяющейся групповой частью. Действительно,

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ 0&0&0&1&\dots \\ 0&0&0&0&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0&0&0&0&\dots \\ 1&0&0&0&\dots \\ 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&\dots \\ 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ 0&0&0&1&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} = E;$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&\dots \\ 1&0&0&0&\dots \\ 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ 0&0&0&1&\dots \\ 0&0&0&0&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&\dots \\ 0&1&0&0&\dots \\ 0&0&1&0&\dots \\ 0&0&0&1&\dots \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{bmatrix} \neq E,$$

откуда благодаря 1.3 и II, 2.14, (β) следует, что перемножаемые матрицы являются элементами нашей полугруппы, обратимыми с одной стороны, но необратимыми с другой. В полугруппе с отделяющейся групповой частью таких элементов, согласно 6.7, быть не может.

ГЛАВА VII

ГОМОМОРФИЗМЫ

§ 1. Гомоморфизмы и их делимость

1.1. В первой главе мы говорили об отображениях, сохраняющих те или иные соотношения между элементами отображаемого множества. При построении теории полугрупп в высшей степени естественно выделить такие отображения одной полугруппы в другую, при которых „сохраняется" соотношение действия. Иными словами речь идет о таких отображениях, что если в первой полугруппе для некоторых элементов A, B, C имеет место $AB = C$, то и во второй полугруппе соотношение $A'B' = C'$ будет иметь место для элементов A', B', C', на которые отобразились соответственно элементы A, B, C.

Примером таких отображений служат изоморфизмы.

Определение. *Отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{B}$ называется гомоморфизмом, если при любых элементах X и Y из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ всегда выполняется*

$$\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(XY).$$

Если φ есть отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то говорят о гомоморфизме $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ (иногда в этом случае употребляют особый термин — эпиморфизм). Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают, то гомоморфизм называется эндоморфизмом полугруппы $\mathfrak{A}$. Такое употребление этого термина не противоречит более широкому его пониманию, указанному в I, 3.18, поскольку гомоморфизм полугруппы в себя есть ее преобразование, сохраняющее соотношения между ее элементами, имеющие вид

$$AB = C.$$

1.2. Легко видеть, что если полугруппа $\mathfrak{A}$ является группой и φ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на полугруппу $\mathfrak{B}=\varphi(\mathfrak{A})$, то и $\mathfrak{B}$ будет группой. Действительно, для произвольных элементов полугруппы $\mathfrak{B}$

$$\varphi(A_1),\ \varphi(A_2)\quad (A_1, A_2 \in \mathfrak{A})$$

элементы $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$ (X и Y такие элементы $\mathfrak{A}$, что $XA_1=A_2$ и $A_1Y=A_2$) обладают свойством

$$\varphi(X)\cdot\varphi(A_1)=\varphi(XA_1)=\varphi(A_2),$$
$$\varphi(A_1)\cdot\varphi(Y)=\varphi(A_1Y)=\varphi(A_2).$$

Понятие гомоморфизма для групп является одним из наиболее важных в теории групп. В большинстве разделов этой далеко развитой теории прямо или косвенно (посредством нормальных делителей) используются свойства гомоморфизмов групп. Это использование существенно облегчается относительной простотой задания гомоморфизмов групп при помощи так называемых нормальных делителей. В теории полугрупп строение гомоморфизмов несравненно более сложно. Полное изучение гомоморфизмов проведено лишь для отдельных частных классов полугрупп. Из различных многочисленных общих свойств рассмотрены лишь очень немногие. Нет сомнений, что дальнейшее изучение гомоморфизмов окажет существенное влияние на общую теорию.

1.3. Понятие гомоморфизма можно рассматривать как естественное обобщение понятия изоморфизма. Действительно, очевидно, *изоморфизм есть не что иное, как взаимно однозначный гомоморфизм.*

Однако по своему внутреннему смыслу такое обобщение существенно выводит за рамки первоначальной идеи изоморфизма. В отличие от изоморфизма одной полугруппы на другую при гомоморфизме уже нет и речи о том, что обе полугруппы в каком-то смысле одинаковы. Очевидно, полугруппы могут быть существенно различны в отношении самых разнообразных свойств.

1.4. Многочисленные причины вызывают потребность рассмотрения гомоморфизмов. Укажем некоторые из них, относящиеся к теории преобразований.

В различных вопросах математики и физики (особенно в теории дифференциальных уравнений) часто возникает

потребность рассматривать так называемые однопараметрические полугруппы преобразований. Пусть Σ есть некоторая аддитивная полугруппа чисел и каждому числу t из Σ сопоставлено некоторое преобразование заданного множества Ω: A_t. Если при этом для любых t_1, $t_2 \in \Sigma$ имеет место

$$A_{t_1} \cdot A_{t_2} = A_{t_1+t_2},$$

то совокупность $\mathfrak{A}$ всех преобразований A_t ($t \in \Sigma$), очевидно, является полугруппой — однопараметрическая полугруппа преобразований. Сопоставление каждому числу t из Σ преобразования A_t представляет собой не что иное, как гомоморфизм аддитивной полугруппы чисел Σ в полугруппу всех преобразований множества Ω.

Количество разнообразных важных однопараметрических полугрупп преобразований чрезвычайно велико. Их рассмотрение часто оказывается очень полезным в той или иной из математических теорий. Обширная книга Хилла [2] (см. также Хилл и Филлипс [1]) в основном посвящена изучению самых разнообразных однопараметрических полугрупп преобразований.

Конечно, наравне с однопараметрическими преобразованиями иногда возникает потребность рассмотрения преобразований, задаваемых системами параметров.

1.5. В некоторых вопросах к преобразованиям множеств бывает удобно подойти с точки зрения, несколько отличной от той, которой мы в основном придерживаемся в настоящей книге.

Пусть даны два множества $\mathfrak{A}$ и Ω, причем для всякой пары элементов (A, α), взятых из этих множеств: $A \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \in \Omega$, определено их произведение, являющееся элементом из Ω:

$$A\alpha = \beta \in \Omega.$$

В этом случае элементы множества $\mathfrak{A}$ называются *операторами* множества Ω. Оператор $A \in \mathfrak{A}$ производит в Ω некоторое преобразование. В свою очередь, каждое преобразование можно рассматривать как оператор множества Ω. Тем не менее рассмотрение операторов не вполне тождественно с рассмотрением преобразований. Дело в том, что два оператора, заданные как различные элементы множества операторов $\mathfrak{A}$, могут осуществлять одинаковые преобразования в Ω. То, что в некоторых случаях это удобно, видно, например,

из следующего. Пусть дана некоторая совокупность преобразований $\mathfrak{B}$ множества Ω. Пусть Γ есть такое подмножество Ω, что $X\Gamma \subset \Gamma$ для всякого преобразования $X \in \mathfrak{B}$. Благодаря этому, преобразования из $\mathfrak{B}$ осуществляют некоторые преобразования множества Γ. Однако вполне может случиться, что какие-либо два различных преобразования из $\mathfrak{B}$ осуществляют в Γ одно и то же преобразование. Таким образом, рассматривая действие элементов $\mathfrak{B}$ на Γ, мы должны считаться с возможностью того, что некоторые из них, которые мы не можем считать одинаковыми (так как они производят различные действия в Ω), производят в Γ одно и то же преобразование.

Пусть в множестве операторов $\mathfrak{A}$ множества Ω задано некоторым образом действие умножения, такое, что $\mathfrak{A}$ является относительно него полугруппой. Говорят, что умножение в полугруппе $\mathfrak{A}$ согласовано с умножением операторов из $\mathfrak{A}$ на элементы из Ω, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \in \Omega$ выполнено следующее условие, имеющее характер ассоциативности:

$$(XY)\alpha = X(Y\alpha).$$

Обозначим через $\bar{A}$ то преобразование в множестве Ω, которое производится в Ω в результате его умножения на оператор $A \in \mathfrak{A}$. Таким образом, мы получаем отображение полугруппы операторов $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований множества Ω.

Так как $A\alpha = \bar{A}\alpha$, то для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \in \Omega$ мы имеем

$$(\bar{X}\bar{Y})\alpha = \bar{X}(\bar{Y}\alpha) = \bar{X}(Y\alpha) = X(Y\alpha) = (XY)\alpha = (\overline{XY})\alpha.$$

Так как α произвольно, то это означает:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (\overline{XY}).$$

Таким образом, сопоставление каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ преобразования $\bar{A} \in \mathfrak{S}_\Omega$ представляет собой гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$.

1.6. Мы уже не раз говорили об изоморфных представлениях полугрупп. В связи с введением понятия гомоморфизма можно говорить о *гомоморфных представлениях*. Пусть $\mathfrak{A}$ — полугруппа и Ξ — некоторый класс полугрупп. *Гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в какую-нибудь полугруппу из Ξ называется гомоморфным представлением $\mathfrak{A}$ полугруппами из Ξ.*

В связи со сказанным в 1.2 о принципиальном различии в подходе к понятиям изоморфизма и гомоморфизма естественно обрисовывается существенное различие значений изоморфных представлений и гомоморфных представлений.

Использование гомоморфного образа для изучения свойств исходной полугруппы затрудняется тем, что различные элементы исходной полугруппы могут при гомоморфизме отображаться на один и тот же элемент. Это обстоятельство надо всегда иметь в виду при изучении гомоморфных представлений. В связи с этим возникает следующее понятие. Некоторая совокупность гомоморфизмов Φ полугруппы $\mathfrak{A}$ в полугруппы класса Ξ называется полной системой представлений $\mathfrak{A}$ полугруппами из Ξ, если для всяких двух различных между собой элементов X и Y из $\mathfrak{A}$ всегда найдется такой гомоморфизм φ из Φ, что $\varphi(X) \neq \varphi(Y)$.

1.7. В § 5 главы II мы выделили класс полугрупп Π, обладающих тем свойством, что каждый элемент полугруппы из Π обладает правым нулем. Если $\mathfrak{A} \in \Pi$, то при произвольном ее гомоморфизме φ полугруппа $\varphi(\mathfrak{A})$ также будет принадлежать Π. Действительно, если U есть правый нуль элемента A из $\mathfrak{A}$, то, очевидно, $\varphi(U)$ будет правым нулем элемента $\varphi(A)$. Следовательно, всякий элемент из $\varphi(A)$ имеет в $\varphi(\mathfrak{A})$ правый нуль.

Пусть φ есть произвольное гомоморфное представление преобразованиями некоторой полугруппы $\mathfrak{A} \in \Pi$. Так как $\varphi(\mathfrak{A}) \in \Pi$ и тождественное отображение полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$ есть ее изоморфное представление преобразованиями, то, согласно II, 5.3, каждое преобразование из $\varphi(\mathfrak{A})$ дожно иметь неподвижную точку. Таким образом, при любом гомоморфном представлении полугруппы из Π все преобразования представления имеют неподвижные точки.

1.8. В связи со сказанным находится и следующее свойство. Пусть Γ есть такое подмножество множества Ω, что относительно полугруппы некоторых преобразований $\mathfrak{A}$ имеет место $\mathfrak{A}\Gamma \subset \Gamma$. Если каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку, то таковые могут и не принадлежать Γ. В Γ для некоторых преобразований из $\mathfrak{A}$ неподвижных точек может и не найтись. Если, однако, $\mathfrak{A}$ принадлежит классу Π, то, согласно 1.5, преобразования из $\mathfrak{A}$ индуцируют преобразования множества Γ, которые образуют полугруппу $\mathfrak{B}$, являющуюся гомоморфным образом $\mathfrak{A}$. Но, как было пока-

зано в 1.7, гомоморфный образ полугруппы из Π также должен принадлежать Π. Отсюда следует, что каждое преобразование из $\mathfrak{B}$ должно обладать неподвижной точкой (конечно, являющейся элементом Γ). Но в Γ преобразования из $\mathfrak{A}$ и индуцированные ими преобразования из $\mathfrak{B}$ действуют одинаково. Следовательно, каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ в случае, когда $\mathfrak{A}$ принадлежит Π, имеет неподвижную точку во всяком множестве $\Gamma \subset \Omega$, таком, что $\mathfrak{A}\Gamma \subset \Gamma$.

1.9. Пусть ψ есть отображение множества Ω_1 в множество Ω_2 и φ — отображение множества Ω_2 в множество Ω_3, тогда естественным образом определяется отображение χ множества Ω_1 в Ω_3:

$$\chi(\alpha) = \varphi[\psi(\alpha)] \quad (\alpha \in \Omega_1).$$

Отображение χ называется произведением отображений φ и ψ и обозначается $\chi = \varphi \cdot \psi$ или $\chi = \varphi\psi$. Следует отметить, что, рассматривая такое умножение отображений, мы, собственно говоря, выходим за рамки, указанные в § 1 первой главы для понятия алгебраического действия.

Непосредственно ясно, что если для отображений φ_1, φ_2, φ_3 определены произведения $\varphi_1\varphi_2$ и $\varphi_2\varphi_3$, то определены $(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$ и $\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$, причем

$$(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3).$$

1.10. Пусть Ω_1 и Ω_2 есть два произвольных непустых множества. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех отображений Ω_1 в Ω_2. Действие умножения отображений, рассмотренное в 1.9, для умножения отображений из $\mathfrak{N}$, как правило, просто неприменимо. Возможные естественные непосредственные обобщения действия 1.9 приводят к тривиальным результатам. Однако в $\mathfrak{N}$ можно ввести нетривиальное действие следующим образом. Фиксируем некоторое отображение π множества Ω_2 в Ω_1. Для $X, Y \in \mathfrak{N}$ определяем их произведение $X \bigcirc Y$ при помощи умножения отображений 1.9:

$$(X \bigcirc Y)\alpha = (X \cdot \pi \cdot Y)\alpha = X\{\pi(Y\alpha)\} \qquad (\alpha \in \Omega_1).$$

(Произведение $X \cdot \pi \cdot Y$ в смысле 1.9, очевидно, всегда определено и принадлежит $\mathfrak{N}$).

Множество $\mathfrak{R}$, рассматриваемое относительно этого действия, обозначим через $\mathfrak{R}_\pi$. Действие в $\mathfrak{R}_\pi$ ассоциативно, так как очевидно:

$$(X \bigcirc Y) \bigcirc Z = X \pi Y \pi Z,$$
$$X \bigcirc (Y \bigcirc Z) = X \pi Y \pi Z.$$

Таким образом, $\mathfrak{R}_\pi$ является полугруппой. Рассмотрение полугруппы $\mathfrak{R}_\pi$ иногда может быть столь же полезным для изучения отображений из $\mathfrak{R}$, как рассмотрение полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ для изучения преобразований множества Ω. Кстати, $\mathfrak{S}_\Omega$ является частным случаем рассматриваемых полугрупп. Действительно, $\mathfrak{S}_\Omega$ есть $\mathfrak{R}_\pi$ при $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ в случае, когда в качестве π взято тождественное отображение.

Сопоставим каждому $X \in \mathfrak{R}_\pi$ преобразование множества Ω_1:

$$\varphi_\pi(X) = \pi \cdot X.$$

Ясно, что φ_π есть отображение $\mathfrak{R}_\pi$ в $\mathfrak{S}_\Omega$. Это отображение является гомоморфизмом:

$$\varphi_\pi(X) \cdot \varphi_\pi(Y) = (\pi \cdot X) \cdot (\pi \cdot Y) = \pi(X \pi Y) = \varphi_\pi(X \bigcirc Y).$$

Если отображение π не является взаимно однозначным, то, как легко видеть, гомоморфизм φ_π не является изоморфизмом. Если π взаимно однозначно, то φ_π есть изоморфизм. Если при этом π есть взаимно однозначное отображение Ω_2 на Ω_1, то φ_π есть изоморфизм $\mathfrak{R}_\pi$ на $\mathfrak{S}_\Omega$, так что полугруппы $\mathfrak{R}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Omega$ в этом случае оказываются изоморфными.

При рассмотрении преобразований некоторого множества Ω обычно интерес представляет не только полугруппа всех его преобразований $\mathfrak{S}_\Omega$, но и различные ее подполугруппы, состоящие из преобразований, обладающих какими-либо заданными свойствами. Также и при рассмотрении введенного выше умножения отображений из $\mathfrak{R}_\pi$ интерес представляет изучение не только самой полугруппы $\mathfrak{R}_\pi$, но также и тех или иных ее подполугрупп. Кроме того, здесь возникает еще задача о выяснении взаимоотношений полугрупп $\mathfrak{R}_\pi$ при различных π.

Аналогичное построение, конечно, можно осуществить и и для частичных отображений одного множества в другое.

1.11. Пусть $\mathfrak{M}_{m,n}$ есть множество всех комплексных матриц, имеющих m строк и n столбцов, P некоторая фик-

сированная матрица, имеющая n строк и m столбцов. В $\mathfrak{M}_{m,n}$ можно рассматривать ассоциативное действие

$$M_1 \bigcirc M_2 = M_1 \cdot P \cdot M_2 \qquad (M_1,\ M_2 \in \mathfrak{M}_{m,n})$$

(где точка означает обычное умножение прямоугольных матриц). Это действие, конечно, есть не что иное, как действие, рассмотренное в 1.10, поскольку матрицы из $\mathfrak{M}_{m,n}$ можно рассматривать как линейные отображения векторов n-мерного комплексного пространства в m-мерное комплексное линейное пространство.

С точки зрения такого действия над матрицами делается естественным рассмотрение действия в полугруппах матричного типа $\mathfrak{S}(P, \mathfrak{H})$, игравших такую важную роль в § 5 и § 6 пятой главы (с тем отличием, что матрицы там могли быть и бесконечными, а элементы их не были комплексными числами).

1.12. Пусть ψ есть гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ на полугруппу $\mathfrak{B}$ и φ — гомоморфизм $\mathfrak{B}$ на полугруппу $\mathfrak{C}$. Произведение преобразований $\chi = \varphi\psi$ в смысле умножения преобразований, описанного в 1.9, определено и, как легко видеть, является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{C}$. Гомоморфизм χ называется *произведением гомоморфизмов* φ *и* ψ. Только в случаях описанного типа мы будем говорить, что умножение гомоморфизмов φ и ψ возможно (или определено). Гомоморфизм ψ в этом случае называется *правым делителем* гомоморфизма χ. Про χ говорят, что он *делится справа на* ψ. Будем в этом случае писать: $\psi \sim \chi\,(\mathfrak{p})$. Если для гомоморфизмов ψ_1 и ψ_2 выполняется одновременно и $\psi_1 \sim \psi_2\,(\mathfrak{p})$ и $\psi_2 \sim \psi_1\,(\mathfrak{p})$, то будем писать $\psi_1 \sim \psi_2\,(\mathfrak{q})$. Отметим, что только гомоморфизмы одной и той же полугруппы могут находиться в отношении правой делимости $\mathfrak{p}$.

1.13. Рассмотрим несколько свойств умножения гомоморфизмов.

(α). *Если для гомоморфизмов* φ_1, φ_2, φ_3 *определены произведения* $\varphi_1\varphi_2$ *и* $\varphi_2\varphi_3$, *то определены и произведения* $(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$ и $\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$, *причем они равны между собой.*

(β). *Если для гомоморфизмов* φ_1, φ_2, φ_3 *имеет место* $\varphi_1 \sim \varphi_2\,(\mathfrak{p})$ *и* $\varphi_2 \sim \varphi_3\,(\mathfrak{p})$, *то выполняется и* $\varphi_1 \sim \varphi_3\,(\mathfrak{p})$ (*транзитивность* $\mathfrak{p}$).

Действительно, пусть

$$\varphi_3 = \psi\varphi_2, \quad \varphi_2 = \psi'\varphi_1.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi_3 = (\psi\psi')\varphi_1.$$

(γ). *Если для гомоморфизмов* φ_1, φ_2, φ_3 *имеет место* $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{q})$ *и* $\varphi_2 \sim \varphi_3(\mathfrak{q})$, *то выполняется и* $\varphi_1 \sim \varphi_3(\mathfrak{q})$ (*транзитивность* $\mathfrak{q}$).

(δ). *Если для гомоморфизмов* φ_1, φ_2 *и изоморфизма* ε *имеет место* $\varphi_1 = \varepsilon\varphi_2$, *то существует такой изоморфизм* ε', *что* $\varphi_2 = \varepsilon'\varphi_1$.

Действительно, если φ_2 есть гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$, то ε есть изоморфизм полугруппы $\varphi_2(\mathfrak{A})$ на полугруппу $\varphi_1(\mathfrak{A})$. Обозначим через ε' обратный к нему изоморфизм полугруппы $\varphi_1(\mathfrak{A})$ на $\varphi_2(\mathfrak{A})$. Так как

$$\varepsilon'\varphi_1 = \varepsilon'\varepsilon\varphi_2$$

и $\varepsilon'\varepsilon$ есть тождественный изоморфизм, то $\varphi_2 = \varepsilon'\varphi_1$.

(ε) *Для гомоморфизмов* φ_1 *и* φ_2 *одной и той же полугруппы соотношение* $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{q})$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует такой изоморфизм* ε, *что* $\varphi_1 = \varepsilon\varphi_2$.

Действительно, если $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{q})$, то при некоторых гомоморфизмах ψ и ψ'

$$\varphi_1 = \psi\varphi_2, \quad \varphi_2 = \psi'\varphi_1,$$

т. е. $\varphi_1 = (\psi\psi')\varphi_1$.

Произведение $\psi\psi'$ есть тождественное отображение. Это возможно лишь в том случае, когда гомоморфизмы ψ и ψ' являются взаимно однозначными отображениями, т. е. изоморфизмами.

Пусть теперь при некотором изоморфизме ε имеет место $\varphi_1 = \varepsilon\varphi_2$. Это означает, что $\varphi_2 \sim \varphi_1(\mathfrak{p})$. Но тогда, по (δ), должен найтись такой изоморфизм ε', что $\varphi_2 = \varepsilon'\varphi_1$, и потому $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{p})$.

(ζ). *Если для гомоморфизмов полугруппы* $\mathfrak{A}$ φ_1, φ_1', φ_2, φ_2' *имеет место*

$$\varphi_1 \sim \varphi_1'(\mathfrak{q}), \quad \varphi_2 \sim \varphi_2'(\mathfrak{q}), \quad \varphi_2 \sim \varphi_1(\mathfrak{p}),$$

то $\varphi_2' \sim \varphi_1'(\mathfrak{p})$.

Действительно, при некоторых изоморфизмах ε_1 и ε_2 и гомоморфизме ψ должно иметь место

$$\varphi_1' = \varepsilon_1\varphi_1, \quad \varphi_2' = \varepsilon_2\varphi_2, \quad \varphi_1 = \psi\varphi_2.$$

Обозначив через ε_2' обратный по отношению к ε_2 изоморфизм полугруппы $\varphi_2'(\mathfrak{A})$ на $\varphi_2(\mathfrak{A})$ имеем

$$\varphi_1' = \varepsilon_1\varphi_1 = \varepsilon_1\psi\varphi_2 = \varepsilon_1\psi\varepsilon_2'\varepsilon_2\varphi_2 = (\varepsilon_1\psi\varepsilon_2')\,\varphi_2',$$

т. е. $\varphi_2' \sim \varphi_1'(\mathfrak{p})$.

(η). *Если φ есть некоторый гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ и ε — некоторый ее изоморфизм, то $\varepsilon \sim \varphi(\mathfrak{p})$.*

Действительно, обозначив через ε' обратный по отношению к ε изоморфизм $\varepsilon(\mathfrak{A})$ на $\mathfrak{A}$, мы получаем

$$\varphi = \varphi \cdot \varepsilon'\varepsilon = (\varphi\varepsilon') \cdot \varepsilon.$$

(θ). *Если ε есть изоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ и φ гомоморфизм $\mathfrak{A}$, причем $\varphi \sim \varepsilon(\mathfrak{p})$, то и φ является изоморфизмом.*

Действительно, при некотором гомоморфизме ψ имеем

$$\varepsilon = \psi\varphi.$$

Так как ε есть взаимно однозначное отображение, то и отображение φ должно быть взаимно однозначным, т. е. изоморфизмом.

(ι). *Пусть φ и ψ есть два гомоморфизма полугруппы $\mathfrak{A}$. Для $\varphi \sim \psi(\mathfrak{p})$ необходимо и достаточно, чтобы при любых $A, B \in \mathfrak{A}$ из $\varphi(A) = \varphi(B)$ всегда следовало $\psi(A) = \psi(B)$.*

Действительно, если при некотором гомоморфизме χ $\psi = \chi\varphi$, то из $\varphi(A) = \varphi(B)$ следует

$$\psi(A) = (\chi \cdot \varphi)(A) = \chi[\varphi(A)] = \chi[\varphi(B)] = (\chi \cdot \varphi)(B) = \psi(B).$$

С другой стороны, если φ и ψ таковы, что из $\varphi(A) = \varphi(B)$ всегда следует $\psi(A) = \psi(B)$, то для полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$ можно определить следующее ее отображение χ на полугруппу $\psi(\mathfrak{A})$. Полагаем

$$\chi[\varphi(A)] = \psi(A).$$

Это отображение определяется однозначно независимо от выбора представителя A в классе тех элементов $X \in \mathfrak{A}$, для которых $\varphi(X) = \varphi(A)$, так как при $\varphi(A) = \varphi(A')$ мы имеем в $\psi(\mathfrak{A})$ $\psi(A) = \psi(A')$. Из того, что ψ и φ являются гомоморфизмами, сразу следует, что отображение χ также оказывается гомоморфизмом. Таким образом, $\chi\varphi = \psi$, т. е. $\varphi \sim \psi(\mathfrak{p})$.

1.14. Из 1.13, (γ), (ι) следует, что в классе всех гомоморфизмов полугруппы отношение $\mathfrak{q}$ является эквивалентностью, таким образом, этот класс разбивается на взаимно непересекающиеся классы гомоморфизмов, эквивалентных между собой относительно отношения $\mathfrak{q}$. Один из таких классов образован всеми изоморфизмами полугруппы. Если для гомоморфизмов φ_1 и φ_2 имеет место $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{p})$, то и для любых гомоморфизмов φ_1' и φ_2', взятых из соответствующих классов, выполняется $\varphi_1' \sim \varphi_2'(\mathfrak{p})$ (1.13, (ζ)). Поэтому, для самих классов Γ_1 и Γ_2 можно ввести отношение $\mathfrak{p}$, выполняемое в случае, когда для $\varphi_1 \in \Gamma_1$ и $\varphi_2 \in \Gamma_2$ имеет место $\varphi_1 \sim \varphi_2(\mathfrak{p})$. Благодаря 1.13, ($\beta$) это отношение является отношением частичного упорядочения, и мы можем вместо $\Gamma_1 \sim \Gamma_2(\mathfrak{p})$ писать $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$. Класс всех изоморфизмов благодаря 1.13, (η) и 1.13, (θ) оказывается предшествующим всем прочим классам. Легко убедиться, что класс, состоящий из гомоморфизмов, отображающих полугруппу на единичную группу, будет следовать за всеми остальными классами.

Поскольку гомоморфизмы из одного и того же класса благодаря 1.13, (ε) отличаются лишь на множитель, являющийся изоморфизмом, о них принято говорить, что они *одинаковы с точностью до умножения на изоморфизм* или что они *несущественно отличаются друг от друга.*

1.15. Пусть дана некоторая совокупность Γ гомоморфизмов полугруппы $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{A}$ естественно назвать *наибольшим общим правым делителем для* Γ, если φ есть правый делитель каждого гомоморфизма из Γ и сам делится справа на всякий гомоморфизм, являющийся правым делителем каждого гомоморфизма из Γ.

Гомоморфизм ψ называется *наименьшим общим правым кратным для* Γ, если ψ делится справа на все гомоморфизмы из Γ и является правым делителем всякого гомоморфизма, делящегося справа на все гомоморфизмы из Γ.

Очевидно, класс гомоморфизмов, являющихся наибольшими общими правыми делителями гомоморфизмов из Γ в отношении частичной упорядоченности классов 1.14, является точной нижней границей для классов гомоморфизмов, содержащих гомоморфизмы из Γ. Класс наименьших общих правых кратных является точной верхней границей.

Из 1.13, (ε) и 1.14 следует, что всякие два наибольших общих правых делителя класса гомоморфизмов Γ несущественно отличаются друг от друга. Также несущественно отличаются и всякие два наименьших общих правых кратных.

1.16. Вопрос о существовании наибольшего общего правого делителя для совокупности гомоморфизмов и наименьшего общего правого кратного получит свое положительное решение в следующем параграфе (2.11). При этом, однако, следует иметь в виду, что, рассматривая какой-либо класс гомоморфизмов Γ, обычно бывает интересно не только то, существуют ли для него наибольшие общие правые делители, но и то, принадлежат ли некоторые из них сами к классу Γ. Это особенно важно, когда класс Γ таков, что из принадлежности к нему некоторого гомоморфизма φ следует, что всякий гомоморфизм, делящийся справа на φ, сам принадлежит Γ. Если класс Γ таков и ψ есть принадлежащий Γ наибольший общий правый делитель гомоморфизмов из Γ, то Γ описывается как класс всех гомоморфизмов, делящихся справа на ψ. Задание ψ в этом случае отчетливо описывает состав класса Γ.

В качестве примера укажем на класс всех гомоморфизмов произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ на коммутативные полугруппы. Очевидно, если гомоморфизмы φ, ψ, χ таковы, что $\varphi\psi = \chi$, причем полугруппа $\psi(\mathfrak{A})$ коммутативна, то и $\chi(\mathfrak{A})$ будет коммутативной. В 6.7 мы построим наибольший общий правый делитель таких гомоморфизмов, при этом он сам будет принадлежать к этому классу.

В качестве примера отрицательного решения поставленного выше вопроса рассмотрим бесконечную моногенную полугруппу $\mathfrak{A} = [X]$ и класс всевозможных ее гомоморфизмов на группы.

Для любой конечной циклической группы $\mathfrak{G}_d = [G]$ с числом элементов d (т. е. типа $(1, d)$) существует гомоморфизм φ_d полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}_d$:

$$\varphi_d = (A^k) = G^k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если ψ есть некоторый гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на группу, то при некотором m $\psi(A^m)$ будет единицей этой группы. Отсюда легко получаем, что

$$\psi(\mathfrak{A}) = \{\psi(A), \psi(A^2), \ldots, \psi(A^m)\}.$$

Так как число элементов в $\psi(\mathfrak{A})$ не превосходит m, то ψ не может быть правым делителем для тех φ_d, у которых $d > m$.

1.17. Мы уже упоминали, что связь между свойствами полугруппы и ее гомоморфного образа в случае произвольного гомоморфизма далеко не так элементарна, как при изоморфизме. Пусть φ есть гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ на полугруппу $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}'$. Если в $\mathfrak{A}$ элемент A_1 делится слева на A_2, то, очевидно, в $\mathfrak{A}'$ элемент $\varphi(A_1)$ будет делиться слева на $\varphi(A_2)$. То же для делимости справа. В частности, если C есть элемент $\mathfrak{A}$, делящийся и слева и справа на любой элемент из $\mathfrak{A}$ (II, 1.6), то $\varphi(C)$ будет в $\mathfrak{A}'$ делиться слева и справа на все элементы из $\mathfrak{A}'$. Однако если некоторый элемент C' из $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{A}'$ делится и слева и справа на все элементы из $\mathfrak{A}'$, то необязательно он должен быть образом некоторого элемента из $\mathfrak{A}$, обладающего в $\mathfrak{A}$ тем же свойством. Действительно, полугруппа $\mathfrak{A}$ вовсе может не иметь таких элементов. В то же время при гомоморфизме ее на единичную группу единственный элемент образа обладает рассматриваемым свойством.

В связи со сказанным отметим, что для гомогруппы $\mathfrak{A}$, т. е. в случае, когда $\mathfrak{A}$ имеет двусторонний идеал $\mathfrak{T}$, являющийся группой (V, 1.8), выполняется следующее свойство. При любом гомоморфизме φ полугруппы $\mathfrak{A}$ из того, что в $\mathfrak{A}' = \varphi(\mathfrak{A})$ элемент C' делится на все элементы $\mathfrak{A}'$ и слева и справа, следует, что в $\mathfrak{A}$ найдется элемент C, делящийся на все элементы $\mathfrak{A}$ и слева и справа, такой, что $\varphi(C) = C'$.

Действительно, очевидно, $\varphi(\mathfrak{T})$ будет двусторонним идеалом $\mathfrak{A}'$, а согласно 1.2, он будет группой. В силу V,1.4, $C' \in \varphi(\mathfrak{T})$, т. е. для некоторого $C \in \mathfrak{T}$ имеем $\varphi(C) = C'$. Но благодаря V, 1.4 $\mathfrak{T}$ состоит из элементов, делящихся и слева и справа на все элементы из $\mathfrak{A}$.

§ 2. Факторполугруппы

2.1. Пусть φ есть произвольный гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $A \sim B(\mathfrak{n})$, если $\varphi(A) = \varphi(B)$. Очевидны рефлексивность, симметричность и транзитивность этого отношения. Эквивалентность $\mathfrak{n}$ будем называть *эквивалентностью, соответствующей данному гомоморфизму* φ.

Так как из $\varphi(A)=\varphi(B)$ при любом $X\in\mathfrak{A}$ следует

$$\varphi(XA)=\varphi(X)\cdot\varphi(A)=\varphi(X)\cdot\varphi(B)=\varphi(XB),$$
$$\varphi(AX)=\varphi(A)\cdot\varphi(X)=\varphi(B)\cdot\varphi(X)=\varphi(BX),$$

то *эквивалентность* $\mathfrak{n}$, *соответствующая гомоморфизму* φ, *является двусторонне стабильной.*

2.2. Пусть теперь $\mathfrak{n}$ есть произвольная двусторонне стабильная эквивалентность в полугруппе $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ множество всех $\mathfrak{n}$-классов (I, 5.8.).

Отметим, что для всяких $\mathfrak{n}$-классов $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ из $(\mathfrak{K}_1\cdot\mathfrak{K}_2)\cap\mathfrak{K}_3\neq\varnothing$ всегда следует

$$\mathfrak{K}_1\cdot\mathfrak{K}_2\subset\mathfrak{K}_3.$$

Действительно, пусть X_1, $Y_1\in\mathfrak{K}_1$; X_2, $Y_2\in\mathfrak{K}_2$ и $Y_1Y_2\in\mathfrak{K}_3$. Согласно I, 5.18, из $X_1\sim Y_1(\mathfrak{n})$, $X_2\sim Y_2(\mathfrak{n})$ следует

$$X_1X_2\sim Y_1Y_2(\mathfrak{n}).$$

Так как $Y_1Y_2\in\mathfrak{K}_3$, то и произвольный элемент X_1X_2 множества $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ должен принадлежать $\mathfrak{K}_3$.

Так как $\mathfrak{n}$-классы образуют разбиение множества всех элементов полугруппы (I, 5.8), то из доказанного свойства следует, что для двух любых $\mathfrak{n}$-классов $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ всегда найдется и при том единственный $\mathfrak{n}$-класс $\mathfrak{K}_3$, такой, что $(\mathfrak{K}_1\cdot\mathfrak{K}_2)\subset\mathfrak{K}_3$.

2.3. Благодаря 2.2 в $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ естественным образом определяется действие. Так как это действие не совпадает с действием умножения подмножеств, то будем временно употреблять для обозначения результатов этого действия значок $\bigcirc$. Конечно, можно и в этом случае употреблять обычную мультипликативную запись, если рассматривать $\mathfrak{n}$-классы не как подмножества $\mathfrak{A}$, но просто как элементы нового мультипликативного множества $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$. В математической литературе обычно так и делают. В дальнейшем мы также перейдем к обычной мультипликативной записи, отказавшись от употребления значка $\bigcirc$.

Пусть $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ — три таких $\mathfrak{n}$-класса, что

$$\mathfrak{K}_1\cdot\mathfrak{K}_2\subset\mathfrak{K}_3.$$

Полагаем в $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{K}_1\bigcirc\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}_3.$$

Так как при любых $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$

$$(\mathfrak{K}_1 \bigcirc \mathfrak{K}_2) \bigcirc \mathfrak{K}_3 \supseteq (\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K}_2) \cdot \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3,$$
$$\mathfrak{K}_1 \bigcirc (\mathfrak{K}_2 \bigcirc \mathfrak{K}_3) \supseteq \mathfrak{K}_1 \cdot (\mathfrak{K}_2 \cdot \mathfrak{K}_3) = \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3,$$

то действие $\bigcirc$ в $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ ассоциативно.

2.4. ***Определение.*** *Для двусторонне стабильной эквивалентности* $\mathfrak{n}$ *в полугруппе* $\mathfrak{A}$ *множество всех* $\mathfrak{n}$*-классов* $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$, *рассматриваемое относительно действия 2.3, является полугруппой, называемой* ***факторполугруппой*** *полугруппы* $\mathfrak{A}$ по $\mathfrak{n}$.

Эта конструкция является обобщением соответствующей конструкции теории групп. Если $\mathfrak{N}$ есть нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{n}$ — отношение в $\mathfrak{G}$, согласно которому $X \sim Y\ (\mathfrak{n})$ в том и только в том случае, когда $X^{-1}Y \in \mathfrak{N}$, то, как нетрудно убедиться, $\mathfrak{n}$ является двусторонне стабильной эквивалентностью и $\mathfrak{G}/\mathfrak{n}$ есть не что иное, как определяемая в теории групп факторгруппа группы $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

2.5. Пусть $\mathfrak{n}$ есть двусторонне стабильное разбиение полугруппы $\mathfrak{A}$. Сопоставив каждому элементу $A \in \mathfrak{A}$ ту компоненту $\mathfrak{K}$ этого разбиения, в которой он содержится, мы получим отображение $\mathfrak{A}$ на факторгруппу $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$. Это отображение является гомоморфизмом, так как из

$$A_1A_2 = A_3 \qquad (A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}),$$

для $\mathfrak{K}_i \ni A_i$, где $\mathfrak{K}_i \in \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ $(i = 1, 2, 3)$, следует, что пересечение $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2) \cap \mathfrak{K}_3$ непусто и потому

$$\mathfrak{K}_1 \bigcirc \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_3.$$

Такой гомоморфизм называется *естественным гомоморфизмом* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$.

Получение факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ из $\mathfrak{A}$ при помощи естественного гомоморфизма можно рассматривать как результат отождествления между собой элементов полугруппы $\mathfrak{A}$, входящих в один и тот же $\mathfrak{n}$-класс.

2.6. В 2.1 мы показали, что каждому гомоморфизму полугруппы $\mathfrak{A}$ соответствует некоторая двусторонне стабильная эквивалентность. Конструкция факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ (2.4; 2.5) показывает, что для произвольной двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$ найдется гомоморфизм (именно естествен-

ный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$), которому соответствует эта эквивалентность $\mathfrak{n}$.

2.7. Пусть φ есть произвольный гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{n}$ — соответствующая ему эквивалентность (2.1).

Через ψ обозначим естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$. Сопоставим каждому $\mathfrak{n}$-классу (т. е. элементу факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$) тот элемент полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$, в который при гомоморфизме φ отображаются все элементы из данного $\mathfrak{n}$-класса. Это взаимно однозначное отображение, как легко убедиться, является изоморфизмом. Таким образом,

$$\varphi = \varepsilon\psi,$$

т. е. $\varphi \sim \psi(\mathfrak{q})$ (1.13, (ε)).

С другой стороны, если φ есть произвольный гомоморфизм, ψ — естественный гомоморфизм на некоторую факторполугруппу и они связаны соотношением $\varphi \sim \psi(\mathfrak{q})$, т. е. при некотором изоморфизме ε

$$\varphi = \varepsilon\psi,$$

то, очевидно, разбиения, соответствующие гомоморфизмам φ и ψ, одинаковы.

Из сказанного следует, что каждому гомоморфизму полугруппы $\mathfrak{A}$ соответствует естественный гомоморфизм на факторполугруппу $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ есть эквивалентность, соответствующая данному гомоморфизму. Разным гомоморфизмам соответствует один и тот же естественный гомоморфизм в том и только в том случае, когда эти гомоморфизмы взаимно делятся друг на друга справа (1.12), т. е., согласно 1.13, (δ) и 1.13, (ε), отличаются один от другого множителем, являющимся изоморфизмом. Таким образом, естественные гомоморфизмы на факторполугруппы можно рассматривать как представители, взятые по одному из каждого класса гомоморфизмов, где в один класс объединены гомоморфизмы, несущественно отличающиеся друг от друга (1.14), т. е. эквивалентные относительно $\mathfrak{q}$ (1.12; 1.14), другими словами — отличающиеся друг от друга множителями, являющимися изоморфизмами (1.13, (ε)).

Благодаря этому можно считать, что все гомоморфизмы полугруппы с точностью до несущественных различий (1.14) исчерпываются естественными гомоморфизмами полугруппы на ее факторполугруппы.

2.8. Пусть даны два гомоморфизма φ_1 и φ_2 полугруппы $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ есть соответствующие им эквивалентности. Если для гомоморфизмов выполнено $\varphi_2 \sim \varphi_1(\mathfrak{p})$, т. е. φ_2 есть правый делитель φ_1 (1.12): $\varphi_1 = \psi\varphi_2$, то, согласно 1.13, (ι), равенство $\varphi_2(A) = \varphi_2(B)$ $(A, B \in \mathfrak{A})$ всегда влечет за собой $\varphi_1(A) = \varphi_1(B)$ и, следовательно, для отношений эквивалентности мы имеем $\mathfrak{n}_2 \leqslant \mathfrak{n}_1$ (I, 1.14).

Наоборот, пусть дано $\mathfrak{n}_2 \leqslant \mathfrak{n}_1$. Сопоставим каждому $\mathfrak{n}_2$-классу тот $\mathfrak{n}_1$-класс, который его содержит. Легко видеть, что мы получаем гомоморфизм ψ факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_2$ на факторполугруппу $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1$. Если ξ_1 и ξ_2 суть естественные гомоморфизмы $\mathfrak{A}$ на факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_2$, то мы, очевидно, имеем $\xi_1 = \psi\xi_2$. Но ξ_1 и ξ_2 отличаются от φ_1 и φ_2 множителями, являющимися изоморфизмами. Поэтому и для самих гомоморфизмов φ_1 и φ_2 мы получаем, что при некотором гомоморфизме ψ' имеет место $\varphi_1 = \psi'\varphi_2$, т. е. $\varphi_2 \sim \varphi_1(\mathfrak{p})$.

Оказалось, что отношение правой делимости между гомоморфизмами $\mathfrak{p}$ (1.12) индуцируется частичным упорядочением соответствующих эквивалентностей.

2.9. Пусть Ψ есть некоторое непустое множество двусторонне стабильных эквивалентностей полугруппы $\mathfrak{A}$. В полной структуре всех эквивалентностей в $\mathfrak{A}$ (I, 5.16) возьмем точную нижнюю границу $\mathfrak{f}$ множества Ψ (I, 5.15) и точную верхнюю границу $\mathfrak{l}$ (I, 5.16). Если для $A, B \in \mathfrak{A}$ имеет место $A \sim B(\mathfrak{f})$, то для любого $\mathfrak{n} \in \Psi$ имеет место $A \sim B(\mathfrak{n})$. Но $\mathfrak{n}$ двусторонне стабильна и потому при любом $X \in \mathfrak{A}$ $AX \sim BX(\mathfrak{n})$ и $XA \sim XB(\mathfrak{n})$. Поскольку последние соотношения справедливы при любом $\mathfrak{n} \in \Psi$, имеет место $AX \sim BX(\mathfrak{f})$ и $XA \sim XB(\mathfrak{f})$. Таким образом, эквивалентность $\mathfrak{f}$ сама оказалась двусторонне стабильной. Поскольку $\mathfrak{f}$ есть точная нижняя граница Ψ в множестве всех эквивалентностей, $\mathfrak{f}$ тем самым будет точной нижней границей Ψ в множестве всех двусторонне стабильных эквивалентностей.

Пусть теперь $A \sim B(\mathfrak{l})$. Тогда в $\mathfrak{A}$ найдутся такие $Z_1 = A$, $Z_2, \ldots, Z_{s+1} = B$, что $Z_i \sim Z_{i+1}(\mathfrak{n}_i)$, $\mathfrak{n}_i \in \Psi$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Так как все $\mathfrak{n}_i$ двусторонне стабильны, то при любом $X \in \mathfrak{A}$

$$AX = Z_1X, \quad BX = Z_{s+1}X, \quad Z_iX \sim Z_{i+1}X(\mathfrak{n}_i),$$
$$XA = XZ_1, \quad XB = XZ_{s+1}, \quad XZ_i \sim XZ_{i+1}(\mathfrak{n}_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда следует, что $AX \sim BX(\mathfrak{l})$, $XA \sim XB(\mathfrak{l})$ и эквивалентность $\mathfrak{l}$ оказывается двустороннее стабильной.

При этом $\mathfrak{l}$ есть точная верхняя граница для Ψ в множестве всех двусторонне стабильных эквивалентностей в $\mathfrak{A}$.

Из доказанного следует, что относительно частичной упорядоченности I, 5.14 *множество всех двусторонне стабильных эквивалентностей является полной структурой.*

2.10. Отметим, что иногда описание множества всех двусторонне стабильных разбиений полугруппы осуществляют путем выделения из нее такой совокупности отношений (так называемый базис), что всякое двусторонне стабильное отношение может быть получено как точная верхняя граница (сумма) некоторых отношений, принадлежащих этой совокупности.

Так поступает, например, А. Е. Либер [1] для описания двусторонне стабильных разбиений полугруппы $\mathfrak{Q}_\Omega$ всех взаимно однозначных частичных преобразований множества Ω (I, 4.5).

2.11. Пусть Φ есть некоторое непустое множество гомоморфизмов полугруппы $\mathfrak{A}$. Обозначим через Ψ множество двусторонне стабильных эквивалентностей, соответствующих этим гомоморфизмам (2.1). Пусть $\mathfrak{k}$ есть точная нижняя их граница и $\mathfrak{l}$ — точная верхняя их граница (2.9). Согласно 2.8, естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{k}$ будет наибольшим общим правым делителем гомоморфизмов из Φ, а естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{l}$ — их наименьшим общим правым кратным (1.15).

2.12. Пусть $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ есть два таких двусторонне стабильных отношения эквивалентности полугруппы $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{n}_1 \leqslant \mathfrak{n}_2$. В факторполугруппе $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1$ естественно определяется отношение эквивалентности $\mathfrak{n}_3 = \frac{\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1}$, согласно которому два $\mathfrak{n}_3$-класса — $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ эквивалентны тогда, когда элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ $X_1 \in \mathfrak{K}_1$ и $X_2 \in \mathfrak{K}$ эквивалентны относительно $\mathfrak{n}_2$ (очевидно, это не зависит от выбора представителей X_1 и X_2 в $\mathfrak{K}_1$ и в $\mathfrak{K}_2$). Легко видеть, что $\mathfrak{n}_3$ есть двусторонне стабильное отношение эквивалентности в $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1$ и что факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_2$ и $(\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1)\Big/\left(\frac{\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1}\right)$ изоморфны (изоморфизм определяется сопоставлением $\mathfrak{n}_2$-классу $\mathfrak{K}$ из $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_2$ $\left(\frac{\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1}\right)$-класса из $(\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_1)\Big/\left(\frac{\mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1}\right)$, который в качестве элементов содержит те $\mathfrak{n}_1$-классы $\mathfrak{K}'$, которые содержатся в $\mathfrak{K}$).

2.13. Пусть $\mathfrak{n}$ есть произвольное разбиение полугруппы $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{B}_{\xi},$$

обладающее тем свойством, что для любых двух ее компонент $\mathfrak{B}_\lambda$ и $\mathfrak{B}_\mu$ всегда найдется такая компонента $\mathfrak{B}_\nu$, что $\mathfrak{B}_\lambda \cdot \mathfrak{B}_\mu \subset \mathfrak{B}_\nu$.

Это разбиение можно рассматривать как эквивалентность в $\mathfrak{A}$ (I, 5.8). Если $A \sim B(\mathfrak{n})$, т. е. A и B оба содержатся в одной и той же компоненте $\mathfrak{B}_\lambda$ нашего разбиения, то при $X \in \mathfrak{B}_\mu$ мы имеем

$$AX \in \mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}_\mu \subset \mathfrak{B}_\nu, \quad BX \in \mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}_\mu \subset \mathfrak{B}_\nu,$$

т. е. $AX \sim BX(\mathfrak{n})$. Аналогично доказывается стабильность $\mathfrak{n}$ слева. Таким образом, $\mathfrak{n}$ оказывается двусторонне стабильной эквивалентностью, и множество компонент $\mathfrak{B}_\xi$ разбиения $\mathfrak{n}$ есть множество элементов факторполугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$. Это показывает, что предшествующие рассуждения можно было целиком провести на языке разбиений полугрупп, обладающих указанным выше свойством.

2.14. В группах описание того, как устроены произвольные двусторонне стабильные разбиения, не представляет труда. В любой книге по теории групп полно излагается вопрос о том, как устроены произвольные гомоморфизмы группы. В произвольных полугруппах соответствующий вопрос представляет значительно большие трудности и еще далек от полного разрешения. Только для отдельных частных классов полугрупп решена задача о полном описании структуры всех их двусторонне стабильных разбиений. При этом получение соответствующих результатов представляет значительные трудности. Ниже в § 3 и § 6 мы изложим некоторые из этих результатов.

Сейчас в качестве примера приведем конструкцию, рассмотренную Пирсом [1]. Пусть $\mathfrak{K}$ есть произвольное подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Элементы $A, B \in \mathfrak{A}$ эквивалентны в том случае, когда при любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ из $XAY \in \mathfrak{K}$ всегда следует $XBY \in \mathfrak{K}$.

Двусторонняя стабильность этого отношения проверяется без труда. Особый интерес представляет случай, когда $\mathfrak{K}$ является идеалом. Рассмотрение таких эквивалентностей для коммутативной полугруппы идемпотентов, сопряженной с дистрибутивной структурой $\mathfrak{L}$ (II, 4.3; II, 4.13), оказывается

полезным для изучения структурных гомоморфизмов структуры $\mathfrak{L}$ (Пирс [1]).

§ 3. Гомоморфизмы инверсных полугрупп

3.1. В этом параграфе мы рассмотрим гомоморфизмы инверсных полугрупп, т. е. тех полугрупп, определение и свойства которых были рассмотрены нами в § 7 второй главы. Значение этих полугрупп в связи с их ролью в теории частичных преобразований было рассмотрено нами в § 8 той же главы. Нам удастся получить ряд свойств гомоморфизмов инверсных полугрупп и дать полное описание устройства произвольных гомоморфизмов этих полугрупп. Основное свойство гомоморфизмов было получено впервые В. В. Вагнером [3]. Несколько позже подробное описание строения гомоморфизмов было опубликовано Престоном [1].

3.2. Как обычно, при рассмотрении инверсных полугрупп мы будем использовать знак черты для обозначения элемента, регулярно сопряженного с данным элементом (II, 7.2).

Лемма. *Пусть* φ *есть гомоморфизм инверсной полугруппы* $\mathfrak{A}$. *Если* $\varphi(A)\,(A\in\mathfrak{A})$ *есть идемпотент полугруппы* $\varphi(\mathfrak{A})$, *то в* $\mathfrak{A}$ *найдется такой идемпотент* I, *что* $\varphi(I)=\varphi(A)$.

Доказательство. Так как элемент $\varphi(A)$ идемпотентен, то

$$\varphi(A)\cdot\varphi(A\bar{A})=\varphi(A)\cdot\varphi(A)\cdot\varphi(\bar{A})=\varphi(A)\cdot\varphi(\bar{A})=\varphi(A\bar{A}).$$

Благодаря тому, что $A\bar{A}$ и $\bar{A}A$ идемпотенты инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ (III, 7.3), они перестановочны (II, 7.4). Поэтому, используя полученное равенство, получаем

$$\varphi(A\bar{A})\cdot\varphi(\bar{A}A)=\varphi(A)\cdot\varphi(A\bar{A})\cdot\varphi(\bar{A}A)=\varphi(A)\cdot\varphi(\bar{A}A)\cdot\varphi(A\bar{A})=$$
$$=\varphi(A\bar{A}A)\cdot\varphi(A\bar{A})=\varphi(A)\cdot\varphi(A\bar{A})=\varphi(A\bar{A}).$$

С другой стороны,

$$\varphi(A\bar{A})\cdot\varphi(\bar{A}A)=\varphi(\bar{A}A)\cdot\varphi(A\bar{A})=\varphi(\bar{A})\cdot\varphi(A)\cdot\varphi(A)\cdot\varphi(A)=$$
$$=\varphi(\bar{A})\cdot\varphi(A)\cdot\varphi(\bar{A})=\varphi(\bar{A}A\bar{A})=\varphi(\bar{A}).$$

Таким образом,

$$\varphi(A\bar{A})=\varphi(\bar{A}).$$

Отсюда для идемпотента $I=\bar{A}A$ получаем

$$\varphi(I)=\varphi(\bar{A}A)=\varphi(\bar{A})\cdot\varphi(A)=\varphi(A\bar{A})\cdot\varphi(A)=\varphi(A\bar{A}A)=\varphi(A).$$

3.3. При помощи полученной леммы легко убеждаемся в замкнутости класса инверсных полугрупп относительно операции взятия гомоморфизмов.

Теорема. *Если φ есть гомоморфизм инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$, то $\varphi(\mathfrak{A})$ также является инверсной полугруппой.*

Доказательство. Если I есть регулярная левая единица элемента A (II, 6.2), то, очевидно, $\varphi(I)$ будет регулярной левой единицей элемента $\varphi(A)$. Благодаря теореме II, 7.4 для доказательства того, что $\varphi(\mathfrak{A})$ есть инверсная полугруппа, достаточно показать, что любые два ее идемпотента коммутируют между собой.

Если λ_1 и λ_2 есть идемпотенты $\varphi(\mathfrak{A})$, то, согласно 3.2, в $\mathfrak{A}$ найдутся такие идемпотенты I_1 и I_2, что

$$\varphi(I_1)=\lambda_1, \quad \varphi(I_2)=\lambda_2.$$

Ввиду коммутативности I_1 и I_2 получаем

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\varphi(I_1)\cdot\varphi(I_2)=\varphi(I_1I_2)=\varphi(I_2I_1)=\varphi(I_2)\cdot\varphi(I_1)=\lambda_2\cdot\lambda_1.$$

3.4. ***Следствие.*** *Если φ есть гомоморфизм инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$, то для всякого $X\in\mathfrak{A}$ в инверсной полугруппе $\varphi(\mathfrak{A})$ имеет место*

$$\overline{\varphi(X)}=\varphi(\overline{X}).$$

Действительно,

$$\varphi(X)\cdot\varphi(\overline{X})\cdot\varphi(X)=\varphi(X\overline{X}X)=\varphi(X),$$
$$\varphi(\overline{X})\cdot\varphi(X)\cdot\varphi(\overline{X})=\varphi(\overline{X}X\overline{X})=\varphi(\overline{X}),$$

что и означает: $\varphi(\overline{X})=\overline{\varphi(X)}$.

3.5. ***Следствие.*** *Пусть φ есть гомоморфизм инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\lambda=\varphi(A)$ $(A\in\mathfrak{A})$ есть идемпотент полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Тогда совокупность $\mathfrak{B}_\lambda$ всех таких элементов B из $\mathfrak{A}$, что $\varphi(B)=\lambda$, является инверсной полугруппой.*

Доказательство. Если B, $B'\in\mathfrak{B}_\lambda$, то

$$\varphi(BB')=\varphi(B)\cdot\varphi(B')=\lambda\cdot\lambda=\lambda,$$

т. е. $BB'\in\mathfrak{B}_\lambda$. Таким образом, $\mathfrak{B}_\lambda$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$.

Благодаря 3.4

$$\varphi(\overline{B})=\overline{\varphi(B)}=\overline{\lambda}=\lambda,$$

т. е. $\overline{B} \in \mathfrak{B}_\lambda$. Элемент $B\overline{B} \in \mathfrak{B}_\lambda$ является регулярной левой единицей B. Так как к тому же идемпотенты из $\mathfrak{B}_\lambda$, как и вообще все идемпотенты из $\mathfrak{A}$, перестановочны между собой, то $\mathfrak{B}_\lambda$, согласно II, 7.4, является инверсной полугруппой.

3.6. ***Следствие.*** *Пусть φ есть гомоморфизм инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$. Если для некоторых $A, B \in \mathfrak{A}$*

$$\varphi(A\overline{A}) = \varphi(B\overline{B}) = \varphi(A\overline{B}),$$

то

$$\varphi(A) = \varphi(B), \qquad \varphi(\overline{A}) = \varphi(\overline{B}).$$

Доказательство. Так как

$$\varphi(A) \cdot \varphi(\overline{B}) \cdot \varphi(A) = \varphi(A\overline{B}) \cdot \varphi(A) = \\ = \varphi(A\overline{A}) \cdot \varphi(A) = \varphi(A\overline{A}\,\overline{A}) = \varphi(A),$$

$$\varphi(\overline{B}) \cdot \varphi(A) \cdot \varphi(\overline{B}) = \varphi(\overline{B}) \cdot \varphi(A\overline{B}) = \\ = \varphi(\overline{B}) \cdot \varphi(B\overline{B}) = \varphi(\overline{B}B\overline{B}) = \varphi(\overline{B}),$$

то в инверсной полугруппе $\varphi(\mathfrak{A})$

$$\overline{\varphi(A)} = \varphi(\overline{B}).$$

Отсюда благодаря 3.4 получаем

$$\varphi(\overline{A}) = \varphi(\overline{B}),$$

$$\varphi(A) = \overline{\overline{\varphi(A)}} = \overline{\varphi(\overline{A})} = \overline{\varphi(\overline{B})} = \overline{\overline{\varphi(B)}} = \varphi(B).$$

3.7. Пусть в инверсной полугруппе $\mathfrak{A}$ дана совокупность Σ некоторых ее инверсных подполугрупп. В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда Σ обладает нижеследующими свойствами.

(α). *Различные полугруппы из Σ попарно не пересекаются.*

(β). *Всякий идемпотент из $\mathfrak{A}$ содержится в одной из полугрупп, принадлежащих Σ.*

(γ). *Пусть $A\overline{A}$, $B\overline{B}$, $A\overline{B} \in \mathfrak{B}$ ($A, B \in \mathfrak{A}$), где $\mathfrak{B}$ принадлежит Σ. Если $A \in \mathfrak{B}$, то и $B \in \mathfrak{B}$.*

(δ). *Пусть $A\overline{A}$, $B\overline{B}$, $A\overline{B} \in \mathfrak{B}$ ($A, B \in \mathfrak{A}$), где $\mathfrak{B}$ принадлежит Σ. Тогда для всякой $\mathfrak{B}'$ из Σ в Σ найдется такая $\mathfrak{B}''$, что*

$$A\mathfrak{B}'\overline{A} \subset \mathfrak{B}'', \qquad A\mathfrak{B}'\overline{B} \subset \mathfrak{B}''.$$

3.8. Появление условий 3.7 в первую очередь объясняется следующим.

Пусть φ есть произвольный гомоморфизм инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ и Γ — множество идемпотентов полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Благодаря 3.5 гомоморфизму φ сопоставлена совокупность Σ инверсных подполугрупп $\mathfrak{B}_\lambda (\lambda \in \Gamma)$ полугруппы $\mathfrak{A}$, являющихся полными прообразами идемпотентов полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Оказывается, что эта совокупность Σ обладает всеми четырьмя свойствами, указанными в 3.7.

Свойство (α) справедливо, поскольку различные $\mathfrak{B}_\lambda$ из Σ являются полными прообразами различных идемпотентов из Γ: (β) справедливо, так как при гомоморфизме всякий идемпотент отображается на идемпотент; (γ) непосредственно следует из 3.6. Свойство (δ) требует несколько более подробного рассмотрения.

Пусть $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $A\bar{B} \in \mathfrak{B}_\lambda (\lambda \in \Gamma)$. Для $\mathfrak{B}_\mu (\mu \in \Gamma)$, используя 3.6, получаем

$$\varphi(A\mathfrak{B}_\mu \bar{A}) = \varphi(A) \cdot \varphi(\mathfrak{B}_\mu) \cdot \varphi(\bar{A}) = \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) = \nu,$$
$$\varphi(A\mathfrak{B}_\mu \bar{B}) = \varphi(A) \cdot \varphi(\mathfrak{B}_\mu) \cdot \varphi(\bar{B}) = \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) = \nu.$$

Благодаря перестановочности идемпотентов в $\varphi(\mathfrak{A})$ (3.3)

$$\nu^2 = \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) \cdot \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) =$$
$$= \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) = \varphi(A) \cdot \varphi(\bar{A}A) \cdot \mu \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) =$$
$$= \varphi(A\bar{A}A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) = \varphi(A) \cdot \mu \cdot \varphi(\bar{A}) = \nu.$$

Следовательно, $\nu \in \Gamma$ и потому

$$A\mathfrak{B}_\mu \bar{A} \subset \mathfrak{B}_\nu, \qquad A\mathfrak{B}_\mu \bar{B} \subset \mathfrak{B}_\nu.$$

3.9. Сопоставим гомоморфизму φ инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}$, согласно которому

$$A \sim B\,(\mathfrak{n}) \qquad (A, B \in \mathfrak{A})$$

имеет место тогда и только тогда, когда все три произведения $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $A\bar{B}$ содержатся в одной и той же подполугруппе $\mathfrak{B}_\lambda (\lambda \in \Gamma)$ из Σ (3.8).

Покажем, что $\mathfrak{n}$ есть эквивалентность, соответствующая гомоморфизму φ (2.1).

Если $\varphi(A)=\varphi(B)$ $(A, B\in\mathfrak{A})$, то благодаря 3.4 $\varphi(\bar{A})=\varphi(\overline{A})=\varphi(\overline{B})=\varphi(\bar{B})$, откуда легко следует:

$$\varphi(A\bar{A})=\varphi(B\bar{B})=\varphi(A\bar{B}),$$

т. е. $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $A\bar{B}$ лежат в одной и той же подполугруппе из Σ. Следовательно, $A\sim B\,(\mathfrak{n})$.

Если $A\sim B\,(\mathfrak{n})$, то $\varphi(A\bar{A})=\varphi(B\bar{B})=\varphi(A\bar{B})$ и, согласно 3.6, $\varphi(A)=\varphi(B)$.

3.10. Пусть теперь Σ есть произвольная совокупность инверсных подполугрупп инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$, обладающая четырьмя свойствами 3.7, (α), (β), (γ), (δ).

При помощи Σ определяем в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}_\Sigma$, согласно которому

$$A\sim B\,(\mathfrak{n}_\Sigma)\qquad (A, B\in\mathfrak{A})$$

имеет место тогда и только тогда, когда все три произведения $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $A\bar{B}$ содержатся в одной и той же подполугруппе из Σ.

Докажем, что *такое отношение* $\mathfrak{n}_\Sigma$ *является двусторонне стабильной эквивалентностью.*

Так как $A\bar{A}$ $(A\in\mathfrak{A})$ является идемпотентом, то, согласно 3.7, (β), $A\sim A$, т. е. $\mathfrak{n}_\Sigma$ рефлексивно.

Докажем симметричность $\mathfrak{n}_\Sigma$. Если $A\sim B\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$, т. е.

$$A\bar{A},\ B\bar{B},\ A\bar{B}\in\mathfrak{B}\qquad (\mathfrak{B}\in\Sigma),$$

то из того, что $\mathfrak{B}$ является инверсной подполугруппой $\mathfrak{A}$, следует, что элемент $\overline{A\bar{B}}=B\bar{A}$ также должен содержаться в $\mathfrak{B}$. Так как $A\bar{A}$ и $B\bar{B}$ содержатся в $\mathfrak{B}$, то $B\sim A\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$.

Докажем транзитивность $\mathfrak{n}_\Sigma$. Пусть

$$A\sim B\,(\mathfrak{n}_\Sigma),\qquad B\sim C\,(\mathfrak{n}_\Sigma).$$

Отсюда, по определению $\mathfrak{n}_\Sigma$, используя также доказанную симметричность, получаем, что при некотором $\mathfrak{B}'\in\Sigma$

$$A\bar{A},\ B\bar{B},\ C\bar{C},\ A\bar{B},\ B\bar{A},\ B\bar{C},\ C\bar{B}\in\mathfrak{B}'.$$

Из $B\bar{C}\cdot C\bar{B}\in\mathfrak{B}'$, благодаря 3.7, (δ), получаем

$$B\bar{C}C\bar{A}\in\mathfrak{B}',$$
$$A\bar{C}C\bar{B}=\overline{B\bar{C}C\bar{A}}\in\mathfrak{B}',$$
$$A\bar{C}C\bar{A}\in\mathfrak{B}'.$$

Из полученных включений благодаря 3.5, (γ), примененному к $B\bar{C}$ и $A\bar{C}$, получаем $AC\in\mathfrak{B}'$. Совместно с $A\bar{A}$, $C\bar{C}\in\mathfrak{B}'$, это и означает $A\sim C\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$.

Докажем двустороннюю стабильность $\mathfrak{n}_\Sigma$. Пусть $A\sim B\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$. Ввиду симметричности $\mathfrak{n}_\Sigma$ это означает, что для некоторого $\mathfrak{B}_1\in\Sigma$

$$A\bar{A},\ B\bar{B},\ A\bar{B},\ B\bar{A}\in\mathfrak{B}_1.$$

Пусть $X\in\mathfrak{A}$. Из условия 3.7, (δ) следует, что при некоторой $\mathfrak{B}_2\in\Sigma$ имеет место $X\mathfrak{B}_1\bar{X}\in\mathfrak{B}_2$. Благодаря этому

$$XA\cdot\overline{XA}=XA\bar{A}\bar{X}\in X\mathfrak{B}_1\bar{X}\subset\mathfrak{B}_2;$$
$$XB\cdot\overline{XB}=XB\bar{B}\bar{X}\in X\mathfrak{B}_1\bar{X}\subset\mathfrak{B}_2;$$
$$XA\cdot\overline{XB}=XA\bar{B}\bar{X}\in X\mathfrak{B}_1\bar{X}\subset\mathfrak{B}_2.$$

Но это и означает, что $XA\sim XB\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$.

Идемпотент $X\bar{X}$ содержится в некоторой $\mathfrak{B}_3\in\Sigma$ (3.7, (β)). Благодаря 3.7, (δ) при некоторых $\mathfrak{B}_4$ и $\mathfrak{B}_5$ из Σ мы имеем

$$A\mathfrak{B}_3\bar{A}\subset\mathfrak{B}_4,\quad A\mathfrak{B}_3\bar{B}\subset\mathfrak{B}_4,\quad B\mathfrak{B}_3\bar{B}\subset\mathfrak{B}_5,\quad B\mathfrak{B}_3\bar{A}\subset\mathfrak{B}_5.$$

$\mathfrak{B}_4$ содержит $AX\bar{X}\bar{B}$, а потому и $\overline{AX\bar{X}\bar{B}}=BX\bar{X}\bar{A}$. Но $BX\bar{X}\bar{A}\in\mathfrak{B}_5$. Поэтому, согласно 3.7, (α), $\mathfrak{B}_4=\mathfrak{B}_5$. Отсюда получаем

$$AX\cdot A\bar{X}=AX\bar{X}\bar{A}\in A\mathfrak{B}_3\bar{A}\subset\mathfrak{B}_5,$$
$$BX\cdot\overline{BX}=BX\bar{X}\bar{B}\in B\mathfrak{B}_3\bar{B}\subset\mathfrak{B}_5,$$
$$AX\cdot\overline{BX}=AX\bar{X}\bar{B}\in A\mathfrak{B}_3\bar{B}\subset\mathfrak{B}_5,$$

что означает: $AX\sim BX\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$.

3.11. Рассуждения, проведенные в 3.8 и 3.9, показывают, что эквивалентность, соответствующая произвольному гомоморфизму инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$, принадлежит к числу

отношений вида $\mathfrak{n}_\Sigma$, определенных в 3.10. Так как всякая двусторонне стабильная эквивалентность есть эквивалентность, соответствующая некоторому гомоморфизму (2.6), то отсюда следует, что *двусторонне стабильными эквивалентностями вида* $\mathfrak{n}_\Sigma$, *описанными в 3.10, исчерпываются все двусторонне стабильные эквивалентности инверсной полугруппы.* Каждая из них задается совокупностью инверсных подполугрупп, удовлетворяющей условиям 3.7, (α), (β), (γ), (δ).

Описав устройство произвольной двусторонне стабильной эквивалентности инверсной полугруппы, мы можем сказать, что нами описаны с точностью до несущественных различий (1.14) все гомоморфизмы инверсных полугрупп.

3.12. В связи с выявленной выше ролью отношений вида $\mathfrak{n}_\Sigma$, описанных в 3.10, остановимся дополнительно на некоторых их свойствах.

(ε). *Если* $A \sim B\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$ $(A, B \in \mathfrak{A})$ *и* $A \in \mathfrak{B}$ $(\mathfrak{B} \in \Sigma)$, *то* $B \in \mathfrak{B}$.

Действительно, из $A \in \mathfrak{B}$ следует $\bar{A} \in \mathfrak{B}$ и $A\bar{A} \in \mathfrak{B}$, а потому и $B\bar{B}$, $A\bar{B} \in \mathfrak{B}$. Отсюда, согласно 3.7, (γ), получаем $B \in \mathfrak{B}$.

(ζ). *Для* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \Sigma$ *всегда найдется такая* $\mathfrak{B}_3 \in \Sigma$, *что*

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3, \qquad \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_3.$$

Действительно, поскольку $\mathfrak{B}_1$ является инверсной полугруппой, она обладает идемпотентом I_1. Также и $\mathfrak{B}_2$ обладает идемпотентом I_2. В $\mathfrak{A}$ идемпотенты перестановочны. Поэтому $I_3 = I_1I_2 = I_2I_1$ также будет идемпотентом. I_3 благодаря 3.7, (β) содержится в некоторой подполугруппе $\mathfrak{B}_3 \in \Sigma$.

Произвольный B_1 из $\mathfrak{B}_1$ очевидно, эквивалентен с I_1: $B_1 \sim I_1\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$. Также $B_2 \sim I_2\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$. Ввиду двусторонней стабильности $\mathfrak{n}_\Sigma$ $B_1B_2 \sim I_1I_2\,(\mathfrak{n}_\Sigma)$. Но $I_1I_2 = I_3 \in \mathfrak{B}_3$ и потому на основании (ε) $B_1B_2 \in \mathfrak{B}_3$. Следовательно, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3$. Аналогично доказываем, что $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1$ содержится в $\mathfrak{B}_4$, содержащей I_2I_1. Но $I_2I_1 = I_1I_2 = I_3$. Следовательно, $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_3$ и $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_3$.

(η). *Объединение* $\mathfrak{N}$ *всех* $\mathfrak{B}$ *из* Σ *является инверсной подполугруппой* $\mathfrak{A}$.

Действительно, из (ζ) непосредственно вытекает, что произведение двух любых элементов из $\mathfrak{N}$ содержится в $\mathfrak{N}$. Каждый X из $\mathfrak{N}$ принадлежит некоторой $\mathfrak{B}$ из Σ и потому

обладает в $\mathfrak{B}$, а следовательно, и в $\mathfrak{N}$ левой регулярной единицей. Все идемпотенты $\mathfrak{N}$ перестановочны, так как они есть идемпотенты инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$. Следовательно, полугруппа $\mathfrak{N}$ инверсна (II, 7.4).

3.13. Поскольку эквивалентность π_Σ двусторонне стабильна, она есть эквивалентность, соответствующая некоторому гомоморфизму φ. Согласно 3.2, для любого идемпотента λ из $\varphi(\mathfrak{A})$ найдется такой идемпотент $I \in \mathfrak{A}$, что $\varphi(I) = \lambda$. Но I, согласно 3.7, (β), содержится в некоторой $\mathfrak{B} \in \Sigma$. Благодаря 3.12, (ε) $\mathfrak{B}$ есть полный прообраз идемпотента λ при гомоморфизме φ. Таким образом, $\mathfrak{B}$ есть $\mathfrak{B}_\lambda$ в обозначении 3.5. При этом всякая $\mathfrak{B}$ из Σ есть полный прообраз некоторого идемпотента, именно идемпотента $\varphi(I)$, где I есть некоторый идемпотент, содержащийся в $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ как инверсная полугруппа обязательно обладает идемпотентами). Таким образом, совокупность Σ есть совокупность всех полных прообразов идемпотентов полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$, где φ — гомоморфизм, которому соответствует эквивалентность π_Σ. Другими словами, *всякая совокупность Σ типа 3.7 является совокупностью типа 3.8, определяемой некоторым гомоморфизмом полугруппы $\mathfrak{A}$.*

Из сказанного, в частности, следует, что для двух различных совокупностей Σ_1 и Σ_2 гомоморфизмы φ_1 и φ_2, которым соответствуют эквивалентности π_{Σ_1} и π_{Σ_2}, существенно различны (1.14).

Ввиду 3.11 можно сказать, что *всякий гомоморфизм инверсной полугруппы с точностью до несущественных различий (1.14) вполне определяется заданием набора полных прообразов идемпотентов.*

3.14. Отметим, что задание совокупности Σ типа 3.7 может быть осуществлено при помощи задания инверсной подполугруппы $\mathfrak{N}$ (3.12, (η)) полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащей все идемпотенты $\mathfrak{A}$, и указания такого ее разбиения на инверсные подполугруппы, которые обладают свойствами 3.7, (γ), (δ) (такое разбиение — хотя бы тривиальное, т. е. состоящее из одной компоненты, — всегда имеется). Учитывая 3.12, (ζ), указанное разбиение $\mathfrak{N}$ образует то, что в следующей главе мы назовем коммутативной связкой.

3.15. К рассмотренному разбиению $\mathfrak{N}$ (3.14) может быть указан и иной подход. Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность

всех идемпотентов полугруппы $\mathfrak{A}$. Так как каждая $\mathfrak{B}$ из Σ (т. е. компонента в указанном разбиении полугруппы $\mathfrak{N}$) является инверсной полугруппой, то она обладает идемпотентами. В связи с этим разбиение $\mathfrak{N}$ на объединение всех $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B} \in \Sigma$) вызывает соответствующее разбиение $\mathfrak{H}$ на объединение всех $\mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}' = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{B} \neq \varnothing$. Это разбиение коммутативной полугруппы идемпотентов $\mathfrak{H}$ совместно с заданием полугруппы $\mathfrak{N}$ вполне определяет совокупность Σ. Действительно, произвольная $\mathfrak{B}$ из Σ, очевидно, есть не что иное, как множество всех таких элементов X из $\mathfrak{N}$, для которых $X\overline{X} \in \mathfrak{B}'$.

§ 4. Нормальные комплексы

4.1. В связи с понятиями, введенными в § 2, естественно возникает вопрос о том, какие подмножества полугруппы могут являться классами эквивалентных между собой элементов при некотором двусторонне стабильном отношении эквивалентности. Другими словами, когда подмножество является полным прообразом одного элемента при некотором гомоморфизме полугруппы. Для решения этого вопроса Е. С. Ляпиным [5] было введено следующее понятие.

Определение. *Непустое подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется нормальным комплексом, если при любых X и Y, являющихся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, и любых K, $K' \in \mathfrak{K}$ всегда* из $XKY \in \mathfrak{K}$ *следует* $XK'Y \in \mathfrak{K}$.

Отметим попутно, что А. И. Мальцевым [7] была обнаружена возможность обобщения этого понятия с последующим установлением его связи с теорией гомоморфизмов для общих алгебраических систем.

4.2. К числу нормальных комплексов, очевидно, принадлежат: сама полугруппа, всякий ее отдельный элемент, всякий двусторонний идеал полугруппы. Если подмножество $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ таково, что пересечения $\mathfrak{K}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{K}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}$ пусты (так называемый двусторонний антиидеал), то $\mathfrak{K}$, очевидно, является нормальным комплексом.

Непустое пересечение любого множества нормальных комплексов есть нормальный комплекс.

Если $\mathfrak{A}$ есть группа и $\mathfrak{N}$ ее нормальный делитель (т. е. такая подгруппа, что $X^{-1}NX \in \mathfrak{N}$ при любых $X \in \mathfrak{A}$ и $N \in \mathfrak{N}$),

то множество вида $\mathfrak{K} = A\mathfrak{N}$ (так называемый класс смежности по нормальному делителю) является нормальным комплексом. Действительно, пусть $K = AN_1$, $K' = AN_2$ ($N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$) и $K \in \mathfrak{K}$. Тогда

$$XK'Y = XAN_2Y = XAN_1Y \cdot Y^{-1}N_1^{-1}N_2Y \in XKY\mathfrak{N},$$

и потому из $XKY \in \mathfrak{K} = A\mathfrak{N}$ следует $XK'Y \in \mathfrak{K}$.

Без труда убеждаемся, что всякий нормальный комплекс $\mathfrak{K}$ группы устроен описанным образом. Выбрав в $\mathfrak{K}$ некоторый элемент $K_0 \in \mathfrak{K}$ обозначим $\mathfrak{N} = K_0^{-1}\mathfrak{K}$. Для произвольных $N_1 = K_0^{-1}K_1 \in \mathfrak{N}$, $N_2 = K_0^{-1}K_2 \in \mathfrak{N}$, $X \in \mathfrak{A}$ благодаря тому, что $(K_1K_0^{-1}K_0)$, $(K_0K_1^{-1}K_1)$, $(K_0X^{-1}K_0^{-1}K_0X) \in \mathfrak{K}$, используя свойства нормального комплекса, получаем

$$N_1N_2 = K_0^{-1}K_1K_0^{-1}K_2 = K_0^{-1} \cdot (K_1K_0^{-1}K_2) \in K_0^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{N},$$
$$N_1^{-1} = K_1^{-1}K_0 = K_0^{-1} \cdot (K_0K_1^{-1}K_0) \in K_0^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{N},$$
$$X^{-1}N_1X = K_0^{-1} \cdot (K_0X^{-1}K_0^{-1}K_1X) \in K_0^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{N}.$$

4.3. Пусть $\mathfrak{n}$ есть некоторое отношение в полугруппе $\mathfrak{A}$ и φ — такой гомоморфизм $\mathfrak{A}$, что из $A \sim B\,(\mathfrak{n})$ всегда следует $\varphi(A) = \varphi(B)$. Отношение $\mathfrak{n}_\varphi$ есть эквивалентность, соответствующая гомоморфизму φ (2.1). Очевидно, $\mathfrak{n}_\varphi \geqslant \mathfrak{n}$. Отсюда, согласно I, 5.23, следует, что для второго производного отношения $\mathfrak{n}''$ имеет место $\mathfrak{n}_\varphi \geqslant \mathfrak{n}''$. Отношение $\mathfrak{n}''$ является точной нижней границей всех двусторонне стабильных эквивалентностей, следующих за $\mathfrak{n}$. Если ξ есть гомоморфизм, которому соответствует эквивалентность $\mathfrak{n}''$, то, согласно 2.8, ξ есть правый делитель φ.

Из сказанного следует, что ξ, принадлежащий множеству гомоморфизмов, таких, что из $A \sim B\,(\mathfrak{n})$ всегда следует $\varphi(A) = \varphi(B)$, является наибольшим общим правым делителем этого множества.

4.4. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторое непустое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}_\mathfrak{K}$, полагая $A \sim B\,(\mathfrak{n}_\mathfrak{K})$, если $A = B$ или A и B оба принадлежат $\mathfrak{K}$. Отношение $\mathfrak{n}''_\mathfrak{K}$ есть точная нижняя граница двусторонне стабильных эквивалентностей, следующих за $\mathfrak{n}_\mathfrak{K}$ (I, 5.32). Согласно 4.3, гомоморфизм, которому соответствует $\mathfrak{n}''_\mathfrak{K}$, является наибольшим общим правым делителем для таких гомоморфизмов φ, у которых $\varphi(A) = \varphi(B)$ для любых A, $B \in \mathfrak{K}$.

4.5. Требование, чтобы подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ было полным прообразом некоторого элемента при каком-нибудь гомоморфизме $\mathfrak{A}$, благодаря 2.1 и 2.6 равносильно существованию в $\mathfrak{A}$ такой двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$, при которой $\mathfrak{K}$ является $\mathfrak{n}$-классом.

4.6. ***Теорема.*** *Для того чтобы подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ при каком-нибудь гомоморфизме $\mathfrak{A}$ являлось полным прообразом одного элемента, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ было нормальным комплексом (4.1).*

Доказательство. 1) Пусть при некотором гомоморфизме $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов, т. е. $\mathfrak{K}$ есть $\mathfrak{n}$-класс при некоторой двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$ (4.5). Если $XKY \in \mathfrak{K}$, где $K \in \mathfrak{K}$, а X и Y принадлежат $\mathfrak{A}$ или являются пустыми символами, то $XKY \sim XK'Y(\mathfrak{n}')$ (I, 5.20), а так как $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$ (I, 5.23), то $XK'Y \in \mathfrak{K}$.

2) Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$. По определению нормального комплекса, из $A \sim B(\mathfrak{n}'_{\mathfrak{K}})$ (где $\mathfrak{n}_{\mathfrak{K}}$ отношение, определенное в 4.4) и $A \in \mathfrak{K}$ следует $B \in \mathfrak{K}$. Поэтому и из $A \sim B(\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}})$ (I, 5.21) и $A \in \mathfrak{K}$ следует $B \in \mathfrak{K}$. Так как при этом все элементы из $\mathfrak{K}$ находятся между собой в отношении $\mathfrak{n}_{\mathfrak{K}}$, то $\mathfrak{K}$ оказывается $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}}$-классом для двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}}$ (I, 5.22, (θ)). Согласно 4.5, $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного элемента при некотором гомоморфизме.

4.7. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс полугруппы $\mathfrak{A}$. Обозначим через Ψ множество всех таких гомоморфизмов ψ полугруппы $\mathfrak{A}$, для которых $\mathfrak{K}$ является полным прообразом одного из элементов полугруппы $\psi(\mathfrak{A})$. Для отношения $\mathfrak{n}_{\mathfrak{K}}$ (4.4) естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}}$ (и вообще любой гомоморфизм, которому соответствует эквивалентность $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}}$), согласно 4.4, является наибольшим общим правым делителем Ψ. При этом он сам принадлежит Ψ.

Можно сказать, что этот гомоморфизм вызывает минимум отождествлений в $\mathfrak{A}$, необходимых для отождествления между собой всех элементов из $\mathfrak{K}$ (2.5).

4.8. Выяснив вопрос о полных прообразах произвольных элементов при гомоморфизме, особо остановимся на идемпотентах.

Если нормальный комплекс $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ является подполугруппой $\mathfrak{A}$, то при всяком гомоморфизме φ, при котором

все элементы $\mathfrak{K}$ отображаются в один элемент, этот элемент $\varphi(\mathfrak{K})$ является идемпотентом полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Действительно, $\varphi(\mathfrak{K})\cdot\varphi(\mathfrak{K})=\varphi(\mathfrak{K}\mathfrak{K})$, и так как $\mathfrak{K}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$, то $\varphi(\mathfrak{K})\cdot\varphi(\mathfrak{K})=\varphi(\mathfrak{K})$.

Если теперь $\mathfrak{K}$ такой нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, что при некотором гомоморфизме ψ $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз идемпотента полугруппы $\psi(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{K}$ является подполугруппой полугруппы $\mathfrak{A}$. Действительно,

$$\psi(\mathfrak{K})=\psi(\mathfrak{K})\cdot\psi(\mathfrak{K})=\psi(\mathfrak{K}\mathfrak{K})$$

и потому $\mathfrak{K}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{K}$.

4.9. Среди идемпотентов особую роль играют единица и нуль полугруппы. Чтобы выяснить, каковы их полные прообразы при гомоморфизмах, нам придется рассмотреть двусторонние идеалы и так называемые нормальные подполугруппы (или нормальные подсистемы), введенные Е. С. Ляпиным [2], [5].

Определение. *Непустое подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется нормальной подполугруппой, если при любых X и Y, являющихся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, и при любых K и K', принадлежащих $\mathfrak{K}$ или являющихся пустыми символами, из $XKY\in\mathfrak{K}$ всегда следует $XK'Y\in\mathfrak{K}$* (если только X, K', Y не являются одновременно пустыми символами).

Если $\mathfrak{A}$ есть группа, то ее нормальные подполугруппы называются нормальными делителями. Их многочисленные важные свойства подробно исследуются в теории групп.

4.10. Как непосредственно ясно нормальная подполугруппа является подполугруппой и нормальным комплексом. Однако следует иметь в виду, что подполугруппа, являющаяся нормальным комплексом, не всегда является нормальной подполугруппой. Если полугруппа обладает единицей, то ее нормальными подполугруппами будут те нормальные комплексы, которые содержат единицу.

Непустое пересечение любого множества нормальных подполугрупп есть нормальная подполугруппа.

4.11. ***Теорема.*** *Для того чтобы подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ при каком-нибудь гомоморфизме φ полугруппы $\mathfrak{A}$ являлось полным прообразом единицы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ являлось нормальной подполугруппой.*

Доказательство. 1) Если при гомоморфизме φ множество $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ является полным прообразом единицы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{K}$ является нормальным комплексом. Поэтому, если K и K' оба принадлежат $\mathfrak{K}$, то из $XKY \in \mathfrak{K}$ следует $XK'Y \in \mathfrak{K}$. Если K' есть пустой символ, а $K \in \mathfrak{K}$, т. е. $\varphi(K) = E_{\varphi(\mathfrak{A})}$, то

$$\varphi(XKY) = \varphi(X) \cdot \varphi(K) \cdot \varphi(Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(XY).$$

Поэтому если один из элементов XKY или XY принадлежит $\mathfrak{K}$, т. е. отображается на $E_{\varphi(\mathfrak{A})}$, то и второй будет принадлежать $\mathfrak{K}$.

2) Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальная подполугруппа $\mathfrak{A}$. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}$, полагая $A \sim B(\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}})$, если при некоторых X и Y, принадлежащих $\mathfrak{A}$ или являющихся пустыми символами, имеет место $A, B \in X\mathfrak{K}Y \cup XY$. Непосредственно из определений нормальной подполугруппы следует, что все элементы из $\mathfrak{K}$ находятся между собой в отношении $\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}$, а из $A \sim B(\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}})$ и $A \in \mathfrak{K}$ следует $B \in \mathfrak{K}$.

Очевидно, отношение $\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}$ симметрично, рефлексивно и двусторонне стабильно. Также, очевидно, что $\mathfrak{m}'_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}$ (I, 5.20). Поэтому из $A \sim B(\mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}})$ и $A \in \mathfrak{K}$ следует $B \in \mathfrak{K}$. Таким образом, $\mathfrak{K}$ оказывается $\mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}}$-классом. Так как, очевидно, при любых $A \in \mathfrak{A}$ и $K \in \mathfrak{K}$:

$$AK \sim A(\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}), \quad KA \sim A(\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}),$$

то при гомоморфизме φ, которому соответствует эквивалентность $\mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}}$, мы имеем

$$\varphi(A) \cdot \varphi(\mathfrak{K}) = \varphi(A), \quad \varphi(\mathfrak{K}) \cdot \varphi(A) = \varphi(A).$$

Следовательно, $\varphi(\mathfrak{K})$ является единицей $\varphi(\mathfrak{A})$, а $\mathfrak{K}$ — полным прообразом этой единицы.

4.12. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальная подполугруппа $\mathfrak{A}$. Пусть φ есть произвольный гомоморфизм, при котором все элементы из $\mathfrak{K}$ отображаются на единицу полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Если $A \sim B(\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}})$, где $\mathfrak{m}_{\mathfrak{K}}$ есть отношение, определенное во второй части доказательства теоремы 4.11, то, очевидно, $\varphi(A) = \varphi(B)$. Отсюда следует: гомоморфизм ξ, которому соответствует $\mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}}$, будет наибольшим общим правым делителем всех таких гомоморфизмов, при которых $\mathfrak{K}$ отображается на единицу.

Отношения $\mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}}$ (4.4), очевидно, связаны условием $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{K}} \leqslant \mathfrak{m}''_{\mathfrak{K}}$. При этом в отдельных случаях они могут не совпадать. Это означает, что для некоторых нормальных подполугрупп существуют такие гомоморфизмы, при которых все элементы отображаются на один и тот же элемент, то этот элемент не является единицей.

В качестве примера укажем коммутативную полугруппу $\mathfrak{A}$, состоящую из трех элементов A, B, O, у которой $A^2 = A$, $B^2 = B$ и $XY = O$ во всех остальных случаях.

Подмножество $\mathfrak{K}$, состоящее из одного элемента A, является нормальной подполугруппой. Изоморфизмы являются наибольшими общими правыми делителями гомоморфизмов, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного элемента. Вместе с тем при изоморфизме ψ $\psi(A)$, конечно, не является единицей $\psi(\mathfrak{A})$. Так как $AB = AO = O$, то при всяком гомоморфизме φ, при котором $\varphi(A)$ есть единица $\varphi(\mathfrak{A})$, должно иметь место $\varphi(B) = \varphi(O)$. Отсюда заключаем, что гомоморфизм χ полугруппы $\mathfrak{A}$ на свою подполугруппу $\{A, O\}$

$$\chi(A) = A,\ \chi(B) = O,\ \chi(O) = O$$

будет наибольшим общим правым делителем тех гомоморфизмов, при которых A есть полный прообраз единицы.

4.13. Так как всякая группа обладает единицей, то вопрос о гомоморфизмах полугруппы на группу связан со свойствами нормальных комплексов, являющихся прообразами единиц при гомоморфизмах. Этим вопросом занимались Дюбрейль [1], Леви [3], Е. С. Ляпин [2], [5], Л. М. Глускин [2], Столл [2].

Теорема. *Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает гомоморфизмом на группу $\mathfrak{G}$, то нормальная подполугруппа $\mathfrak{K}$, являющаяся полным прообразом $E_{\mathfrak{G}}$, при любом $A \in \mathfrak{A}$ обладает свойством:*

$$A\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing,\ \mathfrak{A}A \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing.$$

В свою очередь, для каждой нормальной подполугруппы $\mathfrak{K}$, обладающей указанным свойством, существуют такие гомоморфизмы φ полугруппы $\mathfrak{A}$ на группу, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы группы $\varphi(\mathfrak{A})$. При этом все группы $\varphi(\mathfrak{A})$ при всевозможных таких гомоморфизмах φ изоморфны между собой.

Доказательство. 1) Пусть φ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на группу $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз $E_{\mathfrak{G}}$. Элемент $\varphi(A)$ обладает в $\mathfrak{G}=\varphi(\mathfrak{A})$ обратным элементом: $\varphi(A')$ $(A'\in\mathfrak{A})$. Так как

$$\varphi(AA')=\varphi(A)\cdot\varphi(A')=E_{\mathfrak{G}},$$
$$\varphi(A'A)=\varphi(A')\cdot\varphi(A)=E_{\mathfrak{G}},$$

то $AA'\in\mathfrak{K}$ и $A'A\in\mathfrak{K}$, т. е.

$$AA'\in A\mathfrak{A}\cap\mathfrak{K},\ A'A\in\mathfrak{A}A\cap\mathfrak{K}.$$

2) Пусть нормальная подполугруппа $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ обладает указанным в формулировке теоремы свойством и φ есть произвольный гомоморфизм, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Пусть $\varphi(A)$ $(A\in\mathfrak{A})$ есть произвольный элемент полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Так как пересечение $A\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{K}$ непусто, то при некотором $A'\in\mathfrak{A}$

$$AA'=K\in\mathfrak{K}.$$

Это значит, что

$$\varphi(A)\cdot\varphi(A')=\varphi(K)=E_{\varphi(\mathfrak{A})},$$

т. е. $\varphi(A)$ обладает правым обратным относительно единицы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Согласно II, 2.18, отсюда следует, что $\varphi(\mathfrak{A})$ является группой.

Пусть φ и ψ два гомоморфизма $\mathfrak{A}$ на группы, при каждом из которых $\mathfrak{K}$ является полным прообразом единицы. Пусть для некоторых X, $Y\in\mathfrak{A}$ $\varphi(X)=\varphi(Y)$. Обозначим через $\varphi(Z)$ элемент, обратный к $\varphi(X)$ в группе $\varphi(\mathfrak{A})$. Так как

$$\varphi(XZ)=\varphi(X)\cdot\varphi(Z)=E_{\varphi(\mathfrak{A})},$$
$$\varphi(ZY)=\varphi(Z)\cdot\varphi(Y)=\varphi(Z)\cdot\varphi(X)=E_{\varphi(\mathfrak{A})},$$

то $XZ\in\mathfrak{K}$ и $ZY\in\mathfrak{K}$. Но $\psi(\mathfrak{K})=E_{\psi(\mathfrak{A})}$, поэтому

$$\psi(X)=\psi(X)\cdot\psi(ZY)=\psi(XZY)=\psi(XZ)\cdot\psi(Y)=\psi(Y).$$

Аналогично доказывается, что из $\psi(X')=\psi(Y')$ всегда следует $\varphi(X')=\varphi(Y')$. Отсюда, согласно 1.9, (ε), (ι), следует, что φ отличается от ψ на множитель, являющийся изоморфизмом, и, следовательно, группы $\varphi(\mathfrak{A})$ и $\psi(\mathfrak{A})$ изоморфны.

4.14. Если нормальная подполугруппа $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ такова, что существует гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на некоторую группу, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы, то наравне

с ним могут существовать и такие гомоморфизмы φ, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы $\varphi(\mathfrak{A})$, но $\varphi(\mathfrak{A})$ не является группой.

В качестве примера укажем коммутативную полугруппу, состоящую из пяти элементов с таблицей умножения:

	A	B	C	C^2	E
A	C^2	E	C^2	E	A
B	E	C	E	C	B
C	C^2	E	C^2	E	C
C^2	E	C	E	C	C^2
E	A	B	C	C^2	E

Подмножество $\mathfrak{K}$, состоящее из одного элемента E, являющегося единицей $\mathfrak{A}$, очевидно, является нормальной подполугруппой. Так как $\mathfrak{A}$ не является группой, то тождественный изоморфизм служит примером упомянутого выше гомоморфизма φ. Наравне с этим рассмотрим следующий гомоморфизм ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ на ее подполугруппу $\{C, C^2, E\}$:

$$\psi(A) = C;\ \psi(B) = C^2;\ \psi(C) = C;\ \psi(C^2) = C^2;\ \psi(E) = E.$$

Множество $\psi(\mathfrak{A}) = \{C, C^2, E\}$ является группой и E есть полный прообраз единицы этой группы.

4.15. Ту же роль, которую относительно единицы играют нормальные подполугруппы, относительно нуля играют двусторонние идеалы. Соответствующие так называемые идеальные гомоморфизмы постоянно рассматриваются при различных исследованиях полугрупп.

Пусть $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$. Отношение $\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ (4.4), как легко убедиться, совпадает с $\mathfrak{n}'_{\mathfrak{T}}$ и $\mathfrak{n}''_{\mathfrak{T}}$ (I, 5.20; I, 5.21). Его часто называют *идеальной эквивалентностью*, соответствующей данному двустороннему идеалу $\mathfrak{T}$.

Факторполугруппа $\mathfrak{A}$ по идеальной эквивалентности $\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ наравне с $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ часто обозначается через $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ или $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Ее называют *идеальной факторполугруппой*, соответствующей двустороннему идеалу $\mathfrak{T}$. Ее элементами являются все отдельные элементы $\mathfrak{A}$, не принадлежащие $\mathfrak{T}$, и сам идеал $\mathfrak{T}$, очевидно, являющийся нулем полугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$. Можно представить себе $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ как полугруппу, полученную из $\mathfrak{A}$ путем отождествления между собой всех элементов из идеала $\mathfrak{T}$.

4.16. Пусть $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{K}$ — некоторое подмножество $\mathfrak{A}$, такое, что оно или вовсе не содержит элементов из $\mathfrak{T}$, или содержит весь идеал $\mathfrak{T}$. Через $\mathfrak{A}'$ обозначим идеальную факторполугруппу $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ и через $\mathfrak{K}'$ — ее подмножество, состоящее из всех элементов $\mathfrak{K}$, не содержащихся в $\mathfrak{T}$ (такие элементы являются элементами и полугруппы $\mathfrak{A}'$), и из элемента $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}$ является одним из элементов полугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$), если $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{T}$. Легко убедиться в нижеследующем:

(α). Если $\mathfrak{K}$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{K}'$ есть подполугруппа $\mathfrak{A}'$.

(β). Если $\mathfrak{K}$ есть левый, правый или двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{K}'$ — левый, правый или двусторонний идеал $\mathfrak{A}'$.

(γ). Если $\mathfrak{K}$ — изолированная или вполне изолированная подполугруппа в $\mathfrak{A}$ (IV, 6.1), то $\mathfrak{K}'$ соответственно изолирована или вполне изолирована в $\mathfrak{A}'$.

(δ). Если $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{K}'$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}'$.

Нетрудно убедиться, что никаких других подполугрупп, идеалов и нормальных комплексов, кроме получаемых подобным образом из различных множеств $\mathfrak{K}$, факторполугруппа $\mathfrak{A}'$ не имеет.

4.17. При помощи понятия идеальной факторполугруппы можно определить идеальные факторы, рассмотренные нами в § 4 четвертой главы.

Пусть $\mathfrak{N}$ есть двустороннеидеальный слой полугруппы $\mathfrak{A}$ (IV, 3.3), не являющийся минимальным двусторонним идеалом. Согласно IV, 4.2, в $\mathfrak{A}$ найдутся такие двусторонние идеалы $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$, что

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T}_1 \setminus \mathfrak{T}_2.$$

$\mathfrak{T}_2$ является двусторонним идеалом и для $\mathfrak{T}_1$. Рассмотрим идеальную факторполугруппу $\mathfrak{T}_1/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}_2}$. Если $\mathfrak{N}$ сам не является

полугруппой, то непосредственно видно, что идеальный фактор $\mathfrak{N}^*$ будет не чем иным, как идеальной факторполугруппой $\mathfrak{T}_1/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}_2}$ (если отождествить элемент O^* фактора с элементом $\mathfrak{T}_2$ факторполугруппы $\mathfrak{T}_1/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}_2}$).

Если $\mathfrak{N}$ сам является полугруппой (что, очевидно, означает не что иное, как то, что $\mathfrak{T}_2$ вполне изолирован в $\mathfrak{T}_1$), то $\mathfrak{T}_1/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}_2}$, очевидно, представляет собой полугруппу $\mathfrak{N}$ с внешне присоединенным нулем (каковым является $\mathfrak{T}_2$). Отбросив этот внешне присоединенный нуль, мы получим идеальный фактор $\mathfrak{N}^*$.

При использовании такого подхода к идеальным факторам следует иметь в виду, что пара соседних двусторонних идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ определяется для данного слоя $\mathfrak{N}$, вообще говоря, не единственным образом. В то же время идеальный фактор $\mathfrak{N}^*$ вполне определен самим идеальным слоем $\mathfrak{N}$. Поэтому именно подход, употребленный в § 4 четвертой главы, сделал совершенно ясным смысл утверждения о том, что множества факторов двух главных двустороннеидеальных цепей одинаковы (IV, 4.11).

4.18. Если $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ можно в естественном смысле представлять себе как бы составленной из двух полугрупп $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$. Вопрос о том, как связаны между собой свойства этих двух полугрупп и самой полугруппы $\mathfrak{A}$ по аналогии со сходным вопросом в теории групп (относительно нормальных делителей) может быть назван проблемой идеальных расширений. Исследованию этого вопроса посвящена одна работа Клиффорда [8] и статья А. М. Кауфмана [3]. Мы в качестве иллюстрации рассмотрим свойство инверсности (II, 7.2).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{T}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$. Полугруппа $\mathfrak{A}$ будет инверсной тогда и только тогда, когда являются инверсными обе полугруппы $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ инверсны. Если $A \in \mathfrak{T}$, то благодаря тому, что $\mathfrak{T}$ инверсна, в $\mathfrak{T}$ найдется единственный регулярно сопряженный с A элемент. В то же время никакой элемент Z из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ не может быть регулярно сопряжен с A, так как

$$ZAZ \in \mathfrak{T}, \quad ZAZ \neq Z.$$

Если $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$, то благодаря тому, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ инверсна, в $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ найдется единственный элемент, регулярно сопря-

женный с A (элемент $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ есть нуль полугруппы и потому регулярно сопряжен только сам с собой). Что касается элементов из $\mathfrak{T}$, то ни один из них, как мы уже видели, не может быть регулярно сопряжен с $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$.

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ инверсна.

Для $T \in \mathfrak{T}$ в $\mathfrak{A}$ найдется единственный регулярно сопряженный с ним элемент. Этот элемент принадлежит $\mathfrak{T}$, так как никакой элемент из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ не может быть регулярно сопряжен с элементом из двустороннего идеала $\mathfrak{T}$. Следовательно, $\mathfrak{T}$ является инверсной полугруппой.

Для $Z \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$ в $\mathfrak{A}$ найдется единственный регулярно сопряженный с ним элемент, который должен принадлежать $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$. Этот элемент будет единственным регулярно сопряженным с Z в факторполугруппе $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$, так как нуль этой полугруппы $\mathfrak{T}$ регулярно сопряжен только сам с собой. Следовательно, $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ инверсна.

4.19. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на идеальную факторполугруппу $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{T}}$ часто называют *идеальным гомоморфизмом, соответствующим двустороннему идеалу* $\mathfrak{T}$. Очевидно, он является изоморфизмом (причем тождественным) в том и только в том случае, когда $\mathfrak{T}$ состоит из одного элемента. При этом следует напомнить, что один элемент составляет двусторонний идеал в том и только в том случае, когда он является нулем полугруппы.

4.20. То, что двусторонние идеалы являются нормальными комплексами, очевидно. Их особая роль определяется упомянутой выше связью с нулем гомоморфного образа.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{K}$ *есть подмножество полугруппы* $\mathfrak{A}$. *Для того чтобы существовал такой гомоморфизм* φ *полугруппы* $\mathfrak{A}$, *при котором* $\mathfrak{K}$ *есть полный прообраз нуля полугруппы* $\varphi(\mathfrak{A})$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{K}$ *был двусторонним идеалом* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Пусть при некотором гомоморфизме φ $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз нуля $O_{\varphi(\mathfrak{A})}$ полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$. Тогда для любых $A \in \mathfrak{A}$, $X \in \mathfrak{K}$

$$\varphi(AX) = \varphi(A) \cdot \varphi(X) = \varphi(A) \cdot O_{\varphi(\mathfrak{A})} = O_{\varphi(\mathfrak{A})};$$
$$\varphi(XA) = \varphi(X) \cdot \varphi(A) = O_{\varphi(\mathfrak{A})} \cdot \varphi(A) = O_{\varphi(\mathfrak{A})},$$

т. е. AX, $XA \in \mathfrak{K}$.

2) Если $\mathfrak{K}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то при естественном гомоморфизме $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{K}}$ (4.15) $\mathfrak{K}$, являющийся элементом

$\mathfrak{A}/n_{\mathfrak{K}}$, есть нуль этой полугруппы, причем полным прообразом этого нуля является множество всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$, входящих в $\mathfrak{K}$.

4.21. Следует отметить, что естественный гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ на идеальную факторполугруппу $\mathfrak{A}/n_{\mathfrak{T}}$, соответствующую двустороннему идеалу $\mathfrak{T}$, благодаря 4.15 является наибольшим общим правым делителем для всех гомоморфизмов, отображающих все элементы идеала $\mathfrak{T}$ в один и тот же элемент.

4.22. Пусть $\mathfrak{G}_0$ есть единичная группа, т. е. группа, состоящая из одного элемента. Очевидно, отображение произвольной полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}_0$ является гомоморфизмом. Такой гомоморфизм иногда называется аннулирующим. Всякая полугруппа обладает изоморфизмами. Эти, обязательно существующие у всякой полугруппы гомоморфизмы — аннулирующие и изоморфизмы, обычно называются тривиальными (иногда несобственными) гомоморфизмами. Прочие гомоморфизмы соответственно называются нетривиальными (или собственными). Существуют полугруппы, не имеющие иных гомоморфизмов, кроме тривиальных. Такие полугруппы часто называют простыми, иногда простыми в отношении гомоморфизмов.

К условию отсутствия нетривиальных гомоморфизмов в полугруппе, очевидно, можно подойти с точки зрения вопроса о нормальных комплексах. Из 4.6 непосредственно следует, что полугруппа не имеет нетривиальных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда она не имеет нетривиальных нормальных комплексов, т. е. не обладает иными нормальными комплексами, кроме себя самой и отдельных элементов. В частности, в этом случае полугруппа не должна иметь собственных ненулевых двусторонних идеалов.

К полугруппам, не имеющим нетривиальных нормальных комплексов, очевидно, принадлежат все полугруппы, состоящие из двух элементов.

4.23. Условие того, чтобы полугруппа с нулем не имела нетривиальных гомоморфизмов, было получено Л. М. Глускиным [3].

Теорема. *Пусть количество элементов полугруппы с нулем $\mathfrak{A}$ больше двух и $\mathfrak{A}$ не имеет собственных ненулевых двусторонних идеалов. Для того чтобы $\mathfrak{A}$ не имела иных нормальных комплексов, кроме самой $\mathfrak{A}$ и отдельных элементов, необходимо и достаточно, чтобы для*

любых $A, B \in \mathfrak{A}$ $(A \neq B)$ *всегда нашлись такие* $X, Y \in \mathfrak{A}$, *при которых одно из произведений* XAY *и* XBY *отлично от* $O_{\mathfrak{A}}$, *а другое равно* $O_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. 1) При любом $S \in \mathfrak{A}$ множество $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

Совокупность всех $S \in \mathfrak{A}$, таких, что $\mathfrak{A}S\mathfrak{A} = O_{\mathfrak{A}}$, очевидно, является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$. Если эта совокупность содержит элементы, отличные от $O_{\mathfrak{A}}$, то она должна совпадать с $\mathfrak{A}$, что означает, что $S_1S_2S_3 = O_{\mathfrak{A}}$ при любых $S_1, S_2, S_3 \in \mathfrak{A}$. В этом случае для любых $U, V \in \mathfrak{A}$ множество $\{UV, O_{\mathfrak{A}}\}$, очевидно, является собственным двусторонним идеалом. Следовательно, всегда $UV = O_{\mathfrak{A}}$. Но тогда $\{W, O_{\mathfrak{A}}\}$ при любом $W \neq O_{\mathfrak{A}}$ оказывается собственным ненулевым двусторонним идеалом.

Таким образом, $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}$ должно равняться $\mathfrak{A}$ при любом $S \in \mathfrak{A}$, $S \neq O_{\mathfrak{A}}$.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ не имеет нетривиальных нормальных комплексов. Для $A \in \mathfrak{A}$ $(A \neq O_{\mathfrak{A}})$ обозначим через $\mathfrak{K}$ совокупность всех таких элементов K, что $XKY = O_{\mathfrak{A}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $XAY = O_{\mathfrak{A}}$. $\mathfrak{K}$ непусто, так как $\mathfrak{K} \ni A$, и отлично от $\mathfrak{A}$, так как $O_{\mathfrak{A}} \overline{\in} \mathfrak{K}$. Последнее следует из того, что $XO_{\mathfrak{A}}Y = O_{\mathfrak{A}}$ имеет место при любых X, $Y \in \mathfrak{A}$, тогда как $\mathfrak{A}A\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и потому не при всех X, $Y \in \mathfrak{A}$ имеет место $XAY = O_{\mathfrak{A}}$.

$\mathfrak{K}$ является нормальным комплексом. Действительно, пусть $K_1, K_2, K_3 \in \mathfrak{K}$, а U и V — элементы из $\mathfrak{A}$ или пустые символы, причем $UK_1V = K_2$. Ввиду определения $\mathfrak{K}$ следующие условия для X, $Y \in \mathfrak{A}$ равносильны:

$$XAY = O_{\mathfrak{A}}, \quad XK_2Y = O_{\mathfrak{A}}, \quad XUK_1VY = O_{\mathfrak{A}},$$
$$XUAVY = O_{\mathfrak{A}}, \quad X(UK_3V)Y = O_{\mathfrak{A}},$$

что означает, что из $UK_1V \in \mathfrak{K}$ вытекает $UK_3V \in \mathfrak{K}$.

Благодаря сказанному выше $\mathfrak{K}$ должен состоять из одного элемента A. Следовательно, отличный от A элемент B в $\mathfrak{K}$ не входит. Это означает, что при некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$ имеет место или

$$XAY = O_{\mathfrak{A}}, \quad XBY \neq O_{\mathfrak{A}},$$

или

$$XAY \neq O_{\mathfrak{A}}, \quad XBY = O_{\mathfrak{A}}.$$

3) Пусть $\mathfrak{A}$ обладает указанными в формулировке теоремы свойствами и $\mathfrak{K}$ — некоторый нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, содержащий два различных элемента A и B. Пусть при некоторых $X, Y, Z \in \mathfrak{A}$

$$XAY = O_{\mathfrak{A}}, \quad XBY = Z \neq O_{\mathfrak{A}}.$$

Так как $\mathfrak{A}Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, то при некоторых $P, Q \in \mathfrak{A}$

$$PZQ = B, \quad PXBYQ = B.$$

Так как $B \in \mathfrak{K}$, то, согласно определению нормального комплекса, должно иметь место:

$$PXAYQ \in \mathfrak{K}.$$

Но $XAY = O_{\mathfrak{A}}$ и потому $O_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{K}$. Так как для всякого $S \in \mathfrak{A}$ имеем $SO_{\mathfrak{A}} = O_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{K}$, то при любом $K \in \mathfrak{K}$ получаем $SK \in \mathfrak{K}$. Оказывается, что $\mathfrak{K}$ есть левый идеал. Также доказывается, что $\mathfrak{K}$ есть правый идеал. Следовательно, $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$.

4.24. Если полугруппа с нулем, не имеющая нетривиальных гомоморфизмов, обладает минимальным левым идеалом и минимальным правым идеалом, то она должна являться вполне простой полугруппой с нулем (V, 4.1). Однако это необходимое условие для отсутствия нетривиальных гомоморфизмов не является достаточным. Вполне простые полугруппы могут обладать нетривиальными гомоморфизмами. Полное описание строения гомоморфизмов вполне простых полугрупп было осуществлено Л. М. Глускиным [6].

4.25. При помощи теоремы 4.23 легко выяснить, когда вполне простая полугруппа с нулем не имеет нетривиальных нормальных комплексов. Благодаря V, 5.4 можно ограничиться рассмотрением вполне простой полугруппы с нулем матричного типа: $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, P)$. Если группа $\mathfrak{G}$ ненулевых элементов полугруппы $\mathfrak{H}$ не является единичной, то для G, $G' \in \mathfrak{G}$ $(G \neq G')$, согласно правому умножению в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, P)$, при любых $S_1 = (X, \xi_1, \eta_1)$, $S_2 = (Y, \xi_2, \eta_2)$ оба произведения

$$S_1 \cdot (G, \xi_0, \eta_0) \cdot S_2, \quad S_1 \cdot (G', \xi_0, \eta_0) \cdot S_2$$

или одновременно равны $O_{\mathfrak{S}}$, или одновременно отличны от $O_{\mathfrak{S}}$. Следовательно, согласно 4.23, $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, P)$ обладает нетривиальными нормальными комплексами.

Пусть $\mathfrak{G}$ единична. Если матрица P обладает двумя одинаковыми строками: μ-й и ν-й, то для (G, ξ_0, μ) и

$(G, \xi_0, \nu)(G \in \mathfrak{G})$ мы опять, очевидно, имеем, что оба произведения

$$S_1 \cdot (G, \xi_0, \mu) \cdot S_2, \quad S_1 \cdot (G, \xi_0, \nu) \cdot S_2$$

или одновременно равны $O_{\mathfrak{S}}$, или одновременно отличны от $O_{\mathfrak{S}}$. Аналогично рассуждаем и в случае двух одинаковых столбцов.

Условие того, чтобы в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, P)$ группа $\mathfrak{G}$ была единичной, а P не имела ни двух одинаковых строк, ни двух одинаковых столбцов, не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}, P)$ не имела нетривиальных нормальных комплексов.

Действительно, используем 4.23. При соблюдении указанного условия для любых $(E_{\mathfrak{H}}, \lambda, \mu)$ и (H, λ', μ'), где $\lambda \neq \lambda'$ (аналогично рассуждаем при $\mu \neq \mu'$), найдутся такое $\zeta \in \Gamma'$, что $P_{\zeta\lambda} = E_{\mathfrak{H}}$, $P_{\zeta\lambda'} = O_{\mathfrak{H}}$, и такое $\nu \in \Gamma$, что $P_{\mu\nu} = E_{\mathfrak{H}}$. Поэтому

$$(E_{\mathfrak{H}}, \lambda, \zeta) \cdot (E_{\mathfrak{H}}, \lambda, \mu) \cdot (E_{\mathfrak{H}}, \nu, \mu) = (E_{\mathfrak{H}}, \lambda, \mu) \neq O_{\mathfrak{S}};$$
$$(E_{\mathfrak{H}}, \lambda, \zeta) \cdot (H, \lambda', \mu') \cdot (E_{\mathfrak{H}}, \nu, \mu) = (O_{\mathfrak{H}}, \lambda, \mu) = O_{\mathfrak{S}}.$$

4.26. Что касается вполне простой полугруппы без нуля, то, как нетрудно убедиться, используя результаты § 6 пятой главы, такая полугруппа всегда имеет нетривиальные нормальные комплексы, за исключением того случая, когда она является группой без нетривиальных нормальных делителей.

4.27. Коммутативная полугруппа $\mathfrak{A}$, не имеющая нетривиальных нормальных комплексов, не может обладать ненулевыми собственными идеалами (так как всякий ее идеал — двусторонний). Если она имеет более двух элементов, то, как было показано в первой части доказательства 4.23, для всякого $S \in \mathfrak{A}$ имеет место $\mathfrak{A}S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Следовательно, $S\mathfrak{A}$ не есть нуль $\mathfrak{A}$ и потому $S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Но тогда $\mathfrak{A}$ должна являться группой. Как доказывается в теории групп, коммутативная группа не имеет нетривиальных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда она циклическая и число ее элементов равно единице или простому числу.

§ 5. Продолжение гомоморфизмов

5.1. Если $\mathfrak{B}$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$, то всякий гомоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{A}$ очевидным образом индуцирует гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{B}$ на полугруппу $\varphi(\mathfrak{B})$, действие

которого на элементы из $\mathfrak{B}$ совпадает с действием гомоморфизма φ. Разумеется, вполне возможен случай, когда существенно различные (1.14) между собой гомоморфизмы полугруппы $\mathfrak{A}$ индуцируют в $\mathfrak{B}$ один и тот же гомоморфизм.

К этому же явлению можно подойти и с противоположной стороны. Гомоморфизм ψ полугруппы $\mathfrak{B}$ иногда может быть продолжен до гомоморфизма φ некоторой ее надполугруппы $\mathfrak{A}$, что означает, что ψ индуцирован гомоморфизмом φ. Однако, как мы покажем ниже на простом примере, это возможно не всегда.

В согласии со сказанным выше может также случиться, что гомоморфизм ψ может иметь несколько существенно различных продолжений. Интересны бывают соотношения между свойствами ψ и φ. Например, очевидно, что если φ есть изоморфизм, то и ψ обязательно является изоморфизмом. В то же время обратное заключение в общем случае несправедливо, нередко изоморфизмы полугруппы допускают свое продолжение на некоторую надполугруппу, представляющее собой гомоморфизм, не являющийся изоморфизмом.

5.2. Пусть гомоморфизмы φ_1 и φ_2 подполугруппы $\mathfrak{V}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ несущественно различаются между собой (1.14) и гомоморфизм φ_1 может быть продолжен до гомоморфизма ψ_1 всей полугруппы $\mathfrak{A}$. Тогда и гомоморфизм φ_2 допускает продолжение до гомоморфизма $\mathfrak{A}$. Действительно, в полугруппе $\psi_1(\mathfrak{A})$ заменим методом III, 1.8 все элементы, входящие в $\psi_1(\mathfrak{B}) = \varphi_1(\mathfrak{B})$ соответствующими элементами из $\varphi_2(\mathfrak{B})$ (ведь $\varphi_1(\mathfrak{B})$ и $\varphi_2(\mathfrak{B})$ изоморфны). Мы получим новую полугруппу $\mathfrak{A}'$, множество элементов которой состоит из $\varphi_2(\mathfrak{B})$ и из $\psi_1(\mathfrak{A}) \setminus \psi_1(\mathfrak{B})$. Определяем отображение ψ_2 полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, полагая $\psi_2(B) = \varphi_2(B)$ для $B \in \mathfrak{B}$ и $\psi_2(X) = \psi_1(X)$ для $X \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Вполне очевидно, что ψ_2 является гомоморфизмом. Этот гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ продолжает гомоморфизм φ_2 ее подполугруппы $\mathfrak{B}$.

Упомянем о том, что вопрос о продолжимости гомоморфизмов допускает естественную трактовку с точки зрения соотношений между двусторонне стабильными эквивалентностями в $\mathfrak{B}$ и в самой $\mathfrak{A}$.

5.3. Простой пример продолжимости дает надполугруппа $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, состоящая изо всех подмножеств полугруппы $\mathfrak{A}$. Очевидно, всякий гомоморфизм ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ продолжим до гомоморфизма φ ее надполугруппы $\mathfrak{T}$.

Для этого в качестве $\varphi(\mathfrak{T})$ берем полугруппу всех подмножеств полугруппы $\psi(\mathfrak{A})$ и для $\mathfrak{N} \in \mathfrak{T}$, где $\mathfrak{N} = \{A, B, \ldots\} \subset \mathfrak{A}$, полагаем $\varphi(\mathfrak{N}) = \{\psi(A), \psi(B), \ldots\} \subset \psi(\mathfrak{A})$.

Примером невозможности продолжения гомоморфизма служит бесконечная моногенная полугруппа $\mathfrak{A}_1 = [A_1]$ (III, 3.16), для которой отображение φ на произвольную конечную моногенную полугруппу $\mathfrak{A}_2 = [A_2]$

$$\varphi(A_1^k) = A_2^k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

как легко видеть, является гомоморфизмом. Если $\mathfrak{A}_2$ не есть группа, φ не продолжим на бесконечную циклическую группу $\mathfrak{A}_3 = [A_1, A_1^{-1}]$ (III, 3.17), являющуюся надполугруппой полугруппы $\mathfrak{A}_1$. Это следует из того, что всякий гомоморфный образ группы сам должен быть группой (1.2), тогда как конечная моногенная полугруппа, не являющаяся группой, очевидно, не является подполугруппой никакой группы.

5.4. Общего исследования вопросса о продолжениях гомоморфизмов еще не существует. Рассмотрим два частных случая, разобранных Л. М. Глускиным [5].

Пусть $\mathfrak{A}$ есть периодическая полугруппа (III, 4.10) и $\mathfrak{G}_I$ — одна из ее максимальных подгрупп (III, 4.10) с единицей I. Покажем, что произвольный гомоморфизм φ группы $\mathfrak{G}_I$ продолжим до гомоморфизма $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ совокупность таких элементов K из $\mathfrak{G}_I$, для которых $\varphi(K) = \varphi(I)$. $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс группы $\mathfrak{G}_I$, соответствующий гомоморфизму φ. Покажем, что $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс полугруппы $\mathfrak{A}$. Пусть для некоторых K_1, $K_2 \in \mathfrak{K}$ и X и Y, являющихся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами,

$$XK_1Y = K_2,$$

K_3 есть произвольный элемент из $\mathfrak{K}$. Обозначив через K_2^{-1} элемент, обратный K_2 относительно I в $\mathfrak{G}_I$, имеем

$$XI \cdot K_1YK_2^{-1} = XK_1YK_2^{-1} = K_2K_2^{-1} = I, \quad XI \cdot I = XI.$$

Отсюда, согласно III, 4.11, $XI \in \mathfrak{G}_I$. Аналогично убеждаемся, что $IY \in \mathfrak{G}_I$. Благодаря этому

$$XK_3Y = XI \cdot K_3 \cdot IY \in \mathfrak{G}_I$$

и

$$\varphi(XK_3Y) = \varphi(XI)\cdot\varphi(K_3)\cdot\varphi(IY) = \varphi(XI)\cdot\varphi(K_1)\cdot\varphi(IY) =$$
$$= \varphi(XIK_1IY) = \varphi(XK_1Y) = \varphi(K_2) = \varphi(I),$$

т. е. $XK_3Y \in \mathfrak{K}$.

Обозначим через ψ гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$, являющийся наибольшим общим правым делителем гомоморфизмов, у которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов. Гомоморфизм ψ индуцирует в $\mathfrak{G}_I$ гомоморфизм ψ'. Гомоморфизмы φ и ψ' группы $\mathfrak{G}_I$ таковы, что полные прообразы единицы при этих гомоморфизмах равны $\mathfrak{K}$. Согласно 4.13, отсюда следует, что $\varphi(\mathfrak{G}_I)$ и $\psi'(\mathfrak{G}_I)$ изоморфны. Поскольку ψ' продолжим до гомоморфизма ψ полугруппы $\mathfrak{A}$, отсюда, согласно 5.2, следует, что φ будет продолжим до гомоморфизма полугруппы $\mathfrak{A}$.

5.5. Пусть $\mathfrak{B}$ есть двусторонний идеал полугруппы $\mathfrak{A}$ и φ некоторый гомоморфизм $\mathfrak{B}$, такой, что в полугруппе $\varphi(\mathfrak{B})$ каждые два элемента имеют общую левую единицу и общую правую единицу. Покажем, что при этом условии φ продолжим до гомоморфизма полугруппы $\mathfrak{A}$.

Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $A \sim B\,(\mathfrak{n})$ $(A, B \in \mathfrak{A})$, если $A = B$ или $A, B \in \mathfrak{B}$ и $\varphi(A) = \varphi(B)$. Очевидно, $\mathfrak{n}$ является эквивалентностью. Докажем правую стабильность $\mathfrak{n}$. Пусть $B_1 \neq B_2$ $(B_1, B_2 \in \mathfrak{B})$, причем $B_1 \sim B_2\,(\mathfrak{n})$, т. е. $\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$. Так как $\mathfrak{B}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то при всяком $X \in \mathfrak{A}$ имеем: (B_1X), $(B_2X) \in \mathfrak{B}$. По условию, в $\mathfrak{B}$ должен найтись такой элемент $N \in \mathfrak{B}$, что

$$\varphi(B_1X)\cdot\varphi(N) = \varphi(B_1X), \quad \varphi(B_2X)\cdot\varphi(N) = \varphi(B_2X).$$

Благодаря этому получаем

$$\varphi(B_1X) = \varphi(B_1X)\cdot\varphi(N) = \varphi(B_1XN) = \varphi(B_1)\cdot\varphi(XN) =$$
$$= \varphi(B_2)\cdot\varphi(XN) = \varphi(B_2XN) = \varphi(B_2X)\cdot\varphi(N) = \varphi(B_2X),$$

т. е. $B_1X \sim B_2X\,(\mathfrak{n})$. Аналогично доказываем стабильность $\mathfrak{n}$ слева.

Очевидно, естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ индуцирует в $\mathfrak{B}$ гомоморфизм, отличающийся от φ лишь на множитель, являющийся изоморфизмом. Поскольку этот гомоморфизм продолжим до гомоморфизма всей полугруппы $\mathfrak{A}$, то и φ, согласно 5.2, продолжим до гомоморфизма $\mathfrak{A}$.

Отметим попутно, что, как легко видеть, естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ является наибольшим общим правым делителем гомоморфизмов $\mathfrak{A}$, продолжающих гомоморфизм φ.

В частности, из доказанного следует, что *если двусторонний идеал $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ обладает единицей, то всякий его гомоморфизм продолжим до гомоморфизма полугруппы $\mathfrak{A}$.*

5.6. Свойства продолжений тождественного изоморфизма могут быть использованы для абстрактной характеристики некоторых важных конкретных полугрупп. Рассмотрим абстрактную характеристику полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований произвольного множества Ω, полученную Е. С. Ляпиным [13] (иная абстрактная характеристика этой же полугруппы была получена А. И. Мальцевым [4]). Для этого нам понадобится следующее понятие.

Определение. *Пусть Ξ есть некоторый класс полугрупп. Говорят, что подполугруппа $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ плотно вложена в $\mathfrak{A}$ относительно Ξ, если выполнены следующие условия:*

1) *всякий гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на какую-либо полугруппу из Ξ, являющийся продолжением тождественного изоморфизма $\mathfrak{T}$, должен быть изоморфизмом;*

2) *для любой полугруппы $\mathfrak{A}'$ из Ξ, являющейся отличной от $\mathfrak{A}$ надполугруппой $\mathfrak{A}$, должен существовать не являющийся изоморфизмом гомоморфизм $\mathfrak{A}'$ на некоторую полугруппу из Ξ, который есть продолжение тождественного изоморфизма $\mathfrak{T}$.*

5.7. В полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований множества Ω выделим элементы U_α ($\alpha \in \Omega$), такие, что $U_\alpha \xi = \alpha$ для любого $\xi \in \Omega$. Их совокупность $\mathfrak{U}_\Omega$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{S}_\Omega$. Действительно, для любого $S \in \mathfrak{S}_\Omega$ при $S\alpha = \beta$ имеем

$$U_\alpha S\xi = U_\alpha(S\xi) = \alpha = U_\alpha \xi,$$
$$SU_\alpha \xi = S\alpha = U_\beta \xi$$

и, следовательно,

$$U_\alpha S = U_\alpha \in \mathfrak{U}_\Omega, \quad SU_\alpha = U_\beta \in \mathfrak{U}_\Omega.$$

Покажем, что идеал $\mathfrak{U}_\Omega$ плотно вложен в $\mathfrak{S}_\Omega$ относительно класса полугрупп, имеющих полугруппу $\mathfrak{U}_\Omega$ своим двусторонним идеалом.

Пусть φ есть гомоморфизм $\mathfrak{S}_\Omega$, не являющийся изоморфизмом. Для некоторых X, $Y \in \mathfrak{S}_\Omega$ имеем

$$\varphi(X) = \varphi(Y), \quad X \neq Y.$$

Так как $Y \neq X$, то при некотором $\alpha \in \Omega$ имеем

$$X\alpha = \beta, \quad Y\alpha = \gamma, \quad \beta \neq \gamma.$$

Благодаря тому, что

$$U_\beta = XU_\alpha, \quad U_\gamma = YU_\alpha,$$

мы имеем

$$\varphi(U_\beta) = \varphi(XU_\alpha) = \varphi(X) \cdot \varphi(U_\alpha) = \varphi(Y) \cdot \varphi(U_\alpha) = \\ = \varphi(YU_\alpha) = \varphi(U_\gamma).$$

Так как $U_\beta \neq U_\gamma$, то полученное равенство означает, что произвольный не являющийся изоморфизмом гомоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ не может быть продолжением тождественного изоморфизма полугруппы $\mathfrak{U}_\Omega$.

Пусть теперь $\mathfrak{S}'$ есть некоторая надполугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$, отличная от $\mathfrak{S}_\Omega$ и такая, что $\mathfrak{U}_\Omega$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{S}'$. Определим отображение ψ полугруппы $\mathfrak{S}'$ в $\mathfrak{S}_\Omega$. Для произвольного $X \in \mathfrak{S}'$ полагаем

$$\psi(X) = S_X, \quad S_X\alpha = (XU_\alpha)\alpha \qquad (\alpha \in \Omega).$$

Последнее выражение имеет смысл, так как произведение XU_α есть некоторый элемент из $\mathfrak{U}_\Omega$ (так как $\mathfrak{U}_\Omega$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{S}'_\Omega$).

Покажем, что отображение ψ является гомоморфизмом. Пусть X, $Y \in \mathfrak{S}'$. Так как $\mathfrak{U}_\Omega$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{S}'$, то для произвольного $\alpha \in \Omega$ найдутся такие β, $\gamma \in \Omega$, что

$$XU_\alpha = U_\beta, \quad YU_\beta = U_\gamma.$$

Мы имеем

$$S_X\alpha = (XU_\alpha)\alpha = U_\beta\alpha = \beta,$$

$$S_Y\beta = (YU_\beta)\beta = U_\gamma\beta = \gamma.$$

$$S_Y S_X\alpha = S_Y(XU_\alpha)\alpha = S_Y U_\beta\alpha = S_Y\beta = (YU_\beta)\beta = U_\gamma\beta = \gamma.$$

С другой стороны, для $Z = YX$

$$S_Z\alpha = ZU_\alpha\alpha = YXU_\alpha\alpha = YU_\beta\alpha = U_\gamma\alpha = \gamma.$$

Так как при произвольном $\alpha \in \Omega$ для преобразований S_Y, S_X, S_Z имеет место

$$S_Y S_X \alpha = S_Z \alpha,$$

то $S_Y S_X = S_Z$, т. е.

$$\psi(Y) \cdot \psi(X) = \psi(Z) = \psi(YX).$$

Гомоморфизм ψ индуцирует в $\mathfrak{S}_\Omega$ тождественный изоморфизм. Действительно, при произвольном $\alpha \in \Omega$ для $A \in \mathfrak{S}_\Omega$ мы получаем

$$\psi(A) = S_A, \quad S_A \alpha = (AU_\alpha)\alpha = A\alpha.$$

Следовательно.

$$\psi(A) = S_A = A.$$

Что касается самой полугруппы $\mathfrak{S}'$, то для нее ψ не является изоморфизмом. Действительно, для всякого $B \in \mathfrak{S}' \setminus \mathfrak{S}_\Omega$ мы имеем

$$\psi(B) = C \in \mathfrak{S}_\Omega.$$

Но, как было показано, $\psi(C) = C$. Следовательно,

$$\psi(B) = \psi(C), \qquad B \neq C.$$

Оказалось, что ψ есть гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{S}'$ на полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$, которая принадлежит рассматриваемому классу. При этом ψ не является изоморфизмом, но служит продолжением тождественного изоморфизма полугруппы $\mathfrak{U}_\Omega$.

5.8. Рассмотренная в 5.7 подполугруппа $\mathfrak{U}_\Omega$ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{S}_\Omega$ и такова, что в ней произведение двух любых элементов равно левому множителю. Отметим, что никакая полугруппа не может иметь двух различных двусторонних идеалов, обладающих таким свойством. Действительно, пересечение их должно было бы быть двусторонним идеалом каждого из них (IV, 1.9, (γ), (η)), но, очевидно, полугруппа, у которой произведение двух элементов всегда равно левому множителю, не имеет собственных двусторонних идеалов.

5.9. Выведенное в 5.7 свойство полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ может быть использовано для получения ее абстрактной характеристики.

Теорема. *Для того чтобы полугруппа $\mathfrak{A}$ была изоморфна полугруппе всех преобразований $\mathfrak{S}_\Omega$ множества Ω,*

необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ *содержала двусторонний идеал* $\mathfrak{T}$, *обладающий следующими свойствами*:

(α). $\mathfrak{T}$ *равномощен с* Ω;

(β). *в* $\mathfrak{T}$ *произведение двух любых элементов равно левому множителю*;

(γ). $\mathfrak{T}$ *плотно вложен в* $\mathfrak{A}$ *относительно класса полугрупп, содержащих* $\mathfrak{T}$ *в качестве двустороннего идеала.*

Доказательство. 1) Полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ обладает двусторонним идеалом $\mathfrak{U}_\Omega$, обладающим указанными в формулировке теоремы свойствами (α), (β), (γ) (5.7). Следовательно, и всякая полугруппа, изоморфная $\mathfrak{S}_\Omega$, будет обладать таким двусторонним идеалом.

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ содержит двусторонний идеал $\mathfrak{T}$, обладающий указанными в формулировке теоремы свойствами (α), (β), (γ). Будучи равномощна с полугруппой $\mathfrak{U}_\Omega$, полугруппа $\mathfrak{T}$, очевидно, изоморфна с ней, поскольку в обоих полугруппах произведение двух любых элементов всегда равно левому множителю. Поэтому в полугруппе $\mathfrak{A}$ можно естественным образом заменить элементы из $\mathfrak{T}$ соответствующими им при некотором изоморфизме элементами $\mathfrak{U}_\Omega$ (III, 1.8). В результате этого мы получим новую полугруппу $\mathfrak{A}'$, изоморфную полугруппе $\mathfrak{A}$ и такую, что $\mathfrak{U}_\Omega$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}'$, причем, очевидно, $\mathfrak{U}_\Omega$ плотно вложен в $\mathfrak{A}'$ относительно класса полугрупп, содержащих $\mathfrak{U}_\Omega$ в качестве двустороннего идеала.

Следующим образом сопоставим каждому $A \in \mathfrak{A}'$ преобразование $\bar{A}$ множества Ω. Если $AU_\alpha = U_\beta$, то полагаем

$$\bar{A}\alpha = \beta.$$

Отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{S}_\Omega$, сопоставляющее каждому A преобразование $\bar{A}$, является гомоморфизмом. Действительно, пусть для $A, B \in \mathfrak{A}'$ и $\alpha \in \Omega$

$$BU_\alpha = U_\beta, \quad AU_\beta = U_\gamma,$$
$$ABU_\alpha = AU_\beta = U_\gamma.$$

Тогда

$$(\overline{AB})\alpha = \gamma, \quad \bar{B}\alpha = \beta, \quad \bar{A}\beta = \gamma,$$
$$(\overline{AB})\alpha = \bar{A}\bar{B}\alpha,$$

т. е. $(\overline{AB}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$ и потому

$$\varphi(AB) = (\overline{AB}) = \bar{A} \cdot \bar{B} = \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

Гомоморфизм φ индуцирует тождественный изоморфизм $\mathfrak{U}_\Omega$. Действительно, для произвольных $U_\xi \in \mathfrak{U}_\Omega$ и $\alpha \in \Omega$ мы имеем

$$U_\xi U_\alpha = U_\xi, \quad \varphi(U_\xi) = \bar{U}_\xi, \quad \bar{U}_\xi \alpha = \xi, \quad \bar{U}_\xi = U_\xi.$$

Так как $\mathfrak{U}_\Omega$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{S}_\Omega$, то $\mathfrak{U}_\Omega$ является двусторонним идеалом и для $\varphi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{S}_\Omega$. Таким образом, φ есть гомоморфизм, являющийся продолжением тождественного изоморфизма $\mathfrak{U}_\Omega$ на полугруппу, принадлежащую к классу полугрупп, содержащих $\mathfrak{U}_\Omega$ в качестве двустороннего идеала. Отсюда следует, что φ должен быть изоморфизмом. Так как $\mathfrak{U}_\Omega$ плотно вложен в $\mathfrak{A}'$ относительно класса полугрупп, содержащих $\mathfrak{U}_\Omega$ в качестве двустороннего идеала, то $\mathfrak{U}_\Omega$ будет плотно вложенным относительно того же класса и в $\varphi(\mathfrak{A}')$ (так как φ изоморфизм). Но одновременно $\mathfrak{U}_\Omega$ плотно вложен относительно того же класса и в $\mathfrak{S}_\Omega$. Так как $\varphi(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{S}_\Omega$, то, как непосредственно следует из определения, это возможно лишь при $\varphi(\mathfrak{A}') = \mathfrak{S}_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{S}_\Omega$ оказалась изоморфной с $\mathfrak{A}'$, а поэтому и с $\mathfrak{A}$.

5.10. Отметим, что сходным образом может быть найдена абстрактная характеристика и для некоторых других важных полугрупп. Например, это было сделано для полугруппы всех взаимно однозначных частичных отображений множества (Е. С. Ляпин [13]) и для полугруппы всех бинарных отношений множества (К. А. Зарецкий [1]). В обоих случаях полугруппы, изоморфные с данной полугруппой, характеризуются наличием двустороннего идеала определенного строения, плотно вложенного в полугруппу относительно класса всех полугрупп, содержащих его в качестве двустороннего идеала.

Как показал Л. М. Глускин [9], в полугруппе всех квадратных матриц одного и того же порядка над произвольным телом совокупность всех матриц ранга один и нуль образует двусторонний идеал, плотно вложенный в полугруппу относительно класса всех полугрупп, содержащих его в качестве двустороннего идеала. Наличие в некоторой полугруппе идеала, изоморфного с этим идеалом и обладающего указанными свойствами, достаточно для изоморфизма с упомянутой матричной полугруппой. В связи с этим упомянем, что ранее Л. М. Глускиным [1] была найдена также и иная абстрактная характеристика полугруппы квадратных матриц.

§ 6. Некоторые частные виды гомоморфизмов

6.1. Если в теории групп задание гомоморфизмов групп при помощи их нормальных делителей является предельно ясным и полностью описывает каждый гомоморфизм с точностью до умножения на изоморфизм, то в общей теории полугрупп дело обстоит во много раз сложнее и еще очень далеко до полного выяснения. В связи с этим значительное внимание уделяется рассмотрению тех или иных частных видов гомоморфизмов. К этому же направлению относится и изучение двусторонне стабильных эквивалентностей, являющееся лишь иным подходом к тому же самому вопросу. Ниже мы приведем некоторые из результатов таких исследований.

6.2. Для рассмотрения гомоморфизмов на коммутативные полугруппы определим следующее отношение $\mathfrak{f}$ в произвольной полугруппе $\mathfrak{A}$. Полагаем $X \sim Y(\mathfrak{f})$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы U и V, что $X = UV$, $Y = VU$.

Если $\mathfrak{n}$ есть такая произвольная двусторонне стабильная эквивалентность, что полугруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ коммутативна, то, очевидно, $\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{n}$ (I, 5.14). Обратно, для всякой двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$, такой, что $\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{n}$, полугруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$, очевидно, коммутативна. Благодаря I, 5.23 отсюда следует, что второе производное отношение $\mathfrak{f}''$ (I, 5.21) будет точной нижней границей для всех двусторонне стабильных эквивалентностей, соответствующих гомоморфизмам $\mathfrak{A}$ на коммутативные полугруппы. Таким образом, $\mathfrak{f}''$ есть наиболее дробное из разбиений $\mathfrak{A}$, соответствующих гомоморфизмам $\mathfrak{A}$ на коммутативные полугруппы. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{f}''$ есть наибольший общий правый делитель множества всех гомоморфизмов $\mathfrak{A}$ на коммутативные полугруппы (1.15). При этом он сам принадлежит этому множеству.

В случае, когда $\mathfrak{A}$ является группой, разбиение $\mathfrak{f}''$ является не чем иным, как разложением $\mathfrak{A}$ по коммутанту. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{f}''$ есть естественный гомоморфизм группы $\mathfrak{A}$ на ее факторгруппу по коммутанту.

6.3. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{l}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{l})$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент Z, что $ZX = ZY$. Легко убедиться, что для двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$ полугруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ будет обладать

свойством сокращения слева тогда и только тогда, когда $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{l}$. В множестве таких эквивалентностей $\mathfrak{l}''$ будет точной нижней границей, причем сама принадлежит этому множеству. Отсюда способом, аналогичным 6.2, можно описать роль разбиения $\mathfrak{l}''$ и естественного гомоморфизма $\mathfrak{A}/\mathfrak{l}''$ для гомоморфизмов $\mathfrak{A}$ на полугруппы с левым сокращением.

Аналогично определяется отношение $\mathfrak{r}$, связанное с гомоморфизмами $\mathfrak{A}$ на полугруппы с правым сокращением.

Отношение $\mathfrak{m}$, являющееся точной верхней границей для отношений $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{r}$, как легко видеть, таково, что $\mathfrak{m}''$ есть точная нижняя граница в множестве таких двусторонне стабильных эквивалентностей $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}''$ есть наибольший общий правый делитель множества всех гомоморфизмов на полугруппы с двусторонним сокращением.

6.4. Отношение $\mathfrak{l}$, определенное в 6.3, обладает следующим свойством. Если $SX \sim SY\,(\mathfrak{l})$, то $X \sim Y\,(\mathfrak{l})$ $(X, Y, S \in \mathfrak{A})$. Действительно, в этом случае мы при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ имеем $ZSX = ZSY$, откуда следует $X \sim Y\,(\mathfrak{l})$. Изучению различных отношений, обладающих указанным свойством, так же как и свойством, симметричным для сокращения справа, уделено значительное внимание в работах Дюбрейля [1], [3], [4], [5]. Интерес к этим свойствам объясняется тем, что для двусторонне стабильной эквивалентности $\mathfrak{n}$ полугруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ будет тогда и только тогда полугруппой с левым сокращением, когда из $SX \sim SY\,(\mathfrak{n})$ всегда следует $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$ $(X, Y, S \in \mathfrak{A})$. Действительно, пусть $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ есть полугруппа с левым сокращением и ψ естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\mathfrak{n}$. Из $SX \sim SY\,(\mathfrak{n})$ следует $\psi(S) \cdot \psi(X) = \psi(S) \cdot \psi(Y)$, а потому $\psi(X) = \psi(Y)$, т. е. $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$. С другой стороны, при соблюдении указанного свойства из $\psi(S) \cdot \psi(X) = \psi(S) \cdot \psi(Y)$ следует $\psi(SX) = \psi(SY)$, т. е. $SX \sim SY\,(\mathfrak{n})$, а потому $X \sim Y\,(\mathfrak{n})$, т. е. $\psi(X) = \psi(Y)$. Аналогично обстоит дело с вопросом о сокращении справа.

6.5. Важным отношением в полугруппах является отношение регулярной сопряженности (II, 6.6). В общем случае оно не является двусторонне стабильным. Однако в полугруппах идемпотентов, как это следует из исследований Мак-Лина [1], двусторонняя стабильность этого отношения имеет место. К этому результату удобно подойти путем рас-

смотрения следующих двух отношений, которые интересны и сами по себе.

Для элементов X и Y полугруппы $\mathfrak{A}$ полагаем

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}_1),$$

если $$XY = Y, \quad YX = X.$$

Симметрично определяем отношение $\mathfrak{n}_2$

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}_2),$$

если $$XY = X, \quad YX = Y.$$

Эти отношения, очевидно, симметричны. Если

$$X_1X_2 = X_2;\ X_2X_1 = X_1,\ X_2X_3 = X_3;\ X_3X_2 = X_2\ (X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{A}),$$

то

$$X_1X_3 = X_1X_2X_3 = X_2X_3 = X_3, \quad X_3X_1 = X_3X_2X_1 = X_2X_1 = X_1,$$

что означает транзитивность отношения $\mathfrak{n}_1$. Аналогично доказывается транзитивность $\mathfrak{n}_2$.

6.6. В общем случае указанные отношения эквивалентности $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ не обязаны быть стабильными ни слева, ни справа. В качестве примера рассмотрим полугруппу $\mathfrak{A}$, элементами которой являются пары натуральных чисел, а действие производится по правилу

$$(n_1, m_1) \cdot (n_2, m_2) = (n_1 + n_2, m_2).$$

Ассоциативность такого действия очевидна.

В этой полугруппе мы имеем

$$(0, m_1) \sim (0, m_2)\,(n_1).$$

В то же время

$$(1, 0) \cdot (0, m_1) = (1, m_1),\ (1, 0) \cdot (0, m_2) = (1, m_2);$$
$$(1, m_1) \cdot (1, m_2) = (2, m_2) \neq (1, m_2);$$
$$(0, m_1) \cdot (1, 0) = (1, 0),\ (0, m_2) \cdot (1, 0) = (1, 0);$$
$$(1, 0) \cdot (1, 0) = (2, 0) \neq (1, 0),$$

т. е.

$$(1, 0) \cdot (0, m_1) \not\sim (1, 0) \cdot (0, m_2)\,(n_1);$$
$$(0, m_1) \cdot (1, 0) \not\sim (0, m_2) \cdot (1,0)\,(n_1).$$

6.7. Если все элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ идемпотентны, то отношения $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$, очевидно, рефлексивны и потому являются эквивалентностями. При этом $\mathfrak{n}_1$ оказывается стабильным слева, а $\mathfrak{n}_2$ — справа. Действительно, если $X \sim Y\,(\mathfrak{n}_1)$, то при любом $Z \in \mathfrak{A}$

$$(ZX)(ZY) = (ZX)(Z \cdot XY) = (ZX)(ZX)Y = ZXY = ZY.$$

Аналогично доказываем и второе из равенств, означающих, что $ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n}_1)$.

Рассуждения для $\mathfrak{n}_2$ аналогичны.

6.8. Как мы уже упомянули в полугруппах идемпотентов, отношения $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ могут быть использованы для изучения отношения регулярной сопряженности.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа идемпотентов. Определяем в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}_3$, полагая $X \sim Y\,(\mathfrak{n}_3)$ тогда и только тогда, когда X и Y есть регулярно сопряженные элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ (II, 6.6)

(α). *Если*

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}_1), \quad Y \sim Z\,(\mathfrak{n}_2),$$

то

$$X \sim Z\,(\mathfrak{n}_3).$$

Действительно, благодаря тому, что $\mathfrak{n}_1$ стабильно слева, а $\mathfrak{n}_2$ стабильно справа,

$$ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n}_1), \quad YX \sim ZX\,(\mathfrak{n}_2).$$

Но $ZY = Z$, а $YX = X$ и потому

$$ZXZ = ZX \cdot Z = ZX \cdot ZY = ZY = Z.$$

Аналогично показываем, что $XZX = X$.

(β). *Если* $X \sim Y\,(\mathfrak{n}_1)$ *или* $X \sim Y\,(\mathfrak{n}_2)$, *то при любом* $Z \in \mathfrak{A}$

$$X \sim Y\,(\mathfrak{n}_3), \quad ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n}_3), \quad XZ \sim YZ\,(\mathfrak{n}_3).$$

Действительно, пусть $X \sim Y\,(\mathfrak{n}_1)$. Тогда

$$XYX = X \cdot YX = X \cdot X = X, \quad YXY = YY = Y;$$

$$(ZX) \cdot (ZY) \cdot (ZX) = ZX \cdot ZY \cdot ZYX = ZX \cdot (ZY)^2X =$$
$$= ZXZYX = ZXZX = ZX.$$

Аналогично доказываются: второе равенство, необходимое для доказательства того, что ZX и ZY регулярно сопряжены;

регулярная сопряженность XZ и YZ; соответствующие равенства для случая, когда $X \sim Y(\mathfrak{n}_2)$.

(γ). *Если* $X \sim Y(\mathfrak{n}_3)$, *то*

$$X \sim XY(\mathfrak{n}_1), \quad X \sim YX(\mathfrak{n}_2).$$

Действительно,

$$X \cdot XY = X^2Y = XY, \quad XY \cdot X = XYX = X;$$
$$X \cdot YX = X, \quad YX \cdot X = YX.$$

(δ). $XY \sim YX(\mathfrak{n}_3)$.

Действительно:

$$(XY)(YX)(XY) = XY^2X^2Y = XY \cdot XY = XY,$$
$$(YX)(XY)(YX) = YX^2Y^2X = YX \cdot YX = YX.$$

6.9. ***Теорема.*** *Если все элементы* $\mathfrak{A}$ *идемпотентны, то* $\mathfrak{n}_3$ *является двусторонне стабильным отношением эквивалентности в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) Отношение $\mathfrak{n}_3$ симметрично. Рефлексивность $\mathfrak{n}_3$ следует из того, что все элементы идемпотентны. Докажем транзитивность $\mathfrak{n}_3$. Пусть

$$X \sim Y(\mathfrak{n}_3), \quad Y \sim Z(\mathfrak{n}_3).$$

Тогда по 6.8, (γ)

$$Y \sim YX(\mathfrak{n}_1), \quad Y \sim YZ(\mathfrak{n}_1),$$
$$Y \sim XY(\mathfrak{n}_2), \quad Y \sim ZY(\mathfrak{n}_2).$$

Так как $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ симметричны и транзитивны, то

$$YX \sim YZ(\mathfrak{n}_1), \quad XY \sim ZY(\mathfrak{n}_2).$$

Благодаря 6.7

$$ZYX \sim ZYZ(\mathfrak{n}_1), \quad XYX \sim ZYX(\mathfrak{n}_2).$$

Так как $ZYZ = Z$ и $XYX = X$, то благодаря 6.8, (α)

$$Z \sim X(\mathfrak{n}_3).$$

2) Пусть $X \sim Y(\mathfrak{n}_3)$. Согласно 6.8, (γ),

$$X \sim XY(\mathfrak{n}_1), \quad Y \sim XY(\mathfrak{n}_2).$$

Отсюда, благодаря 6.8, (β), для произвольного $Z \in \mathfrak{A}$ получаем

$$ZX \sim ZXY\,(\mathfrak{n}_3), \quad ZY \sim ZXY\,(\mathfrak{n}_3),$$
$$XZ \sim XYZ\,(\mathfrak{n}_3), \quad YZ \sim XYZ\,(\mathfrak{n}_3).$$

Благодаря доказанной транзитивности $\mathfrak{n}_3$ отсюда следует

$$ZX \sim ZY\,(\mathfrak{n}_3), \quad XZ \sim YZ\,(\mathfrak{n}_3),$$

т. е. эквивалентность $\mathfrak{n}_3$ оказывается двусторонне стабильной.

6.10. Если $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ есть два подмножества полугруппы $\mathfrak{A}$, то совокупность элементов $X \in \mathfrak{A}$, таких, что

$$\mathfrak{K} \cap X\mathfrak{L} \neq \varnothing$$

обозначают через $(\mathfrak{K} : \mathfrak{L})_l$ и называют совокупностью левых частных от деления $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{L}$. Такое название объясняется тем, что X принадлежит $(\mathfrak{K} : \mathfrak{L})_l$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $K \in \mathfrak{K}$ и $L \in \mathfrak{L}$, что $XL = K$.

Аналогично определяется совокупность правых частных $(\mathfrak{K} : \mathfrak{L})_r$. Введение этих понятий и изучение их свойств принадлежит Дюбрейлю [1], [3], [4], [5]. Им же при помощи этих понятий были построены некоторые эквивалентности, также подробно изученные. Дальнейшие исследования в том же направлении продолжал Круазо [3]. К этому же направлению примыкают исследования Тьеррена [12], [19].

Пусть $\mathfrak{K}$ фиксированное подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{K}$ определяются отношения $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$. Для $A, B \in \mathfrak{A}$ имеет место $A \sim B\,(\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}})$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathfrak{K} : A)_l = (\mathfrak{K} : B)_l.$$

Отношение $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$ определяется аналогично при помощи совокупностей правых частных.

Отношения $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$, как легко убедиться, рефлексивны, симметричны и транзитивны. Первое из них стабильно слева. Действительно, пусть $A \sim B\,(\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}})$ и $X \in (\mathfrak{K} : SA)_l$. При некотором $K \in \mathfrak{K}$

$$X \cdot SA = K.$$

Это значит, что $XS \in (\mathfrak{K} : A)_l$ и потому $XS \in (\mathfrak{K} : B)_l$, т. е. при некотором $K' \in \mathfrak{K}$

$$XS \cdot B = K'.$$

Но тогда $X \in (\mathfrak{K} : SB)_l$. Проведя симметричное рассуждение, убеждаемся, что $(\mathfrak{K} : SA)_l = (\mathfrak{K} : SB)_l$.

Аналогично доказывается, что эквивалентность $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$ стабильна справа.

Множество всех тех $A \in \mathfrak{A}$, для которых $(\mathfrak{K} : A)_l$ пусто, образует один из $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$-классов эквивалентности $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$. Этот $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$-класс есть не что иное, как подполугруппа $\mathfrak{U}_{\mathfrak{K}}$, указанная в III, 1.13. Аналогично определяемый $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$-класс есть определенная там же подполугруппа $\mathfrak{V}_{\mathfrak{K}}$. Свойства этих подполугрупп во многих отношениях определяют свойства самих эквивалентностей $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$.

Для некоторых классов подмножеств $\mathfrak{K}$ эквивалентности $\mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$ совпадают. В этом случае эквивалентность $\mathfrak{n}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{n}^l_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{n}^r_{\mathfrak{K}}$ является двусторонне стабильной. Гомоморфизмы, которым соответствует такая эквивалентность, представляют известный интерес. Как было показано в упомянутых работах Дюбрейля и последующей работе Столла [2], исследование их существенно для более детального изучения гомоморфизмов полугрупп на группы и на группы с внешне присоединенным нулем.

6.11. Пусть опять $\mathfrak{K}$ есть произвольное фиксированное подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. В некоторых вопросах представляют интерес следующие отношения $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}$ и $\mathfrak{m}^r_{\mathfrak{K}}$. Для A, $B \in \mathfrak{A}$ имеет место $A \sim B\,(\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}})$, если существуют такие X, $Y \in \mathfrak{K}$, что $XA = YB$. Отношение $\mathfrak{m}^r_{\mathfrak{K}}$ определяется симметрично. В дальнейшем мы столкнемся, в частности, с таким случаем, когда относительно $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$ все элементы являются $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}$-эквивалентными между собой.

Отношение $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}$, очевидно, рефлексивно, симметрично и стабильно справа. В общем случае оно не обязано быть транзитивным. Однако если $\mathfrak{K}$ есть подполугруппа и таково, что все его элементы эквивалентны между собой относительно $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}$, то $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}$ транзитивно. Действительно, пусть

$$A \sim B\,(\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}), \quad B \sim C\,(\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}}), \quad (A, B, C \in \mathfrak{A}),$$

$$XA = YB, \quad X'B = Y'C, \quad UY = VX' \quad (X, Y, X', Y', U, V \in \mathfrak{K}).$$

Тогда

$$(UX)A = (UY)B = (VX')B = (VY')C$$

и потому $A \sim C\,(\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{K}})$.

Аналогично обстоит дело и с отношением $\mathfrak{m}^r_{\mathfrak{R}}$. В некоторых случаях $\mathfrak{m}^l_{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{m}^r_{\mathfrak{R}}$ совпадают. Тогда при соблюдении указанных условий мы получаем двусторонне стабильную эквивалентность в $\mathfrak{A}$. Как показал Дюбрейль [1], который и ввел рассматриваемые отношения, между ними и отношениями, указанными в 6.10, существуют известные связи и взаимозависимости (см. также Дюбрейль [3], [4], [5] и Тьеррен [12], [19]).

6.12. Наравне с рассмотрением тех или иных видов гомоморфизмов в произвольных полугруппах известное количество исследований было посвящено рассмотрению гомоморфизмов отдельных важных полугрупп.

Пусть $\mathfrak{S}_\Omega$ есть полугруппа всех преобразований множества Ω. Важную роль таких полугрупп мы уже отмечали.

Для $A \in \mathfrak{S}_\Omega$ мощность множества $A\Omega$ будем обозначать $\rho(A)$ (А. И. Мальцев называет $\rho(A)$ рангом преобразования A).

Пусть n есть некоторое натуральное число и $\mathfrak{N}$ — некоторый нормальный делитель (4.2) группы $\mathfrak{G}$ — всех взаимно однозначных отображений на себя множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (таковые хорошо известны; при $n = 3$ и при $n > 4$, помимо двух тривиальных, имеется лишь один нормальный делитель, при $n = 4$ нетривиальных нормальных делителя два, при $n = 1, 2$ нетривиальных нормальных делителей нет).

Для $\mathfrak{N}$ определяем в $\mathfrak{S}_\Omega$ отношение $\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}$, полагая $A \sim B\ (\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}})$ $(A, B \in \mathfrak{S}_\Omega)$, если выполнимо одно из трех условий:

(α). $A = B$;

(β). $\rho(A) < n$, $\rho(B) < n$;

(γ). $\rho(A) = \rho(B) = n$; $A\Omega = B\Omega$; из $A\xi = A\eta$ следует $B\xi = B\eta$ $(\xi, \eta \in \Omega)$, и наоборот; если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Omega$ таковы, что $A\xi_i \neq A\xi_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ и φ некоторое отображение $A\Omega = \{A\xi_1, A\xi_2, \ldots, A\xi_n\}$ на $\{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\begin{pmatrix} \varphi(A\xi_1)\, \varphi(A\xi_2) & \ldots & \varphi(A\xi_n) \\ \varphi(B\xi_1)\, \varphi(B\xi_2) & \ldots & \varphi(B\xi_n) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}.$$

Сразу же отмечаем, что в случае (γ) принадлежность последней подстановки к $\mathfrak{N}$, как легко убедиться, не зависит ни от выбора элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ни от выбора отображения φ (последнее следует из того, что при любом

автоморфизме группы $\mathfrak{G}$ ее нормальный делитель $\mathfrak{N}$ всегда отображается на себя).

Определенное отношение $\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}$, очевидно, симметрично и рефлексивно. Легко убедиться и в его транзитивности. Пусть

$$A \sim B\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}), \quad B \sim C\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}).$$

В случаях (α) и (β) положение дел очевидно. В случае (γ) имеем:

$$A\Omega = B\Omega = C\Omega,$$

$$S = \begin{pmatrix} \varphi(A\xi_1) & \varphi(A\xi_2) & \dots & \varphi(A\xi_n) \\ \varphi(B\xi_1) & \varphi(B\xi_2) & \dots & \varphi(B\xi_n) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N};$$

$$S' = \begin{pmatrix} \varphi(B\xi_1) & \varphi(B\xi_2) & \dots & \varphi(B\xi_n) \\ \varphi(C\xi_1) & \varphi(C\xi_2) & \dots & \varphi(C\xi_n) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N},$$

откуда следует

$$\begin{pmatrix} \varphi(A\xi_1) & \varphi(A\xi_2) & \dots & \varphi(A\xi_n) \\ \varphi(C\xi_1) & \varphi(C\xi_2) & \dots & \varphi(C\xi_n) \end{pmatrix} = S'S \in \mathfrak{N}.$$

„Смешанные“ случаи, когда $A \sim B\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}})$ выполняется согласно одному из случаев (α), (β), (γ), а $B \sim C\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}})$ — согласно другому, очевидно, невозможны.

Докажем, что эквивалентность $\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}$ двусторонне стабильна. Пусть

$$A \sim B\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}) \quad (A,\ B \in \mathfrak{S}_{\Omega}).$$

Если имеет место случай (α) или (β), то, очевидно, при любом $X \in \mathfrak{A}$

$$XA \sim XB\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}), \quad AX \sim BX\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}}).$$

Пусть имеет место случай (γ). Если для некоторых ξ_i и ξ_j $(i \neq j)$ имеет место $XA\xi_i = XA\xi_j$, то $\rho(XA) < n$, $\rho(XB) < n$ и потому $XA \sim XB\,(\mathfrak{n}_{\mathfrak{N}})$. Если $XA\xi_i$ все различны ($i = 1, 2, \dots, n$), то определим отображение ψ множества $XA\Omega = XB\Omega$ на $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\psi(XA\alpha) = \varphi(A\alpha).$$

Отмечаем, что из $A\Omega = B\Omega$ следует, что для $\alpha \in \Omega$ существует $\beta \in \Omega$ такой, что $B\alpha = A\beta$. Благодаря этому

$$\psi(XB\alpha) = \psi(XA\beta) = \varphi(A\beta) = \varphi(B\alpha).$$

Все требования условия (γ) для XA и XB оказываются выполненными. Для последнего из них относительно ψ имеем

$$\begin{pmatrix}\psi(XA\xi_1)\,\psi(XA\xi_2)\ldots\psi(XA\xi_n)\\ \psi(XB\xi_1)\,\psi(XB\xi_2)\ldots\psi(XB\xi_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(A\xi_1)\,\varphi(A\xi_2)\ldots\varphi(A\xi_n)\\ \varphi(B\xi_1)\,\varphi(B\xi_2)\ldots\varphi(B\xi_n)\end{pmatrix}\in\mathfrak{N}.$$

Если для некоторого ξ_i имеет место $AX\Omega\,\bar{\ni}\,A\xi_i$, то $\rho(AX)<n$, $\rho(BX)<n$ и потому $AX\sim BX(\mathfrak{n}_{\mathfrak{R}})$. В противном случае фиксируем $\xi'_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, так чтобы $AX\xi'_i=A\xi_i$.

Мы имеем

$$AX\Omega=\{A\xi_1,\ A\xi_2,\ \ldots,\ A\xi_n\}=A\Omega.$$

Относительно последовательности $\xi'_1,\ \xi'_2,\ \ldots,\ \xi'_n$ и отображения φ мы имеем выполненными для AX и BX требования условия (γ). Для последнего из этих условий имеем

$$\begin{pmatrix}\varphi(AX\xi'_1)\,\varphi(AX\xi'_2)\ldots\varphi(AX\xi'_n)\\ \varphi(BX\xi'_1)\,\varphi(BX\xi'_2)\ldots\varphi(BX\xi'_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(A\xi_1)\,\varphi(A\xi_2)\ldots\varphi(A\xi_n)\\ \varphi(B\xi_1)\,\varphi(B\xi_2)\ldots\varphi(B\xi_n)\end{pmatrix}\in\mathfrak{N}.$$

Рассмотренные двусторонне стабильные эквивалентности $\mathfrak{n}_{\mathfrak{R}}$ были найдены А. И. Мальцевым [4]. А. И. Мальцев показал, что в случае конечного Ω полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ не имеет других двусторонне стабильных эквивалентностей.

Однако в случае бесконечного Ω помимо $\mathfrak{n}_{\mathfrak{R}}$ в $\mathfrak{S}_\Omega$ имеются и другие двусторонне стабильные эквивалентности. Обозначим через Σ последовательность бесконечных мощностей

$$\Sigma=(\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{m}_k,\ \mathfrak{m}'_k,\ \mathfrak{m}'_{k-1},\ \ldots,\ \mathfrak{m}'_1,\ \mathfrak{m}'_0),$$

где каждая из мощностей больше предшествующей, и только $\mathfrak{m}'_k$ может также равняться $\mathfrak{m}_k$. При этом, если $\mathfrak{m}'_0$ больше мощности множества Ω, то $\mathfrak{m}'_0$ является наименьшей из мощностей, больших мощности Ω.

Определим в $\mathfrak{S}_\Omega$ отношение $\mathfrak{n}^{(\Sigma)}$, полагая

$$A\sim B(\mathfrak{n}^{(\Sigma)})\quad(A,\ B\in\mathfrak{S}_\Omega),$$

если выполнено одно из трех условий:

(α). $A=B$;

(β). $\rho(A)<\mathfrak{m}'_k$, $\rho(B)<\mathfrak{m}'_k$;

(γ). $\rho(A)=\rho(B)=\rho$, где ρ больше или равна некоторой $\mathfrak{m}'_{i+1}$ и меньше $\mathfrak{m}'_i$, причем, если обозначить через Ω_0

множество таких $\alpha \in \Omega$, для которых $A\alpha \neq B\alpha$, то мощности $A\Omega_0$ и $B\Omega_0$ меньше мощности $\mathfrak{m}_{i+1}$.

Как показал А. И. Мальцев, отношения вида $\mathfrak{n}^{(\Sigma)}$ оказываются двусторонне стабильными эквивалентностями. При этом $\mathfrak{S}_\Omega$, помимо этих эквивалентностей и описанных ранее эквивалентностей вида $\mathfrak{n}_\mathfrak{N}$, не имеет никаких других двусторонне стабильных эквивалентностей. Благодаря этим результатам оказываются описанными с точностью до изоморфизмов все гомоморфизмы полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$.

6.13. Рассмотрение двусторонне стабильных эквивалентностей полугруппы всех взаимно однозначных частичных преобразований произвольного множества было осуществлено А. Е. Либером [1].

Ряд исследований (А. И. Мальцев [5], Е. А. Халезов [1], [2], Л. М. Глускин [4], [7], [9]) посвящен гомоморфизмам мультипликативных полугрупп матриц.

6.14. Помимо исследований, в которых гомоморфизмы полугрупп изучаются с точностью до умножения на изоморфизмы, что равносильно исследованию двусторонне стабильных эквивалентностей, в некоторых случаях интерес представляет рассмотрение гомоморфизмов с учетом свойств гомоморфного образа. Например, интерес представляют автоморфизмы полугрупп (I, 1.16) (и вообще эндоморфизмы, хотя фактически, помимо автоморфизмов, эндоморфизмы до сих пор совсем не изучались).

Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей и элементы X и X^{-1} взаимно обратны относительно $E_\mathfrak{A}$

$$XX^{-1} = X^{-1}X = E_\mathfrak{A},$$

то отображение φ_X полугруппы $\mathfrak{A}$ в себя

$$\varphi_X(A) = XAX^{-1} \qquad (A \in \mathfrak{A}),$$

как легко убедиться, является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{A}$ на себя. При этом

$$\varphi_X(AB) = XABX^{-1} = XAX^{-1}XBX^{-1} = \varphi_X(A) \cdot \varphi_X(B).$$

Следовательно, φ_X является автоморфизмом. Такие автоморфизмы называются внутренними.

Совокупность всех автоморфизмов всякой полугруппы $\mathfrak{A}$ является группой. Совокупность внутренних автоморфизмов,

если $\mathfrak{A}$ обладает единицей, как легко убедиться, является подгруппой и даже нормальным делителем этой группы.

6.15. У некоторых полугрупп все автоморфизмы внутренние. К таким полугруппам относится, например, при любом множестве Ω полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований Ω.

Известно несколько доказательств этой теоремы (Шрейер [1], А. И. Мальцев [4], Е. С. Ляпин [13]). Мы проведем наши рассуждения, основываясь на результатах 5.7.

В полугруппе $\mathfrak{S}_\Omega$ двусторонний идеал $\mathfrak{U}_\Omega$ (5.7) является минимальным двусторонним идеалом. Поэтому при всяком автоморфизме $\mathfrak{S}_\Omega$ $\mathfrak{U}_\Omega$ отображается на себя. Это значит, что произвольный автоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ индуцирует автоморфизм $\bar{\varphi}$ в $\mathfrak{U}_\Omega$.

Покажем, что если автоморфизмы φ_1 и φ_2 полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ различны, то различны и индуцируемые ими автоморфизмы $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$.

Пусть для некоторого $X \in \mathfrak{S}_\Omega$ имеет место

$$\varphi_1(X) = Y_1, \quad \varphi_2(X) = Y_2, \quad Y_1 \neq Y_2.$$

При некотором $\alpha \in \Omega$

$$Y_1\alpha = \beta_1, \quad Y_2\alpha = \beta_2, \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Предположим, что $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ одинаковы. Тогда автоморфизм $\psi = (\varphi_2\varphi_1^{-1})$ отображает каждый элемент из $\mathfrak{U}_\Omega$ на себя и, в частности,

$$\psi(U_\alpha) = U_\alpha, \quad \psi(U_\beta) = U_\beta.$$

Так как

$$\psi(Y_1) = \varphi_2\{\varphi_1^{-1}(Y_1)\} = \varphi_2(X) = Y_2,$$

то, применив к очевидному равенству $Y_1U_\alpha = U_{\beta_1}$ автоморфизм $\bar{\psi}$, мы получим $Y_2U_\alpha = U_{\beta_1}$. Предположение $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2$ привело нас к противоречию, ибо

$$Y_2U_\alpha\alpha = Y_2\alpha = \beta_2, \quad U_{\beta_1}\alpha = \beta_1, \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Для произвольного автоморфизма φ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$ индуцированный им автоморфизм $\bar{\varphi}$ осуществляет взаимно однозначное отображение U_Ω на себя

$$\bar{\varphi}(U_\alpha) = U_{\alpha_\varphi} \qquad (\alpha \in \Omega).$$

Рассмотрим преобразования $S, S' \in \mathfrak{S}_\Omega$, осуществляющие взаимно однозначные отображения Ω на себя:

$$S\alpha = \alpha_\varphi, \quad S'\alpha_\varphi = \alpha \qquad (\alpha \in \Omega).$$

Очевидно, S и S' взаимно обратные элементы в $\mathfrak{S}_\Omega$: $S' = S^{-1}$. Поэтому в $\mathfrak{S}_\Omega$ определен внутренний автоморфизм χ

$$\chi(A) = SAS^{-1} \qquad (A \in \mathfrak{S}_\Omega).$$

Сравним автоморфизмы $\bar{\chi}$ и $\bar{\varphi}$ полугруппы $\mathfrak{U}_\Omega$. Так как, очевидно, $U_\alpha S' = U_\alpha$, то

$$[\bar{\chi}(U_\alpha)]\,\alpha = (SU_\alpha S')\,\alpha = SU_\alpha\alpha = S\alpha = \alpha_\varphi,$$
$$[\bar{\varphi}(U_\alpha)]\,\alpha = U_{\alpha_\varphi}\alpha = \alpha_\varphi.$$

Таким образом, $\bar{\chi}(U_\alpha) = \bar{\varphi}(U_\alpha)$. Из совпадения $\bar{\chi}$ и $\bar{\varphi}$, согласно доказанному выше, следует, что $\chi = \varphi$, т. е. φ является внутренним автоморфизмом.

6.16. При помощи 6.15 легко выясняется устройство группы автоморфизмов полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$. Как следует из II, 3.1; II, 3.2, взаимно обратными элементами в $\mathfrak{S}_\Omega$ являются преобразования, осуществляющие взаимно однозначное отображение Ω на себя. Два таких различных преобразования S_1 и S_2 порождают различные автоморфизмы $\mathfrak{S}_\Omega$. Действительно, пусть

$$S_1\alpha = \beta_1, \quad S_2\alpha = \beta_2, \quad \beta_1 \neq \beta_2 \qquad (\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Omega).$$

Тогда

$$\left(S_1 U_\alpha S_1^{-1}\right)\alpha = (S_1 U_\alpha)\,\alpha = S_1(U_\alpha\alpha) = S_1\alpha = \beta_1,$$
$$\left(S_2 U_\alpha S_2^{-1}\right)\alpha = (S_2 U_\alpha)\,\alpha = S_2(U_\alpha\alpha) = S_2\alpha = \beta_2,$$

т. е. $S_1 U_\alpha S_1^{-1} \neq S_2 U_\alpha S_2^{-1}$.

Таким образом, между автоморфизмами $\mathfrak{S}_\Omega$ и взаимно однозначными отображениями Ω на себя устанавливается взаимно однозначное соответствие. Легко видеть, что оно является изоморфизмом между группой всех автоморфизмов и группой всех преобразований Ω, осуществляющих взаимно однозначное отображение Ω на себя.

6.17. Наравне с конструкцией внутренних автоморфизмов (6.14) такой, какой она была заимствована из теории групп, в общей теории полугрупп некоторыми авторами (Дюб-

рейль [1], [3], Круазо [6]) рассматривались различные обобщения этой конструкции. Одним из таких простейших обобщений является, например, следующее. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность элементов $X \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию $X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}X$. Пусть $X \in \mathfrak{B}$, тогда для всякого $A \in \mathfrak{A}$ найдется такой $\psi_X(A)$, что $XA = \psi_X(A) \cdot X$.

Элемент $\psi_X(A)$ ввиду свойства сокращения в $\mathfrak{A}$ определяется единственным образом. Так как для любого $B \in \mathfrak{A}$ найдется такой $B' \in \mathfrak{A}$, что $XB' = BX$, то $B = \psi_X(B')$. Таким образом, X определяет отображение ψ_X полугруппы на себя. Оно взаимно однозначно, что непосредственно следует из свойства сокращения в $\mathfrak{A}$. Так как отображение обладает свойством гомоморфизма

$$X \cdot (AB) = \psi_X(AB) \cdot X,$$
$$X \cdot (AB) = \psi_X(A)\, XB = \psi_X(A) \cdot \psi_X(B) \cdot X,$$
$$\psi_X(AB) = \psi_X(A) \cdot \psi_X(B),$$

то ψ_X является автоморфизмом $\mathfrak{A}$.

Подмножество $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, если оно непусто, очевидно, является подполугруппой $\mathfrak{A}$. Сопоставление каждому X из $\mathfrak{B}$ автоморфизма ψ_X, как легко убедиться, является гомоморфизмом $\mathfrak{B}$ в группу всех автоморфизмов полугруппы $\mathfrak{A}$. Действительно, если $X, Y \in \mathfrak{B}$, то

$$XYA = X \cdot \psi_Y(A) \cdot Y = \psi_X\{\psi_Y(A)\} \cdot XY.$$
$$XYA = \psi_{XY}(A) \cdot XY,$$
$$\psi_X\{\psi_Y(A)\} = \psi_{XY}(A).$$

Так как A — произвольный элемент из $\mathfrak{A}$, то $\psi_X\psi_Y = \psi_{XY}$.

Из сказанного, в частности, следует, что совокупность автоморфизмов ψ_X образует подполугруппу группы всех автоморфизмов.

6.18. Если полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет единицу и $X \in \mathfrak{A}$ обладает обратным элементом, то

$$X\mathfrak{A} = X\mathfrak{A}X^{-1}X \subset \mathfrak{A}X,$$
$$\mathfrak{A}X = XX^{-1}\mathfrak{A}X \subset X\mathfrak{A},$$
$$X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}X,$$

т. е. $X \in \mathfrak{B}$ (6.17). Автоморфизм ψ_X, определенный вышеуказанным способом при помощи элемента X, оказывается совпадающим с внутренним автоморфизмом, порожденным X (6.14):

$$XA = XAX^{-1} \cdot X, \quad XA = \psi_X(A) \cdot X,$$

$$XAX^{-1} = \psi_X(A).$$

6.19. Понятие „обобщенного внутреннего автоморфизма" (6.17) шире понятия внутреннего автоморфизма. Даже полугруппа с единицей может иметь автоморфизмы типа 6.17, не являющиеся внутренними. Приведем соответствующий пример. Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество всех таких пар целых чисел (a, b), что или $a = b = 0$, или $a \geqslant 1$. Умножение в $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (-1)^{a_2} b_1 + b_2).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в ассоциативности действия. Если

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_3, b_3),$$

то для заданных a_1, b_1, a_3, b_3 числа a_2 и b_2, очевидно, определяются единственным образом. Таким образом, $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с левым сокращением. Аналогично имеет место и сокращение справа.

$(0, 0)$, очевидно, является единицей полугрупп $\mathfrak{A}$. Никакие два неединичных элемента неравны в произведении $(0, 0)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ не имеет внутренних автоморфизмов (6.14), отличных от тождественного автоморфизма. Вместе с тем для $X = (1, 0)$ легко убеждаемся, что $X\mathfrak{A}$ состоит из $(1, 0)$ и из всевозможных пар вида (a, b), где $a \geqslant 2$. Таково же и множество $\mathfrak{A}X$. Таким образом, $X \in \mathfrak{B}$ (6.17). При помощи X строится автоморфизм ψ_X. Он не является тождественным, поскольку, как легко убедиться,

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, -b) \cdot (1, 0)$$

и потому

$$\psi_X(a, b) = (a, -b).$$

6.20. При помощи некоторых конкретных гомоморфизмов для коммутативных полугрупп может быть построена теория, которую можно назвать обобщенной теорией характеров,

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две произвольные коммутативные полугруппы. Обозначим через $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ совокупность всех гомоморфизмов $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. В $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ определяем действие, полагая $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_3$ ($\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$), если для любого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ выполняется

$$\chi_1(A) \cdot \chi_2(A) = \chi_3(A).$$

Результат этого действия определен для любых двух χ_1 и χ_2 из $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, так как

$$\chi_1(AB) \cdot \chi_2(AB) = \chi_1(A) \cdot \chi_1(B) \cdot \chi_2(A) \cdot \chi_2(B) = [\chi_1(A) \cdot \chi_2(A)] \cdot [\chi_1(B) \cdot \chi_2(B)] \qquad (A, B \in \mathfrak{A})$$

и потому отображение χ_3 полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, определенное по указанной выше формуле, является гомоморфизмом, т. е. принадлежит $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Принимая во внимание способ определения действия в $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, элементы из $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ естественно называть обобщенными характерами $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Так как их умножение, очевидно, ассоциативно, то $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, если оно непусто, образует полугруппу. Ввиду коммутативности $\mathfrak{B}$ эта полугруппа коммутативна.

Описанный способ сопоставления паре коммутативных полугрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ третьей коммутативной полугруппы $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ служит источником ряда проблем относительно изучения взаимоотношения различных свойств этих трех полугрупп. Представляет интерес изучение $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, основанное на свойствах исходных полугрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Возможен и другой подход: характеризовать свойства $\mathfrak{A}$ при помощи $\mathfrak{B}$ и $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Именно такая постановка задачи представляется наиболее естественной, будучи методом изучения $\mathfrak{A}$ при помощи ее полугруппы обобщенных характеров в заданную полугруппу $\mathfrak{B}$. Наконец, мыслимо исследование $\mathfrak{B}$, исходящее из известных свойств $\mathfrak{A}$ и $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

6.21. Изучение полугруппы обобщенных характеров в общем виде начато недавно М. М. Лесохиным [1]. До этого исследования в указанном направлении проводились только для случая комплексных характеров, когда в качестве $\mathfrak{B}$ брали мультипликативную полугруппу всех комплексных чисел. Для конечных коммутативных полугрупп Шварцем [9], [10], [11] была разработана стройная теория. Оказалось, что в рассматриваемом случае между свойствами $\mathfrak{A}$ и свойствами

$\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ существуют глубокие, весьма содержательные связи. В частности, весьма интересны соотношения между структурой идеалов $\mathfrak{A}$ и структурой идеалов $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Также комплексным характерам посвящены работа Хьюета и Цукермана [1] и статья Исеки [9].

6.22. При определении обобщенных характеров (6.20) коммутативность полугруппы $\mathfrak{B}$ приходится требовать для того, чтобы отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, определенное как произведение двух обобщенных характеров, само обладало свойством гомоморфизма. Конечно, этой цели можно достигнуть, выставляя более слабое требование. Именно, достаточно потребовать, чтобы в $\mathfrak{B}$ для любых $X, U, V, Y \in \mathfrak{B}$ имело место

$$XUVY = XVUY.$$

Однако неясно, может ли переход от класса коммутативных полугрупп к полугруппам с таким свойством дать существенное обобщение теории.

Что касается $\mathfrak{A}$, то, собственно говоря, нет прямой необходимости накладывать на $\mathfrak{A}$ какие бы то ни было ограничения. Однако фактически при коммутативной полугруппе $\mathfrak{B}$ все обобщенные характеры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ будут делиться справа на гомоморфизм φ, являющийся наибольшим общим правым делителем гомоморфизмов $\mathfrak{A}$ на коммутативные полугруппы (6.2). Таким образом, $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ по существу совпадает с $\Phi(\varphi(\mathfrak{A}), \mathfrak{B})$ и все результаты, получающиеся от соответствующих рассуждений для $\mathfrak{A}$, в сущности будут относиться к $\varphi(\mathfrak{A})$, которая коммутативна.

Аналогично при рассмотрении $\mathfrak{B}$, обладающей указанным выше обобщенным условием коммутативности, и для $\mathfrak{A}$ имеет смысл ограничиваться случаем выполнения этого же условия.

ГЛАВА VIII

РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛУГРУПП В ОБЪЕДИНЕНИЯ ПОДПОЛУГРУПП

§ 1. Связки полугрупп

1.1. Один из способов изучения строения и свойств той или иной полугруппы состоит в разложении ее в объединение некоторых ее подполугрупп, принадлежащих какому-либо более хорошо изученному классу. Успешность применения такого метода зависит, во-первых, от того, насколько хорошо мы знаем свойства полугрупп, являющихся компонентами такого объединения, и, во-вторых, от характера взаимной связи компонент в этом объединении. Первое положение довольно очевидно. Для иллюстрации второго укажем, что как мы знаем, всякая полугруппа является объединением своих моногенных подполугрупп. Эти последние устроены очень просто и их свойства хорошо изучены. Однако взаимное отношение моногенных подполугрупп в полугруппе является сложным и во многом еще неясным, поэтому указанное разложение само по себе еще не может много дать для изучения произвольных подполугрупп. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые общие свойства и некоторые виды упомянутых разложений.

1.2. Среди различных разложений в объединения подполугрупп особо интересны разложения в непересекающиеся объединения, т. е. *разбиения полугруппы на подполугруппы*. Напомним, что мы условились не делать различия в понимании терминов „эквивалентность“ и „разбиение“ (I, 5.8). В настоящей главе мы обычно будем предпочитать термин „разбиение“, как более наглядный относительно интересующего нас направления.

Очевидно, произвольное разбиение $\mathfrak{n}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ будет разбиением на подполугруппы, если из $X \sim Y(\mathfrak{n})$ ($X, Y \in \mathfrak{A}$) всегда следует $XY \sim X(\mathfrak{n})$.

1.3. В качестве примера разберем вопрос о разбиении коммутативной полугруппы на полугруппы с сокращением (I, 3.2). Условие этого было найдено Шварцем [17].

Теорема. *Для того чтобы коммутативная полугруппа $\mathfrak{A}$ была разложима в непересекающееся объединение подполугрупп, являющихся полугруппами с сокращением, необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $X, Y \in \mathfrak{A}$ условие*

$$X^2 = XY = Y^2$$

выполнялось лишь при $X = Y$.

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ разложима требуемым образом и для $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место $X^2 = XY = Y^2$, то X и Y не могут содержаться в различных компонентах разложения, ибо иначе X^2 и Y^2 содержались бы в различных компонентах и не могли бы равняться. Поскольку X и Y принадлежат одной и той же компоненте, а эта последняя является полугруппой с сокращением, из $X^2 = XY$ следует $X = Y$.

2) Пусть в $\mathfrak{A}$ выполнено указанное в формулировке условие. Определим в $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{n})$, если при некоторых натуральных n и m имеет место $X^n = Y^m$. Отношение $\mathfrak{n}$ симметрично и рефлексивно. Убедимся в его транзитивности. Пусть

$$X \sim Y(\mathfrak{n}), \quad Y \sim Z(\mathfrak{n}),$$
$$X^n = Y^m, \quad Y^k = Z^l.$$

Тогда

$$X^{nk} = Y^{mk} = (Y^k)^m = (Z^l)^m = Z^{lm},$$

т. е. $X \sim Z(\mathfrak{n})$.

Таким образом, $\mathfrak{n}$ можно рассматривать как разбиение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{n}$-классы (I, 5.8).

Если

$$X \sim Y(\mathfrak{n}), \quad X^m = Y^l,$$

то

$$(XY)^l = X^l Y^l = X^{l+m},$$

т. е. $XY \sim X(\mathfrak{n})$, и, согласно 1.2, $\mathfrak{n}$ является разбиением $\mathfrak{A}$ на подполугруппы. Докажем, что каждая из таких подполугрупп $\mathfrak{B}$, состоящая из элементов, эквивалентных между собой относительно $\mathfrak{n}$, является полугруппой с сокращением.

Пусть

$$XZ = YZ \quad (X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{B}).$$

При некоторых n, m, s, t

$$X^n = Z^m, \quad Y^s = Z^t.$$

Пусть p есть наименьшее из натуральных чисел, таких, что $X^{p+1} = X^pY$. Что такие числа существуют, следует из

$$X^{n+1} = X \cdot X^n = XZ^m = XZ \cdot Z^{m-1} = YZ \cdot Z^{m-1} = \\ = YZ^m = X^nY.$$

Если бы p было четным, то мы из $X^{p+1} = X^pY$ получили бы

$$\left(X^{\frac{p}{2}}Y\right)^2 = \left(X^{\frac{p}{2}}Y\right) \cdot \left(X^{\frac{p}{2}+1}\right) = \left(X^{\frac{p}{2}+1}\right)^2,$$

откуда благодаря исходному предположению должно следовать $X^{\frac{p}{2}+1} = X^{\frac{p}{2}}Y$. Но это противоречит определению p. Следовательно, p нечетно. Но из $X^{p+1} = X^pY$ мы получаем $X^{(p+1)+1} = X^{p+1}Y$, откуда рассуждением, аналогичным проведенному выше, получаем $X^{\frac{p+1}{2}+1} = X^{\frac{p+1}{2}}Y$. Отсюда благодаря определению p заключаем: $\frac{p+1}{2} \geqslant p$, т. е. $p = 1$.

Мы показали, что $X^2 = XY$. Совершенно аналогично доказывается $Y^2 = YX$. Таким образом, оказывается, что в $\mathfrak{B}$ из $XZ = YZ$ обязательно следует

$$X^2 = XY = Y^2.$$

Но отсюда по предположению должно следовать $X = Y$.

1.4. Отметим, что отношение $\mathfrak{n}$, построенное нами при доказательстве теоремы 1.3 для коммутативной полугруппы $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей условию, указанному в теореме 1.3, является точной нижней границей для всех разбиений $\mathfrak{A}$ на подполугруппы. Другими словами, $\mathfrak{n}$ есть наиболее дробное из всевозможных разбиений $\mathfrak{A}$ на непересекающиеся объединения подполугрупп. Действительно, если $\mathfrak{m}$ есть одно из

указанных разбиений и $X \sim Y(\mathfrak{n})$, т. е. $X^n = Y^m$, то, очевидно, $X \sim Y(\mathfrak{m})$, так как X и Y благодаря $X^n = Y^m$ не могут содержаться в разных $\mathfrak{m}$-классах, поскольку $\mathfrak{m}$-классы попарно не должны иметь общих элементов.

Среди свойств разбиения $\mathfrak{n}$ отметим, что каждая его компонента $\mathfrak{K}$ обладает не более чем одним идемпотентом. Действительно, если $I_1, I_2 \in \mathfrak{K}$ и $I_1^2 = I_1$, $I_2^2 = I_2$, то из $I_1^m = I_2^n$ следует $I_1 = I_2$.

Отметим также, что, согласно IV, 6.11, $\mathfrak{K}$ есть полугруппа, не имеющая собственных изолированных идеалов. Действительно, из $X \sim Y(\mathfrak{n})$ непосредственно следует, что X и Y находятся между собой в отношении, рассмотренном в IV, 6.11. Подобное разложение было осуществлено Тьереном [16] не только для коммутативных полугрупп, но и для полугрупп, удовлетворяющих некоторому обобщенному условию коммутативности, рассмотренному в III, 4.5, (β).

1.5. Условие, указанное в теореме 1.3, как легко видеть, является необходимым для разбиения на полугруппы с сокращением не только для коммутативных, но и для любых полугрупп. Вопрос о его достаточности для некоторых классов некоммутативных полугрупп также был рассмотрен Шварцем [16].

1.6. Вполне естественно, что среди различных разбиений полугруппы на подполугруппы особый интерес вызывают двусторонне стабильные разбиения (I. 5.17).

Определение. *Двусторонне стабильное разбиение полугруппы, все компоненты которого являются ее подполугруппами, называется связкой.*

Благодаря 1.2 двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{n}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ будет связкой тогда и только тогда, когда для всякого $X \in \mathfrak{A}$ имеет место $X \sim X^2(\mathfrak{n})$.

Если полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает связкой, компонентами которой являются ее подполугруппы $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., то говорят также, что $\mathfrak{A}$ представляет собой связку своих подполугрупп $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., или даже просто, что $\mathfrak{A}$ сама есть связка этих подполугрупп. Такое употребление одного и того же термина в различных, но очевидным образом связанных между собой смыслах обычно не вызывает никаких недоразумений.

1.7. Как непосредственно следует из определения 1.2 и I, 5.18 связка полугруппы $\mathfrak{A}$ определяется совокупностью

попарно непересекающихся подполугрупп $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... этой полугруппы, объединение которых равно $\mathfrak{A}$, причем для каждой пары этих подполугрупп $(\mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{B}_\eta)$ всегда найдется такая подполугруппа $\mathfrak{B}_\sigma$ из этой совокупности, что

$$\mathfrak{B}_\xi \cdot \mathfrak{B}_\eta \subset \mathfrak{B}_\sigma.$$

Эта $\mathfrak{B}_\sigma$, кстати, определяется для данной пары $(\mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{B}_\eta)$, очевидно, единственным образом.

1.8. В VII, 2.1 и VII, 2.6 было показано, что каждый гомоморфизм полугруппы определяет в ней некоторое соответствующее двусторонне стабильное разбиение, причем всякое двусторонне стабильное разбиение вызывается некоторым гомоморфизмом. Если ограничиться естественными гомоморфизмами (VII, 2.5), то между ними и всевозможными двусторонне стабильными разбиениями устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть φ есть гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$ на полугруппу $\varphi(\mathfrak{A})$. Если все элементы последней идемпотентны, то двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{n}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, соответствующее этому гомоморфизму (VII, 2.1) будет удовлетворять условию $X^2 \sim X(\mathfrak{n})$ для всякого $X \in \mathfrak{A}$ (так как $\varphi(X^2) = \varphi(X) \cdot \varphi(X) = \varphi(X)$) и, следовательно, $\mathfrak{n}$ будет связкой (1.2). Легко убедиться и в обратном. Если $\mathfrak{n}$ есть связка и φ — гомоморфизм $\mathfrak{A}$, которому соответствует двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{n}$, то все элементы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A})$ идемпотентны. Действительно, благодаря $X^2 \sim X(\mathfrak{n})$ (1.6)

$$\varphi(X) \cdot \varphi(X) = \varphi(X^2) = \varphi(X).$$

Пусть Γ есть некоторый класс полугрупп. Из сказанного следует, что для того, чтобы полугруппа $\mathfrak{A}$ могла бы быть представлена в виде связки полугрупп, принадлежащих Γ, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой гомоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{A}$, при котором полные прообразы всех элементов из $\varphi(\mathfrak{A})$ являются полугруппами, принадлежащими Γ.

1.9. Пусть Ψ есть некоторая непустая совокупность связок полугруппы $\mathfrak{A}$. Согласно VII, 2.9, существует двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{f}$, являющееся точной нижней границей Ψ, и двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{l}$, являющееся точной верхней границей Ψ. Из самих конструкций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$

(I, 5.15; I, 5.16) видно, что, поскольку для каждого $\mathfrak{n} \in \Psi$ имеет место $X \sim X^2(\mathfrak{n})$ ($X \in \mathfrak{A}$), и для $\mathfrak{f}$, и для $\mathfrak{l}$ должно выполняться $X \sim X^2(\mathfrak{f})$, $X \sim X^2(\mathfrak{l})$. Следовательно, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{l}$ сами являются связками. Из этого следует, что относительно частичной упорядоченности I, 5.14 *множество всех связок полугруппы является полной структурой.*

1.10. Точной верхней границей всех связок полугруппы, очевидно, является тривиальная связка, являющаяся разбиением, состоящим из одной компоненты, совпадающей с самой полугруппой.

Точной нижней границей всех связок является связка $\mathfrak{f}_0$, представляющая собой наиболее дробное двусторонне стабильное разбиение полугруппы на подполугруппы. Все прочие связки получаются из нее путем „укрупнения" компонент, т. е. объединением некоторых компонент разбиения $\mathfrak{f}_0$.

1.11. Строение указанной в 1.10 связки $\mathfrak{f}_0$ было выяснено для коммутативных полугрупп в работе Тамура и Кимура [1]. Определим в коммутативной полугруппе $\mathfrak{A}$ отношение $\mathfrak{k}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{k})$ (X, $Y \in \mathfrak{A}$), если существуют такие натуральные числа p, q и такие элементы U, $V \in \mathfrak{A}$, что

$$X^p = YU, \quad Y^q = XV.$$

Очевидно, $\mathfrak{k}$ симметрично и рефлексивно. Если

$$X \sim Y(\mathfrak{k}), \quad Y \sim Z(\mathfrak{k}),$$

$$X^{p_1} = YU_1, \quad Y^{q_1} = XV_1, \quad Y^{p_2} = ZU_2, \quad Z^{q_2} = YV_2,$$

то

$$X^{p_1 p_2} = Y^{p_2} U_1^{p_2} = Z\left(U_2 U_1^{p_2}\right), \quad Z^{q_1 q_2} = Y^{q_1} V_2^{q_1} = X\left(V_1 V_2^{q_1}\right),$$

т. е. $X \sim Z(\mathfrak{k})$ и, следовательно, $\mathfrak{k}$ транзитивно. Эквивалентность $\mathfrak{k}$ двусторонне стабильна, так как из

$$X \sim Y(\mathfrak{k}),$$

$$X^p = YU, \quad Y^q = XV$$

при произвольном $S \in \mathfrak{A}$ получаем

$$(XS)^p = X^p S^p = (YS) \cdot \left(US^{p-1}\right), \quad (YS)^q = Y^q S^q = (XS)\left(VS^{q-1}\right),$$

что означает $XS \sim YS(\mathfrak{k})$ (S^0 здесь означает пустой символ).

Используя 1.2, убеждаемся, что разбиение $\mathfrak{f}$ является связкой. Действительно, для всякого $X \in \mathfrak{A}$ мы имеем

$$(X^2)^1 = X \cdot X, \quad X^4 = X^2 \cdot X^2,$$

т. е. $X^2 \sim X(\mathfrak{f})$.

Докажем, что связка $\mathfrak{f}$ совпадает со связкой $\mathfrak{f}_0$ (1.10).

Пусть φ есть некоторый гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на полугруппу $\varphi(\mathfrak{A})$, все элементы которой идемпотентны, и пусть φ соответствует связка $\mathfrak{f}_0$ (1.8). Отмечаем, что для всякого $A \in \mathfrak{A}$ при любом натуральном s

$$\varphi(A) = \varphi(A)^s = \varphi(A^s).$$

Если для некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$X \sim Y(\mathfrak{f}),$$
$$X^p = YU, \quad Y^q = XV,$$

то

$$\varphi(X) = \varphi(X^p) = \varphi(YU) = \varphi(Y) \cdot \varphi(U) = \varphi(Y^q) \cdot \varphi(U) =$$
$$= \varphi(XV) \cdot \varphi(U) = \varphi(X) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U).$$

Аналогично доказывается и

$$\varphi(Y) = \varphi(Y) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U).$$

Используя полученные равенства, находим

$$\varphi(X) = \varphi(X) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U) = \varphi(X) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U) =$$
$$= \varphi(XV) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U) = \varphi(Y^q) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U) =$$
$$= \varphi(Y) \cdot \varphi(V) \cdot \varphi(U) = \varphi(Y).$$

То, что $\varphi(X) = \varphi(Y)$, означает, что $X \sim Y(\mathfrak{f}_0)$.

Мы показали, что из $X \sim Y(\mathfrak{f})$ всегда следует $X \sim Y(\mathfrak{f}_0)$. Следовательно, $\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{f}_0$. Но, с другой стороны, $\mathfrak{f}_0$, являясь точной нижней границей всех связок, предшествует $\mathfrak{f}$: $\mathfrak{f}_0 \leqslant \mathfrak{f}$. Таким образом, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$.

1.12. Как мы видели, задание связки для полугруппы по существу равносильно заданию гомоморфизма ее на полугруппу, все элементы которой идемпотентны. Особого внимания заслуживает случай, когда эта последняя коммутативна, т. е. когда для гомоморфизма φ, которому соответствует эта связка, при любых X и Y из полугруппы, имеет место

$\varphi(X)\cdot\varphi(Y)=\varphi(Y)\cdot\varphi(X)$, т. е. $\varphi(XY)=\varphi(YX)$. Связки с таким свойством, очевидно, могут быть охарактеризованы нижеследующим образом.

Определение. *Связка* $\mathfrak{n}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *называется коммутативной связкой, если для любых* X, $Y\in\mathfrak{A}$ *выполняется*

$$XY\sim YX(\mathfrak{n}).$$

Термин „связка“ (band) был введен Клиффордом [11]. Вместо коммутативной связки Клиффорд, также как и некоторые другие авторы, употребляет термин „полуструктура“ (semilattice) полугрупп.

Для коммутативной полугруппы всякая связка, очевидно, является коммутативной связкой.

Напомним, что при рассмотрении гомоморфизмов инверсных полугрупп (VII, § 3) мы фактически уже использовали конструкцию коммутативной связки.

1.13. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в 1.9, можно убедиться, что для любой непустой совокупности коммутативных связок их точная нижняя и точная верхняя границы являются коммутативными связками. Таким образом, *относительно частичной упорядоченности* I, 5.14 *множество коммутативных связок полугруппы является полной структурой*. Отсюда, в частности, следует, что для полугруппы существует такая ее коммутативная связка $\mathfrak{n}_0$ (точная нижняя граница всех коммутативных связок полугруппы), которая представляет собой наиболее дробное из разбиений, являющихся коммутативными связками. Все прочие коммутативные связки могут быть получены из $\mathfrak{n}_0$ путем „укрупнения“ компонент, т. е. объединением некоторых компонент $\mathfrak{n}_0$.

1.14. ***Определение.*** *Если каждую компоненту некоторой связки полугруппы* $\mathfrak{A}$ *можно снабдить парой индексов* $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$, *где* ξ *пробегает все элементы некоторого множества* Γ', *а* η — *множества* Γ, *причем для любых* ξ_1, $\xi_2\in\Gamma'$ *и* η_1, $\eta_2\in\Gamma$ *имеет место*

$$\mathfrak{B}_{\xi_1\eta_1}\cdot\mathfrak{B}_{\xi_2\eta_2}\subset\mathfrak{B}_{\xi_1\eta_2},$$

то данная связка называется матричной связкой.

1.15. Пусть $\mathfrak{n}$ есть некоторая связка полугруппы $\mathfrak{A}$. Если эта связка является матричной, то, сопоставляя всем

элементам компоненты $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$ пару ее индексов (ξ, η), мы, очевидно, получаем гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{A}$, которому соответствует данная матричная связка. Этот гомоморфизм отображает $\mathfrak{A}$ на полугруппу типа, рассмотренного в V, 6.11. Это полугруппа, все элементы которой регулярно сопряжены между собой. Очевидно и обратное, если гомоморфизм φ, которому соответствует данная связка, таков, что $\varphi(\mathfrak{A})$ есть полугруппа, все элементы которой регулярно сопряжены между собой (V, 6.12), то и является матричной связкой.

1.16. Важная роль понятия матричной связки станет особенно ясна, когда мы покажем в следующем параграфе, что всякая связка полугрупп некоторого класса Σ может быть представлена в виде коммутативной связки полугрупп, являющихся матричными связками полугрупп класса Σ.

1.17. Отметим, что с конструкцией описанного вида мы уже сталкивались. Вполне простая полугруппа без нуля матричного типа $\mathfrak{S}'(P, \mathfrak{G})$ (V, 6.3) представляет собой матричную связку групп $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$ (V, 6.7), где $\mathfrak{G}_{\xi\eta}$ состоит из всех элементов вида (G, ξ, η) $(G \in \mathfrak{G})$. Тем самым благодаря V, 6.4 и всякая вполне простая полугруппа без нуля оказывается матричной связкой групп.

1.18. Как отметил Клиффорд [11], указанное свойство 1.17 вполне простых полугрупп без нуля является для них характеристичным. Всякая полугруппа $\mathfrak{A}$, являющаяся матричной связкой групп, есть вполне простая полугруппа без нуля. Справедливость этого утверждения вытекает из нижеследующего более общего свойства.

Теорема. *Матричная связка вполне простых полугрупп без нуля сама является вполне простой полугруппой без нуля.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ является матричной связкой вполне простых полугрупп без нуля: $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}, \ldots, \mathfrak{B}_{\xi\eta}, \ldots$

Если двусторонний идеал $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ содержит элемент $X \in \mathfrak{B}_{\xi\eta}$, то он содержит и множество $\mathfrak{B}_{\xi\eta} X \mathfrak{B}_{\xi\eta}$. Но это последнее есть двусторонний идеал вполне простой полугруппы без нуля $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$. Поэтому

$$\mathfrak{B}_{\xi\eta} = \mathfrak{B}_{\xi\eta} X \mathfrak{B}_{\xi\eta} \subset \mathfrak{T}.$$

Если $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{B}_{\xi\eta}$, то благодаря свойству матричной связки для любого $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$ имеем

$$\mathfrak{B}_{\sigma\xi} \mathfrak{B}_{\xi\eta} \mathfrak{B}_{\eta\tau} \subset \mathfrak{B}_{\sigma\tau}.$$

Так как $\mathfrak{B}_{\xi\eta} \subset \mathfrak{T}$, то и $\mathfrak{B}_{\sigma\xi}\mathfrak{B}_{\xi\eta}\mathfrak{B}_{\eta\tau} \subset \mathfrak{T}$ и, следовательно, пересечение $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$ и $\mathfrak{T}$ непусто. Отсюда, согласно отмеченному выше, следует, что $\mathfrak{B}_{\sigma\tau} \subset \mathfrak{T}$. Таким образом, мы показали, что произвольный двусторонний идеал $\mathfrak{T}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ обязан совпадать с $\mathfrak{A}$.

В одной из полугрупп $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$ возьмем такой идемпотент I, который не является двусторонней единицей ни для какого другого идемпотента из $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$. Такой I найдется благодаря V, 3.10, V, 6.15, ибо $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$ является вполне простой полугруппой без нуля. Покажем, что I не может быть двусторонней единицей также ни для какого идемпотента $I' \in \mathfrak{B}_{\sigma\tau}$, где $\sigma \neq \xi$ или $\tau \neq \eta$. Действительно, по свойству матричной связки при $\sigma \neq \xi$ получаем

$$II' \in \mathfrak{B}_{\xi\eta}\mathfrak{B}_{\sigma\tau} \subset \mathfrak{B}_{\xi\tau}$$

и потому II' отличен от I', который содержится в $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$.

При $\tau \neq \eta$ аналогично показываем, что $I'I$ содержится в $\mathfrak{B}_{\sigma\eta}$ и потому отличен от I'.

Существование в $\mathfrak{A}$ идемпотента I, не являющегося двусторонней единицей ни для какого другого идемпотента I', благодаря доказанному выше, согласно теореме V, 6.15, означает, что $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа без нуля.

§ 2. Вполне регулярные полугруппы

2.1. Мы определили вполне регулярную полугруппу, как такую полугруппу, все элементы которой вполне регулярны (II, 6.1). Но, как нам известно (III, 1.15), вполне регулярными являются те и только те элементы полугруппы, которые содержатся в некоторых ее подгруппах. Отсюда вытекает, что полугруппа является вполне регулярной тогда и только тогда, когда она есть объединение групп. Если учесть сказанное в III, 1.16, то можно усилить это условие. *Всякая вполне регулярная полугруппа является непересекающимся объединением групп.* Можно также сказать, что *полугруппа является вполне регулярной тогда и только тогда, когда она обладает таким разбиением, все компоненты которого являются группами.* Существует еще целый ряд критериев полной регулярности полугрупп. Впервые полугруппы этого класса были рассмотрены Клиффордом [4] под названием полугрупп, обладающих относитель-

ными обратными. Это название объясняется тем, что, как следует из II, 6.4, во вполне регулярных полугруппах, и только в них, для любого элемента A всегда найдутся такие A' и I, что

$$IA = AI = A, \quad AA' = A'A = I.$$

2.2. Как показал Круазо [5], класс вполне регулярных полугрупп может быть очерчен с помощью классов регулярности (II, 6.11).

Теорема. *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была вполне регулярной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ есть объединение групп, то произвольный элемент A из $\mathfrak{A}$ содержится в некоторой группе $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}$. В этой группе A имеет двусторонне обратный элемент A^{-1} относительно $E_{\mathfrak{G}}$. Поэтому

$$A = A^2A^{-3}A^2$$

и, следовательно,

$$A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0), \quad A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2),$$

т. е.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

2) Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Для произвольного элемента $A \in \mathfrak{A}$ найдутся такие X, $Y \in \mathfrak{A}$, что

$$A = XA^2, \quad A = A^2Y.$$

Так как

$$XA = XA^2Y = AY,$$

то

$$(XA) \cdot A = A, \quad A \cdot (XA) = AAY = A,$$
$$XA = X \cdot A = A \cdot Y.$$

XA оказывается регулярной двусторонней единицей элемента A, откуда, согласно II, 6.4, следует, что A вполне регулярен.

2.3. ***Следствие.*** *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была вполне регулярна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 2).$$

Действительно, если $\mathfrak{A}$ вполне регулярна, то, как было показано в первой части доказательства предыдущей теоремы, каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ содержится в $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 2)$.

С другой стороны, согласно II, 6.12, (β),

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 2) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0) \subset \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 2) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2) \subset \mathfrak{A}.$$

Поэтому из равенства, указанного в формулировке следствия, вытекает выполнение условий предыдущей теоремы.

2.4. Достаточность критерия 2.3 может быть усилена.

Теорема. *Для того чтобы полугруппа* $\mathfrak{A}$ *была вполне регулярной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 1) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ вполне регулярна, то указанные равенства непосредственно следуют из 2.3 благодаря II, 6.12, (β).

Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 1) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2).$$

Согласно II, 6.12, (ε), отсюда следует

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 2).$$

Для произвольного элемента $A \in \mathfrak{A}$ найдется такой $X \in \mathfrak{A}$, что

$$A = AXA^2,$$

для XA найдется такой $Y \in \mathfrak{A}$, что

$$XA = (XA) \cdot Y \cdot (XA)^2.$$

Отсюда получаем:

$$A = AXA^2 = A \cdot XA \cdot A = A \cdot (XA) \cdot Y \cdot (XA)^2 \cdot A = \\ = AXAYX \cdot (AXA^2) = AXAYXA;$$

$$A = AXAY \cdot XA = AXAY \cdot (XA) \cdot Y \cdot (XA)^2 = AY(XA)^2;$$

$$A = AY(XA)^2 = AYX \cdot A \cdot XA = AYX \cdot AXA^2 \cdot XA = \\ = AY(XA)^2 \cdot AXA = A \cdot AXA = A^2 \cdot (XA).$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0)$, т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 0)$. Так как к тому же по предположению $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$, то из 2.2 следует, что $\mathfrak{A}$ вполне регулярна.

2.5. Совершенно аналогично доказывается симметричная теорема, согласно которой $\mathfrak{A}$ является вполне регулярной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 1) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(0, 2)$.

2.6. Сопоставляя 2.3, 2.4 и 2.5, непосредственно получаем следствие о соответствующих классах регулярности.

Следствие. *Если в полугруппе $\mathfrak{A}$ один из трех классов $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(1, 2)$, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 1)$ $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(2, 2)$ совпадает с $\mathfrak{A}$, то и два остальных класса равны $\mathfrak{A}$.*

2.7. Полученные критерии полной регулярности позволяют охарактеризовать вполне регулярные полугруппы со стороны свойства изолированности их идеалов (IV, 6.1; IV, 6.2, (η)). Действительно, сопоставляя 2.2 и IV, 6.4, (γ), непосредственно получаем такое условие.

Следствие. *У вполне регулярных полугрупп и только у них все идеалы являются изолированными.*

2.8. Пользуясь 2.4 и IV, 6.4, (α), можно видоизменить последнее условие.

Следствие. *Для того чтобы полугруппа была вполне регулярной, необходимо и достаточно, чтобы она являлась регулярной полугруппой, все левые идеалы которой изолированы.*

2.9. Рассмотрим ряд других свойств идеалов вполне регулярных полугрупп.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть вполне регулярная полугруппа.

(α). *Если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ являются двусторонними идеалами $\mathfrak{A}$, то*

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2.$$

Действительно, включение

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$$

очевидно. С другой стороны, пусть $X \in \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$. Так как X вполне регулярен, то при некотором $Y \in \mathfrak{A}$

$$XYX = X.$$

Так как $X \in \mathfrak{T}_1$ и $YX \in \mathfrak{T}_2$, то

$$X = X \cdot YX \in \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2.$$

(β). *Если* $\mathfrak{T}_1$ *и* $\mathfrak{T}_2$ *являются двусторонними идеалами* $\mathfrak{A}$, *то*

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1.$$

Это непосредственно следует из (α).

(γ). *Если* $\mathfrak{T}$ *есть двусторонний идеал* $\mathfrak{A}$, *то*

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}.$$

Это непосредственно следует из (α).

(δ). *Двусторонне идеальной оболочкой элемента* $A \in \mathfrak{A}$ (IV, 3.3; IV, 3.6) *является* $\mathfrak{A}A\mathfrak{A}$.

Действительно, так как A обладает двусторонней единицей I, то

$$\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}AI \subset \mathfrak{A}A\mathfrak{A};$$
$$A\mathfrak{A} = IA\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}A\mathfrak{A};$$
$$A = IAI \subset \mathfrak{A}A\mathfrak{A}$$

и потому

$$\mathfrak{A}A\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}A \cup A\mathfrak{A} \cup A = \mathfrak{A}A\mathfrak{A}.$$

(ε). *Относительно действия умножения подмножеств главные двусторонние идеалы* $\mathfrak{A}$ *образуют полугруппу, а сопоставление каждому элементу* $\mathfrak{A}$ *его двусторонне идеальной оболочки является гомоморфизмом* $\mathfrak{A}$ *на эту полугруппу.*

Действительно, для любых A, B, $C \subset \mathfrak{A}$

$$(BCA)^2 = BC \cdot AB \cdot CA \subset \mathfrak{A}AB\mathfrak{A}.$$

Но $\mathfrak{A}AB\mathfrak{A}$ есть идеал. Согласно 2.7, он изолирован и потому, согласно IV, 6.2, (η),

$$BCA \in \mathfrak{A}AB\mathfrak{A}.$$

Благодаря этому включению и благодаря (β)

$$\mathfrak{A}A\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}B\mathfrak{A} = \mathfrak{A}B\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}A\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} \cdot B\mathfrak{A}A \cdot \mathfrak{A} \subset$$
$$\subset \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}AB\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}AB\mathfrak{A}.$$

Так как к тому же, очевидно, имеет место и обратное включение, то мы получаем

$$\mathfrak{A}A\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}B\mathfrak{A} = \mathfrak{A}AB\mathfrak{A}.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость доказываемого утверждения.

2.10. С помощью свойства полной регулярности можно дать новый подход к вполне простым полугруппам без нуля, рассмотренным в § 3 и § 6 главы V.

Теорема. *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *будет вполне простой полугруппой без нуля тогда и только тогда, когда она вполне регулярна и не имеет собственных двусторонних идеалов.*

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ есть вполне простая полугруппа без нуля, то, как мы знаем (V, 6.7), каждый ее элемент содержится в некоторой ее подгруппе. Согласно 2.1, это означает, что $\mathfrak{A}$ является вполне регулярной. Собственных двусторонних идеалов $\mathfrak{A}$ не имеет по определению вполне простой полугруппы без нуля.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ вполне регулярна и не имеет собственных двусторонних идеалов. Пусть I_1 и I_2 такие идемпотенты $\mathfrak{A}$, что

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_1.$$

Благодаря V, 3.10; V, 6.15 для доказательства того, что $\mathfrak{A}$ вполне простая полугруппа без нуля, достаточно показать, что эти равенства возможны лишь при $I_1 = I_2$.

Так как $\mathfrak{A}I_1\mathfrak{A}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, то он должен совпадать с $\mathfrak{A}$, т. е. при некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$

$$I_2 = XI_1Y.$$

Обозначив

$$A = I_2XI_2, \quad B = I_2YI_2,$$

получаем

$$AI_1B = I_2XI_2I_1I_2YI_2 = I_2XI_1YI_2 = I_2I_2I_2 = I_2.$$

Пусть A' есть элемент, регулярно сопряженный с A и перестановочный с ним (II, 6.7). Так как

$$I_2 = AI_1B = AA'AI_1B = AA'I_2 = A'AI_2 = A'A = AA',$$

то

$$I_2 = I_2I_2 = A'AA'A = A'I_2A = A'AI_1BA = I_2I_1BA = I_1BA.$$

Таким образом, I_2 оказывается регулярной левой единицей для I_1. Аналогично показываем, что I_2 есть и регулярная правая единица I_1. Но, как мы знаем (II, 6.5), элемент может иметь лишь одну регулярную двустороннюю единицу, каковой для I_1 является он сам. Следовательно, $I_2 = I_1$.

2.11. Выясним, что представляют собой двусторонние идеальные слои (IV, 3.3) вполне регулярных полугрупп.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{N}$ есть двустороннеидеальный слой вполне регулярной полугруппы $\mathfrak{A}$. Для любого $N \in \mathfrak{N}$ множество*

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}N\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N},$$

если оно непусто, является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Предположим, что в $\mathfrak{A}\mathfrak{N}'\mathfrak{A}$ найдется элемент Z, не содержащийся в $\mathfrak{N}'$. При некоторых U, $V \in \mathfrak{A}$ и $T \in \mathfrak{N}'$

$$Z = UTV.$$

Так как

$$Z \in U\mathfrak{N}'V \subset \mathfrak{A}\mathfrak{A}N\mathfrak{A}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}N\mathfrak{A},$$

$$Z \bar{\in} \mathfrak{A}N\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N},$$

то $Z \in \mathfrak{N}$. По определению двустороннеидеального слоя, принимая во внимание 2.9, (δ), получаем

$$\mathfrak{A}Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N\mathfrak{A}.$$

Но тогда, с одной стороны,

$$\mathfrak{A}N\mathfrak{A} = \mathfrak{A}Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}UTV\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}T\mathfrak{A}$$

и, с другой стороны,

$$\mathfrak{A}T\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{N}'\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\mathfrak{A}N\mathfrak{A}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}N\mathfrak{A}.$$

Однако равенство $\mathfrak{A}N\mathfrak{A} = \mathfrak{A}T\mathfrak{A}$ невозможно, ибо $N \in \mathfrak{N}$, а $T \bar{\in} \mathfrak{N}$.

Мы показали, что $\mathfrak{A}\mathfrak{N}'\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}'$. Так как каждый элемент из $\mathfrak{N}'$ обладает и левой и правой единицей, то это и означает, что $\mathfrak{N}'$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$.

2.12. ***Теорема.*** *Двустороннеидеальный слой $\mathfrak{N}$ вполне регулярной полугруппы $\mathfrak{A}$ является вполне простой полугруппой без нуля.*

Доказательство. Благодаря 2.10 достаточно показать, что $\mathfrak{N}$ есть вполне регулярная полугруппа, не имеющая собственных двусторонних идеалов.

Если N_1, $N_2 \in \mathfrak{N}$, то благодаря 2.9, (δ)

$$\mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N_2\mathfrak{A}.$$

Согласно 2.9, (γ), (δ), (ε),

$$\mathfrak{A}N_1N_2\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}N_2\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}N_1\mathfrak{A}.$$

Из этого благодаря $N_1 \in \mathfrak{N}$ вытекает, что $N_1N_2 \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ оказывается подполугруппой $\mathfrak{A}$.

Множество

$$\mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} \cdot N_1 \cdot \mathfrak{A}N_1\mathfrak{A}$$

является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$. Оно содержит N_1^3. Поэтому, согласно 2.7, оно должно содержать и N_1. Но двусторонний идеал, содержащий один из элементов двустороннеидеального слоя, должен содержать и всякий другой его элемент. Следовательно,

$$N_2 = XN_1Y,$$

где X и Y принадлежат $\mathfrak{A}N_1\mathfrak{A}$. Ни X, ни Y не могут содержаться в $\mathfrak{A}N_1\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$, которое не содержит N_2 и, согласно 2.11, является двусторонним идеалом. Следовательно, $X,\ Y \in \mathfrak{N}$. Таким образом, из $N_2 = XN_1Y$ следует, что всякий двусторонний идеал подполугруппы $\mathfrak{N}$, содержащий один из ее элементов, обязательно содержит и любой другой элемент, т. е. $\mathfrak{N}$ не обладает собственными двусторонними идеалами.

Так как $N_1 \in \mathfrak{N}$ вполне регулярен в $\mathfrak{A}$, то при некотором $X \in \mathfrak{A}$

$$NXN = N, \quad XNX = N, \quad XN = NX.$$

Очевидно, всякий двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, содержащий один из элементов N или X, должен содержать и второй. Следовательно, N и X принадлежат одному и тому же двустороннеидеальному слою, т. е. $X \in \mathfrak{N}$. Отсюда следует, что N есть вполне регулярный элемент полугруппы $\mathfrak{N}$.

2.13. Полученные свойства вполне регулярных полугрупп позволяют найти для них важное разложение.

Теорема. *Вполне регулярная полугруппа является коммутативной связкой* (1.12) *вполне простых полугрупп без нуля.*

Доказательство. Согласно IV, 3.8, вполне регулярная полугруппа $\mathfrak{A}$ является объединением без пересечений своих двусторонних идеальных слоев, каждый из которых,

согласно 2.12, является вполне простой полугруппой без нуля

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{N}_{\xi}.$$

Возьмем два произвольных двустороннеидеальных слоя $\mathfrak{N}_\alpha$ и $\mathfrak{N}_\beta$ и выделим в них по два произвольных элемента

$$A_\alpha,\ A'_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha;\quad A_\beta,\ A'_\beta \in \mathfrak{N}_\beta.$$

Элементы из одного и того же слоя имеют одинаковые двусторонние идеальные оболочки

$$\mathfrak{A}A_\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A'_\alpha\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}A_\beta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A'_\beta\mathfrak{A}.$$

Пользуясь 2.9, (ε), получаем

$$\mathfrak{A}A_\alpha A_\beta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A_\alpha\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}A_\beta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A'_\alpha\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}A'_\beta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A'_\alpha A'_\beta\mathfrak{A}.$$

Следовательно, $A_\alpha A_\beta$ и $A'_\alpha A'_\beta$ содержатся в одном и том же двустороннеидеальном слое $\mathfrak{N}_\gamma$. Это означает, что

$$\mathfrak{N}_\alpha\mathfrak{N}_\beta \subset \mathfrak{N}_\gamma.$$

Но благодаря 2.9, (β)

$$\mathfrak{A}A_\beta A_\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A_\beta\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}A_\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A_\alpha\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}A_\beta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}A_\alpha A_\beta\mathfrak{A}.$$

Поэтому и $A_\beta A_\alpha \in \mathfrak{N}_\gamma$, откуда следует

$$\mathfrak{N}_\beta\mathfrak{N}_\alpha \subset \mathfrak{N}_\gamma.$$

2.14. *Следствие.* *Полугруппа, все элементы которой идемпотентны, является коммутативной связкой матричных связок единичных групп.*

Доказательство. Так как каждый идемпотент полугруппы образует ее единичную подгруппу, то, согласно 2.1 и 2.13, полугруппа $\mathfrak{A}$, все элементы которой идемпотентны, является коммутативной связкой вполне простых полугрупп без нуля, все элементы которых идемпотентны. Но таковые, как было отмечено в V, 6.14, изоморфны полугруппам типа, рассмотренного в V, 6.11, т. е. очевидным образом представляют собой матричные связки единичных групп.

2.15. Полученное следствие позволяет вывести уже упоминавшийся нами важный результат об общих связках, полученный Клиффордом [11].

Теорема. *Полугруппа, являющаяся связкой полугрупп, принадлежащих некоторому классу* Г, *может быть представлена в виде коммутативной связки полугрупп, являющихся матричными связками полугрупп, принадлежащих классу* Г.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n}$ есть связка полугруппы $\mathfrak{A}$, все компоненты которой $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... принадлежат классу Г. Рассмотрим факторполугруппу $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$, элементами которой являются $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... (VII, 2.4). Так как естественному гомоморфизму φ полугруппы $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$ (VII, 2.5) соответствует $\mathfrak{n}$, то, согласно 1.8, все элементы полугруппы $\varphi(\mathfrak{A}) = \overline{\mathfrak{A}}$ являются идемпотентами. Согласно 2.14, $\overline{\mathfrak{A}}$ есть коммутативная связка матричных связок единичных групп и потому существует такой гомоморфизм ψ полугруппы $\overline{\mathfrak{A}}$ на коммутативную полугруппу $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, все элементы которой идемпотентны, что гомоморфизму ψ соответствует эта коммутативная связка полугруппы $\overline{\mathfrak{A}}$ (1.12). Произведение $\psi\varphi$ является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Соответствующее ему двусторонне стабильное разбиение $\mathfrak{m}$ должно быть коммутативной связкой $\mathfrak{A}$ (1.12). Полный прообраз произвольного элемента из $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ при гомоморфизме $\psi\varphi$ представляет собой объединение некоторых из $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., которые в $\overline{\mathfrak{A}}$ образуют матричную связку. Это означает, что их можно снабдить такими парами индексов $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$, $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$, ..., что, согласно действию в $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$, которое обозначим значком $\bigcirc$, имеет место

$$\mathfrak{B}_{\xi\eta} \bigcirc \mathfrak{B}_{\sigma\tau} = \mathfrak{B}_{\xi\tau}$$

(напоминаем, что $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$, $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$, ... являются каждая отдельным элементом факторполугруппы $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$). Согласно связи между действиями в самой полугруппе и в факторполугруппе (VII, 2.3), в $\mathfrak{A}$ для умножения $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$, $\mathfrak{B}_{\sigma\tau}$, ... как подмножеств $\mathfrak{A}$, мы получаем

$$\mathfrak{B}_{\xi\eta} \cdot \mathfrak{B}_{\sigma\tau} \subset \mathfrak{B}_{\xi\tau}.$$

Но это и означает, что полный прообраз элемента полугруппы $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ при гомоморфизме $\psi\varphi$, т. е. компонента коммутативной связки $\mathfrak{m}$, является матричной связкой полугрупп $\mathfrak{B}_{\xi\eta}$, которые все принадлежат классу Г.

§ 3. Вполне регулярные инверсные полугруппы

3.1. Особо остановимся на вполне регулярных полугруппах, являющихся инверсными полугруппами. Класс таких полугрупп был изучен Клиффордом [4] и затем А. Е. Либером [2], который называл такие полугруппы простейшими обобщенными группами.

Как всегда, при рассмотрении инверсных полугрупп будем употреблять черту для обозначения регулярно сопряженного элемента, который в инверсной полугруппе определяется единственным образом. Без дополнительных ссылок будем пользоваться свойствами II, 7.3; II, 7.5.

Если инверсная полугруппа вполне регулярна, то благодаря перестановочности A и $\bar{A}$ для всякого элемента A имеет место

$$\bar{A}AA = A\bar{A}A = A.$$

Оказывается, что условие

$$\bar{A}A^2 = A,$$

выполненное для всех элементов инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$, также достаточно и для того, чтобы $\mathfrak{A}$ была вполне регулярна.

Действительно, применим это условие к $\bar{A}$

$$\overline{(\bar{A})}\,\bar{A}\bar{A} = \bar{A}, \quad A\bar{A}\bar{A} = \bar{A}.$$

Отсюда, переходя к регулярно сопряженным, получаем

$$AA\bar{A} = A.$$

При помощи этого равенства и того, что $\bar{A}A^2 = A$, получаем

$$A\bar{A} = \bar{A}AA\bar{A} = \bar{A}A,$$

что и доказывает полную регулярность полугруппы.

Аналогично и условие

$$A^2\bar{A} = A,$$

выполненное для всех элементов, необходимо и достаточно для полной регулярности инверсной полугруппы.

3.2. Если во вполне регулярной полугруппе все идемпотенты перестановочны между собой, то она является инвер-

сной (II, 7.4). Оказывается, что в этом случае о перестановочности идемпотентов можно высказать и более сильное утверждение.

Теорема. *Во вполне регулярной инверсной полугруппе каждый идемпотент перестановочен со всяким элементом полугруппы.*

Доказательство. Используя известные свойства регулярно сопряженных элементов, получаем для произвольных элемента A и идемпотента I нашей полугруппы

$$(AI)\,\overline{(AI)} = AI\bar{I}\bar{A} = AI\bar{A};$$
$$\overline{(AI)}\,(AI) = \bar{I}\bar{A}AI = I\bar{A}AI.$$

Так как регулярно сопряженные элементы (AI) и $\overline{(AI)}$ перестановочны и перестановочны идемпотенты I и $\bar{A}A$, то из этих равенств следует

$$AI\bar{A} = I\bar{A}A.$$

Благодаря этому получаем

$$AI = A\bar{A}AI = AI\bar{A}A = I\bar{A}AA = IA.$$

3.3. Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество всех идемпотентов вполне регулярной инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{H}$ является коммутативной полугруппой идемпотентов. Так как вполне простая полугруппа без нуля, каждый идемпотент которой перестановочен со всеми ее элементами, является группой (V, 6.7, (γ), (δ)), то применительно к $\mathfrak{A}$ результат 2.13 означает, что *вполне регулярная инверсная полугруппа* $\mathfrak{A}$ *является коммутативной связкой групп*

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{I \in \mathfrak{H}} \mathfrak{G}_I.$$

Здесь $\mathfrak{G}_I$ есть группа с единицей I.

Справедливо и обратное — *всякая коммутативная связка групп является вполне регулярной инверсной полугруппой*. Действительно, ее полная регулярность следует из того, что каждый ее элемент содержится в некоторой подгруппе (III, 1.15). Пусть I_1 и I_2 — два ее идемпотента. Так как полугруппа есть коммутативная связка групп, то для некоторой подгруппы $\mathfrak{G}$ нашей полугруппы

$$I_1 I_2 = G_1 \in \mathfrak{G}, \quad I_2 I_1 = G_2 \in \mathfrak{G}.$$

Отсюда следует

$$G_1G_2G_1 = I_1I_2 \cdot I_2I_1 \cdot I_1I_2 = I_1I_2I_1I_2 = G_1G_1.$$

Для элементов группы это возможно лишь в том случае, когда $G_2 = E_{\mathfrak{G}}$. Аналогично убеждаемся, что и $G_1 = E_{\mathfrak{G}}$. Из перестановочности произвольных идемпотентов заключаем об инверсности нашей вполне регулярной полугруппы.

Мы показали, что в коммутативной связке групп идемпотенты перестановочны. Отсюда следует, что их множество $\mathfrak{H}$ образует коммутативную полугруппу идемпотентов. Как мы показали в § 4 главы II, строение $\mathfrak{H}$ может быть задано соответствующим частичным упорядочением в $\mathfrak{H}$.

Отметим, что перемножение идемпотентов в полугруппе $\mathfrak{H}$ определяет умножение компонент в нашей коммутативной связке. Действительно, если

$$UV = W, \qquad (U, V, W \in \mathfrak{H}),$$

то

$$\mathfrak{G}_U\mathfrak{G}_V \cap \mathfrak{G}_W \neq \varnothing$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{G}_U\mathfrak{G}_V \subset \mathfrak{G}_W, \quad \mathfrak{G}_V\mathfrak{G}_U \subset \mathfrak{G}_W.$$

3.4. Если в $\mathfrak{H}$ для $U, V \in \mathfrak{H}$ имеет место $UV = U$, то рассмотрим отображение $\varphi_{U,V}$ группы $\mathfrak{G}_V$ в группу $\mathfrak{G}_U$

$$\varphi_{U,V}(X) = UXU \qquad (X \in \mathfrak{G}_V).$$

Так как $UX \in \mathfrak{G}_U$ и $XU \in \mathfrak{G}_U$, то

$$UX \cdot U = UX, \quad U \cdot XU = XU$$

и потому

$$\varphi_{U,V}(X) = UXU = UX = XU.$$

Благодаря этому легко убеждаемся, что отображение $\varphi_{U,V}$ является гомоморфизмом

$$\varphi_{U,V}(X) \cdot \varphi_{U,V}(Y) = UX \cdot YU = U(XY)U = \varphi_{U,V}(XY), \qquad (X, Y \in \mathfrak{G}_V).$$

Отметим два свойства указанных гомоморфизмов.

(1). $\varphi_{U,U}$ есть тождественный изоморфизм.

(2). Если

$$UV = U,\ VW = V \qquad (U, V, W \in \mathfrak{H}),$$

то

$$\varphi_{U,V} \cdot \varphi_{V,W} = \varphi_{U,W}.$$

Первое из них очевидно, поскольку U есть единица группы $\mathfrak{G}_U$.

Легко доказывается и второе. Пусть $X \in \mathfrak{G}_W$.

Тогда $VXV \in \mathfrak{G}_V$ и

$$(\varphi_{U,V} \cdot \varphi_{V,W})(X) = \varphi_{U,V}[\varphi_{V,W}(X)] = \varphi_{U,V}(VXV) =$$
$$= U(VXV)U = UXU = \varphi_{U,W}(X).$$

3.5. Таким образом, мы обнаружили, что вполне регулярной инверсной полугруппе $\mathfrak{A}$ сопоставляется система, состоящая из следующих элементов.

(α). Коммутативная полугруппа идемпотентов $\mathfrak{H}$ (совокупность всех идемпотентов $\mathfrak{A}$).

(β). Совокупность попарно непересекающихся групп $\mathfrak{G}_I$, единицы которых образуют множество $\mathfrak{H}$ $(E_{\mathfrak{G}_I} = I)$.

(γ). Совокупность гомоморфизмов $\varphi_{U,V}$, определенных для каждой пары $U, V \in \mathfrak{H}$, такой, что $UV = U$. Здесь $\varphi_{U,V}$ есть гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_V$ в группу $\mathfrak{G}_U$. Гомоморфизмы $\varphi_{U,V}$ обладают свойствами 3.4, (1), (2).

3.6. Задание системы 3.5 вполне определяет строение вполне регулярной инверсной полугруппы $\mathfrak{A}$. Действительно, множество элементов $\mathfrak{A}$ есть объединение всех групп $\mathfrak{G}_I$, указанных в (β). Умножение элементов $\mathfrak{A}$ производится по следующему правилу.

Пусть

$$X \in \mathfrak{G}_U,\ Y \in \mathfrak{G}_V,\ UV = W, \qquad (U, V, W \in \mathfrak{H}).$$

Тогда $XY \in \mathfrak{G}_W$, $UW = W$, $VW = W$ и потому

$$XY = W(XY)W = WX \cdot YW = \varphi_{W,U}(X) \cdot \varphi_{W,V}(Y).$$

Последнее произведение вполне определено заданием группы $\mathfrak{G}_W$, так как оба его множителя суть элементы из $\mathfrak{G}_W$.

3.7. Сопоставление вполне регулярной инверсной полугруппе ее системы 3.5 дает полную классификацию таких полугрупп, впервые полученную Клиффордом [4]. Это

следует из того, что, как мы сейчас покажем, каждая система типа 3.5 сама, в свою очередь, определяет некоторую вполне регулярную инверсную полугруппу.

Пусть дана произвольная система, состоящая из элементов, указанных в 3.5. В множестве $\mathfrak{A}$, являющемся объединением всех групп $\mathfrak{G}_I$ этой системы, определим действие.

Пусть

$$X \in \mathfrak{G}_U, \quad Y \in \mathfrak{G}_V, \quad UV = W \qquad (U, V, W \in \mathfrak{H}).$$

Полагаем

$$XY = T = \varphi_{W,U}(X) \cdot \varphi_{W,V}(Y).$$

T есть определенный элемент из $\mathfrak{G}_W$, так как, по определению гомоморфизмов $\varphi_{W,U}$ и $\varphi_{W,V}$, он является произведением элементов из этой группы.

Из того, что $\varphi_{I,I}$ $(I \in \mathfrak{H})$ есть тождественный изоморфизм, сразу следует, что для элементов из $\mathfrak{G}_I$ действие, определенное в $\mathfrak{A}$, совпадает с действием, определенным в самой $\mathfrak{G}_I$.

Также для элементов из $\mathfrak{H}$ — действие, определенное в $\mathfrak{A}$, совпадает с действием, определенным в $\mathfrak{H}$. Это следует из того, что если в $\mathfrak{H}$

$$UV = W, \qquad (U, V, W \in \mathfrak{H}),$$

то в $\mathfrak{A}$

$$U \cdot V = \varphi_{W,U}(U) \cdot \varphi_{W,V}(V).$$

Но U есть единица группы $\mathfrak{G}_U$, а W — единица группы $\mathfrak{G}_W$. Поэтому $\varphi_{W,U}(U) = W$. Аналогично $\varphi_{W,V}(V) = W$. Таким образом, и в $\mathfrak{A}$ мы получаем

$$U \cdot V = W \cdot W = W.$$

Покажем, что определенное нами действие в $\mathfrak{A}$ ассоциативно. Действительно, если

$$X_i \in \mathfrak{G}_{U_i}, \quad U_1U_2 = V, \quad VU_3 = W; \quad U_i, V, W \in \mathfrak{H}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

то, пользуясь свойством наших гомоморфизмов, получаем

$$\begin{aligned}(X_1X_2)X_3 &= [\varphi_{V,U_1}(X_1) \cdot \varphi_{V,U_2}(X_2)] \cdot X_3 = \\ &= \varphi_{W,V}[\varphi_{V,U_1}(X_1) \cdot \varphi_{V,U_2}(X_2)] \cdot \varphi_{W,U_3}(X_3) = \\ &= [(\varphi_{W,V} \cdot \varphi_{V,U_1})(X_1)] \cdot [(\varphi_{W,V} \cdot \varphi_{V,U_2})(X_2)] \cdot \varphi_{W,U_3}(X_3) = \\ &= \varphi_{W,U_1}(X_1) \cdot \varphi_{W,U_2}(X_2) \cdot \varphi_{W,U_3}(X_3).\end{aligned}$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что и произведение $X_1(X_2X_3)$ равно тому же самому элементу из $\mathfrak{G}_W$.

Так как $\mathfrak{A}$ есть объединение групп $\mathfrak{G}_I$ ($I \in \mathfrak{H}$), то она вполне регулярна (III, 1.15). Ее идемпотентами являются элементы из $\mathfrak{H}$, которые образуют коммутативную полугруппу. Поэтому $\mathfrak{A}$ инверсна (II, 7.4).

Легко убеждаемся, что система 3.5, соответствующая полученной вполне регулярной инверсной полугруппе, совпадает с исходной системой. $\mathfrak{H}$ есть коммутативная полугруппа идемпотентов $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}$ является объединением групп $\mathfrak{G}_I$ ($I \in \mathfrak{H}$).

Для

$$X \in \mathfrak{G}_V, \quad UV = V, \qquad (U, V \in \mathfrak{H})$$

мы имеем

$$UXU = \varphi_{U,U}(U) \cdot \varphi_{U,V}(X) \cdot \varphi_{U,U}(U) = \\ = U \cdot \varphi_{U,V}(X) \cdot U = \varphi_{U,V}(X),$$

т. е. гомоморфизмы системы, соответствующей построенной полугруппе, совпадают с соответствующими гомоморфизмами из исходной системы.

3.8. Множество идемпотентов вполне регулярной инверсной полугруппы является коммутативной полугруппой идемпотентов. Такая полугруппа, как мы показали в § 4 главы II, сопряжена с некоторой полуструктурой. Ее задание равносильно заданию сопряженной с ней полуструктуры. Среди полуструктур особо простыми являются структуры, представляющие собой вполне упорядоченное множество. В связи с этим в классе всех инверсных вполне регулярных полугрупп естественно выделяется класс таких полугрупп, идемпотенты которых вполне упорядочены относительно отношения быть единицей один для другого. На этот класс полугрупп впервые обратил внимание Н. Н. Воробьев [4], [8], обнаруживший особую роль полугрупп этого класса в отношении свойства существования единиц у идеалов полугруппы.

3.9. Пусть $\mathfrak{A}$ есть такая вполне регулярная полугруппа, у которой всякое непустое множество ее идемпотентов содержит свою двустороннюю единицу.

Рассмотрим ряд свойств $\mathfrak{A}$.

(α). $\mathfrak{A}$ *инверсна.*

Действительно, пусть I_1 и I_2 произвольные идемпотенты $\mathfrak{A}$. Так как множество $\{I_1, I_2\}$ содержит свою двустороннюю единицу, то

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_1.$$

Следовательно, идемпотенты $\mathfrak{A}$ перестановочны, откуда, согласно II, 7.4, следует, что $\mathfrak{A}$ инверсна.

(β). *$\mathfrak{A}$ является непересекающимся объединением вполне упорядоченного множества групп*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{G}_\xi \cup \mathfrak{G}_{\xi+1} \cup \ldots \qquad (\xi < \mu),$$

причем для любых $\eta < \xi < \mu$

$$E_{\mathfrak{G}_\eta} E_{\mathfrak{G}_\xi} = E_{\mathfrak{G}_\xi} E_{\mathfrak{G}_\eta} = E_{\mathfrak{G}_\xi}.$$

Действительно, если для идемпотентов I и I' полугруппы $\mathfrak{A}$ обозначить $I \leqslant I'$ в том случае, когда $II' = I'I = I'$, то множество всех идемпотентов относительно такого упорядочения будет, согласно предположению относительно $\mathfrak{A}$, вполне упорядоченным

$$I_1 < I_2 < \ldots < I_\xi < I_{\xi+1} < \ldots \quad (\xi < \mu).$$

Так как $\mathfrak{A}$ вполне регулярна, то она есть непересекающееся объединение групп $\mathfrak{G}_\xi$ $(1 \leqslant \xi < \mu)$, где $\mathfrak{G}_\xi$ есть множество всех элементов $\mathfrak{A}$, имеющих I_ξ своей регулярной двусторонней единицей (III, 1.14; III, 1.16).

(γ). *Отображение $\varphi_{\xi,\eta}$ для $\eta \leqslant \xi < \mu$ группы $\mathfrak{G}_\eta$*

$$\varphi_{\xi,\eta}(X) = E_\xi X E_\xi \qquad (X \in \mathfrak{G}_\eta)$$

является гомоморфизмом $\mathfrak{G}_\eta$ в $\mathfrak{G}_\xi$.

Это следует из (α), (β) и 3.4.

(δ). *Гомоморфизмы $\varphi_{\xi,\eta}$ удовлетворяют условиям:*

(1). *$\varphi_{\xi,\xi}$ есть тождественный изоморфизм;*

(2). *для $\eta \leqslant \xi \leqslant \zeta < \mu$ имеет место*

$$\varphi_{\zeta,\xi} \cdot \varphi_{\xi,\eta} = \varphi_{\zeta,\eta}.$$

Это следует из (γ) и 3.4

(ε). *Строение $\mathfrak{A}$ вполне определено заданием вполне упорядоченной последовательности групп*

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\xi, \mathfrak{G}_{\xi+1}, \ldots \qquad (\xi < \mu),$$

и гомоморфизмами $\varphi_{\xi,\eta}$ $(\eta \leqslant \xi < \mu)$.

Это следует из 3.6.

(ζ). *Для любого* $\nu < \mu$ *множество*

$$\mathfrak{T}_\nu = \bigcup_{\nu \leqslant \xi < \mu} \mathfrak{G}_\xi$$

является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$, *причем иных идеалов* $\mathfrak{A}$ *не имеет.*

То, что $\mathfrak{T}_\nu$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, следует из того, как в $\mathfrak{A}$ производится действие (3.6).

Пусть $\mathfrak{L}$ есть произвольный левый идеал $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{L} \ni I_\xi$, то $\mathfrak{L}$ содержит и все элементы группы $\mathfrak{G}_\xi$, так как $XI_\xi = X$ для любого $X \in \mathfrak{G}_\xi$.

В множестве тех I_ξ, которые содержатся в $\mathfrak{L}$, имеется единица I_λ. Поскольку все I_ξ для $\xi \geqslant \lambda$ принадлежат $\mathfrak{L}$, мы получаем

$$\mathfrak{L} \supset \mathfrak{T}_\lambda.$$

Так как I_σ при $\sigma < \lambda$ не содержится в $\mathfrak{L}$, то никакие элементы из $\mathfrak{G}_\sigma$ не принадлежат $\mathfrak{L}$. Таким образом, оказывается, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{T}_\lambda$.

(η). *Все идеалы* $\mathfrak{A}$ *двусторонние.*

Это следует из (ζ).

(θ). *Каждый идеал* $\mathfrak{A}$ *содержит свою единицу.*

Действительно, в $\mathfrak{T}_\nu$ элемент I_ν является двусторонней единицей для всякого I_ξ ($\xi \geqslant \nu$), а потому и для любого $X \in \mathfrak{G}_\xi$, так как I_ξ есть двусторонняя единица для X.

3.10. Напомним, что из 3.7. следует, что задание вполне упорядоченного множества произвольных групп $\mathfrak{G}_\xi$ ($1 \leqslant \xi < \mu$) и гомоморфизмов $\varphi_{\xi,\eta}$ ($\eta \leqslant \xi$), удовлетворяющих свойствам 3.9, (δ), определяет задание некоторой вполне регулярной полугруппы, которая, очевидно, будет обладать тем свойством, что любое непустое множество его идемпотентов содержит свою единицу.

3.11. Значение рассмотренных полугрупп определяется нижеследующей теоремой.

Теорема. *Если в полугруппе* $\mathfrak{A}$ *каждый левый идеал содержит свою единицу, то* $\mathfrak{A}$ *есть вполне регулярная полугруппа, у которой всякое непустое множество ее идемпотентов содержит свою единицу.*

Доказательство. 1) Каждому идемпотенту I полугруппы $\mathfrak{A}$ сопоставим множество $\mathfrak{A}I$, состоящее из всех

элементов $\mathfrak{A}$, для которых I является правой единицей. $\mathfrak{A}I$ есть левый идеал и потому он должен содержать свою единицу I'. Так как $I'I=I'$ и $I'I=I$, то $I'=I$, т. е. I является двусторонней единицей в $\mathfrak{A}I$.

Других левых идеалов, кроме идеалов указанного вида, $\mathfrak{A}$ не имеет. Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ есть произвольный левый идеал $\mathfrak{A}$. Он должен содержать свою единицу I и потому

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}I\subset\mathfrak{A}I, \quad \mathfrak{A}I\subset\mathfrak{A}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L},$$

т. е. $\mathfrak{L}=\mathfrak{A}I$. Так как каждый левый идеал содержит лишь одну свою единицу, то между идемпотентами $\mathfrak{A}$ и ее левыми идеалами устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть I_1 и I_2 есть два произвольных идемпотента $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}I_1\cup\mathfrak{A}I_2$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, то при некотором идемпотенте I_3

$$\mathfrak{A}I_1\cup\mathfrak{A}I_2=\mathfrak{A}I_3.$$

I_3 должен содержаться в $\mathfrak{A}I_1$ или в $\mathfrak{A}I_2$. В первом случае I_3, будучи единицей $\mathfrak{A}I_3$, будет единицей и для $\mathfrak{A}I_1$ и потому $I_3=I_1$, откуда следует $\mathfrak{A}I_2\subset\mathfrak{A}I_1$. Во втором случае $I_3=I_2$ и $\mathfrak{A}I_1\subset\mathfrak{A}I_2$. Таким образом, из двух произвольных левых идеалов $\mathfrak{A}I_1$ и $\mathfrak{A}I_2$ всегда один содержится в другом; при этом

$$\mathfrak{A}I_2\subset\mathfrak{A}I_1$$

имеет место в том случае, когда

$$I_2I_1=I_1I_2=I_2.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ есть произвольное непустое множество идемпотентов $\mathfrak{A}$. Рассмотрим левый идеал $\mathfrak{A}\mathfrak{H}$. При некотором идемпотенте I

$$\mathfrak{A}\mathfrak{H}=\mathfrak{A}I.$$

Следовательно, для некоторого $I'\in\mathfrak{H}$

$$I\subset\mathfrak{A}I'.$$

Так как

$$\mathfrak{A}I'\subset\mathfrak{A}\mathfrak{H}=\mathfrak{A}I, \quad \mathfrak{A}I\subset\mathfrak{A}\mathfrak{A}I'\subset\mathfrak{A}I',$$

то $\mathfrak{A}I'=\mathfrak{A}I$ и, согласно сказанному выше, $I'=I$. Идемпотент $I'=I$, будучи единицей идеала $\mathfrak{A}I=\mathfrak{A}\mathfrak{H}$, тем самым будет двусторонней единицей и в множестве $\mathfrak{H}$, которому он принадлежит.

2) Возьмем произвольный элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$. $A \cup \mathfrak{A}A$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, а потому при некотором идемпотенте

$$\mathfrak{A}A \cup A = \mathfrak{A}I,$$

причем I есть единица $\mathfrak{A}I$.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ объединение всех таких левых идеалов полугруппы $\mathfrak{A}I$, которые не содержат I. Очевидно, $\mathfrak{L}$ есть собственный левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}I$ или $\mathfrak{L} = \varnothing$. Пусть $\mathfrak{L} \neq \varnothing$. Так как

$$\mathfrak{A}\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I\mathfrak{L} = (\mathfrak{A}I)\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L},$$

то $\mathfrak{L}$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Поэтому при некотором идемпотенте I'

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}I'.$$

$\mathfrak{L}\mathfrak{A}I$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, принадлежащий $\mathfrak{A}I$ и содержащий $\mathfrak{L}$ (так как $\mathfrak{L}I = \mathfrak{L}$).

Если бы $\mathfrak{L}\mathfrak{A}I$ содержал I, то при некоторых $X \in \mathfrak{L}$ и $A \in \mathfrak{A}$ мы имели бы

$$I = XAI = I'XAI = I' \cdot I = I',$$

что невозможно, ибо $I' \in \mathfrak{L}$, а $I \notin \mathfrak{L}$. Следовательно,

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A}I \subset \mathfrak{L}.$$

Таким образом, $\mathfrak{L}$ или пусто, или является двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{A}I$.

Обозначим

$$\mathfrak{A}I \setminus \mathfrak{L} = \mathfrak{K}.$$

Если $K \in \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{A}K$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, принадлежащий $\mathfrak{A}I$ и содержащий K. Так как $K \notin \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{A}K$ должен равняться $\mathfrak{A}I$. Обратно, если $X \in \mathfrak{A}I$ и $\mathfrak{A}X = \mathfrak{A}I$, то всякий левый идеал полугруппы $\mathfrak{A}I$, содержащий X, будет содержать и $\mathfrak{A}IX = \mathfrak{A}X = \mathfrak{A}I$, т. е. совпадает с $\mathfrak{A}I$. Потому X не может принадлежать $\mathfrak{L}$, т. е. $X \in \mathfrak{K}$.

Если $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$, то благодаря указанному свойству $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{A}K_1K_2 = \mathfrak{A}K_1 \cdot K_2 = \mathfrak{A}I \cdot K_2 = \mathfrak{A}K_2 = \mathfrak{A}I,$$

т. е. $K_1K_2 \in \mathfrak{K}$. Таким образом, $\mathfrak{K}$ оказывается подполугруппой $\mathfrak{A}$. Так как $I \notin \mathfrak{L}$, то I принадлежит $\mathfrak{K}$ и, конечно, является в нем единицей.

Пусть $K \in \mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{L}$ есть двусторонний идеал $\mathfrak{A}I$, то

$$\mathfrak{A}I \cdot (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}K) = (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}) \cdot (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}K) \subset \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}\mathfrak{K}K \subset \mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}K,$$

т. е. $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{K}K$ оказывается левым идеалом $\mathfrak{A}I$. Если $\mathfrak{L} = \varnothing$, то $\mathfrak{K}K$ — также левый идеал $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}I$. При этом он не содержится в $\mathfrak{L}$, ибо имеет элемент $K \cdot K = \mathfrak{K}$, не принадлежащий $\mathfrak{L}$. По определению $\mathfrak{L}$, этот идеал должен содержать I. Так как $I \overline{\in} \mathfrak{L}$, то при некотором $K' \in \mathfrak{K}$ должно иметь место

$$K'K = I.$$

Мы показали, что произвольный элемент K полугруппы $\mathfrak{K}$ является правым делителем единицы I этой полугруппы. Согласно II, 2.18, $\mathfrak{K}$ является группой. Исходный элемент A не может содержаться в $\mathfrak{L}$, так как или $\mathfrak{L} = \varnothing$, или $\mathfrak{L}$ есть левый идеал $\mathfrak{A}$, не содержащий I, тогда как $A \cup \mathfrak{A}A$ содержит I. Так как $A \in \mathfrak{A}I$, то A должен принадлежать группе $\mathfrak{K}$. Согласно III, 1.15, отсюда следует, что элемент A вполне регулярен.

3.12. Учитывая 3.9, из полученной теоремы вытекает следствие.

Следствие. *Для того чтобы в полугруппе $\mathfrak{A}$ каждый идеал содержал свою единицу, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ была вполне регулярна и всякое непустое множество ее идемпотентов содержало бы свою единицу.*

Строение таких полугрупп и ряд их свойств были описаны в 3.9. В частности, видно, что второе из условий следствия может быть заменено требованием, чтобы все идемпотенты полугруппы образовывали вполне упорядоченное множество

$$I_1, I_2, \ldots, I_\xi, I_{\xi+1}, \ldots \quad (\xi < \mu),$$

в котором

$$I_\xi I_\eta = I_\eta I_\xi = I_\xi$$

для любых $\eta \leqslant \xi < \mu$.

3.13. Среди рассмотренных полугрупп содержатся, в частности, такие, которые удовлетворяют более сильному условию существования единицы в каждой подполугруппе.

Теорема. *Для того чтобы каждая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$ содержала свою единицу, необходимо и до-*

статочно, чтобы $\mathfrak{A}$ *была периодической вполне регулярной полугруппой, у которой всякое непустое множество ее идемпотентов содержит свою единицу.*

Доказательство. 1) Если каждая подполугруппа $\mathfrak{A}$ содержит свою единицу, то, в частности, и каждый левый идеал содержит свою единицу, а потому, согласно 3.11, $\mathfrak{A}$ должна быть вполне регулярной полугруппой, у которой всякое непустое множество ее идемпотентов содержит свою единицу.

При этом всякий элемент A из $\mathfrak{A}$ должен порождать моногенную подполугруппу $[A]$, которая должна содержать свою единицу. Для этого необходимо, чтобы $[A]$ была конечной. Таким образом, полугруппа $\mathfrak{A}$ должна быть периодической.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ есть периодическая вполне регулярная полугруппа, у которой всякое непустое множество ее идемпотентов содержит свою единицу. Согласно 3.9, (β), $\mathfrak{A}$ есть объединение вполне упорядоченного множества групп

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{G}_{\xi}.$$

Произвольная подполугруппа $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ равна объединению

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\xi} \mathfrak{G}'_{\xi}, \quad \mathfrak{G}'_{\xi} = \mathfrak{G}_{\xi} \cap \mathfrak{B}.$$

Некоторые множества $\mathfrak{G}'_{\xi}$ могут оказаться пустыми.

Пусть $\mathfrak{G}'_{\nu}$ есть первое из непустых (такое должно существовать благодаря полной упорядоченности).

Пусть $X \in \mathfrak{G}'_{\nu}$. Так как $\mathfrak{G}_{\nu}$ есть периодическая группа, то $[X] \ni I_{\nu}$, где I_{ν} есть единица группы $\mathfrak{G}_{\nu}$.

По свойству 3.9, (θ) I_{ν} является единицей $\mathfrak{T}_{\nu}$, а потому и единицей $\mathfrak{B}$, содержащейся в $\mathfrak{T}_{\nu}$.

§ 4. Последовательно аннулирующие связки

4.1. Задание коммутативной связки полугруппы равносильно заданию гомоморфизма на коммутативную полугруппу идемпотентов (1.8; 1.12). Среди таких полугрупп особо выделяются полугруппы, сопряженные с линейно упорядоченными множествами (II, 4.11). В связи с этим естественно

выделить и соответствующий класс коммутативных связок. Соответствующая конструкция была рассмотрена А. М. Кауфманом [1] под названием простой последовательно уничтожающей суммы. Рассмотрение этой конструкции позволяет изучить строение так называемых голоидных полугрупп. Выделение класса этих полугрупп довольно естественно само по себе. Кроме того, эти полугруппы играют определенную роль в изучении линейно упорядоченных групп, на чем мы остановимся в § 3 главы X.

4.2. ***Определение.*** *Разбиение полугруппы* $\mathfrak{A}$ *на подполугруппы называется последовательно аннулирующей связкой, если для любых двух различных компонент* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B}'$ *этого разложения выполняется, одно из двух: или*

$$X\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'X = X$$

для всякого $X \in \mathfrak{B}$, *или*

$$Y\mathfrak{B} = \mathfrak{B}Y = Y,$$

для всякого $Y \in \mathfrak{B}'$.

Очевидно, последовательно аннулирующая связка действительно является связкой в смысле определения 1.6 и при том коммутативной (1.12).

4.3. Из определения сразу следует, что множество всех компонент последовательно аннулирующей связки оказывается линейно упорядоченным относительно отношения частичного упорядочения, определяемого следующим образом: $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}'$, если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, или

$$XX' = X'X = X'$$

для любых $X \in \mathfrak{B}$, $X' \in \mathfrak{B}'$.

При этом, если для некоторых двух элементов двух каких-нибудь компонент $X \in \mathfrak{B}$ и $X' \in \mathfrak{B}'$ имеет место $XX' = X'$ или $X'X = X'$, то отсюда, очевидно, следует $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}'$.

Непосредственно видно, что задание компонент последовательно аннулирующей связки и закона упорядочения в их множестве вполне определяет строение полугруппы.

4.4. Разбиение полугруппы, состоящее из одной компоненты, совпадающей со всей полугруппой, будем называть несобственной последовательно аннулирующей связкой.

Отметим некоторые свойства последовательно аннулирующих связок.

(α). *Если все компоненты последовательно аннулирующей связки полугруппы* $\mathfrak{A}$ *являются коммутативными полугруппами, то и сама* $\mathfrak{A}$ *коммутативна.*

(β). *Последовательно аннулирующая связка полугруппы с левым сокращением не может иметь более двух компонент.*

Действительно, предположим, что $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ есть три такие компоненты некоторой последовательно аннулирующей связки, что

$$\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}_3$$

относительно упорядочения 4.2. Тогда для $X_1 \in \mathfrak{B}_1$, $X_2 \in \mathfrak{B}_2$, $X_3 \in \mathfrak{B}_3$ мы имеем

$$X_3 = X_3X_2 = X_3X_2X_1 = X_3X_1, \quad X_3 = X_3X_2.$$

Так как $X_1 \neq X_2$, то полугруппа не является полугруппой с левым сокращением.

(γ). *Если полугруппа с левым сокращением обладает собственной последовательно аннулирующей связкой, то она имеет единицу, которая присоединена внешним образом.*

Согласно (β), собственная последовательно аннулирующая связка полугруппы $\mathfrak{A}$ с левым сокращением состоит из двух компонент

$$\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2.$$

Если I, $I' \in \mathfrak{B}_1$ и $X \in \mathfrak{B}_2$, то

$$XI = X, \quad XI' = X$$

и потому $I = I'$. Следовательно, $\mathfrak{B}_1$ состоит лишь из единственного элемента I. Так как $\mathfrak{B}_1$ подполугруппа, то $I^2 = I$. Так как $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2$, то

$$XI = IX = X$$

для всякого $X \in \mathfrak{B}_2$. Следовательно, I есть единица $\mathfrak{A}$. Так как для X, $X' \in \mathfrak{B}_2$ и $XX' \in \mathfrak{B}_2$, то единица I присоединена внешним образом.

(δ). *Если полугруппа с левым сокращением имеет единицу, которая присоединена внешним образом, то она*

обладает единственной собственной последовательно аннулирующей связкой.

Первая компонента этой связки состоит лишь из единицы, а вторая из всех неединичных элементов.

Действительно, пусть $\mathfrak{B}_1 = \{E\}$ и $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A} \setminus E$, где E единица полугруппы $\mathfrak{A}$. Если единица E присоединена внешним образом, то, очевидно, разбиение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ является последовательно аннулирующей связкой. То, что всякая собственная последовательно аннулирующая связка $\mathfrak{A}$ совпадает с этой связкой, доказывается повторением рассуждения (γ).

(ε). *Пусть* $\mathfrak{n}$ *есть последовательно аннулирующая связка полугруппы* $\mathfrak{A}$, *состоящая из компонент* $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., $\mathfrak{B}_\nu$, ..., *и для каждой из компонент* $\mathfrak{B}_\nu$ *задана своя последовательно аннулирующая связка* $\mathfrak{n}_\nu$, *состоящая из компонент* $\mathfrak{B}_\nu^{(\xi)}$, $\mathfrak{B}_\nu^{(\eta)}$, ... ($\nu = \alpha, \beta, \ldots$). *Тогда разбиение* $\mathfrak{A}$ *на подполугруппы* $\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)}$ *является последовательно аннулирующей связкой* $\mathfrak{A}$.

Действительно, если для $\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)}$ и $\mathfrak{B}_\mu^{(\tau)}$ имеет место $\mathfrak{B}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$ относительно упорядоченности 4.3 компонент $\mathfrak{n}$, то

$$X\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} = \mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} X = X$$

для всякого $X \in \mathfrak{B}_\mu^{(\tau)}$. Если же $\nu = \mu$, но $\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} < \mathfrak{B}_\mu^{(\tau)}$ относительно упорядоченности 4.3 компоненты связки $\mathfrak{n}_\nu$, то

$$X\mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} = \mathfrak{B}_\nu^{(\sigma)} X = X$$

для всякого $X \in \mathfrak{B}_\mu^{(\tau)}$. Из этого, согласно 4,2, следует, что наше разбиение $\mathfrak{A}$ является последовательно аннулирующей связкой.

(ζ). *Если для компонент последовательно аннулирующей связки* $\mathfrak{n}$ *полугруппы* $\mathfrak{A}$ *определено отношение эквивалентности* $\mathfrak{l}$, *такое, что из*

$$\mathfrak{B}_1 \leqslant \mathfrak{B}_2 \leqslant \mathfrak{B}_3,$$
$$\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_3 (\mathfrak{l})$$

всегда следует $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2 (\mathfrak{l})$, *то* $\mathfrak{A}$ *обладает следующей последовательно аннулирующей связкой* $\mathfrak{m}$. *Каждая ком-*

понента $\mathfrak{m}$ *является объединением всех компонент связки* $\mathfrak{n}$, *эквивалентных между собой относительно* $\mathfrak{l}$.

Действительно, объединение любого множества компонент $\mathfrak{n}$, очевидно, является подполугруппой. Таким образом, $\mathfrak{m}$ является разбиением $\mathfrak{A}$ на подполугруппы. Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$ — две различные компоненты этого разбиения. Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}'_2 \subset \mathfrak{K}'$ — некоторые компоненты связки $\mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}'_1$, то и $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}'_2$, так как при $\mathfrak{B}_2 > \mathfrak{B}'_2$ мы получили бы противоречие со свойством эквивалентности $\mathfrak{l}$. Отсюда следует, что для $X \in \mathfrak{K}$, $X' \in \mathfrak{K}$ всегда имеет место

$$XX' = X'X = X'.$$

Отсюда, согласно 4.2, вытекает, что $\mathfrak{m}$ является последовательно аннулирующей связкой.

4.5. Пусть Ψ есть некоторая непустая совокупность послдоевательно аннулирующих связок полугруппы $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{k}$ их точную нижнюю границу и через $\mathfrak{l}$ — точную верхнюю границу (1.9). Так как все связки из Ψ являются коммутативными, то, согласно 1.13, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ также являются коммутативными связками.

Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ есть две различные компоненты связки $\mathfrak{k}$. Согласно I, 5.15, при некоторой связке $\mathfrak{n} \in \Psi$ множества $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ содержатся в различных компонентах $\mathfrak{n}$. Поэтому обязательно имеет место или 1) $B\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'B = B$ для всякого $B \in \mathfrak{B}$, или 2) $B'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}B' = B'$ для всякого $B' \in \mathfrak{B}'$. Отсюда следует, что $\mathfrak{k}$ есть последовательно аннулирующая связка.

Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$ есть две различные компоненты связки $\mathfrak{l}$. Согласно I, 5.16, относительно любой связки $\mathfrak{n} \in \Psi$ множества $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$ лежат в разных компонентах $\mathfrak{n}$. Отсюда следует, что имеет место или 1) $C\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'C = C$ для всякого $C \in \mathfrak{C}$, или 2) $C'\mathfrak{C} = \mathfrak{C}C' = C'$ для всякого $C' \in \mathfrak{C}'$. Отсюда следует, что $\mathfrak{l}$ есть последовательно аннулирующая связка.

4.6. Из доказанного в 4.5 следует, что совокупность всех последовательно аннулирующих связок полугруппы относительно частичной упорядоченности I, 5.14 является полной структурой.

4.7. Пусть последовательно аннулирующая связка $\mathfrak{k}_0$ есть точная нижняя граница всех последовательно аннулирующих связок полугруппы $\mathfrak{A}$ (4.6). Связка $\mathfrak{k}_0$ представляет

собой самое дробное разбиение $\mathfrak{A}$ по сравнению со всеми последовательно аннулирующими связками. Компоненты $\mathfrak{k}_0$ благодаря 4.3, (ε) являются полугруппами, не имеющими собственных последовательно аннулирующих связок. Так как к тому же для всякой последовательно аннулирующей связки $\mathfrak{n}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет место $\mathfrak{k}_0 \leqslant \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{n}$, очевидно, может быть получена из $\mathfrak{k}_0$ способом, описанным в 4.3, (η).

4.8. Рассмотренная конструкция, в частности, оказывается полезной при изучении одного класса полугрупп, естественность которого определяется важностью отношений делимости элементов в полугруппе.

Определение. *Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется голоидной если для любых двух ее различных элементов один является и левым и правым делителем другого, тогда как этот второй не может быть одновременно и левым и правым делителем первого.*

Во всякой полугруппе можно определить отношение, согласно которому два элемента A и B находятся в этом отношении между собой, если $A = B$ или B делится на A и слева и справа. То, что полугруппа является голоидной, означает, что это отношение является отношением линейной упорядоченности (I, 5.11). При рассмотрении этого отношения мы будем считать, что A предшествует B, если $A = B$ или B делится и слева и справа на A.

Следует иметь в виду, что отдельный элемент голоидной полугруппы может являться своим собственным и левым и правым делителем, т. е. может обладать и левой и правой единицами. Наравне с этим может также случиться, что таковых для данного элемента не имеется.

4.9. Бесконечная моногенная полугруппа, очевидно, является голоидной. Что касается конечной моногенной полугруппы, то она является голоидной тогда и только тогда, когда ее тип (III, 3.7) имеет вид $(h, 1)$.

4.10. Отметим следующее свойство голоидной полугруппы $\mathfrak{A}$. Если в $\mathfrak{A}$ имеется первый элемент X относительно линейной упорядоченности голоидной полугруппы, то все элементы из $[X]$ предшествуют в отношении этой упорядоченности всем элементам, не входящим в $[X]$.

Действительно, пусть $Y \in [X]$. Докажем по индукции относительно n, что X^n предшествует Y. Для $n = 1$ это справедливо по определению X.

Пусть X^{n-1} предшествует Y, т. е. при некоторых U, $V \in \mathfrak{A}$

$$Y = X^{n-1}U, \quad Y = VX^{n-1}.$$

Так как $Y \bar{\in} [X]$, то $U \neq X$, $V \neq X$ и потому при некоторых U', $V' \in \mathfrak{A}$

$$U = XU', \quad V = V'X,$$

откуда и получаем, что X^n предшествует Y:

$$Y = X^{n-1}U = X^nU', \quad Y = VX^{n-1} = V'X^n.$$

4.11. Теперь рассмотрим вопрос о разложении голоидных полугрупп в последовательно аннулирующие связки.

Пусть $\mathfrak{n}$ *есть последовательно аннулирующая связка голоидной полугруппы* $\mathfrak{A}$. *Всякая ее компонента* $\mathfrak{B}$ *является голоидной полугруппой.*

Действительно, пусть для B, $B' \in \mathfrak{B}$ и X, $Y \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$B' = XB, \quad B' = BY.$$

X не может принадлежать компоненте, которая следует за $\mathfrak{B}$ и отлична от нее (4.3), так как в этом случае мы имели бы $XB = X$. Если же X принадлежит компоненте, предшествующей B и отличной от нее, то $XB = B$, и мы имеем $B' = B$. Аналогично обстоит дело и с Y. Таким образом, X, $Y \in \mathfrak{B}$ и потому B' делится на B и слева и справа в $\mathfrak{B}$. Если $B \neq B'$, то B делиться одновременно и слева и справа на B' в $\mathfrak{B}$ не может, так как это невозможно в $\mathfrak{A}$.

4.12. Имеет место и обратное по отношению к 4.11 свойство. *Если некоторая полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает последовательно аннулирующей связкой* $\mathfrak{n}$, *все компоненты которой голоидные, то* $\mathfrak{A}$ *сама является голоидной полугруппой.*

Действительно, пусть A, $A' \in \mathfrak{A}$; $A \neq A'$; $A \in \mathfrak{B}$; $A' \in \mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — компоненты связки $\mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}$ предшествует $\mathfrak{B}'$ относительно линейной упорядоченности 4.3, то

$$A' = A'A, \quad A' = AA'.$$

Соотношение $A = A'X$ невозможно, так как произведение $A'X$ должно содержаться в компоненте $\mathfrak{B}''$ связки $\mathfrak{n}$, которая следует за $\mathfrak{B}'$, а $A \in \mathfrak{B}$, причем $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$.

Если $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}'$, то в $\mathfrak{B}$ один из A и A' делится на другой и слева и справа, тогда как второй в $\mathfrak{B}$ на первый делиться одновременно и слева и справа не может, ибо полугруппа $\mathfrak{B}$ голоидная. Для $X\in\mathfrak{A}$, принадлежащего компоненте, отличной от $\mathfrak{B}$, равенство $A'=XA$ невозможно. Действительно, если компонента, содержащая X, предшествует $\mathfrak{B}$, то $XA=A$, если же она следует за $\mathfrak{B}$, то XA содержится в этой компоненте, но не в $\mathfrak{B}$.

4.13. Рассмотренные свойства последовательно аннулирующих связок позволяют, как показал А. М. Кауфман [2], описать строение и дать полную классификацию конечных голоидных полугрупп. Этот результат А. М. Кауфмана является последовательным развитием предшествующих работ Клейн-Бармена [1], [2] и [3].

Теорема. *Всякая конечная голоидная полугруппа разлагается в последовательно аннулирующую связку моногенных голоидных полугрупп* (4.9).

Доказательство. Согласно 4.7, конечная голоидная полугруппа $\mathfrak{A}$ разлагается в последовательно аннулирующую связку полугрупп $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$, которые сами не имеют собственных последовательно аннулирующих связок. $\mathfrak{B}_n$ ($n=1, 2, \ldots, m$) сама, согласно 4.11, является голоидной полугруппой. Покажем, что полугруппа $\mathfrak{B}_n$ моногенна. Обозначим через X первый элемент $\mathfrak{B}_n$ относительно линейной упорядоченности в голоидной полугруппе $\mathfrak{B}_n$. Тип конечной моногенной полугруппы $[X]$ имеет вид $(h, 1)$ (III, 3.7), так как в противном случае в $[X]\subset\mathfrak{A}$ нашлись бы два различных элемента, одновременно делящихся друг на друга и слева и справа.

Предположим, что $\mathfrak{B}_n\neq[X]$. Обозначим через $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}_n\setminus[X]$ и через Y первый относительно упорядоченности элемент из $\mathfrak{C}$. Каждый элемент из $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ делится на Y и слева и справа. Поэтому он принадлежит $\mathfrak{C}$, ибо, согласно 4.10, все элементы из $[X]$ предшествуют всем элементам из $\mathfrak{C}$, в том числе и элементу Y. Таким образом, мы получаем разбиение $\mathfrak{B}_n$ на две подполугруппы:

$$\mathfrak{B}_n=[X]\cup\mathfrak{C},\quad [X]\cap\mathfrak{C}=\varnothing.$$

Всякий элемент C из $\mathfrak{C}$ делится на X^h и слева и справа:

$$C=UX^h,\quad C=X^hV.$$

Так как тип $[X]$ есть $(h, 1)$, то для любого $X^k \in [X]$ имеет место

$$X^k X^h = X^h X^k = X^h.$$

Отсюда следует

$$CX^k = UX^h X^k = UX^h = C,$$

$$X^k C = X^k X^h V = X^h V = C.$$

Таким образом, наше разбиение является последовательно аннулирующей связкой, что противоречит тому, что $\mathfrak{B}_n$ не должна обладать собственными последовательно аннулирующими связками. Таким образом, на самом деле должно иметь место $\mathfrak{B}_n = [X]$.

4.14. Так как моногенная голоидная полугруппа, очевидно, не имеет собственных последовательно аннулирующих связок, то разложение, полученное в 4.13, является для конечной голоидной полугруппы $\mathfrak{A}$ тем единственным разложением t_0, о котором шла речь в 4.7. Задание этого разложения, согласно сказанному в 4.3, вполне определяет строение $\mathfrak{A}$. В частности, оказывается, что $\mathfrak{A}$ обязательно коммутативна. Так как конечные моногенные голоидные полугруппы полностью характеризуются числом своих элементов, то строение $\mathfrak{A}$ целиком определяется последовательностью натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$, соответственно равных количествам элементов в компонентах последовательности компонент указанной последовательно аннулирующей связки. Для изоморфизма двух конечных голоидных полугрупп, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы указанные последовательности чисел для них были одинаковы.

4.15. Нетрудно убедиться, что почти без изменений рассуждения 4.13 и 4.14 распространяются на такие голоидные полугруппы, элементы которых упорядочены по типу упорядочения по величине множества всех натуральных чисел. Такие полугруппы также оказываются коммутативными и разлагаются в последовательно аннулирующие связки моногенных голоидных полугрупп. Отличием от разобранного выше случая будет лишь то, что число компонент в таком разложении может быть бесконечным. В случае конечного числа компонент последняя компонента оказывается бесконечной моногенной полугруппой.

§ 5. Базисные классы

5.1. В связи с идеей изучения строения полугрупп при помощи представления их в виде объединения некоторых их подполугрупп естественно возникает нижеследующее понятие, введенное Е. С. Ляпиным [11]. В приводимом определении, также как и повсюду в дальнейшем в продолжение настоящего параграфа, мы, не оговаривая этого особо, под классами полугрупп будем понимать лишь классы, замкнутые относительно изоморфизмов, т. е. классы, содержащие вместе с некоторой полугруппой и все ей изоморфные полугруппы.

Определение. *Класс полугрупп* Γ_0 *называется базисным классом для класса полугрупп* Γ, *если выполнены следующие условия.*

(α). *Каждая полугруппа из* Γ *может быть представлена в виде объединения ее подполугрупп, принадлежащих классу* Γ_0.

(β). *Каждая полугруппа, которая может быть представлена в виде объединения ее подполугрупп, принадлежащих классу* Γ_0, *должна принадлежать* Γ.

(γ). *Если некоторый класс полугрупп* Γ_1, *все полугруппы которого принадлежат* Γ_0, *удовлетворяет условиям* (α) *и* (β) (*формулированным выше для класса* Γ_0), *то* Γ_1 *совпадает с* Γ_0.

Таким образом, базисный класс — это минимальный класс, который при помощи операции объединения полугрупп дает все полугруппы данного класса и не выводит за его пределы.

5.2. В условии 5.1, (γ) упоминание о (β), конечно, может быть опущено, так как для Γ_1, который является частью Γ_0, условие (β) автоматически выполняется, поскольку оно выполняется для Γ_0.

В 5.1 условие (γ) может быть заменено следующим условием:

(γ'). *Во всякой полугруппе* $\mathfrak{A}_0$ *из* Γ_0 *должен найтись такой элемент* A_0, *который не содержится ни в какой подполугруппе полугруппы* $\mathfrak{A}_0$, *принадлежащей* Γ_0 *и неизоморфной* $\mathfrak{A}_0$.

Действительно, предположим, что (α), (β), (γ) из 5.1 выполнены, но (γ') нарушено, т. е. в некоторой полугруппе $\mathfrak{A}_0 \in \Gamma_0$ каждый элемент X содержится в подполугруппе $\mathfrak{B}_X$, которая

принадлежит Γ_0 и неизоморфна $\mathfrak{A}_0$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}_0 = \bigcup_{X \in \mathfrak{A}_0} \mathfrak{B}_X.$$

Обозначим через Γ_1 класс всех полугрупп из Γ_0, неизоморфных $\mathfrak{A}_0$. Γ_1 удовлетворяет условию (α), так как каждую полугруппу из Γ можно представить в виде объединения полугрупп из Γ_0 и затем заменить входящие туда компоненты, изоморфные $\mathfrak{A}_0$, на объединение подполугрупп, изоморфных $\mathfrak{B}_X$, которые все принадлежат Γ_1. Условие (β), как мы уже упоминали, выполняется автоматически и тем самым мы оказываемся в противоречии с определением 5.1.

Пусть теперь выполнены условия (α), (β) и (γ'). Предположим, что некоторый класс Γ_1 нарушает условие (γ). Пусть $\mathfrak{A}_0$ есть некоторая полугруппа из Γ_0, не изоморфная никакой полугруппе из Γ_1. Так как для Γ_1 должно выполняться условие (α), то $\mathfrak{A}_0$ выражается в виде объединения подполугрупп из Γ_1. Элемент A_0, указанный в (γ'), содержится в некоторой компоненте этого объединения, которая, согласно (γ'), должна быть изоморфна $\mathfrak{A}_0$. Следовательно, Γ_1 содержит полугруппу, изоморфную полугруппе $\mathfrak{A}_0$, что противоречит предположению.

5.3. Условие 5.2 (γ') для некоторого класса полугрупп Γ_0 является необходимым и достаточным для того, чтобы Γ_0 являлся базисным классом некоторого класса полугрупп. Необходимость этого условия следует из 5.2. Для доказательства достаточности возьмем класс Γ, состоящий из всех тех полугрупп, которые могут быть представлены в виде объединений подполугрупп, принадлежащих классу Γ_0. Для Γ_0 и такого Γ очевидным образом выполнены условия 5.1, (α) и 5.1, (β). По предположению выполнено 5.2 (γ'), откуда, согласно 5.2, следует, что Γ_0 есть базисный класс для классса Γ.

5.4. Разумеется, задание базисного класса Γ_0 для некоторого класса Γ вполне определяет состав класса полугрупп Γ. Однако, выяснив строение полугрупп базисного класса, мы обычно бываем еще очень далеки от того, чтобы ясно представлять себе строение любой полугруппы из Γ. То, что каждая такая полугруппа представляет собой объединение подполугрупп из Γ_0, далеко не определяет ее строение. Задание строения полугрупп базисного класса можно рассматривать как описание локального строения полугрупп из Γ, поскольку

каждый элемент полугруппы из Γ содержится в некоторой подполугруппе, принадлежащей Γ_0. Полугруппы из базисного класса являются как бы элементарными носителями свойств, определяющих принадлежность полугруппы к классу Γ. Можно сказать: это есть те клетки, или кирпичи, или атомы, из которых строятся полугруппы, принадлежащие Γ.

5.5. В произвольной полугруппе $\mathfrak{A}$ каждый элемент A содержится в моногенной полугруппе $[A]$, порожденной этим элементом. Таким образом,

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} [A].$$

Это означает, что класс моногенных полугрупп относительно класса всех полугрупп удовлетворяет условию 5.1, (α) для базисного класса. Условие 5.1, (β) выполняется тривиальным образом.

Сразу видно и выполнение условия 5.2, (γ'). Действительно, сам элемент A, порождающий моногенную полугруппу $[A]$, очевидно, не содержится ни в какой подполугруппе $[A]$, отличной от $[A]$.

Таким образом, *класс всех моногенных полугрупп оказывается базисным классом в классе всех полугрупп.*

Легко доказать, что это единственный базисный класс в классе всех полугрупп. Действительно, пусть Γ_0 есть произвольный базисный класс. $\mathfrak{A} = [A]$ есть некоторая моногенная полугруппа. Так как она должна выражаться в виде объединения подполугрупп, принадлежащих базисному класс Γ_0, то элемент A должен принадлежать некоторой подполугруппе $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, принадлежащей Γ_0. Но, очевидно, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{A}$ обязательно принадлежит классу Γ_0. Поскольку Γ_0 содержит всякую моногенную полугруппу, он, согласно 5.1, (γ), должен совпадать с классом всех моногенных полугрупп.

5.6. Класс всех циклических групп (II, 3.17), как легко видеть, обладает свойством 5.2, (γ'). В конечной циклической группе $[A]$ элемент A не содержится ни в какой подполугруппе, отличной от самой $[A]$. В бесконечной циклической группе $\mathfrak{A} = \{\ldots, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A, A^2, \ldots\}$ элемент A не содержится ни в какой конечной циклической группе. Таким образом (5.3), класс всех циклических групп является базис-

ным классом для класса полугрупп, являющихся объединениями циклических групп. Так как всякая группа является объединением своих циклических подгрупп, то полученный класс можно характеризовать как класс всех полугрупп, являющихся объединениями групп. Согласно III, 1.15, это есть класс вполне регулярных полугрупп. Мы получили для него базисный класс, состоящий из всех циклических групп, что может служить новой формой задания указанного класса.

Отметим, что класс всех циклических групп является единственным базисным классом класса всех вполне регулярных полугрупп. Действительно, если Γ_0 есть произвольный базисный класс, то он должен содержать всякую конечную циклическую группу $[A]$, поскольку она принадлежит нашему классу, а элемент A не содержится ни в какой подполугруппе группы $[A]$, кроме самой $[A]$. Если $\mathfrak{A} = \{\ldots, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A, A^2, \ldots\}$ есть бесконечная циклическая группа, то A не содержится ни в какой подгруппе $\mathfrak{A}$, кроме самой $\mathfrak{A}$. Но A должен содержаться в некоторой подполугруппе $\mathfrak{B}$ полугруппы $\mathfrak{A}$, принадлежащей Γ_0. Поскольку $\mathfrak{B}$ содержится в рассматриваемом классе, элемент $A \in \mathfrak{B}$ должен принадлежать некоторой подгруппе $\mathfrak{B}$. Но таковой может являться только $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ принадлежит Γ.

5.7. В пятом параграфе второй главы мы рассмотрели некоторый класс полугрупп Π (II, 5.2), имеющий определенное значение для вопроса о существовании неподвижных точек у преобразований. Как показал Е. С. Ляпин [11], Π обладает базисным классом. Ниже мы построим базисный класс для Π. Для этого предварительно нам придется рассмотреть некоторые вспомогательные свойства и конструкции.

Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ принадлежит классу Π. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ совокупность всех таких элементов X из $\mathfrak{A}$, у которых при $XU = U$ $(U \in \mathfrak{A})$ всегда имеет место $UX^n \neq U$ при любом натуральном n. Также обозначим $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$. Если X содержится в $\mathfrak{A}''$, то для него, по определению $\mathfrak{A}''$, найдется натуральное число n, такое, что при некотором $U \in \mathfrak{A}$

$$XU = U, \quad UX^n = U.$$

Наименьшее из таких чисел будем обозначать через $\delta(X)$, или просто через δ. Для $X \in \mathfrak{A}$ определим множество $\mathfrak{H}_X \subset \mathfrak{A}$. Если $X \in \mathfrak{A}'$, то $\mathfrak{H}_X$ состоит из всех правых нулей элемента X.

Если $X \in \mathfrak{A}''$, то $\mathfrak{H}_X$ есть множество всех таких элементов $U \in \mathfrak{A}$, для которых

$$XU = U, \quad UX^{\delta} = U.$$

5.8. ***Лемма.*** *Если* $\mathfrak{A} \in \Pi$, $X \in \mathfrak{A}$, *причем* X *имеет конечный тип* (h, d) (*III*, 3.7), *то* $X \in \mathfrak{A}''$ *и* $\delta(X)$ *есть делитель* d.

Доказательство. Пусть $XU = U$. Из $X^{h+d} = X^h$ следует

$$X(UX^h) = UX^h, \quad (UX^h)X^d = (UX^h).$$

Следовательно, $X \in \mathfrak{A}''$. Пусть

$$XV = V, \quad VX^{\delta} = V.$$

Совершим деление с остатком

$$d = q\delta + r, \quad 0 \leqslant r < \delta.$$

Так как

$$X \cdot (VX^h) = VX^h,$$

$$(VX^h) \cdot X^r = VX^r X^h = VX^{q\delta} \cdot X^r \cdot X^h =$$

$$= VX^d \cdot X^h = VX^{h+d} = VX^h,$$

то, по определению $\delta = \delta(X)$, r, которое меньше δ, не может быть отлично от нуля. Следовательно, d делится на δ.

5.9. ***Лемма.*** *Если* $\mathfrak{A} \in \Pi$ *и* $X \in \mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{H}_X$ *есть полугруппа, принадлежащая* Π.

Доказательство. 1) Пусть $X \in \mathfrak{A}'$. Если $U_1, U_2 \in \mathfrak{H}_X$, то

$$X(U_1U_2) = (XU_1)U_2 = U_1U_2,$$

т. е. $U_1U_2 \in \mathfrak{H}_X$.

Для $U \in \mathfrak{H}_X$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись правый нуль V. Но тогда

$$XV = XUV = UV = V,$$

т. е. $V \in \mathfrak{H}_X$ и, следовательно, U обладает в $\mathfrak{H}_X$ правым нулем.

2) Пусть $X \in \mathfrak{A}''$. Если U_1, $U_2 \in \mathfrak{H}_X$, т. е.

$$U_1X^{\delta} = U_1, \quad U_2X^{\delta} = U_2,$$

то

$$X(U_1U_2) = U_1U_2, \quad (U_1U_2)X^{\delta} = U_1U_2,$$

т. е. $U_1U_2 \in \mathfrak{H}_X$.

Для $U \in \mathfrak{H}_X$ в $\mathfrak{A}$ должен найтись правый нуль V. Так как

$$U(VU) = VU,$$
$$X(VU) = X \cdot UV \cdot U = UV \cdot U = VU,$$
$$(VU)X^\delta = V \cdot UX^\delta = VU,$$

то VU есть правый нуль элемента U, принадлежащий $\mathfrak{H}_X$.

5.10. Пусть $[X]$ есть моногенная полугруппа и s — некоторое натуральное число, являющееся делителем d, если $[X]$ конечна и имеет тип (h, d) (III, 3.7). Отметим, что из $X^a = X^{a'}$, $X^b = X^{b'}$ и $a \equiv b \pmod{s}$ следует $a' = b' \pmod{s}$.

Для бесконечной полугруппы это тривиально. В случае конечной $[X]$ из определения типа следует, что $a' \equiv a \pmod{d}$, $b \equiv b' \pmod{d}$ и потому $a' \equiv a \pmod{s}$, $b' \equiv b \pmod{s}$.

Определим в $[X]$ отношение $\mathfrak{n}_s$, полагая $X^a \sim X^b (\mathfrak{n}_s)$, при $a \equiv b \pmod{s}$. Очевидно, $\mathfrak{n}_s$ является двусторонне стабильной эквивалентностью. Если $[X]$ бесконечна, то под $\mathfrak{n}_0$ будем понимать тождественное отношение в $[X]$.

Отметим, что при $s \neq 0$ факторполугруппа $[X]/\mathfrak{n}_s$ (VII, 2.4) является группой.

5.11. ***Лемма.*** *Пусть $H \in \mathfrak{H}_X$. Если $X \in \mathfrak{A}'$, то равенство $HX^a = HX^b$ возможно лишь при $X^a \sim X^b (\mathfrak{n}_0)$, т. е. когда $X^a = X^b$. Если $X \in \mathfrak{A}''$, то равенство $HX^a = HX^b$ имеет место тогда и только тогда, когда $X^a \sim X^b (\mathfrak{n}_\delta)$.*

Доказательство. 1) Пусть $c = a - b > 0$ и $HX^a = HX^b$. Так как, очевидно, $HX^b \in \mathfrak{H}_X$, то из

$$(HX^b)X^c = HX^a = HX^b$$

следует, что $X \in \mathfrak{A}''$. Совершим деление с остатком c на δ

$$c = q\delta + r, \quad 0 \leqslant r < \delta$$

и предположим, что $r \neq 0$. Мы имеем

$$(HX^b) = (HX^b)X^c = (HX^b)(X^\delta)^q X^r = (HX^b)X^r.$$

Но благодаря $r < \delta$ это невозможно. Следовательно, $r = 0$ и c делится на δ, т. е. $a \equiv b \pmod{\delta}$ и $X^a \sim X^b (\mathfrak{n}_\delta)$.

2) Пусть $X^a \sim X^b (\mathfrak{n}_\delta)$ и $a > b$, т. е. $a = q\delta + b$. Так как $HX^\delta = H$, то

$$HX^a = H(X^\delta)^q \cdot X^b = HX^b.$$

5.12. Пусть $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ есть две непересекающиеся полугруппы и $\mathfrak{m}$ — некоторая двусторонне стабильная эквивалентность в $\mathfrak{M}$. В множестве всевозможных пар (N, M) $(N \in \mathfrak{N}, M \in \mathfrak{M})$ определяем отношение $\mathfrak{n}$, полагая $(N_1, M_1) \sim (N_2, M_2)(\mathfrak{n})$, если $N_1 = N_2$ и $M_1 \sim M_2(\mathfrak{m})$. Очевидно, $\mathfrak{n}$ является эквивалентностью. Соответствующий $\mathfrak{n}$-класс, содержащий пару (N, M), будем обозначать через $(N, M)_{\mathfrak{m}}$. Обозначим через $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ множество, состоящее из всех элементов $\mathfrak{M}$ и из всех $\mathfrak{n}$-классов. В $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ определяем действие. Произведением двух элементов из $\mathfrak{M}$ считаем их произведение, получаемое в $\mathfrak{M}$ благодаря действию, определенному в полугруппе $\mathfrak{M}$. В трех остальных случаях определяем действие следующим образом:

$$(N_1, M_1)_{\mathfrak{m}} \cdot (N_2, M_2)_{\mathfrak{m}} = (N_1 N_2, M_2)_{\mathfrak{m}},$$

$$(N_1, M_1)_{\mathfrak{m}} \cdot M_2 = (N_1, M_1 M_2)_{\mathfrak{m}},$$

$$M_1 \cdot (N_2, M_2)_{\mathfrak{m}} = (N_2, M_2)_{\mathfrak{m}}.$$

Так как $\mathfrak{m}$ двусторонне стабильно в $\mathfrak{M}$, то это действие однозначно, т. е. результат действия не зависит от того, какая из пар (N, M) взята в качестве представителя класса $(N, M)_{\mathfrak{m}}$. Ассоциативность действия проверяется без труда. Полугруппа $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ называется *правоуничтожающим произведением полугрупп* $\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{N}$ принадлежит классу Π, то и $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ принадлежит Π. Действительно, для $M \in \mathfrak{M}$ правым нулем в $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ будет $(N', M')_{\mathfrak{m}}$ при любых $N' \in \mathfrak{N}$, $M' \in \mathfrak{M}$, а для $(N, M)_{\mathfrak{m}}$ — правым нулем будет $(N', M')_{\mathfrak{m}}$, где N' — некоторый правый нуль элемента N в $\mathfrak{N}$.

5.13. Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ даны: моногенная подполугруппа $\mathfrak{M} = [X]$ — бесконечная или конечная неголоидная (т. е. имеющая тип (h, d), где $d > 1$) и некоторая подполугруппа $\mathfrak{N}$, все элементы которой являются правыми нулями для X. При этом предполагаем, что в $\mathfrak{N}$ для всяких N_1, $N_2 \in \mathfrak{N}$, $N_1 \neq N_2$ всегда найдется такой $N_0 \in \mathfrak{N}$, что $N_1 N_0 \neq N_2 N_0$. Пусть в $\mathfrak{A}$ выполнено условие: из $NM_1 = NM_2$ $(N \in \mathfrak{N}; M_1, M_2 \in \mathfrak{M})$ всегда следует $N'M_1 = N'M_2$ при любом $N' \in \mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathfrak{m}$ отношение в $\mathfrak{M}$, согласно которому $M_1 \sim M_2(\mathfrak{m})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$NM_1 = NM_2$. Очевидно, $\mathfrak{m}$ является двусторонне стабильной эквивалентностью в $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим отображение φ полугруппы $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$ в $\mathfrak{A}$:

$$\varphi(X^k) = X^k, \quad \varphi(N, X^k)_{\mathfrak{m}} = NX^k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Его однозначность следует из свойства $\mathfrak{m}$. Покажем, что φ взаимно однозначно. Предположим

$$X^k = NX^l.$$

Так как $XN = N$, то отсюда получаем

$$X^{k+1} = XNX^l = NX^l = X^k,$$

что в неголоидной моногенной полугруппе невозможно. Предположим

$$N_1X^{k_1} = N_2X^{k_2}.$$

Умножая справа на произвольный элемент $N' \in \mathfrak{N}$, мы получаем $N_1N' = N_2N'$. Но справедливость этого равенства при любом $N' \in \mathfrak{N}$, согласно сделанному условию, означает $N_1 = N_2$. В этом случае $X^{k_1} \sim X^{k_2}(\mathfrak{m})$, но тогда и $(N_1, X^{k_1})_{\mathfrak{m}} = (N_2, X^{k_2})_{\mathfrak{m}}$.

Из того, что элементы $\mathfrak{N}$ являются правыми нулями для элементов из $\mathfrak{M}$, непосредственно следует, что отображение φ является гомоморфизмом, а потому и изоморфизмом. Таким образом, оказалось, что множество элементов из $\mathfrak{A}$, имеющих вид X^k и NX^k ($N \in \mathfrak{N}$; $k = 1, 2, \ldots$), является подполугруппой, изоморфной $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$.

5.14. Обозначим через Π_0 класс полугрупп, состоящий из всех конечных моногенных голоидных полугрупп и из полугрупп, изоморфных полугруппам $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{M})_{\mathfrak{m}}$, где: 1) $\mathfrak{M} = [X]$— моногенная полугруппа — бесконечная или конечная неголоидная; 2) $\mathfrak{B}$ — единичная полугруппа, или полугруппа $\mathfrak{U}$ (II, 5.12), или полугруппа $\mathfrak{V}$ (II, 5.13); 3) $\mathfrak{m}$ — отношение $\mathfrak{n}_s$ ($s \geqslant 0$) типа 5.10.

Так как конечная моногенная полугруппа обладает нулем, а $\mathfrak{B}$ во всех трех возможных случаях содержится в Π, то, согласно сказанному в 5.12, каждая из полугрупп класса Π_0 принадлежит классу Π.

5.15. ***Лемма.*** *Если* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \times [X])_{\mathfrak{n}_s}$ *принадлежит классу* Π_0 *и* $\mathfrak{A}_0$ *— ее подполугруппа, содержащая* X *и принадлежащая* Π_0, *то* $\mathfrak{A}_0$ *изоморфна с* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. $\mathfrak{A}_0$ не может быть голоидной моногенной полугруппой, так как всякая моногенная подполугруппа таковой сама голоидна, тогда как $\mathfrak{A}_0$ содержит неголоидную моногенную подполугруппу $[X]$. Следовательно, $\mathfrak{A}_0$ изоморфна полугруппе вида

$$\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{\mathfrak{B}} \times [\overline{X}])_{\mathfrak{n}_r}.$$

Из определения правоуничтожающего произведения непосредственно вытекает, что в $\mathfrak{A}$ элементы из $[X]$ и только они не являются правыми нулями ни для каких элементов. В $\mathfrak{A}_0$, содержащей $[X]$, таковыми элементами будут элементы из $[X]$. В $\overline{\mathfrak{A}}$ таковыми будут элементы из $[\overline{X}]$. Таким образом, $[X]$ и $[\overline{X}]$ изоморфны, причем при изоморфизме $\overline{\mathfrak{A}}$ на $\mathfrak{A}_0$ множество $[\overline{X}]$ отображается на $[X]$.

Отношение $\mathfrak{n}_s$ вполне определено количеством различных элементов в множестве $A \cdot [X]$ $(A \in \mathfrak{A} \setminus [X])$, причем это число одно и то же при любом выборе A. То же имеет место и в $\overline{\mathfrak{A}}$ для $\mathfrak{n}_r$. Так как $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна подполугруппе $\mathfrak{A}_0$ полугруппы $\mathfrak{A}$, то отсюда заключаем, что отношение $\mathfrak{n}_s$ в $[X]$ одинаково с отношением $\mathfrak{n}_r$ в $[\overline{X}]$, т. е. $s = r$.

Согласно определению класса Π_0, каждая из полугрупп $\mathfrak{B}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ является единичной полугруппой, или равна $\mathfrak{U}$, или равна $\mathfrak{V}$.

Если $\mathfrak{B}$ есть единичная полугруппа и только в этом случае все правые нули подполугруппы $[X]$ являются идемпотентами. То же имеет место и в $\overline{\mathfrak{A}}$ относительно $\overline{\mathfrak{B}}$. Поскольку $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна подполугруппе $\mathfrak{A}$, отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{B}}$ будет единичной тогда и только тогда, когда единична $\mathfrak{B}$.

Пусть в $\mathfrak{A}$ элемент P является правым нулем для $[X]$, а Q является правым нулем для P.

Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}$, то $P = \left(U_{\alpha_1}^{\beta_1}, X^{a}\right)_{\mathfrak{n}_s}$ и $Q = \left(U_{\alpha_2}^{\beta_2}, X^{b}\right)_{\mathfrak{n}_s}$, где $\alpha_1 < \alpha_2$. Поэтому в $\mathfrak{A}$ существует такая пара элементов $P^* \in P \cdot [X]$ и $Q^* \in Q \cdot [X]$ (именно, $P^* = \left(U_{\alpha_1}^{\beta_1}, X^{c}\right)_{\mathfrak{n}_s}$ и $Q^* = \left(U_{\alpha_2}^{\beta_2}, X^{c}\right)_{\mathfrak{n}_s}$), что Q^* будет двусторонним нулем для P^*.

Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}$, то никакой элемент из $Q \cdot [X]$ не будет двусторонним нулем ни для какого элемента из $P \cdot [X]$. (Это

следует из того, что в $\mathfrak{V}$ никакой элемент вообще не имеет двусторонних нулей — II, 5.13).

Так как $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна подполугруппе $\mathfrak{A}_0$ полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащей $[X]$, и в $\mathfrak{A}_0$ найдется правый нуль P для $[X]$ и правый нуль Q для P, то из сказанного следует, что при $\mathfrak{B}=\mathfrak{U}$ не может быть $\overline{\mathfrak{B}}=\mathfrak{B}$, а при $\mathfrak{B}=\mathfrak{V}$ не может быть $\overline{\mathfrak{B}}=\mathfrak{U}$.

Мы показали, что для $\mathfrak{A}=(\mathfrak{B}\times[X])_{\mathfrak{n}_s}$ и $\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{\mathfrak{B}}\times[\overline{X}])_{\mathfrak{n}_r}$ полугруппы $[X]$ и $[\overline{X}]$ изоморфны, а отношения $\mathfrak{n}_s$ и $\mathfrak{n}_r$ в них одинаковы и $\mathfrak{B}=\overline{\mathfrak{B}}$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ изоморфна с $\overline{\mathfrak{A}}$, которая изоморфна с $\mathfrak{A}_0$.

5.16. ***Теорема.*** *Класс* Π_0 (5.14) *является базисным классом* (5.1) *для класса* Π.

Доказательство. 1) Пусть X произвольный элемент полугруппы $\mathfrak{A}$, принадлежащей классу Π. Если $[X]$ голоидна, то $[X]$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащая X и принадлежащая Π_0.

Пусть $[X]$ не является голоидной.

Так как $\mathfrak{H}_X$ (5.7) принадлежит Π (5.9), то в $\mathfrak{H}_X$, согласно II, 5.14, найдется такая подполугруппа $\mathfrak{B}$, которая является единичной полугруппой, или изоморфна с $\mathfrak{U}$, или изоморфна с $\mathfrak{V}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество всех элементов, принадлежащих $[X]$ или имеющих вид BX^k ($B\in\mathfrak{B}$; $k=1, 2, \ldots$). Каждый элемент из $\mathfrak{B}$ является правым нулем для X. Как следует из строения $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, в $\mathfrak{B}$ для любых B_1, $B_2\in\mathfrak{B}$, $B_1\neq B_2$ всегда найдется такой B_0, что $B_1B_0\neq B_2B_0$. Если для некоторого $B\in\mathfrak{B}$

$$BX^a=BX^b,\quad X^a\neq X^b,$$

то, согласно 5.11, $X^a\sim X^b(\mathfrak{n}_\delta)$ ($\delta=\delta(X)$). Но тогда и для любого $B'\in\mathfrak{B}$ мы будем иметь $B'X^a=B'X^b$, поскольку $B'X^\delta=B'$. Очевидно и обратное, если $X\in\mathfrak{A}''$ и $a\equiv b\pmod\delta$, т. е. $X^a\sim X^b(\mathfrak{n}_\delta)$, то $BX^a=BX^b$ при любом $B\in\mathfrak{B}$.

Благодаря указанным свойствам мы можем применить к $\mathfrak{A}_0$ рассуждения 5.13. Если $X\in\mathfrak{A}'$, то $\mathfrak{m}$ из 5.13 совпадает с $\mathfrak{n}_0$ (5.10), если же $X\in\mathfrak{A}''$, то $\mathfrak{m}$ совпадает с $\mathfrak{n}_\delta$ (5.10). Согласно 5.13, $\mathfrak{A}_0$ оказывается изоморфной полугруппе $(\mathfrak{B}\times[X])_{\mathfrak{m}}$,

принадлежащей классу Π_0. Таким образом, для Π_0 доказано выполнение свойства 5.1, (α).

2) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ представлена в виде объединения подполугрупп, принадлежащих классу Π_0. Каждый элемент A из $\mathfrak{A}$ содержится в некоторой подполугруппе $\mathfrak{A}_0$ полугруппы $\mathfrak{A}$, принадлежащей Π_0, и потому обладает правым нулем, поскольку $\mathfrak{A}_0$ принадлежит Π_0 (5.14).

Таким образом, для Π_0 имеет место свойство 5.1, (β).

3) Пусть полугруппа $\mathfrak{A}_0$ принадлежит Π_0.

Если $\mathfrak{A}_0$ есть конечная моногенная полугруппа $\mathfrak{A} = [X]$, то элемент X не содержится ни в какой ее подполугруппе, отличной от $\mathfrak{A}_0$. Пусть $\mathfrak{A}_0$ изоморфна полугруппе $\overline{\mathfrak{A}}_0 = (\mathfrak{B} \times [X])_{\pi_s}$. Согласно 5.15, элемент X из $\overline{\mathfrak{A}}_0$ не содержится ни в какой подполугруппе полугруппы $\overline{\mathfrak{A}}_0$, принадлежащей Π_0 и не изоморфной $\overline{\mathfrak{A}}_0$. Следовательно, и в самой $\mathfrak{A}_0$ найдется элемент с аналогичным свойством.

Из этого следует, что класс Π_0 обладает свойством 5.2, (γ'). Учитывая доказанное в двух первых частях доказательства, согласно 5.2, заключаем, что Π_0 является для Π базисным классом.

5.17. Следует отметить, что в классе Π имеется не один базисный класс. Все базисные классы класса Π были найдены и описаны Е. С. Ляпиным [12]. Из них рассмотренный выше класс Π_0 оказался наиболее просто устроенным и удобным для изучения. Простое устройство полугрупп класса Π_0 позволяет считать, что выяснено локальное строение (5.4) полугрупп, принадлежащих классу Π.

5.18. Конечно, далеко не всякий класс полугрупп обладает базисным классом. Действительно, класс, обладающий базисным классом, очевидно, должен обладать следующим свойством. Он должен содержать всякую полугруппу, являющуюся объединением полугрупп из этого класса. Однако многие важные классы полугрупп не удовлетворяют этому условию. Таков, например, класс коммутативных полугрупп. Ведь всякая полугруппа является объединением некоторых своих коммутативных подполугрупп (например, моногенных подполугрупп), однако не все же полугруппы коммутативны.

5.19. В связи со сказанным в 5.18 целесообразно в некоторых случаях следующее обобщение понятия базисного класса. Пусть Γ_0, Γ и Σ есть три класса полугрупп, при-

чем Σ охватывает класс Γ, а Γ охватывает Γ_0. Можно говорить о том, что класс Γ_0 является базисным классом для класса Γ относительно класса Σ, если выполнены условия 5.1, (α), 5.2, (γ') и следующее условие (β').

(β') *Каждая полугруппа из* Σ, *которая может быть представлена в виде объединения подполугрупп, принадлежащих классу* Γ_0, *должна принадлежать* Γ.

В смысле такого обобщения относительно класса всех коммутативных полугрупп класс всех моногенных полугрупп является базисным классом для класса всех коммутативных полугрупп.

Класс всех циклических групп (II, 3.17) относительно класса всех групп является базисным классом для класса всех групп.

Класс всех конечных циклических групп относительно класса всех групп является базисным классом для класса всех периодических групп.

5.20. Класс всех инверсных полугрупп не имеет базисного класса в смысле 5.1, так как он, очевидно, не удовлетворяет условию, указанному в 5.18. Согласно II, 7.4, класс всех инверсных полугрупп содержится в классе полугрупп, обладающих свойством перестановочности идемпотентов.

Л. М. Глускин [8] показал, что относительно класса полугрупп с перестановочными идемпотентами класс всех инверсных полугрупп обладает базисным классом.

ГЛАВА IX

СООТНОШЕНИЯ В ПОЛУГРУППАХ

§ 1. Определяющие совокупности соотношений

1.1. Мы уже обращали внимание на то, что задание элементов полугруппы в виде произведений элементов некоторого ее порождающего множества, вообще говоря, неоднозначно. Произведения, различные по виду, часто могут быть равны между собой, т. е. представлять один и тот же элемент полугруппы. Рассмотрение появляющихся отсюда соотношений представляет очевидный интерес. В частности, существенно выделение таких систем этих соотношений, из которых все прочие соотношения вытекают как необходимые следствия. Возможно задание полугрупп с помощью систем таких соотношений. Особую роль играют тождества, т. е. такие соотношения, которые справедливы для любых элементов полугруппы. С понятием тождества связано понятие полугруппы свободной в классе. Рассмотрение соответствующих вопросов является целью настоящей главы.

1.2. Пусть $\mathfrak{N}$ есть произвольное непустое множество, которое, имея в виду дальнейшие построения, назовем *алфавитом*. Всякую конечную последовательность элементов из $\mathfrak{N}$, записанную в виде произведения

$$W = X_1 X_2 \ldots X_n \qquad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{N}),$$

назовем *словом в алфавите* $\mathfrak{N}$.

Количество членов в слове (n) будем называть *длиной слова* W. Слово длины один: X ($X \in \mathfrak{N}$) будем отождествлять с самим элементом X. Совокупность всех слов в $\mathfrak{N}$ будем обозначать через $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$.

Употребление термина „алфавит“ мы заимствуем из теории ассоциативных исчислений, хотя там рассматриваются

лишь конечные алфавиты, тогда как у нас множество $\mathfrak{N}$ может быть и бесконечным.

1.3. Для слов в алфавите $\mathfrak{N}$ естественно определяется операция приписывания, которую будем называть *умножением слов*

$$U = X_1X_2 \dots X_n,\ V = X_{n+1}X_{n+2} \dots X_m,$$
$$W = X_1X_2 \dots X_nX_{n+1} \dots X_m,$$
$$W = UV.$$

Так как действие умножения слов, очевидно, ассоциативно, то множество $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$, состоящее из всех слов в $\mathfrak{N}$, относительно этого действия является полугруппой, которую будем называть *свободной полугруппой над* $\mathfrak{N}$. Свободные полугруппы над различными алфавитами будем также называть просто *свободными полугруппами.*

1.4. Пусть $\mathfrak{N}$ есть некоторое подмножество полугруппы $\mathfrak{A}$. Всякому слову в $\mathfrak{N}$

$$X_1X_2 \dots X_n \qquad (X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{N})$$

соответствует элемент $S \in \mathfrak{A}$, являющийся произведением элементов $X_1, X_2, \dots, X_n$, которое определено согласно действию умножения в полугруппе $\mathfrak{A}$. Этот элемент S называется *значением слова* $X_1X_2 \dots X_n$ *в* $\mathfrak{A}$.

Каждый элемент S из $[\mathfrak{N}]$ может быть представлен в $\mathfrak{A}$ в виде произведения

$$S = X_1X_2 \dots X_n \qquad (X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{N}).$$

Таким образом, S является значением некоторого слова в $\mathfrak{N}$. Элемент S вполне определен этим словом.

1.5. Если в полугруппе $\mathfrak{A}$ элемент S принадлежит $[\mathfrak{N}]$ $(\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A})$, то обычно для S существуют несколько различных слов из $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$, значением каждой из которых является S. То, что в полугруппе $\mathfrak{A}$ значения двух слов из $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$
$X_1X_2 \dots X_n$, $Y_1Y_2 \dots Y_m$ $(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m \in \mathfrak{N})$
равны, означает, что в $\mathfrak{A}$ имеет место равенство произведений

$$X_1X_2 \dots X_n = Y_1Y_2 \dots Y_m.$$

Такое равенство называется *соотношением в* $\mathfrak{A}$ *относительно* $\mathfrak{N}$. Если при этом ясно, о каком множестве $\mathfrak{N}$ идет речь, то слова „относительно $\mathfrak{N}$“ обычно опускаются.

Необходимо иметь в виду, что под соотношением относительно $\mathfrak{N}$ понимается связь между некоторыми словами из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$. Каждая из двух частей соотношения задается не тем одним элементом S из $\mathfrak{A}$, которому равно в $\mathfrak{A}$ значение соответствующего слова, но именно самим словом из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, т. е. последовательностью множителей, составляющих данное произведение. Таким образом, соотношение в $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{N}$ есть такая пара слов (W, V) из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, значения которых в $\mathfrak{A}$ равны. Учитывая это, было бы удобнее записывать соотношение не при помощи знака равенства (ибо оно вовсе не является равенством слов W и V, его составляющих), а как-либо иначе, например $W \longleftrightarrow V$ и т. п. Однако большей частью, имея в виду равенство значений слов в $\mathfrak{A}$, употребляют при записи соотношения знак равенства. Мы также будем поступать в согласии с таким обычаем. В связи с этим для равенств слов в $\mathfrak{N}$ как элементов из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ мы будем иногда употреблять знак тождества $\equiv$ (означающий тождественное, или, как говорят еще, графическое равенство слов в отличие от равенства значений этих слов в $\mathfrak{A}$). Следует иметь в виду, что в литературе иногда не делают такого различия в обозначениях, полагая, что из текста всегда ясно, о каком равенстве идет речь.

1.6. Пусть Φ есть некоторая совокупность соотношений в полугруппе $\mathfrak{A}$ относительно некоторого ее порождающего множества $\mathfrak{K}$. Определим в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая

$$W \sim V\,(\mathfrak{n}),$$

если в совокупности Φ содержится соотношение относительно $\mathfrak{K}$

$$W = V.$$

1.7. Далее будем использовать понятие и свойства производных отношений (I, 5.20; I, 5.21; I, 5.22; I, 5.23).

Если для некоторых слов W, $V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ имеет место

$$W \sim V\,(\mathfrak{n}'),$$

то, очевидно, значения слов W и V в $\mathfrak{A}$ равны, т. е. в $\mathfrak{A}$ справедливо соотношение относительно $\mathfrak{K}$

$$W = V,$$

которое в этом случае называется *непосредственным следствием из совокупности соотношений* Φ.

О слове (или о произведении) W в этом случае говорят, что оно может быть непосредственно преобразовано в V при помощи Φ. Очевиден смысл такого выражения. W может быть получено из V следующим образом. W представлено в виде произведения нескольких слов из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}$ (1,3). Для того чтобы получить из него слово V, надо одно из этих слов — сомножителей, являющееся левой или правой частью некоторого соотношения из Φ, заменить второй частью этого соотношения.

1.8. Если для некоторых слов W, $V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}$ имеет место

$$W \sim V\ (\mathfrak{n}''),$$

то, очевидно, справедливо соотношение относительно $\mathfrak{R}$

$$W = V,$$

которое в этом случае называется *следствием из совокупности соотношений* Φ.

О слове W в этом случае говорят, что оно может быть преобразовано в V при помощи Φ. Это означает, что слово W может быть преобразовано в V при помощи последовательного конечного числа преобразований, указанных в 1.7.

1.9. ***Определение.*** *Совокупность Φ соотношений относительно некоторого порождающего множества $\mathfrak{R}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ называется определяющей совокупностью соотношений, если всякое соотношение относительно $\mathfrak{R}$ является следствием из Φ.*

Соотношения, входящие в определяющую совокупность соотношений, часто называются определяющими соотношениями.

1.10. Разумеется, во всякой полугруппе относительно любого ее порождающего множества $\mathfrak{R}$ существует определяющая совокупность соотношений. Такой является, например, совокупность вообще всех соотношений относительно $\mathfrak{R}$.

Таблица умножения полугруппы (I, 1.6) является не чем иным, как совокупностью всевозможных соотношений вида $XY = Z$. Нетрудно убедиться, что она является определяющей совокупностью соотношений относительно порождающего множества, состоящего из всех элементов полугруппы.

1.11. Пусть φ есть отображение некоторого множества $\mathfrak{N}_1$ в $\mathfrak{N}_2$. Мы будем говорить, что φ индуцирует отображение

слов из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}_1}$ в слова из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}_2}$, понимая под этим то, что слово

$$W = X_1 X_2 \ldots X_n \qquad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{N}_1)$$

отображается на слово в $\mathfrak{N}_2$

$$\varphi(W) = \varphi(X_1)\varphi(X_2) \ldots \varphi(X_n).$$

Если $\mathfrak{N}_1$ есть подмножество некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$, то тем самым можно говорить об отображении соотношений в $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{N}_1$, индуцируемом отображением φ.

Рассмотрим следующую теорему, являющуюся непосредственным обобщением известной теоремы из теории групп, называемой обычно теормой Дика.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество и Φ — определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$ для полугруппы $\mathfrak{A}$. Пусть φ есть такое отображение $\mathfrak{K}$ в некоторую полугруппу $\mathfrak{B}$, при котором всякое соотношение из Φ отображается в справедливое в $\mathfrak{B}$ соотношение отосительно $\mathfrak{B}$. Тогда отображение φ может быть продолжено до гомоморфизма $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Всякий элемент из $\mathfrak{A}$ может быть представлен в виде произведения

$$A = X_1 X_2 \ldots X_n \qquad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{K}).$$

Определим $\psi(A)$ как следующий элемент из $\mathfrak{B}$:

$$\varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(X_n).$$

Такое отображение ψ элементов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ однозначно. Действительно, если

$$A = X_1 X_2 \ldots X_n, \quad A = Y_1 Y_2 \ldots Y_m$$
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots Y_m \in \mathfrak{K}),$$

то

$$X_1 X_2 \ldots X_n = Y_1 Y_2 \ldots Y_m$$

является соотношением в $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{K}$. Это соотношение должно быть следствием из Φ. Согласно определению, это означает существование слов $U_1, U_2, \ldots, U_k$, где $U_1 = X_1 X_2 \ldots X_n$, $U_k = Y_1 Y_2 \ldots Y_m$ и соотношение $U_i = U_{i+1}$ есть непосредственное следствие из Φ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Из условия теоремы относительно φ сразу следует, что в $\mathfrak{B}$

будут справедливы соотношения $\varphi(U_i) = \varphi(U_{i+1})$. Отсюда вытекает справедливость соотношения

$$\varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(X_n) = \varphi(Y_1) \cdot \varphi(Y_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(Y_m).$$

Таким образом, в $\mathfrak{B}$ элемент $\psi(A)$ определяется независимо от того, значением какого слова был задан элемент $A \in \mathfrak{A}$.

Если

$$A = X_1 X_2 \ldots X_n, \quad A' = X_1' X_2' \ldots X_m'$$
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_1', \ldots, X_m' \in \mathfrak{K}),$$

то, очевидно,

$$\psi(AA') = \varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(X_n) \cdot \varphi(X_1') \cdot \ldots \cdot \varphi(X_m') = \psi(A) \cdot \psi(A').$$

Это и доказывает, что отображение ψ является гомоморфизмом.

1.12. При помощи теоремы 1.11 легко выясняется основной смысл понятия определяющей совокупности соотношений. Он заключается в том, что задание определяющей совокупности соотношений определяет полугруппу с точностью до изоморфизма.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{K}_i$ есть порождающее множество и Φ_i — определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_i$ для полугруппы $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$. Если существует такое взаимно однозначное отображение φ $\mathfrak{K}_1$ на $\mathfrak{K}_2$, которое индуцирует взаимно однозначное отображение Φ_1 на Φ_2, то полугруппы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ изоморфны.*

Доказательство. Согласно 1.11, φ продолжимо до гомоморфизма ψ полугруппы $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_2$. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_1$ и $\psi(A) = \psi(B)$. Представим A и B в виде произведений элементов из $\mathfrak{K}$

$$A = X_1 X_2 \ldots X_n, \quad B = Y_1 Y_2 \ldots Y_m.$$

Так как ψ есть гомоморфизм, то из $\psi(A) = \psi(B)$ получаем в $\mathfrak{A}_2$ соотношение относительно $\mathfrak{K}_2 = \psi(\mathfrak{K}_1)$

$$\psi(X_1) \cdot \psi(X_2) \cdot \ldots \cdot \psi(X_n) = \psi(Y_1) \cdot \psi(Y_2) \cdot \ldots \cdot \psi(Y_m).$$

Это соотношение должно быть следствием из Φ_2.

Благодаря тому, что φ индуцирует взаимно однозначное отображение Φ_1 на Φ_2, отсюда следует, что в $\mathfrak{A}_1$ соотношение относительно $\mathfrak{K}_1$

$$X_1X_2 \ldots X_n = Y_1Y_2 \ldots Y_m$$

должно быть следствием из Φ_1. Таким образом, оказывается что из $\psi(A) = \psi(B)$ обязательно следует $A = B$, т. е. гомоморфизм ψ является взаимно однозначным отображением и, следовательно, изоморфизмом.

Остается показать, что $\psi(\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_2$. Произвольный элемент A_2 из $\mathfrak{A}_2$ может быть представлен в виде значения некоторого слова в $\mathfrak{K}_2$

$$Z_1Z_2 \ldots Z_k \qquad (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k \in \mathfrak{K}_2).$$

Для некоторых $X_i \in \mathfrak{K}_1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ имеем $\varphi(X_i) = Z_i$. Так как ψ есть продолжение φ, то для $A_1 = X_1X_2 \ldots X_k \in \mathfrak{A}_1$ получаем в $\mathfrak{A}_2$

$$\psi(A_1) = \psi(X_1X_2 \ldots X_k) = \psi(X_1) \cdot \psi(X_2) \cdot \ldots \cdot \psi(X_k) =$$
$$= \varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(X_k) = Z_1Z_2 \ldots Z_k = A_2.$$

1.13. Пусть для элементов $\mathfrak{A}$ относительно порождающего множества $\mathfrak{K}$ определены некоторым образом канонические их выражения, являющиеся словами из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ (III, 2.8). Φ есть некоторая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$. Если всякое слово из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ можно при помощи соотношений из Φ преобразовать к каноническому виду, то Φ является определяющей совокупностью соотношений полугруппы $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{K}$.

Действительно, пусть $W = V$ есть произвольное соотношение относительно $\mathfrak{K}$. По предположению, слово W можно при помощи Φ привести к каноническому виду U_W, а V — к каноническому виду U_V. Имеют место соотношения

$$W = V, \quad W = U_W, \quad V = U_V.$$

Так как U_W и U_V — канонические формы слов, то их значения могут равняться только в том случае, когда они совпадают: $U_W \equiv U_V$. Так как $W = U_W$ есть следствие из Φ и $V = U_V$ есть следствие из Φ, а $U_W \equiv U_V$, то $W = V$ является следствием из Φ.

1.14. В качестве примера рассмотрим полугруппу $\mathfrak{P}$, определенную нами в III, 6.2; III. 6.3. Множество, состоящее

из элементов U, V, E, очевидно, будет порождающим для $\mathfrak{P}$ (E можно было бы исключить и тогда мы получили бы неприводимое порождающее множество. Однако дальнейшие соотношения будут выглядеть лучше, если этого не делать). Относительно этого порождающего множества имеют место соотношения

$$VU = E,$$
$$EU = U,\ UE = U,\ EV = V,\ VE = V,\ E^2 = E.$$

Легко видеть, что всякое слово в множестве $\{U, V, E\}$ при помощи этих соотношений может быть приведено к виду

$$U^a V^b \qquad (a, b = 0, 1, 2, \ldots)$$

(где под U^0 и V^0 подразумевается E). Как было показано в III, 6.3, такое выражение для элементов из $\mathfrak{P}$ является канонической формой относительно порождающего множества $\{U, V, E\}$. Отсюда, согласно 1.13, следует, что указанные соотношения образуют определяющую совокупность соотношений полугруппы $\mathfrak{P}$.

§ 2. Преобразования определяющих совокупностей соотношений

2.1. Вполне очевидно, что полугруппа, как правило, обладает многими различными определяющими совокупностями соотношений. Это связано прежде всего с тем, что в полугруппе обычно имеется несколько различных порождающих множеств. Но и относительно одного и того же порождающего множества может существовать несколько различных определяющих совокупностей соотношений. Соответствующий вопрос в теории групп многократно бывал объектом различных исследований. В общей теории полугрупп он был рассмотрен А. Я. Айзенштат [2].

2.2. Пусть $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$ и Φ_1 — определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$; Φ_2 — некоторая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$. *Если всякое соотношение из* Φ_1 *является следствием из* Φ_2, *то* Φ_2 *также будет определяющей совокупностью соотношений относительно* $\mathfrak{K}$.

Действительно, пусть W и V есть слова в $\mathfrak{K}$, образующие соотношение $W = V$. Так как это соотношение есть

следствие из Φ_1, то найдутся такие слова в $\mathfrak{K}_1$

$$U_1 \equiv W,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n-1},\ U_n \equiv V,$$

что $U_i = U_{i+1}$ есть непосредственное следствие из Φ_1 ($i=1, 2, \ldots, n-1$). Поэтому при некоторых T, T', S_1, S_2 из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ (T и T' могут быть и пустыми символами) имеет место

$$U_i = TS_1T',\ U_{i+1} = TS_2T',$$

где $S_1 = S_2$ есть соотношение из Φ_1. Так как $S_1 = S_2$ есть следствие из Φ_2, то и $U_i = U_{i+1}$ будет следствием из Φ_2. Отсюда следует, что $W = V$ будет следствием из Φ_2.

2.3. В общем виде переход от одной определяющей совокупности соотношений относительно некоторого порождающего множества к произвольной другой определяющей совокупности соотношений относительно того же самого порождающего множества может быть описан нижеследующим образом.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$ и Φ — некоторая определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$. Если к Φ присоединить некоторую совокупность Ψ соотношений относительно $\mathfrak{K}$ (каждое из них является следствием из Φ), то полученная совокупность $\Phi \cup \Psi$, очевидно, будет определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}$.

Допустимо и обратное преобразование. Пусть совокупность Φ представлена в виде некоторого объединения $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, причем каждое соотношение из Φ'' является следствием из Φ'. Тогда, очевидно, Φ' является для $\mathfrak{A}$ определяющей системой соотношений относительно $\mathfrak{K}$.

Легко видеть, что от произвольной определяющей совокупности соотношений Φ относительно $\mathfrak{K}$ можно перейти к любой другой определяющей совокупности соотношений Φ_0 относительно $\mathfrak{K}$ при помощи указанных преобразований. Действительно, сперва переходим от Φ к $\Phi \cup \Phi_0$ присоединением к Φ соотношений из Φ_0 (все они являются следствиями из Φ). Затем от $\Phi \cup \Phi_0$ переходим к Φ_0, отбрасывая соотношения из $(\Phi \cup \Phi_0) \setminus \Phi_0$ (все они являются следствиями из Φ_0). В случае конечных Φ и Φ_0 это можно осуществлять последовательно, присоединяя или отбрасывая лишь по одному соотношению.

2.4. Теперь перейдем к вопросу об изменении определяющей совокупности соотношений при изменении порождающего множества.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{K}'$ — произвольное подмножество $\mathfrak{A}$; Φ — некоторая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$. Для каждого элемента $X' \in \mathfrak{K}'$ фиксируем некоторое слово из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$, значением которого он является

$$X' = Y_1 Y_2 \dots Y_n \qquad (Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathfrak{K}).$$

Если Φ есть определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}$, то совокупность Φ', состоящая из соотношений, входящих в Φ, и из соотношений

$$X' = Y_1 Y_2 \dots Y_n,$$

будет определяющей совокупностью соотношений относительно множества $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$.

Действительно, пусть $W = V$ есть произвольное соотношение относительно $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$. Заменим в W и V всякий элемент X' из $\mathfrak{K}'$ соответствующим произведением $Y_1 Y_2 \dots Y_n$. Мы получим слова W' и V' в $\mathfrak{K}$, причем соотношения $W = W'$ и $V = V'$ являются следствиями из Φ'. Соотношение $W' = V'$ относительно $\mathfrak{K}$ должно быть следствием из Φ. Таким образом, мы получили соотношения в $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$

$$W = W', \quad W' = V', \quad V' = V,$$

каждое из которых есть следствие из Φ'.

Отсюда следует, что соотношение $W = V$ является следствием из Φ'.

2.5. Используя обозначения 2.4, можно формулировать и доказать справедливость обратного по отношению к 2.4 утверждения. При этом, однако, мы должны условиться, что для каждого X' из $\mathfrak{K}'$, который содержится в $\mathfrak{K}$, в качестве его выражения в виде произведения элементов из $\mathfrak{K}$ мы будем брать тождественное выражение $X' = X'$.

Если Φ' есть определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$, то Φ будет определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}$.

Пусть $W = V$ ($W, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$) есть произвольное соотношение относительно $\mathfrak{K}$. Будучи соотношением и относительно $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$,

оно является следствием из Φ'. Это значит, что существуют такие слова в $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}'$

$$W \equiv U_1, U_2, \ldots, U_{s-1}, U_s \equiv V,$$

что $U_i = U_{i+1}$ есть непосредственное следствие из Φ'. Заменив во всех этих словах каждый элемент X' из $\mathfrak{K}'$, не содержащийся в $\mathfrak{K}$, соответствующим произведением $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, получим последовательность слов в $\mathfrak{K}$ $T_1, T_2, \ldots, T_{s-1}, T_s$ (крайние слова цепочки при этом, конечно, не изменятся, т. е. $T_1 \equiv W$ и $T_s \equiv V$). Слова U_i и U_{i+1} можно было представить в виде

$$U_i \equiv PS_1Q, \quad U_{i+1} \equiv PS_2Q,$$

где $S_1 = S_2$ есть одно из соотношений из Φ'. После указанной выше замены мы для слов T_i и T_{i+1} получим выражения

$$T_i \equiv \overline{P}\overline{S}_1\overline{Q}, \quad T_{i+1} \equiv \overline{P}\overline{S}_2\overline{Q}.$$

Если соотношение $S_1 = S_2$ имело вид $X' = Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, то, заменяя X' на $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, мы получим $T_i \equiv T_{i+1}$. Если же $S_1 = S_2$ принадлежало Φ, то, очевидно, $\overline{S}_1 \equiv S_1$, $\overline{S}_2 \equiv S_2$. В этом случае соотношение $T_i = T_{i+1}$ есть следствие из Φ. Благодаря этому свойству последовательности слов $T_1, T_2, \ldots, T_s$ заключаем, что соотношение $W = V$ есть непосредственное следствие из Φ.

2.6. Пусть $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ два произвольных порождающих множества полугруппы $\mathfrak{A}$ и Φ_1 — некоторая определяющая совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_1$. Покажем, как, исходя из Φ_1, можно получить некоторую определяющую совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_2$.

Обозначим $\widetilde{\mathfrak{K}}_i = \mathfrak{K}_i \setminus (\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2)$ $(i = 1, 2)$

Для каждого элемента из $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ фиксируем некоторое слово в $\mathfrak{K}_2$, значением которого он является. Тем самым фиксируем представление каждого элемента из $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ в виде произведения элементов из $\mathfrak{K}_2$. Равенства, дающие эти представления, рассматриваем как соотношения относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$. Совокупность их обозначаем через Φ_{12}.

Аналогично фиксировав выражения элементов из $\widetilde{\mathfrak{K}}_2$ через элементы из $\mathfrak{K}_1$, получаем совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$, которую обозначим через Φ_{21}.

Если в соотношениях из Φ_1 заменить при помощи Φ_{12} все участвующие в них элементы из $\tilde{\mathfrak{K}}_1$ произведениями элементов из $\mathfrak{K}_2$, то мы получим совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_2$, которую обозначим через Φ_2'.

Если в соотношениях из Φ_{21} заменить при помощи Φ_{12} элементы из $\tilde{\mathfrak{K}}_1$ произведениями элементов из $\mathfrak{K}_2$, то мы получим совокупность соотношений относительно $\mathfrak{K}_2$, которую обозначим через Φ_2''.

Теорема. *Совокупность соотношений $\Phi_2' \cup \Phi_2''$ является для полугруппы $\mathfrak{A}$ определяющей совокупностью соотношений относительно порождающего множества $\mathfrak{K}_2$.*

Доказательство. 1) Благодаря 2.4 совокупность соотношений $\Phi_1 \cup \Phi_{21}$ является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$. Отсюда благодаря 2.3 следует, что и совокупность

$$\Psi_1 = \Phi_1 \cup \Phi_{21} \cup \Phi_{12} \cup \Phi_2' \cup \Phi_2''$$

будет определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$.

2) Относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$ совокупность соотношений

$$\Psi_2 = \Phi_{21} \cup \Phi_{12} \cup \Phi_2' \cup \Phi_2''$$

является определяющей совокупностью соотношений.

Пусть $W = V$ есть одно из соотношений из Φ_1. При помощи Φ_{12} заменим в W и V элементы из $\tilde{\mathfrak{K}}_1$ соответствующими словами из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}_2}$. Мы получим слова $\overline{W}$ и $\overline{V}$ в $\mathfrak{K}_2$. Соотношения $W = \overline{W}$ и $V = \overline{V}$ являются следствиями из Ψ_2. Соотношение $\overline{W} = \overline{V}$ есть одно из соотношений из Φ_2'. Отсюда вытекает, что соотношение $W = V$ есть следствие из Ψ_2.

Так как Ψ_1 является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$, то из проведенного рассуждения благодаря 2.3 следует, что и Ψ_2 будет определяющей совокупностью соотношений.

3) Относительно $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$ совокупность соотношений

$$\Psi_3 = \Phi_{12} \cup \Phi_2' \cup \Phi_2''$$

является определяющей совокупностью соотношений.

Пусть $W=V$ есть одно из соотношений из Φ_{21}. При помощи Φ_{12} заменим в словах W и V элементы из $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$ соответствующими словами из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}_2}$. Мы получим слова $\overline{W}$ и $\overline{V}$ в $\mathfrak{R}_2$, которые образуют соотношение из Φ_2'' $\overline{W}=\overline{V}$. Так как соотношения $W=\overline{W}$ и $V=\overline{V}$ являются следствиями из Φ_{12}, то соотношение $W=V$ будет следствием из Ψ_3.

Так как Ψ_2 является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$, то из проведенных рассуждений благодаря 2.3 следует, что и Ψ_3 будет определяющей совокупностью соотношений.

4) Из того, что $\Psi_3=\Phi_{12}\cup\Phi_2'\cup\Phi_2''$ является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{R}_1\cup\mathfrak{R}_2$, благодаря 2.5 непосредственно вытекает, что $\Phi_2'\cup\Phi_2''$ будет определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{R}_2$.

2.7. Отметим, что в том частном случае, когда $\mathfrak{R}_2\subset\mathfrak{R}_1$ множество Φ_{21} оказывается пустым. Благодаря этому и совокупность Φ_2'' пуста, Таким образом, в этом случае Φ_2' будет определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{R}_2$.

2.8. Применим теорему 2.6 с учетом замечания 2.7 к полугруппе $\mathfrak{P}$, рассмотренной в 1.14. Так как $\{U, V\}$ также есть порождающее множество $\mathfrak{P}$, то для него, исходя из определяющей совокупности соотношений относительно $\{U, V, E\}$, выведенной в 1.4, мы получаем следующую определяющую совокупность соотношений:

$$VU^2=U,\quad UVU=U,\quad VUV=V,\quad V^2U=V,$$

$$VUVU=VU.$$

Последнее из этих соотношений, будучи очевидным следствием предыдущих, может быть отброшено.

2.9. Предшествующие определения и рассуждения, относящиеся к произвольной полугруппе, сохраняются, в частности, и для группы. Однако обычно в теории групп употребляются еще следующие дополнительные соглашения. Порождающее множество для группы берут обычно так, чтобы оно содержало единицу E и вместе с каждым элементом X содержало бы обратный к нему элемент X^{-1}. В число

соотношений определяющей системы обязательно включаются соотношения вида

$$EX = XE = X, \quad XX^{-1} = X^{-1}X = E.$$

Так как эти соотношения во всякой группе обязательно имеют место, то их обычно не выписывают и даже не упоминают. Само указание на то, что речь идет о группе, означает, что надо мысленно дополнить соответствующим образом указанное порождающее множество и определяющую совокупность соотношений.

Следует также упомянуть возможность иного подхода в теории групп к определяющим системам соотношений, связанного с возможностью представления группы как факторгруппы свободной группы [1]. Обладая известными достоинствами, такой подход в некоторых случаях менее удобен. Это видно на примере рассуждения 2.4, 2.5, частный случай которого в теории групп при упомянутом подходе приобретает вид довольно сложной теоремы.

§ 3. Полугруппы, заданные определяющими отношениями

3.1. В рассуждениях предыдущих параграфов мы всегда исходили из некоторой полугруппы, которая предполагалась заданной, и для нее рассматривали те или иные соотношения относительно различных порождающих множеств. Сейчас нам предстоит подойти по существу к тем же вопросам, но с противоположной точки зрения. Мы будем исходить из некоторых соотношений и строить по ним полугруппу. Главная трудность в рассуждениях при таком подходе состоит в том, что, не имея еще окончательно определенной полугруппы, мы, рассматривая те или иные выражения, которые мы хотим сделать элементами будущей полугруппы, заранее часто не можем сказать, когда такие первоначально различные выражения будут изображать один и тот же элемент будущей полугруппы. Это вызывает известные осложнения при конструировании полугруппы.

3.2. Пусть нам задан исходный алфавит $\mathfrak{A}$ (1.2). Берем свободную полугруппу над ним $\mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ (1.3). Если в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ задано

---

[1] См., например, А. Г. Курош. Теория групп, Гостехиздат, 1953.

некоторое отношение $\mathfrak{n}$, то для $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ определяется второе производное отношение $\mathfrak{n}''$ (I, 5.21). Так как $\mathfrak{n}''$ есть двусторонне стабильное отношение эквивалентности (I, 5.22), то, согласно VII, 2.4, определена факторполугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}/\mathfrak{n}''$, которую будем называть *полугруппой над алфавитом* $\mathfrak{N}$, *заданной определяющим отношением* $\mathfrak{n}$.

Элемент полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$, являющийся классом слов в $\mathfrak{N}$, эквивалентных между собой относительно второго производного отношения $\mathfrak{n}''$, будем обозначать обычно при помощи черты: $\overline{W}$, где W есть одно из слов в $\mathfrak{N}$, входящих в этот класс. Умножение классов в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$ производится путем перемножения в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ (1.2) их представителей:

$$\overline{W}_1 \cdot \overline{W}_2 = \overline{W_1 W_2}.$$

Множество $\overline{\mathfrak{N}}$, состоящее из всех классов, содержащих слова в $\mathfrak{N}$ длины один $\overline{X}(X \in \mathfrak{N})$, является порождающим множеством полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$, так как

$$\overline{X_1 X_2 \ldots X_n} = \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{X}_n.$$

Следует иметь в виду, что вполне возможны такие случаи, когда два различных элемента из $\mathfrak{N}$ оказываются эквивалентными относительно $\mathfrak{n}''$, т. е. имеет место $X \neq Y$, но $X \equiv Y(\mathfrak{n}'')$, т. е. $\overline{X} = \overline{Y}$ $(X, Y \in \mathfrak{N})$.

3.3. Отметим, что в случае, когда $\mathfrak{n}$ является частично тождественным отношением, т. е. из $W \sim V(\mathfrak{n})$ следует $W \equiv V$ (причем для некоторых $W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ может иметь место $W \not\sim W(\mathfrak{n})$), то $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$ оказывается просто свободной полугруппой над $\mathfrak{N}$ (1.3). В частности, это имеет место, когда $\mathfrak{n}$ есть тождественное отношение (т. е. $W \sim W(\mathfrak{n})$ для всех $W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ и $W \not\sim V(\mathfrak{n})$, если $W \neq V$) или когда $\mathfrak{n}$ есть пустое отношение (т. е. $W \not\sim V(\mathfrak{n})$ для любых $W, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$.

3.4. Обратимся к рассмотрению полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$ при произвольном отношении $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$. Каждому элементу X алфавита $\mathfrak{N}$ можно сопоставить элемент $\overline{X}$ из $\overline{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$. Благодаря этому каждому слову $W = X_1 X_2 \ldots X_n$ в $\mathfrak{N}$ сопоставляется слово $\overline{X}_1 \overline{X}_2 \ldots \overline{X}_n$ в $\overline{\mathfrak{N}}$, которое будем обозначать через $\widetilde{W}$. Отмечаем, что значение слова $\widetilde{W}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$, очевидно, равно $\overline{W} \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$. Так как из $W \sim V(\mathfrak{n})$ $(W, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ следует выполне-

ние в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{n}$ равенства $\overline{W}=\overline{V}$, то паре слов W и V из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, находящихся в отношении $\mathfrak{n}$, соответствует в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{n}$ соотношение $\tilde{W}=\tilde{V}$ относительно $\mathfrak{N}$. Совокупность всех таких соотношений в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{n}$ обозначим через $\Phi(\mathfrak{n})$. $\Phi(\mathfrak{n})$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{*}$ *является определяющей совокупностью соотношений относительно порождающего множества* $\overline{\mathfrak{N}}$.

Действительно, если в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{n}$ имеет место соотношение

$$\tilde{W}=\tilde{V} \qquad (W, V\in\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}),$$

то это означает, что $\overline{W}=\overline{V}$, т. е. $W\sim V(\mathfrak{n}'')$.

Но из $W\sim V(\mathfrak{n}'')$ следует, что для соответствующих слов $\tilde{W}$ и $\tilde{V}$ можно получить соотношение $\tilde{W}=\tilde{V}$ как следствие из $\Phi(\mathfrak{n})$.

3.5. Пусть теперь в произвольной полугруппе $\mathfrak{A}$ выделено некоторое порождающее множество $\mathfrak{K}$ и дана некоторая определяющая совокупность Φ соотношений относительно $\mathfrak{K}$. Беря $\mathfrak{K}$ в качестве исходного алфавита, строим свободную полугруппу над ним $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$. В $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ определяем отношение $\mathfrak{n}$, полагая $W\sim V(\mathfrak{n})$ $(W, V\in\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}})$ в том и только в том случае, когда в $\mathfrak{A}$ $W=V$ является соотношением, принадлежащим Φ. Согласно определениям 1.8 и 1.9, слова T и U из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ имеют равные значения в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $T\sim U(\mathfrak{n}'')$. Но и в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{n}$ равенство элементов $\overline{T}=\overline{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда $T\sim U(\mathfrak{n}'')$. Таким образом, между элементами из $\mathfrak{A}$ и элементами из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{n}$ устанавливается очевидным образом взаимно однозначное соответствие. Это соответствие обладает свойством гомоморфизма и потому является изоморфизмом.

Из проведенных рассуждений следует, что *всякая полугруппа с точностью до изоморфизма может быть задана как полугруппа над некоторым алфавитом, заданная при помощи некоторого определяющего отношения.*

3.6. Для поставленного в начале параграфа вопроса роль конструкции полугруппы над алфавитом, заданной при помощи определяющего отношения, состоит в следующем. Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{N}$ и дана совокупность Ψ формальных равенств относительно $\mathfrak{N}$, т. е. пар слов в $\mathfrak{N}$, связанных знаком равенства. Спрашивается, можно ли построить полугруппу, для которой элементы из $\mathfrak{N}$ являлись бы ее элементами

и образовывали в ней порождающее множество, причем соотношения из Ψ были бы в этой полугруппе справедливы и составляли бы определяющую совокупность соотношений относительно $\mathfrak{N}$?

3.7. Для ответа на этот вопрос рассмотрим свободную полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ над алфавитом $\mathfrak{N}$. Возьмем в ней в качестве определяющего отношения такое отношение $\mathfrak{n}_{\Psi}$, что $W \sim V(\mathfrak{n}_{\Psi})$ ($W, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$) имеет место в том и только в том случае, когда пара слов W и V, связанная знаком равенства, входит в заданную совокупность формальных равенств Ψ. Предположим, что ни для каких двух различных элементов $X, Y \in \mathfrak{N}$ не может иметь места $X \sim Y(\mathfrak{n}''_{\Psi})$. Тогда, построив полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}_{\Psi}}$, отождествим каждый ее элемент вида $\overline{X}(X \in \mathfrak{N})$ с самим элементом X. В этой полугруппе множество $\mathfrak{N}$, совпадающее благодаря указанному отождествлению с $\overline{\mathfrak{N}}$, является порождающим множеством.

Все формальные равенства из Ψ являются справедливыми соотношениями. При этом они образуют определяющую совокупность соотношений относительно $\mathfrak{N}$, ибо соотношение $W = V(W, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}_{\Psi}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{W} = \overline{V}$, т. е. когда $W \sim V(\mathfrak{n}''_{\Psi})$. Последнее же означает, что $W = V$ есть следствие из Ψ.

3.8. Пусть теперь для некоторых $X \neq Y (X, Y \in \mathfrak{N})$ имеет место $X \sim Y(\mathfrak{n}''_{\Psi})$. Если $\mathfrak{N}$ является порождающим множеством некоторой полугруппы, в которой все формальные равенства из Ψ являются справедливыми соотношениями, то из них в качестве следствия вытекает и соотношение $X = Y$. Таким образом, различные элементы из $\mathfrak{N}$ не могут быть различными элементами такой полугруппы.

3.9. Из рассуждений 3.7 и 3.8 вытекает полный ответ на вопрос, поставленный в 3.6. Если совокупность формальных равенств Ψ такова, что для определенного с помощью нее отношения $\mathfrak{n}_{\Psi}$ (3.7) из $X \neq Y$ ($X, Y \in \mathfrak{N}$) всегда следует $X \not\sim Y(\mathfrak{n}''_{\Psi})$, и только при соблюдении этого условия существует такая полугруппа $\mathfrak{A}$, для которой $\mathfrak{N}$ является порождающим множеством, а Ψ является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{N}$.

3.10. В связи с полученным выводом делается естественным то соглашение, которое всегда принимается в соответ-

ствующих вопросах. Пусть $\mathfrak{N}$ некоторое множество и Ψ — совокупность формальных равенств некоторых слов в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$. Полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}_\Psi}$, которую можно также обозначить и через $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Psi}$, называют *полугруппой, заданной определяющей совокупностью соотношений* Ψ (или определяющим отношением $\mathfrak{n}_\Psi$). Ее элементами являются классы слов в $\mathfrak{N}$, эквивалентных между собой относительно $\mathfrak{n}''_\Psi$. Класс $\overline{X}$, где $X \in \mathfrak{N}$ отождествляется с самим X. Если при этом для двух каких-нибудь различных элементов $X, Y \in \mathfrak{N}$ имеет место $\overline{X} = \overline{Y}$ (т. е. $X \sim Y(\mathfrak{n}''_\Psi)$), то X и Y считают просто различными обозначениями одного и того же элемента полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}_\Psi}$. Как мы уже показывали (3.2) в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}_\Psi}$ множество $\overline{\mathfrak{N}}$, а следовательно, и $\mathfrak{N}$, если произвести в $\mathfrak{N}$ соответствующие отождествления, является порождающим множеством, а Ψ, совпадающая с $\Phi(\mathfrak{n}_\Psi)$ (3.4), есть определяющая совокупность соотношений относительно этого порождающего множества.

3.11. Непосредственно из задания отношения $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, или, что то же самое, из вида формальных равенств Ψ, не видно, когда два слова из $\mathfrak{N}$ имеют одинаковые значения в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$, т. е. изображают один и тот же элемент этой полугруппы. Выяснение этого вопроса для каждой конкретной полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$ является не только практически весьма нужным для проведения тех или иных исследований ее свойств, но и представляет большую принципиальную важность, поскольку, не имея его решения, мы не имеем ясного представления об основе данной полугруппы — о множестве ее элементов. Однако решение этого вопроса связано с принципиальными глубокими трудностями.

Наиболее точно соответствующая проблема формулируется для случая, когда алфавит $\mathfrak{N}$ конечен, а определяющее отношение $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ задается конечным числом пар слов в $\mathfrak{N}$, находящихся между собой в отношении $\mathfrak{n}$ (или, что то же самое, полугруппа задается конечным числом соотношений). В этом случае можно ставить вопрос о нахождении такого общего алгорифма, при помощи которого для любой пары слов W и V из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{n}}$ можно выяснить, находятся ли они между собой в отношении $\mathfrak{n}''$ (второе производное отношение относительно $\mathfrak{n}$). Последнее же равносильно выясненению вопроса,

представляют ли собой слова W и V один и тот же элемент данной полугруппы или нет. Задача о построении такого алгорифма называется обычно проблемой тождества для слов данной полугруппы. В некоторых случаях решение этой проблемы, т. е. нахождение такого алгорифма, оказывается возможным. Однако, как показал впервые А. А. Марков [1], существуют такие полугруппы над конечным алфавитом, определенные конечным числом соотношений, в которых такого общего алгорифма вообще не существует. Такие полугруппы были построены как самим А. А. Марковым [1], [6], так впоследствии и некоторыми другими математиками, например, Постом [1] и Кольмаром [1]. Соответствующие полугруппы внешне по форме своего задания могут выглядеть совсем несложно. Например, полугруппа, найденная Г. С. Цейтиным [1], построена над алфавитом, состоящим из пяти элементов $\{A, B, C, D, E\}$, и задана совокупностью следующих семи соотношений:

$$AC = CA, \quad AD = DA, \quad BC = CB, \quad BD = DB,$$
$$ECA = AE, \quad EDB = BE,$$
$$ABAC = ABACE.$$

Доказательство того, что для этой или для какой-либо другой полугруппы проблема тождества неразрешима, представляет большую сложность и здесь приведено быть не может. По своему характеру соответствующие вопросы относятся к самостоятельной отрасли математики — теории алгорифмов (см., например, книгу А. А. Маркова [6]).

3.12. Надо отметить, что для полугрупп над конечным алфавитом, заданных конечным числом соотношений, естественно ставятся и другие алгорифмические задачи. Например, очень важен вопрос об алгорифме, выясняющем вопрос о делимости. Именно, требуется построить такой алгорифм, при помощи которого для любых двух слов W и V над данным алфавитом можно было бы выяснить, существует ли третье слово U над этим алфавитом, такое, что имеет место

$$WU \sim V \,(\mathfrak{n}'').$$

Очевидно, это означает не что иное, как построение алгорифма, при помощи которого можно было бы выяснить, когда один из двух элементов полугруппы, заданных словами в данном алфавите, является левым делителем второго (ана-

логично для делимости справа). Как показал А. А. Марков [1], [6], и такой алгорифм для некоторых полугрупп невозможен (см. также работу С. И. Адяна [1]).

3.13. Следует подчеркнуть, что невозможность алгорифма проблемы тождества или проблемы делимости в той или иной полугруппе означает, что не существует одного единого общего алгорифма для решения соответствующего вопроса для любой пары слов в данном алфавите. Однако это вовсе не означает, что существует хотя бы одна конкретная пара слов, для которой соответствующий вопрос не мог бы быть решен в принципе. Из доказательства невозможности для какой-либо пары конкретных слов W и V доказать то, что они изображают один и тот же элемент, очевидно, следовало бы, что для этих слов невозможно найти такую цепочку слов, которая означает, что $W \sim V$ (n″). Но это значило бы, что такой цепочки вообще не существует, т. е. что $W \not\sim V$ (n″). Следовательно, это означало бы решение нашего вопроса.

Упомянутые выше результаты означают лишь отсутствие в некоторых случаях одного единого общего алгорифма, решающего соответствующую задачу для всей бесконечной совокупности пар слов в данном алфавите.

3.14. В заключение надо отметить тесную связь теории полугрупп, заданных над данным алфавитом при помощи определяющего отношения, с теорией ассоциативных исчислений (последняя ограничивается случаем конечности в указанном выше смысле). Теория ассоциативных исчислений в сущности может быть рассматриваема как некоторый конструктивный подход к теории таких полугрупп. Укажем, что соответствующее предельно строгое изложение основ этой теории и упомянутые выше результаты о невозможности некоторых алгорифмов даны в книге А. А. Маркова [6]. В этой книге, как и во многих других работах по этому вопросу, упомянутые выше результаты о невозможности некоторых алгорифмов оформляются как соответствующие утверждения относительно тех или иных ассоциативных исчислений.

§ 4. Тождества в полугруппах

4.1. Пусть T и T' есть два слова в счетном алфавите $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$. Соотношение, связывающее слова T и T' знаком $\simeq$ (употребляют иногда и знак тождества $\equiv$, который

у нас уже использован для других целей)

$$T \cong T',$$

называется *тождеством в полугруппе* $\mathfrak{A}$, если при любом отображении φ множества Ξ в $\mathfrak{A}$, значения слов $\varphi(T)$ и $\varphi(T')$ в $\mathfrak{A}$ равны. Другими словами, $T \cong T'$ превращается в $\mathfrak{A}$ в равенство при подстановке в слова T и T' вместо элементов из Ξ любых элементов из $\mathfrak{A}$.

Очевидно, выбор элементов алфавита Ξ совершенно безразличен для задания тождеств в полугруппе. В частности, из справедливости в $\mathfrak{A}$ некоторого тождества $T \cong T'$ следует, что будет справедливо и тождество $T_0 \cong T_0'$, получаемое из $T \cong T'$ такой заменой элементов из Ξ, в него входящих, другими элементами из этого же алфавита. при которой различные элементы из Ξ заменяются различными же элементами. В этом случае можно считать $T \cong T'$ и $T_0 \cong T_0'$ одним и тем же тождеством.

Можно рассматривать в полугруппе одновременно несколько тождеств. Благодаря сказанному их можно задавать исходя из одного и того же алфавита. Так как в каждом из них участвует лишь конечное число элементов этого алфавита, но числа эти в совокупности (для всех тождеств) могут быть и неограничены, то для того чтобы обслужить все эти тождества, приходится брать счетный алфавит Ξ.

4.2. Во всякой коммутативной полугруппе имеет место тождество

$$\xi_1\xi_2 \cong \xi_2\xi_1.$$

Наличие этого тождества в полугруппе и есть условие ее коммутативности.

Полугруппа идемпотентов характеризуется тождеством

$$\xi_1^2 \cong \xi_1.$$

Единичная полугруппа, т. е. полугруппа, состоящая из одного элемента, характеризуется тождеством

$$\xi_1 \cong \xi_2.$$

Не раз мы привлекали к рассмотрению полугруппу, в которой произведение двух любых элементов равно левому множителю. Такая полугруппа определена с точностью до

изоморфизма мощностью своих элементов. Класс таких полугрупп, очевидно, характеризуется выполнением тождества

$$\xi_1\xi_2 \cong \xi_1.$$

Аналогично тождество

$$\xi_1\xi_2 \cong \xi_2$$

характеризует класс полугрупп, в которых произведение всегда равно правому множителю.

4.3. Каждое тождество $T \cong T'$ можно характеризовать суммой длин составляющих его слов T и T'.

Тождествами, у которых это число равно двум, будут тождество $\xi_1 \cong \xi_2$, которое мы уже рассмотрели, и тождество $\xi_1 = \xi_1$ — тривиальное и справедливое во всякой полугруппе.

Помимо рассмотренных в 4.2 тождеств, у которых сумма длин составляющих их слов не более трех, возможны еще лишь два таких тождества. Тождество

$$\xi_1\xi_2 = \xi_3$$

имеет место только в единичной полугруппе, поскольку при его выполнении для любых элементов полугруппы X и Y получаем

$$XX = X, \quad XX = Y.$$

Аналогично и тождество

$$\xi_1^2 \cong \xi_2$$

выполняется только в единичной полугруппе.

При возрастании указанной суммы длин появляются новые нетривиальные тождества.

4.4. Полугруппа $\mathfrak{A}$, в которой для некоторого натурального n имеют место два тождества:

$$\xi_1^n \cong \xi_2^n; \quad \xi_1^n\xi_2 \cong \xi_2,$$

является группой, порядки всех элементов которой являются делителями n. Действительно, для любого $X \in \mathfrak{A}$ элемент X^n является левой единицей $\mathfrak{A}$. При этом каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ имеет двусторонне обратный A^{n-1} относительно этой единицы $A^n = X^n$. Обратно во всякой группе, элементы которой имеют порядки, являющиеся делителями n, очевидно, имеют место оба указанных тождества.

Важным вопросом в теории групп является так называемая проблема Бернсайда о том, существуют ли бесконечные группы, имеющие конечное порождающее множество, у которых порядки всех элементов являются делителями одного и того же числа n. Для $n \leqslant 4$ известно, что таких бесконечных групп не существует. Для $n \geqslant 72$ П. С. Новиковым [1] доказано существование таких бесконечных групп.

Как показано в работе Грина и Риса [1], указанная проблема теории групп эквивалентна следующей проблеме теории полугрупп: существуют ли бесконечные полугруппы с конечным порождающим множеством, в которых имеет место тождество $\xi_1^{n+1} \cong \xi_1$.

В одном направлении связь между обоими проблемами очевидна. Если для некоторого n всякая полугруппа с указанным тождеством, обладающая конечным порождающим множеством, конечна, то отсюда сразу вытекает конечность всех групп, обладающих конечным порождающим множеством, порядки элементов которых являются делителями n. Это следует из того, что при выполнении тождеств $\xi_1^n \cong \xi_2^n$, $\xi_1^n \xi_2 \cong \xi_2$, очевидно, имеет место и тождество $\xi_1^{n+1} \cong \xi_1$.

Обратное далеко не очевидно. Доказательство того, что из существования бесконечной полугруппы с конечным порождающим множеством, обладающей тождеством $\xi_1^{n+1} = \xi_1$, следует существование бесконечной полугруппы с конечным порождающим множеством, обладающей тождествами $\xi_1^n \cong \xi_2^n$, $\xi_1^n \xi_2 \cong \xi_1$, непросто, и мы не будем его приводить.

4.5. Используя понятие тождества, А. И. Мальцеву [6] удалось перенести в теорию полугрупп понятие нильпотентности, широко используемое в теории групп [2].

К понятию нильпотентности в теории групп можно подойти с различных точек зрения. Например, можно использовать следующее индуктивное определение.

Коммутативные группы называются 1-ступенно нильпотентными. Группа $\mathfrak{G}$ называется n-ступенно нильпотентной ($n = 2, 3, 4, \ldots$), если факторгруппа по ее центру $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ является $(n-1)$-ступенно нильпотентной.

---

[1] О периодических группах. ДАН СССР, 127 (1959), 749—752.

[2] См., например, А. Г. Курош. Теория групп, § 62, Гостехиздат, 1953.

4.6. Для алфавита $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ определяем по индукции слова W_n и V_n в Ξ. Полагаем

$$W_0 \equiv \xi_1, \quad V_0 \equiv \xi_2.$$

Далее

$$W_n \equiv W_{n-1}\xi_{n+2}V_{n-1}, \quad V_n \equiv V_{n-1}\xi_{n+2}W_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно А. И. Мальцеву, полугруппа $\mathfrak{A}$ называется *n-ступенно нильпотентной*, если в ней имеет место тождество

$$W_n \cong V_n.$$

4.7. Отметим, что, очевидно, всякая n-ступенно нильпотентная полугруппа обязательно будет и k-ступенно нильпотентной при любом $k \geqslant n$.

Коммутативные полугруппы все 1-ступенно нильпотентны. Однако в классе 1-ступенно нильпотентных полугрупп содержатся и некоторые некоммутативные полугруппы.

Действительно, к классу 1-ступенно нильпотентных полугрупп, очевидно, принадлежат все полугруппы, в которых имеет место тождество

$$\xi_1\xi_2\xi_3 \cong \xi_4\xi_5\xi_6.$$

Примером таких полугрупп является полугруппа, множество элементов которой состоит из O и из слов длины один и два в некотором алфавите $\mathfrak{N}$. Действие умножения состоит в приписывании слов. Если же один из множителей равен O или в результате приписывания получится слово длины большей двух, то произведение считается равным O. В такой полугруппе, очевидно, имеет место указанное тождество, так как произведение трех множителей всегда равно O. Если алфавит $\mathfrak{N}$ содержит более одного элемента, то полугруппа некоммутативна, ибо для всяких $X, Y \in \mathfrak{N}$ $(X \neq Y)$ произведение X на Y равно слову XY, а произведение Y на X — слову YX, причем эти слова по определению являются различными элементами рассматриваемой полугруппы.

4.8. Значение приведенного понятия определяется тем, что оно является прямым обобщением соответствующего понятия теории групп.

Теорема. *Группа является n-ступенно нильпотентной группой в смысле определения* 4.5 *тогда и только тогда,*

когда она есть n-ступенно нильпотентная полугруппа (4.6).

Доказательство. 1) Докажем по индукции относительно n, что группа $\mathfrak{G}$, n-ступенно нильпотентная в смысле 4.5, является n-ступенно нильпотентной полугруппой.

При $n=1$ $\mathfrak{G}$ коммутативна и потому является 1-ступенно нильпотентной полугруппой.

Пусть $n>1$. Обозначим через φ естественный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на факторгруппу $\mathfrak{G}$ по ее центру: $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$.

Берем произвольные элементы $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}, X_{n+2}$ из $\mathfrak{G}$. Обозначим через W'_k и V'_k слова в $\mathfrak{G}$, получающиеся из слов W_k и V_k в Ξ (4.6) заменой ξ_i на X_i. Пользуясь индуктивным предположением, мы можем считать, что в $\varphi(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ выполнено соотношение

$$\varphi(W'_{n-1})=\varphi(V'_{n-1}).$$

По свойству факторгруппы это означает, что в $\mathfrak{G}$ мы имеем

$$W'_{n-1}=V'_{n-1}Z, \quad Z\in\mathfrak{Z}.$$

Благодаря этому получаем равенства в $\mathfrak{G}$ для значений слов в $\mathfrak{G}$

$$W'_n=W'_{n-1}X_{n+2}V'_{n-1}=V'_{n-1}ZX_{n+2}V_{n-1}=$$
$$=V'_{n-1}X_{n+2}V'_{n-1}Z=V'_{n-1}X_{n+2}W'_{n-1}=V'_n.$$

Выполнение этого равенства для произвольных $X_1, X_2, \ldots, X_{n+2}$ из $\mathfrak{G}$ означает, что в $\mathfrak{G}$ имеет место тождество

$$W_n\cong V_n,$$

т. е. $\mathfrak{G}$ есть n-ступенно нильпотентная полугруппа.

2) Теперь докажем по индукции относительно n, что группа $\mathfrak{G}$, являющаяся n-ступенно нильпотентной полугруппой, будет n-ступенно нильпотентна в смысле 4.5.

Если $n=1$, то выполнение равенства

$$X_1E_{\mathfrak{G}}X_2=X_2E_{\mathfrak{G}}X_1,$$

получающегося из тождества $W_1\cong V_1$ заменой ξ_1 на X_1 ξ_2 на X_2 и ξ_3 на $E_{\mathfrak{G}}$, где X_1 и X_2 — произвольные элементы из $\mathfrak{G}$, означает коммутативность $\mathfrak{G}$.

Пусть $n > 1$. Пользуясь обозначениями первой части, получаем из тождества $W_n \cong V_n$, взяв в качестве X_{n+2} единицу $E_{\mathfrak{G}}$, соотношение в $\mathfrak{G}$

$$W'_{n-1}V'_{n-1} = V'_{n-1}W'_{n-1}.$$

При произвольном X_{n+2} из $W_n \cong V_n$ следует

$$W'_{n-1}X_{n+2}V'_{n-1} = V'_{n-1}X_{n+2}W'_{n-1}.$$

Отсюда благодаря доказанному выше получаем

$$\begin{aligned}(V'^{-1}_{n-1}W'_{n-1})X_{n+2} &= X_{n+2}(W'_{n-1}V'^{-1}_{n-1}) = \\ &= X_{n+2}(V'^{-1}_{n-1}V'_{n-1}W'_{n-1}V'^{-1}_{n-1}) = \\ &= X_{n+2}(V'^{-1}_{n-1}W'_{n-1}V'_{n-1}V'^{-1}_{n-1}) = X_{n+2}(V'^{-1}_{n-1}W'_{n-1}).\end{aligned}$$

Но это означает, что $(V'^{-1}_{n-1}W'_{n-1}) \in \mathfrak{Z}$ и потому в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ мы получаем

$$\varphi(V'^{-1}_{n-1}W'_{n-1}) = E_{(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z})},$$
$$\varphi(W'_{n-1}) = \varphi(V'_{n-1}).$$

Это означает, что в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ имеет место тождество $W_{n-1} \cong V_{n-1}$, т. е. $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ является $(n-1)$-ступенно нильпотентной группой в смысле 4.5. Отсюда по 4.5 следует, что $\mathfrak{G}$ есть n-ступенно нильпотентная группа.

4.9. Теория тождеств в полугруппах в сущности является частью теории соотношений. Если в полугруппе $\mathfrak{A}$ с порождающим множеством $\mathfrak{K}$ имеет место тождество $T \cong T'$, то в $\mathfrak{A}$ будут справедливы соотношения относительно $\mathfrak{K}$, получающиеся заменой элементов алфавита Ξ, входящих в T и T' произвольными словами в $\mathfrak{K}$. Обратно, если в $\mathfrak{A}$ справедливы все указанные соотношения относительно $\mathfrak{K}$, то это означает, что в $\mathfrak{A}$ имеет место тождество $T \cong T'$. Таким образом, тождество $T \cong T'$ в $\mathfrak{A}$ можно рассматривать просто как краткое обозначение указанной бесконечной совокупности соотношений относительно произвольного порождающего множества $\mathfrak{K}$. Тем самым различные понятия и свойства, полученные для соотношений, могут быть отнесены и к тождествам.

4.10. Наравне с этим можно и независимо построить теорию тождеств, сходную с теорией соотношений. Произвольное отображение φ алфавита Ξ в себя преобразует одно тождество в другое. Если первое тождество было справедливо в некоторой полугруппе $\mathfrak{A}$, то и второе, очевидно, также будет в $\mathfrak{A}$ справедливо.

Пусть Φ есть некоторая совокупность тождеств в полугруппе $\mathfrak{A}$. Определим в $\mathfrak{W}_\Xi$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $T \sim T'(\mathfrak{n})$, где T, $T' \in \mathfrak{W}_\Xi$, если при некотором отображении φ алфавита Ξ в себя для некоторого тождества $T_0 \cong T_0'$, принадлежащего Φ, мы получим $\varphi(T_0) = T$, $\varphi(T_0') = T'$. Тождеством, являющимся следствием из Φ, можно назвать такое тождество $T \cong T'$, что $T \sim T'(\mathfrak{n}'')$, где $\mathfrak{n}''$ — второе производное отношение для $\mathfrak{n}$ (I, 5.21). Легко убедиться, что если все тождества из Φ справедливы в некоторой полугруппе $\mathfrak{A}$, то и всякое тождество, являющееся следствием из Φ, также будет справедливо в $\mathfrak{A}$.

Пользуясь понятием следствия из совокупности тождеств, можно в классе всех тождеств, справедливых в данной полугруппе, выделять такие совокупности, что все прочие тождества являются их следствиями. Можно рассматривать взаимоотношения различных таких совокупностей. Отметим только, что для тождеств нет смысла рассматривать вопросы, аналогичные вопросам из § 2, связанным с изменением порождающих множеств. Действительно, по самому определению тождества выбор алфавита Ξ, при помощи которого задаются тождества, совершенно безразличен.

4.11. Пусть для слов в счетном алфавите $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ дана некоторая совокупность Φ формальных равенств слов в этом алфавите, т. е. пар слов из $\mathfrak{W}_\Xi$, соединенных знаком равенства. Для алфавита $\mathfrak{N}$ можно определить полугруппу $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}^\Phi$ как полугруппу над алфавитом $\mathfrak{N}$, определяемую определяющей совокупностью соотношений, получаемых из Φ путем всевозможных замен элементов Ξ в формальных равенствах из Φ словами из $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ (3.10). Эту полугруппу $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}^\Phi$ можно назвать *полугруппой над $\mathfrak{N}$, заданной совокупностью тождеств Φ*. Очевидно, в ней все формальные равенства из Φ являются справедливыми тождествами.

4.21. В заключение отметим, что как понятие соотношения, так и тождества можно отнести не только к полугруп-

пам, но и к любым мультипликативным множествам. При этом только пришлось бы задавать слова не только одной последовательностью элементов, но и системой скобок в этой последовательности, указывающей, в каком порядке должны совершаться действия для получения значения слова в данной полугруппе. После соответствующего обоснования этой теории мы могли бы определить полугруппы как такие мультипликативные множества, в которых имеет место тождество

$$(\xi_1\xi_2)\,\xi_3 \cong \xi_1\,(\xi_2\xi_3).$$

§ 5. Свободные полугруппы

5.1. Рассматривая тот или иной класс полугрупп, естественно обратить внимание на такие совокупности элементов в полугруппах этого класса, между которыми нет никаких соотношений помимо тех, которые связывают любые элементы во всех полугруппах данного класса. Соответствующие понятия и некоторые свойства были рассмотрены Биркгофом [1] и Е. С. Ляпиным [3] для алгебраических теорий более широких, нежели теория полугрупп.

Определение. *Пусть полугруппа* $\mathfrak{A}$ *принадлежит некоторому классу полугрупп* Γ. *Непустое ее подмножество* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ *называется свободным множеством относительно класса* Γ, *если всякое отображение множества* $\mathfrak{K}$ *в любую полугруппу* $\mathfrak{A}'$ *из* Γ *может быть продолжено до гомоморфизма полугруппы* $[\mathfrak{K}]$ *в* $\mathfrak{A}'$.

Если полугруппа $\mathfrak{A}$ *из* Γ *обладает порождающим множеством, являющимся свободным множеством относительно* Γ, *то полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется свободной в классе* Γ.

5.2. Наличие свободных полугрупп в некотором классе полугрупп оказывается существенным для изучения всего класса благодаря нижеследующему обстоятельству.

Если в классе полугрупп Γ существует свободная в Γ полугруппа $\mathfrak{F}$, у которой мощность свободного относительно Γ порождающего множества $\mathfrak{K}$ равна $\mathfrak{m}$, то всякая полугруппа из Γ, обладающая порождающим множеством, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, является гомоморфным образом этой свободной в Γ полугруппы $\mathfrak{F}$.

Действительно, пусть $\mathfrak{A} = [\mathfrak{K}'] \in \Gamma$ и мощность $\mathfrak{K}'$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Возьмем произвольное отображение $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{K}'$. Согласно определению 5.1, оно продолжимо до гомоморфизма, Так как в образ этого гомоморфизма входит $\mathfrak{K}'$, то войдет и $[\mathfrak{K}']$. Следовательно, это есть гомоморфизм $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{A}$.

5.3. Так как мощность всякой бесконечной несчетной полугруппы совпадает с мощностью всякого ее порождающего множества, то для класса полугрупп Γ, обладающего бесконечными несчетными полугруппами, можно формулировать следствие из утверждения 5.2. Если в таком классе для каждой полугруппы найдется свободная в Γ полугруппа с не меньшей мощностью, то всякая полугруппа из Γ является гомоморфным образом некоторой свободной в Γ полугруппы.

Если помимо свойства 5.2 класс Γ обладает тем свойством, что гомоморфный образ всякой полугруппы из Γ сам принадлежит Γ (т. е. Γ замкнут относительно операции применения гомоморфизмов), то класс Γ является классом всевозможных гомоморфных образов полугрупп, принадлежащих классу Γ_0, состоящему из всех свободных в Γ полугрупп.

В этом случае класс Γ_0 в известном смысле характеризует весь класс Γ. Изучение этого последнего в принципе сводится к изучению Γ_0. Впрочем, реальную пользу такой подход может дать лишь в том случае, когда мы в той или иной степени представляем себе характер гомоморфизмов свободных полугрупп из Γ_0.

5.4. Легко убедиться, что свободные множества действительно характеризуются тем свойством, которое было упомянуто в самом начале параграфа. Между их элементами имеют место лишь такие соотношения, которые имеют место относительно любых элементов всякой полугруппы данного класса.

Теорема. *Непустое подмножество $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ из класса Γ будет свободным множеством относительно Γ тогда и только тогда, когда всякое соотношение относительно $\mathfrak{K}$ при любом отображении $\mathfrak{K}$ в произвольную полугруппу $\mathfrak{A}'$ из Γ отображается на справедливое в $\mathfrak{A}'$ соотношение.*

Доказательство. 1) Пусть относительно $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ принадлежит классу Γ, имеет место соотношение

$$X_1 X_2 \ldots X_n = Y_1 Y_2 \ldots Y_m \quad (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in \mathfrak{K})$$

и φ есть произвольное отображение $\mathfrak{K}$ в полугруппу $\mathfrak{A}'$ из Γ. Если $\mathfrak{K}$ есть свободное множество, то φ продолжимо до гомоморфизма ψ. Относительно ψ имеем

$$\psi(X_1X_2 \dots X_n) = \psi(Y_1Y_2 \dots Y_m).$$

Отсюда, пользуясь свойством гомоморфизма, получаем в $\mathfrak{A}'$ равенство

$$\psi(X_1) \cdot \psi(X_2) \cdot \dots \cdot \psi(X_n) = \psi(Y_1) \cdot \psi(Y_2) \cdot \dots \cdot \psi(Y_m),$$

которое может быть записано также в виде

$$\varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n) = \varphi(Y_1) \cdot \varphi(Y_2) \cdot \dots \cdot \varphi(Y_m).$$

2) Пусть все соотношения относительно $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ обладают рассматриваемым свойством и пусть φ произвольное отображение $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{A}'$ из Γ. Произвольный элемент $Z \in [\mathfrak{K}]$ представим в виде произведения

$$Z = X_1X_2 \dots X_n \qquad (X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{K}).$$

Определяем отображение ψ, полагая

$$\psi(Z) = \varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n).$$

Это отображение однозначно, т. е. не зависит от выбора того слова в $\mathfrak{K}$, значением которого является Z. Действительно, если

$$Z = X_1X_2 \dots X_n, \quad Z = Y_1Y_2 \dots Y_m$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m \in \mathfrak{K}),$$

то

$$X_1X_2 \dots X_n = Y_1Y_2 \dots Y_m$$

есть соотношение относительно $\mathfrak{K}$. По условию оно отображается на справедливое в $\mathfrak{A}'$ отображение, т. е. в $\mathfrak{A}'$ имеет место

$$\varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n) = \varphi(Y_1) \cdot \varphi(Y_2) \cdot \dots \cdot \varphi(Y_m).$$

То, что отображение ψ обладает свойством гомоморфизма, очевидно.

5.5. Из доказанного следует, что само множество $\mathfrak{N}$ (т. е. множество слов в $\mathfrak{N}$, длина которых равна единице) из свободной над алфавитом $\mathfrak{N}$ полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ (1.3) является свободным относительно класса всех полугрупп. Действительно, относительно этого множества в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ нет никаких

нетривиальных соотношений. Таким образом, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ *есть свободная полугруппа относительно класса всех полугрупп.* Очевидно, и всякая изоморфная с $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ полугруппа является свободной относительно класса всех полугрупп. Других свободных полугрупп относительно класса всех полугрупп не существует. Действительно, пусть $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ — свободное множество относительно класса всех полугрупп и $[\mathfrak{K}] = \mathfrak{A}$. Возьмем полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, у которой алфавит $\mathfrak{N}$ равномощен с $\mathfrak{K}$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{N}$ и ψ есть гомоморфизм $[\mathfrak{K}]$ на $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, продолжающий отображение φ. Пусть

$$\psi(Z) = \psi(Z') \qquad (Z, Z' \in \mathfrak{A}),$$
$$Z = X_1 X_2 \ldots X_n, \quad Z' = Y_1 Y_2 \ldots Y_m$$
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in \mathfrak{K}).$$

Отсюда следует

$$\varphi(X_1) \cdot \varphi(X_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(X_n) = \varphi(Y_1) \cdot \varphi(Y_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(Y_m).$$

Но $\varphi(X_i)$ и $\varphi(Y_j)$ принадлежат $\mathfrak{N}$. По определению $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, равенство значений двух слов в $\mathfrak{N}$ возможно лишь в том случае, когда оба эти слова одинаковы. Таким образом, обе части полученного равенства должны тождественно совпадать. Ввиду взаимной однозначности φ это означает, что слова $X_1 X_2 \ldots X_n$ и $Y_1 Y_2 \ldots Y_m$ тождественно совпадают. Отсюда вытекает $Z = Z'$. Гомоморфизм ψ, будучи взаимно однозначным отображением, является изоморфизмом.

5.6. Простое устройство свободных полугрупп (1.3) позволяет без труда вывести различные многочисленные их свойства. Те из этих свойств, которые носят абстрактный характер, благодаря 5.5 являются свойствами всех полугрупп, свободных в классе всех полугрупп. Отметим некоторые из таких свойств.

Пусть $\mathfrak{F}$ есть полугруппа, свободная в классе всех полугрупп. Согласно 5.5, она изоморфна свободной полугруппе $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ над некоторым алфавитом $\mathfrak{N}$. Нижеследующие свойства $\mathfrak{F}$, очевидно, сохраняющиеся при изоморфизме полугрупп, можно доказывать для полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$.

(α). $\mathfrak{F}$ *не имеет единицы.*

(β). $\mathfrak{F}$ *есть полугруппа с двусторонним сокращением.*

Справедливость (α) и (β) непосредственно вытекает из правила умножения элементов в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$.

(γ). *Если в* $\mathfrak{F}$ *для элементов* S_1, S_2, S_3, S_4 *имеет место*

$$S_1S_2 = S_3S_4,$$

то или $S_1 = S_3$, *или* S_1 *делится слева на* S_3, *или* S_3 *делится слева на* S_1.

Действительно, пусть

$$S_i = X_1^{(i)}X_2^{(i)} \dots X_{k_i}^{(i)} \qquad (S_i \in \mathfrak{W}_\mathfrak{N};\ X_s^{(i)} \in \mathfrak{N};\ i = 1, 2, 3, 4).$$

Согласно определению $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ должно иметь место $X_1^{(1)} = X_1^{(3)}$, $X_2^{(1)} = X_2^{(3)}$ и т. д. Если $k_1 = k_3$, то $S_1 = S_3$; если $k_1 > k_3$, то S_1 делится слева на S_3; если $k_1 < k_3$, то S_3 делится слева на S_1.

(δ). *Каждый элемент полугруппы* $\mathfrak{F}$ *имеет лишь конечное количество различных левых делителей.*

Действительно, пусть

$$W = X_1X_2 \dots X_n \in \mathfrak{W}_\mathfrak{N} \qquad (X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{N}).$$

Покажем, что, кроме $n-1$ элементов $X_1X_2 \dots X_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), W не имеет других левых делителей. Пусть

$$W = V_1V_2,\quad V_i = Y_1^{(i)}Y_2^{(i)} \dots Y_{k_i}^{(i)} \qquad (Y_s^{(i)} \in \mathfrak{N};\ i = 1, 2).$$

Согласно определению $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$, должно иметь место $Y_1^{(1)} = X_1$, $Y_2^{(1)} = X_2$, $\dots$, $Y_{k_1}^{(1)} = X_{k_1}$.

(ε). *Два элемента в* $\mathfrak{F}$ *перестановочны между собой тогда и только тогда, когда они оба являются степенями одного и того же элемента из* $\mathfrak{F}$ (*т. е. содержатся в некоторой моногенной подполугруппе* $\mathfrak{F}$).

Действительно, пусть в $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$

$$WV = VW.$$

Случай $W = V$ тривиален. Пусть $W \neq V$. Благодаря (γ) можно считать, что при некотором $U \in \mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ $W = VU$. Но тогда

$$VUV = VVU$$

и благодаря (β)

$$UV = VU.$$

Если применить индукцию по сумме длин перестановочных слов из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, то можно считать, что

$$U = T^k; \quad V = T^l; \qquad T \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}.$$

Но тогда и

$$W = VU = T^{k+l}.$$

(ζ). $\mathfrak{F}$ *имеет единственное неприводимое порождающее множество.*

Действительно, в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, очевидно,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{N}} \setminus \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}} \cdot \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}$ есть множество неразложимых элементов $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, являющееся его порождающим множеством. Согласно III, 2.7, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ не имеет иных неприводимых порождающих множеств.

(η). *В* $\mathfrak{F}$ *имеется единственное порождающее множество, являющееся свободным множеством относительно класса всех полугрупп.*

В $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ указанным множеством является $\mathfrak{N}$. Всякое другое порождающее множество, согласно (ζ), приводимо. Это значит, что некоторый его элемент может быть выражен в виде произведения некоторых других его элементов. Но, как легко следует из 5.4, множество с таким свойством не может быть свободным относительно класса всех полугрупп.

В связи со свойством (η) отметим, что для некоторых классов $\mathbf{\Gamma}$ полугруппы, свободные в классе $\mathbf{\Gamma}$, могут иметь и несколько порождающих множеств, являющихся свободными относительно $\mathbf{\Gamma}$.

5.7. Из различных свойств полугрупп, принадлежащих классу полугрупп, свободных в классе всех полугрупп, можно выделить различные системы свойств, характеризующие этот класс. Например, как следует из работы Дюбрейль-Жакотэн [1], такую систему образуют четыре первых свойства делимости, приведенные в 5.6.

Теорема. *Если полугруппа* $\mathfrak{A}$ *обладает свойствами* 5.6, (α), (β), (γ), (δ), *то она свободна в классе всех полугрупп.*

Доказательство. Покажем, что ни один элемент из $\mathfrak{A}$ не имеет в $\mathfrak{A}$ ни левой, ни правой единицы. Действительно, из $AX = A$ ($A, X \in \mathfrak{A}$) мы для произвольного $S \in \mathfrak{A}$ получаем $AXS = AS$ и благодаря (β) $XS = S$. Но тогда для произвольного $S' \in \mathfrak{A}$ $S'XS = S'S$ и опять-таки благодаря (β)

$S'X = S'$. Таким образом, оказалось, что X является двусторонней единицей $\mathfrak{A}$, что противоречит (α). Случай левой единицы аналогичен.

Покажем, что если A есть левый делитель B, то B не может быть левым делителем A ($A, B \in \mathfrak{A}$).

Действительно, из

$$A = BX, \quad B = AY \qquad (X, Y \in \mathfrak{A})$$

мы получили бы $A = AYX$, что, как мы показали выше, невозможно.

Обозначим $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}\mathfrak{A}$ и докажем, что $\mathfrak{A} = [\mathfrak{K}]$.

Для произвольного элемента $A \in \mathfrak{A}$ возьмем все левые его делители. Благодаря (δ) их—конечное число и благодаря доказанному выше свойству среди них найдется такой X_1, который не будет делиться слева ни на какой другой из этих левых делителей:

$$A = X_1 A_1.$$

Очевидно, $X_1 \in \mathfrak{K}$, так как при $X_1 = X_1' X_1''$ элемент X_1' был бы левым делителем A, на который X_1 делится слева. Аналогично A_1 имеет левый делитель X_1, принадлежащий $\mathfrak{K}$

$$A_1 = X_2 A_2, \quad A = X_1 X_2 A_2.$$

Продолжаем рассуждение. Все элементы X_1, (X_1X_2), $(X_1X_2X_3)$, ... должны быть попарно различны, ибо из

$$(X_1 X_2 \ldots X_i) = (X_1 X_2 \ldots X_i)(X_{i+1} \ldots X_j)$$

следовало бы, что $X_1X_2 \ldots X_i$ имеет правую единицу. Благодаря (δ) наш процесс построения элементов $X_i \in \mathfrak{K}$ должен оборваться, т. е. при некотором $n \geqslant 1$ мы получим

$$A = X_1 X_2 \ldots X_n.$$

Наконец, покажем, что не существует нетривиальных соотношений относительно порождающего множества $\mathfrak{K}$. Пусть

$$X_1X_2 \ldots X_n = Y_1Y_2 \ldots Y_m \quad (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in \mathfrak{K}).$$

Если бы $X_1 \neq Y_1$, то, согласно (γ), или X_1 должен был бы делиться слева на Y_1, или Y_1 — на X_1. И то и другое невозможно, ибо X_1, $Y_1 \in \mathfrak{K}$. Но тогда, согласно (β),

$$X_2 \ldots X_n = Y_2 \ldots Y_m.$$

Повторяя рассуждения, находим $X_2 = Y_2$ и т. д. В конце концов убеждаемся, что исходное соотношение было тождественным.

То, что относительно $\mathfrak{K}$ не существует нетривиальных соотношений, показывает, что $\mathfrak{K}$ есть свободное множество относительно класса всех полугрупп (5.4). Так как $[\mathfrak{K}] = \mathfrak{A}$, то полугруппа $\mathfrak{A}$ свободна в классе всех полугрупп.

5.8. Мы будем говорить, что некоторое тождество справедливо в классе полугрупп, если оно справедливо в каждой из полугрупп этого класса.

Пусть Γ есть некоторый класс полугрупп, замкнутый относительно изоморфизмов (т. е. Γ вместе с каждой полугруппой содержит и всякую изоморфную ей полугруппу). Φ некоторая совокупность тождеств в этом классе, такая, что все прочие тождества этого класса являются следствиями из Φ (4.10). Если полугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ (4.11) над некоторым алфавитом $\mathfrak{N}$, заданная совокупностью тождеств Φ, принадлежит классу Γ, то она является свободной в этом классе.

Действительно, множество $\mathfrak{N}$ есть порождающее множество для $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$. Соотношения относительно $\mathfrak{N}$, индуцируемые тождествами из Φ (4.9), образуют определяющую совокупность в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ относительно $\mathfrak{N}$ (4.9; 4.11). Так как при любом отображении $\mathfrak{N}$ в произвольную полугруппу $\mathfrak{A} \in \Gamma$ эти соотношения отображаются на справедливые соотношения в $\mathfrak{A}$, то, согласно 1.11, это отображение продолжимо до гомоморфизма полугруппы $[\mathfrak{N}] = \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ в $\mathfrak{A}$.

Отметим, что при равномощных $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ для двух совокупностей тождеств Φ_1 и Φ_2 рассмотренного типа полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}_1}^{\Phi_1}$ и $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}_2}^{\Phi_2}$ изоморфны.

5.9. Полугруппами $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$, указанными в 5.8, и изоморфными им полугруппами исчерпываются свободные полугруппы в рассматриваемом классе Γ.

Действительно, пусть $\mathfrak{A} = [\mathfrak{K}]$ есть свободная в Γ полугруппа и $\mathfrak{K}$ — свободное множество относительно Γ. Согласно 5.4, относительно $\mathfrak{K}$ не существует никаких соотношений, кроме тех, которые индуцируются тождествами, справедливыми во всех полугруппах из Γ, т. е. тождествами, являющимися следствиями из Φ. Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$. Из определения этой полугруппы благодаря теореме (1.12)

непосредственно вытекает наличие изоморфизма между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$.

5.10. Рассуждения 5.8 и 5.9 дают необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторый замкнутый относительно изоморфизмов класс полугрупп обладал свободными полугруппами. Как мы уже отмечали роль полугрупп, свободных в классе, определяется возможностью получать из них при помощи гомоморфизмов прочие полугруппы этого класса. Разберем этот вопрос подробнее.

Пусть Φ есть некоторая совокупность тождеств в алфавите Ξ и $\mathfrak{M}$ — некоторый непустой класс мощностей, такой, что, если мощность $\mathfrak{n}$ меньше мощности $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{n}$ сама обязательно содержится в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ класс всех полугрупп, в которых справедливы все тождества из Φ и которые обладают порождающими множествами, мощность которых принадлежит $\mathfrak{M}$. Конечно, всякий такой класс непуст, ибо он всегда содержит единичную полугруппу.

Указанный класс $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ всегда обладает следующими тремя свойствами.

(α). $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ замкнут относительно гомоморфизмов, т. е. гомоморфный образ всякой полугруппы из $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ сам всегда принадлежит $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$.

(β). В $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ существуют свободные полугруппы.

(γ). Каждая полугруппа из $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ является гомоморфным образом некоторой свободной в $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ полугруппы.

Справедливость (α) следует из того, что при гомоморфизме полугруппы на полугруппу порождающее множество отображается на порождающее множество, а всякое соотношение отображается на справедливое соотношение.

Справедливость (β) вытекает из 5.8.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая полугруппа из $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ и $\mathfrak{K}$ — ее порождающее множество, мощность которого принадлежит $\mathfrak{M}$. Полугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$ принадлежит классу $\Gamma_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$ и является в нем свободной (5.8). Согласно 5.1, тождественное отображение $\mathfrak{K}$ продолжимо до гомоморфизма $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$ в $\mathfrak{A}$. При этом гомоморфный образ должен совпадать со всей $\mathfrak{A}$.

5.11. Свойства 5.10, (α), (β), (γ) показывают, что класс $\Gamma_{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ (5.10) состоит из всех полугрупп, получаемых при

помощи гомоморфизмов из свободных в этом классе полугрупп. Оказывается, что никакие иные замкнутые относительно гомоморфизмов классы не обладают этими свойствами.

Если некоторый класс полугрупп Σ обладает свойствами (α), (β), (γ), сформулированными в 5.10 для $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$, то Σ является одним из классов $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$ (5.10).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс таких мощностей $\mathfrak{m}$, что в Σ существуют свободные полугруппы, имеющие свободное относительно Σ порождающее множество с мощностью не меньшей $\mathfrak{m}$. Через Φ обозначим совокупность всех тождеств над некоторым алфавитом Ξ, имеющих место во всех полугруппах класса Σ. Покажем, что $\Sigma = \Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$.

Пусть $\mathfrak{A} \in \Sigma$. Согласно (γ), $\mathfrak{A}$ есть гомоморфный образ некоторой полугруппы, свободной в Σ. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ обладает порождающим множеством, мощность которого принадлежит $\mathfrak{M}$. Так как к тому же в $\mathfrak{A}$ имеют место все тождества из Φ, то $\mathfrak{A}$ принадлежит $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$.

С другой стороны, если $\mathfrak{B} \in \Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$, то в $\mathfrak{B}$, согласно (γ), должно найтись такое порождающее множество $\mathfrak{K}$, мощность которого принадлежит $\mathfrak{M}$. В Σ должна существовать свободная полугруппа $\mathfrak{A}$, обладающая свободным относительно Σ порождающим множеством $\mathfrak{K}'$ с мощностью, которая больше или равна мощности $\mathfrak{K}$. Возьмем какое-либо отображение φ $\mathfrak{K}'$ на $\mathfrak{K}$. Согласно 5.4, в $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{K}'$ имеют место лишь те соотношения, которые индуцируются тождествами из Φ. Так как $\mathfrak{B} \in \Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$, то все эти соотношения отображаются на справедливые в $\mathfrak{B}$ соотношения. Благодаря этому, согласно 1.11, отображение φ продолжимо до гомоморфизма. Так как в образе этого гомоморфизма содержится $\mathfrak{K}$, то гомоморфизм является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Отсюда, согласно (α), следует, что $\mathfrak{B} \in \Sigma$.

5.12. В произвольном классе $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$ типа 5.10 свободными полугруппами, согласно 5.8 и 5.9, являются полугруппы $\mathfrak{W}^{\Phi}_{\mathfrak{N}}$ над различными алфавитами $\mathfrak{N}$, мощность которых принадлежит $\mathfrak{M}$, и изоморфные им полугруппы. Таким образом, свободные в $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$ полугруппы благодаря 5.8 с точностью до изоморфизма, вполне определяются каждая мощностью свободного в $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$ порождающего множества.

5.13. Примером классов типа 5.10 является класс всех коммутативных полугрупп. Это есть класс, определенный тождеством $\xi_1\xi_2 \cong \xi_2\xi_1$. Свободная полугруппа в этом классе со свободным порождающим множеством $\mathfrak{K}$ может быть определена как множество классов слов в $\mathfrak{K}$, где в один класс включены слова, получающиеся друг из друга путем перестановок элементов.

Класс всех n-ступенно нильпотентных полугрупп (4.6) для всякого $n = 1, 2, \ldots$ также относится к числу классов вида $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$ (5.10). Именно, Φ состоит из одного тождества 4.6. Таким образом, все n-ступенно нильпотентные полугруппы являются гомоморфными образами свободных n-ступенно нильпотентных полугрупп, задаваемых указанным тождеством и мощностью свободного порождающего множества.

Из указанных классов можно выделить новые классы типа 5.10, если дополнительно наложить условие на мощность порождающих множеств полугрупп.

5.14. К числу классов типа 5.10 относится также класс полугрупп идемпотентов, характеризуемый тождеством $\xi_1^2 \cong \xi_1$. Этот класс можно также описать как класс полугрупп, являющихся связками единичных групп. Мы же не раз обращались к рассмотрению полугрупп этого класса. Теперь остановимся на рассмотрении его свободных полугрупп. В продолжение ближайших рассуждений будем под Φ все время понимать совокупность, состоящую из одного тождества $\xi_1^2 \simeq \xi_1$. Класс полугрупп идемпотентов (т. е. $\Gamma^{\Phi}_{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мощностей) будем обозначать через Γ. Каждая свободная в Γ полугруппа изоморфна $\mathfrak{W}^{\Phi}_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N}$ произвольный алфавит.

5.15. Для каждого слова W в $\mathfrak{N}$ обозначим через $\mathfrak{H}(W)$ совокупность тех элементов из $\mathfrak{N}$, которые входят в это слово W. Если в $\mathfrak{W}^{\Phi}_{\mathfrak{N}}$ значение слова W совпадает со значением слова V, то $\mathfrak{H}(W) = \mathfrak{H}(V)$.

Действительно, от W к V можно перейти при помощи преобразований, заменяющих часть слова вида $X_1X_2 \ldots X_k$ на $X_1X_2 \ldots X_kX_1X_2 \ldots X_k$ ($X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{N}$), или наоборот. Очевидно, каждый раз $\mathfrak{H}(W)$ меняться не будет. Потому множество $\mathfrak{H}(W)$ можно считать однозначной характеристикой элемента из $\mathfrak{W}^{\Phi}_{\mathfrak{N}}$, являющегося значением слова W.

5.16. Рассмотрим некоторые свойства введенной в 5.15 характеристики, связанные со свойствами регулярной сопряженности элементов в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$, что тем более естественно, что эта полугруппа, как и все полугруппы из класса Γ, очевидно, является вполне регулярной.

(α). Для любых S, $S' \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$

$$\mathfrak{H}(SS') = \mathfrak{H}(S) \cup \mathfrak{H}(S').$$

Справедливость этого непосредственно следует из опредения характеристики (5.15).

(β). Если элементы S, $S' \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ регулярно сопряжены между собой, то

$$\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(S').$$

Действительно, из

$$SS'S = S, \quad S'SS' = S',$$

согласно (α), получаем

$$\mathfrak{H}(S) \cup \mathfrak{H}(S') = \mathfrak{H}(S), \quad \mathfrak{H}(S') \cup \mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(S').$$

(γ). Если для S, $S' \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ имеет место

$$\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(S'),$$

то S и S' регулярно сопряжены.

Действительно, представим S и S' в виде значений некоторых слов в $\mathfrak{N}$

$$S = X_1 X_2 \dots X_n,$$
$$S' = Y_1 Y_2 \dots Y_m \qquad (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m \in \mathfrak{N}).$$

Ввиду равенства $\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(S')$ можно при помощи перестановок соседних множителей в первом из этих слов и заменой X на XX или XX на X ($X \in \mathfrak{N}$) преобразовать его во второе слово. Согласно VII, 6.8, (δ), при каждом таком преобразовании мы будем получать элемент, регулярно сопряженный с элементом, являющимся значением предшествующего слова. Благодаря VII, 6.9 отсюда следует, что элементы S и S' регулярно сопряжены.

(δ). Если элементы S и S' из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ регулярно сопряжены и для некоторого $T \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ имеет место

$$\mathfrak{H}(T) \subset \mathfrak{H}(S),$$

то

$$STS' = SS'.$$

Действительно, согласно (α),

$$\mathfrak{H}(ST) = \mathfrak{H}(S) \cup \mathfrak{H}(T) = \mathfrak{H}(S)$$

и потому, согласно (γ), ST и S регулярно сопряжены.

Но $\mathfrak{H}(S') = \mathfrak{H}(S)$, а потому, согласно ($\gamma$), регулярно сопряжены также S' и ST. Таким образом,

$$S'(ST)S' = S',$$

$$SS' = SS'STS' = (SS'S)TS' = STS'.$$

5.17. Используя приведенные свойства, мы можем доказать теорему относительно конечности свободных в Γ полугрупп. Эта теорема по существу является частным случаем одной уже упомянутой нами теоремы, полученной в работе Грина и Риса [1]. Кроме того, отдельно она была доказана Мак-Лином [1].

Теорема. *Если полугруппа, свободная в классе всех полугрупп идемпотентов, обладает конечным порождающим свободным множеством, то она конечна.*

Доказательство. Доказательство конечности $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ (5.14) ведем по индукции относительно n — числа элементов в алфавите $\mathfrak{N}$.

Если $n = 1$, то $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ есть единичная полугруппа.

Пусть $n > 1$. Из предположения о том, что конечная всякая полугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}'}^{\Phi}$, у которой $\mathfrak{N}'$ состоит из $n-1$ элементов, следует существование такого натурального m, что всякий элемент этой полугруппы может быть представлен как значение некоторого слова в $\mathfrak{N}'$, имеющего длину меньшую m.

Возьмем произвольное слово W в $\mathfrak{N}$, имеющее длину $2m+1$

$$W \equiv X_1X_2 \ldots X_{2m+1} \quad (X_1, X_2, \ldots, X_{2m+1} \in \mathfrak{N}),$$

и рассмотрим построенные исходя из него слова

$$U \equiv X_1X_2 \ldots X_m, \quad V \equiv X_{m+2}X_{m+3} \ldots X_{2m+1}.$$

Если $\mathfrak{N}' = \mathfrak{H}(U) \neq \mathfrak{N}$, то U есть слово из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}'}^{\Phi}$ и потому, согласно предположению, для него найдется слово $Y_1Y_2 \ldots Y_k$

($Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \in \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$) с тем же значением, но с меньшей длиной: $k < m$. Таким образом, значение слова W оказывается совпадающим со значением слова

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_k X_{m+1} X_{m+2} \ldots X_{2m+1},$$

имеющего длину, меньшую чем $2m+1$.

К аналогичному выводу приходим в случае $\mathfrak{H}(V) \neq \mathfrak{N}$.

Если $\mathfrak{H}(U) = \mathfrak{H}(V) = \mathfrak{N}$, то значения слов U и V, согласно 5.16, (γ), являются регулярно сопряженными элементами. Применив 5.16, (δ) к этим элементам и к X_{m+1}, получаем

$$W = UX_{m+1}V = UV.$$

Опять-таки значение W равно значению более короткого слова UV.

Мы убедились, что в полугруппе $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ значение всякого слова в $\mathfrak{N}$, имеющего длину $2m+1$, равно значению некоторого слова с меньшей длиной. Отсюда, очевидно, следует, что всякий элемент из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ может быть представлен в виде значения какого-нибудь слова в $\mathfrak{N}$, имеющего длину, меньшую чем $2m+1$. Так как таких слов в виду конечности $\mathfrak{N}$ существует лишь конечное число, то количество различных элементов в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ оказывается конечным.

5.18. *Следствие.* *Если полугруппа идемпотентов обладает конечным порождающим множеством, то она конечна.*

Действительно, для указанной полугруппы $\mathfrak{A} = [\mathfrak{K}]$ существует гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$ на $\mathfrak{A}$. Ввиду конечности $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}^{\Phi}$ (5.17) $\mathfrak{A}$ также оказывается конечной.

5.19. В связи с рассмотрением полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$, свободной в классе всех полугрупп идемпотентов, естественным образом возникает вопрос о канонической форме ее элементов относительно порождающего множества $\mathfrak{N}$. Вполне очевидно, что любой элемент из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ может быть представлен в виде

$$Z = X_1 X_2 \ldots X_n \quad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{N}),$$

где ни при каких натуральных p и q невозможно равенство слов

$$X_{p+1} X_{p+2} \ldots X_{p+q} \equiv X_{p+q+1} X_{p+q+2} \ldots X_{p+2q}.$$

Однако оказывается, что такая форма задания элемента на самом деле еще не является канонической. Дело в том, что хотя сама полугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}^{\Phi}$ конечна, при количестве элементов большем двух множество слов в $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих указанному условию, оказывается бесконечным. Это обстоятельство было обнаружено С. Е. Аршоном [1]. Оно вытекает также из результатов работы Морзе и Хедлунда [1].

§ 6. Определяемость свободных полугрупп подполугрупповой характеристикой

6.1. К разобранным в предыдущем параграфе свойствам полугрупп, свободных в классе всех полугрупп, добавим еще одно важное их свойство. Именно, покажем, что эти полугруппы определяются подполугрупповой характеристикой (III, 7. 6). Соответствующее понятие и связанные с ним соображения были рассмотрены нами в § 7 третьей главы.

Благодаря 5.5 для получения указанного результата мы в дальнейшем можем рассматривать свободную полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ над некоторым алфавитом. Теорема об определяемости свободных полугрупп полугрупповой характеристикой принадлежит Р. В. Петропавловской [2].

6.2. Для элементов X и Y некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$ назовем элемент $P \in [X, Y]$ их *специальным произведением* (Р. В. Петропавловская называет элемент P максимальным элементом для X и Y), если ни при каком Z, являющемся пустым символом или элементом из $[X, Y] \setminus \{X, Y, P\}$, в полугруппе $\Sigma(\mathfrak{A})$ элемент $[P]$ не является единицей ни для $[X] \cap [Z] \cap [Y^2] \cap [Y^3]$, ни для $[Y] \cap [Z] \cap [X^2] \cap [X^3]$, т. е., другими словами, в $\mathfrak{A}$

$$P \bar{\in} [X, Z, Y^2, Y^3, \ldots] \cup [Y, Z, X^2, X^3, \ldots].$$

Кстати, отмечаем (и в дальнейшем постоянно будем этим пользоваться), что для любого элемента S всегда имеет место

$$[S^2] \cap [S^3] = [S^2, S^3] = \{S^2, S^3, S^4, S^5, \ldots\}.$$

---

[1] С. Е. Аршон. Доказательство существования n-значных бесконечных асимметрических последовательностей, Матем. сб. (нов. сер.), 2 (1937), 769—779.

Из определения непосредственно следует, что специальное произведение элементов X и Y является специальным произведением также для Y и X. Специальное произведение P элементов X и Y полугруппы $\mathfrak{A}$ будет их специальным произведением и относительно любой надполугруппы $\mathfrak{A}$ и любой ее подполугруппы, содержащей X и Y.

6.3. Употребление введенного выше термина оправдывается нижеследующим свойством.

Лемма. *Если P есть специальное произведение элементов X, $Y \in \mathfrak{A}$, то или $P = XY$, или $P = YX$.*

Доказательство. 1) Предположим, что $XY = X$. Тогда, очевидно, всякий элемент из $[X,Y]$ имеет вид $Y^n X^m$ (n, $m = 0, 1, 2, \ldots$; X^0, Y^0 означают пустые символы). Пусть $P = Y^p X^q$. Если бы $p > 1$, то мы получили бы

$$P = Y^p X^q \in [X, Y^2, Y^3, \ldots],$$

что противоречит определению специального произведения.

Аналогично убеждаемся в невозможности $q > 1$.

Так как $P \neq X$ и $P \neq Y$, то из доказанного следует, что в рассматриваемом случае $P = YX$.

2) Аналогично рассуждаем в случаях $XY = Y$, $YX = X$, $YX = Y$.

3) Так как, очевидно, $X^\alpha Y^\beta \in [X, XY, Y^2, Y^3]$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$), то в случае, когда P имеет вид $X^{\alpha_1} Y^{\beta_1} X^{\alpha_2} Y^{\beta_2} \ldots X^{\alpha_s} Y^{\beta_s}$ или $X^{\alpha_1} Y^{\beta_1} X^{\alpha_2} Y^{\beta_2} \ldots X^{\alpha_s}$ ($\alpha_i, \beta_i = 1,2, \ldots$), мы имеем

$$P \in [X, XY, Y^2, Y^3, \ldots].$$

Учитывая определение специального произведения, отсюда заключаем, что $XY \in \{X, Y, P\}$, т. е. или $P = XY$, или имеет место один из двух уже разобранных случаев: $XY = X$, $XY = Y$.

Аналогично рассуждаем в случае, когда в выражении для P в виде произведения X и Y первый множитель равен Y.

6.4. ***Следствие.*** *Для двух элементов существует не более двух их специальных произведений.*

6.5. Разумеется, не всегда произведение XY является специальным произведением X и Y. Одним достаточным условием этого является требование, чтобы XY не мог быть представлен в виде отличного от XY и YX произведения нескольких множителей, равных X или Y.

Действительно, при любом Z, принадлежащем $[X, Y] \setminus \setminus \{X, Y, XY\}$ или являющемся пустым символом, всякий элемент из

$$[X, Z, Y^2, Y^3, \ldots] \cup [Y, Z, X^2, X^3, \ldots],$$

очевидно, отличен от XY благодаря указанному условию.

6.6. Для интересующего нас вопроса об изоморфизмах подполугрупповых характеристик понятие специального произведения оказывается существенным благодаря нижеследующему.

Теорема. *Пусть все элементы полугруппы $\mathfrak{A}_1$ имеют бесконечные типы, X_1, Y_1, $P_1 \in \mathfrak{A}_1$, причем P_1 есть специальное произведение X_1 и Y_1. Для некоторой полугруппы $\mathfrak{A}_2$ существует изоморфизм φ $\Sigma(\mathfrak{A}_1)$ на $\Sigma(\mathfrak{A}_2)$. Тогда в $\mathfrak{A}_2$ существуют единственные элементы X_2, Y_2, P_2, такие, что*

$$\varphi[X_1] = [X_2], \quad \varphi[Y_1] = [Y_2], \quad \varphi[P_1] = [P_2],$$

причем P_2 является специальным произведением элементов X_2 и Y_2.

Доказательство. Существование единственных элементов X_2, Y_2, P_2, связанных с X_1, Y_1, P_1 указанным образом, следует из III, 7.10, (γ). Предположим, что в $\mathfrak{A}_2$ P_2 не является специальным произведением X_2 и Y_2. Тогда при некотором Z_2, являющемся пустым символом или элементом из $[X_2, Y_2] \setminus \{X_2, Y_2, P\}$, должно иметь место

$$[P_2] \subset [X_2, Z_2, Y_2^2, Y_2^3, \ldots] \cup [Y_2, Z_2, X_2^2, X_2^3, \ldots].$$

Но тогда, применяя изоморфизм φ^{-1} и учитывая III, 7.10, (ε), (ζ), мы получаем соотношение, противоречащее тому, что P_1 есть специальное произведение X_1 и Y_1

$$[P_1] \subset [X_1, Z_1, Y_1^2, Y_1^3, \ldots] \cup [Y_1, Z_1, X_1^2, X_1^3, \ldots].$$

Здесь Z_1 есть пустой символ, если Z_2 был пустым символом. Если же Z_2 принадлежал $[X_2, Y_2] \setminus \{X_2, Y_2, P_2\}$, то Z_1 есть такой элемент, что $\varphi[Z_1] = [Z_2]$.

Согласно III, 7.10, (ε), Z_1 принадлежит $[X_1, Y_1]$. Так как $[Z_2] \neq [X_2]$, $[Z_2] \neq [Y_2]$, $[Z_2] \neq [P_2]$, то $Z_1 \neq X_1$, $Z_1 \neq Y_1$, $Z_1 \neq P_1$.

6.7. Рассмотрим вопрос о специальных произведениях элементов свободных полугрупп.

Напомним (в ближайшее время нам это обстоятельство неоднократно понадобится), что в свободной полугруппе два элемента перестановочны тогда и только тогда, когда они оба содержатся в некоторой моногенной полугруппе, т. е. являются степенями некоторого третьего элемента (5.6, (ε)).

Лемма. *Если элементы V и W свободной полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ неперестановочны, то и VW и WV оба являются специальными произведениями элементов V и W.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, очевидно, есть полугруппа с двусторонним сокращением, у которой ни один элемент не имеет ни левой, ни правой единицы, то из равенства вида $VW = V^n$ следовало бы $n > 1$ и $W = V^{n-1}$, т. е. V и W оказались бы перестановочными. Также невозможно и $VW = W^n$. Пусть VW представлен в виде некоторого произведения множителей, равных V и W. Согласно сказанному, в этом произведении обязательно должны участвовать и V и W. Предположим, что число множителей в этом произведении больше двух. V и W являются словами в $\mathfrak{N}$. Благодаря этому слово VW, имеющее длину, равную сумме слов V и W, оказывается равным слову, длина которого больше суммы длин V и W. Но это невозможно по определению свободной полугруппы над алфавитом $\mathfrak{N}$. Из сказанного следует, что VW не может быть представлен в виде произведения указанного вида, отличного от самого VW и от WV.

Но тогда, согласно 6.5, VW является специальным произведением элементов V и W. Рассуждения для WV аналогичны.

6.8. Теперь мы можем перейти непосредственно к рассмотрению изоморфизмов подполугрупповых характеристик свободных полугрупп. Пусть $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ — свободная полугруппа над $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ такая полугруппа, для которой существует изоморфизм φ полугруппы $\Sigma(\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ на $\Sigma(\mathfrak{U})$. Для любого элемента $V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ моногенная полугруппа $[V]$ бесконечна. Согласно III, 7.10, (γ), $\varphi[V]$ должна быть бесконечной моногенной подполугруппой $\mathfrak{U}$

$$\varphi[V] = [S] \subset \mathfrak{U}.$$

Элемент S, порождающий бесконечную моногенную полугруппу $[S]$, определен самой этой полугруппой однозначно. Обозначим $S = \bar{V}$. Из того, что все элементы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$

имеют бесконечный тип, следует, что и в $\mathfrak{U}$ типы всех элементов бесконечны (III, 7.9).

Для всякого $T \in \mathfrak{U}$ при изоморфизме φ подполугруппа $[T]$ должна являться образом некоторой однозначно определенной для нее моногенной подполугруппы $[Q] \subset \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, т. е. $T = \overline{Q}$. Таким образом, изоморфизм φ полугруппы $\Sigma(\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ на $\Sigma(\mathfrak{U})$ определяет взаимно однозначное отображение ψ множества всех элементов $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на множество всех элементов $\mathfrak{U}$

$$\psi(V) = \overline{V}, \quad (\varphi[V] = [\overline{V}], \quad V \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}}).$$

Отметим, что, согласно III, 7.10, (ζ), из $\varphi[V] = [\overline{V}]$ ($V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$) при любом натуральном n следует $\varphi(V^n) = [\overline{V}^n]$. Это означает, что

$$\overline{V^n} = \overline{V}^n.$$

6.9. Определим в свободной полугруппе $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая

$$V \sim W(\mathfrak{n}) \quad (V, W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}),$$

если в $\mathfrak{U}$ имеет место

$$\overline{VW} = \overline{V}\,\overline{W}.$$

(Таким образом, отношение $\mathfrak{n}$ зависит от $\mathfrak{U}$ и от φ).

Аналогично определяем в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ отношение $\mathfrak{m}$, полагая

$$V \sim W(\mathfrak{m}) \quad (V, W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}),$$

если имеет место

$$\overline{VW} = \overline{WV}.$$

Очевидно, взаимно однозначное отображение ψ полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$ (6.8), сопоставляющее каждому $V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ элемент $\psi(V) = \overline{V} \in \mathfrak{U}$, будет изоморфизмом $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда всякие два элемента из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ находятся между собой в отношении $\mathfrak{n}$. Отображение ψ будет антиизоморфизмом (I, 1.17) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда всякие два элемента $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ находятся между собой в отношении $\mathfrak{m}$.

В дальнейшем мы без особых напоминаний будем употреблять обозначения и выводы, приведенные здесь и в 6.8. Также постоянно будем использовать единственность

выражений для элементов $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ в виде произведений элементов из $\mathfrak{N}$.

6.10. Отметим несколько свойств отношений $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$.

(α). Если элементы V и W полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ перестановочны, то

$$V \sim W(\mathfrak{n}), \quad V \sim W(\mathfrak{m}).$$

Действительно, V и W оба должны содержаться в некоторой моногенной полугруппе (IX, 5.6, (ε))

$$V,\ W \in [U],\ V = U^p,\ W = U^q,\ U \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}.$$

Согласно 6.8,

$$\overline{VW} = \overline{WV} = \overline{U^{p+q}} = \overline{U}^{p+q},$$
$$\overline{V} = \overline{U^p} = \overline{U}^p,\ \overline{W} = \overline{U^q} = \overline{U}^q,$$

откуда следует

$$\overline{VW} = \overline{V}\,\overline{W} = \overline{WV}.$$

(β). Отношения $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ рефлексивны.

Это непосредственно вытекает из (α), поскольку каждый элемент перестановочен сам с собой.

(γ). Всякие два элемента из $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ находятся между собой в отношении $\mathfrak{n}$ или в отношении $\mathfrak{m}$.

Если элементы V и W перестановочны, то справедливость нашего утверждения следует из (α). Если V и W неперестановочны, то VW, согласно 6.7, является специальным произведением элементов V и W. Отсюда, благодаря 6.6, следует, что $\overline{VW}$ в $\mathfrak{U}$ должно быть специальным произведением элементов $\overline{V}$ и $\overline{W}$, т. е. должно иметь место $\overline{VW} = \overline{V}\,\overline{W}$ или $\overline{VW} = \overline{W}\,\overline{V}$. В первом случае мы имеем $V \sim W(\mathfrak{n})$, во втором $V \sim W(\mathfrak{m})$.

(δ). Отношения $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ симметричны.

В случае, когда V и W ($V,\ W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$) перестановочны, это непосредственно следует из (α). Пусть V и W неперестановочны. Согласно 6.7 VW является специальным произведением элементов V и W. Благодаря 6.6, $\overline{WV}$ должен равняться специальному произведению элементов $\overline{W}$ и $\overline{V}$, т. е. в $\mathfrak{U}$ должно иметь место или $\overline{WV} = \overline{W}\,\overline{V}$, или $\overline{WV} = \overline{V}\,\overline{W}$.

Если $V \sim W(\mathfrak{n})$, то $\overline{VW} = \overline{V}\,\overline{W}$ и потому $\overline{WV} \neq \overline{V}\,\overline{W}$, ибо $VW \neq WV$. Следовательно, $\overline{WV} = \overline{W}\,\overline{V}$, т. е. $W \sim V(\mathfrak{n})$.

Если $V \sim W(\mathfrak{m})$, то $\overline{VW} = \overline{W}\,\overline{V}$ и потому $\overline{WV} \neq \overline{W}\,\overline{V}$. Следовательно, $\overline{WV} = \overline{V}\,\overline{W}$, т. е. $W \sim V(\mathfrak{m})$.

(ε). Если V и W неперестановочны, то $V \sim W(\mathfrak{n})$ и $V \sim W(\mathfrak{m})$ не могут иметь место одновременно.

Действительно, если $V \sim W(\mathfrak{n})$, то, согласно (δ), $W \sim V(\mathfrak{n})$. Поэтому $\overline{WV} = \overline{W}\,\overline{V}$. Так как $VW \neq WV$, то $\overline{VW}$ не может равняться $\overline{W}\,\overline{V}$, т. е. $V \sim W(\mathfrak{m})$ невозможно.

6.11. ***Лемма.*** *Если* $X, Y \in \mathfrak{N}(X \neq Y)$ *и* $X \sim Y(\mathfrak{n})$, *то при любом натуральном* n

$$X^n \sim Y(\mathfrak{n}).$$

Доказательство. Если $n > 1$ и $X^{n-1} \sim XY(\mathfrak{n})$, то

$$\overline{X^n Y} = \overline{X^{n-1} \cdot XY} = \overline{X^{n-1}} \cdot \overline{XY} = \overline{X}^{n-1} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X}^n \overline{Y} = \overline{X^n}\,\overline{Y}.$$

Предположим, что при некотором $n > 1$ имеет место

$$X^n \not\sim Y(\mathfrak{n}), \quad X^{n-1} \not\sim XY(\mathfrak{n}).$$

Тогда, согласно 6.10, (γ),

$$X^n \sim Y(\mathfrak{m}), \quad X^{n-1} \sim XY(\mathfrak{m}),$$

и мы получаем

$$\overline{XY \cdot X^{n-1}} = \overline{X^{n-1}} \cdot \overline{XY} = \overline{X}^{n-1} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X}^n \overline{Y},$$
$$\overline{Y \cdot X^n} = \overline{X^n} \cdot \overline{Y} = \overline{X}^n \overline{Y},$$

что противоречит тому, что $XYX^{n-1} \neq YX^n$.

6.12. ***Лемма.*** *Если* $X, Y \in \mathfrak{N}(X \neq Y)$ *и* $X \sim Y(\mathfrak{n})$, *то при любом* $W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$

$$XY \sim W(\mathfrak{n}).$$

Доказательство. Если XY и W перестановочны, то наше утверждение следует из 6.10, (α).

Пусть XY и W неперестановочны. Предположим, что $XY \not\sim W(\mathfrak{n})$, т. е., согласно 6.10, (γ), $XY \sim W(\mathfrak{m})$. Нам придется рассмотреть шесть отдельных случаев, в каждом из

которых наше предположение приведет нас к противоречию. В наших рассуждениях мы постоянно будем использовать свойства 6.10.

1) $Y \sim W(\mathfrak{n})$, $X \sim YW(\mathfrak{n})$.

В этом случае получаем

$$\overline{W \cdot XY} = \overline{XY} \cdot \overline{W} = \overline{XY}\,\overline{W},$$
$$\overline{X \cdot YW} = \overline{XY} \cdot \overline{W} = \overline{XY}\,\overline{W},$$

что противоречит тому, что $WXY \neq XYW$.

2) $Y \sim W(\mathfrak{n})$, $X \sim YW(\mathfrak{m})$.

$$\overline{W \cdot XY} = \overline{XY} \cdot \overline{W} = \overline{XY}\,\overline{W},$$
$$\overline{YW \cdot X} = \overline{X} \cdot \overline{YW} = \overline{X}\,\overline{YW},$$

что противоречит тому, что $WXY \neq YWX$.

3) $Y \sim W(\mathfrak{m})$, $X \sim YW(\mathfrak{n})$, $YX \sim W(\mathfrak{n})$.

$$\overline{YW \cdot X} = \overline{YW} \cdot \overline{X} = \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{X},$$
$$\overline{W \cdot YX} = \overline{W} \cdot \overline{YX} = \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{X},$$

откуда следует $YWX = WYX$, а потому и $YW = WY$, так как $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением. Но благодаря $YW = WY$ мы получаем $Y \sim W(\mathfrak{n})$, т. е. мы приходим к одному из первых двух случаев.

4) $Y \sim W(\mathfrak{m})$, $X \sim YW(\mathfrak{n})$, $YX \sim W(\mathfrak{m})$.

$$\overline{YX \cdot W} = \overline{W}\,\overline{YX} = \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{X},$$
$$\overline{YW \cdot X} = \overline{YW} \cdot \overline{X} = \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{X},$$

откуда следует $YXW = YWX$ и потому $XW = WX$. Так как $X \in \mathfrak{N}$ не содержится ни в какой моногенной подполугруппе $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, кроме $[X]$, то $W \in [X]$, т. е. $W = X^k$.

Пользуясь 6.11, получаем

$$\overline{X^{k+1}Y} = \overline{X^{k+1}}\,\overline{Y} = \overline{X}^{k+1}\overline{Y} = \overline{X}^k\overline{X}\,\overline{Y} = \overline{W}\,\overline{XY} = \overline{XYW} = \overline{XYX^k},$$

что противоречит тому, что $X^{k+1}Y \neq XYX^k$.

5) $Y \sim W(\mathfrak{m})$, $X \sim YW(\mathfrak{m})$, $X \sim WY(\mathfrak{n})$.

$$\overline{W \cdot XY} = \overline{XYW} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{W},$$
$$\overline{X \cdot WY} = \overline{X}\,\overline{WY} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{W},$$

откуда следует $WXY = XWY$, т. е. $WX = XW$. Повторяя рассуждения предыдущего случая, приходим к противоречию.

6) $Y \sim W(\mathfrak{m})$, $X \sim YW(\mathfrak{m})$, $X \sim WY(\mathfrak{m})$.

$$\overline{W \cdot XY} = \overline{XYW} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{W},$$
$$\overline{WY \cdot X} = \overline{X}\,\overline{WY} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{W},$$

что противоречит тому, что $WXY \neq WYX$.

6.13. Пользуясь полученными свойствами введенных выше отношений в свободных полугруппах, мы можем, наконец, показать, что свободная полугруппа определяется подполугрупповой характеристикой.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *есть такая полугруппа, у которой подполугрупповая характеристика* $\Sigma(\mathfrak{U})$ *изоморфна подполугрупповой характеристике* $\Sigma(\mathfrak{W}_\mathfrak{N})$ *свободной полугруппы* $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$. *Тогда* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ *изоморфны.*

Доказательство. 1) Если алфавит $\mathfrak{N}$ состоит из одного элемента, то $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ есть бесконечная моногенная полугруппа, и справедливость утверждения теоремы в этом случае непосредственно следует из III, 7.9. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{N}$ содержит по крайней мере два различных элемента $X, Y \in \mathfrak{N}$; $X \neq Y$.

Пусть φ есть изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{W}_\mathfrak{N})$ на $\Sigma(\mathfrak{U})$. Как было показано в 6.8, φ индуцирует взаимно однозначное отображение ψ полугруппы $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{U}$

$$\psi(W) = \overline{W} \quad (W \in \mathfrak{W}_\mathfrak{N}),$$

с помощью которого в $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$ определяются два отношения $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ (6.9).

2) Сперва рассмотрим случай, когда для X и Y имеет место $X \sim Y(\mathfrak{n})$. Пусть V и W два произвольных элемента полугруппы $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$. Предположим, что $V \sim W(\mathfrak{m})$. Применяя 6.12, получаем

$$\overline{XY \cdot VW} = \overline{XY} \cdot \overline{VW} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{W}\,\overline{V}.$$

Если $XYW \sim V(\mathfrak{n})$, то, опять-таки используя 6.12, получаем

$$\overline{XYW \cdot V} = \overline{XYWV} = \overline{XY}\,\overline{WV} = \overline{XY}\,\overline{WV}.$$

Из $\overline{XYVW} = \overline{XYWV}$ следует $XYVW = XYWV$, и так как $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением, то $VW = WV$. Отсюда на основании 6.10, (α) заключаем, что $V \sim W(\mathfrak{n})$.

Совершенно аналогично и в случае $XYV \sim W(\mathfrak{n})$ получаем $V \sim W(\mathfrak{n})$.

Если не имеет места ни $XYW \sim V(\mathfrak{n})$, ни $XYV \sim W(\mathfrak{n})$, то, согласно 6.10, (γ), $XYW \sim V(\mathfrak{m})$ и $XYV \sim W(\mathfrak{m})$. В этом случае, используя 6.12, получаем

$$\overline{V \cdot XYW} = \overline{XYW}\,\overline{V} = \overline{XY}\,\overline{W}\,\overline{V} = \overline{XY}\,\overline{WV}.$$

Оказалось, что $\overline{VXYW} = \overline{XYVW}$, откуда следует $VXYW = XYVW$, а так как $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением, то $VXY = XYV$. Так как V и XY оказались перестановочными, то они должны содержаться в некоторой моногенной подполугруппе $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$. Но единственной моногенной подполугруппой $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$, содержащей XY, является $[XY]$. Поэтому $V = (XY)^p$. Совершенно аналогично убеждаемся, что в нашем случае $W = (XY)^q$. Отсюда следует, что V и W перестановочны, а потому, согласно 6.10, (α), имеет место $V \sim W(\mathfrak{n})$.

Согласно 6.10, (γ), V и W обязаны находиться в отношении $\mathfrak{n}$ или $\mathfrak{m}$. Как мы показали, в нашем случае второе влечет за собой первое. Таким образом, для любых V и W обязательно выполняется $V \sim W(\mathfrak{n})$. Согласно 6.9, отсюда следует, что отображение ψ является изоморфизмом $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$.

3) Согласно 6.10, (γ), нам осталось рассмотреть лишь такой случай, когда $X \sim Y(\mathfrak{m})$.

Рассмотрим взаимно однозначное отображение ξ полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на себя

$$\xi(X_1X_2 \ldots X_n) = X_n \ldots X_2X_1 \quad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{N})$$

и η — взаимно однозначное отображение $\Sigma(\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ на себя

$$\eta\{U_\alpha, U_\beta, \ldots\} = \{\xi(U_\alpha), \xi(U_\beta), \ldots\} \quad (\{U_\alpha, U_\beta, \ldots\} \in \Sigma(\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})).$$

Очевидно, ξ является антиавтоморфизмом $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ (I, 1.17); а η — автоморфизмом $\Sigma(\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}})$.

Отображение $\varphi^* = \varphi\eta$ есть изоморфизм $\Sigma(\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}})$ на $\Sigma(\mathfrak{U})$. Для этого изоморфизма определяем методом 6.8 отображение ψ^* полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$ и отношения $\mathfrak{n}^*$ и $\mathfrak{m}^*$ (6.9). Обозначая $\psi^*(W) = \overline{\overline{W}}$, мы, очевидно, имеем

$$\varphi^*[W] = \varphi\eta[W] = \varphi[\xi(W)] = [\overline{\xi(W)}]$$
$$\overline{\overline{W}} = \overline{\xi(W)}.$$

Так как $X \sim Y(\mathfrak{m})$, то

$$\overline{\overline{XY}} = \overline{\xi(XY)} = \overline{YX} = \overline{X}\,\overline{Y},$$
$$\overline{\overline{X}} = \overline{\xi(X)} = \overline{X}, \quad \overline{\overline{Y}} = \overline{\xi(Y)} = \overline{Y}, \quad \overline{\overline{XY}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}}.$$

Таким образом, для отображения φ^* мы имеем $X \sim Y(\mathfrak{n}^*)$. Согласно рассуждениям, проведенным в предыдущей части доказательства, отсюда следует, что отображение ψ^* будет изоморфизмом $\mathfrak{W}_{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{U}$.

ГЛАВА X

ПОГРУЖЕНИЕ ПОЛУГРУПП

§ 1. Некоторые случаи погружения

1.1. Одним из методов изучения полугруппы является погружение ее в некоторую надполугруппу, которая обладает теми или иными дополнительными свойствами, способствующими более успешному ее изучению. Такое погружение может быть выполнено многими различными способами. Какой из них применить в каждом отдельном случае и в какой мере это будет полезно, определяется тем, какие именно свойства исходной полугруппы нас интересуют и какие свойства в охватывающей надполугруппе способствуют изучению данных свойств.

Вопрос о погружаемости полугрупп некоторого класса в полугруппы другого класса, помимо того, что он часто служит полезным приемом для изучения некоторых свойств полугрупп, представляет и самостоятельный интерес, выясняя взаимоотношения полугрупп различных классов.

1.2. При рассмотрении указанного вопроса следует иметь в виду, что для доказательства возможности погрузить полугруппу $\mathfrak{A}$ в полугруппу, обладающую некоторым свойством, часто достаточно бывает получить изоморфное отображение $\mathfrak{A}$ в некоторую полугруппу $\mathfrak{A}'$ с данным свойством. Действительно, методом, описанным в III, 1.8, мы можем затем в $\mathfrak{A}'$ заменить элементами из $\mathfrak{A}$ те элементы из $\mathfrak{A}'$, на которые элементы из $\mathfrak{A}$ отображаются при данном изоморфизме. В результате этого мы превратим $\mathfrak{A}'$ в новую полугруппу $\mathfrak{A}''$, уже являющуюся надполугруппой $\mathfrak{A}$. Разумеется, это достигает своей цели лишь в том случае, когда интересующее нас свойство носит „абстрактный характер“ и не нарушается в результате указанной замены.

1.3. Мы неоднократно обращались к важному свойству регулярности (II,6.1). Как мы знаем (II,6.1), полугруппа $\mathfrak{S}_\Omega$ всех преобразований множества Ω регулярна. В I,3.9 было показано, что всякая полугруппа может быть изоморфно отображена в полугруппу $\mathfrak{S}_\Omega$ для некоторого Ω. Благодаря замечанию 1.2 отсюда следует, что всякая полугруппа может быть погружена в регулярную полугруппу.

Надо отметить, что при погружении полугруппы часто бывает желательно добавлять к ней возможно меньше новых элементов для получения ее искомой надполугруппы. В этом отношении погружение $\mathfrak{A}$ в полугруппу всех преобразований так как, оно было осуществлено в I,3.9, может оказаться весьма неэкономным. В рассматриваемом нами случае погружения в регулярную надполугруппу положение может быть несколько улучшено следующим способом. Погрузив $\mathfrak{A}$ в регулярную надполугруппу $\mathfrak{A}'$, мы фиксируем в $\mathfrak{A}'$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ регулярно сопряженный с ним элемент $\overline{A}$ (II, 6.6; II, 6.7) и затем рассматриваем подполугруппу $\mathfrak{A}_1$, порожденную всеми элементами A из $\mathfrak{A}$ и всеми фиксированными регулярно сопряженными с ними элементами $\overline{A}$. Мы получаем надполугруппу $\mathfrak{A}_1$ полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой все элементы из $\mathfrak{A}$ будут регулярны (конечно, $\mathfrak{A}_1$ сама может оказаться и нерегулярной). Затем для $\mathfrak{A}_1$ таким же способом строим надполугруппу $\mathfrak{A}_2$, в которой все элементы из $\mathfrak{A}_1$ будут регулярны, и продолжаем так далее.

Как было отмечено в III, 1.12, множество

$$\mathfrak{B} = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$$

является полугруппой. Каждый ее элемент будет регулярен, ибо он принадлежит некоторой $\mathfrak{A}_n$ и потому регулярен в $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Если полугруппа $\mathfrak{A}$ была счетной, то, очевидно, и $\mathfrak{A}_1$ будет счетной, также и $\mathfrak{A}_2$ будет счетной и т. д. В результате $\mathfrak{B}$ оказывается счетной. В то же время полугруппа всех преобразований $\mathfrak{S}_\Omega$ при счетном Ω (приемом I, 3.9 мы погружаем $\mathfrak{A}$ именно в такую полугруппу) имеет континуальную мощность и потому с точки зрения высказанного выше принципа менее подходит для погружения в нее $\mathfrak{A}$, чем построенная нами $\mathfrak{B}$.

Разумеется, подобный прием применим и во многих других задачах о погружении.

1.4. В некоторых вопросах интерес представляет наличие в полугруппе возможно меньшего по мощности порождающего множества. Если мощность $\mathfrak{m}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ выше счетной, то всякое ее порождающее множество имеет мощность $\mathfrak{m}$ и мощность порождающего множества всякой ее надполугруппы не меньше $\mathfrak{m}$. Таким образом, в этом случае методом погружения добиться уменьшения мощности порождающего множества невозможно. Однако если полугруппа $\mathfrak{A}$ счетна или конечна, то, как показал Эванс [2], она всегда может быть погружена в полугруппу с двумя порождающими. Докажем это, используя конструкцию, несколько отличную от конструкции Эванса.

Теорема. *Каждая конечная или счетная полугруппа содержится в некоторой надполугруппе, обладающей порождающим множеством, состоящим из двух элементов.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — суть все элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ (мы рассматриваем случай счетной полугруппы; случай конечной полугруппы аналогичен; кроме того, конечную полугруппу можно всегда погрузить в счетную и тем самым свести рассуждения к рассматриваемому случаю). Определим функцию $\varphi(i, j)$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$, полагая

$$A_i A_j = A_{\varphi(i, j)}.$$

Очевидно, $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ есть порождающее множество $\mathfrak{A}$, а указанные равенства представляют собой определяющую совокупность относительно этого порождающего множества.

Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{B}$, заданную при помощи порождающего множества $\mathfrak{N} = \{X_1, X_2, \ldots, Y, Z\}$ и определяющей совокупности соотношений (IX, 3.10), состоящей из соотношений трех типов:

$$(\alpha)\ X_i X_j = X_{\varphi(i, j)}; \quad (\beta)\ Y^2 = Y;$$
$$(\gamma)\ X_i = Y Z^i Y, \ (i, j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как $X_i = Y Z^i Y$, а $Y^2 = Y$, то из наших соотношений вытекают следствия

$$X_i Y = X_i, \quad Y X_i = X_i.$$

Рассмотрим три следующих частных типа слов

$$(1)\ X_{\alpha_1}X_{\alpha_2}\ldots X_{\alpha_m};\quad (2)\ Y^p;\quad (3)\ Z^q.$$

Каждое слово в $\mathfrak{N}$ может быть представлено в виде произведения слов (IX, 1.2) этих трех типов

$$W = U_1U_2\ldots U_m,$$

причем никакие два соседних из U_i не принадлежат к одному и тому же типу. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех таких не принадлежащих ко второму типу слов в $\mathfrak{N}$, у которых в рассмотренной форме первый и последний множители принадлежат к первому или второму типу. Отметим, что в результате любых преобразований слов при помощи соотношений нашей определяющей совокупности мы, исходя из слова, принадлежащего $\mathfrak{M}$, всегда получаем слово, опять-таки принадлежащее $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим оператор σ, применимый к каждому слову W из $\mathfrak{M}$, заданному в указанном виде. Мы полагаем

$$\sigma(W) = \sigma(U_1)\cdot\sigma(U_2)\cdot\ldots\cdot\sigma(U_n),$$

где $\sigma(U_i) = U_i$, если U_i принадлежит к первому частному типу слов; $\sigma(U_i)$ есть пустой символ, если U_i принадлежит ко второму типу; $\sigma(U_i) = X_q$, если $U_i = Z^q$ принадлежит третьему типу. Значения слов W и $\sigma(W)$ в $\mathfrak{B}$ одинаковы. Действительно, если $U_i = Z^q$, то при помощи соотношений, входящих в определяющую систему, и при помощи указанных выше следствий из них можно в W, не меняя его значения, заменить U_{i-1} на $U_{i-1}Y$ и V_{i+1} на YU_{i+1}. После этого образовавшееся в слове произведение YZ^qY можно заменить на X_q. В результате всего этого в слове $W = U_1U_2\ldots U_i\ldots U_n$ произойдет замена $U_i = Z^q$ на $\sigma(U_i) = X_q$. Так поступаем со всеми U_i, принадлежащими к третьему типу. После этого оставшиеся Y все можно просто выбросить (т. е. заменить пустыми символами) благодаря указанным следствиям из определяющей совокупности соотношений.

Как мы знаем (IX. 3.10), из самой формы задания $\mathfrak{B}$ непосредственно не видно, не могут ли некоторые X_i и X_j быть равными как элементы полугруппы $\mathfrak{B}$. Предположим, что

для некоторых X_i и X_j это имеет место. Это означает, что найдется такая последовательность слов в $\mathfrak{N}$

$$X_i \equiv V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_{s-1},\ V_s \equiv X_j,$$

что $V_k = V_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, s-1)$ есть непосредственное следствие из определяющей совокупности соотношений. Поскольку первое слово принадлежит к $\mathfrak{M}$, то все прочие слова этой последовательности принадлежат $\mathfrak{M}$. Рассмотрим последовательность слов

$$\sigma(V_1) = \sigma(X_i) = X_i,\ \sigma(V_2),\ \ldots,\ \sigma(V_{s-1}),\ \sigma(V_s) = \sigma(X_j) = X_j.$$

Рассмотрим два любых соседних из этих слов, представляя их в указанной выше форме произведения слов трех частных типов:

$$V_k \equiv U'_1 U'_2 \ldots U'_p,\quad \sigma(V_k) = \sigma(U'_1)\cdot\sigma(U'_2)\cdot\ldots\cdot\sigma(U'_p),$$
$$V_{k+1} \equiv U''_1 U''_2 \ldots U''_q,\quad \sigma(V_{k+1}) = \sigma(U''_1)\cdot\sigma(U''_2)\cdot\ldots\cdot\sigma(U''_q).$$

V_{k+1} получается из V_k путем однократной замены какой-либо части слова V_k, являющейся одной из частей соотношения, входящего в определяющую совокупность, другой частью этого соотношения. Если указанное соотношение принадлежит ко второму или третьему типу соотношений, то, очевидно, $\sigma(V_k)$ будет вполне совпадать с $\sigma(V_{k+1})$. Если же это соотношение принадлежит к первому типу, то $\sigma(V_{k+1})$ получается из $\sigma(V_k)$ при помощи преобразования соотношением типа (α).

Таким образом, последовательность $\sigma(V_1), \sigma(V_2), \ldots, \sigma(V_s)$ представляет собой последовательность слов в $\{X_1, X_2, \ldots\}$, в которой каждый член равен предыдущему или получается из него при помощи преобразования каким-либо соотношением вида $X_i X_j = X_{\varphi(i,j)}$ Заменив в словах этой последовательности каждый X_k на A_k, мы получим последовательность слов в $\{A_1, A_2, \ldots\}$, в которой каждые два соседние слова имеют в полугруппе $\mathfrak{A}$ равные значения. Следовательно, A_i и A_j также должны иметь в $\mathfrak{A}$ равные значения. Так как при $i \neq j$ элементы A_i и A_j в $\mathfrak{A}$ различны, то приходим к выводу, что $i = j$. Возвращаясь к полугруппе $\mathfrak{B}$, отсюда заключаем, что X_i может равняться X_j в $\mathfrak{B}$ только при $i = j$.

Рассмотрим взаимно однозначное отображение ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$

$$\psi(A_i) = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Если $A_iA_j = A_{\varphi(i,\ j)}$, то и $X_iX_j = X_{\varphi(i,\ j)}$. Следовательно, ψ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ в полугруппу $\mathfrak{B}$, обладающую порождающим множеством $\{Y, Z\}$. Заменяя в $\mathfrak{B}$ все X_i на A_i, получаем надполугруппу полугруппы $\mathfrak{A}$, обладающую порождающим множеством, состоящим из двух элементов.

1.5. Задача о погружении полугруппы в надполугруппу, обладающую какими-нибудь заданными свойствами, часто осложняется дополнительным условием, чтобы при таком погружении не были потеряны какие-либо другие важные свойства исходной полугруппы. Если рассмотреть, например, конструкцию, при помощи которой была доказана теорема 1.4, то мы замечаем, что построенная надполугруппа $\mathfrak{B}$ может не обладать некоторыми существенными свойствами, которыми могла обладать $\mathfrak{A}$. Например, $\mathfrak{A}$ могла быть коммутативной, тогда как $\mathfrak{B}$ некоммутативна (всякое из соотношений определяющей совокупности $\mathfrak{B}$ преобразует слово Y^nZ в слово $Y^{n\pm1}Z$ и потому никакие последовательные преобразования не преобразуют YZ в ZY). $\mathfrak{A}$ могла удовлетворять условию сокращения слева (аналогично справа), тогда как в $\mathfrak{B}$

$$Y \cdot ZY = X_1, \quad YX_1 = X_1,$$

но $ZY \neq X_1$.

Задача о выяснении существования надполугрупп, принадлежащих к некоторому классу, к которому принадлежит и исходная полугруппа, может представить более значительные трудности. Упомянем в связи с этим, что Эванс [3] рассматривал вопрос о погружении полугруппы в надполугруппы, обладающие порождающим множеством с заданным числом элементов, также и при дополнительном условии, что как исходная полугруппа, так и ее искомая надполугруппа удовлетворяют условиям сокращения.

1.6. В духе намеченного выше направления о погружении полугрупп имеется целый ряд исследований. Упомянем работы Кона [1], [2] и Э. Г. Шутова [1], [2], [3], [4]. На привлекавшем особое внимание вопросе о погружении полугрупп в группы мы остановимся в следующем параграфе. Сейчас мы рассмотрим один пример несколько отличной постановки задачи о погружении.

Значение отношений левой делимости и правой делимости выявлялось выше неоднократно.

Пусть A и B есть два произвольных элемента полугруппы $\mathfrak{A}$. Спрашивается, когда существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A делился бы на B справа? Сразу видно следующее необходимое условие для этого. Если такая полугруппа $\mathfrak{A}'$ существует, то в $\mathfrak{A}$ для X и Y, являющихся элементами из $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, из $BX = BY$ всегда должно следовать $AX = AY$. Действительно, по предположению, в $\mathfrak{A}'$ существует такой $Z \in \mathfrak{A}'$, что $A = ZB$. Поэтому в $\mathfrak{A}'$ из $BX = BY$ вытекает $ZBX = ZBY$, т. е. $AX = AY$. Но это равенство, будучи справедливо в $\mathfrak{A}'$, тем самым справедливо и в $\mathfrak{A}$.

Оказывается, найденное необходимое условие является и достаточным. Действительно, пусть оно выполнено для A и B. Рассмотрим полугруппу левых сдвигов $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$, соответствующих элементам из $\mathfrak{A}$ (I, 3.9). Так как в $\mathfrak{A}$ из $BX = BY$ всегда следует $AX = AY$, то в $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ для соответствующих левых сдвигов из $T_B X = T_B Y$ всегда следует $T_A X = T_A Y$ (здесь X и Y могут равняться также и отделяющему элементу I, поскольку в предшествующих равенствах в $\mathfrak{A}$ X и Y могли быть не только элементами из $\mathfrak{A}$, но и пустыми символами).

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{S}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$ всех преобразований множества $\Lambda_{\mathfrak{A}}$. Согласно II, 3.1, в $\mathfrak{S}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$ T_A делится справа на T_B. Если в $\mathfrak{S}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$ методом III, 1.8 заменить левые сдвиги из $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ соответствующими элементами из $\mathfrak{A}$, то мы получим полугруппу, в которой A будет делиться справа на B.

1.7. Вполне аналогично 1.6 убеждаемся в том, что для существования надполугруппы $\mathfrak{A}''$ полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A делился бы на B слева, необходимо, чтобы в $\mathfrak{A}$ из $XB = YB$ всегда следовало бы $XA = YA$. Однако для доказательства достаточности этого условия нам не поможет представление $\mathfrak{A}$ левыми сдвигами. Зато мы можем воспользоваться представлением $\mathfrak{A}$ правыми сдвигами (I, 3.12). Пусть в $\mathfrak{A}$ из $XB = YB$ всегда следует $XA = YA$. Тогда для соответствующих правых сдвигов из $\mathfrak{T}^{\circ}_{\mathfrak{A}}$ из $T^{\circ}_B X = T^{\circ}_B Y$ всегда следует $T^{\circ}_A X = T^{\circ}_A Y$.

$\mathfrak{T}^{\circ}_{\mathfrak{A}}$ есть подполугруппа полугруппы $\mathfrak{S}^{\circ}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$. Эта полугруппа антиизоморфна $\mathfrak{S}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$. Поэтому из II, 3.1 легко получается, что выполнение указанных условий для преобразований T°_A и T°_B означает, что в $\mathfrak{S}^{\circ}_{\Lambda_{\mathfrak{A}}}$ первое из них делится на

второе слева. Заменяя в $\mathfrak{S}^{\circ}_{\Lambda\mathfrak{A}}$ правые сдвиги соответствующими элементами из $\mathfrak{A}$, мы получаем надполугруппу полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A будет делиться справа на B. Отметим, что несколько другой подход к этому же вопросу употребляет Кон [1], [2].

1.8. В связи с проведенными рассуждениями интересно отметить, что полугруппа всех преобразований некоторого множества $\mathfrak{S}_\Omega$ (так же как и антиизоморфная ей полугруппа $\mathfrak{S}^0_\Omega$) обладает следующим свойством. Если A не делится справа на B в $\mathfrak{S}_\Omega$ ($A, B \in \mathfrak{S}_\Omega$), то A не будет делиться справа на B и ни в какой надполугруппе $\mathfrak{S}'$ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$. Аналогично и для делимости слева.

Действительно, из того, что в $\mathfrak{S}_\Omega$ A не делится справа на B, согласно II, 3.1, следует, что при некоторых $\alpha, \beta \in \Omega$ имеет место $A\alpha \neq A\beta$ и $B\alpha = B\beta$. Рассмотрим преобразования $U_\lambda (\lambda \in \Omega)$ такие, что $U_\lambda \xi = \lambda$ для любого $\xi \in \Omega$. Мы имеем

$$AU_\alpha = U_{(A\alpha)} \neq U_{(A\beta)} = AU_\beta,$$
$$BU_\alpha = U_{(B\alpha)} = U_{(B\beta)} = BU_\beta.$$

Следовательно, согласно 1.6, A не делится справа на B ни в какой надполугруппе $\mathfrak{S}'$ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$.

Если A не делится слева на B в $\mathfrak{S}_\Omega$, то, согласно II, 3.2, найдется такой $\lambda \in \Omega$, что $\mu = A\lambda \in B\Omega$. Возьмем тождественное преобразование E и преобразование I, которое каждый $\xi \in \Omega$ преобразует опять в ξ, за исключением $\xi = \mu$, для которого $I\mu \neq \mu$.

Так как

$$IA\lambda = I\mu \neq \mu = A\lambda,$$

то

$$IA \neq A = EA.$$

Но для любого $\xi \in B\Omega$ мы имеем $I\xi = \xi$, поэтому $IB = EB$. Согласно 1.7, A не может делиться на B слева ни в какой надполугруппе $\mathfrak{N}'$ полугруппы $\mathfrak{S}_\Omega$.

§ 2. Погружение в группы

2.1. Среди различных задач о погружении наибольшее внимание привлекла к себе задача о погружении полугрупп в группы. Это вполне естественно. Теория групп развита

значительно сильнее общей теории полугрупп. Поэтому возможность вложить некоторую полугруппу в группу, позволяющая при некоторых видах исследований проводить их уже не для самой исходной полугруппы, но для охватывающей ее группы, открывает широкие возможности для применения результатов и методов теории групп. С другой стороны, полугруппы, вложимые в группы, представляют очевидный интерес для теории групп. Каждая из них есть замкнутое относительно умножения подмножество некоторой группы, т. е. объект, рассмотрение которого с различных точек зрения существенно для изучения свойств этой группы. Упомянем также, что класс полугрупп, вложимых в группы, может быть определен как максимальный класс, для которого класс всех групп является универсальным классом (III, 1.9; III, 1.10).

2.2. Необходимо, впрочем, отметить, что не всегда изучение полугруппы, вложимой в группу, целесообразно сводить к изучению этой группы. Дело в том, что часто полугруппа $\mathfrak{A}$ может интересовать нас как подполугруппа некоторой надполугруппы $\mathfrak{A}'$. При этом возможен такой случай, когда $\mathfrak{A}$ сама является полугруппой, вложимой в группу, но не существует такой надполугруппы $\mathfrak{A}''$ полугруппы $\mathfrak{A}'$, в которой имелась бы подгруппа, содержащая $\mathfrak{A}$. В этом случае невозможно, не отказываясь от рассмотрения $\mathfrak{A}$ как подполугруппы $\mathfrak{A}'$, свести ее изучение к изучению какой-либо группы.

Приведем пример указанной возможности, построенный Э. Г. Шутовым.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть мультипликативная полугруппа натуральных чисел. Рассмотрим надполугруппу $\mathfrak{A}$ полугруппы $\mathfrak{B}$, содержащую помимо $\mathfrak{B}$ два элемента U и V. Умножение в $\mathfrak{A}$, помимо правила умножения $\mathfrak{B}$, определяется условиями:

1) $UN = U$, $VN = U$, если N четно;
2) $UN = U$, $VN = V$, если N нечетно;
3) $UV = V$, $VU = U$, $U^2 = U$, $V^2 = V$;
4) $NU = U$, $NV = V$, $(N \in \mathfrak{B})$.

Без труда убеждаемся в ассоциативности этого действия. Полугруппа $\mathfrak{B}$ вложима в группу. В то же время никакая надполугруппа $\mathfrak{A}$ не обладает подгруппой, содержащей $\mathfrak{B}$. Действительно, в случае существования такой подгруппы она

содержала бы элемент X, такой, что $2 \cdot X = 1$, и мы получили бы в $\mathfrak{A}$

$$V = V \cdot 1 = V \cdot 2 \cdot X = UX = U \cdot 2 \cdot X = U \cdot 1 = U.$$

2.3. Так как всякая группа является полугруппой с двусторонним сокращением, то и всякая полугруппа, вложимая в группу, должна быть полугруппой с двусторонним сокращением. В свое время решение вопроса о том, не является ли условие двустороннего сокращения не только необходимым, но и достаточным для вложения полугруппы в группу, представило известные трудности. Отрицательное решение было получено впервые в 1937 г. А. И. Мальцевым [1], который построил полугруппу с двусторонним сокращением, не вложимую в группу. Подобный пример будет рассмотрен нами ниже.

2.4. Пусть в полугруппе $\mathfrak{A}$ задано некоторое порождающее множество $\mathfrak{K}$ и определяющая совокупность соотношений $\Phi(\mathfrak{K})$ относительно этого множества. Рассмотрим два новых множества $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$, каждое из которых состоит из элементов, поставленных во взаимно однозначное соответствие с элементами из $\mathfrak{K}$ (элемент из $\mathfrak{K}'$, соответствующий элементу $K \in \mathfrak{K}$, будем обозначать через K', а соответствующий элемент из $\mathfrak{K}''$ — через K''). Определим полугруппу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ как полугруппу с порождающим множеством $\mathfrak{K}' \cup \mathfrak{K}'' \cup E$, где элемент E не входит ни в $\mathfrak{K}'$, ни в $\mathfrak{K}''$, и с определяющей совокупностью соотношений (IX, 3.10), состоящей из соотношений $\Phi(\mathfrak{K}')$ (т. е. соотношений, получающихся из соотношений, принадлежащих $\Phi(\mathfrak{K})$, заменой элементов из $\mathfrak{K}$ соответствующими элементами из $\mathfrak{K}'$) и соотношений вида

$$EK' = K'E = K', \quad EK'' = K''E = K'', \quad E^2 = E,$$

$$K'K'' = K''K' = E \qquad (K \in \mathfrak{K}).$$

$\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ является группой, поскольку для ее произвольного элемента $X_1X_2 \ldots X_n$ ($X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{K}' \cup \mathfrak{K}'' \cup E$) E является двусторонней единицей, а $Y_nY_{n-1} \ldots Y_2Y_1$ (где $Y_i = K'$, если $X_i = K'' \in \mathfrak{K}''$; $Y_i = K''$, если $X_i = K' \in \mathfrak{K}'$, и $Y_i = E$, если $K_i = E$) — обратным элементом относительно E.

Определяем отображение φ полугруппы $\mathfrak{A}$ в группу $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$

$$\varphi(K_1K_2\ldots K_n)=K_1'K_2'\ldots K_n' \qquad (K_1, K_2, \ldots, K_n\in\mathfrak{K}).$$

Это отображение однозначно, так как образ $A\in\mathfrak{A}$ не зависит от выбора произведения элементов из $\mathfrak{K}$, при помощи которого выражен A. Действительно, если произведения $K_1K_2\ldots K_n$ и $K_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\ldots K_{\alpha_m}$ представляют собой один и тот же элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$, то соотношение $K_1K_2\ldots K_n = K_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\ldots K_{\alpha_m}$ является следствием из $\Phi(\mathfrak{K})$, но тогда и $K_1'K_2'\ldots K_n'=K_{\alpha_1}'K_{\alpha_2}'\ldots K_{\alpha_m}'$ есть следствие из $\Phi(\mathfrak{K}')$ и потому $K_1'K_2'\ldots K_n'$ и $K_{\alpha_1}'K_{\alpha_2}'\ldots K_{\alpha_m}'$ представляют собой один и тот же элемент группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$. Непосредственно ясно, что φ является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$.

Значение группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ для полугруппы $\mathfrak{A}$ зависит от характера соотношений в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ между элементами из $\mathfrak{K}'$.

Предположим, что в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ всякое соотношение между элементами из $\mathfrak{K}'$ является следствием из соотношений $\Phi(\mathfrak{K}')$. Тогда отображение φ будет взаимно однозначным. Действительно, из

$$\varphi(K_1K_2\ldots K_n)=K_1'K_2'\ldots K_n',$$
$$\varphi(K_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\ldots K_{\alpha_m})=K_{\alpha_1}'K_{\alpha_2}'\ldots K_{\alpha_m}',$$
$$K_1'K_2'\ldots K_n'=K_{\alpha_1}'K_{\alpha_2}'\ldots K_{\alpha_m}'$$

благодаря сделанному предположению следует, что последнее соотношение может быть получено как следствие из $\Phi(\mathfrak{K}')$. Но тогда и соотношение $K_1K_2\ldots K_n=K_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\ldots K_{\alpha_m}$ может быть получено как следствие из $\Phi(\mathfrak{K})$, т. е. $K_1K_2\ldots K_n$ и $K_{\alpha_1}K_{\alpha_2}\ldots K_{\alpha_m}$ есть один и тот же элемент полугруппы $\mathfrak{A}$. Будучи гомоморфизмом, φ оказывается в нашем случае изоморфизмом $\mathfrak{A}$ в группу $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, при сделанном предположении полугруппа $\mathfrak{A}$ оказывается вложимой в группу.

Теперь предположим, что $\mathfrak{A}$ может быть погружена в некоторую группу $\mathfrak{F}$. Определим отображение ψ порождающего множества $\mathfrak{K}'\cup\mathfrak{K}''\cup E$ группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ в $\mathfrak{F}$

$$\psi(K')=K, \qquad \psi(K'')=K^{-1}, \qquad \psi(E)=E_{\mathfrak{F}}$$

(K^{-1} есть элемент из $\mathfrak{F}$, обратный к K в группе $\mathfrak{F}$). При этом отображении все соотношения из исходной определяю-

щей совокупности соотношений группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ отобразятся на справедливые в $\mathfrak{F}$ соотношения. Согласно IX, 1.11, ψ может быть продолжено до гомоморфизма ξ группы $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ в $\mathfrak{F}$.

Пусть

$$K'_1K'_2 \dots K'_p = K'_{\alpha_1}K'_{\alpha_2} \dots K'_{\alpha_q}$$

есть произвольное соотношение между элементами из $\mathfrak{K}'$ в группе $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$. Благодаря гомоморфизму ξ в $\mathfrak{F}$ должно иметь место соответствующее соотношение

$$K_1K_2 \dots K_p = K_{\alpha_1}K_{\alpha_2} \dots K_{\alpha_q}.$$

Это соотношение, будучи соотношением для $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{A}$, обязано быть следствием из $\Phi(\mathfrak{K})$. Но так как в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ имеют место соотношения $\Phi(\mathfrak{K}')$, то в $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ соотношение

$$K'_1K'_2 \dots K'_p = K'_{\alpha_1}K'_{\alpha_2} \dots K'_{\alpha_q}$$

будет следствием из соотношений $\Phi(\mathfrak{K}')$.

Проведенные рассуждения показали, что *необходимое и достаточное условие вложимости полугруппы* $\mathfrak{A}$ *в группу состоит в том, чтобы в* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ *всякое соотношение между элементами из* $\mathfrak{K}'$ *могло бы быть получено как следствие из соотношений* $\Phi(\mathfrak{K}')$.

2.5. Критерий вложимости в группу, полученный в 2.4, конечно, мало эффективен. Он может быть несколько развит. Например, в сходном направлении строит свои исследования Птак [1], [2], [3]. Более глубоко проник в эту область А. И. Мальцев [2]. Им сформулирован более тонкий критерий. Однако и этот критерий далеко неэффективен и качественно носит такой же характер, как и критерий 2.4. Причины этого в значительной степени были разъяснены А. И. Мальцевым [3], который показал, что никакое конечное количество условий, принадлежащих к некоторому указанному им классу условий, содержащему, в частности, и условия сокращения, не может составить необходимое и достаточное условие для погружения произвольной полугруппы в группу.

В связи с этим обстоятельством большую роль приобретают различные достаточные признаки погружения полугрупп в группы. Получению таких признаков был посвящен ряд работ различных авторов: Орэ [1], Дюбрейль-Жакотэн [1], Ламбек [1], Досс [1], Тамари [5], Птак [1], [2], [3].

2.6. Рассмотрим признак Орэ [1]. Рассуждения мы проведем по Рису [4], который заново вывел этот признак, опираясь на рассмотрение полугрупп частичных преобразований.

Пусть $\mathfrak{H}$ есть такая полугруппа взаимно однозначных частичных преобразований некоторого множества Ω, которая для каждого частичного преобразования $X \in \mathfrak{H}$ содержит и обратное ему частичное преобразование $\overline{X}$ (I, 4.5). Введем в $\mathfrak{H}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая $X \sim Y(\mathfrak{n})$, если для элементов X, $Y \in \mathfrak{H}$ найдется такой $T \in \mathfrak{H}$, что $T \leqslant X$ и $T \leqslant Y$ (I, 4.3). Это отношение, очевидно, симметрично и рефлексивно. Докажем его транзитивность.

Пусть

$$T_1 \leqslant X, \quad T_1 \leqslant Y,$$
$$T_2 \leqslant Y, \quad T_2 \leqslant Z, \qquad (X, Y, Z, T_1, T_2 \in \mathfrak{H}).$$

Возьмем элемент

$$U = T_1 \overline{T}_2 T_2 \in \mathfrak{H}.$$

Из определения умножения частичных преобразований следует, что

$$\Pi_1^{(U)} \subset \Pi_1^{(T_1)}, \quad \Pi_1^{(U)} \subset \Pi_1^{(T_2)}.$$

Для каждого $\alpha \in \Pi_1^{(U)}$ мы имеем

$$U\alpha = T_1[\overline{T}_2(T_2\alpha)] = T_1\alpha = Y\alpha = T_2\alpha$$

и, следовательно,

$$U \leqslant T_1 \leqslant X, \quad U \leqslant T_2 \leqslant Z,$$

откуда следует $X \sim Z(\mathfrak{n})$.

Введенное отношение эквивалентности двусторонне стабильно. Действительно, если

$$X \sim Y(\mathfrak{n}), \quad T \leqslant X, \quad T \leqslant Y \qquad (X, Y, T \in \mathfrak{H}),$$

то для всякого $Z \in \mathfrak{H}$, очевидно,

$$TZ \leqslant XZ, \quad TZ \leqslant YZ, \quad ZT \leqslant ZX, \quad ZT \leqslant ZY,$$

т. е. $XZ \sim YZ(\mathfrak{n})$ и $ZX \sim ZY(\mathfrak{n})$.

Полугруппа $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$ (VII, 2.4) является группой. Действительно, для любых $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{H}/\mathfrak{n}$ (где $\tilde{S}$ обозначает класс элементов из $\mathfrak{H}$, эквивалентных с S относительно $\mathfrak{n}$) при $X = A\bar{B}$ и $Y = \bar{B}A$ мы имеем

$$XB = A\bar{B}B \leqslant A, \qquad BY = B\bar{B}A \leqslant A,$$

откуда $XB \sim A(\mathfrak{n})$, $BY \sim A(\mathfrak{n})$ и, следовательно,

$$\tilde{X}\tilde{B} = \widetilde{XB} = \tilde{A}, \qquad \tilde{B}\tilde{Y} = \widetilde{BY} = \tilde{A}.$$

2.7. Пользуясь описанной конструкцией, выведем одно достаточное условие вложимости полугруппы в группу.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть такая полугруппа с двусторонним сокращением, в которой для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ всегда найдутся такие $U, V \in \mathfrak{A}$, что*

$$AU = BV.$$

Тогда $\mathfrak{A}$ есть полугруппа, вложимая в группу.

Доказательство. $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ есть полугруппа всех частичных взаимно однозначных преобразований множества всех элементов полугруппы $\mathfrak{A}$.

Каждому $A \in \mathfrak{A}$ сопоставим частичное преобразование S_A множества $\mathfrak{A}$, такое, что

$$\Pi_1^{(S_A)} = \mathfrak{A}, \qquad S_A X = AX \qquad (X \in \mathfrak{A}).$$

S_A взаимно однозначно, так как по условию теоремы равенство $S_A X = S_A Y$ (т. е. $AX = AY$) возможно лишь при $X = Y$. $\Pi_1^{(S_A)}$ и $\Pi_2^{(S_A)} = A\mathfrak{A}$ являются правыми идеалами полугруппы $\mathfrak{A}$.

При любых $X, Y \in \mathfrak{A}$

$$S_A(XY) = (S_A X)\,Y.$$

Для обратного взаимно однозначного преобразования $\bar{S}_A$ имеем

$$\Pi_1^{(\bar{S}_A)} = \Pi_2^{(S_A)}, \quad \Pi_2^{(\bar{S}_A)} = \Pi_1^{(S_A)}$$

и потому $\Pi_1^{(\bar{S}_A)}$ и $\Pi_2^{(\bar{S}_A)}$ также являются правыми идеалами $\mathfrak{A}$. Если $X \in \Pi_1^{(\bar{S}_A)}$, т. е. при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ $X = AZ$, то при произвольном $Y \in \mathfrak{A}$

$$XY = AZY = S_A(ZY),$$

т. е.

$$\bar{S}_A(XY) = ZY = (\bar{S}_A X) \cdot Y,$$

В полугруппе $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ рассмотрим подполугруппу $\mathfrak{H}$, порожденную всеми S_A и $\bar{S}_A$ ($A \in \mathfrak{A}$). Для произвольного элемента этой подполугруппы

$$H = H_1 H_2 \ldots H_m \quad (H_i = S_{A_i} \text{ или } H_i = \bar{S}_{A_i};\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

докажем по индукции относительно m, что $\Pi_1^{(H)}$ и $\Pi_2^{(H)}$ являются правыми идеалами $\mathfrak{A}$. Случай $m = 1$ был уже разобран выше. Пусть $m > 1$ и $X \in \Pi_1^{(H)}$, а $Y \in \mathfrak{A}$. Пользуясь индуктивным предположением и доказанным выше свойством частичных преобразований, получаем

$$X \in \Pi_1^{(H)} \subset \Pi_1^{(H_2 H_3 \ldots H_m)}, \quad XY \in \Pi_1^{(H_2 H_3 \ldots H_m)}$$
$$(H_2 H_3 \ldots H_m)(XY) = [(H_2 H_3 \ldots H_m) X] \cdot Y;$$
$$(H_2 H_3 \ldots H_m) \cdot X \in \Pi_1^{(H_1)}, \quad [(H_2 H_3 \ldots H_m) X] \cdot Y \in \Pi_1^{(H_1)},$$

откуда следует

$$(H_2 H_3 \ldots H_m)(XY) \in \Pi_1^{(H_1)},$$

т. е. $XY \in \Pi_1^{(H)}$. Таким образом, $\Pi_1^{(H)}$ оказывается или правым идеалом, или пустым множеством. Для того чтобы отмести вторую возможность, выберем элементы

$$A \in \Pi_2^{(H_2 H_3 \ldots H_m)}, \quad B \in \Pi_1^{(H_1)}.$$

Согласно условию теоремы, в $\mathfrak{A}$ должны найтись такие элементы U и V, что

$$AU = BV = W.$$

Так как $\Pi_2^{(H_2 H_3 \ldots H_m)}$ и $\Pi_1^{(H_1)}$ являются правыми идеалами, то

$$W \in \Pi_2^{(H_2 H_3 \ldots H_m)}, \quad W \in \Pi_1^{(H_1)}.$$

Первое из этих включений означает, что при некотором $C \in \mathfrak{A}$

$$(H_2 H_3 \dots H_m) C = W.$$

Учитывая второе включение, получаем, что C принадлежит $\Pi_1^{(H_1 H_2 \dots H_m)} = \Pi_1^{(H)}$, которое, таким образом, оказывается непустым. Так как, очевидно,

$$\Pi_2^{(H_1 H_2 \dots H_m)} = \Pi_1^{(\overline{H}_m \dots \overline{H}_2 \overline{H}_1)},$$

то $\Pi_2^{(H)}$ также оказывается правым идеалом $\mathfrak{A}$.

Так как обратное для $H = H_1 H_2 \dots H_m \in \mathfrak{H}$ частичное преобразование $\overline{H} = \overline{H}_m \dots \overline{H}_2 \overline{H}_1$ также принадлежит $\mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{H}$ можно методом 2.6 определить двусторонне стабильное отношение $\mathfrak{n}$. Факторполугруппа $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$, согласно 2.6, является группой. Естественный гомоморфизм $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$ обозначим через χ.

Рассмотрим отображение ψ полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$

$$\psi(A) = S_A \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Так как для любых A, B, $X \in \mathfrak{A}$

$$(S_A S_B) X = S_A (S_B X) = S_A (BX) = ABX = S_{AB} X,$$

то ψ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим произведение гомоморфизмов $\xi = \chi\psi$. Очевидно, ξ есть гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в группу $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$. Предположим, что для некоторых A, $B \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$\xi(A) = \xi(B), \quad A \neq B.$$

Это означает: $S_A \sim S_B (\mathfrak{n})$, т. е. что существует такое частичное преобразование $T \in \mathfrak{H}$, что $T \leqslant S_A$ и $T \in S_B$. Возьмем некоторый элемент $Z \in \Pi_1^{(T)}$. Для этого элемента мы имеем

$$S_A Z = TZ, \quad S_B Z = TZ.$$

Но

$$S_A Z = AZ, \quad S_B Z = BZ,$$

а равенство $AZ = BZ$ в $\mathfrak{A}$ невозможно. Полученное противоречие показывает, что на самом деле отображение ξ взаимно однозначно, т. е. является изоморфизмом полугруппы $\mathfrak{A}$ в группу $\mathfrak{H}/\mathfrak{n}$.

2.8. К числу полугрупп, удовлетворяющих условию рассмотренной теоремы, очевидно, принадлежат коммутативные полугруппы. Действительно, в коммутативной полугруппе для любых элементов A и B мы имеем $AU = BV$ при $U = B$ и $V = A$. Благодаря этому, из теоремы вытекает следствие.

Следствие. *Всякая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в группу.*

Конечно, этот важный результат может быть доказан и непосредственно.

2.9. Укажем еще на один частный случай использования теоремы, охватывающий 2.8.

Следствие. *Всякая полугруппа с двусторонним сокращением, удовлетворяющая коммутаторному условию (IV, 6.7), вложима в группу.*

Действительно, для элементов A и B такой полугруппы можно взять $U = B$ и $V = R_{AB}$.

При таком выборе мы имеем

$$AU = BV.$$

2.10. В связи с рассмотрением полугрупп, вложимых в группы, укажем на один интересный класс таких полугрупп. Пусть Ω есть n-мерное евклидово пространство (можно взять и пространство какого-либо более общего вида). $\mathfrak{G}$ — группа движений пространства Ω, рассматриваемых как преобразования Ω. Γ — некоторое подмножество Ω. Обозначим через $\mathfrak{A}_\Gamma$ совокупность таких движений X из $\mathfrak{G}$, для которых $X\Gamma \subset \Gamma$. Очевидно, $\mathfrak{A}_\Gamma$ является полугруппой. Она есть полугруппа, вложимая в группу ($\mathfrak{A}_\Gamma \in \mathfrak{G}$). Алгебраические свойства полугруппы $\mathfrak{A}_\Gamma$ в какой-то степени характеризуют геометрические свойства множества Γ. Вопрос о том, в каких случаях и в какой степени можно установить связи между упомянутыми свойствами, пока, по-видимому, совершенно не исследовался. Однако представляется в высшей степени вероятным существование содержательных связей, изучение которых может дать ценное приложение теории полугрупп.

§ 3. Линейная упорядоченность в группах

3.1. При исследовании некоторых классов полугрупп и отдельных конкретных полугрупп иногда приходится сталкиваться с тем обстоятельством, что в множестве их элемен-

тов каким-либо естественным образом определяется отношение частичной упорядоченности. Так, например, в § 7 второй главы естественно появилась частичная упорядоченность в инверсных полугруппах. В голоидных полугруппах, рассмотренных в § 4 восьмой главы, имела место линейная упорядоченность. С точки зрения общей теории полугрупп интерес представляют те случаи, когда частичная упорядоченность в полугруппе согласована с умножением, т. е. является двусторонне стабильным отношением. В первом из упомянутых случаев это, как мы показали, действительно имеет место. Аналогичного утверждения для голоидных полугрупп в общем случае мы сделать не можем. Однако в некоторых частных случаях, как будет показано ниже, двусторонняя стабильность имеет место.

3.2. ***Определение.*** *Если в множестве элементов полугруппы* $\mathfrak{A}$ *определено двусторонне стабильное отношение частичной упорядоченности, то относительно этой частичной упорядоченности* $\mathfrak{A}$ *называется частично упорядоченной полугруппой. Если это отношение является линейным, то полугруппа называется линейно упорядоченной (в обоих случаях говорят также — упорядоченная полугруппа).*

Изучение частично упорядоченных полугрупп проводилось до сих пор главным образом для отдельных их классов. Больше всего уделялось внимания частично упорядоченным группам, особенно в том случае, когда относительно частичной упорядоченности группа является структурой (так называемые l-группы). Некоторые из результатов относительно частично упорядоченных полугрупп и групп приведены в тринадцатой и четырнадцатой главах книги Биркгофа [3].

Особого внимания заслуживает вопрос о возможности введения в группе двусторонне стабильной частичной упорядоченности и, в частности, линейной упорядоченности. Мы увидим, что этот вопрос связан с изучением некоторых подполугрупп группы. Таким образом, он может рассматриваться в плане проблемы о полугруппах, вложенных в группы.

3.3. Имея в виду рассмотреть один случай линейной упорядоченности голоидной полугруппы (VIII, 4.8.), докажем предварительно одну лемму.

Лемма. *Пусть голоидная полугруппа с двусторонним сокращением обладает единицей. Тогда эта единица*

присоединена внешним образом. Элемент X, делящийся на элемент Y слева, делится на него и справа.

Доказательство. Пусть для элементов A и B указанной полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет место

$$AB = E_{\mathfrak{A}}.$$

Если в отношении линейной упорядоченности в голоидной полугруппе B предшествует A, то при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ имеем $BZ = A$ (если $A = B$, то Z — пустой символ). Отсюда получаем

$$BZB = AB = E_{\mathfrak{A}}, \quad B = E_{\mathfrak{A}}BE_{\mathfrak{A}},$$

что означает, что B предшествует $E_{\mathfrak{A}}$ и одновременно $E_{\mathfrak{A}}$ предшествует B. Это возможно лишь при $B = E_{\mathfrak{A}}$. Но тогда и $A = E_{\mathfrak{A}}$. Аналогичен случай, когда A предшествует B.

Пусть $X = YS$. Если бы X предшествовал Y в отношении линейной упорядоченности голоидной полугруппы, то $Y = XT$ при некотором $T \in \mathfrak{A}$. Отсюда

$$X = XTS,$$

т. е. $TS = E_{\mathfrak{A}}$, что, согласно доказанному, возможно лишь при $T = S = E_{\mathfrak{A}}$, т. е. при $X = Y$. Следовательно, Y предшествует X и потому X делится на Y и слева и справа.

3.4. *Теорема.* *Если голоидная полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает единицей и является полугруппой с двусторонним сокращением, то ее линейная упорядоченность двусторонне стабильна.*

Доказательство. Пусть B отличен от A ($A, B \in \mathfrak{A}$) и предшествует ему относительно линейной упорядоченности в $\mathfrak{A}$, т. е. при некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$

$$A = BX, \quad A = YB.$$

Предположим, что при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ элемент ZA предшествует ZB. При некотором $T \in \mathfrak{A}$ должно иметь место

$$ZB = ZAT.$$

Благодаря сокращаемости отсюда следует $B = AT$ и потому

$$AE_{\mathfrak{A}} = A = BX = ATX.$$

Откуда получаем $TX = E_{\mathfrak{A}}$. Благодаря лемме 3.3 это возможно лишь при $T = X = E_{\mathfrak{A}}$, что противоречит $A \neq B$.

Аналогично доказывается стабильность справа.

3.5. Переходим к частично упорядоченным группам.

Определение. *Множество всех таких элементов X частично упорядоченной группы $\mathfrak{G}$, которые следуют за единицей $E_{\mathfrak{G}}$, называется положительной частью упорядоченной группы $\mathfrak{G}$ и обозначается через $\mathfrak{G}^+$.*

Надо отметить, что иногда положительной частью называют совокупность лишь таких элементов X, для которых $X > E_{\mathfrak{G}}$.

Употребление термина „положительная часть" объясняется тем, что при рассмотрении частично упорядоченных групп очень часто для действия употребляют аддитивную запись. В этом случае единичный элемент обозначается знаком нуль и условие того, что элемент следует за единицей, записывается формулой, которая выглядит как обычное условие положительности.

3.6. Положительная часть $\mathfrak{G}^+$ частично упорядоченной группы является подполугруппой, так как из $X \geqslant E_{\mathfrak{G}}$, $Y \geqslant E_{\mathfrak{G}}$ следует

$$XY \geqslant E_{\mathfrak{G}} Y = Y \geqslant E_{\mathfrak{G}}.$$

Задание положительной части $\mathfrak{G}^+$ в частично упорядоченной группе $\mathfrak{G}$ вполне определяет отношение частичной упорядоченности.

Для того чтобы имело место $X \geqslant Y$, необходимо и достаточно, чтобы $XY^{-1} \in \mathfrak{G}^+$. Действительно, из $X \geqslant Y$ следует

$$XY^{-1} \geqslant YY^{-1} = E_{\mathfrak{G}}.$$

В свою очередь, из $XY^{-1} \geqslant E_{\mathfrak{G}}$ следует

$$X = XY^{-1}Y \geqslant E_{\mathfrak{G}} Y = Y.$$

Таким образом, задание отношения частичной упорядоченности в группе равносильно выделению в ней некоторой подполугруппы. Благодаря этому выяснение вопроса о том, какие подполугруппы группы могут служить ее положительными частями при тех или иных двусторонне стабильных отношениях частичной упорядоченности, оказывается равносильным определению всех возможных двусторонне стабильных отношений частичной упорядоченности в группе. Таким

образом, вопрос о превращении группы в частично упорядоченную путем введения в ней того или иного отношения частичной упорядоченности может быть отнесен к области изучения подполугрупп группы.

3.7. *Теорема.* *Для того чтобы подполугруппа $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$ являлась положительной частью частично упорядоченной группы, получаемой из $\mathfrak{G}$ путем введения в ней каким-либо образом двусторонне стабильного отношения частичной упорядоченности, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ являлась полугруппой с внешне присоединенной единицей и чтобы для любого $X \in \mathfrak{G}$ имело место*

$$X^{-1}\mathfrak{A}X = \mathfrak{A}.$$

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{A}$ является положительной частью $\mathfrak{G}$ при некоторой частичной упорядоченности, то $\mathfrak{A} \ni E_{\mathfrak{G}}$ и $E_{\mathfrak{G}}$, конечно, является в $\mathfrak{A}$ единицей. Если при этом для некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$

$$XY = E_{\mathfrak{G}},$$

то благодаря $X \geqslant E_{\mathfrak{G}}$ имеем

$$E_{\mathfrak{G}} = XY \geqslant E_{\mathfrak{G}}Y = Y,$$

а так как $Y \geqslant E_{\mathfrak{G}}$, то оказывается $Y = E_{\mathfrak{G}}$. Благодаря этому также и $X = E_{\mathfrak{G}}$.

Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ из $A \geqslant E_{\mathfrak{G}}$ получаем при любом $X \in \mathfrak{G}$

$$X^{-1}AX \geqslant X^{-1}E_{\mathfrak{G}}X = E_{\mathfrak{G}},$$

откуда следует

$$X^{-1}\mathfrak{A}X \subset \mathfrak{A}.$$

Но

$$\mathfrak{A} = E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}E_{\mathfrak{G}} = X^{-1}\left(X\mathfrak{A}X^{-1}\right)X \subset X^{-1}\mathfrak{A}X.$$

Поэтому $X^{-1}\mathfrak{A}X = \mathfrak{A}$.

2) Если подполугруппа $\mathfrak{A}$ обладает указанными в формулировке теоремы свойствами, то ее единицей является $E_{\mathfrak{G}}$, так как это единственный идемпотент в $\mathfrak{G}$. Полагаем $X \geqslant Y$, если $XY^{-1} \in \mathfrak{A}$. Для такого отношения имеем

$$X \geqslant X,$$

так как $XX^{-1} = E_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{A}$

Если

$$X \geqslant Y, \quad Y \geqslant Z,$$

то

$$XZ^{-1} = XY^{-1} \cdot YZ^{-1} \in \mathfrak{A},$$

т. е. $X \geqslant Z$.

Если $X \geqslant Y$ и $Y \geqslant X$, то XY^{-1}, $YX^{-1} \in \mathfrak{A}$, и так как

$$(XY^{-1}) \cdot (YX^{-1}) = E_{\mathfrak{G}},$$

а единица $E_{\mathfrak{G}}$ является в $\mathfrak{A}$ присоединенной внешним образом, то должно быть $XY^{-1} = YX^{-1} = E_{\mathfrak{G}}$, т. е, $X = Y$.

Наконец, для $A \geqslant B$ при любых X, $Y \in \mathfrak{G}$ (которые могут быть также и пустыми символами) имеем

$$XAY \cdot (XBY)^{-1} = XAYY^{-1}B^{-1}X^{-1} = X(AB^{-1})X^{-1} \subset$$
$$\subset X\mathfrak{A}X^{-1} = \mathfrak{A},$$

т. е. $XAY \geqslant XBY$.

3.8. В частично упорядоченной группе $\mathfrak{G}$ можно также определить ее отрицательную часть $\mathfrak{G}^-$ как множество всех элементов X, таких, что $X \leqslant E_{\mathfrak{G}}$.

Для того чтобы элемент X принадлежал $\mathfrak{G}^-$, необходимо и достаточно, чтобы $X^{-1} \in \mathfrak{G}^+$.

Действительно, если $X \leqslant E_{\mathfrak{G}}$, то

$$E_{\mathfrak{G}} = XX^{-1} \leqslant E_{\mathfrak{G}}X^{-1} = X^{-1}.$$

С другой стороны, если $X^{-1} \geqslant E_{\mathfrak{G}}$, то

$$E_{\mathfrak{G}} = XX^{-1} \geqslant XE_{\mathfrak{G}} = X.$$

Отображение группы на себя, сопоставляющее каждому элементу его обратный, является антиавтоморфизмом группы. Этот антиавтоморфизм индуцирует антиизоморфизм между положительной частью и отрицательной частью частично упорядоченной группы.

3.9. В частично упорядоченной группе $\mathfrak{G}$, очевидно, лишь единица принадлежит одновременно и положительной и отрицательной части группы. Поэтому в линейно упорядоченной группе все ее неединичные элементы должны иметь бесконечные порядки. Действительно, при $X^n = E_{\mathfrak{G}}$ $(n > 1)$

имеем $X^{-1}=X^{n-1}$, что невозможно, ибо при $X\in\mathfrak{G}^+$, благодаря 3.6, $X^{n-1}\in\mathfrak{G}^+$; X^{-1}, благодаря 3.8, принадлежат $\mathfrak{G}^-$, а $\mathfrak{G}^+\cap\mathfrak{G}^-=E_{\mathfrak{G}}$. Аналогичны рассуждения и при $X\in\mathfrak{G}^-$.

3.10. Более подробно остановимся на линейно упорядоченных группах. Как следует из приведенных ниже теорем, принадлежащих А. М. Кауфману [2], при их рассмотрении удобно пользоваться понятием голоидной полугруппы (VII, 4.8).

Теорема. *Положительная часть $\mathfrak{G}^+$ линейно упорядоченной группы $\mathfrak{G}$ является голоидной полугруппой, причем для $X, Y\in\mathfrak{G}^+$ $(X\neq Y)$ соотношение $X>Y$ в $\mathfrak{G}$ имеет место тогда и только тогда, когда* в $\mathfrak{G}^+$ *X делится на Y и слева и справа.*

Доказательство. Пусть $X,Y\in\mathfrak{G}^+$ $(X\neq Y)$. Должно иметь место или $X>Y$, или $Y>X$. Пусть справедливо первое. Тогда, согласно 3.6, $XY^{-1}\in\mathfrak{G}^+$ и, согласно 3.7, $Y^{-1}X=$ $=Y^{-1}(XY^{-1})Y\in\mathfrak{G}^+$. Отсюда следует, что X делится на Y в $\mathfrak{G}^+$ и слева и справа:

$$X=Y\cdot(Y^{-1}X),\quad X=(XY^{-1})\cdot Y.$$

Что касается Y, то он не может делиться на X ни слева ни справа. Действительно, из $Y=XS$, $S\in\mathfrak{G}^+$, следовало бы $X^{-1}Y=S\in\mathfrak{G}^+$ и, согласно 3.7, $YX^{-1}=X(X^{-1}Y)X^{-1}\in\mathfrak{G}^+$. Но это невозможно, ибо $YX^{-1}=(XY^{-1})^{-1}$, и потому, согласно 3.8, $YX^{-1}\in\mathfrak{G}^-$.

Так как линейная упорядоченность в $\mathfrak{G}$ индуцирует и в $\mathfrak{G}^+$ линейную упорядоченность, то из доказанного совпадения частичных упорядоченностей в $\mathfrak{G}^+$ следует справедливость теоремы.

3.11. В связи со сказанным выше естественно формулируется критерий возможности введения в группе двусторонне стабильного отношения линейной упорядоченности.

Теорема. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ путем определения в ней двусторонне стабильного отношения линейной упорядоченности могла быть превращена в линейно упорядоченную группу, необходимо и достаточно, чтобы она являлась объединением двух своих подполугрупп, являющихся голоидными полугруппами, такими, что их пересечение равно $E_{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. 1) Если $\mathfrak{G}$ есть линейно упорядоченная группа, то

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^+ \cup \mathfrak{G}^-, \quad \mathfrak{G}^+ \cap \mathfrak{G}^- = E_{\mathfrak{G}}.$$

$\mathfrak{G}^+$ является голоидной полугруппой, согласно 3.10. Полугруппа $\mathfrak{G}^-$, согласно 3.8, антиизоморфна $\mathfrak{G}^+$ и потому, очевидно, также является голоидной.

2) Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = E_{\mathfrak{G}},$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ голоидные подполугруппы $\mathfrak{G}$.

Отметим, что из двух элементов X и X^{-1} один всегда принадлежит $\mathfrak{A}$, а другой $\mathfrak{A}'$.

Действительно, пусть $X, X^{-1} \in \mathfrak{A}$ (случай $X, X^{-1} \in \mathfrak{A}'$ совершенно аналогичен). Так как

$$X = E_{\mathfrak{G}} X E_{\mathfrak{G}}, \quad E_{\mathfrak{G}} = XX^{-1} = X^{-1}X,$$

то X предшествует $E_{\mathfrak{G}}$, а $E_{\mathfrak{G}}$ предшествует X в $\mathfrak{A}$. Следовательно, $X = E_{\mathfrak{G}}$, а в этом случае $E_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{A}$, $E_{\mathfrak{G}}^{-1} = E_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{A}'$,

Введем в $\mathfrak{G}$ отношение частичной упорядоченности, полагая $X \geqslant Y$, если $XY^{-1} \in \mathfrak{A}$. Для любых $X, Y \in \mathfrak{G}$ один из двух элементов XY^{-1} и $(XY^{-1})^{-1} = YX^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{A}$. Поэтому или $X \geqslant Y$, или $Y \geqslant X$. При этом оба соотношения выполняются одновременно лишь тогда, когда $XY^{-1} = E_{\mathfrak{G}}$, т. е. $X = Y$.

Пусть $X \geqslant Y$ и $Y \geqslant Z$, т. е. $XY^{-1}, YZ^{-1} \in \mathfrak{A}$. Тогда имеем

$$XZ^{-1} = XY^{-1} \cdot YZ^{-1} \in \mathfrak{A},$$

т. е. $X \geqslant Z$.

Таким образом, определенное нами отношение является отношением линейной упорядоченности.

Остается доказать, что это отношение двусторонне стабильно.

Если $X \geqslant Y$, то при любом $Z \in \mathfrak{G}$

$$(XZ)(YZ)^{-1} = XZ \cdot Z^{-1}Y^{-1} = XY^{-1} \in \mathfrak{A},$$

т. е. $XZ \geqslant YZ$.

Для доказательства стабильности слева предварительно покажем, что условие (α) $XY^{-1}\in\mathfrak{A}$ равносильно условию (β) $Y^{-1}X\in\mathfrak{A}$.

Действительно, если X, $Y\in\mathfrak{A}$, то (α) означает, что X в $\mathfrak{A}$ делится на Y справа, а (β) означает, что X делится на Y слева. Согласно 3.3, одно влечет за собой другое.

Если X, $Y\in\mathfrak{A}'$, то X^{-1}, $Y^{-1}\in\mathfrak{A}$. Условие (α) означает, что Y^{-1} в $\mathfrak{A}$ делится на X^{-1} слева, а (β) означает, что Y^{-1} делится на X^{-1} справа. Опять по 3.3 одно влечет за собой другое.

Если $X\in\mathfrak{A}$ и $Y\in\mathfrak{A}'$, т. е. $Y^{-1}\in\mathfrak{A}$, то и (α) и (β) обязательно выполняются.

Если $X\in\mathfrak{A}'$ и $Y\in\mathfrak{A}$, то ни (α), ни (β) не выполнены, за исключением случая $X=Y=E_{\mathfrak{G}}$.

Пусть теперь $X\geqslant Y$. По определению $XY^{-1}\in\mathfrak{A}$, а потому, согласно доказанному, $Y^{-1}X\in\mathfrak{A}$. При любом $Z\in\mathfrak{G}$ имеем

$$(ZY)^{-1}(ZX)=Y^{-1}Z^{-1}ZX=Y^{-1}X\in\mathfrak{A},$$

что ввиду доказанного равносильно

$$(ZX)(ZY)^{-1}\in\mathfrak{A},$$

т. е. $ZX\geqslant ZY$.

3.12. В процессе рассуждений второй части доказательства теоремы мы показали, что в $\mathfrak{G}$ можно так ввести линейную упорядоченность, что $\mathfrak{A}$ будет положительной частью и $\mathfrak{A}'$ — отрицательной частью получившейся линейно упорядоченной группы. Отсюда благодаря 3.8 вытекает следующее. Если группа $\mathfrak{G}$ является объединением двух своих подполугрупп, являющихся голоидными полугруппами, пересечение которых равно $E_{\mathfrak{G}}$, то эти голоидные полугруппы обязательно антиизоморфны.

Представление $\mathfrak{G}$ в виде указанного объединения двух ее голоидных подполугрупп может быть превращено в разбиение $\mathfrak{G}$, поскольку единица $E_{\mathfrak{G}}$, согласно 3.3, может быть выделена в качестве третьей компоненты.

3.13. Как мы видели, положительная часть линейно упорядоченной группы является голоидной полугруппой с двусторонним сокращением, обладающей единицей. Оказывается, что наличие этих свойств у полугруппы также достаточно,

чтобы она являлась положительной частью некоторой линейно упорядоченной группы.

Теорема. *Если* $\mathfrak{A}$ *есть голоидная полугруппа с двусторонним сокращением, обладающая единицей, то существует такая линейно упорядоченная группа* $\mathfrak{G}$, *для которой* $\mathfrak{A}$ *будет ее положительной частью.*

Доказательство. Возьмем полугруппу $\mathfrak{A}'$, антиизоморфную с $\mathfrak{A}$ и не имеющую с ней других общих элементов, кроме общей единицы $E = E_{\mathfrak{A}} = E_{\mathfrak{A}'}$. Очевидно, $\mathfrak{A}'$ также будет голоидной полугруппой с двусторонним сокращением. Элемент из $\mathfrak{A}'$, соответствующий элементу $X \in \mathfrak{A}$ при некотором фиксированном на все время рассуждения антиизоморфизме $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, будем обозначать через X'.

В множестве $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ определим умножение. Если некоторые два элемента из $\mathfrak{G}$ оба принадлежат $\mathfrak{A}$ или оба принадлежат $\mathfrak{A}'$, то их произведение определяется согласно действию в этих полугруппах.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $B' \in \mathfrak{A}'$. Если A предшествует B в голоидной полугруппе $\mathfrak{A}$, т. е. при некоторых X, $Y \in \mathfrak{A}$,

$$B = AX, \quad B = YA,$$

то полагаем
$$AB' = A \cdot (YA)' = A \cdot (A'Y') = Y',$$
$$B'A = (AX)' \cdot A = (X'A') \cdot A = X'.$$

В связи с этим следует отметить, что X и Y определяются однозначно, так как $\mathfrak{A}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением. Если $A = B$, то $X = Y = E$. В дальнейшем также следует иметь в виду лемму 3.3, согласно которой, для того, чтобы A предшествовал B, достаточно, чтобы B делился на A слева или справа.

Если B предшествует A, т. е. при некоторых U, $V \in \mathfrak{A}$

$$A = BU, \quad A = VB,$$

то полагаем
$$A \cdot B' = (VB) \cdot B' = V,$$
$$B' \cdot A = B' \cdot (BU) = U.$$

Докажем ассоциативность такого умножения.
Пусть G_1, G_2, $G_3 \in \mathfrak{G}$. Обозначим

$$S_1 = (G_1G_2)\,G_3, \quad S_2 = G_1\,(G_2G_3).$$

Если G_1, G_2, G_3 все три принадлежат одновременно $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}'$, то $S_1 = S_2$ благодаря ассоциативности действия в $\mathfrak{A}$

и $\mathfrak{A}'$. Пусть G_1, $G_2 \in \mathfrak{A}$; $G_3 = H' \in \mathfrak{A}'$, причем G_2 в $\mathfrak{A}$ делится справа на H: $G_2 = XH$ $(X \in \mathfrak{A})$. Тогда

$$S_1 = (G_1 XH) \cdot H' = G_1 X,$$
$$S_2 = G_1 [(XH) \cdot H'] = G_1 X.$$

Пусть $G_1 \in \mathfrak{A}$ $G_2 \in \mathfrak{A}$, $G_3 = H' \in \mathfrak{A}'$, причем H в $\mathfrak{A}$ делится справа на G_2: $H = XG_2$ $(X \in \mathfrak{A})$. Если G_1 делится справа на X, т. е. $G_1 = UX$, то

$$S_1 = (G_1 G_2) \cdot (XG_2)' = (U \cdot XG_2) \cdot (XG_2)' = U,$$
$$S_2 = G_1 \cdot (G_2 \cdot G_2' X') = UX \cdot X' = U.$$

Если X делится справа на G_1, т. е. $X = VG_1$, то

$$S_1 = (G_1 G_2) \cdot (XG_2)' = G_1 G_2 \cdot (V \cdot G_1 G_2)' =$$
$$= (G_1 G_2) [(G_1 G_2)' \cdot V'] = V',$$
$$S_2 = G_1 [G_2 \cdot (XG_2)'] = G_1 \cdot [G_2 \cdot (G_2' X')] =$$
$$= G_1 X' = G_1 (G_1' V') = V'.$$

Случай $G_1 \in \mathfrak{A}'$, $G_2 \in \mathfrak{A}$, $G_3 \in \mathfrak{A}$ совершенно аналогичен.

Пусть $G_1 \in \mathfrak{A}$, $G_3 \in \mathfrak{A}$ и $G_2 = H' \in \mathfrak{A}'$, причем G_1 делится в $\mathfrak{A}$ справа на H: $G_1 = XH$ $(X \in \mathfrak{A})$. Тогда, делится ли слева G_3 на H или H на G_3, в обоих случаях, как нетрудно убедиться,

$$S_1 = (XH \cdot H') G_3 = XG_3,$$
$$S_2 = (XH) \cdot (H' G_3) = XG_3.$$

Пусть $G_1 \in \mathfrak{A}$, $G_3 \in \mathfrak{A}$ и $G_2 = H' \in \mathfrak{A}'$, причем H делится в $\mathfrak{A}$ справа на G_1: $H = XG_1$ $(X \in \mathfrak{A})$ и $X = G_3 Y$ $(Y \in \mathfrak{A})$. Тогда

$$S_1 = [G_1 \cdot (XG_1)'] G_3 = X' G_3 = Y',$$
$$S_2 = G_1 [(XG_1)' \cdot G_3] = G_1 \cdot [(G_1' X') \cdot G_3] = G_1 \cdot (G_1' Y') = Y'.$$

Пусть $G_1 \in \mathfrak{A}$, $G_3 \in \mathfrak{A}$ и $G_2 = H' \in \mathfrak{A}'$, причем H в $\mathfrak{A}$ делится справа на G_1: $H = XG_1$ $(X \in \mathfrak{A})$ и $G_3 = XY$ $(Y \in \mathfrak{A})$. Тогда, делится ли слева Y на G_1 или G_1 на Y, в обоих случаях, как нетрудно убедиться,

$$S_1 = [G_1 \cdot (XG_1)'] \cdot (XY) = X' \cdot (XY) = Y,$$
$$S_2 = G_1 \cdot [(XG_1)' \cdot (XY)] = G_1 [(G_1' X') \cdot (XY)] = Y.$$

Случаи, когда два из множителей G_1, G_2, G_3 принадлежат $\mathfrak{A}'$, а один $\mathfrak{A}$, можно не рассматривать ввиду того, что подполугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ в мультипликативном множестве $\mathfrak{G}$ играют совершенно равноправную роль.

Мы убедились, что $\mathfrak{G}$ есть полугруппа. Элемент E, очевидно, является единицей $\mathfrak{G}$. Элементы X и X' (где $X \in \mathfrak{A}$, $X' \in \mathfrak{A}'$) являются обратными друг для друга. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ есть группа. Она является объединением двух своих подполугрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, являющихся голоидными полугруппами, причем $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = E$. Согласно 3.11, отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ может быть превращена в линейно упорядоченную группу путем введения в $\mathfrak{G}$ некоторого отношения частичной упорядоченности. Как было отмечено в 3.12, это можно сделать так, чтобы голоидная подполугруппа $\mathfrak{A}$ являлась положительной частью линейно упорядоченной полугруппы $\mathfrak{G}$.

3.14. Отметим, что результат теоремы 3.13 представляет интерес также и с точки зрения, лежащей в основе исследований предыдущего параграфа. Условие двустороннего сокращения оказывается не только необходимым, но и достаточным для вложимости в группу еще для одного класса полугрупп, именно для голоидных полугрупп, обладающих единицей.

3.15. В заключение отметим, что далеко не все типы упорядоченности возможны в голоидных полугруппах, являющихся положительными частями тех или иных линейно упорядоченных полугрупп. Например, из приведенной ниже теоремы следует, что единственный возможный нетривиальный тип полной упорядоченности это есть тип упорядочения по величине множества всех натуральных чисел.

Теорема. *Если все элементы положительной части $\mathfrak{G}^+$ линейно упорядоченной группы $\mathfrak{G}$ вполне упорядочены относительно отношения линейной упорядоченности в голоидной полугруппе, то $\mathfrak{G}$ есть единичная группа или бесконечная циклическая группа.*

Доказательство. Первым элементом в $\mathfrak{G}^+$, очевидно, является $E_{\mathfrak{G}}$. Если $\mathfrak{G} \neq E_{\mathfrak{G}}$, то, согласно 3.8, и $\mathfrak{G}^+ \neq E_{\mathfrak{G}}$. Пусть X есть следующий за $E_{\mathfrak{G}}$ элемент в $\mathfrak{G}^+$. Обозначим $\mathfrak{G}' = [E_{\mathfrak{G}}, X]$. Предположим, что $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{G}^+$. Обозначим через Y элемент из $\mathfrak{G}^+ \setminus \mathfrak{G}'$, предшествующий всем элементам из $\mathfrak{G}^+ \setminus \mathfrak{G}'$. Так как Y следует за X, то при не-

котором $U \in \mathfrak{G}^+$

$$Y = XU,$$

$U \in \mathfrak{G}'$, так как иначе $Y \in \mathfrak{G}'$. Поэтому при некотором $V \in \mathfrak{G}^+$

$$U = VY.$$

Мы получаем $Y = XVY$, т. е. $XV = E_{\mathfrak{G}}$, но это благодаря 3.3 означало бы, что в $\mathfrak{G}^+$ элемент X предшествует $E_{\mathfrak{G}}$, что невозможно, ибо $E_{\mathfrak{G}}$ есть первый элемент. Противоречие, к которому мы пришли, означает, что на самом деле

$$\mathfrak{G}^+ = [E_{\mathfrak{G}}, X] = \{E_{\mathfrak{G}}, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}.$$

Согласно 3.8, отсюда следует

$$\mathfrak{G}^- = \{E_{\mathfrak{G}}, X^{-1}, X^{-2}, \ldots, X^{-n}, \ldots\}$$

и потому, согласно 3.9, $\mathfrak{G}$ есть бесконечная циклическая группа.

§ 4. Потенциальная обратимость элементов

4.1. При рассмотрении свойств обратимости элементов нередко случается, что элемент A некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$ не является обратимым слева в $\mathfrak{A}$ (VI, 1.1), но существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, что A является обратимым слева элементом полугруппы $\mathfrak{A}'$. Таким образом, погружение полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ превращает элемент A из необратимого слева в обратимый слева. Ввиду значительной важности свойства обратимости вопрос о том, когда указанная возможность имеет место, заслуживает внимания.

Определение. *Элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ называется потенциально обратимым слева, если существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A является обратимым слева элементом.*

Аналогично обстоит дело с обратимостью справа.

4.2. Понятие и термин потенциального выполнения тех или иных свойств в полугруппах принадлежат Е. С. Ляпину. Можно говорить о различных потенциальных свойствах отдельных элементов или подмножеств полугрупп, понимая под этим выполнение этих свойств для данного элемента или подмножества в некоторой надполугруппе данной полугруппы. Э. Г. Шутовым [1], [2], [3], [4] был рассмотрен вопрос о потенциальном выполнении ряда свойств в полугруппах. В ча-

стности, им был доведен до конца, а затем и обобщен вопрос о потенциальной обратимости, изучение которого было начато Е. С. Ляпиным. Вопрос этот по постановке имеет определенное сходство с вопросами о возможности деления двух элементов в некоторой надполугруппе, рассмотренными в 1.6 и 1.7. Однако метод решения его оказывается более сложным.

4.3. Отметим следующее свойство обратимости. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторое порождающее множество полугруппы $\mathfrak{A}$ и $A \in \mathfrak{A}$. Если для любого $K \in \mathfrak{K}$ в $\mathfrak{A}$ найдется такой $Z_K \in \mathfrak{A}$, что $Z_K A = K$, то элемент A является обратимым слева. Действительно, произвольный элемент S полугруппы $\mathfrak{A}$ может быть представлен в виде

$$S = K_1 K_2 \ldots K_n \qquad (K_1, K_2, \ldots, K_n \in \mathfrak{K}).$$

И мы имеем

$$(K_1 K_2 \ldots K_{n-1} Z_{K_n}) \cdot A = K_1 K_2 \ldots K_{n-1} K_n = S.$$

4.4. Пусть элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ является потенциально обратимым слева. В некоторой надполугруппе $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$ он обратим слева. Если при некотором натуральном n для некоторых X и Y, являющихся элементами $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, имеет место $A^n X = A^n Y$, то для любого $S \in \mathfrak{A}$ выполняется $SX = SY$. Действительно, в $\mathfrak{A}'$ должны найтись такие элементы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}, Z_n$, что

$$Z_1 A = S, \quad Z_2 A = Z_1, \ldots, Z_n A = Z_{n-1}.$$

Поэтому

$$Z_n A^n X = Z_{n-1} A^{n-1} X = \ldots = Z_2 A^2 X = Z_1 A X = SX,$$

$$Z_n A^n Y = Z_{n-1} A^{n-1} Y = \ldots = Z_2 A^2 Y = Z_1 A Y = SY,$$

$$SX = Z_n A^n X = Z_n A^n Y = SY.$$

4.5. В связи с 4.4. отметим, что если в полугруппе $\mathfrak{A}$ для некоторого $A \in \mathfrak{A}$ из $A^2 X = A^2 Y$ всегда следует $SX = SY$ при любом $S \in \mathfrak{A}$, то и при любом натуральном n из $A^n X = A^n Y$ всегда следует $SX = SY$ для всякого $S \in \mathfrak{A}$.

Действительно, если $AX = AY$, то и $A^2 X = A^2 Y$ и потому $SX = SY$. Если $n > 2$, то из $A^n X = A^n Y$ следует $A^2(A^{n-2} X) = A^2(A^{n-2} Y)$, а потому и $A(A^{n-2} X) = A(A^{n-2} Y)$, т. е.

$A^{n-1}X = A^{n-1}Y$. Повторяя рассуждение, получаем $A^2X = A^2Y$, откуда, по условию, получаем $SX = SY$.

4.6. В случае, когда элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ имеет конечный тип, сразу видно, что указанное необходимое условие потенциальной обратимости слева для A является и достаточным. Более того, соблюдение этого условия в рассматриваемом случае просто означает, что A обратим слева в $\mathfrak{A}$.

Действительно, пусть A удовлетворяет условию 4.4. и

$$A^{h+d} = A^h.$$

Из $A^h \cdot A^d = A^h$ следует, что для любого $S \in \mathfrak{A}$ имеет место $SA^d = S$. Таким образом,

$$(SA^{d-1}) \cdot A = S,$$

т. е. A обратим слева в $\mathfrak{A}$.

Отметим также, что в этом случае $h = 1$, т. е. $[A]$ является группой. Действительно, благодаря VI, 1.8 при некотором $X \in \mathfrak{A}$ $XA^h = A$. Поэтому из $A^{h+d} = A^h$, умножая на X, получаем $A^{1+d} = A$, откуда следует, что $h = 1$.

4.7. Пусть A есть такой элемент полугруппы $\mathfrak{A}$, что при любом натуральном n и любых X, Y, $S \in \mathfrak{A}$ из $A^nX = A^nY$ всегда следует $SX = SY$. Рассмотрим пары, у которых первая компонента есть произвольный элемент S полугруппы $\mathfrak{A}$, а вторая — произвольное целое неотрицательное число k. Такую пару будем обозначать через $S^{(k)}$. Совокупность всех таких пар обозначим через $\mathfrak{K}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех таких слов в $\mathfrak{K}$

$$W = S_1^{(k_1)} S_2^{(k_2)} \dots S_s^{(k_s)},$$

у которых никакие два соседних k_i и k_{i+1} не могут одновременно равняться нулю. В $\mathfrak{B}$ определяем умножение, полагая

$$W_1 \cdot W_2 = W_3 \qquad (W_1, W_2, W_3 \in \mathfrak{B}),$$

$$W_i = S_{1i}^{(k_{1i})} S_{2i}^{(k_{2i})} \dots S_{s_i i}^{(k_{s_i i})} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где W_3 есть обычное произведение слов W_1 и W_2, если $k_{s_1 1} \neq 0$, или $k_{12} \neq 0$. Если же $k_{s_1 1} = k_{12} = 0$, то W_3 получается из такого произведения заменой соседних членов $S_{s_1 1}^{(0)}$

и $S_{12}^{(0)}$ элементом $(S_{s_i1} \cdot S_{12})^{(0)}$ (где $S_{s_i1} \cdot S_{12}$ есть произведение в $\mathfrak{A}$ элементов S_{s_i1} и S_{12}).

Ассоциативность указанного действия в $\mathfrak{B}$ очевидна.

4.8. В $\mathfrak{B}$ определим нижеследующие отношения.

$$W \sim W' (\mathfrak{n}_1) \qquad (W,\ W' \in \mathfrak{B}),$$

если

$$W = S_1^{(k)} S_2^{(0)},\ AS_2 = A^{k+1} R,\ W' = (S_1 \cdot R)^{(0)}\ (S_1,\ S_2,\ R \in \mathfrak{A}),$$

где $k_i > 0$, а R может быть также и пустым символом.

$$W \sim W' (\mathfrak{n}_2),$$

если

$$W = S_1^{(k)} S_2^{(0)},\quad AS_2 = A^l R,\quad W' = S_1^{(k-l+1)} R^{(0)},\quad (k \geqslant l > 1),$$

где R опять может быть и пустым символом.

Если имеет место $W \sim W' (\mathfrak{n}_1)$ или $W' \sim W (\mathfrak{n}_1)$, или $W \sim W' (\mathfrak{n}_2)$, или $W' \sim W (\mathfrak{n}_2)$, или $W = W'$, то будем писать

$$W \sim W' (\mathfrak{n}_3).$$

Отметим, что из $W \sim W' (\mathfrak{n}_i)$ при любом $S \in \mathfrak{A}$ вытекает $WS^{(0)} \sim M'S^{(0)} (\mathfrak{n}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

4.9. Для слов из $\mathfrak{B}$ определим оператор σ. Пусть

$$W = S_1^{(k_1)} S_2^{(k_2)} \ldots S_m^{(k_m)} \in \mathfrak{B}$$

и $S_t^{(k_t)}$ самый правый из элементов этого слова, таких, что $t < m$, $k_{t+1} = 0$, и существует такой R, являющийся элементом $\mathfrak{A}$ или пустым символом, что $AS_{t+1} = A^{k_t+1} R$. Тогда $\sigma (W)$ получается из W заменой $S_t^{(k_t)} S_{t+1}^{(0)}$ на $(S_t R)^{(0)}$ (если при этом $k_{t-1} = 0$, то $S_{t-1}^{(0)}$ также присоединяется к этим элементам: $(S_{t-1} S_t R)^{(0)}$). Если в W не существует элемента $S_t^{(k_t)}$ с указанным свойством, то полагаем $\sigma (W) = W$.

Отметим, что оператор σ однозначен. Действительно, если $AS_{t+1} = A^{k_t+1} R = A^{k_t+1} R'$, то, по предположению относительно A, имеет место $XR = XR'$ при любом $X \in \mathfrak{A}$ и, в частности, $S_t R = S_t R'$.

Очевидно, $W \sim \sigma (W) (\mathfrak{n}_1')$, где $\mathfrak{n}_1'$ первое производное отношение для $\mathfrak{n}_1$ (I, 5.20). Для $X \in \mathfrak{A}$ всегда $\sigma (X^{(0)}) = X^{(0)}$.

4.10. Продолжая сохранять введенные обозначения, рассмотрим несколько свойств отношения $\mathfrak{n}_3$.

Лемма. *Если* $W \sim W' (\mathfrak{n}_3')$, *то* $\sigma(W) \sim \sigma(W') (\mathfrak{n}_3')$.

Доказательство. Пусть

$$W = T_1 \cdot U \cdot T_2, \quad W' = T_1 \cdot U' \cdot T_2,$$

где $U \sim U' (\mathfrak{n}_i)$ $(i = 1, 2)$ (случай $W = W'$ тривиален, а случаи $U' \sim U (\mathfrak{n}_i)$ симметричны рассматриваемым). Благодаря сказанному в конце 4.8, можно считать, что в слове T_2 у первого множителя $S^{(p)}$ имеем $p \neq 0$.

Если $\sigma(T_2) \neq T_2$, то, очевидно,

$$\sigma(W) = T_1 \cdot U \cdot \sigma(T_2), \quad \sigma(W') = T_1 \cdot U' \cdot \sigma(T_2)$$

и потому $\sigma(W) \sim \sigma(W') (\mathfrak{n}_i')$.

В дальнейшем будем считать, что $\sigma(T_2) = T_2$.

Если $U \sim U' (\mathfrak{n}_1)$, то, как легко убедиться, $\sigma(W) = T_1 \cdot \sigma(U) \cdot T_2$, т. е. $\sigma(W) = W'$ (ибо $\sigma(U) = U'$). А так как $W' \sim \sigma(W') (\mathfrak{n}_1')$, то $\sigma(W) \sim \sigma(W') (\mathfrak{n}_1')$.

Пусть $U \sim U' (\mathfrak{n}_2)$.

$$U = S_1^{(k)} S_2^{(0)}, \quad AS_2 = A^l R, \quad U' = S_1^{(k-l+1)} R^{(0)}, \qquad (k \geqslant l > 1).$$

Если при некотором P, являющемся элементом из $\mathfrak{A}$ или пустым символом, $AS_2 = A^{k+1} P$, то $\sigma(W) = T_1 \cdot (S_1 P)^{(0)} \cdot T_2$. С другой стороны, из $A^l R = A^{k+1} P$ следует $AR = A^{k-l+2} P$. Поэтому

$$\sigma(W') = T_1 \cdot (S_1 P)^{(0)} \cdot T_2 = \sigma(W).$$

Если не существует элемента P с указанным свойством, то нет и такого P', чтобы $AR = A^{k-l+2} P'$. Поэтому

$$\sigma(W) = \sigma(T_1) \cdot U \cdot T_2, \quad \sigma(W') = \sigma(T_1) \cdot U' \cdot T_2.$$

4.11. ***Лемма.*** *Если* $X^{(0)} \sim Y^{(0)} (\mathfrak{n}_3'')$ $(X, Y \in \mathfrak{A})$, то $X = Y$.

Доказательство. По определению второго производного отношения найдутся слова $V_1, V_2, \ldots, V_s \in \mathfrak{B}$, такие, что

$$X^{(0)} = V_1, \quad Y^{(0)} = V_s, \quad V_i \sim V_{i+1} (\mathfrak{n}_3') \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Доказательство нашего утверждения ведем по индукции относительно s. При $s=1$ оно тривиально.

Пусть $s>1$. Можно считать $V_2 \neq V_1$. Согласно 4.9 и 4.10,

$$X^{(0)}=\sigma\left(X^{(0)}\right)=\sigma(V_1),\ Y^{(0)}=\sigma\left(Y^{(0)}\right)=\sigma(V_s),$$
$$\sigma(V_i)\sim\sigma(V_{i+1})\left(\mathfrak{n}_3'\right).$$

Так как $V_2\sim X^{(0)}\left(\mathfrak{n}_3'\right)$, то, очевидно, $V_2\sim V_1\left(\mathfrak{n}_1'\right)$:

$$V_2=S_1^{(0)}S_2^{(k)}S_3^{(0)},\ AS_3=A^{k+1}R,\ V_1=X^{(0)},$$
$$S_1S_2R=X$$

и потому $\sigma(V_2)=(S_1S_2R)^{(0)}=X^{(0)}$.

Используя индуктивное предположение для цепочки $X^{(0)}=\sigma(V_2),\ \sigma(V_3),\ \ldots,\ \sigma(V_{s-1}),\ \sigma(V_s)=Y^{(0)}$ заключаем: $X=Y$.

4.12. *Теорема.* *Для того чтобы элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ был потенциально обратим слева* (4.1), *необходимо и достаточно, чтобы при любых X и Y, являющихся элементами из $\mathfrak{A}$ или пустыми символами, из $A^2X=A^2Y$ всегда следовало бы $SX=SY$, где S любой элемент из $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Необходимость указанного условия была показана в 4.4.

Докажем (принимая во внимание 4.5) достаточность приведенного условия. Строим полугруппу $\mathfrak{B}$ (4.7), рассматривая ее как надполугруппу полугруппы $\mathfrak{A}$ (для чего отождествляем $S^{(0)}$ с S для каждого $S\in\mathfrak{A}$). Рассмотрим факторполугруппу $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}/\mathfrak{n}_3''$. В этой полугруппе, благодаря 4.3, элемент $\overline{A}$ (т. е. класс слов из $\mathfrak{B}$, эквивалентных с A относительно $\mathfrak{n}_3''$) обратим слева, ибо для всякого $S^{(k)}$ мы имеем

$$S^{(k+1)}A\sim S^{(k)}\left(\mathfrak{n}_3''\right)$$

и потому в $\mathfrak{B}$

$$\overline{S^{(k+1)}}\cdot\overline{A}=\overline{S^{(k)}}.$$

Рассмотрим естественный гомоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}/\mathfrak{n}_3''$. Для $\mathfrak{A}$, являющейся подполугруппой $\mathfrak{B}$, отображение φ осуществляет изоморфизм, ибо, согласно 4.11, при $S\neq R$ ($S,\ R\in\mathfrak{A}$) мы имеем $S^{(0)}\not\sim R^{(0)}\left(\mathfrak{n}_3''\right)$, т. е. $\overline{S^{(0)}}\neq\overline{R^{(0)}}$. При этом $\varphi(A)=\overline{A}$. Заменив в $\mathfrak{B}$ элементы из $\varphi(\mathfrak{A})$ на соответ-

ствующие элементы из $\mathfrak{A}$, мы получаем надполугруппу полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A будет обратимым слева элементом.

4.13. Наравне со свойствами потенциальной левой обратимости и потенциальной правой обратимости элементов естественно рассматривать и потенциальную двустороннюю обратимость. Очевидно, элемент, потенциально двусторонне обратимый, является и потенциально обратимым слева и потенциально обратимым справа. Однако выполнение этих необходимых условий, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы элемент был потенциально двусторонне обратим. Ниже мы приведем пример одной полугруппы, построенный Э. Г. Шутовым [1] по образцу конструкции А. И. Мальцева [1], в которой, поскольку она является полугруппой с двусторонним сокращением, каждый элемент является и потенциально обратимым слева и потенциально обратимым справа. В то же время мы укажем в ней элемент, который не является потенциально двусторонне обратимым. Отсюда, в частности, будет следовать, что рассмотренная полугруппа с двусторонним сокращением невложима в группу, поскольку все элементы всякой полугруппы, вложимой в группу, очевидно, являются потенциально двусторонне обратимыми.

4.14. Рассмотрим свободную полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ над алфавитом $\mathfrak{K} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ (IX, 1.3). Обозначим

$$\mathfrak{K}_1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad \mathfrak{K}_2 = \{X_1, X_2, X_5, X_6\}.$$

Совокупность слов X_1X_5, X_1X_6, X_2X_5, X_3X_1, X_3X_2, X_4X_1 обозначим через $\mathfrak{V}$. Отметим, что если $X_iX_j \in \mathfrak{V}$, то $X_i \in \mathfrak{K}_1$ и $X_j \in \mathfrak{K}_2$.

4.15. Обозначим через δ следующее отображение $\mathfrak{K}_1$ на себя:

$$\delta(X_1) = X_3, \ \delta(X_2) = X_4, \ \delta(X_3) = X_1, \ \delta(X_4) = X_2$$

и через τ отображение $\mathfrak{K}_2$ на себя:

$$\tau(X_1) = X_5, \ \tau(X_2) = X_6, \ \tau(X_5) = X_1, \ \tau(X_6) = X_2.$$

Отметим, что $\delta^2(X_i) = X_i$ и $\tau^2(X_i) = X_i$.

4.16. Введем в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}$ отношение $\mathfrak{n}$, полагая

$$U \sim V\ (\mathfrak{n})\ (U, V \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{K}}),$$

если $U = V$ или $U = X_i X_j \in \mathfrak{B}$ и $V = \delta(X_i) \cdot \tau(X_j) \in \mathfrak{B}$. Отношение $\mathfrak{n}$ рефлексивно и, согласно указанным свойствам δ и τ, симметрично.

4.17. Укажем ряд свойств отношения $\mathfrak{n}$. Справедливость некоторых из них непосредственно вытекает из определения $\mathfrak{n}$.

(α). Если $X_i X_j$, $X_i X_k \in \mathfrak{B}$, то не может иметь место равенство $X_j = \delta(X_k)$.

(β). Пусть

$$X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}'')$$

и $X_{i_1} \overline{\in} \mathfrak{K}_1$, тогда $X_{j_1} = X_{i_1}$.

(γ). Пусть

$$X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}'')$$

и $X_{i_1} \in \mathfrak{K}_1$, тогда или $X_{j_1} = X_{i_1}$ или $X_{j_1} = \delta(X_{i_1})$.

(δ). Если

$$X_k X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_k X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}'),$$

то $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}')$.

(ε). Если

$$X_k X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_k X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}''),$$

то $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} \sim X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s} (\mathfrak{n}'')$.

Действительно, пусть

$$U_1 \sim U_2 (\mathfrak{n}'),\ U_2 \sim U_3 (\mathfrak{n}'),\ \ldots,\ U_{m-1} \sim U_m (\mathfrak{n}')$$
$$(U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_m \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{K}})$$

$U_l = X_{l0} X_{l1} \ldots X_{ls}$ $(X_{lr} \in \mathfrak{K};\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$,

$$U_1 = X_k X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s},\ U_m = X_k X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_s}.$$

Если $X_k X_{i_1} \overline{\in} \mathfrak{B}$ или $X_k X_{j_1} \overline{\in} \mathfrak{W}$, то из определения производных отношений справедливость доказываемого соотношения следует непосредственно. Поэтому в дальнейшем можно считать, что оба указанных слова принадлежат $\mathfrak{B}$. Таким образом, $X_k \in \mathfrak{K}_1$.

Доказательство ведем по индукции относительно m. При $m = 2$ мы имеем случай (δ).

Пусть $m > 2$.

Если у некоторого U_l ($l = 2, 3, \ldots, m-1$) имеет место $X_{l0} = X_k$, то благодаря индуктивному предположению, примененному к $U_1, U_2, \ldots, U_l$ и $U_l, U_{l+1}, \ldots, U_m$, мы получаем

$$X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_s} \sim X_{l1}X_{l2}\ldots X_{ls}\,(\mathfrak{n}''),$$
$$X_{l1}X_{l2}\ldots X_{ls} \sim X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_s}\,(\mathfrak{n}''),$$

откуда следует доказываемое соотношение.

В связи с этим в дальнейшем можно считать что $X_{l0} \neq X_k$ ($l = 2, 3, \ldots, m-1$), т. е. благодаря (γ) $X_{l0} = \delta(X_k)$. Отсюда, в частности, следует, что $X_{20} \neq X_{10}$. Поэтому

$$X_{20} = \delta(X_k),\ X_{21} = \tau(X_{i_1}),$$
$$X_{22} = X_{i_2},\ X_{23} = X_{i_3},\ \ldots,\ X_{2s} = X_{i_s}.$$

Аналогично

$$X_{m-1,0} = \delta(X_k),\ X_{m-1,1} = \tau(X_{j_1}),$$
$$X_{m-1,2} = X_{j_2},\ X_{m-1,3} = X_{j_3},\ \ldots,\ X_{m-1,s} = X_{j_s}.$$

Из $U_2 \sim U_{m-1}\,(\mathfrak{n}'')$ по индуктивному предположению следует, что $X_{21}X_{22}\ldots X_{2s} \sim X_{m-1,1}X_{m-1,2}\ldots X_{m-1,s}\,(\mathfrak{n}'')$. Благодаря ($\beta$) и ($\gamma$) или $X_{m-1,1} = X_{21}$, или $X_{m-1,1} = \delta(X_{21})$. Но $X_{20}X_{21}$ и $X_{m-1,0}X_{m-1,1}$ принадлежат $\mathfrak{B}$, поэтому, согласно (α), второе равенство невозможно и потому $X_{m-1,1} = X_{21}$. Благодаря этому к словам $X_{21}X_{22}\ldots X_{2s}$ и $X_{m-1,1}X_{m-1,2}\ldots X_{m-1,s}$ можно применить индуктивное предположение, в результате чего заключаем

$$X_{i_2}X_{i_3}\ldots X_{i_s} \sim X_{j_2}X_{j_3}\ldots X_{j_s}\,(\mathfrak{n}'').$$

Но как было показано

$$X_{i_1} = \tau(X_{21}),\ X_{j_1} = \tau(X_{m-1,1}),\ X_{21} = X_{m-1,1}.$$

Поэтому, умножая слева полученное соотношение на элемент X_{i_1}, равный X_{j_1}, мы получим требуемое соотношение.

(ζ). Если

$$X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_s}X_k \sim X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_s}X_k\,(\mathfrak{n}''),$$

то $X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_s} \sim X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_s}\,(\mathfrak{n}'')$.

Доказательство вполне аналогично (ε).

(η). $X_2X_6 \not\sim X_4X_2\,(\mathfrak{n}'')$.

Это следует из того, что слово X_2X_6 только само с собой находится в отношении $\mathfrak{n}$.

4.18. Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}/\mathfrak{n}''$ (IX, 3.2).

Элементы полугруппы $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{n}}$, являющиеся $\mathfrak{n}''$-классами, будем обозначать в виде $\overline{W}$ (где $\overline{W}$ есть $\mathfrak{n}''$-класс, содержащий W, $W \in \mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}$).

Благодаря 4.17, (ε), (ζ) в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{n}}$ из $\overline{X}_k\overline{U} = \overline{X}_k\overline{V}$ всегда следует $\overline{U} = \overline{V}$ и из $\overline{U}\,\overline{X}_k = \overline{V}\,\overline{X}_k$ следует $\overline{U} = \overline{V}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{n}}$ есть полугруппа с двусторонним сокращением.

4.19. Выведем одно необходимое условие того, чтобы элемент некоторой полугруппы был потенциально двусторонне обратимым.

Лемма. *Если в некоторой надполугруппе $\mathfrak{A}$ элементы Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6 удовлетворяют равенствам*

$$Z_1Z_5 = Z_3Z_1,$$
$$Z_2Z_5 = Z_4Z_1,$$
$$Z_1Z_6 = Z_3Z_2,$$

и существует надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой элемент Z_1 является двусторонне обратимым, то имеет место

$$Z_2Z_6 = Z_4Z_2.$$

Доказательство. В полугруппе $\mathfrak{A}'$ должны найтись такие элементы U и V, что

$$Z_1U = Z_2.\ VZ_1 = Z_2.$$

Используя соотношения между элементами Z_i, получаем

$$Z_2Z_6 = VZ_1Z_6 = VZ_3Z_2 = VZ_3Z_1U = VZ_1Z_5U = \\ = Z_2Z_5U = Z_4Z_1U = Z_4Z_2.$$

4.20. В полугруппе с двусторонним сокращением $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}/\mathfrak{n}''$ (4.18) элементы $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$, $\overline{X}_4$, $\overline{X}_5$, $\overline{X}_6$ удовлетворяют равенствам

$$\overline{X}_1\overline{X}_5 = \overline{X}_3\overline{X}_1,$$
$$\overline{X}_2\overline{X}_5 = \overline{X}_4\overline{X}_1,$$
$$\overline{X}_1\overline{X}_6 = \overline{X}_3\overline{X}_2.$$

В то же время благодаря 4.17, (η) имеет место неравенство

$$\bar{X}_2\bar{X}_6 \neq \bar{X}_4\bar{X}_2.$$

Отсюда благодаря 4.19 следует, что элемент $\bar{X}_1$ не является потенциально двусторонне обратимым элементом.

4.21. В заключение отметим, что, согласно IX, 3.2; IX, 3.10, полугруппа $\mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}^{n} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{R}}/\pi''$ может быть определена как полугруппа с порождающим множеством $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$, заданная определяющей совокупностью соотношений

$$X_1X_5 = X_3X_1,$$
$$X_2X_5 = X_4X_1,$$
$$X_1X_6 = X_3X_2.$$

§ 5. Свободные и прямые произведения

5.1. Наравне с задачей о погружении одной заданной полугруппы в надполугруппу, обладающую теми или иными свойствами, естественно возникает родственная задача о погружении целых систем полугрупп. Сразу же необходимо отметить, что, даже не налагая никаких требований на искомую надполугруппу, мы иногда получаем отрицательный ответ на вопрос о возможности такого погружения.

Рассмотрим следующий пример. Возьмем два множества рациональных чисел:

$$\mathfrak{A} = \left\{\ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\right\},$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\ldots, \frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\right\}.$$

$\mathfrak{A}$ будем рассматривать относительно действия, являющегося обычным умножением рациональных чисел. В $\mathfrak{B}$ действие, обозначаемое значком $\bigcirc$, определяем следующим образом:

$$\alpha \bigcirc \beta = \begin{cases} \alpha\beta \text{ (если } \alpha\beta \in \mathfrak{B}), \\ -\alpha\beta \text{ (если } -\alpha\beta \in \mathfrak{B}). \end{cases}$$

Оба действия ассоциативны.

Полугруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют общую часть $\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$. Действия в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$ согласованы, т. е. произведение двух

элементов из общей части, определенное согласно умножению в $\mathfrak{A}$, совпадает с произведением этих же элементов, определенным согласно умножению в $\mathfrak{B}$. Тем не менее не существует общей надполугруппы для этих обеих полугрупп. Действительно, в такой общей подполугруппе, если бы она существовала, мы получили бы

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot\left[2\circ\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=1\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Очевидно, невозможность погружения обеих рассматриваемых полугрупп в общую надполугруппу зависела в нашем примере от наличия в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ общих элементов. Как мы покажем в 5.4, при отсутствии общих элементов погружение в общую надполугруппу всегда возможно.

5.2. ***Определение.*** *Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется свободным произведением своих попарно непересекающихся подполугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$, если $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ является порождающим множеством $\mathfrak{A}$, причем совокупность, состоящая из всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\alpha$, всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\beta, \ldots$, является определяющей совокупностью соотношений полугруппы $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{B}$.*

Представление полугруппы в виде свободного произведения обычно называется разложением полугруппы в свободное произведение.

5.3. Полугруппа, разложенная в свободное произведение, с точностью до изоморфизма определяется заданием с точностью до изоморфизма компонент этого разложения. Это непосредственно следует из IX, 1.12.

5.4. Пусть $\mathfrak{A}$ есть свободное произведение подполугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$ Произвольное слово W в алфавите $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ можно представить в виде

$$W=U_{\xi_1}U_{\xi_2}\ldots U_{\xi_k}\ldots U_{\xi_n},$$

где U_{ξ_i} $(i=1, 2, \ldots, n)$ — слово в $\mathfrak{B}_{\xi_i}$, причем $\mathfrak{B}_{\xi_{i-1}}$ и $\mathfrak{B}_{\xi_i}$ всегда различны. Если преобразовать W при помощи какого-либо из соотношений определяющей совокупности соотноше-

ний 5.2. то W преобразуется в слово вида

$$W = U_{\xi_1} U_{\xi_2} \ldots U'_{\xi_k} \ldots U_{\xi_n},$$

где слова U_{ξ_k} и U'_{ξ_k} имеют равные значения в $\mathfrak{B}_{\xi_k}$. В результате ряда таких преобразований W преобразуется в слово вида

$$W = U'_{\xi_1} U'_{\xi_2} \ldots U'_{\xi_k} \ldots U'_{\xi_n},$$

где слова U_{ξ_i} и U'_{ξ_i} оба в $\mathfrak{B}_{\xi_i}$ и имеют в $\mathfrak{B}_{\xi_i}$ равные значения ($i = 1, 2, \ldots, n$).

5.5. Всякий элемент A из $\mathfrak{A}$ может быть задан в виде произведения

$$A = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_n},$$

где B_{ξ_i} ($i = 1, 2, \ldots, n$) есть элемент из $\mathfrak{B}_{\xi_i}$, причем $\mathfrak{B}_{\xi_{i-1}}$ и $\mathfrak{B}_{\xi_i}$ различны. Эта форма задания элементов из $\mathfrak{A}$ является канонической, так как никакие два различных произведения такого вида не могут быть равны между собой. Это непосредственно следует из 5.4.

Указанное каноническое представление элементов свободного произведения $\mathfrak{A}$ весьма удобно, поскольку элементы, заданные в этой канонической форме, легко перемножаются. Пусть

$$A = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_n}, \quad A' = B'_{\eta_1} B'_{\eta_2} \ldots B'_{\eta_m}.$$

Если $\xi_n \neq \eta_1$, то канонической формой произведения, очевидно, будет

$$AA' = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_n} B'_{\eta_1} B'_{\eta_2} \ldots B'_{\eta_m}.$$

Если $\xi_n = \eta_1$ и в $\mathfrak{B}_{\eta_1}$ имеем $B_{\xi_n} B'_{\eta_1} = B^*_{\eta_1}$, то, очевидно,

$$AA' = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_{n-1}} B^*_{\eta_1} B'_{\eta_2} \ldots B'_{\eta_m}.$$

Задание $\mathfrak{A}$ как множества указанных канонических форм совместно с описанным правилом их перемножения, очевидно, может служить определением свободного произведения.

5.6. Нетрудно решается задача, обратная по отношению к задаче о разложении заданной полугруппы в свободное произведение.

Теорема. *Для полугрупп* $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., *не имеющих попарно общих элементов, существует такая общая надполугруппа* $\mathfrak{A}$, *которая разлагается в свободное произведение* $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ...

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть полугруппа, заданная порождающим множеством $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ и определяющей совокупностью Ψ, состоящей из всех соотношений полугруппы $\mathfrak{B}_\alpha$, из всех соотношений полугруппы $\mathfrak{B}_\beta$, ... (IX, 3.10). Отношение $\mathfrak{n}_\Psi$ в свободной полугруппе $\mathfrak{W}_\mathfrak{N}$, соответствующее совокупности соотношений Ψ (IX, 3.7) таково, что для $X \in \mathfrak{B}_\alpha$ условие $X \sim Y(\mathfrak{n}''_\Psi)$ $(Y \in \mathfrak{N})$ имеет место лишь при $Y \in \mathfrak{B}_\alpha$ и $X = Y$. Действительно, преобразование X при помощи любого соотношения из Ψ дает элемент, опять-таки принадлежащий $\mathfrak{B}_\alpha$ и равный элементу X. Тот же результат получится от последовательного применения нескольких таких преобразований. Согласно IX, 3.7, в $\mathfrak{A}$ все элементы из $\mathfrak{N}$ различны. Благодаря этому $\mathfrak{A}$ оказывается надполугруппой для каждой $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... и, очевидно, является их свободным произведением.

5.7. Конструкция свободного произведения является не просто одним из решений задачи о погружении в общую надполугруппу заданных полугрупп, но играет для этой задачи особую роль. Пусть полугруппы $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... попарно не имеют общих элементов и $\mathfrak{A}$ есть некоторая общая для них надполугруппа. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ подполугруппу $\mathfrak{A}$, порожденную $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ В $\mathfrak{A}'$ множество $\mathfrak{B}$ является порождающим и относительно $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}'$ справедливы все соотношения между элементами $\mathfrak{B}_\alpha$, все соотношения между элементами $\mathfrak{B}_\beta$, ... Благодаря IX, 1.11 существует гомоморфизм свободного произведения $\mathfrak{F}$ полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... на $\mathfrak{A}'$, являющийся продолжением тождественных отображений $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., рассматриваемых как подполугруппы $\mathfrak{F}$, на $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., рассматриваемых как подполугруппы $\mathfrak{A}'$.

Таким образом, всякая надполугруппа полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... может быть получена из их свободного произведения $\mathfrak{F}$ путем гомоморфизма $\mathfrak{F}$, являющегося продолжением тождественных отображений полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... на себя и последующего погружения получившейся полугруппы в произвольную надполугруппу.

Проведенное рассуждение имеет неслучайное сходство с рассуждениями о свободных полугруппах (§ 5, глава IX). Дело в том, что, как легко видеть, полугруппами, свободными в классе всех полугрупп, являются свободные произведения бесконечных моногенных полугрупп.

5.8. Пусть полугруппа $\mathfrak{A}$ имеет подполугруппы $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$ ..., каждая из которых $\mathfrak{B}_\xi$ задана порождающим множеством $\mathfrak{K}_\xi$ и определяющей совокупностью соотношений Ψ_ξ относительно $\mathfrak{K}_\xi$ ($\xi = \alpha, \beta, \ldots$). Если $\mathfrak{K}_\alpha$, $\mathfrak{K}_\beta$, ... попарно не пересекаются и $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\alpha \cup \mathfrak{K}_\beta \cup \ldots$ является для $\mathfrak{A}$ порождающим множеством, а $\Psi_\alpha \cup \Psi_\beta \cup \ldots$ — определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{A}$ есть свободное произведение $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ...

Действительно, поскольку $\mathfrak{K}$ есть порождающее множество $\mathfrak{A}$, совокупность $\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ тем более будет порождать $\mathfrak{A}$. Для произвольного слова W в $\mathfrak{K}_\alpha$ мы, преобразуя его при помощи соотношений из $\Psi_\alpha \cup \Psi_\beta \cup \ldots$, всегда будем получать слова в $\mathfrak{K}_\alpha$. Отсюда следует, что никакой элемент из $[\mathfrak{K}_\alpha] = \mathfrak{B}_\alpha$ не может равняться какому-нибудь элементу из $[\mathfrak{K}_\beta] = \mathfrak{B}_\beta$ ($\alpha \neq \beta$). Следовательно, $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... попарно не имеют общих элементов. Так как $\Psi_\alpha \cup \Psi_\beta \cup \ldots$ является определяющей совокупностью $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{K}$, то благодаря IX,2.7 совокупность всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\alpha$, всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\beta$, ... будет определяющей совокупностью соотношений $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$

5.9. Если рассматривать полугруппы лишь с точностью до изоморфизма, т. е. не делать различия между изоморфными между собой полугруппами, то конструкция свободного произведения определяет действие между полугруппами. Результатом этого действия над полугруппами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ является полугруппа $\mathfrak{F}$, разлагающаяся в свободное произведение своих подполугрупп $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$, изоморфных соответственно полугруппам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Благодаря 5.6 такая полугруппа всегда существует и благодаря 5.3 вполне определена с точностью до изоморфизма.

5.10. Коммутативность действия, указанного в 5.9, непосредственно следует из определения 5.2. Имеет место и ассоциативность. Это следует из 5.8. Действительно, пусть $\mathfrak{F}_{12}$ есть свободное произведение полугрупп $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, а $\mathfrak{F}'$ — свободное произведение $\mathfrak{F}_{12}$ и $\mathfrak{A}_3$. Благодаря 5.8 $\mathfrak{F}'$ является

свободным произведением трех подполугрупп: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$. Совершенно аналогично и полугруппа $\mathfrak{F}''$, являющаяся свободным произведением $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{F}_{23}$, где $\mathfrak{F}_{23}$ есть свободное произведение $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, оказывается свободным произведением трех полугрупп: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$.

5.11. Благодаря 5.9, 5.10, исходя из некоторых полугрупп, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, можно построить коммутативную полугруппу $\mathfrak{T}$, элементами которой будут служить полугруппы. Действием в $\mathfrak{T}$ будет построение свободного произведения двух полугрупп. Исходные полугруппы будут элементами порождающего множества полугруппы $\mathfrak{T}$.

5.12. Конструкции свободного произведения родственна конструкция прямого произведения.

Определение. *Полугруппа* $\mathfrak{A}$ *называется прямым произведением своих попарно непересекающихся подполугрупп* $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., *если* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ *является порождающим множеством* $\mathfrak{A}$, *причем для любых* $B_\xi \in \mathfrak{B}_\xi$, $B_\eta \in \mathfrak{B}_\eta$ $(\xi \neq \eta;\ \xi, \eta = \alpha, \beta, \ldots)$ *имеет место*

$$B_\xi B_\eta = B_\eta B_\xi$$

и совокупность этих соотношений совместно со всеми соотношениями между элементами из $\mathfrak{B}_\alpha$, *всеми соотношениями между элементами из* $\mathfrak{B}_\beta$, ... *является определяющей совокупностью соотношений полугруппы* $\mathfrak{A}$ *относительно* $\mathfrak{B}$.

5.13. Если упорядочить каким-либо способом компоненты прямого разложения полугруппы $\mathfrak{A}$, то, очевидно, всякий элемент $A \in \mathfrak{A}$ можно представить в виде

$$A = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_n}, \quad B_{\xi_i} \in \mathfrak{B}_{\xi_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где $B_{\xi_i} B_{\xi_j} = B_{\xi_j} B_{\xi_i}$ и $\mathfrak{B}_{\xi_1} < \mathfrak{B}_{\xi_2} < \ldots < \mathfrak{B}_{\xi_n}$. Способом, сходным с 5.4, нетрудно показать, что такое представление элемента является однозначным, т. е. это есть каноническая форма элементов $\mathfrak{A}$ относительно порождающего множества $\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ Перемножение элементов, заданных в такой канонической форме, благодаря перестановочности элементов из разных компонент совершается совсем просто. Пусть

$$A = B_{\xi_1} B_{\xi_2} \ldots B_{\xi_n}, \quad A' = B'_{\xi_1} B'_{\xi_2} \ldots B'_{\xi_n}$$

(некоторые из B_{ξ_i} и B'_{ξ_j} могут быть пустыми символами, благодаря чему в разложениях обоих элементов мы можем формально писать элементы из одних и тех же компонент). Тогда, очевидно,

$$AA' = (B_{\xi_1} B'_{\xi_1}) \cdot (B_{\xi_2} B'_{\xi_2}) \cdot \ldots \cdot (B_{\xi_n} B'_{\xi_n}).$$

Очевидно, $\mathfrak{A}$ может быть так и задана, как множество указанных формальных произведений с описанным законом перемножения.

Отметим попутно, что иногда под прямым произведением конечного числа полугрупп $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ понимают множество формальных произведений вида $B_1 B_2 \ldots B_n$ (где B_i всегда есть элемент из $\mathfrak{B}_i$, но не пустой символ; $i = 1, 2, \ldots n$) относительно того же указанного выше действия. Однако такая полугруппа в общем случае не обязана быть надполугруппой для $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$.

5.14. Путем рассуждения, аналогичного рассуждению 5.6, или же исходя из указанного в 5.13 способа описания прямого произведения, нетрудно убедиться, что для прямого произведения справедливо утверждение, аналогичное 5.6. Для полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$, не имеющих попарно общих элементов, существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}$, которая разлагается в прямое произведение $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$

5.15. Роль прямого произведения в задаче о погружении систем полугрупп определяется следующим свойством. Пусть полугруппы $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$ попарно не имеют общих элементов; полугруппа $\mathfrak{A}$ является надполугруппой для каждой из них, причем в $\mathfrak{A}$ элементы из различных полугрупп $\mathfrak{B}_\xi$ перестановочны между собой. Благодаря IX, 1.11 для прямого произведения $\mathfrak{N}$ полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$ существует гомоморфизм в $\mathfrak{A}$, продолжающий тождественные отображения полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$ Как и в 5.7 произвольная надполугруппа $\mathfrak{A}$ полугрупп $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$, обладающая указанным свойством перестановочности, может быть получена путем некоторого гомоморфизма полугруппы $\mathfrak{N}$ и последующего погружения получившейся полугруппы в произвольную надполугруппу.

5.16. Как и в 5.9, 5.10, легко убедиться, что построение прямого произведения можно рассматривать как действие между полугруппами, рассматриваемыми с точностью до изоморфизмов. Это действие коммутативно и ассоциативно. Отно-

сительно него можно рассматривать полугруппы, элементами которых являются полугруппы.

5.17. Помимо свободных произведений и прямых произведений существуют и иные аналогичные конструкции, осуществляющие погружения совокупностей полугрупп со сходными свойствами.

Также можно рассматривать аналогичную задачу и строить различные конструкции для случая, когда исходные полугруппы могут иметь общие элементы. Рассуждения в этом случае сразу существенно усложняются. При этом решение, как мы видели в 5.1, вообще не всегда будет возможно.

5.18. Наиболее простой, но важный случай указанной возможности дает условие того, чтобы полугруппы $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... все обладали общей единицей, но не имели попарно других общих элементов. В этом случае можно определить свободное произведение этих полугрупп с общей единицей как полугруппу, у которой $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta \cup \ldots$ является порождающим множеством, а совокупность всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\alpha$, всех соотношений между элементами из $\mathfrak{B}_\beta$, ... является определяющей совокупностью соотношений относительно $\mathfrak{B}$.

Рассмотрение свойств, аналогичных свойствам, рассмотренным для свободных произведений полугрупп без общих элементов, делается более сложным. Случай этот интересен тем, что он охватывает обычную конструкцию свободного произведения групп [1] (если $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ... все являются группами, то их свободное произведение с общей единицей, очевидно, будет группой). Также и обычное прямое произведение групп [2] является частным случаем очевидным образом определяемой конструкции прямого произведения полугрупп с общей единицей.

Вопрос о существовании иных конструкций с аналогичными свойствами для групп с общей единицей составил проблему, впервые сформулированную А. Г. Курошем [3]. Она нашла свое положительное решение в работах О. Н. Головина [4].

---

[1] См., например, А. Г. Курош. Теория групп, гл. IX, Гостехиздат, 1953.

[2] Там же § 17.

[3] А. Г. Курош. Теория групп, Гостехиздат, 1944.

[4] О. Н. Головин. Об ассоциативных операциях на множестве групп, ДАН СССР, 58 (1947), 1957—1960 и последующие статьи в Матем. сб.

В последующем и другие авторы рассматривали различные конструкции с аналогичными свойствами. Упомянем в связи с этим работы М. А. Фридмана [1]. Для совокупностей полугрупп с общей единицей конструкция, отличная от свободного произведения с общей единицей и от прямого произведения с общей единицей была дана Е. С. Ляпиным [4].

Свободные произведения полугрупп с общей единицей, также как и некоторая конструкция, являющаяся некоторым усложнением свободного произведения, были рассмотрены в работе Гриффитса [1]. Р. В. Петропавловская [5] изучает и использует конструкцию, называемую ею прямым произведением, которая хотя и родственна, но не совпадает с описанной выше конструкцией прямого произведения.

5.19. Что касается общего случая, когда исходные полугруппы могут иметь различные совокупности общих элементов, то в общей теории полугрупп он еще совсем не был рассмотрен. Только для случая групп, в теории групп были проведены исследования свободных произведений групп, имеющих произвольную систему пересечений.

---

[1] М. А. Фридман. О полукоммутативных умножениях, ДАН СССР, **109** (1956), 710—712 и серия статей в Уч. зап. Глазовского пед. ин-та, в. 3, Ижевск (1956).

ЛИТЕРАТУРА ПО ПОЛУГРУППАМ

Адян С. И.

[1] О проблеме делимости в полугруппах. ДАН СССР, **103** (1955), 747—750.

Айзенштат А. Я.

[1] О полугруппе всех взаимно однозначных отображений множества натуральных чисел в себя. Уч. зап. Выборгского пед. ин-та, **2** (1957), 15—24.

[2] Определяющие соотношения конечных симметрических полугрупп. Матем. сб. (нов. сер.), **45** (1958), 261—280.

[3] Об определяющих соотношениях симметрических полугрупп. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **166** (1958), 121—142.

[4] Об одном классе периодических полугрупп. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 241—251.

Алимов Н. Т.

[1] Об упорядоченных полугруппах. Изв. АН СССР (матем. сер.), **14** (1950), 569—576.

Андреоли (Andreoly G.).

[1] Sulla teoria della sostituzioni generalizzate e dei loro gruppi generalizzati. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4), **10** (1940), 115—127.

Арнольд И. В.

[1] Ideale in commutativen Halbgruppen. Матем. сб., **36** (1929), 401—408.

Асано, Мурата (Asano K., Murata K.).

[1] Arithmetical ideal theory in semi-groups. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., ser. A. Math., **4** (1953), 9—33.

Ауберт (Aubert K.).

[1] On the ideal theory of commutative semi-groups. Math. Scand., **1** (1953), 39—54.

[2] Some characterizations of valuation rings. Duke Math. J., **21** (1954), 517—525.

[3] Une théorie generale des idéaux. Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot Fac. Sci. Paris, **9** (1955—1956), 1—12.

[4] Un theorème de représentation dans la théorie des ideaux. C. R. Acad. Sci., **242** (1956), 320—322.

Балье (Ballieu R.).

[1] Sur les groupes de parties d'un demi-groupe. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, **64** (1950), 139—147.

[2] Une relation d'equivalence dans les groupoides et son application á une classe de demi-groupes. III Congrés National des Sciences. Fédération belge des Sociétés scientifiques, Bruxelles, **2** (1950), 46—50.

Бедей, Стейнфельд (Bedei L., Steinfeld O.).

[1] Über Ringe mit gemeinsamer, multiplikativer Halbgruppe. Comment. Math. Helv., **26** (1952), 146—151.

Биркгоф (Birkhoff G.).

[1] On the Structure of abstract algebras. Proc. Camb. Phil. Soc., **31** (1935), 433—454.

[2] An ergodic theorem for general semi-groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **25** (1939), 625—627.

[3] Теория структур, ИЛ, 1952, 1—407.

Боччони (Boccioni D.).

[1] P-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori. Rend. Sem. mat. Univ. Padova, **25** (1956), 176—195.

[2] A-modulo supplementare di un S-semi-gruppo commutativo. Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, **27** (1957).

Брук (Bruck R.).

[1] A survey of binary systems. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958, 1—185.

Бэр, Леви (Baer R., Levi F.).

[1] Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen. S. B. Heidelberg Akad. (Beitr. zur Algebra, 18), **2** (1932), 3—12.

Вагнер В. В.

[1] К теории частичных преобразований. ДАН СССР, **84** (1952), 653—656.

[2] Обобщениые группы. ДАН СССР, **84** (1952), 1119—1122.

[3] Теория обобщенных груд и обобщеиных групп. Матем. сб. (нов. сер.), **32** (1953), 545—632.

[4] Обобщенные груды, приводимые к обобщенным группам. Научн. ежегодник Саратовского уи-та (1955), 668—669.

[5] Обобщеиные груды, приводимые к обобщенным группам. Укр. матем. журн., **8** (1956), 235—254.

[6] Представления упорядоченных полугрупп. Матем. сб. (нов. сер.), **38** (1956), 203—240.

[7] Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношеиием транзитивности. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, **1** (1957), 81—88.

Вакселъ (Vakselj A.).

[1] Eine neue Form der Gruppenpostulate und eine Erweiterung des Gruppenbegriffes. Publ. Math. Univ. Belgrade, **3** (1934), 195—211.

[2] Faktor-halbgruppen. Clasnik mat.-fiz. i astron., **12** (1957) 9—16.

Вандивер (Vandiver H.).

[1] On the imbedding of one semi-group in another, with application to semi-ring. Amer. J. Math., **62** (1940), 72—78.

[2] The elements of a theory of abstract discrete semi-groups. Viertjschr. Naturforsch. Ges., Zürich, **85** (1940), 71—86.

Внвер (Weaver M.).

[1] Cosets in a semi-group. Math. Mag., **25** (1952), 125—136.

[2] On the imbedding of a finite commutative semi-group of idempotents in a uniquely factorable semi-group. Proc. Nat. Acad. USA, **42** (1956), 772—775.

Вигандт (Wiegandt R.).

[1] On complete semi-groups. Acta scient. math., **19** (1958), 93—97.

Виноградов А. А.

[1] К теории упорядоченных полугрупп. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, **4** (1953), 19—21.

Войдиславский М. Р.

[1] Конкретиый случай некоторых типов обобщенных групп. Зап. Харьковского матем. об-ва (4), **17** (1940), 127—144.

Воробьев Н. Н.

[1] Нормальные подсистемы конечной симметрической ассоциативной системы. ДАН СССР, **58** (1947), 1877—1879.

[2] Дефектные идеалы ассоциативных систем. Уч. зап. ЛГУ (матем. сер.), **16** (1949), № 111, 47—53.

[3] Об идеалах ассоциативных систем. ДАН СССР, **83** (1952), 641—643.

[4] Ассоциативные системы, всякая подсистема которых имеет единицу. ДАН СССР, **88** (1953), 393—396.

[5] О симметрических ассоциативных системах. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **89** (1953), 161—166.

[6] К теории идеалов ассоциативных систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **103** (1955), 31—74.

[7] О канонических представлениях элементов симметрических ассоциативиых систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им Герцена, **103** (1955), 75—82.

[8] Об ассоциативных системах, всякий левый идеал которых имеет единицу. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **103** (1955), 83—90.

Гардашник М. Ф. (Гардашнік М. Ф.).

[1] Ідеали в асоціативних системах. Наук. зап. Полтавськ. пед. ін-т, **8** (1955), 57—60.

Гельбаум, Калиш, Ольмстед (Gelbaum B., Kalesch G., Olmsted J.).

[1] On the embedding of topological semi-groups and integral domains. Proc. Amer. Math. Soc., **2** (1951), 807—821.

Глускин Л. М.

[1] Ассоциативная система квадратных матриц. ДАН СССР, **97** (1954), 17—20.

[2] Гомоморфизмы односторонне простых полугрупп на группы. ДАН СССР, **102** (1955), 673—676.

[3] Простые полугруппы с нулем. ДАН СССР, **103** (1955), 5—8.

[4] Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр. УМН, **11** (1956), № 1, 199—206.

[5] Продолжение гомоморфизмов полугрупп. Уч. зап. Харьковского пед. ин-та, **18** (1956), 33—39.

[6] Вполне простые полугруппы. Уч. зап. Харьковского пед. ин-та, **18** (1956), 41—55.

[7] Полугруппы матриц с неотрицательными элементами. Зап. матем. отд. физ.-мат. ф-та Харьковского ун-та и Харьковского матем. об-ва, **25** (1957), 167—173.

[8] Элементарные обобщенные группы. Матем. сб. (нов. сер.), **41** (1957), 23—36.

[9] Полугруппы неособенных матриц с иеотрицательными элементами. Уч. зап. Харьковского пед. ин-та. **21** (1957), 81—98.

[10] Нормальные ряды вполне простых полугрупп. Уч. зап. Харьковского пед. ин-та, **21** (1957), 99—106.

[11] О матричных полугруппах. Изв. АН СССР (матем. сер.), **22** (1958), 439—448.

[12] Полугруппы гомеоморфных отображений отрезка. Матем. сб. (нов. сер.), **49** (1959), 13—28.

[13] Идеалы полугрупп преобразований. Матем. сб. (нов. сер.), **47** (1959), 111—130.

[14] Полугруппы топологических отображений. ДАН СССР, **125** (1959), 699—702.

[15] Полугруппы и кольца линейных преобразований. ДАН СССР, **127** (1959), 1151—1154.

[16] Траизитивные полугруппы преобразований, ДАН СССР, **129** (1959), 16—18.

Гото, Кимура (Goto M., Kimura N.).

[1] Semi-group of endomorphisms of a locally compact group. Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 359—371.

Грин (Green J.).

[1] On the structure of semi-groups. Ann. Math. (2), **54** (1951), 163—172.

Грин, Рис (Green J., Rees D.).

[1] On semi-groups in which $x^r = x$. Proc. Cambridge Philos. Soc., **48** (1952), 35—40.

Гриффитс (Griffits H.).

[1] Infinite products of semi-groups and local connectivity. Proc. Lond. Math. Soc., **6** (1956), 455—480.

Диксон (Dickson L.).
[1] Definitions of a groups and a field by independent postulates. Trans. Amer. Math. Soc., 6 (1905), 198—204.
[2] On semi-groups and general isomorphism between infinite groups. Trans. Amer. Math. Soc., 6 (1905), 205—208.

Досс (Doss R.).
[1] Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe. Bull. Sci. Math., (2), 72 (1948), 139—150.

Драгунова Т. Е.
[1] Структура правых идеалов полугруппы с единицей и с левым сокращением. УМН, 12 (1957), № 4, 285—288.

Дынкин Е. Б.
[1] Марковские процессы и полугруппы операторов. Теория вероятн. и ее примен., 1 (1956), 25—37.

Дэй (Day M.).
[1] Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 276—291.

Дюбрейль (Dubreil P.).
[1] Contribution à la théorie des demi-groupes. Mèm. Acad. Sci. Inst. France, 63 (1941), № 3, 1—52.
[2] Sur les problemes d'immersion et la théorie des modules. C. R. Acad. Sci., Paris, 216 (1943), 625—627.
[3] Algèbre. Tome I. Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps. Gauthier-Villars, Paris (1946), X + 305.
[4] Contribution à la théorie des demi-groupes, II. Univ. Roma, Ist. Naz. Alta, Mat. Rend. Mat. e Appl., (5) 10 (1951), 183—200.
[5] Contribution à la théorie des demi-groupes, III. Bull. Soc. Math., France, 81 (1953), 289—306.

Дюбрейль, Дюбрейль-Жакотэн (Dubreil P., Dubreil-Jacotin M.-L.).
[1] Equivalences et opérations. Ann. Univ. Lyon Sect. A (3), 3 (1940), 7—23.

Дюбрейль-Жакотэн (Dubreil-Jacotin M.-L.).
[1] Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe. C. R. Acad. Sci., Paris, 225 (1947), 787—788.
[2] Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe demi-réticulé entier. C. R. Acad. Sci., Paris, 232 (1951), 1174—1176.

Дюбрейль-Жакотэн, Круазо (Dubreil-Jacotin M.-L., Croisot R.).
[1] Sur les congruences dans les ensembles où sont définies plusieurs opérations. C. R. Acad. Sci., Paris, 233 (1951), 1162—1164.

Емеличев В. А.
[1] Коммутативные полугруппы с одним определяющим соотношением. Уч. зап. Шуйского пед. ин-та, **6** (1958), 227—242.

Жаффар (Jaffard P.).
[1] Théorie axiomatique des groupes définies par des systémes de générateurs. Bull. Sci. Math. (2), **75** (1951), 114—128.

Зарецкий К. А.
[1] Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 251—265.
[2] Абстрактная характеристика полугруппы всех рефлективных бинарных отношений. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 265—271.
[3] Об идеалах полугруппы. УМН, **14** (1959), 173—175.

Иван (Ivan J.).
[1] O direktnom sučine pologrúp. Mat.-fyz. časop., **3** (1953), 57—66.
[2] O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin. Mat.-fyz. časop., **4** (1954), 181—202.
[3] O reprezentácii jednoduchých pologrúp. Mat.-fyz. časop., **8** (1958), 27—39.

Исеки (Iséki K.).
[1] Sur les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1524—1525.
[2] On compact abelian semi-groups. Michigan Math. J., **2** (1953), 59—60.
[3] Sur un théorème de M. G. Thierrin concernant demi-groupe limitatif. Proc. Japan. Acad., **31** (1955), 54—55.
[4] Contribution to the theory of semi-groups, I. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 174—175.
[5] Contribution to the theory of semi-groups, II. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 225—227.
[6] Contributions to the theory of semi-groups. III. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 323—324.
[7] Contributions to the theory of semi-groups, IV. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 430—435.
[8] Contributions to the theory of semi-groups, V. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 560—561.
[9] Contributions to the theory of semi-groups, VI. Proc. Japan Acad., **33** (1957), 29—30.
[10] A characterisation of regular semi-group. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 676—677.
[11] On compact semi-groups. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 221—224.
[12] Generalisation of a theorem by S. Schwarz on semi-group. Portug. Math., **15** (1956), 71—72.

Кавада, Кондо (Kawada Y., Kondo K.).
[1] Idealtheorie in nichtkommutativen Halbgruppen. Jap. J. Math., **16** (1939), 37—45.

Катсофф (Kattsoff L.).
[1] The independence of the associative law. Amer. Math. Monthly, **65** (1958), 620—622.

Кауфман А. М.
[1] Последовательно-уничтожающиеся суммы ассоциативных систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **86** (1949), 145—166.
[2] Строение некоторых галондов. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **86** (1949), 167—182.
[3] Ассоциативные системы с идеально разрешимым рядом длины два. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **89** (1953), 67—93.

Кацман А. Д.
[1] О некоторых свойствах полугруппы, инвариантной в группе. УМН, **11** (1956), № 2, 179—183.
[2] К вопросу об образующих и необразующих элементах полугруппы, инвариантной в группе. Уч. зап. Уральск. ун-та, в. **19** (1956), 43—50.

Кемперман (Kemperman J.).
[1] On complexes in a semi-group. Proc. konikl. nederl. acad. wet., A, **59** (1956), 247—254.

Кимура (Kimura N.).
[1] Maximal subgroups of a semi-group. Kōdai Math. Sem. Rep., **3** (1954), 85—88.
[2] On some examples of semi-groups. Kōdai Math. Sem. Rep., **3** (1954), 89—92.
[3] Note on idempotent semi-groups. I. Proc. Japan Acad., **33** (1957), 642—645.
[4] Note on idempotent semi-groups. III. Proc. Japan Acad., **34** (1958), 113—114.
[5] The structure of idempotent semi-groups. Pacif. J. Math., **8** (1958), 257—275.
[6] Note on idempotent semi-groups. IV. Identities of three variables. Proc. Japan Acad., **34** (1958), 121—123.

Кимура, Тамура (Kimura N., Tamura T.).
[1] Compact mob with a unique left unit. Math. J. Okayama Univ., **5** (1956), 115—119.
[2] Counter examples to Wallace's problem. Proc. Japan Acad., **31** (1955), 499—500.

Клейн-Бармен (Klein-Barmen F.).
[1] Über gewisse Halbverlände und kommutative Semi-gruppen, I. Math. Z., **48** (1942), 275—288.

[2] Über gewisse Halbwerbände und kommutative Semi-gruppen, II. Math. Z., 48 (1943), 715—734.
[3] Ein Beitrag zur Theorie der linearen Höloide. Math. Z., **51** (1948), 355—366.
[4] Zur Theorie der Operative und Assoziative. Math. Ann., **126** (1953), 23—30.
[5] Zur Axiomatik der Semi-grouppen. Sitzungsber. Bayer Akad. Wiss Math. naturwiss. Kl., 1956 (1957), 287—294.
[6] Verallgemeinerung des Verbandsbegriffs durch Abschwächung des Axioms der Idempotenz. Math Z., **70** (1958), 38—51.

Клименеску (Climescu A.).
[1] Sur les quasicycles. Bul. Politehn. Ch. Asachi Iaşi, **1** (1946), 5—14.

Клиффорд (Clifford A.).
[1] A system arising from a weakened set of group postulates. Ann. Math., **34** (1933), 865—871.
[2] Arithmetic and ideal theory of commutative semi-groups. Ann. Math., **39** (1938), 594—610.
[3] Partially ordered abelian groups. Ann. Math., **41** (1940), 465—473.
[4] Semi-groups admitting relative inverses. Ann. Math., (2), **42** (1941), 1037—1049.
[5] Matrix representations of completely simple semi-groups. Amer. J. Math., **64** (1942), 327—342.
[6] Semi-groups containing minimal ideals. Amer. J. Math., **70** (1948), 521—526.
[7] Semi-groups without nilpotent ideals. Amer. J. Math., **71** (1949), 834—844.
[8] Extensions of semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc., **68** (1950), 165—173.
[9] A class of d-simple semi-groups. Amer. J. Math., **75** (1953), 547—556.
[10] Naturally totally ordered commutative semi-groups. Amer. J. Math., **76** (1954), 631—646.
[11] Bands of semi-groups. Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 499—504.
[12] Ordered commutative semi-groups of the second kind. Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), 682—687.
[13] Totally ordered commutative semi-groups. Bull. Amer. Math. Soc., **64** (1958), 305—316.
[14] Connected ordered topological semi-groups with idempotent endpoints. Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958), 80—98.

Клиффорд, Миллер (Clifford A., Miller D.).
[1] Semi-groups having zeroid elements. Amer. J. Math., **70** (1948), 117—125.

Колибиарова (Kolibiarová B.).
[1] O pologrupách ktorých každá čiastočná pologrupa málavu jednotku. Mat.-fyz. časop., **7** (1957), 177—182.

Кольмар (Kolmar L.).
[1] Another proof of the Markov — Post theorem. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **3** (1952), 1—25.

Кон (Cohn P.).
[1] Embeddings in semi-groups with onesided division. J. Lond. Math. Soc., **31** (1956), No 122, 169—181.
[2] Embeddings in sesquilateral division semi-groups. J. Lond. Math. Soc., **31** (1956), No 122, 181—191.

Конторович П. Г.
[1] К теории полугрупп в группе. Уч. зап. Казанского ун-та, **114** (1954), № 8, 35—43.
[2] К теории полугруппы в группе. ДАН СССР, **93** (1953), 229—231.
[3] Некоторые вопросы теории полугрупп в группах. УМН, **11** (1956), № 1, 255.
[4] К теории полугрупп в группе, II. Учен. зап. Уральск. ун-та, **19** (1956), 3—20.

Конторович П. Г., Кацман А. Д.
[1] Некоторые типы элементов полугруппы, инвариантной в группе. УМН, **11** (1956), № 3, 145—150.

Котляр, Царантонелло (Cotlar M., Zarantonello E.).
[1] Semiordered groups and Riesz—Birkhoff L-ideals. Fac. Ci Mat. Univ. Nac. Litoral Publ. Inst., 8 (1948), 105—192.

Кох (Koch R.).
[1] Remarks on primitive idempotents in compact semi-groups with zero. Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 828—833.
[2] On monothetic semi-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 397—401.

Кох, Уоллес (Koch R., Wallace A.).
[1] Maximal ideals in compact semi-groups. Duke Math. J., 21 (1954), 681—685.
[2] Stability in semi-groups. Duke Math. J., **24** (1957), 193—195.
[3] Admissibility of semi-group structures on continua. Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958), 277—287.

Круазо (Croisot R.).
[1] Holomorphies d'un semi-groupe. C. R. Acad. Sci., Paris, **227** (1948), 1134—1136.
[2] Autre généralisation de l'holomorphie dans un semigroupe. C. R. Acad. Sci., Paris, 227 (1948), 1195—1197.
[3] Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes. Bull. Soc. Math. France, **80** (1952), 217—223.
[4] Demi-groupes et axiomatique des groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **237** (1953), 778—780.

[5] Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples. Ann. Sci. École. Norm (3), **70** (1953), 361—379.
[6] Automorphismes intérieurs d'un semi-groupe. Bull. Soc. Math. France, **82** (1954), 161—194.
[7] Demi-groupes simples inversifs à gauche. C. R. Acad. Sci., Paris, **239** (1954), 845—847.
[8] Sur la classification des demi-groupes. Proc. Intern. Congr. Math., 2, Amsterdam (1954), 13—14.
[9] Applications résiduées. Ann. scient École norm. supér. **73** (1956), 453—474.
[10] Equivalences principales bilatères dèfinies dans un demi-groupe. J. math. pures et appl., **36** (1957), 373—417.

Круминг П. Д.
[1] О делимости в топологических полугруппах. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 271—275.

Ламбек (Lambek J.).
[1] The immersibility of a semi-group into a group. Canadian J. Math., **3** (1851), 34—43.
[2] Initial segments of positive semi-groups. Trans. Roy. Soc. Canada, **50** (1956), 41—46.

Леви (Levi F.).
[1] A problem on rigid motion. Math. Student, 8 (1940), 1—10.
[2] On semi-groups. Bull. Calcutta Math. Soc., **36** (1944), 141—146.
[3] On semi-groups. II. Bull. Calcutta. Math. Soc. **38** (1946), 123—124.

Лесохин М. М.
[1] Некоторые свойства обобщениых характеров полугрупп. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 277—286.

Лесье (Lesieur L.).
[1] Théorèmes de décomposition dans certains demi-groupes réticulés satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 2250—2252.
[2] Sur les ideaux irreductibles d'un demi-groupe. Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **24** (1955), 29—36.
[3] Sur les demi-groupes réticulés satisfaisants à une condition de chaîne. Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 161—193.
[4] Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne. Bull. Soc. math. France, **83** (1955), 161—193.
[5] Sur les idéaux irreducibles d'un demi-groupe. Rend. Seminar mat. Univ. Padova, Parte I, **24** (1955), 29—36.

Лефевр (Lefebvre P.).
[1] Demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux. C. R. Acad. Sci., Paris, **247** (1958), 393—396.

Либер А. Е.
[1] О симметрических обобщенных группах. Матем. сб. (нов. сер.), **33** (1953), 531—544.
[2] К теории обобщенных групп. ДАН СССР, **97** (1954), 25—28.

Лось (Lós J.).
[1] О существовании линейного упорядочения в группе. Бюлл. Польской Акад. наук, отд. 3, **2** (1954), № 1, 19—21.

Ляпин Е. С.
[1] Свободные системы с бесконечным однозначным действием. ДАН СССР, **51** (1946), 491—494.
[2] Ядра гомоморфизмов ассоциативных систем. Матем. сб. (нов. сер.), **20** (1947), 497—515.
[3] Алгебраические системы с несколькими действиями. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **64** (1948), 53—72.
[4] Полные действия в классах ассоциативных систем и групп. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им Герцена, **86** (1949), 93—106.
[5] Нормальные комплексы ассоциативных систем. Изв. АН СССР (матем. сер.), **14** (1950), 179—192.
[6] Простые коммутативные ассоциативные системы. Изв. АН СССР (матем. сер.), **14** (1950), 275—282.
[7] Полупростые коммутативные ассоциативные системы. Изв. АН СССР (матем. сер.), **14** (1950), 367—380.
[8] Канонический вид элементов одной ассоциативной системы, заданной определяющими соотношениями. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **89** (1953), 45—54.
[9] Увеличительные элементы ассоциативных систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **89** (1953), 55—66.
[10] Ассоциативные системы всех частичных преобразований. ДАН СССР, **88** (1953), 13—15.
[11] Полугруппы, во всех представлениях которых операторы имеют неподвижные точки, I. Матем. сб. (нов. сер), **34** (1954), 289—306.
[12] Полугруппы, во всех представлениях которых операторы имеют неподвижные точки, II. Матем. сб. (нов. сер.), **36** (1956), 111—124.
[13] Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **103** (1955), 5—30.
[14] О существовании и единственности решения уравнения общего вида в связи с обратимостью в полугруппах преобразований. ДАН СССР, **116** (1957), 552—555.
[15] Обратимость элементов в полугруппах. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, **166** (1958), 65—74.

Мак-Кензи (Mac Kenzie R.).
[1] Commutative semi-groups. Duke Math. J., **21** (1954), 471—477.

Мак-Лин (McLean D.).
[1] Idempotent semi-groups. Amer. Math. Monthly, **61** (1954), 110—113.

Мальцев А. И.
[1] On the immersion of an algebraic ring into a field. Math. Ann., **113** (1937), 686—691.
[2] О включении ассоциативных систем в группы. Матем. сб. (нов. сер.), 6 (1939), 331—336.
[3] О включении ассоциативных систем в группы, II. Матем. сб. (нов. сер.), 8 (1940), 251—264.
[4] Симметрические группоиды. Матем. сб. (нов. сер.), **31** (1952), 136—151.
[5] Мультипликативные сравнения матриц. ДАН СССР, **90** (1953), 333—335.
[6] Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 4 (1953), 107—111.
[7] К общей теории алгебраических систем. Матем. сб. (нов. сер.), **35** (1954), 3—20.

Манн (Munn W.).
[1] On semi-groups algebras. Proc. Cambr. Phil. Soc., **51** (1955), 1—15.
[2] Matrix representations of semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., **53** (1957), 5—12.
[3] The characters of the symmetric inverse semi-group. Proc. Cambridge Philos. Soc., **53** (1957), 13—18.
[4] Semi-groups satisfying minimal conditions. Proc. Glasgow Math. Assoc., **3** (1957), 145—152.

Манн, Пенроз (Munn W., Penrose R.).
[1] A note on inverse semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1955), 396—399.

Мантейффель (Manteuffel K.).
[1] Bemerkung zur Zerlegung und Erzeugung endlicher Gruppoide. Wiss. z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1 (1957), 1—2.

Марков А. А.
[1] Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. ДАН СССР, **55** (1947), 587—590.
[2] Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, II. ДАН СССР, **58** (1947), 353—356.
[3] Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. ДАН СССР, **77** (1951), 19—20.
[4] Невозможность алгорифмов, распознающих некоторые свойства ассоциативных систем. ДАН СССР, **77** (1951), 953—956.
[5] Теория алгорифмов. Тр. матем. ин-та им. Стеклова, **38** (1951), 176—189.
[6] Теория алгорифмов. Тр. матем. ин-та им. Стеклова, 42 (1954), 1—374.

Миллер, Клиффорд (Miller D., Clifford A.).
[1] Regular D-classes in semi-groups. Trans. Amer. Math., **82** (1956), 270—280.

Миянага (Miyanaga J.).
[1] A generalisation of Wallace theorem on semi-groups. Proc. Japan Acad., **32** (1956), 254.

Молинаро (Molinaro I.).
[1] Demi-groupes résidutifs. Sémin. P. Dubreil et Ch. Risot Fac. Sci. Paris, **9** (1955—1956), 1—16.

Морзе, Хедлунд (Morse M., Hedlund G.).
[1] Unendingchess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups. Duke Math. J., **11** (1944), 1—7.

Мори (Maury G.).
[1] Une caractérisation des demi-groupes noethériens intégralement clos. C. R. Acad. Sci., Paris, **247** (1958), 254—255.

Мостерт, Шилдс (Mostert P., Shields A.).
[1] On continuous multiplications on the two-sphere. Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 942—947.
[2] On a class of semi-groups on En. Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 729—734.
[3] On the structure of semi-groups on a compact manifold with boundary. Ann. Math., **65** (1957), 117—143.

Мур (Moore E.).
[1] A definition of abstract groups. Trans. Amer. Math. Soc., **3** (1902).

Мурата (Murata K.).
[1] On the quotient semi-groups of a noncommutative semi-group. Osaca Math. J., **2** (1950), 1—5.

Мэнн (Mann H.).
[1] On certain systems which are almost groups. Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 879—881.

Накада (Nakada O.).
[1] Partially ordered abelian semi-groups. I. On the extension of the strong partial order defined on abelian semi-groups. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, **11** (1951), 181—189.
[2] Partially ordered abelian semi-groups. II. On the strongness of the linear order defined on abelian semi-groups. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, **12** (1952), 73—86.

Нумакура (Numakura K.).
[1] On bicompact semi-groups with zero. Bull. Jamagata Univ., **4** (1951), 405—412.
[2] On bicompact semi-groups. Math. J. Okayama Univ., **1** (1952), 99—108.
[3] A note on the structure of commutative semi-groups. Proc. Japan Acad., **30** (1954), 262—265.

[4] Prime ideals and idempotents in compact semi-groups. Duke Math. J., **24** (1957), 671—680.

[5] Naturally totally ordered compact semi-groups. Duke Math. J., **25** (1958), 639—645.

Оганесян В. А.

[1] Инвариантные и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок. ДАН Арм. ССР, **21** (1955), 49—56.

[2] Теорема о строении системы подстановок. Сб. научи. тр. Арм. Гос. заочн. пед. ин-та, вып. 2, **3** (1956), 1—17.

[3] Система частичных подстановок и обобщенная теорема Кэли. Сб. научн. тр. Арм. Гос. заочн. пед. ин-та, **3** (1956), в. 2, 19—31.

Орэ (Ore O.).

[1] Linear equations in noncommutative fields. Ann. Math. (2), **32** (1931), 463—477.

Паризек (Parézek B.).

[1] Poznámka o štructúre multiplikativnej pologrupy zvyškových triecl. Mat.-fyz. časop., **7** (1957), 183—185.

Паркер (Parker E.).

[1] On multiplicative semi-groups of residue classes. Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 612—616.

Перел (Perel W.).

[1] Principal representations in commutative semi-groups. Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 957—960.

Петропавловская Р. В.

[1] О разложимости в прямую сумму структуры подсистем ассоциативной системы. ДАН СССР, **81** (1951), 999—1001.

[2] Структурные изоморфизмы свободных ассоциативных систем. Матем. сб. (нов. сер.), **28** (1951), 589—602.

[3] Об определяемости группы структурой ее подсистем. Матем. сб. (нов. сер.), **29** (1951), 63—78.

[4] Ассоциативные системы, структурно изоморфные группе, I. Вестн. ЛГУ (сер. матем., мех., астр.) **13** (1956), в. 3, 5—26.

[5] Ассоциативные системы, структурно изоморфные группе, II. Вестн. ЛГУ (сер. матем., мех., астр.) **19** (1956), в. 4, 80—99.

[6] Ассоциативные системы, структурио изоморфные группе, III. Вестн. ЛГУ (сер. матем., мех., астр.) **19**, (1957) в. 4, 5—19.

Пирс (Pierce R.).

[1] Homomorphisms of semi-groups. Ann. Math. (2), **59** (1954), 287—291.

Поддерюгин В. Д.

[1] Условия упорядочиваемости групп. Изв. АН СССР (матем. сер.), **21** (1957), 199—208.

Полугруппы (Demi-groupes).
[1] Sémin A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. Sci., Paris, 1953—1954 (1956); 7-e année complémentaire, No. 12—20, 1—84.

Понизовский И. С.
[1] О матричных представлениях ассоциативных систем. Матем. сб. (нов. сер.), 38 (1956), 241—260.
[2] О неприводимых представлениях конечных ассоциативных систем. Уч. зап. Кемеровского пед. ин-та, 1 (1956), 245—250.
[3] О матричных неприводимых представлениях конечных полугрупп. УМН, 13 (1958), 139—144.

Пост (Post E.).
[1] Recursive unsolvability of problem of Thue. J. Sumb. Logic, 12 (1947), 1—11.
[2] Rank functions on semig-roups. Proc. Konikl. nederl. acad. Wetensch., A, 61 (1958), 332—334.

Престон (Preston G.).
[1] Inverse semi-groups. J. London Math. Soc., 29 (1954), 396—403.
[2] Inverse semi-groups with minimal right ideals. J. London Math. Soc., 29 (1954), 404—411.
[3] Representations of inverse semi-groups. J. London Math. Soc., 29 (1954), 411—419.
[4] The structure of normal inverse semi-groups. Proc. Glasgow Math. Assoc., 3 (1956), 1—9.
[5] Matrix representations of semi-groups. Quart. J. Math., 9 (1958), 169—176.
[6] A note on representations of inverse semi-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1144—1147.

Пták (Pták V.).
[1] Immersibility of semi-groups. Acta Fac. Nat. Univ. Carol. Prague, 192 (1949).
[2] О включении семи-групп. Чехослов. матем. журн., 2 (77) (1952), 247—271.
[3] Vnořitelnost semi-grup. Časop. pěstov. mat., 78 (1953), 259—261.

Пул (Poole R.).
[1] Finite ova. Amer. J. Math., 59 (1937), 23—32.

Райт (Wright F.).
[1] Semi-groups and submodular functions. Michigan Math. J., 3 (1955—1956), 169—172.
[2] Semi-groups in compact groups. Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 309—311.

Раутер (Rauter H.).
[1] Abstrakte kompositions-systeme oder Übergruppen. J. reine und angew. Math., 159 (1928), 229—237.

Редей (Redei L.).
[1] Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie. Acta Sci. Math., Szeged., 14 (1952), 252—273.

Рис (Rees D.).
[1] On semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 36 (1940), 387—400.
[2] Note on semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 (1941), 434—435.
[3] On the ideal structure of a semi-group satisfying a cancellation law. Quart. J. Math., Oxford. Ser., 19 (1948), 101—108.
[4] On the group of a set of partial transformations. J. London. Math. Soc., 22 (1948), 281—284.

Рич (Rich R.).
[1] Completely simple ideals of a semi-group. Amer. J. Math., 71 (1949), 883—885.

Рыбаков Л. М.
[1] Об одном классе коммутативных полугрупп. Матем. сб. (нов. сер.), 5 (1939), 521—536.

Сайто, Хори (Saito T., Hori Sh.).
[1] On semi-groups with minimal left ideals and without minimal right ideals. J. Math. Soc. Japan, 10 (1958), 64—70.

Сас (Szasz G.).
[1] Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen. Acta Sci. Math., Szeged, 15 (1953), 20—28.
[2] Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplicativer Strukturen. Acta Sci. Math., Szeged, 15 (1954), 130—142.
[3] Die Translationen der Halbverbände. Acta Sci. Math., Szeged, 17 (1956), 165—169.

Сеп (Szép J.).
[1] Zur Theorie der Halbgruppen. Publ. Math. Debrecen, 4 (1956), 344—346.

Сиверцева Н. И.
[1] О простоте ассоциативной системы особенных квадратных матриц. Матем. сб. (нов. сер.), 24 (1949), 101—106.

Сколем (Scolem Th.).
[1] Some remarks on semi-groups. Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 24 (1951), 42—47.
[2] Theorems of divisibility in some semi-groups. Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 24 (1951), 48—53.
[3] Theory of divisibility in some commutative semi-groups. Norske Mat. Tidsskr., 33 (1951), 82—88.
[4] A theorem on some semi-groups. Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 25 (1952), 72—77.

Соннеборн (Sonneborn L.).

[1] On the arithmetic structure of a class of commutative semi-groups. Amer. J. Math., **77** (1955), 783—790.

Столл (Stoll R.).

[1] Representations of finite simple semi-groups. Duke Math. J., **11** (1944), 251—265.

[2] Homomorphisms of a semi-group onto group. Amer. J. Math., **73** (1951), 475—481.

Стольт (Stolt B.).

[1] Über Axiomensysteme die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala (1953), 1—100.

[2] Abschwächung einer klassischen Gruppendefinition. Math. Scand., **3** (1955), 303—305.

[3] Über eine besondere Halbgruppe. Ark. Mat., **3** (1956), 275—286.

[4] Zur Axiomatik des Brandtschen Gruppoids. Math. Z., **70** (1958), 156—164.

Сушкевич А. К.

[1] Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittels der verallgemeinerten Substitutionen. Мат. сб., **33** (1926), 371—374.

[2] Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque. Зап. Харьк. матем. т-ва (4), **1** (1927), 17—24.

[3] Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann., **99** (1928), 30—50.

[4] Untersuchungen über verallgemeinerte Substitutionen. Atti del Congr. Intern. Mat. Bologna, **1** (1928), 147—157.

[5] Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerten Gruppen. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **6** (1933), 27—38.

[6] Über Semi-gruppen. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **8** (1934), 25—28.

[7] Über einen merkwürdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **9** (1934), 39—46.

[8] Про деякі властивості одного типу узагальнених групп. Уч. зап. Харьк. ун-та, **2** (1935), 23—25.

[9] Про поширення півгрупп до цілої группи. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **12** (1936), 81—88.

[10] Über eine Verallgemeinerung der Semi-gruppen. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **12** (1936), 89—98.

[11] Sur quelques propriétés des semi-groupes généralisés. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), **13** (1936), 29—33.

[12] Теория обобщенных групп. Хрк.—Киев, ГНТИ (1937), 1—176.

[13] Про деякі типи особливих матриць. Уч. зап. Харьк. ун-та, **10** (1937), 5—16.

[14] Исследования о бесконечных подстановках. Сб. памяти акад. Граве, 1940, 245—253.

[15] Обобщенные группы особенных матриц. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), 16 (1940), 3—11.

[16] Узагальнені групи деяких типів нескінченних матриць. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), 16 (1940), 115—120.

[17] Об одном типе обобщенных полугрупп. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), 17 (1940), 19—28.

[18] Исследования о бесконечных подстановках. Зап. Харьк. матем. т-ва, (4), 18 (1940), 27—38.

[19] Прямые произведения некоторых типов обобщенных групп. Хрк., Научн. зап. Ин-та сов. торговли, (1941), 11—14.

Тамари (Tamari D.).

[1] Caracterisation des semi-groupes à un paramètre. C. R. Acad. Sci., Paris, 228 (1949), 1092—1094.

[2] Groupoides reliés et demi-groupes ordonnés. C. R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 1184—1186.

[3] Groupoides ordonnés. L'ordre lexicographique pondéré. C. R. Acad. Sci., Paris, 228 (1949), 1909—1911.

[4] Ordres pondérés. Caractérisation de l'ordre naturel comme l'ordre du semi-groupe multiplicatif des nombres naturels. C. R. Acad. Sci., Paris, 229 (1949), 98—100.

[5] Les images homomorphes des groupoides de Brandt et l'immersion des semi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, 229 (1949), 1291—1293.

[6] Sur l'immersion d'un semi-groupe topologique dans un groupe topologique. Algèbre et Theorie des Nombres Colloques Intern. du Centre Nat. Rech. Sci., Paris, 24 (1950), 217—221.

Тамура (Tamura T.).

[1] Characterization of groupoids and semilattices by ideals in a semi-group. J. Gakugei. Tokushima Univ., 1 (1950), 37—44.

[2] Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. J. Gakugei Tokushima Univ., 3 (1953), 1—11.

[3] On compact one-idempotent semi-groups. Kodai. Math. Sem. Rep., 1 (1954), 17—21.

[4] Supplement to the paper „On compact one-idempotent semi-groups". Kodai. Math. Sem. Rep., 3 (1954), 96.

[5] On finite one-idempotent semi-groups, I. J. Gakugei, Tokushima Univ., 4 (1954), 11—20.

[6] On a monoid whose submonoids form a chain. J. Gakugei, Tokushima Univ., 5 (1954), 8—16.

[7] Notes on finite semi-groups and determination of semi-groups of order 4. J. Gakugei Tokushima Univ. Math., 5 (1954), 17—27.

[8] Note on unipotent inversible semi-groups. Kodai Math. Sem. Rep., 3 (1954), 93—95.

[9] One-sided bases and translations of a semi-groups. Math. Japan, 3 (1955), 137—141.

[10] Indecomposable completely simple semi-groups except groups. Osaka Math. J., 8 (1956), 35—42.

[11] The theory of construction of finite semi-groups, I. Osaca Math. J., 8 (1956), 243—261.

[12] On translations of a semi-group. Kodai Math. Sem. Rep. **7** (1957), 67—70.

[13] The theory of construction of finite semi-groups, II. Compositions of semi-groups, and finite S-decomposable semi-groups. Osaka Math., J., **9** (1957), 1—42.

[14] Supplement to my paper „The theory of construction of finite semi-groups, II". Osaka Math. J., **9** (1957), 235—237.

Тамура, Кимура (Tamura T., Kimura N.).

[1] On decompositions of a commutative semi-group. Kodai Math. Sem. Rep., 4 (1954), 109—112.

[2] Existence of greatest decomposition of a semi-group. Kodai Math. Sem. Rep., 7 (1955), 83—84.

Тарский (Tarski A.).

[1] Remarks on direct products of commutative semi-groups. Math. scand., **5** (1957), 218—223.

Тесье (Teissier M.).

[1] Sur les équivalences regulières dans les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **232** (1951), 1987—1989.

[2] Sur la théorie des idéaux dans les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 386—388.

[3] Sur l'algebre d'un demi-groupe fini simple, II. Cas général. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 2511—2513.

[4] Sur quelques propriétés des ideaux dans les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **235** (1952), 767—769.

[5] Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côte. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1120—1122.

[6] Sur les demi-groupes ne contenant pas d'èlèment idempotent. C. R. Acad. Sci., Paris, 237 (1953), 1375—1377.

[7] Sur les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1524—1525.

Тетсуйя, Хасимото, Акаказава, Шибата, Инуи, Тамура (Tetsuya K., Hashimoto T., Akazawa T., Shibata R., Inui T., Tamura T.).

[1] All semi-groups of order at most 5. J. Gakugei Tokushima Univ. Nat. Sci. Math., **6** (1955), 19—39.

Тьеррен (Thierrin G.).

[1] Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit un groupe. C. R. Acad. Sci., Paris, **232** (1951), 376—378.

[2] Sur les éléments inversifs et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 33—34.

[3] Sur une classe de demi-groupes inversifs. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 177—179.

[4] Sur une classe de transformations dans les demi-groupes inversifs. C. R. Acad. Sci., Paris, 234 (1952), 1015—1017.

[5] Sur les demi-groupes inversifs. C. R. Acad. Sci., Paris, **234**, (1952), 1336—1338.

[6] Sur les homo-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 1519—1521.

[7] Sur quelques classes de demi-groupes. C. R. Acad. Sci. Paris, **236** (1953), 33—35.

[8] Sur quelques equivalences dans les demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 565—567.

[9] Quelques propriétés des equivalences réversibles généralisées dans un demi-groupe. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1399—1401.

[10] Sur une équivalence en relation avec l'équivalence réversible généralisée. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1723—1725.

[11] Quelques propriétés des sous-groupoides consistants d'un demi-groupe abélien D. C. R. Acad. Sci., Paris, **236** (1953), 1837—1839.

[12] Sur la caractérisation des équivalences régulières dans les demi-groupes. Bull. d. Sci. Acad. Roy. Belgique, **39** (1953), 942—947.

[13] Sur quelques classes de demi-groupes possédant certaines propriétés des semi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **238** (1954), 1765—1767.

[14] Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences régulières. C. R. Acad. Sci., Paris, **238** (1954), 1954—1956.

[15] Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences simplifiables. C. R. Acad. Sci., Paris, **238** (1954), 2046—2048.

[16] Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **239** (1954), 1335—1337.

[17] Sur la caractérisation des groupes par certaines propriétes de leurs relations d'ordre. C. R. Acad. Sci., Paris, **239** (1954), 1453—1455.

[18] Demi-groupes inversés et rectangulaires. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5), **41** (1955), 83—92.

[19] Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes. Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), n° 2, 103—159.

[20] Sur une propriété caractéristique des demi-groupes inversés et rectangulaires. C. R. Acad. Sci., Paris, **241** (1955), 1192—1194.

[21] Sur la théorie des demi-groupes. Comment. Math. Helv., **30** (1956), 211—223.

[22] Sur les automorphismes intérieurs d'un demi-groupe réductif. Comment. Math. Helv., **31** (1956), 145—151.

[23] Demi-groupes réductifs. Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. Sci. Paris, **9** (1955—1956), 1—9.

[24] Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes. Comment. math. helv., **32** (1957), 93—112.

Тэрстон (Thurston H.).

[1] Equivalences and mappings. Proc. London Math. Soc., (3), **2** (1952), 175—182.

[2] Some properties of partly-associative operations. Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 487—497.

Тюринг (Turing A.).

[1] The word problem in semi-groups with concellation. Ann. Math., **52** (1950), 491—505.

Уигман (Wiegmann N.).
[1] Some generalizations of Burnside's theorem. Canad. J. Math., 9 (1957), 336—346.

Уоллес (Wallace A.).
[1] A note on mobs. Anais. Acad. Brasil. Ci., 24 (1952), 329—334.
[2] A note on mobs, II. Anais. Acad. Brasil. Ci., 25 (1953), 335—336.
[3] Indecomposable semi-groups. Math. J. Okayma Univ., 3 (1953), 1—3.
[4] Cohomology, dimension and mobs. Summa Brasil. Math., 3 (1953), 43—55.
[5] Inverses in Euclidean mobs. Math. J. Okayama Univ., 3 (1953), 23—28.
[6] Topological invariance of ideals in mobs. Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 866—868.
[7] The structure of topological semi-groups. Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), 95—112.
[8] The position of C-sets in semi-groups. Proc. Amer. Math. Soc., No 4, 6 (1955), 639—642
[9] The Rees—Suschkevitsch structure theorem for compact simple semi-groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), 430—432.
[10] The gebietstreue in semi-groups. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, 59, 18 (1956), 271—274.
[11] Ideals in compact connected semi-groups. Proc. konikl. nederl. acad. wet., A., 59 (1956), 535—539.
[12] Retractions in semi-groups. Pacif. J. Math., 7 (1957), 1513—1517.

Феллер (Feller W.).
[1] Параболические дифференциальные уравнения и соответствующне им полугруппы преобразований. Математика, 1 : 4 (1957), 105—157 (также: Ann. Math., 55 (1952), 486—519).

Фосет (Faucett W.).
[1] Compact semi-groups irreducibly connected between two idempotents. Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 741—747.

Фосет, Кох, Намакура (Faucett W., Koch R., Namakura K.).
[1] Complements of maximal ideals in compact semi-groups. Duke Math. J., 22 (1955), 655—661.

Фукс (Fuchs L.).
[1] On semi-groups admitting relative inverses and having minimal ideals. Publ. Math. Debrecen, 1 (1950), 227—231.

Фуллертон (Fullerton R.).
[1] On a semi-group of subsets of a linear space. Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 440—442.

Халезов Е. А.
[1] Автоморфизмы матричных полугрупп. ДАН СССР, 96 (1954), 245—248.

[2] Изоморфизмы матричных полугрупп. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 5 (1954), 42—56.

Хантингтон (Huntington E.).
[1] Note on the definition of abstract groups and fields by sets of independent postulates. Trans. Amer. Math. Soc., 6 (1905), 181—197.

Хасимото (Hashimoto H.).
[1] On a generalization of groups. Proc. Japan Acad., 30 (1955), 548—549.
[2] On the kernel of semi-groups. J. Math. Soc. Japan., 7 (1955), 59—66.
[3] On the structure of semi-groups containing minimal left ideals and minimal right ideals. Proc. Japan Acad., 31 (1955), 264—266.

Хилл (Hille E.).
[1] Lie theory of semi-groups of linear transformations. Bull. Amer. Math. Soc., 56 (1950), 89—114.
[2] Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1951, 1—635.

Хилл, Филлипс (Hille E., Phillips R.).
[1] Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., 1957, 1—810.

Хилл, Цорн (Hille E., Zorn M.).
[1] Open additive semi-groups of complex numbers. Ann. of Math. (2), 44 (1943), 554—561.

Хион Я. В.
[1] Упорядоченные полугруппы. Изв. АН СССР (матем. сер.), 21 (1957), 209—222.

Холл (Holl M.).
[1] The word problem for semi-groups with two generators. J. symbolic Logic., 14 (1949), 115—118.

Хьюэтт (Hewitt E.).
[1] Compact monothetic semi-groups. Duke Math. J., 23 (1956), 447—458.
[2] Compact monothetic semi-groups. Duke. Math. J., 23 (1956), 447—457.

Хьюэтт, Цукерман (Hewitt E., Zuckerman H.).
[1] Finite dimensional convolution algebras. Acta Mathem., 93 (1955), 67—119.
[2] Arithmetic and limit theorems for a class random variables. Duke Math. J., 22 (1955), 595—616.
[3] The L_1-algebra of a commutative semi-group. Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 70—97.
[4] The irreducible representations of semi-group related to the symmetric group. Illinois. J. Math., 1 (1957), 188—213.

Цейтин Г. С.
[1] Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности. ДАН СССР, **107** (1956), 370—371.

Чехата (Chehata C.).
[1] On an ordered semi-group. J. London Math. Soc., **28** (1953), 353—356.

Шварц (Schwarz Št.).
[1] Teória pologrúp. Sbornik prác Prirodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave, č. **6** (1943), 1—64.
[2] O zovšeobecneniach pojmu grupy, Časopis Pěst. Mat.-fyz., **74** (1950), № 2, 95—113.
[3] Структура простых полугрупп без нуля. Чехослов. матем. журн., **1 (76)** (1951), 51—65.
[4] О полугруппах, имеющих ядро. Чехослов. матем. журн., **1 (76)** (1951), 259—301.
[5] К теории периодических полугрупп. Чехослов. матем. журн., **3 (78)** (1953), 7—21.
[6] О максимальных идеалах в теории полугрупп, I. Чехослов. матем. журн., **3 (78)** (1953), 139—153.
[7] Максимальные идеалы в теории полугрупп, II. Чехослов. матем. журн., **3 (78)** (1953), 365—383.
[8] Maximálne ideály a štrukrúra pologrúp. Mat.-fyz. časopis Slov. akad. Vied., **3**, (1953), 17—39.
[9] Теория характеров коммутативных полугрупп. Чехослов. матем. журн., **4 (79)** (1954), 219—247.
[10] Характеры коммутативных полугрупп как функции классов. Чехослов. матем. журн., **4 (79)** (1954), 291—295.
[11] О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп. Чехослов. матем. журн., **4 (79)** (1954), 296—313.
[12] К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Чехослов. матем. журн., **5 (80)** (1955), 1—23.
[13] Характеры бикомпактных полугрупп. Чехослов. матем. журн., **5 (80)** (1955), 24—28.
[14] О топологических полугруппах с односторонними единицами. Чехослов. матем. журн., **5 (80)** (1955), 153—163.
[15] Poznámka k teórii bikompaktných pologrúp. Mat.-fyz. časopis, **5** (1955), 86—89.
[16] Об увеличительных элементах в теории полугрупп. ДАН СССР, **102** (1955), 697—698.
[17] O pologrupách splňujucich zoslabené pravidlá krátenia. Mat.-fyz. časopis, **6** (1956), 149—158.
[18] The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semi-groups. Чехослов. матем. журн., 6 (81) (1956), 330—364.
[19] О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп. Чехослов. матем. журн., **7** (1957), 165—182.
[20] On the structure of the semi-group of measures on finite semi-groups. Чехослов. матем. журн., **7 (82)** (1957), 358—373.
[21] On elementary semi-group theorem and a congruence relation of Rédei. Acta Sci. Math., Szeged, **19** (1958), 1—4.

Шенкман (Schenkman E.).
[1] A certain class of semi-groups. Publ. math. Debrecen, 4 (1956), 262—275.
[2] A certain class of semi-groups. Amer. Math. Monthly, 63 (1956), 242—243.

Шилдс (Shields A.).
[1] The n-cube as a product semi-groups. Michigan. Math. J., 4 (1957), 165—166.

Шифердеккер (Schiferdecker E.).
[1] Die fastperiodischen Funktionen einer Oreschen Halbgruppe. Arch. Math., 6 (1955), 428—438.
[2] Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen. Math. Z., 62 (1955), 443—468.
[3] Einbettungssätze für topologische Halbgruppen. Math. Ann., 131 (1956), 372—384.
[4] Fastperiodische Fortsetzung von Funktionen auf Halbgruppen. Math. Nachr., 14 (1955—1956), 253—261.

Шмидт (Schmidt F.).
[1] Bemerkungen zum Brandschengruppoid. S. B. der Heidelberg Ak. Wiss., Math. nat. Kl., 8-te Abh. „Beitrage zur Algebra", (1927) 91—103.

Шрейер (Schreier I.).
[1] Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmenge. Fundam. Math., 28 (1937), 261—264.

Штэйнфельд (Steinfeld O.).
[1] Über die Quasiideale von Halbgruppen. Publ. Math. Debrecen, 4 (1956), 262—275.
[2] Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch — Kern. Acta scient. math., 18 (1957), 235—242.

Шутов Э. Г.
[1] Потенциальная делимость элементов в полугруппах. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, 166 (1958), 75—103.
[2] Потенциальная сопряженность элементов в полугруппах. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, 166 (1958), 105—119.
[3] Потенциальная стационарность элементов полугрупп. Уч. зап. Удмуртск. пед. ин-та, 12 (1958), 16—23.
[4] Потенциальная односторонняя обратимость элементов полугрупп. Уч. зап. Удмуртск. пед. ин-та, 12 (1958), 24—36.

Шютценбергер (Schützenberger M.).
[1] Une théorie algébrique du codage. C. R. Acad. Sci., Paris, 242 (1956), 862—864.
[2] Sur une représentation des demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, 242 (1956), 2907—2908.

[3] Sur deux représentations des demi-groupes finis. C. R. Acad. Sci., Paris, **243** (1956), 1385—1387.

[4] $\bar{D}$-représentation des demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **244** (1957), 1994—1996.

[5] Applications des $\bar{D}$-représentations à l'étude des homomorphismes des demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **244** (1957), 2219—2221.

[6] Sur une propriété combinatoire des demi-groupes libres. C. R. Acad. Sci., Paris, **245** (1957), 16—18.

[7] Sur la représentation monomiale des demi-groupes. C. R. Acad. Sci., Paris, **246** (1958), 865—867.

[8] Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe. C. R. Acad. Sci., Paris, **246** (1958), 2442—2444.

Эванс (Evans T.).

[1] A note on the associative law. J. Lond. Math. Soc., **25** (1950), 196—201.

[2] Embedding theorems for multiplicative systems and projective geometries. Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 614—620.

[3] An embedding theorem for semi-groups with cancellation. Amer. J. Math., **76** (1954), 399—413.

Ямада (Yamada M.).

[1] A note on middle unitary semi-groups. Kodai Math. Sem. Rep., **7** (1955), 49—52.

[2] On the greatest semilattice decomposition of a semi-group. Kodai Math. Sem. Rep., **7** (1956), 59—62.

[3] Compositions of semi-groups. Kodai Math. Sem. Rep., **8** (1956), 107—111.

[4] Regularly totally ordered semi-groups. I. Bull. Shimane Univ. (Natur. Sci.). (1957), No 7, 14—23.

Ямада, Кимура (Yamada M., Kimura N.).

[1] Note on idempotent semi-groups. Proc. Japan. Acad., **34** (1958), 110—112.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

Абстрактная характеристика I. 1.15 (17)
Автоморфизм I, 1.16 (17)
Алгебраическое действие I, 1.2 (9)
Антиавтоморфизм I, 1.17 (17)
Антиизоморфизм I, 1.17 (17)
Антисимметричность I, 5.6 (55)
Ассоциативность I, 1.18 (18)

Базисный класс VIII, 5.1 (454); VIII, 5.19 (464)
Булева алгебра II, 4.16 (91)

Внутренний автоморфизм VII, 6.14 (408); VII, 6.17 (410)
Вполне изолированная подполугруппа IV, 6.1 (239)
Вполне простая полугруппа V, 3.9 (266); V, 4.2 (269)
Вполне регулярная полугруппа II, 6.1 (104); VIII, 2.1 (424)
Вполне регулярный элемент II, 6.1 (104)

Главный идеал IV, 3.6 (212)
Голоидная полугруппа VIII, 4.8 (450)
Гомогруппа V, 1.8 (252)
Гомоморфизм VII, 1.1 (348)
Граница I, 5.12 (57)
Группа I, 3.2 (29); II, 1.3 (65); II, 2.15 (76)
Группоид I, 1.5 (11)

Дедекиндова структура II, 4.14 (90)
Делимость элементов II, 1.2 (65)
Дистрибутивность II, 4.13 (89)

Единица II, 2.3 (71); II, 2.4 (72); II, 2.6 (72)
Естественный гомоморфизм VII, 2.5 (362)

Зероидный элемент II, 1.6 (68)

Идеал IV, 1.1 (193)
Идеальная оболочка IV, 3.3 (211)
Идеальная эквивалентность IV, 3.3 (211)
Идеальный слой IV, 3.3 (211)
Идеальный фактор IV, 4.5 (221)
Идемпотент II, 2.3 (72)
Изолированная подполугруппа IV, 6.1 (239)
Изоморфизм I, 1.8 (13); I, 1.10 (14); I, 1.11 (14); I, 1.13 (15)
Инверсная полугруппа II, 7.2 (114); II, 7.4 (115)

Класс регулярности II, 6.11 (111)
Коммутативная полугруппа идемпотентов II, 4.1 (83)
Коммутативиая связка VIII, 1.12 (422)
Коммутативность I, 1.18 (18); I, 1.19 (19); I, 3.2 (29)
Коммутаторное условие IV, 6.7 (243)
Конгруэнция I, 5.18 (60)

Левый сдвиг I, 3.9 (34)

[1] В скобках указаны номера страниц.

Линейная упорядоченность I, 5.11 (57)

Максимальное множество IV, 2.1 (203)
Максимальный элемент II, 4.17 (92)
Матричная связка VIII, 1.14 (422)
Минимальное множество IV, 2.1 (203)
Минимальный идеал IV, 3.3 (211)
Моногенная полугруппа III, 3.1 (151)
Мономорфизм I, 1.13 (15)
Мультипликативное множество I, 1.5 (10)

Надполугруппа III, 1.5 (133)
Наименьшее общее правое кратное гомоморфизмов VII, 1.15 (358).
Наибольший общий правый делитель гомоморфизмов VII, 1.15 (358).
Ненулевой идеал V, 3.13 (267)
Неподвижная точка II, 5.1 (95)
Неприводимое порождающее множество III, 2.5 (141)
Нильпотентная полугруппа IX, 4.5 (488); IX, 4.6 (489)
Нормальная подполугруппа VII, 4.9 (378)
Нормальный комплекс VII, 4.1 (375)
Нуль II, 2.3 (71); II, 2.4 (72); II, 2.6 (73)

Обобщенная груда II, 7.10 (120)
Оболочка IV, 2.6 (204)
Обратимое преобразование I, 3.13 (37); I, 3.14 (38); I, 3.16 (39)
Обратимость действий I, 1.18 (18); VI, 3.1 (312)
Обратимый элемент VI, 1.1 (299)
Обратный элемент II, 2.1 (71); II, 2.13 (75)
Определяющая совокупность соотношений IX, 1.9 (469); IX, 3.10 (483).
Определяющее отношение IX, 3.2 (480)
Отношение I, 5.1 (52)

Периодическая полугруппа III, 4.1 (160)
Плотно вложенная полугруппа VII, 5.6 (393)
Подполугруппа III, 1.5 (133)
Подполугруппа, правильная относительно обратимости VI, 4.3 (325); VI, 5.5 (329)
Подполугрупповая характеристика III, 7.2 (180)
Полная структура I, 5.13 (58)
Положительная часть упорядоченной группы X, 3.5 (537)
Полугруппа I, 3.1 (28)
Полугруппа матричного типа V, 5.1 (279); V, 6.3 (291)
Полугруппа подполугрупп полугруппы III, 7.2 (179)
Полугруппа преобразований I, 3.6 (32)
Полугруппа с отделяющейся групповой частью VI, 6.3 (339)
Полуструктура I, 5.13 (57)
Порождающее множество III, 2.1 (140)
Последовательно аннулирующая связка VIII, 4.2 (446)
Потенциально обратимый элемент X, 4.1 (546); X, 4.13 (552)
Правоуничтожающее произведение VIII, 5.12 (460)
Правый сдвиг I, 3.12 (37)
Представление I, 1.15 (16); I, 3.10 (35); I, 3.12 (37); VII, 1.6 (351)
Преобразование I, 3.5 (30)
Примитивный идемпотент V, 3.10 (266)
Присоединение внешним образом II, 2.12 (74)
Производные отношения I, 5.20 (62); I. 5.21 (63)
Прямое произведение X, 5.12 (561); X, 5.18 (563)

Разбиение I, 5.8 (55); VIII, 1.2 (415)
Регулярная едница II, 6.2 (105)

Регулярная полугруппа II, 6.1 (104)
Регулярная сопряженность II, 6.6 (107)
Регулярный элемент II, 6.1 (104)
Рефлексивность I, 5.6 (55)

Свободная полугруппа IX, 1.3 (467); IX, 5.1 (493)
Свободное множество IX, 5.1 (493)
Свободное произведение X, 5.2 (557); X, 5.18 (563)
Связка VIII, 1.6 (418)
Симметричность I, 5.6 (55)
Следствие из соотношений IX, 1.7 (468); IX, 1.8 (469)
Слово в алфавите IX, 1.2 (466); IX, 1.4 (467)
Слой IV, 2.4 (204)
Сокращаемость I, 1.18 (18); I, 3.2 (29)
Соотношения в полугруппе IX, 1.5 (467)
Соседние множества IV, 2.8 (204)
Специальное произведение элементов IX, 6.2 (507)
Стабильность I, 5.17 (60)
Структура I, 5.13 (58)
Структурный изоморфизм III, 7.6 (182)

Таблица умножения I, 1.6 (11)
Тип моногенной полугруппы III, 3.7 (155); III, 3.16 (159)
Тождественное преобразоваиие I, 3.13 (37)
Тождество в полугруппе IX, 4.1 (486)

Увеличительный элемент III, 5.1 (166)
Умножение гомоморфизмов VII, 1.12 (355)
Умножение подмножеств III, 1.1 (130)
Умножение преобразований I, 3.6 (32)
Умножение отношений I, 5.2 (53)
Умножение частичных преобразований I, 4.2 (45)
Универсально-максимальиое множество IV, 2.1 (203)
Универсально-минимальное множество IV, 2.1 (203)
Универсальный класс III, 1.9 (135)

Факторполугруппа VII, 2.4 (362); VII, 4.15 (383)

Характер VII, 6.20 (413)

Цепь IV, 2.10 (206); IV, 4.1 (220)
Циклическая группа III, 3.17 (159)

Частичная упорядоченность I, 5.9 (56)
Частичное преобразование I, 4.1 (45)
Частично упорядоченная полугруппа X, 3.2 (535)

Эквивалентность I, 5.7 (55)
Эндоморфизм I, 3.18 (40); I, 3.19 (41); I, 3.20 (44)
Эпиморфизм VII, 1.1 (348)