Жорж Лошак

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ

R&C Dynamics

GEORGES LOCHAK

LA GÉOMÉTRISATION DE LA PHYSIQUE

FLAMMARION

ЖОРЖ ЛОШАК

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ

Перевод с французского А. И. Пигалева

R&C Dynamics РХД
Москва • Ижевск

2005

УДК 53

Лошак Ж.

Геометризация физики: Пер. с франц. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 280 с.

С физикой мы сегодня сталкиваемся повсюду — когда имеем дело с кредитными картами, или с часами с кварцевой стабилизацией хода, или с тем же телевидением, — но она все равно пугает нас: своей загадочностью, огромными размерами и неимоверной сложностью устройств (лазеров, ускорителей частиц и т. п.) и абстрактностью теоретического языка (теории групп, алгебр, неевклидовых геометрий). Кажется, чем сильнее физика влияет на мир, тем более далекой от человека она становится.

В этой книге доказывается, что это совершенно не так. Физики сохраняют свой эстетический вкус и свое понимание аналогий и, несмотря на некоторый исторический разрыв, именно глубокие корни питают плоды современной физики, абстрактность которой преображает вечные образы геометрии. Ибо геометрия — главное слово предлагаемой книги. Постоянно присутствуя и бесконечно изменяясь, геометрия со времен античности и до наших дней объединяет физическую картину мира, она служит нитью Ариадны, ведущей читателя к идеям общей теории относительности, квантовой механики и теории элементарных частиц, проходя через такие промежуточные пункты, как тела Платона, астрономия Кеплера, механика Ньютона, законы кратчайшего пути и симметрия кристаллов.

ISBN 2-08-081364-1 (франц.)
ISBN 5-93972-460-4 (рус.)

http://rcd.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ «ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ФИЗИКИ»

Когда Эйнштейн предложил Леопольду Инфельду совместно написать «Историю идей в физике», то он добавил, что им нужно будет написать такую книгу, чтобы, с одной стороны, любой человек смог ее прочитать и извлечь из неё некоторую пользу, а с другой стороны — чтобы самые великие физики смогли в ней найти что-то новое.

Я лично берегусь как огня любой претензии им подражать. Но как не взять эти слова за какой-то далекий идеал и не стремиться к нему?

Геометризация физики — это не вся физика, но это и не просто способ решения задач или иллюстративный метод украшения математики. Геометрия принадлежит самим основам физики, она ее скелет, который придает ей прочность, самоуверенность и твердую походку, которые вызывают доверие. И хотя мы все убеждены, в том, что последнее слово в физике принадлежит эксперименту, солидность и строгость геометрической структуры нас как бы заранее убеждает, что «это должно быть так». И иногда это оказывается правдой. Поэтому изучение геометрии в физике приносит какое-то эстетическое удовольствие и чувство логического удовлетворения. Именно эти чувства, надеюсь, передадутся читателю.

Даже тех, кто мало знаком с физикой или знает ее только «издали», книга познакомит с исторической эволюцией всего этого знания или даже просто с эволюцией самого значения слова «геометрия» от античной Греции до наших дней; как менялся смысл и определение понятия о «расстоянии» и что означает, что одно расстояние «короче» другого; как меняется роль геометрии и как она из какой-то неподвижной сцены, на которой происходят физические события, становится настоящим физическим объектом, который в конце концов отождествляется с физическим веществом.

Молодым студентам будет интересно познакомиться с появлением и развитием новых концепций в геометрии: как меняются сами представления, как точка становится функцией, как преобразования объединяются в группы, как числа становятся операторами. В книге этот материал изложен в исторической последовательности, но без строгих формулировок и терминов, а с помощью обыкновенных слов. Важно понять, как самые удивительные перемены и неожиданные определения не «падают с неба», порождаемые фантазией математиков, а становятся мало-помалу естественными, если воображение поднимается по ступенькам последовательных аналогий.

А что касается моих дорогих коллег, физиков, то опыт показал мне, что им интересно и часто даже приятно, посетить знакомые места, взглянув на них другими глазами. В конце концов, тот, кто много раз был в Италии, все-таки читает рассказы тех, кто о ней пишет, — просто потому что они другими словами и новыми чувствами вызывают воспоминания прошедших времен и иногда забытых путешествий.

Но в предисловии к этой книге мне хочется сказать, что это не книга, а «полкниги», потому что планировалась вторая часть. Настоящая часть касается только стабильного, неподвижного, стационарного мира. Здесь идет речь только о физических явлениях, в которых все повторяется, где все то, что движется вперед, может пойти и назад, не нарушая никаких физических законов. Это мир, в котором, на самом деле, ничего не происходит и в котором время не течет; в нем ничто не умирает, но ничто и не рождается. В нем все всегда было и всегда будет. Это то, что рассказывает главная часть физики, это то, что совершенно ясно: физика началась с небесной механики, где все кажется бесконечно повторимо, затем появилась оптика с принципом обратимости света, электричество, направление которого произвольно выбрано; и — «last but not least» — общая механика. В самом деле, механика

Ньютона была *более* общей, но ее применение к небесной механике привело к грандиозному обобщению и развитию только одной ее части: аналитической динамики Лагранжа, Гамильтона и Якоби.

Только об этой области механики будет идти речь в этой книге. Эта механика связана с принципом наименьшего действия и именно он убирает стрелу времени и запрещает трение, асимптотическую устойчивость, диссипативные силы, связь с теплотой и со вторым началом термодинамики. Эти области механики принадлежат Анри Пуанкаре, Ляпунову, школе Андронова, Понтрягина. Именно этим вопросам посвящена вторая половина этой книги, значительная часть которой уже была написана, когда я вдруг, почти случайно, взялся за старую работу, начатую полвека назад с Луи де Бройлем. Эта работа меня привела к уравнению магнитного монополя, что, в свою очередь, привело к сотрудничеству с блестящей группой русских физиков и прежде всего — с моим другом Леонидом Уруцкоевым. Если это дело оставит мне еще силы, я вернусь ко второй части этой книги.

Ж. Лошак

БЛАГОДАРНОСТИ

Помимо моих читателей, эта книга многим обязана беседам с многочисленными друзьями (некоторые из них не являются физиками или математиками). Я позволю себе выразить всем им общую — «коллективную» — благодарность и надеюсь, что они не обидятся на такую анонимность. Но я хотел бы особо упомянуть моих первых читателей и критиков — *Мишеля Буате, Режи Дютей, Даниэля Фарга*, моего сына Пьера Лошака, неуступчивого и бесконечно ценного партнера, а также *Мишель Лошак*, мою всегдашнюю вдохновительницу, которая, опираясь на свой литературный дар, всегда умела отделить в науке главное от второстепенного.

Наконец, я не могу не упомянуть о том, что эта книга представляет собой расширенный вариант доклада, сделанного мной в Серизи-ла-Салль на семинаре, устроенном Эдит Эргон. Этот семинар, посвященный творчеству Рене Тома, проходил под руководством Жана Петито[1]. Я хочу выразить мою несколько запоздалую благодарность им, а также Жерару Жорлану, который, принимая участие в семинаре, навел меня на мысль о написании этой книги.

---

[1]Материалы семинара были опубликованы; см.: *Logos et Théorie des catastrophes*, chez. Patico, Genéve, 1982.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика часто отталкивает непосвященных своим суровым обликом, который придают ей ее впечатляющее экспериментальное оборудование и непонятный теоретический язык. Но предлагаемая вниманию читателя книга, посвященная размышлениям о математизации физики, написана в надежде помочь читателю с помощью некоторых образов проникнуть в тайны современной физики, приоткрыть ту картину мира, что скрывается за загадочным внешним обликом.

Вопреки этой внешней таинственности, с логической точки зрения, физика является самой простой из наук о природе, поскольку она имеет дело только с небольшим количеством общих законов, которые применяются к большому числу явлений. Но именно эта принципиальная простота парадоксальным образом ответственна за «техническую» сложность, поскольку благоприятствует той самой математизации, движущие силы которой от античности до наших дней мы и будем исследовать.

Путеводной нитью нам послужит геометрия. Мы выбрали именно геометрию по многим причинам, которые будут полностью раскрыты в ходе изложения; здесь же поясним наш выбор в нескольких словах.

Математика играет в физике двоякую роль — предсказательную и структурную. Первую легко понять в принципе, хотя на практике эта роль достаточно сложна. Сказанное означает, что физические законы выражаются через посредство алгебраических формул, которые получаются с помощью различных математических средств, заимствованных из алгебры, геометрии и анализа. Математический анализ, созданный в XVII веке и известный как «дифференциальное и интегральное исчисление», в настоящее время господствует в теоретической физике. Все великие теории имеют в своей основе дифференциальные уравнения. Но математика не сводится к этой инструментальной роли, она является составной частью теории и участвует в формировании физической картины мира. Именно об этой *структурной роли* мы и будем говорить. Она проявляется с самого момента создания теории, то есть с момента появления такой физической идеи, которая оказывается достаточно четкой и ясной для того, чтобы быть выраженной с помощью формул или уравнений. Если идея действительно удачна, то она вызывает ощущения точности и гармонии, поскольку формулы говорят больше, чем слова. Логическая самосогласованность, компактность или элегантность математического языка с самого начала придают теории черты правдоподобия и, можно сказать, даже свидетельствуют о ее благородном происхождении, хотя со времен Ньютона физики убеждены, что главенствующая роль принадлежит не формализму, а эксперименту.

В ходе изложения мы увидим, что и само математическое выражение теории может стать источником интуитивных прозрений. Теория доходит до высшей степени общности и становится более плодотворной благодаря той форме, в которой теоретики искусно сумели ее выразить, и не только потому, что такая форма позволяет выполнять полезные вычисления, но еще и потому, что она с помощью обращенных к нашему мышлению формул позволяет предсказать новые свойства, законы и аналогии, которые в противном случае остались бы незамеченными.

В течение более чем двух тысячелетий от Пифагора до Галилея и Кеплера математики сводили физические процессы к геометрии; особенно хорошо это видно на примере Ньютона. Такая эволюция кратко описывается в первых трех главах, которые охватывают время от греческих философов до XVIII века и, проходя через целые исторические периоды, доходят до Лагранжа, работы которого знаменуют важный прорыв к современной геометрии. С этого момента геометризация физики стала очевидной. Тем более, что геометрия, изобретенная греками и в течение столетий доводимая до совершенства величайшими математиками, рассматривалась как «естественная» геометрия, как единственно возможная геометрия, которая, согласно общему мнению, отождествлялась с самой физикой.

Лагранж во всем усомнился: он заявил, что не хочет иметь дела с геометрическими фигурами и будет полагаться только на новый и мощный инструмент — анализ. Он основал *аналитическую механику*. Однако механика тогда была единственной великой физической теорией. Следовательно, геометрия оказалась преданной забвению или, во всяком случае, ненужной для физики. Хотя Декарт называл *аналитической* ту геометрию, что пользовалась алгеброй, а не анализом, Лагранж в этом отношении стал великим продолжателем его дела: подлинная аналитическая геометрия появилась именно во времена Лагранжа. Но и Декарт (так же, как значительно позже Лагранж) считал, что он упразднил обычную геометрию — геометрию фигур. В некотором смысле они оба были правы, поскольку с тех пор — по крайней мере, начиная с Лагранжа — больше никогда уже геометрия и физика не могли довольствоваться соображениями элементарной геометрии. Вычисления стали необходимыми почти во всех случаях. Однако оба — страстные последователи созданной ими самими новой науки — были все же слишком уж нетерпимы; геометрия возродилась-таки, но в других формах.

Движимые смелыми обобщениями и мощными аналогиями, математики оказались вынуждены вновь вводить геометрические концепции, включая сюда и область анализа, откуда, как полагал Лагранж, он изгнал их навсегда. Именно эта история будет рассказана в главной части книги — во всяком случае, в той мере, в какой она касается физики, поскольку физика, как нетрудно догадаться, должна быть геометризована заново, можно даже сказать, «геометризована, как никогда прежде». Однако новые геометрии, приобретающие сегодня власть в физике, настолько отличны от той геометрии, от которой отказался Лагранж, что это даже трудно себе представить.

Между тем, мы увидим, что в некоторых отношениях эти новые геометрии уходят своими корнями в глубокое прошлое. Вот почему во всех главах, начиная с пятой, описываются не исторические периоды, а определенные темы, и лишь в каждой отдельной главе изложение следует историческому ходу событий: мы начнем с принципа кратчайшего пути, а затем перейдем к неевклидовым пространствам, пространствам большой размерности, рассмотрим роль геометрии в квантовой механике и теории относительности, возникновение теории групп и ее влияние на физику.

Являясь размышлением о представлении физического мира с помощью геометрии, эта книга затрагивает более общую проблему отношений между наукой и реальностью, однако мы не включаемся в идеологический спор и, насколько это возможно, придерживаемся фактов. Единственный более или менее философский момент будет связан с анализом абстрактности геометрических представлений и того (как правило, довольно большого) разрыва, что существует между ними и наблюдаемой реальностью.

По этому вопросу существует разногласие между физиками, которые по своим взглядам всегда разделялись на две большие группы — на тех, кто склонен к *модельным представлениям* и ищет представления явлений в окружающем нас пространстве, и на *формалистов*, исходящих из более абстрактных образов. Этот раскол не является абсолютным, поскольку возможен легкий переход от одной тенденции к другой, но у различных авторов заметны признаки ориентации их исследований (и проекция полученных результатов) на то или иное направление. История показывает, что обе тенденции приводили науку к важнейшим достижениям, и нельзя претендовать на мнимый «прогресс», который был бы свойственен одной тенденции, давая ей некое преимущество перед другой. В книге читателя ждет описание обеих тенденций; но, независимо от того, к какой тенденции читатель больше склоняется, мы приглашаем его воздать почести гению — откуда бы этот гений ни происходил, — не выделяя особо, в соответствии со своими предпочтениями, те теории, о которых мы будем говорить. Ведь это величайшие теории, и в сравнении с их мощью и красотой различия в манере мышления отходят на второй план. В значительно большей степени, чем конкретный научный результат, или общую картину мира, каждый автор раскрывает нам частичку своей «внутренней жизни», о которой де Бройль говорил, что она является нашим «единственным объектом познания, поскольку все, что мы познаем, проходит через нее и преломляется в ней»[2].

Это означает существование различия между «конкретным» и «абстрактным», поскольку наука, как бы она ни была близка к фактам, не является простым отражением природы. Она имеет дело с природой, увиденной человеком, так что человек размышляет не о вещах, а о понятиях, а, следовательно, делает это через «фильтры» своего воображения. Говорят, что наука не является «фотографией» реальности, но даже если бы она, вопреки нелепости этого представления о ней, попыталась бы стать такой фотографией, то ей был бы необходим также и некий пояснительный код, поскольку никакого совершенно верного — истинного — представления реальности не существует. Всегда имеется код, который стоит между реальностью и нами, и сама «фотография» является закодированной, что может быть проиллюстрировано следующим примером.

Этнолог Орор Моно-Беккелен[3], изучая жизнь индейского племени трумас, живущего в верховьях реки Шингу в Мату Гросу (Бразилия), сделала фотографии (черно-белые) праздника и показала их индейцам; тем понадобилось немало времени, чтобы «расшифровать» изображения, и даже простая белая рамка, окаймлявшая фотографии, вызвала серьезные затруднения[4]. Наконец они узнали соплеменников: сначала по их раскраске и праздничным атрибутам и лишь затем — по чертам лица. Любопытно, что они могли «расшифровать» фотографии, лишь повернув их на девяносто градусов, так что стоящие люди казались лежащими. Уже узнанные, изображения на фотографиях индейцы называли «призраками», что на

[2]Lous de Broglie. *Nouvelles perspectives en microphysique*, Albin-Michel, Paris, 1956; Flammarion, coll. «Champs», 1992.

[3]Источник: частное сообщение.

[4]У индейцев были зеркала, но в виде кусков стекла без рамки, так что они никогда не видели обрамленного изображения и были удивлены, увидев его впервые.

их языке означает одновременно тень объекта, отражение лица, которое человек видит в зрачке другого, и очертания камня, используемого в определенных ритуалах. Прекрасный пример человеческого инстинкта теоретизации, который доказывает, что любое представление реальности является абстрактным!

Глава I

ИСТОРИЯ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ФИЗИКИ

Да не войдет сюда человек, не знающий геометрии[5].

Пять элементов и пять многогранников. Первые законы симметрии

Господство геометрии в физике — будь это представление природы или объединение абстрактных форм в объектах или явлениях — восходит к Древней Греции. При рассмотрении утверждения Пифагора о шарообразной форме Земли историки, похоже, единодушно сходятся на том, что Пифагор был движим эстетическими соображениями: следовательно, речь шла, скорее, именно об объединении форм, чем об истинном представлении. Но когда спустя два века Аристотель высказал ту же точку зрения, он пытался описать шарообразность Земли, опираясь на наблюдения и на теорию тяготения [1][6]. Он делал свои выводы, исходя из круговой формы тени, отбрасываемой Землей на поверхность Луны во время затмений, а также из того, что, двигаясь с севера на юг, путешественники видят, как созвездия исчезают позади них за горизонтом, тогда как другие восходят у них над головой. Кроме того, Аристотель объяснял шарообразность Земли, предполагая, что тяжелые тела падают по вертикали, которая направлена в центр мира (совпадающий, по его мнению, с центром Земли) [1][7]:

[5]Слова Платона, начертанные на фронтоне Академии. («Академос» были сады богатого гражданина, в котором Платон создал свою школу философии — то была «Академия» самого Платона!).

[6]Цифры в квадратных скобках отсылают к библиографическому списку.

[7]Перевод дан по изданию: Аристотель. О небе // Аристотель. Сочинения: В 4-х т. М., 1981. Т. 3. С. 338. (*Прим. перев.*).

> Если они двигались от всех точек периферии к одному центру равномерно, то ясно, что масса должна была получиться одинаковой со всех сторон... Но такова форма шара. Однако то же самое будет справедливо и в том случае, если части земли стекались к центру не со всех сторон равномерно: большее количество всякий раз должно толкать вперед находящееся перед ним меньшее, так что и то и другое имеют тяготение (rhope) вплоть до центра и бо́льшая тяжесть толкает перед собой меньшую до тех пор, пока не достигнут этот центр.

За две тысячи лет до Ньютона Аристотель в своей теории шарообразности Земли собрал воедино три типа геометрических аргументов:

1) Прибегнул к ссылке на наблюдаемые факты (в частности, на форму земной тени).

2) Чтобы теоретически удостоверить это свойство, отказался от основанной на эмпиризме индукции и предпочел придерживаться «космического» принципа, выставленного *a priori*: тяжелые тела стремятся к центру мира, а этот центр совпадает с центром Земли. Итак, нет великой теории, которая не основывалась бы на таком высшем принципе.

3) Наконец, не зная в явном виде закона тяготения и создав еще довольно примитивную (и даже в значительной степени ложную) динамику, опирался на то немногое, что ему удалось угадать, — на знание *общего закона симметрии*. Итак, для него *Земля шарообразна, потому что закон тяготения должен быть изотропным*. Когда в наши дни мы по каким-либо соображениям *a priori* используем теорию групп в квантовой механике, то и здесь обращение к симметрии ничем не отличается от аристотелевского.

Здесь мы имеем дело с относительно простым примером геометризации физики, соответствующим поиску геометрического *представления* природного факта. Другой пример, имеющий решающее значение, будет приведен дальше, и он связан с исследованием движения звезд — задачей, которая на протяжении столетий продолжает занимать лучшие умы. Но прежде необходимо подчеркнуть и проиллюстрировать тот факт, о котором мы уже упоминали. Речь идет о том, что геометризация физики далеко не всегда заключается в представлении вещей. Ее цель зачастую более абстрактна и заключается в установлении связи между геометрическими и физическими объектами. Похоже, античные философы — как и современные физики — всегда стремились обнаружить в природе геометрические формы, которые они и познавали. Для них эти формы определяли, прежде всего, предустановленную гармонию, на которую ссылалась философия и которая была некоей разновидностью канвы умопостигаемости и эстетичности, что и служило основанием представления мира.

Такая концепция роли математики (а не только геометрии) в науках о природе восходит к Пифагору и в наши дни еще очень живуча. Ученик Пифагора Филолай из Кротона писал, что «числа суть постоянная причина всего происходящего в мире» [1]. Но самый впечатляющий, самый загадочный и — что очень интересно — самый современный способ связывать таким образом математику с физическим миром обнаруживается в космологии Платона — в теории *элементов* и их *специфических сущностей.*

Пересказывая в своем «Тимее» уже тогда достаточно древнее учение, найденное им у Эмпедокла, Платон заявляет, что бог создал мир из четырех элементов — *земли, огня, воздуха и воды.* Земля и огонь, согласно Платону, первичны, потому что без земли ничто не осязаемо, а без огня ничто не видимо. Однако введение двух других элементов происходит в соответствии со странным геометрическим соображением: Платон ищет связь между землей и огнем и находит ее в геометрической задаче, столь ценной для пифагорейцев. Нужно найти квадрат, площадь которого была бы равна площади данного прямоугольника. Сторона квадрата выступает в качестве среднего члена, *связи* между сторонами прямоугольника, являясь их средним геометрическим.

Но, возражает Платон, эта задача отыскания площади относится к геометрии на плоскости, тогда как мир имеет три измерения. Именно для того, чтобы обобщить понятие среднего геометрического в случае объемов, Платон и вводит два других элемента — воздух и воду в качестве промежуточных величин вместо единственной стороны квадрата.

Таким образом, именно вследствие некоторой геометрической необходимости высшего порядка мы перешли от двух элементов к четырем. И эти четыре элемента непрерывно превращаются друг в друга: вода замерзает и превращается в камень (следовательно, в землю) или нагревается и превращается в пар (следовательно, в воздух), а туман (воздух) может сгущаться (превращаясь в воду), огонь гаснет (превращаясь в воздух), а знойный воздух превращается в огонь. Подвергая свои «элементы» изменениям, Платон пытается найти их *специфические сущности*, еще раз обращаясь к геометрии, поскольку он определяет эти сущности с помощью четырех геометрических объектов, *правильных многогранников*, которые в глазах греческих философов воплощали некое совершенство:

— с *землей*, самым неподвижным элементом, Платон связывает *куб*, единственный правильный многогранник, грани которого являются квадратами, и по этой причине он лучше всего пригоден для обеспечения устойчивости;

— с *огнем* Платон связывает *тетраэдр*, который является многогранником, имеющим самые острые грани и наименьшее число оснований, а потому оказывающимся и наиболее подвижным;

— *воде* и *воздуху*, обладающим возрастающей подвижностью и занимающим промежуточное положение между землей и водой, Платон ставит в соответствие *октаэдр* и *икосаэдр*.

Уже Эмпедокл связывал с элементами эти четыре многогранника, а поскольку только они и были известны в его время, гармония казалась безупречной. Однако затем был открыт еще один правильный многогранник — *пентагональный додекаэдр*. Что делать с ним? Похоже, что Филолай был первым, кто задался вопросом о том, нельзя ли сопоставить такому додекаэдру некий пятый элемент. Но для Платона эта проблема стала намного более насущной, ведь его современник Теэтет доказал, что этот пятый многогранник является последним — их пять и только пять. Каков соблазн — завершить геометрическое описание мира открытием пятого элемента!

В своих последних концепциях (диалог *«Послезаконие»* [1]) Платон излагает собственные взгляды на пятый элемент: это *эфир*, который, будучи, согласно Платону, Мировой Душой, формирует одушевленные существа, возможно, при участии других элементов. Теория Платона о пяти элементах была принята его гениальным учеником Аристотелем, который после некоторых изменений (перемены мест эфира и огня) превратил ее в учение о *пяти начальных сущностях,* сформулированное затем в его *«Физике»*.

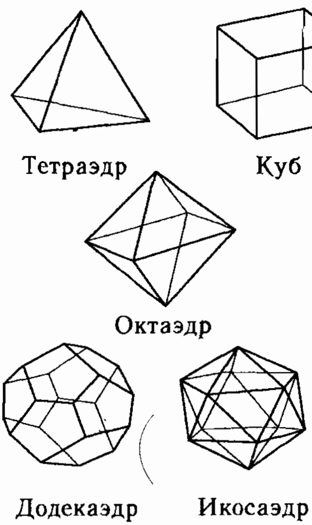

Рис. 1. Правильные многогранники.

Было бы неправильно с «высоты» современной науки с улыбкой взирать на платоновское учение о многогранниках и специфических сущностях, видя в нем только «туманные фантазии». Конечно, здесь недостает обращения к *наблюдению* и того стремления к согласию наблюдений с *числами*, что лежит в основе могущества современной науки. Но у Платона налицо идея — и идея, выраженная блестяще, — о том, что математика является для физики источником умопостигаемости мира и что соотнесение, даже априорное, геометрического объекта с физическим может прояснить глубинную природу этого последнего. Итак, платоновская идея была вновь обретена физикой XX века: придерживаются ли ее безоговорочно или опасаются злоупотреблять ею — невозможно отрицать ее нынешнего превосходства. Об этой идее мы будем снова говорить в связи с систематическим рассмотрением симметрий *a priori* с использованием теории групп, введением абстрактных пространств и исследованием их геометрических свойств.

В частности, важно проследить, каким образом геометрические свойства, введенные у Платона *a priori*, подводят к идее новых физических объектов. Уже саму необходимость перехода от двух элементов к четырем Платон доказывает с помощью геометрического аргумента, но появление пятого элемента является самым поразительным. Дело в том, что хотя идея связать четыре первых элемента с четырьмя первыми многогранниками и предшествует открытию пятого многогранника, все же это единственный логически возможный путь, ведущий к открытию пятого элемента.

Позже мы увидим, что открытие Дираком антиматерии — одно из наиболее выдающихся физических открытий нашего века — связано с точно такой же попыткой: по соображениям *a priori* теория опирается на геометрическую структуру, внутренняя логика которой навязывает нам — часто к нашему удивлению и даже вопреки нашему желанию — физическую идею, о которой мы и не помышляли. Само собой разумеется, что, в противоположность древнегреческой науке, современная наука придерживается некоторой идеи, только если она подтверждена опытом, поскольку именно опыт (а не вера теоретика в предустановленную гармонию) выносит решение об истинности и ложности.

Блуждающие светила и особая роль окружности у древних. Концентрические сферы

На протяжении более двух тысяч лет астрономия представляла собой единственную область наблюдения естественных процессов, в которой была развита математическая теория. Оставаясь в течение продолжительного времени единственной действительно способной к предсказаниям теорией, астрономия весьма существенно определила развитие физики: она передала ей свои методы, свою картину мира, свои идеи о материальных точках, описывающих некоторую траекторию под воздействием внешних сил, свою концепцию пространства, времени и детерминизма. Ведущая роль астрономии проявилась в новой форме также в *теории поля*, созданной в предшествующем столетии Фарадеем и Максвеллом как теория электромагнитного поля. Она основывалась уже не на идее материальной точки, а на идее совокупности физических свойств, располагающихся в определенной области пространства. Отступившая было с переднего края науки, астрономия вновь вырвалась вперед вместе с общей теорией относительности Эйнштейна, которая со своими парадигмами, своими победами и своими трудностями привела к весьма совершенной теории поля.

То же, что можно сказать о влиянии астрономии на физику, в равной мере относится и к ее влиянию на математику через посредство геометрии, механики и теории дифференциальных уравнений. Все сказанное остается верным и в нашем столетии, когда к этому списку добавились риманова геометрия, обновленная релятивистской теорией тяготения, и даже квантовая механика, большинство математических методов которой заимствовано из астрономии[8].

Мы видели, как теория элементов породила особую форму физической теории, основанной на исследовании *a priori* геометрической гармонии. В астрономии дело обстояло не так, поскольку греки выказывали неуклонное стремление «спасти видимости», т.е. составить отчет именно о наблюдаемых фактах. Однако метод теории многогранников и элементов сохраняет свое значение в качестве некоторого образца, потому что даже с присущим им стремлением спасти факты астрономы — а позже и физики — в своем выборе в значительной степени руко-

[8]Не следует забывать, что с момента создания квантовой теории атом Бора понимался как образ солнечной системы.

водствовались именно первоначальным выбором, определявшимся критериями *a priori*. Но эти критерии часто оказывались эстетическими, почти магическими, даже когда они доказывали, как и в наши дни, что наблюдение является главным судьей.

Несомненно, именно такой подход, совмещающий эстетику с эффективностью, вдохновил греческих философов на выбор круговых траекторий. Эффективность таких траекторий была доказана Пифагором, который объяснял сложность видимого годичного движения Солнца, разлагая его на два равномерных круговых движения: одно — суточное, вокруг оси мира, а другое — годичное, происходящее по эклиптике. Но именно Платон завещал астрономам задачу сведения движения светил к круговым движениям вокруг земной оси, которая считалась неподвижной и находящейся в центре мира. Эта формулировка задачи останется в силе в течение двух тысячелетий — до тех пор, пока Кеплер не введет идею эллиптических траекторий. Даже Коперник и Галилей, отважившись изменить место центра мира, не были достаточно отважны для того, чтобы подвергнуть сомнению достоверность кругового движения.

Можно было бы предположить, что концепции Платона не оказали на науку никакого воздействия (кроме того, что из-за них астрономия застыла в своем системном виде), но на самом деле преобладающая роль круговых движений привела к важнейшему математическому открытию. Изгнанное из астрономии Кеплером, круговое движение вновь обрело силу в XVIII и XIX веках в связи с исследованием колебаний и теорией рядов Фурье, а затем, еще позже, в связи с теорией электромагнетизма и квантовой механикой, где господствуют синусоидальные колебания. Ни в коем случае нельзя забывать и о том, что прогресс, происходивший в теоретической астрономии вплоть до Кеплера, основывался исключительно на представлениях о круговых движениях. Именно этот прогресс привел к открытию эллиптических движений, несмотря на сопротивление, оказанное приверженцами прежней теории.

По-видимому, на самом деле Платон рассматривает не точные круговые движения, а, скорее, систему концентрических сфер, вложенных одна в другую и вращающихся с разными скоростями вокруг оси, которая проходит через центр Земли. Все происходит таким образом, что движения внутренней сферы накладываются на движения окружающих ее сфер, и определенная фиксированная точка на внутренней сфере как раз соответствует видимому движению планеты [1].

В любом случае, именно в этой форме Евдокс Книдский попытался решить задачу Платона. Система, хотя она и была довольно искусно разработана, не выглядела простой. Евдоксу потребовалось двадцать семь сфер для того, чтобы учесть главные факты наблюдений, — три для Солнца, три для Луны, четыре для каждой из планет и одну для неподвижных звезд[9]. Впрочем, даже так видимости были спасены только приблизительно. Когда Калипп захотел улучшить систему, он вынужден был соотнести с Солнцем еще две дополнительные сферы для того, чтобы сохранить разную продолжительность времен года, и две другие сферы — с Луной, чтобы сохранить аномалию ее движения по долготе, а кроме того, по одной сфере — с Меркурием, Венерой и Марсом. Таким образом, в целом получилось тридцать четыре сферы.

У Евдокса, как и у Калиппа, речь шла только лишь о чистой геометрии и о неповторимом стремлении спасти факты, но Аристотель выдвинул уже более физичный проект понимания того, как движения этих сфер могут *осуществиться* в природе, поскольку он принял их существование всерьез и не считал, что они могут быть всего лишь простыми математическими артефактами[10]. Для него было невозможно безоговорочное принятие независимости различных групп сфер, и еще меньше он допускал, что эта независимость может возникнуть из того, что различные группы сфер отделены друг от друга пустыми пространст-

[9]Напомним, что было известно пять планет (в том современном смысле, который мы придаем этому слову) — Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. Земля из этого перечня была исключена, потому что она считалась неподвижной, но зато Солнце и Луна добавлялись к нему в качестве блуждающих светил, таких же, как и остальные. Таким образом, в целом принималось в расчет семь планет.

[10]См. [1] и, в более общем плане, о науке Аристотеля см. [2].

венными промежутками. Он ввел компенсационные сферы, вращающиеся *в обратном направлении*, разновидность «шарниров», отделяющих друг от друга различные движения. Так он пришел к пятидесяти шести сферам!

И все-таки эта теория небесного мира учитывала множество астрономических фактов и представляла собой первую великую физическую теорию. Основанная на простых постулатах (неподвижность Земли и сочетание концентрических сфер), согласующаяся с фактами благодаря гению великих астрономов, она давала первые образцы геометризации физики. Конечно, она была сложнее теории элементов и многогранников, но лишь потому, что она не стремилась только к раскрытию гармонии мира путем сопоставления геометрических форм. Она стремилась к спасению фактов: это уже была *настоящая физическая теория*. Ее сложность была обусловлена не только самими по себе фактами, но в еще большей степени ее «феноменологическим» характером, поскольку она приспосабливалась к опыту только благодаря эмпирическим формулам и удачным геометрическим образам. Она не прибегала к *принципу объединяющей динамики*, что заставило собрать воедино множество независимых параметров — осей и скоростей вращения сфер.

Вплоть до Ньютона астрономические теории были полностью феноменологическими, но они предоставляли те результаты, на которые в будущем могла сослаться теория всемирного тяготения. Во времена Аристотеля это будущее было еще очень далеким, но как не восторгаться умом и усилиями Стагирита, направленными на понимание того, как функционирует его собственная система? Ибо знаменитый философ имел причины ввести определенные физические идеи, выходящие за рамки абстрактных представлений его предшественников. У него были причины для того, чтобы на основании выстроенной ими системы, способной к предсказанию астрономических явлений, попытаться создать некую картину мира. Он двигался в верном направлении, но мы — придя к науке через два тысячелетия после него, — хотя и не обладаем его гением, можем лучше понять, почему он потерпел неудачу. Построенная им теория не была в достаточной степени понятной. Сперва необходимо было бы ввести динамику, однако аристотелевская динамика была слишком примитивной; но прежде всего следовало бы основательно изменить геометрическое видение мира. Ведь теория сфер, *как и всякая теория*, сосредоточивает усилия на определенных фактах, забывая о других, особенно о том факте, что блуждающие светила не остаются все время на одном и том же расстоянии от Земли. Об этом Аристотель знал уже настолько хорошо, что высказывал сомнения в правильности собственной теории. В самом деле, астрономы заметили, что видимые диаметры Венеры и Марса не всегда кажутся неизменными и что во время солнечного затмения Солнце закрывается Луной то полностью, то лишь частично, что наводит на две великие геометрические идеи.

Первой идеей, — подобной вспышке молнии, потому что она ниспровергала привычный образ мира, — была теория *гелиоцентризма*, сулящая то будущее, которое нам уже хорошо известно. Однако, будучи выраженной в несовершенной форме и появившись «до времени», она не могла утвердиться и еще полтора тысячелетия ждала часа своего триумфа. Второй идеей, менее дерзкой, была теория *эпициклов*, которая сохраняла за Землей ее центральное положение, но с такой изобретательностью отстаивала преобладающую роль круговых движений, что просуществовала вплоть до эпохи Возрождения.

Гелиоцентризм Аристарха

Гелиоцентризм — это, несомненно, одна из самых гениальных идей, порожденных человеческим умом, поскольку она противоречит нашему непосредственному видению вещей. Что может быть более «очевидным», чем наше центральное положение и тот факт, что все вращается вокруг нас и нашей незыблемой матери-кормилицы — Земли? Нетрудно понять, что противоположная точка зрения могла бы появиться только как богохульство.

Однако именно эта точка зрения была высказана современником Аристотеля Гераклидом Понтийским, который за свой дерзкий ум получил прозвище Парадоксалист и первым лишил Землю одной из ее привилегий — гипотетического центрального положения. Гераклид предположил, что Венера и Меркурий обращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли, и сделал это для того, чтобы «спасти» изменение их видимых размеров и их возвратные движения, которые создавали впечатление, что эти планеты обращаются то быстрее, то медленнее, чем Солнце. Гелиоцентризм делает эти отклонения очевидными, поскольку речь идет о *внутренних* планетах, располагающихся между Солнцем и *нами*. Но система Гераклида оставалась несовершенной, поскольку, если траектории внешних планет (в ту эпоху были известны Марс, Юпитер и Сатурн) считались гелиоцентрическими, то все же никто не знал, так ли обстоит дело и с Землей, и не следует ли считать Солнце обращающимся вокруг Земли вместе с его свитой планет, как это позже предположил Тихо Браге.

Зато относительно взглядов Аристарха (хотя его сочинения и утрачены) нет никаких сомнений, поскольку на него ссылался Архимед. Желая для объяснения своей системы нумерации привести пример некоторого большого числа, он предложил представить число тех песчинок, которые заполнили бы вселенную Аристарха, и, чтобы сделать все это понятнее, изложил его идеи. Итак, мы знаем, что Аристарх считал неподвижными Солнце и звездную сферу, предполагая, что Земля и другие планеты обращаются вокруг Солнца, а Луна — вокруг Земли. Чтобы спасти видимые суточные движения звезд, он вместе с Гераклидом и в противовес точке зрения Платона и Аристотеля предположил, что Земля вращается вокруг собственной оси. И, наконец, чтобы объяснить, как, несмотря на обращение Земли вокруг Солнца, мы со сменой времен года не замечаем параллакса неподвижных звезд, он предположил, что они находятся на *неизмеримо большем расстоянии* от нас, чем блуждающие светила, на чем и был построен пример Архимеда.

Такая система во многом совпадает с системой Коперника (который, собственно, именно идеями Аристарха и был вдохновлен). Наш дух выступает решительно против отказа от этой системы, поскольку мы придаем гелиоцентризму онтологическое значение — какого, между прочим, Аристарх ей, по всей видимости, не придавал. Он был особенно озабочен спасением видимостей — *определенных* видимостей, — что и стало причиной гибели системы. Ибо если она и оказалась способна объяснить изменение размеров и возвратные движения некоторых планет, объявляя их траектории гелиоцентрическими, то добиться успеха в вычислении эфемерид ей уже было не под силу. В этом существенном пункте ее превзошла теория эпициклов.

Эпициклы и система Птолемея

Похоже, именно пифагорейцы для объяснения сезонного изменения диаметра солнечного диска и разной продолжительности времен года предположили, что центр окружности, которую, как считается, Солнце описывает вокруг Земли, не находится в центре последней. Это привело к появлению понятий *апогея* и *перигея* и положило начало теории, называемой *эксцентрической*. Чтобы спасти факт изменения блеска планет, астрономы, вдохновленные Гераклидом, предположили, что планеты описывают *эпицикл*, т.е. окружность, центром которой является не Земля, но некая точка, которая сама обращается вокруг Земли по окружности. Окружность, по которой движется центр эпицикла, называется *деферентом*.

Эта идея, известная уже Платону, натолкнулась на возражение различия между представлениями астрономической картины мира с помощью смещенных центров и эпициклов, однако Аполлоний Пергский доказал их эквивалентность. В конце концов идея оформилась в виде представления об эпициклах в теории, развитой Гиппархом, а затем Клавдием Птолемеем, сделавшим в этой области очень много и настолько основательно изложившим результаты своих изысканий в трактате *«Великое математическое построение астрономии»*, что его имя было дано теории эпициклов, называемой с тех пор *«системой Птолемея»* (точно так же, как вся совокупность геометрических сочинений Древней Греции известна под названием *«геометрия Евклида»*).

Основой системы Птолемея является утверждение о том, что «блуждающие светила» — Солнце, Луна и планеты — совершают *круговые* и *равномерные* движения. Следовательно, либо само светило, либо центр эпицикла должны описывать окружности, радиусы которых (применительно к каждой отдельной окружности) *за равные промежутки времени описывают равные площади*. Нам придется вспомнить об этом в связи со вторым законом Кеплера.

Устанавливая связь между радиусами эпициклов и деферентов, направлением и периодами вращения, смещая центры определенных деферентов, Птолемей спас самое существенное в видимостях, предстающих перед астрономами; спасены были и аномалии, вроде аномалий Венеры и Солнца, которые давали пищу для возражений против системы концентрических сфер.

Однако несмотря на авторитет, который система Птолемея сохраняла в течение всего средневековья, она погибла от того зла, которое поражает теорию, достигшую предела ее предсказательных возможностей: по мере того, как в нее включались новые наблюдаемые факты, она все более и более усложнялась. Число эпициклов безмерно увеличивалось — как когда-то увеличивалось число концентрических сфер. Интересно, что количества новых эпициклов у разных теоретиков плохо согласуются между собой. Они варьируются от двадцати семи у Пербаха[11] до семидесяти семи или восьмидесяти у Коперника[12] и даже, согласно А.Н. Высоцкому [4], от сорока до шестидесяти *для каждой планеты* в *«Альфонсинах»*, астрономических таблицах, составленных в XIII веке по приказу Альфонса X Кастильского, который, увидев их, с иронией заметил:

> Если бы Бог, создавая мир, спросил у меня совета, то все было бы устроено намного лучше и проще.

В сущности, имеет значение не *число* эпициклов, а *логическая сложность* теории. Современная небесная механика

---

[11]Peurbach. *Theoricae*; см. письмо Койре Кестлеру [4].

[12]Соглашаясь с Койре [3], Кестлер упрекает Коперника в том, что, желая возвеличения своих заслуг, он необоснованно увеличил число эпициклов по сравнению с Птолемеем.

математически весьма сложна, но дает больше результатов при меньшем числе гипотез и выводит геометрические формы из некоторых общих принципов, онтологическая ценность которых возрастает по причине самой их простоты. Именно к этой простоте стремились, очевидно, великие открытия Возрождения, но все же было бы неправильно с презрением относиться к теории Птолемея — так же, как неправильно было бы с презрением относиться к собственным предкам. Разумеется, предки всегда и во всем уступают потомкам (само собой, блестящим!), но ведь без этих смешных, нелепых предков никаких потомков просто не было бы.

Греческая наука в интересующей нас области оставила нам бесценное наследие:

1) Идею спроецировать на природу математический порядок, основанный на геометрии.

2) Идею выдвижения некоторого основного построения, из которого этот порядок вытекает. В рассматриваемом случае таким построением является окружность, которую греки считали символом совершенства. (В связи с таким подходом древних греков к делу часто говорится о тирании сведения всего к единственному основанию; но так обстоит дело с любым принципом, выдвигаемым для построения теории: в силу своей ценности он постепенно становится обязательным и в конце концов превращается в догму.)

3) Несмотря на ту сложность, которая впоследствии оказалась присущей некоторым теориям, великий идеал, завещанный нам греками, — это идеал простоты и ясности. Многогранники, окружность, сфера, эпициклы, гелиоцентризм и т.д. суть проявления одного принципа: сделать умопостигаемым — значит сделать простым, значит открыть порядок в видимом хаосе.

4) Наконец, древнегреческая наука попыталась объединить (хотя и довольно неуклюже поначалу) *стремление к описанию* и *стремление к предсказанию*: по крайней мере, в астрономии греки научились применять свои принципы к требованиям наблюдения. Так, развивая и совершенствуя этот подход, расцвела в эпоху Возрождения современная наука.

Глава II

ТРИ ВЕЛИКИХ СОБЫТИЯ В ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ФИЗИКИ

Книга природы написана на языке математики.

Галилео Галилей

Возвращение к гелиоцентризму

В этой книге история астрономии интересует нас только в той мере, в какой она совпадает с историей геометризации физики. Однако я намеренно хотел бы (да простят меня эрудиты) умолчать о термине «коперниканский переворот» (или, иначе, «коперниканская революция»), столь часто используемом в связи с гелиоцентризмом. Этот термин, на мой взгляд, семантически в определенном смысле весьма несправедлив по отношению к ученым, чьи идеи были настолько смелыми и плодотворными, что положили *начало новой эпохе*.

Сочинение Коперника называется *«Des révolutions des orbes célestes»* (*«Об обращениях небесных сфер»*); слово «революция» используется здесь в смысле «обращение» (то есть «вращение») светил и не имеет никакого отношения к изменению направления мысли (ср.: обращение в христианство и т. п. — прим. ред.). Когда речь идет о «коперниканской революции», приоритет именно этого, второго значения слова «обращение» вполне оправдан: ошибкой было бы недооценивать значение научного переворота, о котором возвещал гелиоцентризм, и той роли, которую он играл в эпоху Возрождения. Однако не менее ошибочным будет предположение, что произошедшая революция — заслуга одного лишь Коперника, ведь «продвигаемая» им *революционная* идея впервые пришла в голову Аристарху, а за ее победу боролись и Галилей, и Кеплер. Если идею гелиоцентризма и можно считать революционной, то это следует делать, скорее, в смысле возвращения к исходной позиции, которую за восемнадцать веков до этого защищал Аристарх Самосский, затем несправедливо забытый (хотя, подозреваю, он был даже более смелым новатором, чем сам Коперник).

Почему же Коперник был услышан, а Аристарх — нет? По многим причинам, среди которых и прогресс в области наблюдений, и, возможно, определенное изменение интеллектуального окружения. Однако на самом деле Коперник был по-настоящему услышан лишь спустя полстолетия после появления его сочинения, ставшего знаменитым только благодаря Галилею и Кеплеру. Нужны были эти отважные гении, чтобы признать за гелиоцентрическим видением те достоинства, которые вовсе не стали более очевидными, чем во времена Аристарха. У Коперника траектории планет еще были круговыми (это сохраняется и у Галилея) и корректировались эпициклами, как у Птолемея. Кестлер [4], взявший на себя труд их сосчитать, обнаружил, что их *больше, чем у Птолемея* (сорок восемь против сорока), и это противоречит утверждениям Коперника, который в *«Commentariolibus»* «признавал» из них только тридцать четыре, в то же время завышая их число у Птолемея. Предвидения Коперника не были ни лучше, ни проще птолемеевых: упрощалась лишь картина мира, но для того, чтобы ее оценить, нужно было освободиться от геоцентрических представлений, коренившихся в умах по-прежнему столь же глубоко, как и во времена Аристарха. Тот факт, что идеи Аристарха спустя столетие после его смерти уже были забыты, тогда как спустя столетие после смерти Коперника его прославляли как выдающегося ученого, может быть объяснен по-разному, но в любом случае следует подчеркнуть, насколько важную роль сыграл здесь личный выбор, сделанный несколькими великими людьми.

То, что Галилей и Кеплер опирались на идеи Коперника, имеет характер скорее исключения, чем правила, поскольку дух их времени не слишком отличался от духа той эпохи, в которой жил Аристарх [5]. Если верно то, что Аристарху недоставало поддержки Аполлония, Гиппарха или Птолемея, то цитаты Архимеда доказывают, что такая поддержка не была чем-то уж совершенно невозможным. Наоборот, не следует забывать, что Копернику тоже недоставало поддержки известных людей: ни Тихо Браге, ни Декарт, ни Паскаль, ни Ферма, ни другие известные ученые не восприняли его идеи (независимо от того, проистекало ли это от безразличия, страха или несогласия). Что касается Мерсенна, Гассенди и других, то они лишь распространяли идеи Галилея. Для триумфа идей Коперника был необходим тот дар небес, которым стала поддержка Галилея и Кеплера, этих гигантов, на плечах которых должен был, по его собственным словам, стоять Ньютон для того, чтобы открыть науке новые горизонты.

Самый блестящий вклад Галилея в защиту системы Коперника содержится в его *«Диалоге о двух главнейших системах мира»* [6]. Следует обратить внимание на то, что новые наблюдения — те, что были проведены благодаря астрономической подзорной трубе, — не играли решающей роли. Таким образом, Галилей не развил результатов, полученных из наблюдений спутников Юпитера (которые он сам же и открыл). И это несмотря на то, что Галилей придавал своему открытию важное значение, поскольку он столкнулся с системой Коперника в миниатюре. В самом деле, полученные Галилеем результаты не имели большого значения, поскольку настоящая проблема заключалась в другом. Речь шла о признании того, что больше нет никаких оснований считать, будто мир вращается вокруг Земли, а не вокруг Солнца, потому что все светила «подвержены порче».

Сальвиати, под именем которого в диалоге скрывается сам Галилей[13], принимает во внимание и свежие факты (например, наблюдения новых звезд в 1572 г. и 1604 г. — «рождающиеся» и «переменные» светила), и, с другой стороны, наблюдения, выполненные самим Галилеем и приведшие к открытию гор на Луне и пятен на Солнце (что и обнаруживает «подверженность порче»). Но самые восхитительные

[13]Напомним, что два других участника диалога — это Симплицио, придерживающийся учения Аристотеля, и Сагредо, свободомыслящий человек, более склонный к принятию позиции Сальвиати.

рассуждения основываются на наблюдениях *невооруженным глазом* Луны или объектов на Земле, которые могли бы быть выполнены Аристархом или Гиппархом. Галилей пытается описать поверхность Луны, сравнивая свет Солнца, который Луна отбрасывает во время земной ночи, со светом Земли, который она отбрасывает на Луну во время лунной ночи и который мы называем «пепельным светом». Он детализирует рассмотрение настолько, что, в соответствии с ночными часами, ищет различие между отражательными способностями суши, выступающей над водой, и океана, чтобы сравнить их с рассеивающей способностью Луны. Принимая во внимание жар Солнца во время лунного дня, Галилей дает описание пустынной Луны, на поверхности которой нет ни воды, ни жизни и которая состоит из каменных равнин и гор, представая такой, какой мы ее знаем в настоящее время, когда на ней уже побывали люди. В этом чрезвычайно научном рассуждении, основанном на общедоступных наблюдениях, Галилей доказывает не только свой талант, но и удивительную свободу духа, которая позволяет ему, вопреки двум тысячелетиям научной традиции, рассуждать о Луне как о земном объекте, понижая статус странного блуждающего светила до уровня земной физики. Так он ставит на одну доску Землю и светила, чтобы придать себе силы для изменения положения центра мира.

Победа Галилея, бывшая в некотором смысле психологической, доказывает (если только мы в этом нуждаемся), что триумф гелиоцентризма сводился не к изменению начала координат (которое было основано на соображениях удобства), а на онтологическом выборе одного из двух образов мира — вот почему этот выбор был столь мучительным. Однако несмотря на ту роль, которую Галилей сыграл в победе системы Коперника, не ему, а Иоганну Кеплеру мы обязаны великой революцией в геометризации, вызванной гелиоцентризмом.

Кеплер ввел в астрономию сразу две гениальные геометрические идеи. Первая, от которой сегодня отказались, касалась структуры всей системы Коперника и основывалась, как и античная теория элементов, на рассмотрении правильных многогранников. Вторая была связана с формой планетных траекторий и законами движения по этим траекториям: это знаменитая идея кеплеровых эллипсов, принесших — вместе с выдвижением *трех законов* — их автору вечную славу.

Огромная разница между двумя этими идеями заключается, прежде всего, в том, что первая из них ложна, а вторая — истинна! Но если первая заслужила, чтобы о ней помнили, и даже стала знаменитой, то лишь потому, что она является великолепным образцом математической восторженности, овладевшей умом великого человека и заставившей его по-новому взглянуть на порядок вселенной. Кеплер остается верен этой идее своей юности, даже начав в конце жизни сомневаться в ее простоте.

Возвращение к многогранникам

Еще будучи молодым человеком, Кеплер стал приверженцем идей Коперника, так как в возрасте семнадцати лет, в 1588 г., прослушал в Тюбингене курс Местлина, который официально преподавал систему Птолемея, а в частных беседах ее же опровергал. Кеплер задался вопросом о порядке и пропорциях круговых орбит шести планет, известных в ту эпоху, — Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна [3], [4], [7]. Он тщетно стремился найти какие-либо связывающие их замечательные числа, пытаясь даже ввести некие гипотетические планеты[14].

Тогда Кеплер заметил, что отношение радиусов двух окружностей, одна из которых вписана в равносторонний

[14]Такая игра чисел был предложена Тициусом в 1766 г. и вновь рассмотрена Боде. Согласно закону Тициуса–Боде, если принять расстояние от Земли до Солнца за единицу, то расстояния от других планет до Солнца равны 4/10, 4/10+(3x2^n)/10, где n=0,1, 2, 3,.... Это дает 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6,.... Вплоть до 10, что соответствует Сатурну, последней планете, известной в ту эпоху, эти числа соответствовали наблюдаемым расстояниям, за исключением 2.8, которому ничто не соответствовало. В 1781 г. Гершель открыл Уран, которому соответствовало число 19.6, и было обнаружено, что 2.8 соответствует облаку астероидов между Землей и Марсом, что и предсказывалось законом Тициуса–Боде, а потому казалось его триумфом. Однако положения Нептуна и Плутона резко противоречили закону.

треугольник, а вторая описана вокруг него, таково же, что и отношение орбитальных радиусов Юпитера и Сатурна, но он тщетно пытался связать многоугольники с другими планетами, пока на него не снизошло озарение. Изображая орбиты планет на *шести сферах*, центром которых было Солнце, он обнаружил, что они располагаются между *шестью правильными многогранниками*, знаменитыми телами Платона. В сферу *Сатурна* вписывается *куб*, содержащий сферу *Юпитера*, в нее вписывается *тетраэдр*, в котором располагается сфера *Марса*, в эту сферу вписывается *додекаэдр* с содержащейся в нем орбитой *Земли*, внутри которой помещается *икосаэдр*, окружающий сферу *Венеры*, отделенную *октаэдром* от сферы *Меркурия*.

Увы, существует только пять правильных многогранников, и это чудесное совпадение было нарушено открытием Урана, Нептуна и Плутона, но по прошествии долгого времени после смерти Кеплера. В действительности эта гармония была шаткой уже при его жизни вследствие его собственных открытий, так как этот образ был плохо приспособлен к эллиптическим орбитам. Но то, что представляет для нас интерес, — это платоновский подход, заключающийся в попытке наложить на физические законы правила симметрии в надежде открыть гармонию природы. Несомненно, это было лотереей, в которой выигрыш крайне редок. На приведенном примере такая оценка прекрасно подтверждается, как и на примере Геродота, желавшего, чтобы русло Нила располагалось симметрично руслу Дуная относительно Средиземного моря, что вынуждало поместить исток Нила в Марокко, поскольку исток Дуная Геродот поместил в Пиренеи [8]. Но какими бы неудачными ни были эти попытки, нет такого физика, который не мечтал бы (пусть даже в глубине души) добиться успеха в таком стремлении продемонстрировать силу геометрии. Мы увидим образцы этого стремления, которое далеко не всегда приводило к поражению.

На самом деле подход Кеплера был связан с великой идеей и заслуживал бы лучшей участи. На современников Кеплера, которые, как и он сам, не могли угадать будущего, его теория многогранников произвела сильное впечатление. Именно она (а не открытие эллиптических траекторий) принесла ему славу при жизни. Он изложил ее в возрасте двадцати пяти лет в своей *«Mysterium cosmographicum»* («Космографическая тайна»), опубликованной в 1597 г., и, таким образом, вступил в диалог с Тихо Браге[15] и Галилеем.

Возвращение к Архимеду и Аполлонию

Открытие эллиптических траекторий произошло благодаря встрече (1600 г.) Кеплера с Тихо Браге, который, будучи выслан из Дании, жил в Праге, нося впечатляющий титул *«Mathematicus imperial»* («Королевский математик»), после его смерти перешедший к Кеплеру. Их сотрудничество длилось не более года и, кроме того, в нем были перерывы, но оно позволило Кеплеру получить доступ к результатам наблюдений великого астронома. Речь идет о наблюдениях Марса — планеты, объяснение движения которой с помощью концепции эпициклов поставило неразрешимую задачу. Дело в том, что скорость Марса слишком значительно менялась при прохождении по орбите, центр которой был смещен намного значительнее, чем у других планет.

Понадобилась бы целая глава для того, чтобы рассказать о кропотливой работе Кеплера. Мы лишь упомянем об этих дерзаниях. Сначала Кеплер, в соответствии с идеей Гиппарха, сохранил круговое движение, смещая центр окружности относительно Солнца. Отказавшись от системы эпициклов, он рассматривал это круговое движение как *истинное движение* планеты, а не как абстрактный элемент более сложного представления. Что касается изменений скорости планеты на разных отрезках орбиты, то он принял это как наблюдаемый факт, отказываясь от святейшего принципа равномерного кругового движения, составляющего самую суть системы Птолемея.

Напомним, что у древних равномерное движение было определено отнюдь не тем условием, что *точка* за равные

[15]Тихо Браге советовал Кеплеру отказаться от этих «спекуляций», выведенных из первых принципов, и строить свои рассуждения на твердом основании наблюдений (согласно Ньютону [9, книга III]).

промежутки времени описывает равные *дуги*. Определение сводилось к тому, что *радиус*, соединяющий центр окружности с этой точкой, должен описывать равные *углы* или, кроме того, равные *площади*. Равенство дуг, равенство радиусов и равенство площадей давали бы равнозначные определения, если бы Кеплер избрал Солнце в качестве центра окружности, но они не были равнозначны, потому что он сместил центр орбиты. Нужно было выбирать, и Кеплер решил, что *радиус, соединяющий планету с Солнцем, описывает за равные промежутки времени равные площади*. Это — знаменитый *второй закон*, в действительности сформулированный в первую очередь. Казалось бы, этот закон несколько отходит от представления о равномерном движении, но поскольку радиус, исходящий из Солнца, менял свою длину, то расстояния, проходимые планетой за равные промежутки времени, уже не были равными, а движения по орбите уже не были равномерными.

Продолжая анализ результатов Тихо Браге, Кеплер заметил, что его новый закон приложим не только к Марсу, но и к Земле, и что он мог бы быть общим. В частности, он обнаружил очень важное обстоятельство: орбиту Марса нельзя было отождествить с окружностью, даже если ее центр смещен, поскольку между ними существовала такая разница, которой точность наблюдений Тихо Браге не позволяла пренебречь. Кеплер понял, что орбита должна быть овальной и, изучив труды Архимеда и Аполлония, увидел — на этот раз и в самом деле — свет. Он выдвинул постулат, который теперь мы называем *первым законом*

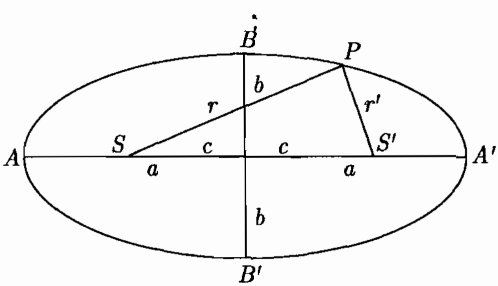

Рис. 2. Главные элементы эллипса

Кеплера: планеты описывают эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Что касается *второго закона*, который уже был открыт, то он сохраняется в следующем виде: радиус, соединяющий Солнце с планетой, за равные промежутки времени описывает равные площади. Из этого следует, что скорость планеты на ее орбите меньше, когда она дальше от Солнца (находится вблизи своего *афелия*), и больше, когда она к нему приближается (находится около своего *перигелия*).

Этот последний факт хорошо согласуется с наблюдениями и совершенно очевиден в случае кометы, орбита которой очень вытянута, хотя мы всегда видим ее вблизи ее перигелия (Земля находится близко к Солнцу) и лишь в течение короткого промежутка времени, так как ее скорость в этот промежуток времени велика. После этого мы надолго теряем комету из виду, поскольку она не только удаляется от нас, но и ее скорость уменьшается. Таким образом, мы наблюдаем комету Галлея только в течение нескольких месяцев, по прошествии которых она исчезает на семьдесят шесть лет. Но то, что знаем о кометах мы, не было известно в эпоху Ньютона и Кеплера (Браге только-только убедил своих современников в том, что кометы представляют собой небесные тела, а не атмосферные явления). Понять это, имея в распоряжении лишь наблюдения Марса, отнюдь не просто, ведь когда говорят, что *орбита Марса является «очень вытянутой»*, то это неверно, поскольку ее большая ось лишь на 0,5 % больше малой (при 0,2 % у орбиты Земли). Наиболее вытянута орбита Меркурия (2 %), но она была плохо изучена.

Как не восхищаться талантом и терпением, которые понадобились Тихо Браге для того, чтобы *без телескопа* измерить эту небольшую разницу и заставить других поверить в это? Еще более восхитительным представляется доверие Кеплера к результатам наблюдений и смелость, почерпнутая им из нагромождения цифр и первых арифметических подсчетов и понадобившаяся ему для заявления (противоречившего тысячелетней традиции), что движения планет не являются ни равномерными, ни круговыми. Пред нами пример такого изменения концепции мира и геометрической парадигмы, которое изменило направление развития науки, но не могло бы произойти без повышения точности измерений.

Это — одна из тех побед науки, которые подобны удару грома и которые можно было бы назвать *платоновскими*, потому что они обязаны открытию *a priori* некоторого математического представления, так что его согласие с природой выглядит чудом. Но есть в этих победах и нечто такое, что можно считать *аристотелевским*: они возникают из тщательного осмысления фактов материального мира, которые мы воспринимаем с помощью органов чувств, к которым мы прикасаемся, которые мы классифицируем и на основе которых мы создаем общий закон. Открытие кеплеровых эллипсов именно таково.

Оставалось описать *третий закон: квадраты периодов обращения различных планет относятся друг к другу как кубы больших осей их орбит.* Кеплеру понадобилось десять лет для проведения вычислений на основе эмпирических данных: он открыл этот закон в 1619 г. (некоторые источники датируют открытие 1609 г.). Из-за неблагодарного упрощения, вызванного прогрессом науки, третий закон Кеплера в наши дни сводится к тривиальному следствию из теории Ньютона.

Таковы были бессмертные открытия этого гения мрачного средневековья, провозгласившего наступление Нового времени. Мы увидим, как Ньютон откроет, что закон площадей не предписывает точную форму силы тяготения и требует лишь того, чтобы она зависела только от расстояния между Солнцем и планетой. Зато закон эллиптического движения, как и третий закон, соответствуют силе Ньютона вида $1/r^2$. У Кеплера были причины упорно придерживаться этих законов — из-за его предчувствия, что движения планет вызваны противоположно направленными действиями, одно из которых связано с планетой (Ньютон доказал, что это центробежная сила), а другое — с Солнцем (Ньютон выразил его с помощью закона тяготения).

Глава III

РАСЦВЕТ И УПАДОК ГОСПОДСТВА ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ФИЗИКЕ

> Однако само проведение прямых линий и кругов, служащих основанием геометрии, в сущности относится к механике.
>
> Исаак Ньютон [9][16]

> В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые *мною методы не требуют ни построений*, ни геометрических или механических рассуждений.
>
> Жозеф-Луи Лагранж [10][17]

Расцвет: Ньютон

Каковы бы ни были заслуги предтеч современной науки, по-настоящему она началась только с Ньютона, и каким бы величественным ни было здание науки, выдвинутое с тех пор, ньютоновские *«Principia» — «Математические начала натуральной философии»* — остаются величайшей книгой математической физики. Чтение этой книги не вызывало бы никаких затруднений у современного физика, если бы не виртуозность геометрических навыков Ньютона. Ибо эта знаменующая собой появление современной науки работа укоренена в античной науке и прежде всего *«Начала»* — это великая книга по геометрии. Вопреки ожиданиям, в ней нелегко обнаружить то исчисление бесконечно малых, изобретателем которого был Ньютон. В своей версии этого исчисления он принципиально отказывался от алгебраических методов и потому приходил

[16]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 1. (*Прим. перев.*).

[17]Лагранж Ж. *Аналитическая механика.* В 2 т. М.; Л., 1950. Т.1. С.9. (*Прим. перев.*).

к своим результатам путем использования привычных ему геометрических рассуждений, превращая их в рассуждения о бесконечно малых геометрических объектах. Чаще всего Ньютон достигал своих результатов именно с помощью чистой геометрии, и если *«Начала»* можно рассматривать как расцвет евклидовой геометрии, то лишь потому, что она понимается как чистая истина, благодаря механике, выведенной из природы. В предисловии 1686 г. можно найти соответствующую фразу:

> Итак, геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть *общей механики*, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения[18].

Вольтер во французском переводе усиливает эту точку зрения:

> ...Всякая выстроенная Ньютоном система, любое его предположение, все преподносимые им истины — все основано на великой Геометрии или на неопровержимых опытах.

Само собой разумеется, это утверждение Вольтера следует понимать так, что Ньютон не был рабом никакой уже сложившейся системы и всегда следовал опыту. Что касается абсолютного характера, приписываемого тогда евклидовой геометрии (которая, следовательно, не была никакой «системой»...), то мы вскоре увидим, как этот характер понимается в наши дни. Мы можем лишь воздать должное Вольтеру, когда он приветствовал тот новый свет, которым Ньютон осветил науку.

Цель, к которой в своей книге стремится Ньютон, — обосновать с помощью принципов динамики и астрономических наблюдений закон всемирного тяготения — *все тела притягиваются друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними,* — и вывести из этого закона все возможные наблюдаемые следствия. Интересно, что в работе, закладывающей фун-

---

[18]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 2. (*Прим. перев.*).

дамент современной механики, Ньютон словно оправдывается в том, что пишет книгу по механике.

Одной из самых замечательных черт подхода Ньютона является то, что для него закон $1/r^2$ не был моделью. Он хотел доказать, что это единственный закон притяжения, допускаемый геометрией. Как уже было сказано, он начал с доказательства того, что *закон площадей* Кеплера зависит не от точного выражения силы тяготения, а от центрального характера этой силы, придающей Солнечной системе *сферическую симметрию* (откуда и следует, что орбиты являются плоскими). Это первый пример закона механики, вытекающего из закона симметрии. Позже будет осознано, что закон площадей выражает *сохранение момента количества движения* в качестве следствия сферической симметрии, и мы увидим, что всякая симметрия порождает некоторый закон сохранения.

Как известно, Ньютон доказал, что два других закона Кеплера ведут к закону $1/r^2$ и что любые другие законы, предполагающие иную степень радиуса, будут противоречить наблюдениям. Например, существует лишь один закон, дающий эллиптические орбиты, и в нем притяжение *пропорционально расстоянию от Солнца до планеты* (закон Гука) вместо обратной пропорциональности квадрату (но тогда Солнце должно было бы находиться в центре эллипса, а не в его фокусе). В случае принятия других законов планета падала бы на Солнце или удалялась бы от него на бесконечное расстояние. Столетие спустя эти результаты Ньютона были обобщены в теореме Жозефа Бертрана. Но закон $1/r^2$ является единственно возможным только в классической механике Ньютона. В другой теории закон имел бы иной вид (как в случае общей теории относительности).

Убедившись в правильности своего закона притяжения, Ньютон использовал его в приложениях. Он рассматривал определение планетных орбит с помощью наблюдения, падение тел, теорию возмущений, колебания, принудительные движения, притяжение протяженного тела (такого, как планета). Он вычислил массу планет и доказал, что центр Солнечной системы совпадает с ее центром тяжести, а не с центром Солнца, он создал первую теорию приливов, теорию неправильностей в движении Луны и теорию сплющивания Земли центробежной силой, он отождествил движение комет с движением планет, что позволило его другу Эдмунду Галлею предсказать периодическое возвращение той библейской кометы, которая сегодня названа его именем.

Необходимо сказать несколько слов о второй книге *«Начал»*, которая выделяется на фоне двух других. Напомним, что первая и третья книги, ориентированные на астрономию, основываются на законе Галилея («Всякое

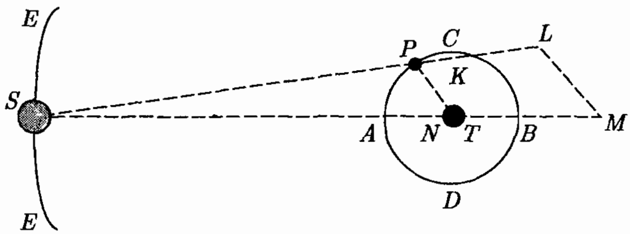

Рис. 3. Отрывок из *«Начал»* (книга II): «Если рассматривать, что Земля и Луна обращаются около их общего центра тяжести, то и движение Земли возмущается подобными же силами, но можно относить к Луне как суммы сил, так и движений, и изображать суммы сил пропорциональными им линиями TM и ML»[19]

тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние» [9][20]) и на законе Ньютона («Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» [9][21]). Иначе

[19]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 548. (Приведенный Ж. Лошаком рисунок действительно находится в книге II на с. 228 русского перевода, а приведенный отрывок — в книге III. — *Прим. перев.*).

[20]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 39. (*Прим. перев.*).

[21]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 40. (*Прим. перев.*).

говоря, сила пропорциональна массе и (об этом говорит Ньютон) ускорению: знаменитый закон $F=m\gamma$. В небесной механике после Ньютона принято пренебрегать трением и считать пространство пустым, но сам Ньютон не забывал о возможности трения и позаботился об учете того факта, которым пренебрегают: «Брошенное тело продолжает удерживать свое движение, поскольку его не замедляет сопротивление воздуха...»[22]. Касательно планет он добавлял: «Большие же массы планет и комет, встречая меньшее сопротивление в свободном пространстве, сохраняют свое как поступательное, так и вращательное движение в продолжение гораздо большего времени» [9][23].

Значительно позже, в книге III, Ньютон возвращается к этой проблеме: «Движение планет может сохраняться в небесных пространствах весьма долгое время», — утверждает он [9][24]. Чтобы доказать это, он посвящает первую часть книги II анализу движения твердого тела в некоторой сплошной среде с трением и закладывает основы теории диссипативных систем, подробно описывая и анализируя проведенные опыты. Один из опытов имеет целью доказательство того, что в воздухе — а именно воздух, а не эфир, является причиной трения и становится более разреженным с увеличением высоты — планеты не испытывают никакого заметного трения. В той же книге II Ньютон закладывает основы теории механики сплошных сред, но пока лишь для астрономии. Он хочет доказать, что законы сплошных сред отличаются от законов Кеплера и что от *теории вихрей* Декарта — соперницы теории тяготения — следует отказаться.

Ньютон открыл в механике и астрономии больше истин, чем кто-либо другой не только до, но и после него, а потому именно ему принадлежит пальма первенства в исследовании совершенно новой области науки.

---

[22]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 40. (*Прим. перев.*).

[23]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 40. (*Прим. перев.*).

[24]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 524. (*Прим. перев.*).

Упадок: Лагранж

В «*Началах*» приведено без малого двести пятьдесят различных чертежей. Сто лет спустя в «*Аналитической механике*» Лагранжа не было приведено ни одного. Эта книга являлась воплощением прогресса, достигнутого в механике со времен Ньютона, и она вызвала огромное восхищение[25]. Гамильтон ([11], т. II, с. 104) писал об этом:

> Красота метода сочетается с благородством результатов, что превращает эту великую работу в некую научную поэму.

В самом деле, во времена Ньютона анализ, искусство обращения с бесконечно малыми, еще был как бы «наложен» на геометрию прямой и окружности, которые служили ему «подпоркой» в том смысле этого слова, какой ему придают садовники. Мы видели, что каждое рассуждение в области анализа было всего лишь пределом последовательности геометрических рассуждений, которые каждый раз изобретались заново вместе со всем тем, что предполагало воспроизводящуюся и всегда бывшую наготове сноровку. К тому времени, когда в науку пришел Лагранж, анализ уже был самостоятельно стоявшим деревом (что произошло благодаря трудам плеяды математиков, в число которых входил и сам Лагранж). У анализа были свои алгоритмы, свои методы, свои рецепты. Он больше не требовал понимания, и прогресс в математике состоял, отчасти, в методичном преобразовании того, что было открыто благодаря подвигу воображения, в превращении в нечто тривиальное того, что еще вчера было гениальным, и постоянном отдалении той границы, где начинается гениальность. Именно это сделал Лагранж, обогатив механику открытиями анализа и развивая в ней его методы.

Отказ Лагранжа от геометрических рассуждений не означал, что геометрии Евклида пришел конец — конец пришел лишь ее всемогуществу в механике и физике, и началось господство алгебры и анализа. Более того, книга

[25]Следует заметить, что сто лет спустя, в 1892 г. Пуанкаре совершил такой же подвиг своими «*Новыми методами небесной механики*».

Лагранжа отнюдь не стала «отходной молитвой» отвергнутым геометрическим представлениям — напротив, она загодя возвестила новую эру геометрии. Но Лагранж об этом еще не знал, поскольку в то время, полностью отдавшись новой науке, которую он создавал, он прославился отказом от какой-либо помощи со стороны геометрии (вплоть до запрета на те чертежи, которые современные механики вводят без колебаний, не чувствуя себя при этом нарушителями каких-либо запретов).

Разумеется, Лагранж не осуждал геометрические представления вообще: он хотел выйти за пределы элементарных методов евклидовой геометрии, заменяя их методами алгебры и анализа. Он всего-навсего повторил в механике то, что уже делал за полтора столетия до него Декарт, создавая аналитическую геометрию и желая, тем самым, разорвать узы, наложенные использованием линейки и циркуля. Сам Декарт так прокомментировал это в письме к Мерсенну [12]:

> Посему то, что я излагаю во второй книге *Геометрии* и *что затрагивает* природу и свойства кривых линий и способа их исследования, находится, как мне кажется, настолько же далеко от обычной геометрии, насколько риторика Цицерона далека от детского лепета.

Лагранж мог бы, пожалуй, сказать то же о собственной работе, заменяя «кривые линии» — «движениями», а «обычную геометрию» — «обычной механикой». В самом деле, в то время как Ньютон направил усилия только на решение задач небесной механики, а Эйлер распространил свои результаты только на некоторые частные области (например, на случай жестких тел), Лагранж уже пришел к общим уравнениям (знаменитые *уравнения Лагранжа*), которым подчинялись движения какой угодно системы материальных точек, находящейся под действием какой угодно внешней силы и с наложением каких угодно связей[26]. Он выразил эти связи, введя особые множители,

[26]Связь — это ограничение, наложенное на движение: например, в том случае, когда движущееся тело должно оставаться на некоторой поверхности.

называемые теперь в его честь *множителями Лагранжа.* Для удобства вычислений Лагранж стал писать свои уравнения в *произвольной системе координат* и, таким образом, был первым, кто выразил в общей математической форме теоремы, которые прежде были сформулированы лишь в частном виде, — *закон живых сил, движение центра тяжести, сохранение вращательного момента и принцип наименьшего действия.* Затем он применил эти результаты к различным задачам небесной механики, гидродинамики, к исследованиям колеблющейся струны.

Можно сказать, что именно благодаря Лагранжу возникли современные механика и математическая физика. Но нельзя забывать, что за силу этих математических методов, равно как и за новые геометрические образы, которые должны были возникнуть впоследствии, была заплачена высокая цена. Напомним, что аналитическая механика Лагранжа, пренебрегая трением, заменяет *не всю* механику Ньютона, но лишь ее часть. Лагранж, ведомый элегантностью формализма и образом сил притяжения между материальными точками, которые были ему известны из небесной механики («именно так обстоит дело в природе», — говорит он [10, т. I, с. 290]), ограничивается консервативными силами или, по его определению, силами, произведенными некоторым потенциалом. Они названы так потому, что выражаются через производные некоторой функции (*потенциала*), который в каждый момент времени зависит только от пространственного положения той механической системы, к которой эти силы приложены. Их особенность заключается в способности производить работу, зависящую только от изменения конфигурации системы, а не от того способа, которым эта работа производится и, следовательно, единственно от начального и конечного состояний. Это ограничение механики со всей очевидностью вновь обнаруживается во всех ее более развитых формах, подчиненных теории Лагранжа, — от Пуассона до Колмогорова, включая сюда (упомянем только некоторые великие вехи этой эволюции) Гамильтона, Якоби, Софуса Ли, Пуанкаре, Эмми Нетер.

Таким образом, все *диссипативные* силы, возникающие из преобразования механической энергии в теплоту (вроде трения или электрического сопротивления) и вызывающие *необратимые* движения, исключаются. Следовательно, в противоположность механике Ньютона в ее общем виде, механика Лагранжа, много выигравшая от существенных усилий теоретиков на протяжении двух столетий, является *обратимой* и не содержит стрелы времени. Время — это лишь параметр, фиксирующий последовательные состояния системы, но не определяющий *направление* их смены, потому что направление времени всегда можно изменить на противоположное (по крайней мере, в принципе). Стрела времени, не будучи навязанной самим движением, может возникнуть лишь вследствие внешнего воздействия.

Такая механика описывает не эволюционные процессы, а лишь стационарные движения, которые уже установились и остались под властью законов симметрии и сохранения. Но ее успех, увеличенный еще большим успехом теории относительности и квантовой механики, сделал ее единственной теорией (может быть, и несправедливо!), способной описывать фундаментальные свойства материи, особенно в мире атомов. Под влиянием Больцмана, Гиббса и Эйнштейна аналитическая механика была положена в основу статистической термодинамики, что вызвало трудности, вызванные появлением в ней необратимости, неразрывно связанной со *вторым началом термодинамики*.

Таким образом, каким бы блестящим ни было состояние дел, оно не лишено теневых сторон, но все же механика Лагранжа — в том виде, в каком она существует, — принесла с собой огромные богатства, которые и по сей день еще отнюдь не иссякли.

Прежде всего укажем на основу теории, гениальные *уравнения Лагранжа*, которые сам Лагранж, понимая их важность, называл «дифференциальными уравнениями для решения всех проблем динамики»[27]. Чтобы пояснить всю степень новизны этой работы, отметим, что когда Лагранж описывал движение в пространстве относительно трех взаимно перпендикулярных осей (декартовы координаты), то

[27]Эти уравнения приводятся во второй части первого тома, отдел IV, с. 210 [10].

это было настолько мало знакомо эпохе, что он посвятил две страницы (т. I, с. 211–212) объяснению читателю — который все же не должен был бы быть совершенно невежественным — предельной простоты этой системы координат, т.е. того, о чем сегодня знает любой школьник. Следующий шаг является не менее впечатляющим, поскольку, когда Лагранж использует эти координаты, он, конечно, использует большее их число — втрое больше, чем количество точек, — но объединенное в тройки, так что каждая из них относится к одной частице. Затем Лагранж переводит уравнения в форму, соответствующую произвольным координатам, описывая систему уже не с помощью точек, но как совершенно абстрактную, представленную с помощью того же числа координат, что и прежде, и не приписывая частицам новых координат. В наши дни это выражается положением о том, что система, образованная некоторой совокупностью точек в физическом пространстве, может быть представлена единственной точкой в некотором пространстве, которое называется *пространством конфигураций* и размерность которого в три раза больше количества точек. Таким образом, десять планет Солнечной системы будут представлены единственной точкой в пространстве тридцати измерений. Сам Лагранж ограничил себя алгебраическим языком, но он *открыл путь геометризации механики в абстрактных пространствах*. Обратившись к обычной геометрии, он открыл более общую геометрию.

Вторым великим результатом Лагранжа было общее выражение сохранения живых сил и момента количества движения.

Вывод о сохранении живых сил является предшественником закона сохранения энергии. Идея восходит к Гюйгенсу и Лейбницу. Живая сила равна просто удвоенной величине того, что мы называем кинетической энергией, но теорема о «сохранении живых сил» была не чем иным, как тем, что на современном языке мы называем «законом сохранения»: она сводилась к утверждению, что увеличение половины живой силы (т.е. кинетической энергии) движущейся системы равно работе действующих на нее

[28] В действительности необходимо еще вычесть потенциал внутренних сил.

сил[28], и если силы описываются потенциалом, то увеличение половины живой силы равно увеличению потенциала, взятого с обратным знаком.

Элементарное рассуждение позволяет нам вывести из этого, что *сумма половины живой силы (кинетической энергии) и потенциала в процессе движения не изменяется.* Однако понадобилось ждать еще целое столетие, чтобы этот закон был сформулирован как *закон сохранения энергии* (выражение появилось в 1850 г.), поскольку полная энергия представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергии. В действительности Лагранж открыл закон именно в такой форме, но, чтобы соответствовать обычаям своего времени, он выразил его в терминах живых сил.

Необходимо подчеркнуть, что речь идет не о простых различиях в формулировке, поскольку переход к современной форме закона сохранения энергии, сформулированного в терминах *константы движения* (или *первого интеграла*, как ее также называют), ведет к приданию сохранению энергии ранга принципа и введению общего понятия закона сохранения. Этот закон станет играть все более важную роль в физике и окажется связанным с *законами симметрии*, с *группами инвариантности* и, следовательно, с геометрическими свойствами механических систем.

Данная Лагранжем общая формулировка теории живых сил знаменовала собой громадный научный прогресс, тем больший, что к ней присоединилась теорема сохранения момента количества движения, выраженная в терминах симметрии. Ньютон сформулировал это в законе площадей, а Лагранж доказал в общем случае: если внешние силы *инвариантны относительно вращения вокруг некоторой оси, то момент количества движения относительно этой оси сохраняется*[29]. Если силы обладают сферической симметрией, то это верно и для любой оси, проходящей через центр.

Но самое сильное влияние на наше миропонимание оказало следствие уравнений Лагранжа, выражаемое математической формулировкой *принципа наименьшего действия.*

[29]Момент количества движения (или, в современных терминах, момент импульса) — это векторная сумма произведений масс всех точек на их расстояние от оси и на их скорости относительно нее.

Действием движущейся материальной точки является произведение ее *массы* на ее *скорость* и на *длину* малого элемента ее траектории. В принципе наименьшего действия, сформулированном Мопертюи на основе метафизических соображений, к которым мы еще вернемся, но которые Лагранж оставил без внимания, утверждается, *что траектория движущейся материальной точки должна быть такой, чтобы действие, просуммированное по всем малым элементам этой траектории*, было бы минимальным в сравнении с действием для любой другой близкой траектории, граничные точки которой совпадают с граничными точками данной траектории.

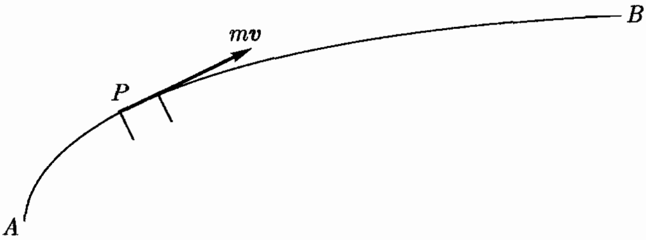

Рис. 4. Принцип Мопертюи. Сумма элементарных действий вдоль траектории должна быть экстремальной

Лагранж доказал — и не только для случая материальной точки, но и для случая системы материальных точек, на которую действуют консервативные силы (т.е. когда всякий раз имеется потенциал сил), — что *наименьшее действие является следствием уравнений Лагранжа* (которым подчиняется движение) *и, наоборот, если принять принцип наименьшего действия, то мы приходим к этим уравнениям*.

Из теоремы Лагранжа следует, что действие не всегда является *минимальным*, но что оно может быть и *максимальным*. Чтобы объединить оба случая, говорят, что *принцип Мопертюи является экстремальным принципом*. И принцип этот предвещал великое будущее.

Глава IV

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ

Природа действует наиболее легкими и доступными путями.

П. де Ферма [13][30]

Наш принцип подчиняет мир могуществу Творца и является необходимым следствием осмотрительного использования этого могущества.

П. де Мопертюи [14]

Природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим.

И. Ньютон [9][31]

Общая идея кратчайшего пути

Принцип наименьшего действия пришел в голову Мопертюи благодаря совершенному им метафизическому выбору, которым пренебрег Лагранж, но который во все времена вдохновлял выдающихся ученых. Идея кратчайшего пути возникает из редукционистского призвания науки и из веры в простоту законов природы, которую физики, в зависимости от того, были ли они верующими или неверующими, приписывали Богу или общей гармонии Вселенной. Эта вера нашла воплощение в словах Эйнштейна (которые можно прочесть на стене Файн-холла в Принстоне): «Господь Бог изощрен, но не злонамерен» —

Raffiniert ist der Herr Gott, aber boshaft ist er nicht.

---

[30]Ферма П. де. Синтез для рефракции // Вариационные принципы механики / Редакция, послесловие и примечания Полака Л.С. М., 1959. С. 7. (*Прим. перев.*).

[31]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 502. (*Прим. перев.*).

Экстремальные принципы воплотили эту метафизическую идею в математической формуле.

Кратчайший путь света. Принцип Ферма

В I в. н. э. Герон Александрийский доказал, что равенство углов падения и отражения света можно объяснить, если принять, что свет распространяется по кратчайшему пути (см. [16] и [17]).

Это был первый физический закон, выведенный из принципа минимума в том простом случае, когда кратчайший путь имел обычный геометрический смысл. Нужно было дождаться Ферма и начала XVII века, чтобы это понятие приобрело более широкий смысл. Принцип же, сформулированный Ферма, гласит:

> Путь, проходимый светом, — это путь, требующий наименьшего времени.

Итак, наименьшее время отнюдь не всегда означает кратчайшее расстояние (в чем легко убедиться на примере движения автомобилей по улицам), но мы выберем задачу более близкую к оптике, *задачу ньюфаундленда.*

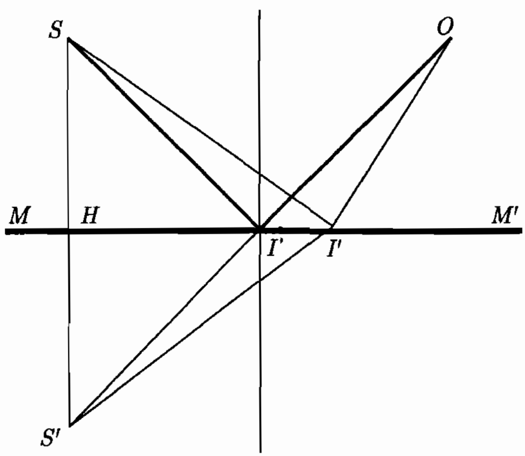

Рис. 5. Отражение света согласно Герону Александрийскому. SIO короче, чем $SI'O$

Предположим, что человек тонет, и его собака, оставшаяся на берегу, хочет ему помочь, но хозяин тонет довольно далеко от берега и несколько в стороне от того места, где он оставил собаку, а она, вдобавок, уже отбежала от воды. Задача для собаки-математика заключается в том, чтобы добраться до своего хозяина как можно быстрее: это задача на *минимальное время*.

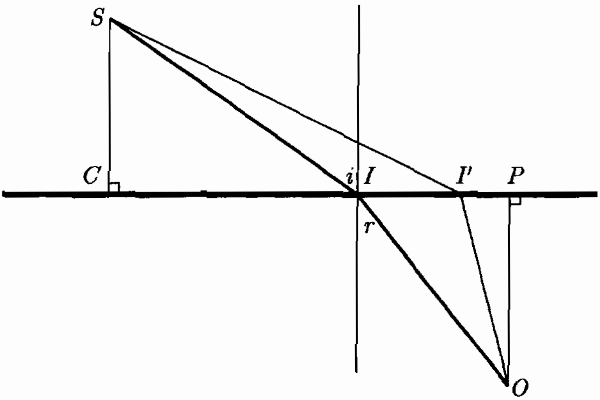

Рис. 6. Задача ньюфаундленда, преломление света и принцип Ферма

Собака знает, что бегает она лучше, чем плавает, и значит, ей нужно сократить путь в воде. Следовательно, ей не стоит прыгать в воду сразу же после того, как она пробежит путь по пляжу перпендикулярно линии воды. Но — желая сократить ту часть пути, которую ей придется преодолеть вплавь, — собака также не должна бежать по пляжу слишком далеко (по сравнению с тем случаем, когда она бежала бы к воде напрямую), потому что тогда она потеряет слишком много времени на суше. На берегу существует некоторая оптимальная точка, из которой собаке следует прыгнуть в воду, если она хочет добраться до хозяина вовремя, и эта точка не принадлежит прямолинейной траектории, то есть о такой точке нельзя сказать, находится ли она ближе к собаке или к человеку, поскольку кратчайший путь в данном случае является ломаной линией. Рассуждение, позволяющее найти этот путь, названо именем знаменитого Гюйгенса, который в своем *«Трактате о свете»* [18] доказал принцип Ферма, с которым отождествляется наша задача, если заменить пляж и море двумя прозрачными средами, а траекторию собаки — световым лучом.

Перенесем заключение Гюйгенса на случай ньюфаундленда, предполагая для простоты, что собака и ее хозяин находятся на равном расстоянии от кромки воды; на берегу с помощью проекции строят некоторый отрезок: оказывается, *собака должна прыгнуть в воду в точке, делящей этот отрезок в отношении, равном отношению скоростей собаки на суше и в воде.* В терминах оптики мы будем придерживаться аналогичной гипотезы об одинаковом расстоянии от поверхности раздела прозрачных сред до исходной точки и до наблюдателя и будем говорить, что луч преломляется в точке, разделяющей отрезок, построенный с помощью проекций исходной точки и точки, соответствующей положению наблюдателя, в отношении, равном отношению скоростей света в обеих средах.

Этот закон есть не что иное, как *закон преломления Снеллиуса–Декарта*[32] [12], согласно которому *показатель преломления* определяется частным от деления скорости света в вакууме на скорость света в среде. Значит, если в некоторой материальной среде показатель преломления больше *единицы*, то принцип Ферма предсказывает, что *свет распространяется медленнее, чем в пустоте*, тогда как Декарт предсказывал прямо противоположное. Мы к этому еще вернемся.

Преломление света представляет собой еще одно явление, вытекающее из принципа минимума, но является ли найденное условие действительно условием минимума? По правде говоря, нет. Оно позволяет утверждать лишь то,

[32]Этот закон гласит, что отношение синусов углов падения и отражения обратно пропорционально отношению показателей преломления. Именно для того, чтобы заменить синус делением интервала, мы и предположили равенство расстояний от поверхности раздела до исходной точки и до наблюдателя.

что время является либо минимальным, либо максимальным; говорят, что это *экстремум*, и поэтому принципы, подобные принципу Ферма, называются *экстремальными принципами*. Но в нашем конкретном случае доказывается, что путь соответствует именно *минимуму*.

Аналогия между двумя рассмотренными задачами иллюстрирует телеологический характер экстремальных принципов, поскольку собака *стремится к некоторой цели*, и процесс описывается как некая целостность, одновременно зависящая от начального и конечного состояний. Экстремальный принцип не является каузальным законом — ведь в противном случае процесс определялся бы только его начальным состоянием, — и он не позволяет узнать прошлое, исходя из будущего, а потому говорится, что он не задает стрелу времени. Таким образом, в нашем примере задача может быть обращена: хозяин проделывает тот же путь, если он стремится спасти от опасности свою собаку на пляже. То же относится и к задаче из оптики: мы обнаружили бы тот же луч света, если бы свет распространялся в противоположном направлении, — это *принцип обратимости пути света*. Экстремальные принципы определяют только установившиеся и обратимые, а не эволюционные процессы: мы уже выяснили это применительно к механике Лагранжа, вытекающей из экстремального принципа — принципа наименьшего действия. Тем не менее, принцип Ферма является одним из величайших достижений физики — как по причине его мощи и общности, так и по причине его влияния на нашу картину мира. Принцип Ферма открыл для науки по меньшей мере три великих пути:

— предоставил общий метод описания световых лучей, породив геометрическую оптику;

— открыл путь экстремальным принципам как таковым (одним из них как раз и является принцип наименьшего действия);

— наконец, возвестил начало величайшей революции, позже охватившей и геометрию (открытие неевклидовых геометрий), поскольку он впервые показал, что физические свойства среды могут приводить к тому, что линии кратчайшего пути оказываются уже не прямыми, как это можно видеть в задаче преломления света.

Мы знаем, что ломаная, а не прямая линия соответствует минимальному времени. Оно является суммой двух промежутков времени, каждый из которых соответствует одной из прозрачных сред (например, воздуху и стеклу), и каждый из этих промежутков времени получается путем деления пройденного расстояния на соответствующую скорость света. Но как раз здесь мы тайком изменяем геометрию. Зная промежутки времени по отдельности и их сумму (минимальное время), можно попытаться вернуться к интуитивному понятию кратчайшего расстояния путем умножения времени на скорость, но неизвестно, какую именно скорость выбрать, потому что она различна в разных средах. Мы выберем в качестве эталона скорости *скорость света в вакууме*, и вместо геометрического расстояния, пройденного светом, определим *оптическую длину пути*, которая в каждой среде будет равна произведению времени, за которое в этой среде свет проходит некоторое расстояние, на его скорость в вакууме. В вакууме оптическая длина пути будет равна обычному геометрическому расстоянию, но в материальной среде она будет длиннее, потому что скорость будет меньше, а время — больше[33]. Если свет распространяется сквозь различные среды или сквозь среду, оптические свойства которой меняются от точки к точке, то сумма всех промежутков времени, умноженная на скорость света в вакууме, будет равна полной оптической длине пути, и принцип Ферма в этом случае мог бы звучать так:

Свет следует по кратчайшему оптическому пути.

Следовательно, «истинная длина», пройденная светом, является не обычной длиной евклидовой геометрии, а оп-

[33]Это означает, что оптическая длина пути является произведением обычного расстояния на *показатель преломления*. Помимо вакуума и некоторых исключительных случаев, этот показатель больше единицы, и, следовательно, оптическая длина пути больше пройденного геометрического расстояния.

тической длиной пути. Все это происходит так, словно свет «видит» не ту же самую геометрию, что «видим» мы. Он изменил *метрику* и не следует по *геодезическим линиям* обычной геометрии: прямая линия не является для него кратчайшим расстоянием (за исключением случая однородной среды) — в зависимости от физических свойств среды, сквозь которую он проходит, получается некоторая кривая. Это исходная точка выхода за пределы евклидовой геометрии.

Примером кривой, описываемой светом, является траектория света, исходящего от звезды и проникающего во все более плотные (а следовательно, все сильнее преломляющие) слои атмосферы, при этом понемногу искривляющегося в сторону вертикали, так что фактически мы видим звезду немного выше над горизонтом по сравнению с ее действительным положением. Такая кривая является аркой *циклоиды*, описываемой знаменитой *рулеткой Паскаля*[34]. Обсуждаемая нами задача была решена и выставлена на конкурс в 1697 г. Иоганном Бернулли, который уточнил решения, полученные его братом Якобом, маркизом де Лопиталь, Лейбницем и Ньютоном. (Кстати, Ньютон не подписал своего ответа, но Бернулли тотчас же его узнал!)

Иоганн Бернулли заметил, что решение этой задачи совпадает с решением одной задачи из механики, внешне никак с ней не связанной, — задачи о *брахистохроне* (по-гречески «кратчайшее время»). Пусть даны две точки, которые не находятся ни на одной горизонтали, ни на одной вертикали. Нужно найти кривую, которую опишет небольшая масса, скользящая от высшей точки к низшей таким образом, чтобы время движения по этой траектории было бы *минимальным*. Иоганн Бернулли уже знал, что материальная точка должна описывать *вогнутую* арку циклоиды, тогда как в другом случае она является выпуклой. Это было первым сближением оптики и механики,

[34]Циклоида описывается точкой, связанной с окружностью, которая катится по прямой на плоскости, как вентиль на колесе велосипеда. Эпициклы Птолемея принадлежат к этому же семейству, но связаны с велосипедом, который катится по окружности.

предвещавшим возникновение волновой механики Луи де Бройля[35].

Возвращение к принципу наименьшего действия

Каким бы гениальным ни был принцип Ферма, в основе его лежало интуитивное понятие — понятие минимального времени, — и впоследствии этот принцип превратился в принцип кратчайшего пути. В механике же главная трудность заключалась в определении той величины, которая должна быть минимальной. Как мы видели, согласно Лагранжу и Мопертюи, этой величиной является *действие*, произведение массы движущегося тела на его скорость и на длину его траектории. Хотя определить эту величину математически довольно просто, она несколько таинственна: мы хорошо «понимаем» скорость или массу (ответственную за инерцию), мы «понимаем» импульс, произведение массы на скорость (проявляющийся в столкновениях), но мы плохо понимаем действие, *произведение импульса на длину*. Кроме того, бросается в глаза следующее обстоятельство: мы видели, что принцип Ферма в качестве принципа минимального времени придает главное значение частному от деления пройденного расстояния на скорость света в рассматриваемой среде, так что оптическая длина пути *обратно* пропорциональна этой скорости. Напротив, принцип Мопертюи вводит произведение пройденного расстояния на скорость движущегося тела и, следовательно, действие *прямо* пропорционально скорости.

Это противоречие между двумя принципами играло важную роль в споре, разгоревшемся в XVII веке между двумя соперничавшими оптическими теориями — волновой теорией Гюйгенса и корпускулярной теорией Ньютона. В самом деле, согласно принципу Ферма и теории Гюйгенса, свет распространяется в вакууме быстрее, чем в

[35]Говоря по правде, замеченное Бернулли совпадение было всего лишь приближением. Оно оказалось возможным только потому, что он использовал одно и то же приближения и для измерения атмосферного давления, и для закона падения тел.

преломляющих средах, тогда как — согласно Мопертюи и *корпускулярной теории* — все должно быть наоборот, о чем писал Декарт в своей *«Диоптрике»*[36]. К тому времени, когда принцип Мопертюи (в 1744 г.) предоставил новый аргумент в пользу корпускулярной теории света, она уже одержала триумфальную победу над волновой теорией (это произошло еще в конце XVII века благодаря Ньютону), да и все развитие механики способствовало победе корпускулярной оптики. Волновая теория и принцип Ферма были оставлены, а гипотеза Декарта относительно скорости света казалась решительным образом подтвержденной теориями Ньютона и Мопертюи. Однако в XVIII веке этот спор был, скорее, столкновением мнений и носил несколько академический характер, потому что в распоряжении исследователей было мало данных о скорости света в вакууме и совсем отсутствовали данные об этой скорости в преломляющих средах. Положение дел совершенно изменилось в следующем столетии, когда Фуко впервые измерил скорость света в воде. Неожиданная развязка: эта скорость оказалась меньше скорости света в вакууме!

Корпускулярная теория начала разрушаться, и тем быстрее, чем дальше развивалась волновая теория, продвигавшаяся вперед огромными шагами благодаря работам Френеля, выполненным после того начального импульса, который был ей сообщен Юнгом. Теория волн заставила признать себя не только применительно к явлениям дифракции и интерференции, но даже в некоторых расчетах траекторий световых лучей — области, где до тех пор корпускулярная теория царила безраздельно: Френель решил в терминах волн задачу, поставленную Гюйгенсом, — задачу двойного лучепреломления в исландском шпате, т.е. в случае разделения падающего светового луча на «обыкновенный» и «необыкновенный» лучи. Таким образом он доказал, что геометрия волн господствует над геометрией лучей. Относительно прямолинейного распространения света, которое Ньютон считал

[36]*«Диоптрика»* Декарта датируется 1637 г, *«принцип Ферма»* — 1662 г., *«Трактат о свете»* Гюйгенса — 1678 г (опубликован в 1690 г.), *«Оптика»* Ньютона была написана в 1675 г. и опубликована в 1704 г.

отличительной чертой корпускулярной теории, Френель точно так же доказал, что оно является следствием теории волн. Эти результаты вытекали из блестящего геометрического рассуждения, *принципа Гюйгенса*, представляющего волну в каждый момент ее распространения как место расположения бесконечного числа маленьких источников, испускающих вперед волны, которые и порождают будущую волну. Френель расширил этот принцип (ставший *принципом Гюйгенса–Френеля*), введя в него *периодичность* световой волны, позволяющую описывать пучок света, потому что волны Гюйгенса *взаимно гасились вследствие интерференции* во всех направлениях за исключением направления распространения.

У Френеля все, включая и прямолинейное распространение света, вытекает из принципа интерференции, т.е. из волновых свойств. Его рассуждение не только восстанавливает в правах закон Снеллиуса–Декарта, но и приводит к выводу о том, что в тяжбе между принципами Мопертюи и Ферма верх одерживает последний. Действительно, свет распространяется в вакууме быстрее, чем в преломляющих средах, и скорость, рассматриваемая в рассуждениях Ферма, Гюйгенса и Френеля, является не скоростью корпускул, а *фазовой скоростью волны*.

Но оптика пережила столько перипетий, что, несмотря на опыт Фуко и рассуждения Френеля и его последователей, будущее опровергло ее подходы в части того, что касается принципа Мопертюи и корпускулярной теории. Корпускулы не были навсегда изгнаны из оптики, и мы увидим, как они возвратятся в другой форме.

Дуализм волн и корпускул: союз двух великих экстремальных принципов

Величайшим механиком после Лагранжа стал гениальный Уильям Роуан Гамильтон — ирладндец, родившийся на три четверти века позднее, чем Лагранж[37], он был мечтателем, поэтом, философом и большим любителем выпить. Математик и астроном, он интересовался опти-

[37]Лагранж родился в 1736 г., а Гамильтон в 1805 г.

ческими инструментами и, следовательно, геометрической оптикой, а по этой причине — изучением световых траекторий и, наконец, механикой.

Его интерес к световым лучам не ограничивался только корпускулярной оптикой. Он был прекрасно знаком с теорией Френеля, восхищавшей его, и он хотел предоставить решительное доказательство в ее пользу — подобно тому, которое позже предоставил в пользу небесной механики Леверье, предсказав существование планеты Нептун. Решающим экспериментом, предложенным Гамильтоном, было оптическое явление в кристаллах, *коническая рефракция*, которую он предсказал на основе вычислений, проведенных им исходя из работы Френеля о двойном лучепреломлении в кристаллах. Это явление заключается в том, что при проникновении света в кристалл под определенным углом необыкновенный луч «больше не знает», как ему следует располагаться относительно обыкновенного луча, и вместо одного луча получается *световой конус*. Сразу после того, как Гамильтон предсказал это явление, оно было обнаружено одним из его друзей, Ллойдом, и эксперимент был встречен как победа волновой теории над теорией корпускул. Но Гамильтон не хотел рубить с плеча. Поддерживая равновесие между волнами и корпускулами, он хотел лишь доказать полезность волновой теории. Он даже доказал, что обе концепции — и, следовательно, оба принципа, принципы Мопертюи и Ферма, — приводят к одним и тем же выводам относительно оптических лучей при условии, что скорость корпускул, фигурирующая в принципе Мопертюи, изменяется *обратно пропорционально* скорости волн, фигурирующей в принципе Ферма и в теории волн Гюйгенса–Френеля.

Спустя столетие после Гамильтона Луи де Бройль вновь открыл этот результат в том единственном случае, когда он является действительно точным, — в случае волновой механики свободной материальной частицы в вакууме. Но тем временем все, о чем мы говорили в связи с Гамильтоном, было забыто — точно так же, как было забыто и другое его гениальное прозрение: он заметил, что если механика Лагранжа может основываться на принципе наименьшего действия Мопертюи, то, значит, *геометрическая оптика и механика могут быть описаны при помощи одного и того же языка*, который он и разработал, исходя из уравнений Лагранжа, представших в новой форме *уравнений Гамильтона*. Он доказал, что во время движения материальной точки можно определить в пространстве аналогичную *волновому фронту поверхность* равного действия, для которой он записал уравнение ее распространения, известное как уравнение Гамильтона–Якоби (оно носит имя немецкого математика, сумевшего свести все задачи механики Гамильтона и Лагранжа только к распространению этой волновой поверхности).

Увы, теоретики склонны помнить лишь о предложенных им рецептах, забывая о породивших эти рецепты идеях. Было забыто сближение волн и корпускул, равно как и аналогия между механикой и оптикой и между принципами Мопертюи и Ферма. Только уравнения Гамильтона и Якоби имели успех, и они заняли место рядом с уравнениями Лагранжа. Однако следует признать, что эти аналогии и не были пригодны для использования и что они представляют собой лишь формальное сближение, самое лучшее доказательство эквивалентности теорий, которые оставались разделенными. Пока не существовало еще *теории относительности* и *теории квантов*, на которые смог опереться де Бройль.

Волновая механика, объединившая механику и оптику, волны и корпускулы, а также экстремальные принципы Мопертюи и Ферма, была порождена тем кризисом, который разразился в науке вследствие открытия квантов. В двадцатые годы XX века, когда де Бройль начал свои исследования, физика микромира испытывала затруднения, поскольку теория атома Бора и Зоммерфельда — «старая квантовая теория» — была лишь совокупностью остроумных, но непонятных рецептов, включенных в механику и теорию электромагнетизма для того, чтобы ввести в них *прерывность*, связанную со знаменитой постоянной Планка.

Научная деятельность Луи де Бройля, естественно, была связана с современной ему наукой, но сам он был гением, перешагнувшим рамки своего времени. Конечно, он учился в Сорбонне, работал на военном радио во время Первой мировой войны и занимал важные университетские и академические должности, однако не принадлежал ни к одной из научных группировок и держался особняком, оставаясь вдали от мирской суеты. У него была склонность к уединенной работе и инстинктивный страх перед светской жизнью. Эти особенности вкупе с его научным гением сделали его одним из наиболее оригинальных умов, когда-либо проявивших себя в науке. Историк по своему первому образованию и по природной склонности, он уже в молодости изучил не только квантовую теорию и классическую физику, но и историю и эволюцию научных идей с XVII века. Казалось, он жил рядом с Ферма, Ньютоном, Лагранжем, Френелем, Максвеллом и продолжал этот ряд именами Планка и Эйнштейна. В 1911 г., когда он изучал основы аналитической механики, он спросил себя, не ведут ли попытки разрешения трудностей квантовой теории к необходимости синтеза оптики и механики. Он приступил к работе над этим как раз тогда, когда разразилась война [25].

В начале двадцатых годов он был единственным теоретиком, верившим в гипотезу Эйнштейна о *световых квантах*, согласно которой световая энергия не распределяется в волне непрерывно, а переносится в виде отдельных порций, *фотонов*. Эта теория, предложенная Эйнштейном в 1905 г., вновь вводила в научный оборот представление о частицах света и воскрешала старую теорию Ньютона. Но все допускали, что волны и корпускулы могут быть только противоположны друг другу и потому исключают друг друга. Поскольку теория волн Френеля добилась к тому времени триумфального успеха, то теория Эйнштейна представлялась своего рода шагом назад, отступлением. Она была долго отвергнута и отклонялась даже после того, как Эйнштейн приобрел блестящую репутацию и стал непререкаемым авторитетом, — и даже после того, как появились опытные подтверждения законов фотоэлектрического эффекта, которые были открыты благодаря его гипотезе. Именно за это Эйнштейн получил Нобелевскую премию, но удивительно, что результаты его теории были приняты, а сама теория отклонена. Луи де Бройль был не только первым, кто принял сосуществование в свете волн и корпускул; он, можно сказать, превзошел своего знаменитого предшественника, выдвинув новую гипотезу, согласно которой такое сосуществование должно распространяться на все материальные частицы. Дерзко сблизив теорию относительности и теорию квантов, де Бройль приписал каждому элементу материи, каждой частице некую волну, характеризующуюся знаменитой *длиной волны де Бройля*, которая обратно пропорциональна массе и скорости частицы, а коэффициентом этой пропорциональности является не что иное, как *постоянная Планка*.

Так было скреплено соглашение между волнами и корпускулами и, тем самым, между двумя экстремальными принципами физики, что Луи де Бройль уточнил в своей знаменитой диссертации 1924 г. [19]:

> Принцип Ферма, примененный к фазе волны, тождественен принципу Мопертюи, примененному к движущемуся телу; динамически возможные траектории движущегося тела тождественны возможным лучам волны.

И де Бройль доказал, что опыт Фуко, который мгновенно обеспечил превосходство теории волн над корпускулярной оптикой, был неверно истолкован и что принципы Мопертюи и Ферма, будучи объединены с волновой механикой, предсказывают одну и ту же скорость света в преломляющих средах и оба согласуются с опытом. Однако новая теория дала, главным образом, блестящее объяснение прерывных движений, открытых Планком на атомном уровне и введенных Бором в свою теорию атома под названием *квантовых состояний*. Де Бройль доказал, что эти состояния являются теми состояниями, в которых *волна находится в резонансе*: квантовые состояния соответствуют *стационарным состояниям* волны, а целые числа (*квантовые числа*), характеризующие их, имеют ту же природу, что и числа, появляющиеся при колебаниях.

Эти идеи были обобщены Шрёдингером благодаря его знаменитому уравнению, описывающему распространение волн де Бройля и ставшему основным уравнением *волновой механики* или, как сейчас говорят, *квантовой механики*. (Об эволюции этих идей можно прочитать в работах [20]–[25]).

Глава V

НЕЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Пространство образует лишь частный случай трехмерного многообразия [...]. То, что отличает пространство от других многообразий, не может быть выведено из опыта.

Бернхард Риман [26]

В той мере, в какой математические суждения относятся к реальности, они недостоверны, а в той мере, в какой они достоверны, они не относятся к реальности.

Альберт Эйнштейн [27]

Является ли геометрия частью математики или же частью физики?

Именно на этот вопрос отвечают две цитаты, открывающие данную главу, но людям понадобилось два тысячелетия, чтобы это понять.

В самом деле, в течение длительного времени самая большая трудность в геометрии заключалась в том, что, с одной стороны, несокрушимая логическая связь ее суждений превратила их в великолепнейшее украшение математики и, следовательно, «абсолютной истины», тогда как, с другой стороны, несомненная очевидность этих аксиом и точность их экспериментальных проверок заставляли считать эти результаты естественными законами. Ньютон — если ссылаться только на этот известный пример — был убежден в этом.

В указанном смысле опыт не может вызвать ни малейшего сомнения, но, к счастью, в аксиомах было нечто вроде трещины, наличие которой со времен античности поддерживало в математиках состояние некоторого плодотворного беспокойства: это известный *пятый постулат Евклида, в котором утверждается, что на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит* *одна и только одна параллельная ей прямая* (на самом деле формулировка не так прямолинейна, но она ведет к приведенному положению [26]).

Начиная с I в. до н. э. математики уже не считали пятый постулат очевидным и пытались доказать его как теорему, исходя из других постулатов Евклида, или заменить его другим положением. Мы знаем об этом благодаря Проклу [29], жившему в V в. н. э. и провозглашавшему свое недоверие к «очевидным» суждениям, хотя Герман Вейль, один из лучших в нашем столетии специалистов по неевклидовой геометрии, заметил, что этим недоверием нельзя злоупотреблять, потому что «очевидность является глубинным основанием нашего знания, включая сюда и эмпирическое знание» [30]. Как бы то ни было, у Прокла в данном случае были основания для недоверия, и в истории науки он был первым в длинном ряду математиков, занявшихся этими вопросами. Истина обнаружилась только в двадцатых годах XIX века, благодаря двум молодым математикам — профессору Казанского университета в России Николаю Ивановичу Лобачевскому и офицеру венгерской армии Яношу Больяи. Они почти одновременно открыли, что доказать пятый постулат нельзя, потому что возможно — по крайней мере, с точки зрения логики — опустить его и заменить другим. Например, можно сохранить все постулаты Евклида, допуская при этом, как сделали Лобачевский и Больяи, что на плоскости через точку проходит *множество* прямых, параллельных данной прямой.

Таким образом была получена новая геометрия, которая логически столь же самосогласована, как и геометрия Евклида, и в рамках которой можно корректно вывести некоторую последовательность теорем. Единственное отличие заключается в том, что она не соответствует нашему привычному опыту. Лобачевский и Больяи наткнулись на нечто существенное, а именно: никакая геометрия не принимается *a priori* и следует проводить различие между требованиями логики и требованиями опыта, которые только и могут определить выбор той или иной геометрии.

В этом смысле геометрия Евклида сохраняет, разумеется, свою важность и преимущество лишь потому, что, как говорил Анри Пуанкаре [28], «она оказывается самой простой, и она является таковой не только из-за привычки нашего ума или из-за неизвестно какой непосредственной интуиции, которой мы обладаем относительно евклидова пространства. Она является простейшей сама по себе, точно так же, как многочлен первой степени проще многочлена второй степени». Между тем, может статься, что для потребностей физики другая геометрия, отличная от геометрии Евклида, окажется одновременно и более удобной, и логически более простой.

Например, мы уже видели, что, согласно принципу Ферма, свет всегда распространяется по линиям, которые соответствуют кратчайшему пути и которые, в общем случае, вопреки нашим геометрическим привычкам, не являются прямыми. Кто лучше знает геометрию — свет или мы? Чтобы ответить на этот вопрос, нужны были два гиганта — Риман и Эйнштейн, которых отделяет друг от друга полстолетия.

Риман учился в Геттингенском университете и был студентом знаменитого основателя дифференциальной геометрии Карла Фридриха Гаусса; трудно сказать, кому из них принадлежит больший вклад. В 1854 г. Риман (которому было только двадцать восемь лет) был допущен к конкурсу на замещение вакантной должности *приват-доцента*, которая не оплачивалась, так что вознаграждение зависело от доброй воли студентов. Помимо прочих испытаний он должен был прочитать перед преподавателями факультета инаугурационную лекцию — доклад, тема которого должна была выбираться из трех тем, предложенных кандидатом.

Риман уже выполнил серьезные исследовательские работы, из которых он сам выбрал для предлагаемого списка две, потому что третья касалась *оснований геометрии*. Итак, ему казалось, что третья работа еще не доведена до конца, и потому мгновенно впал в депрессию, когда Гаусс, вопреки традиции, выбрал именно третью тему. Можно сказать, что Риман искушал дьявола, выставляя название, которое могло сразу же заинтересовать его наставника, но этот несколько неблагоразумный поступок приблизил одно из величайших открытий в истории математики.

Инаугурационная лекция называлась *«Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen»* («О гипотезах, лежащих в основании геометрии»). Текст изумителен: меньше двадцати страниц почти без формул, потому что Риман хотел оставаться простым и понятным, надеясь, что так аудитория примет его лучше. По правде говоря, эти надежды оказались, конечно же, напрасными, потому что мемуар трудно читать и сегодня, но у Римана был, по крайней мере, один слушатель, страстно внимавший ему и удивленный глубиной излагаемых идей. Это слушатель покинул собрание в состоянии непривычного для него возбуждения — им был, разумеется, Гаусс. Именно он раньше всех выдвинул идею неевклидовой геометрии, о которой размышлял в течение сорока лет и о которой говорил со своими друзьями, но ничего не публиковал, «боясь», как он писал в письме к Бесселю, «криков беотийцев» [26]. Лекция Римана превосходила все то, о чем он размышлял.

Помимо краткости текста и почти полного отсутствия формул, в этом мемуаре, слывущем основанием неевклидовой геометрии, поражает то, что в нем вовсе не обсуждается вопрос о параллельных прямых и пятый постулат! Риман об этом не заботился, он перешел на другой уровень. Он хотел понять, что представляет собой геометрическая фигура вообще и что представляет собой само пространство. Он стал первым из тех, кто не сводил пространство к пустой, данной *a priori* раз и навсегда сцене, на которой геометрические фигуры должны лишь играть некоторую роль, — он и само пространство превратил в некую геометрическую сущность.

Главная его идея основана на понимании необходимости проводить различие между тем в геометрии, что является общим и относится к *топологии*, и тем, что конкретизирует геометрию и относится к *метрике*. Это означает, что нужно сперва поставить вопрос о понятии геометрической фигуры, рассматриваемой как множество точек, которые считаются лишь общими свойствами положения в пространстве и характеризуются отношениями между собой либо большей или меньшей степенью близости друг к другу. Эти свойства в известных случаях подвергаются различным преобразованиям, которые являются непрерывными в широком смысле: *гомеоморфизмами*, сохраняющими рассматриваемые свойства, но не имеющими отношения к более точному понятию *расстояния* между двумя точками. Оно появляется лишь на второй стадии развития геометрии, когда вводится *метрика*, позволяющая уточнить форму геометрических фигур (например, появление прямых линий или окружностей) и конкретизировать преобразования (можно говорить, например, о переносах, вращениях, гомотетиях и т. д.). Что касается того, имеет ли геометрия, сконструированная таким образом, какое-либо практическое значение, или, иначе говоря, является ли одна метрика более пригодной для описания природных явлений, чем другая, то решение об этом выносит не математика, а опыт. В этом не следует видеть разновидность пилатовской склонности умывать руки, присущей математику, далекому от фактов, поскольку Риман интересовался механикой, явлениями тяготения и электромагнетизма, и он ставил вопрос о том способе, которым физические законы могут влиять на геометрию нашего пространства как в бесконечно большом, так и в бесконечно малом.

Выходя за прежние рамки геометрии, Риман изобрел понятие *многообразия*, т. е. непрерывного множества точек какой угодно размерности, снабженного общим понятием расстояния. Это последнее было введено в форме, обобщающей понятие евклидова расстояния, которое, согласно теореме Пифагора, выражается суммой квадратов при соотнесении геометрических фигур с двумя перпендикулярными осями.

Но у Римана неевклидов характер пространства проявляется в том, что для измерения расстояний нет прямых линий. Самое большее, что можно сделать, — это приближенно уподобить отрезку прямой маленький элемент кривой, соединяющей две близки точки (точно так же маленькая дуга окружности отождествляется со стягивающей ее хордой).

Выражение для элементарного расстояния не будет единственно возможным и будет меняться при переходе от одной окрестности пространства к другой: оно определено только для очень близких друг к другу точек, и только в этих пределах расстояние — *элемент длины* — будет иметь знакомую форму теоремы Пифагора.

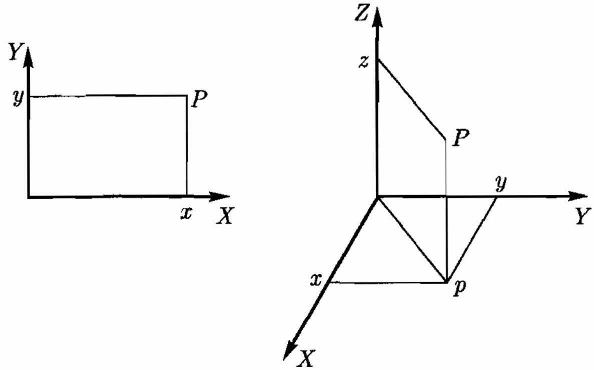

Рис. 7. Плоскость и трехмерное евклидово пространство в декартовых координатах

Несмотря на эту очевидную абстрактность, нам всем известны примеры пространств Римана. Простейшим примером является поверхность Земли, которая приближенно является двумерной сферической поверхностью. Представим себе, что на ней живут разумные, но плоские существа, имеющие лишь два измерения и не знающие понятия высоты. Их вселенная уже больше не была бы евклидовым пространством, а представляла бы собой двумерное *риманово пространство*. Для этих существ кратчайшим расстоянием между двумя точками — *геодезической линией* — была бы не прямая, о которой у них не было бы никакого понятия, почерпнутого из опыта, но дуга большой окружности, прочерченная на поверхности Земли, дуга меридиана. Итак, если геометрия Евклида учит (и это ее первая аксиома), что через две точки может проходить лишь одна прямая (геодезическая линия), то это отнюдь не так для наших существ, живущих на сферической поверхности, поскольку для них две точки в общем случае определяют *две экстремали*: большую и малую дуги меридиана. Одна из них есть «истинная» геодезическая линия, но и другая также является экстремалью, поскольку если глобально ее длина и не является наименьшей, то локально она именно такова в случае двух достаточно близких друг к другу точек. Кроме того, имеется и исключение: между двумя диаметрально противоположными точками проходит бесконечное число меридианов и, следовательно, геодезических линий, как это имеет место в случае земных полюсов.

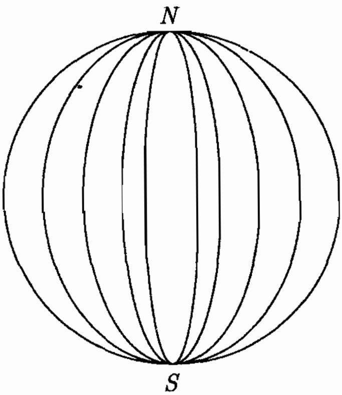

Рис. 8. Земная сфера и ее меридианы

Рассмотрим теперь две дуги меридиана, прочерченных, например, так, что они исходят из северного полюса, и продолжим их до экватора. Мы получим треугольник, три стороны которого являются геодезическими линиями, поскольку это — дуги большой окружности, соответствующие катетам прямоугольного треугольника на евклидовой плоскости. Итак, меридианы прочерченные из полюса, образуют прямой угол с экватором, и мы имеем треугольник с двумя прямыми углами, который в евклидовом пространстве не существует. В этом треугольнике (и это верно также применительно к треугольнику в сферической геометрии) сумма углов *больше* суммы двух прямых углов, тогда как в геометрии Евклида эти суммы *равны*.

Если бы мы приняли геометрию Лобачевского, то в ней сумма углов треугольника, наоборот, была бы *меньше* суммы двух прямых углов. Геометрия Лобачевского соответствует поверхности, похожей на седло или на горный перевал, которая, правда, может оказаться выпуклой или вогнутой в зависимости от того направления, которое мы на ней выбираем. Сферическая геометрия — это *эллиптическая* риманова геометрия с *положительной кривизной*, а геометрия Лобачевского — это *гиперболическая* геометрия с *отрицательной кривизной*. Евклидова геометрия занимает промежуточное положение: она является *плоской*, и ее кривизна равна *нулю*, но следует обратить внимание на то, что она отнюдь не является только геометрией на плоскости, потому что трехмерная геометрия также является плоской в том смысле, который теперь понятен.

Возвратимся к сфере и предположим теперь, что одно из существ, о которых мы говорили, пытается начертить окружность, беря за ее центр какую угодно точку сферической поверхности. Поскольку в качестве примера мы выбрали поверхность Земли, то поместим эту точку на Северный полюс. Таким образом, для того, чтобы начертить окружность, нужно будет удалиться от Северного полюса во всех возможных направлениях на длину различных геодезических линий, т.е. на длину меридианов, проходящих через полюс, всякий раз останавливаясь на одном и том же расстоянии от него, — расстоянии, которое будет выбрано нашим гипотетическим существом. Эта совокупность точек образует окружность, которая нам хорошо известна: это — *параллель*.

Поскольку наше существо является геометром, оно не преминет заметить, что для него окажется невозможным начертить окружность любого «радиуса»: самой большой из них является экватор. Затем ему может прийти в голову идея измерить длину уже полученной окружности и сравнить ее с длиной «радиуса» окружности, т.е. с длиной геодезической линии между Северным полюсом и точкой окружности. Поскольку расстояние измеряется вдоль меридиана, то оно, очевидно, будет больше радиуса окружности в том обычном евклидовом смысле, который мы придаем этому термину. Следовательно, наше существо обнаружит, что длина окружности меньше 2π, умноженных на «радиус». Более того, эта величина, не являясь универсальной, будет изменяться еще и в зависимости от длины радиуса окружности. Таким образом, для очень маленького радиуса окружность будет почти евклидовой, потому что поверхность сферы в этом случае почти совпадает с касательной плоскостью, и найденная величина будет близка к 2π. Напротив, если окружность является экватором, то ее расстояние от полюса по геодезической линии будет равно четверти меридиана, и, следовательно, отношение между длиной окружности экватора и длиной «радиуса» будет равно 4 вместо $2\pi = 6{,}28$...

Понятно, что геометрия этих гипотетических существ сильно отличается от нашей геометрии. Не выходя из своего двумерного пространства, не глядя на небо (в таком разглядывании для них нет ни малейшего смысла, потому что они не знают, что такое высота), они могли бы создать только геометрию, приспособленную к их вселенной. Это была бы сферическая риманова геометрия. Но точно так же, как у нас был Риман, среди них также мог бы найтись гениальный математик, который открыл бы существование других геометрий и, в частности, евклидовой геометрии. Она показалась бы им более простой, чем та, в которой они живут, но очень экзотической.

И в один прекрасный день эти существа, обитающие на двумерной сфере, могли бы породить другой гениальный ум, который благодаря лишь своей интуиции осознал бы, что физика (их физика) стала бы логически более простой, если бы они изменили геометрию. Например, этот гениальный ум мог бы открыть, что двумерная сферическая вселенная, в которой живут эти существа, удостоилась включения в более обширное трехмерное пространство и что это пространство является более простым, чем их собственное, потому что оно является евклидовым. Поэтому же их собственное пространство стало более простым вследствие того, что они получили возможность рассматривать его как поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Как мы знаем, это трехмерное пространство является нашим пространством. Но эта история о мире двумерной сферы — всего лишь притча, помогающая понять, что именно сделал Эйнштейн, предложив нам рассматривать вселенную с помощью другой геометрии.

Как физика может диктовать нам выбор новой геометрии

Оставим теперь этих сферических существ и попытаемся понять, что произошло с нами самими.

Перед нами уже вставал вопрос о том, кто знает геометрию лучше — мы или свет. Попробуем задать тот же вопрос иначе: свет, проходя сквозь атмосферу, перестает распространяться по прямой линии, чтобы распространяться по кривой, о которой мы узнали из принципа Ферма и которая все-таки является геодезической линией; в таком случае есть ли у нас основание упорно утверждать, будто геометрия Евклида является лучшей, будто именно прямая должна быть кратчайшей линией, соединяющей две точки, и будто свет только отклоняется от прямолинейной траектории? Не лучше было бы сменить геометрию?

В этом случае ответ будет отрицательным, но следует уточнить смысл этого довольно тонкого «нет»: в нем подразумевается проведение различия между выбором обстоятельств удобных, но чисто технических, и выбором, определяемым столь общими физическими условиями, что невозможно удержаться от придания им онтологического значения. Именно это происходит в связи с релятивистской теорией тяготения.

Конечно, для описания частного явления распространения света в атмосфере мы можем применить геометрию и сконструировать риманово пространство, геодезическими линиями которого будут арки циклоиды, которую Иоганн Бернулли и открыл в качестве траектории распространения световых лучей. Тогда описание явлений приобретает элегантность и простоту, но речь идет лишь о частной задаче, даже если она будет рассматриваться применительно к общему случаю преломляющих сред. По правде говоря, для каждой проблемы нужно было бы вводить свое риманово пространство, и между различными пространствами, определенными таким образом, не существовало бы простой логической связи. В этих условиях лучше было бы продолжать говорить на языке евклидова пространства.

В случае механики все выглядит несколько иначе. Не будем забывать, что принцип наименьшего действия также определяет элемент длины и, следовательно, элемент новых геодезических линий, в общем случае отличных от евклидовых прямых. Конечно, механика — это более обширная область, чем геометрическая оптика, но и здесь мы еще должны для каждой задачи вводить некое частное пространство, которое сделает изложение более элегантным. Однако мы лишь с большим трудом смогли бы рассматривать эти различные пространства в качестве отражения геометрии окружающего нас мира.

Именно вместе с общей теорией относительности все изменится, и евклидовы свойства физического пространства будут поставлены под сомнение из-за того, что у него обнаруживаются новые геометрические свойства ([31], [32], [33]). Но прежде мы должны хотя бы несколько слов сказать о специальной теории относительности.

Понятие относительности восходит к Галилею, провозгласившему *принцип инерции*, на котором основывается классическая механика[38]. Этот принцип утверждает, что *материальное тело, достаточно удаленное от других тел, пребывает в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения.*

Галилеевой системой отсчета называется система координат в том пространстве, по отношению к которому выполняется принцип инерции, а *галилеевым наблюдателем* называется наблюдатель, связанный с такой системой. Например, система неподвижных звезд, видимых на небе, дает хорошее представление галилеевой системы отсчета. Зато вращающаяся система координат, вроде той, которая связана с некоторой точкой Земли (и которую часто называют «лабораторной системой»), не является галилеевой системой отсчета или является ею только очень приближенно, поскольку неподвижные звезды, хотя они и

[38]Сейчас используется формулировка, уточненная Декартом.

удалены от всех материальных тел, в этой системе в течение двадцати четырех часов описывают уже не прямые линии, а очень большие окружности.

Система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно галилеевой системы отсчета, также является галилеевой системой отсчета, потому что материальное тело, которое покоится или движется прямолинейно и равномерно относительно первой системы отсчета, будет двигаться таким же образом и относительно второй системы отсчета.

Законы механики, относящиеся к галилеевой системе отсчета, справедливы, согласно *принципу относительности*, и во всех других галилеевых системах отсчета. Разумеется, это не означает, что движения при наблюдении из всех систем остаются одними и теми же. Известно, что движение вагона относительно нас выглядит по-разному в зависимости от того, наблюдаем ли мы его из окна нашего дома или из окна движущегося поезда. Но *законы* движения одни и те же.

Принцип относительности является одним из великих физических законов инвариантности, но в том виде, в каком мы собираемся его сформулировать, он ограничивается ньютоновой классической механикой. В конце прошлого века законы электромагнетизма и оптики поставили этот принцип под сомнение, потому что когда к ним применяют те же преобразования, что и в механике, форма их выражения изменяется при переходе от одного галилеева наблюдателя к другому. Впрочем, эти законы были задуманы лишь вместе с принятием гипотезы *эфира*, в котором, как предполагалось, распространяются волны. Это задавало привилегированную систему отсчета, относительно которой можно определить «абсолютный покой», что противоречит принципу относительности.

Однако упомянутая привилегированная система отсчета так никогда и не была выявлена. Самый знаменитый эксперимент, опровергавший существование такой абсолютной системы координат, был проведен Майкельсоном и Морли. Но Эйнштейн, приступая к разрешению этой проблемы, основывался не на их эксперименте. Он исходил из общей идеи о том, что если принцип относительности подтверждается совокупностью явлений, столь же многочисленных и важных, как и различные виды механического движения, то его следует распространить и на электромагнетизм. Эйнштейн постулировал, что *законы механики и электромагнетизма должны оставаться справедливыми для любого галилеева наблюдателя* и, следовательно, для любой системы отсчета, движущейся прямолинейно и равномерно относительно системы отсчета, в которой эти законы справедливы.

Эйнштейн «возвел это предположение в ранг гипотезы», назвав его *принципом относительности,* и добавил к нему еще один принцип, согласно которому *скорость света в вакууме не зависит от движения испускающего его источника.* После того, как эти принципы были приняты, теория относительности развивается анализом понятия одновременности и измерения пространства и времени.

Если отрицать существование мгновенно распространяющихся сигналов (которое не подтверждается фактами) и если рассматривать световые сигналы, которые одновременно подчиняются вышеизложенному принципу и являются самыми быстрыми из известных нам, то измерение пространства и времени должно будет учитывать то запаздывание, с которым мы воспринимаем эти сигналы после их испускания. Одновременность перестает быть абсолютным понятием: два события, одновременных для одного наблюдателя, больше не будут одновременными для другого наблюдателя, движущегося относительно первого.

Расстояние также перестает быть абсолютным понятием. Если две точки неподвижны относительно другой точки и отделены друг от друга некоторым расстоянием, которое измерено наблюдателем, неподвижным относительно этих двух точек, то наблюдатель, движущийся относительно первого наблюдателя, увидит *меньшее* расстояние (за исключением того случая, когда относительное движение будет перпендикулярным прямой, соединяющей две точки). Это — *сокращение Лоренца.* Наконец, время также перестает быть абсолютным: если время измеряется с помощью часов наблюдателем, неподвижным относительно них, то для наблюдателя, движущегося относительно них, промежуток времени окажется *длиннее*[39]. Поскольку — согласно принципу относительности — безразлично, о каком наблюдателе говорить, то, не впадая в противоречие, можно сказать, что *каждый* наблюдатель видит, как часы другого отстают; аналогично и для наблюдателя, движущегося относительно линеек, они будут становиться короче (по крайней мере, это так для случая, когда движение происходит параллельно линейке).

Уточним, наконец, еще одно обстоятельство: часы запаздывают и длина линейки сокращается лишь до тех пор, пока скорость наблюдателя относительно объекта не приблизится к скорости света; как только это произойдет, линейки, связанные с объектом, приобретают для наблюдателя нулевую длину, а часы просто остановятся. Это одна из причин, по которой, согласно принципу относи-

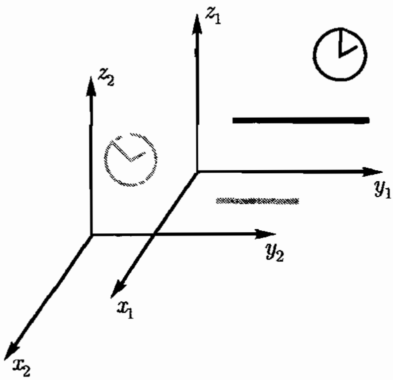

Рис 9. Относительное движение линеек и часов. *Первый* наблюдатель (черные линейка и часы) видит, что у *второго* наблюдателя (серые линейка и часы) линейка оказывается короче, а часы идут медленнее, чем у него самого. Понятно, что для *второго* наблюдателя все выглядит как раз наоборот

[39]Это действительно так, по крайней мере, для часов, которые отсчитывают время с помощью мгновенных «сигналов», разделенных равными промежутками времени. И так же обстоит дело, если время измеряется с «атомными часами». (*Прибавлено автором к переводу.*)

тельности, никакое движение не может достичь скорости света.

Все эффекты, о которых мы говорим, становятся заметными лишь при скоростях, сопоставимых со скоростью света, и их невозможно заметить в повседневных условиях. Даже для ракеты, движущейся со скоростью 30 000 километров в час, величины изменяются лишь на миллиардную долю своих первоначальных значений. Зато в случае электронов в атомах (равно как и в ускорителях элементарных частиц) эти эффекты проявляются вполне отчетливо.

На этой стадии принцип относительности, несмотря на те изменения, которые он производит в измерении пространства и времени, ничего не изменяет в евклидовом характере пространства, потому что мы ограничились равнозначностью наблюдателей, движущихся равномерно и прямолинейно. Эта теория называется *специальной теорией относительности*. Она была блестяще подтверждена экспериментально, и можно сказать, что специальный принцип относительности кажется интуитивно очевидным, если и не в области электромагнетизма, то, по крайней мере, в механике. Представим себе хорошо известный случай, связанный с галилеевым принципом относительности, — случай отправления поезда от вокзала: пока его ускорение остается слабым, а его скорость — почти постоянной, мы не замечаем движения. Если же мы посмотрим на поезд, находящийся на соседнем пути, то увидим, что оба поезда движутся относительно друг друга, но не сможем узнать, какой именно поезд трогается с места — наш или соседний. Мы не замечаем абсолютного равномерного движения, мы замечаем только ускорение, потому что мы ощущаем *силу*, которая действует на нас и которая доказывает нам, что это *именно мы* движемся. В некотором смысле этот пример, по-видимому, указывает на то, что относительность может пониматься лишь в узком смысле, так как мы узнаем о равномерном движении лишь относительно некоторой системы отсчета (следовательно, не существует абсолютного движения), тогда как ускорение кажется нам абсолютным, а не относительным.

И только Эйнштейн понял, что истинным принципом — несмотря на эту видимость — должен быть *общий принцип относительности*, применимый и к ускоренным системам отсчета; он задал вопрос о сущности силы инерции, которую мы чувствуем во время ускорения, а также при торможении или на вираже. Как это случалось очень часто, Эйнштейн, прежде чем входить в рассмотрение более сложных проблем, остановился на анализе простых физических фактов. Он заметил, что если в общем случае сила инерции явно зависит от массы того тела, к которому она приложена, то в случае ускорения все происходит несколько иначе: в резко тормозящем вагоне все пассажиры совершенно одинаково движутся вперед; точно так же, как в резко тормозящем вагоне, обстоит дело и в случае ускорения, вызванного тяготением: в вакууме все тела падают с одной и той же скоростью (лишь торможение воздуха создает отличия), «потому что килограмм пуха весит столько же, сколько и килограмм свинца», как в детской загадке. Точнее, *ускорение*, вызванное силой тяжести, одинаково для всех тел, и тяготение является единственной силой, обладающей столь универсальным характером. Другие силы действуют в зависимости от различных свойств тел (например, магнит не действует на тела, не обладающие магнитными свойствами).

Теперь обратим внимание на то, что мы собираемся ввести две массы, которые *a priori* полностью отличаются друг от друга, хотя они и приписываются одному и тому же телу. С одной стороны, это *инертная масса*, которая сопротивляется ускорению материального тела и вынуждает нас прикладывать усилия, если мы решим изменить равномерное движение, присущее ему в отсутствие внешней силы. С другой стороны, это *гравитационная масса*, и ей пропорциональна сила, с которой на это тело действует тяготение как сила земной тяжести. Но если все тела в вакууме падают с одной и той же скоростью и приобретают одно и то же ускорение, то это означает, что для всех тел *эти два вида массы равны друг другу*, иначе сила тяготения не действовала бы на них одинаково. Именно поэтому законы Кеплера одинаковы для всех планет, какими бы ни были размеры и физическое строение этих планет. Это было известно уже Ньютону, но он не знал, почему это так. Эйнштейн возвел данный принцип в ранг всеобщего *принципа эквивалентности*, согласно которому *в ограниченной области пространства всякой силе инерции, связанной с каким-либо ускорением, можно поставить в соответствие некоторое поле тяготения, эквивалентное этой силе и создающее такое же ускорение.*

Следовательно, если наблюдатель изучает законы физики в системе отсчета, которая не является галилеевой, а испытывает некоторое ускорение, то в ней все происходит так, будто он проводит свои наблюдения в системе отсчета, в которой действует поле тяготения. С некоторыми оговорками *все* системы становятся эквивалентными, как это до сих пор считалось относительно галилеевых систем: это *общий принцип относительности*. Принцип эквивалентности и общий принцип относительности закладывают логический фундамент установленного тождества инертной и гравитационной масс. Эйнштейн считал, что в результате получается такой выигрыш в логической простоте, в сравнении с которым на техническую сложность общей теории относительности можно не обращать внимания.

Это означает, что если мы находимся в резко тормозящем вагоне, то наблюдатель, стоящий на насыпи и, следовательно, покоящийся относительно почти галилеевой системы отсчета (Земли) будет говорить, что вагон тормозит. Мы, находясь в вагоне, скажем то же самое, потому что мы соотносим себя с железнодорожными путями, но если бы на окнах вагона висели занавески, то у нас не было бы никакого логического средства определить, тормозит ли вагон или же подвергается действию поля тяготения, которое внезапно притянуло нас вперед. Оба истолкования были бы *эквивалентными*, и никакой эксперимент внутри вагона не позволил бы предпочесть одно из них.

Теперь предположим, что некоторое движущееся тело предоставлено самому себе в поле тяготения. В соответствии с законами механики, силы инерции (и, следовательно, ускорения) в точности компенсировались бы силами тяготения. Тогда наблюдатель, связанный с движущимся телом, не ощутил бы никакой силы и стал бы галилеевым наблюдателем. Эйнштейн представил это с помощью *«Gedankenexperiment»* («мысленного эксперимента») — человека в лифте, находящемся в свободном падении. Но мы знаем об этом из непосредственных наблюдений: это — явление *невесомости* внутри искусственного спутника.

Люди, находящиеся внутри спутника, перестают двигаться равномерно и совершают движения, вызванные некоторым начальным импульсом. Но принцип эквивалентности является лишь локальным, поскольку он относится к малой области пространства. Однако обусловлено это не тем, что внутренность спутника является замкнутым пространством, а тем, что спутник движется относительно неподвижных звезд отнюдь не по прямой линии. Он описывает эллипс вокруг Солнца, и люди, находящиеся внутри спутника, делают то же самое: то, что им кажется прямолинейным движением, оказывается лишь началом нового эллиптического движения. Это заставляет нас предположить, что свободные движения в общей теории относительности не будут соответствовать прямым линиям, и заставляет вспомнить о другом «мысленном эксперименте», также придуманном Эйнштейном.

Представим себе диск, равномерно вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что сама плоскость диска, как и его центр, остаются неподвижными относительно некоторой галилеевой системы отсчета. В общей теории относительности все системы отсчета допустимы, и, следовательно, мы можем описать мир как с точки зрения наблюдателя, связанного с галилеевой системой отсчета, в которой центр диска остается неподвижным, так и относительно вращающейся системы отсчета, заданной диском. Разумеется, связанный с диском наблюдатель будет считать его неподвижным. Если он отойдет от центра диска к его краю, он ощутит то, что галилеев наблюдатель называет центробежной силой. Но наблюдатель на диске, считающий себя находящимся в покое, скажет, что он подвергся действию поля тяготения, направленного к краям диска и усиливающегося при отходе от центра. С

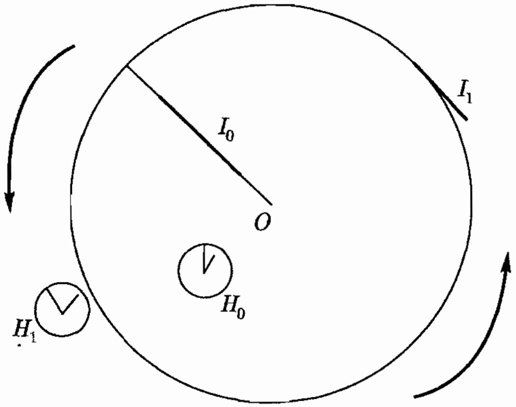

Рис. 10. Диск Эйнштейна

точки зрения физика, ничто не может заставить отдать предпочтение одному из истолкований.

Теперь предположим, что связанный с диском наблюдатель собирается измерить его радиус и длину окружности. При вращении диска относительно галилеевой системы отсчета скорость движения будет оставаться *перпендикулярной* радиусу. По этой причине маленькая линейка, приложенная вдоль радиуса, не претерпит сокращения Лоренца, так что связанный с диском наблюдатель и галилеев наблюдатель, относительно которого центр диска неподвижен, придут к согласию по поводу длины радиуса. Зато маленькая линейка, приложенная вдоль окружности, испытает действие *продольной* скорости не только относительно галилеевой системы отсчета, но и относительно точно такой же линейки, параллельной ей и находящейся в центре диска. В самом деле, маленькая линейка, проходящая через центр, все время проходит вдоль радиуса и лишь вращается вокруг центра, не перемещаясь вдоль своей длины. По отношению к ней линейка, приложенная вдоль окружности, в *каждый момент времени* перемещается вдоль своей длины (даже если направление этого перемещения изменяется вместе с вращением диска). Следовательно, для наблюдателя, связанного с диском, линейка, приложенная вдоль окружности, будет казаться короче линейки, приложенной вдоль радиуса, или линейки, проходящей через центр. Наблюдатель припишет это действию поля тяготения, которое для него будет существовать на диске, а не сокращению Лоренца, поскольку для него его система отсчета неподвижна. Итак, то, как он видит окружность диска, совпадает с тем, что видит галилеев наблюдатель, поскольку центр диска неподвижен для обоих наблюдателей, а радиус диска остается одним и тем же. Но по причине сокращения, которое приписывается линейкам, касательным к окружности, связанный с диском наблюдатель обнаружит, что длина той же самой окружности у него получается больше, чем у галилеева наблюдателя. И, поскольку длину радиуса он найдет неизменной, то отсюда будет следовать, что если связанный с диском наблюдатель вычисляет отношение длины окружности к ее диаметру, то он получит не значение $\pi=3{,}14...$, но большее число: *этот наблюдатель живет в неевклидовом пространстве.* Но он должен различать это пространство и сферическое пространство, о котором говорилось выше; речь здесь идет о двух совершенно отличных друг от друга фактах.

Галилеев наблюдатель будет приписывать причину аномального измерения, которую мы констатировали в сокращении Лоренца, вращению диска, но связанный с диском наблюдатель столь же законно будет утверждать, что именно наличие поля тяготения делает пространство неевклидовым. На это можно было бы возразить, что предшествующее рассуждение ничего не доказывает, потому что оно основано лишь на мысленном эксперименте и на предположении, что наблюдатель *верит в общий принцип* относительности, который с большой долей вероятности может быть и ложным.

Это возражение вполне обоснованно, и точка зрения Эйнштейна может быть доказана лишь подтверждением предсказаний общей теории относительности в тех случаях, когда само истолкование экспериментов или наблюдений не требует вмешательства принципов относительности: это справедливо для всякой теории, без чего рассуждение попадает в порочный круг. Эйнштейн сразу же сделал три предсказания, два из которых относились к оптике, а третье — к небесной механике. Мы приведем их в обратном порядке по сравнению с тем, как они были подтверждены.

Первое предсказание связано с измерением времени. Вернемся к примеру с вращающимся диском. Предположим сперва, что связанный с диском наблюдатель помещает в центр диска часы. Поскольку эта точка неподвижна относительно выбранной нами галилеевой системы, то находящиеся в ней часы будут продолжать идти синхронно с часами, связанными с этой системой отсчета, и наблюдатель будет видеть стрелки в том же положении, что и галилеев наблюдатель. Но если связанный с диском наблюдатель поместит часы на его периферию, то наблюдаемая картина изменится, потому что в каждый момент времени из-за вращения диска часы будут двигаться с некоторой скоростью относительно центра этого диска и галилеевой системы отсчета.

Следовательно, галилеев наблюдатель обнаружит, что расположенные на периферии диска часы *опаздывают* по сравнению с его собственными часами: это просто эффект отставания движущихся часов, предсказанный специальной теорией относительности. Если связанный с диском наблюдатель сравнит показания находящихся в центре диска часов с показаниями часов, находящихся на периферии, то он увидит то же, что и галилеев наблюдатель, то есть обнаружит, что часы на периферии диска отстают. Однако, будучи связан с диском, он видит его неподвижным, а потому приписывает эту разницу во времени не сокращению Лоренца, а полю тяготения, действующему на диске и достигающему своей максимальной величины на его периферии. В более общем смысле он обнаружит, что ход часов подвергается воздействию со стороны поля тяготения, действующего в той точке, где он находится. Природа предоставляет нам очень точные часы в форме спектральных частот света, испускаемого атомами. Следовательно, эти частоты должны зависеть от интенсивности поля тяготения, действию которого подвергается источник света: если из двух одинаковых атомов один находится на Земле, а другой на Солнце, то они будут испускать свет различной частоты. И, поскольку тяготение более интенсивно на поверхности Солнца, то там частота будет меньше, чем на Земле: это то, что называется *красным смещением спектральных линий*[40].

Этот эффект является очень слабым и его подтверждение долгое время вызывало сомнения: порядок смещения в случае солнечного излучения равен одной миллионной. И хотя эффект несколько отчетливее выражен в случае белых карликов (из-за их высокой плотности и, следовательно, из-за более интенсивного поля, действующего на их поверхности), подтверждение не стало абсолютно достоверным даже с использованием измерений, ставших в шестидесятые годы, уже после смерти Эйнштейна, более точными благодаря открытию эффекта Мессбауэра. Эффект Мессбауэра позволяет измерять настолько малые изменения частоты, что описываемый эффект Эйнштейна можно было наблюдать и непосредственно на Земле, просто находясь в земном гравитационном поле. Заметим также, что смещение в сторону красной части спектра было предсказано Эйнштейном еще в 1907 г.: он рассматривал это смещение как существенный способ проверки общей теории относительности. Эйнштейн без колебаний говорил, что если бы этот эффект опровергался опытом, то общая теория относительности не выдерживала бы критики.

Второе теоретическое предсказание общей теории относительности, также датируемое 1907 г., говорит об отклонении световых лучей полем тяготения. Известно, что масса, согласно специальной теории относительности, эквивалентна энергии. Следовательно, световой пучок, переносящий энергию, переносит и эквивалентную этой энергии массу. Речь идет об инертной массе, но, согласно общей теории относительности, она эквивалентна грави-

[40]Не следует смешивать это смещение с эффектом Хаббла, который также является красным смещением, наблюдаемым в астрономии, но имеет совсем другую природу. Именно эффект Хаббла, являясь частью гипотезы Большого Взрыва, связан с эффектом Допплера, который, предположительно, вызван разбеганием туманностей.

тационной массе. Следовательно, свет обладает тяжестью: в поле тяготения он будет притягиваться, *вблизи от небесного тела он будет искривляться и, стало быть, не будет двигаться по прямой линии.* Это означает также, что скорость света должна изменяться под действием поля тяготения и что принцип постоянства скорости света, лежащий в основе специальной теории относительности, является лишь приближенным: предполагается, что свет распространяется в вакууме, вдали от каких-либо материальных масс.

Понятно, что если относительно Земли звезда находится под таким углом, что ее свет, воспринимаемый нами, проходит вблизи от края Солнца, то мы могли бы измерить *искривление* световых лучей в поле тяготения Солнца, наблюдая смещение звезды относительно того направления, вдоль которого она должна была бы наблюдаться в нормальных условиях. Если бы свет распространялся по кривой, то можно было бы наблюдать звезду даже тогда, когда она была бы закрыта Солнцем. Наблюдение этого отклонения затруднено из-за его малости (менее 2″), и оно требует полного солнечного затмения, поскольку излучение Солнца мешает наблюдению.

Первое наблюдение этого эффекта, осуществленное Артуром Эддингтоном в 1919 г., приобрело широкую из-

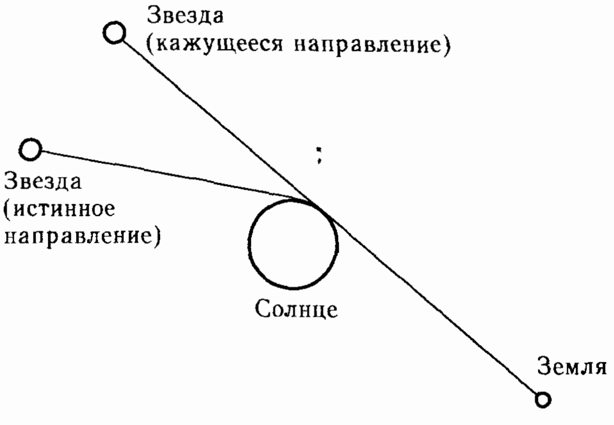

Рис. 11. Отклонение света звезд Солнцем

вестность[41]. Этой великой победе общая теория относительности обязана славой, схожей с той, что прежде доставалась лишь дальним экспедициям в южные моря; кроме того, она ознаменовала собой мирные переговоры между Германией и Великобританией, только что закончивших ужасную войну.

Простота явления, его возвышенный (можно даже сказать «поэтичный») характер, впечатляющая сила предсказания теоретической физики и тот факт, что теория относительности поставила под вопрос геометрические свойства пространства, известные еще древним грекам, — все это сделало Эйнштейна уже не просто выдающимся ученым, а прямо-таки живой легендой.

Значительно позже наблюдалось редкое следствие этого же явления, предсказанное уже Эддингтоном: *гравитационный мираж*. Световые лучи, испущенные звездой в различных направлениях, могут притягиваться большим скоплением материи и затем собираться в одном направлении, как будто они проходят сквозь *гравитационную линзу*. Следовательно, мы увидим, как в одном месте свет одной и той же звезды приходит по разным направлениям, создавая множество образов (редко больше двух). Это явление наблюдалось при исследовании квазаров, интенсивных и удаленных источников, свет которых отклоняется галактикой.

В действительности же первым подтверждением теории относительности стала *прецессия перигелия Меркурия*. Это — одно из самых поразительных доказательств истинности теории относительности, но мы ссылаемся на него в последнюю очередь потому, что оно следует из вычислений, которые трудно понять интуитивно. Проблема, поставленная Леверье в 1850 г., состоит в следующем.

Согласно Кеплеру и Ньютону, планеты должны описывать эллипсы вокруг Солнца в соответствии с известными нам законами. Но это было бы верно лишь для одной

[41]Интуитивное объяснение этого эффекта, на основании специальной теории относительности, может привести к заключению, что последней достаточно для объяснения этого эффекта, но это не так: предвидения отличаются и эксперимент идет в пользу общей теории относительности. (*Добавлено автором к русскому переводу.*)

планеты, обращающейся вокруг Солнца. Поскольку существует несколько планет, то они притягиваются еще и друг к другу, хотя и с меньшей силой, и законы Кеплера *подвергаются возмущению*. В частности, ось эллиптических орбит вовсе не является фиксированной: она медленно вращается вокруг Солнца. Поскольку астрономы обычно отождествляют положение этой оси с помощью той точки орбиты, которая находится ближе всего к Солнцу, то говорят о *прецессии перигелия*.

Сложная *теория возмущений* позволяет небесной механике вычислить для каждой планеты эту прецессию как функцию действия соседних планет. Но во времена Леверье после учета всех возмущений оставались два необъяснимых остаточных явления прецессии — одно для Меркурия, а другое для Урана, то есть для самой близкой к Солнцу и для самой удаленной от него планеты системы из известных в ту эпоху. Применительно к Урану Леверье дал знаменитый ответ: прецессия обязана своим возникновением возмущениям со стороны еще более удаленной планеты, тогда еще не обнаруженной, — Нептуна, — орбиту и законы движения которой он вычислил, что вскоре было подтверждено наблюдениями. Ободренный этим необычайным успехом, он попытался выяснить, не испытывает ли и Меркурий возмущений со стороны неизвестной планеты, которая находилась бы еще ближе к Солнцу. Эта попытка потерпела неудачу. Тогда Леверье попытался модифицировать закон тяготения Ньютона. Однако все было напрасно. Следует сказать, кстати, что остаточный член прецессии Меркурия равнялся 43,11″±0,45″ (т.е. сотым долям градуса) *за столетие*! Опасность для теории Ньютона была невелика.

Когда Эйнштейн в 1915 г. вычислил движение планеты вокруг Солнца в соответствии с общей теорией относительности, он не открыл заново законы Кеплера, а обнаружил более сложное движение с такой орбитой, которая — вместо того, чтобы оставаться замкнутой — обвивалась вокруг Солнца, как кеплеров эллипс с прецессирующим вокруг Солнца перигелием. Эта прецессия равнялась 43,03″ за столетие! Отличие от наблюдаемой величины было меньше ошибки измерения. Такая точность вызвала подозрение в том, что все уж слишком хорошо. Но вычисления были верными.

Не подлежит сомнению, что общая теория относительности со времен *«Principia»* Ньютона является «самым большим теоретическим успехом, достигнутым одним человеком». Только эти две научные теории вознеслись на такую высоту благодаря физической интуиции и математическим способностям их создателей. Но Ньютону, кроме того, довелось родиться на заре нового времени, когда все еще лишь предстояло сделать, так что *«Principia»* заложили самые основания науки и породили многочисленные приложения, используемые теперь нами в повседневной жизни. А о теории относительности можно сказать, что она венчает собой науку, достигшую своего апогея: она приводит к предсказанию лишь слабых эффектов, далеких от обычных приложений, но при этом поражает воображение и логической простотой, которой Эйнштейн придавал самое большое значение, и впечатляющей картиной мира, которую она предлагает.

Итак, Эйнштейн показал нам, что окружающее нас пространство является не плоским, а искривленным, что оно не евклидово, а риманово, и что его локальная кривизна зависит от интенсивности поля тяготения. Следовательно, геометрия нашего пространства определяется некоторым физическим свойством, как это предчувствовал Риман. Далее нам следовало бы еще уточнить, о каком пространстве идет речь в действительности, ведь теория подразумевает не просто модификацию хорошо известного нам трехмерного физического пространства, а *четырехмерное* пространство-время, о котором мы скоро будем говорить.

Это изменение геометрии несопоставимо с изменениями, позволившими ввести принцип Ферма в оптике или принцип Мопертюи в механике. Теперь у нас больше нет геометрии *ad hoc* для одной задачи и некоторой отличной от нее геометрии — для другой, у нас есть только одна геометрия, от которой мы не можем отказаться, поскольку она имеет силу по отношению ко всей материи. Даже если физические следствия практически очень слабы, наше понимание мира вследствие этого изменилось.

Как движение материальной точки, так и распространение света в поле тяготения подчиняются одному и тому же принципу кратчайшего пути или, скорее, экстремальному принципу, аналогичному принципам Мопертюи и Ферма: это принцип движения по *геодезическим линиям*. Материя, как и свет, следует по геодезическим линиям риманова пространства, создаваемого полем тяготения. Мы увидим, чем геодезические линии распространения света, отличаются от линий, по которым следует материя, но прежде нам необходимо уточнить упомянутое выше фундаментальное положение: ***вселенная теории относительности является четырехмерным пространством-временем. Четвертым измерением служит время.***

Использование пространства представления событий, объединяющего пространство и время, само по себе достаточно тривиально: именно это делается в «графике железнодорожного движения», когда по-разному наклоненные прямые линии соответствуют скорости поезда, на оси абсцисс обозначаются станции, а на оси ординат — соответствующее время. Этот график чертится в двух измерениях, потому что размерность пространства сводится к расстоянию, пройденному вдоль железнодорожной линии, которое называется *криволинейной абсциссой*.

Чтобы изобразить эту трассу на карте, необходимо было бы два пространственных измерения. Тогда график был бы трехмерным: два пространственных измерения и одно временное. Наконец, чтобы представить рельеф поверхности, потребовалось бы три измерения пространства. График был бы четырехмерным. Мы бы уже не смогли представить его в нашем обычном пространстве, но мы смогли бы его понять, вычерчивая его сечения или проекции на наше пространство, точно так же, как мы умеем представлять трехмерные объекты на листе бумаге, размерность которого равна всего двум. Такое четырехмерное представление используется в теории относительности под названием *пространства-времени*, или *мира*, но есть большая разница между объектом, подчиняющимся

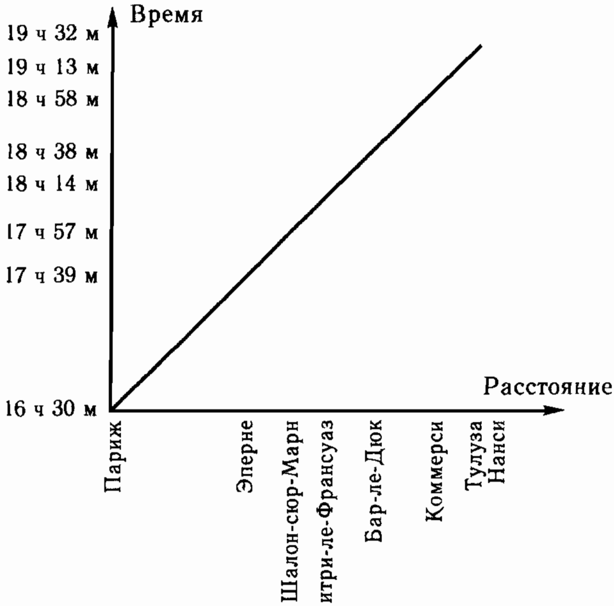

Рис. 12. Железнодорожный график

обычным законам физики, и объектом, подчиняющимся законам теории относительности.

В первом случае пространство-время (железнодорожный график) является тривиальным представлением, потому что на этом графике и пространство, и время считаются абсолютными. Время здесь — лишь жесткая шкала, с которой мы соотносим последовательность происходящих в пространстве событий и которая есть не что иное, как инертная рамка, в которой мы можем все описать, не занимаясь измерением ни пространства, ни времени в качестве двух инвариантов. Это пространство-время есть не что иное, как удобное представление, вроде кривой температуры или цены.

Совершенно иная ситуация в теории относительности, даже специальной. По причине сокращения длины и замедления времени как функций относительной скорости, пространство и время не являются абсолютными: говорят, что они не относятся к числу *релятивистских инвариантов*. Для наблюдателя становится труднее узнать, каковы результаты измерения другого наблюдателя, поскольку пространство и время одного из них наслаиваются на пространство и время другого согласно формулам, называемым *преобразованиями Лоренца*. Но существует ли в таком случае хоть какой-нибудь абсолют, за который можно было бы ухватиться, *релятивистский инвариант*, имеющий одно и то же значение для всех, даже движущихся наблюдателей? Существует, и вот что он собой представляет.

Рассмотрим два события, происходящие в различных местах и в различные моменты времени. Мы знаем, что расстояние и промежуток времени, разделяющие эти два события, не являются инвариантами, но представим себе это в четырехмерном мире, где два события — только две точки, объединяющие места и моменты времени, в которые они произошли; соединим эти две точки отрезком прямой, который представляет одновременно интервал разделяющих их пространства и времени. Длина этого отрезка называется *мировым расстоянием* между двумя событиями, и именно он является *релятивистским инвариантом*, поскольку он не изменяется при переходе от одного наблюдателя к другому.

К сожалению, сказанное остается пока еще сильным упрощением, ведь мы не объяснили, как измеряется это расстояние. Принцип прост: в четырехмерном пространстве-времени чертится прямоугольный треугольник, так что точки событий являются крайними точками гипотенузы, обозначающей искомый мировой интервал, тогда как промежутки времени[42] и пространства, разделяющие события, будут катетами прямоугольного треугольника. Мировое расстояние будет, следовательно, длиной гипотенузы из теоремы Пифагора — но, увы, не в том виде, в котором она нам известна. Квадрат мирового расстояния равен *разности* квадратов промежутков времени и пространства, а не их сумме. Пространство-время в действительности не является евклидовым пространством. Оно называется поэтому *псевдоевклидовым* пространством, а также *про-*

[42]Точнее, берется не время, а оптическая длина пути, полученная из этого интервала с учетом скорости света.

странством Минковского, по имени математика, который ввел его в научный оборот. Именно в этом пространстве, а не в обычном трехмерном пространстве (как это было в старой физике), выражаются в геометрических терминах основные величины теории относительности. Вот почему Минковский писал [34]:

> Пространству самому по себе и времени самому по себе суждено исчезнуть, как теням, и лишь некий союз одного и другого сохранит независимую реальность.

Но это суждение является своего рода метафорой, выражая некую крайность, поскольку реальность, т.е. опыт, как и прежде переживаемый нами в повседневном трехмерном пространстве, соотнесен с нами, отсчитывающими время по нашим локальным часам. Конечно, пространство и время не абсолютны, и при переходе от одного наблюдателя к другому сохраняется лишь четырехмерный интервал, но это не лишает ни пространство, ни время их физической реальности. Релятивистское пространство и время не являются единственными величинами, изменяющимися при переходе от одного наблюдателя к другому: и скорость движущегося тела, и электрическое или магнитное поля ведут себя так же, но в не меньшей степени принадлежат реальности. Если верить Минковскому, то получается, что Солнце при затмении перестает быть реальным только потому, что затмение вызывается не чем иным, как тенью Луны.

В псевдоевклидовом пространстве, используемом специальной теорией относительности, *мировые линии* представляют одновременно пространственную траекторию движущегося тела, время его движения и его *скорость*, равную *наклону* траектории. Если траектория является прямолинейной, то скорость постоянна, что соответствует движению по инерции. Итак, прямые линии являются кратчайшими путями от одной точки к другой и в псевдоевклидовом, и в нашем пространствах. Следовательно, движение по инерции происходит по *геодезическим линиям пространства-времени*. Что касается света, то он характеризуется особой величиной своей скорости, и если в четырехмерном пространстве-времени вычислить длину прямой, которая представляет световой луч, то мы получим *нуль*! Мировая траектория, соответствующая распространению света, — это в пространстве-времени *геодезическая линия нулевой длины*! Такой результат создает ложное впечатление[43] мгновенного распространения, что выглядит парадоксально для теории, основанной на принципе конечной скорости оптических сигналов. Мишель Бессо указал Эйнштейну на этот парадокс, и Эйнштейн не оставил его без внимания [35].

Вернемся к общей теории относительности. Теперь нетрудно догадаться, что искривляется и становится римановым не только обычное трехмерное пространство, но весь мир, все четырехмерное пространство-время. Когда мы говорим, что материальные точки, попавшие в поле тяготения, движутся по геодезическим линиям, то речь идет о геодезических линиях в пространстве-времени или, как говорил Эйнштейн, в *пространственно-временном континууме*. Что касается света, то он также распространяется по геодезическим линиям нулевой длины. Только эти линии являются уже не прямыми, как в специальной теории относительности, а кривыми линиями, за исключением областей, сильно удаленных от материальных масс.

Именно здесь проявляется один из самых замечательных примеров силы обобщения, продемонстрированной Эйнштейном. Эйнштейн заметил, что общая теория относительности распадается на две части. С одной стороны, она представлена так называемыми *законами поля*, выраженными знаменитой системой *уравнений Эйнштейна*, которые описывают геометрию пространства-времени, т.е. риманова пространства, порождаемого полем тяготения. С другой стороны, выдвигаются уравнения движения, выраженные при помощи принципа, согласно которому материальные точки должны двигаться по геодезическим линиям пространства-времени.

---

[43]Поскольку квадрат мирового расстояния является *разностью* квадратов двух интервалов, временного и пространственного, то одно событие может произойти очень далеко от другого и по прошествии долгого времени, будучи при этом отделено от него очень маленьким и даже нулевым мировым расстоянием.

Так же обстоит дело в теории электромагнетизма Максвелла—Лоренца, где закон поля (уравнения Максвелла) не зависит от закона движения (силы Лоренца). Другой физик, Ми, уже выражал недоумение по поводу этой логической несогласованности, состоящей в том, что закон поля, которое является причиной движения, никак не связан с законом, определяющим силу, с которой поле действует на материю. Казалось бы, следствие должно определяться только причиной. Ми пытался добиться этого в теории электромагнетизма, однако тщетно; Эйнштейну же это удалось — по крайней мере, частично — в общей теории относительности, что объясняется существенным различием двух теорий. Оно состоит в том, что уравнения Максвелла *линейны*, тогда как уравнения Эйнштейна в общей теории относительности *нелинейны*.

Это означает, что при наблюдении, скажем, электромагнитного поля Максвелла, созданного двумя электрическими зарядами, их действия могут только суммироваться, и, согласно теории, они могли бы совершать какие угодно движения независимо друг от друга. Но такая возможность допустима лишь в том случае, когда не учитывается влияние электрических зарядов друг на друга, потому что в действительности они воздействуют друг на друга с силой Лоренца. Следовательно, уравнения Максвелла «не знают» о взаимодействии зарядов, пока им (уравнениям) об этом не «скажут».

Если же попытаться ввести в уравнения Эйнштейна два малых элемента материи, то по причине нелинейности уравнений больше нельзя будет суммировать поля, создаваемые двумя малыми массами, и результирующее поле отнюдь не сведется к их сумме. Следовательно, между массами существует как бы взаимодействие *a priori*, содержащееся в самих уравнениях поля, так что нет никакой необходимости вводить дополнительный закон движения. Именно это позволило Эйнштейну вместе с Громмером доказать одну из красивейших теорем теории относительности. Согласно этой теореме, если представить материальную точку *сингулярностью* поля тяготения и, следовательно, малой областью, где поле очень (фактически, бесконечно) интенсивно, то эта сингулярность *с необходимостью* перемещается по геодезической линии пространства-времени. Следовательно, постулат движения по геодезическим линиям является следствием уравнений поля.

Это ведет к новой картине мира. Геометрия пространства и времени модифицируется тяготением и, следовательно, присутствием материальных масс, а этого достаточно для выведения закона движения малых материальных масс. Сама материя, похоже, должна рассматриваться не как нечто внешнее по отношению к пространству и своим присутствием модифицирующее геометрию, а как простой аспект геометрических свойств пространства. Материя является не просто причиной кривизны пространства-времени, она *сама является* этой кривизной. Однако значение этой впечатляющей картины мира несколько снижается, поскольку результат Эйнштейна доказан только для единичных малых масс и, следовательно, лишь для достаточно частного случая.

Нельзя не отметить, что начиная с 1925 г., за два года до получения Эйнштейном описанного результата, Луи де Бройль высказал аналогичную идею в волновой механике[44]. Чтобы единообразно представить способ сосуществования волн и корпускул, он нашел геометрический образ, который есть *одновременно волна и корпускула* и, в конце концов, предложил считать, что корпускула не является объектом, отличным от волны, но выполняет в ней объединяющую функцию в виде *сингулярной области*. То, что в опыте выступает в форме корпускулы, представляет собой не что иное, как малую область, в которой волна более интенсивна, чем в других областях. Де Бройль доказал, что движение корпускулы, рассматриваемой как сингулярность волны, не должно постулироваться отдельно, поскольку оно определяется уравнением волны при условии принятия уже принятого де Бройлем ранее постулата о совпадении по фазе волны и частицы — это утверждение известно нам как *теорема ведения*.

[44]Сначала идея была высказана в сообщении [36], а затем развита в сообщениях [37], [38] и целом ряде других.

К сожалению, этот замечательный результат еще более ограничен, чем эйнштейновский, и не только из-за использования сингулярностей, препятствующих описанию внутренней структуры частиц, но также из-за того, что уравнения волновой механики линейны, как и уравнения Максвелла. Очевидно, де Бройль понимал это, и в конце своей жизни он вместе с группой сотрудников искал *нелинейное* уравнение волны, которое предоставляло бы теореме ведения более надежное основание. Нужного результата предполагали добиться путем отказа от постулата совпадения фаз и обеспечения возможности описания внутренней структуры элементарных частиц.

Тем временем Эйнштейн вместе с другой группой физиков разрабатывал очень похожий проект в рамках своей картины мира: *теорию единого поля*, представляющую собой попытку расширить общую теорию относительности путем рассмотрения структур пространства, более сложных, чем структура риманова пространства. Он делал это, описывая чисто геометрическими средствами совокупности известных науке фундаментальных полей и полностью включая в свою теорию квантовую механику. У нас еще будет возможность поговорить об этом.

Глава VI

АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Чен Нинг Янг: «*То, что вы, математики, создали эти понятия буквально из ничего, изумляет и волнует*».

Ч. Ч. Черн: «*Нет, нет! Эти понятия не просто выдуманы. Все они существуют реально*» [39].

Абстрактные представления являются весьма полезными вспомогательными средствами, а иногда без них почти невозможно обойтись. Однако никогда не следует забывать, что они не обладают никакой физической реальностью. Физической реальностью обладает только исключительно перемещение локализованных элементов с течением времени

Луи де Бройль [40].

Еще раз о пространстве-времени и неевклидовом пространстве

В силу самой внутренней логики изложения мы уже много говорили об абстрактных пространствах, и можно спросить, почему мы не включили рассмотрение релятивистских представлений в данную главу. Это объясняется тем, что существуют разные степени абстракции, и тем, что само понятие абстрактности является субъективным.

В некотором смысле, в научном рассуждении все абстрактно, потому что выражать в понятии, определять — уже значит подставлять абстрактное понятие на место природного объекта. Самое простое наблюдение требует способности к абстрагированию, что и происходит, как мы видели, в простом и удивительном случае обучения представителей племени трумас истолкованию фотографического изображения. Наоборот, когда понятие становится привычным, мы настолько проникаемся им, что оно кажется принадлежащим к самой природе вещей. В наших глазах оно становится конкретным и в силу этого приобретает онтологическое значение; теперь оно уже больше не рассматривается всего лишь как удобное представление реальности. Вот почему некоторое понятие, для одного человека представляющее собой лишь чистую абстракцию, в глазах другого человека может приобрести объективное значение. Ведь наша точка зрения в некоторой степени определяется избирательным сродством.

Это можно понять из примера, приведенного в эпиграфе и описывающего разговор между Черном (математиком) и Янгом (физиком): там, где Черн видит реальность, Янг (как и де Бройль) видит только удобное представление.

Однако все физики чувствуют, что абстрактность имеет лишь относительный характер. Поэтому, имея дело с представлением реальности, они балансируют между ощущением абстрактности и переживанием реальности. Часто именно создатель теории склонен думать, что он имеет дело отнюдь не с мысленным образом, а непосредственно соприкасается с открытой им реальностью. Об открытиях в теоретических науках Луи де Бройль писал [41]:

> Первооткрыватель вдруг очень отчетливо ощущает, что понятия, которые он собирается использовать, *в той мере*, в какой они являются точными, существовали уже до того, как они были впервые помыслены человеческим мозгом. Теперь он понимает, что останавливавшие его трудности и приковывавшие его внимание аномалии были всего лишь знаком скрытой, но уже существующей истины. Все произошло так, как если бы он, изобретая новые концепции, только разрывал некую завесу, как если бы эти концепции, к которым он наконец пришел, уже существовали, вечные и неизменные, пребывая в каком-то платоновском мире чистых идей.

Это переживание некоей основополагающей реальности присуще не только создателю теории, но равным образом и всем тем, кто, по его убеждению, ею проникся. Но если речь идет об абстракциях, так и остающихся абстракциями, как в случае бесконечномерных пространств, то отношение к ним отличается от отношения к абстракциям, которые кажутся присущими самой природе, как это происходит с искривленной вселенной в случае общей теории относительности. Как же не верить, что искривление световых лучей, проходящих вблизи от Солнца, по-настоящему открывает нам искривленность вселенной, имея перед глазам экспериментальные доказательства и логическую простоту теории, которая граничит с очевидностью и преодолевает концептуальные и технические трудности? В конце концов, что такое прямая линия в окружающем нас мире, как не световой луч, направленный из некоторой точки в наш глаз? Почему бы не поверить, что вселенная искривлена, если наблюдение показывает, что исходящий из звезды луч света не является прямолинейным? Почему бы не счесть, что истинными геодезическими вселенной являются те линии, по которым распространяется свет, а отнюдь не те прямые, которые мы даже уже не в состоянии определить с помощью наблюдения? Отчего бы не признать, что аксиоматика риманова пространства более точно отражает реальность, чем аксиоматика евклидовой геометрии?

Но хотя искривленность вселенной выражается только в «четырехмерном континууме», нам столь же трудно придать онтологическое значение четырехмерности пространства, как трудно это сделать и в тех случаях, когда речь идет о пространстве Минковского в специальной теории относительности или о римановом обобщении такого пространства в общей теории относительности. В связи с этим еще раз процитируем де Бройля, указывавшего на опасности, которые таят в себе абстрактные представления. Обратимся еще раз к тексту, цитата из которого вынесена нами в эпиграф [40]:

> ...Пространство-время, столь полезное при изложении теории относительности, имеет несколько обманчивый характер. В самом деле, пространство и время — это реальности, совершенно отличные друг от друга. Прежде всего, к нашему сожалению, время течет всегда в одном и том же направлении, и это его неотъемлемое свойство, тогда как в пространстве одинаково возможны как перемещение в некотором направлени, так и перемещение в направлении, противоположном первому. Более того, наше восприятие пространства и наше восприятие времени совершенно раз-

> личны: мы измеряем расстояния с помощью измерительной линейки, для измерения же *необратимого* течения времени нам необходимы часы, — прибор, очень отличающийся от измерительной линейки.

Конечно, эта концепция может быть оспорена. Она и оспаривается, например, бывшим учеником Луи де Бройля — впрочем, близким ему в понимании других идей — Оливье Коста де Борегаром, который упорно поддерживает концепцию четырехмерности вселенной, принимая время за четвертое измерение пространства [42]. Впрочем, такая точка зрения преобладает среди сторонников теории относительности, но она влечет за собой представление о фундаментальной обратимости времени. Возможно, неподготовленный читатель будет удивлен тем, что можно оспаривать необратимость течения времени, которая является повседневной очевидностью. Разумеется, никто не оспаривает наше общее переживание *стрелы времени*, порождаемое обычной последовательностью событий и идеей жизни и смерти. Но большинство физиков считает, что в основе своей элементарное время обратимо и что стрела времени представляет собой всего лишь видимость, обязанную своим существованием общим статистическим свойствам сложных ансамблей микроскопических объектов или, иначе говоря, атомистической структуре материи. Впрочем, это — лишь удобная гипотеза, не подтверждаемая никакими экспериментальными результатами, и, возможно, реальность ближе к представлению о необратимом течении времени, как его воображал Ньютон [9][45].

> *Абсолютное, истинное, математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно, и иначе называется длительностью.

Со времен Ньютона многие идеи претерпели изменения, вызванные механикой Лагранжа и Гамильтона и господством принципа наименьшего действия. Но мы знаем, что эта механика не тождественна всей механике Ньютона,

[45]Ньютон И. *Математические начала натуральной философии.* М., 1989. С. 30. (*Прим. перев.*).

поскольку она развивает лишь один ее аспект — аспект обратимых процессов. В таких процессах стрела времени исчезает, поскольку принцип наименьшего действия разрушает всю временную иерархию. После механики по тому же пути проследовала теория электромагнетизма, поскольку теория Максвелла является лагранжевой, как и вся теория поля. Итак, теория относительности является следствием теории Максвелла и динамики Лагранжа и Гамильтона. Не следует удивляться тому, что время в ней обратимо, и именно это позволяет превратить его в четвертое измерение пространства, о котором можно сказать, что оно не течет. В этой интерпретации оно и в самом деле не течет, представляя собой только один из геометрических параметров, помечающих точечные события во вселенной, в которой настоящее, прошлое и будущее кажутся существовавшими всегда.

Все дело в том, что релятивистское время представляется нам лишь частным аспектом времени. Мы придаем четырехмерной вселенной теории относительности меньшее онтологическое значение, чем кривизне пространства, представление о которой введено общей теорией относительности и которая представляет собой способ выражения самого факта существования материи.

Пространства конфигураций

Вселенная теории относительности является далеко не единственным многомерным пространством, используемым в физике. Используются также пространства, называемые пространствами конфигураций; не обладая непосредственным физическим смыслом, они способны в более наглядной и удобной форме представлять состояние физической системы и ее эволюцию, обеспечивая тем самым геометрическую поддержку алгебраических и аналитических рассуждений. Пространство-время теории относительности, в сущности, представляет собой именно такое пространство.

Лагранж считал, что он изгнал геометрию из механики ради утверждения аналитических рассуждений («В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи»), но геометрия вновь обрела силу — не для того, чтобы, в свою очередь, изгнать анализ, а для того, чтобы поставить себя ему на службу, придать механике новую структуру и предоставить ей новый язык. Верно, геометрия вернулась, но она больше не была той, прежней, геометрией, некогда утратившей силу — силой обладала уже обновленная геометрия. Лагранж говорил о чертежах в трехмерной евклидовой геометрии, теперь же речь идет о весьма отличных от нее геометриях, часто неевклидовых и какой угодно размерности. Они были порождены самим анализом, который Лагранж, Гамильтон и Якоби ввели в механику, желая заменить им элементарные геометрические рассуждения: *риманова геометрия* вводилась для представления потенциалов, из которых получались силы, а алгебра уравнений Гамильтона потребовала использования *симплектической геометрии.*

Новые геометрические представления внедрялись очень медленно — не только в физике, но и в математике. Это и понятно, поскольку и физики, и математики отнюдь не сразу научились проводить различие между физическим описанием того пространства, в котором мы живем, и произвольной геометрической конструкцией в качестве математического объекта. Мы видели, что именно Риман в середине прошлого века первый понял это, определяя понятие дифференцируемого многообразия и освобождаясь от представлений о евклидовом характере геометрии и о ее трехмерности. Возможно, труднее всего было ввести в практику использование именно абстрактных пространств большой размерности.

Однако, всматриваясь в прошлое из настоящего, можно было бы обнаружить, что эти пространства существовали уже с конца XVIII столетия в работах Лагранжа, когда он описывал движение системы материальных точек, вводя совокупность параметров, число которых в шесть раз превышало количество точек, потому что ему нужно было знать три пространственные координаты и три компоненты скорости каждой из них. Аналогично тому, как точка в обычном трехмерном пространстве может быть представлена тремя координатами, *совокупность* координат системы материальных точек можно рассматривать так, как если бы речь шла об одной точке, принадлежащей пространству, размерность которого в три раза больше количества точек, содержащихся во всей системе. В таком пространстве, называемом *пространством конфигураций* системы, траектория точки, которую мы только что определили, позволит нам знать траектории всех точек, образующих систему в обычном пространстве.

Чтобы этот подход стал понятнее, представим себе сперва две точки, находящиеся на одной прямой, т.е. в *одномерном физическом пространстве*. В некоторых случаях эта прямая может быть одной для двух точек, но, чтобы различить их движение, мы отделим друг от друга пройденные ими пространства, нарисовав на бумаге две отдельные пересекающиеся прямые: они могут быть, например, взаимно перпендикулярными, и каждая из них изображает движение одной из двух точек. Таким образом, рассматривая два движения, мы создали двумерное пространство.

Если мы будем рассматривать две прямые как оси координат на плоскости, то две точки, двигающиеся вдоль этих прямых, становятся координатами на плоскости некоторой точки, описывающей кривую; и наоборот, точки кривой соответствуют возможным положениям двух движущихся тел. Следовательно, имея дело лишь с одной точкой на плоскости (двумерное пространство), мы получаем положение системы двух тел, движущихся вдоль двух прямых (одномерных пространств).

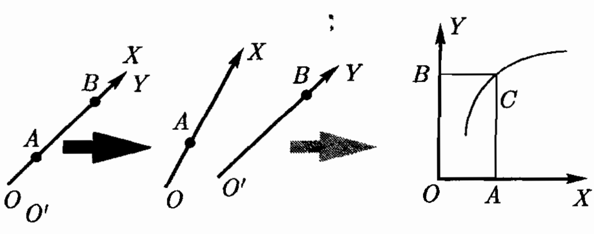

Рис. 13. Образование пространства конфигураций. Точка C обозначает совокупность двух точек A и B в пространстве, созданном из OX и OY

При любом количестве точек эта процедура нуждается только в обобщении: полученное пространство просто имеет бо́льшую размерность, что, в общем случае, препятствует построению фигур, но не геометрическому подходу. Не описывается ли суть прежней элементарной геометрии фразой «Геометрия — это искусство выносить истинные суждения о ложных фигурах»? В новой геометрии больше нет никаких фигур (в сущности, Лагранж был прав), но рассуждение все-таки остается геометрическим, поскольку оно экстраполирует представление, полученное для частных случаев, благодаря чему мы умеем обращаться с фигурами. Старая «геометрия пространства» уже поступала таким образом, проецируя на классную доску или на лист бумаги фигуры, относительно которых воображалось, что они находятся в пространстве, но которые уже нельзя было начертить. Подход в этом случае лишь немного обобщен и усложнен, но он может быть усложнен еще и еще.

В самом деле, с каждой материальной точкой, движущейся в трехмерном физическом пространстве, можно соотнести другое пространство, отличное от данного, хотя и имеющее ту же размерность. Его точки обозначают скорость движущегося тела, причем три измерения соответствуют трем компонентам скорости в физическом пространстве. Это пространство — *пространство скоростей*, но рассуждения касаются, в сущности, не скорости, а импульса, то есть произведения массы движущегося тела на его скорость. Следовательно, мы получаем *пространство импульсов*, также имеющее три измерения; сделаем и следующий шаг. Сначала для каждой материальной точки мы объединяем физическое пространство, в котором она движется, с его пространством импульсов: таким образом мы получаем абстрактное шестимерное пространство, каждая точка которого будет определять одновременно положение и скорость движущегося тела. Теперь, если мы имеем некоторый ансамбль движущихся материальных точек, то мы объединяем в одно все те пространства, которые мы только что соотнесли с каждой из этих точек, чтобы получить одно большое пространство, имеющее в шесть раз больше измерений, чем количество точек в ансамбле. Таким образом, единственная точка этого пространства своими координатами определит для нас все положения и все импульсы (а следовательно, и скорости) всех точек ансамбля: это пространство называется *фазовым пространством*.

Возможно, у читателя, которому эти понятия не известны, начинает идти кругом голова, но ему следует успокоиться. Долгое время то же самое происходило и с физиками и даже с математиками, больше столетия стремившимися привыкнуть к этому языку и научиться считать его естественным. В итоге дело дошло до того, что они попытались сделать более образными и более простыми определенные рассуждения из области математического анализа, распространяя на многомерные пространства геометрические рассуждения, заимствованные из нашего обычного пространства. Однако у Лагранжа, стоявшего у истоков всех этих представлений, ничего подобного еще не было. У него координаты материальных точек и компоненты их скоростей или их импульсов были не чем иным, как числами (функциями времени). Их совокупность еще не определяла ни пространство, ни точки, ни кривые. Эти термины отсутствовали в его знаменитом сочинении. Следовательно, у него не было никакой геометрии: ни элементарной геометрии, поскольку он устранил чертежи, ни абстрактной геометрии в фазовом пространстве или пространстве конфигураций, и так дело обстояло еще долгое время после него, даже у великих авторов.

Вплоть до начала XX столетия геометрия продолжала пребывать в трехмерном физическом пространстве, за исключением, как мы видели, геометрии Римана (1854 г.) и концепций некоторых других ученых, среди которых можно назвать Бельтрами (1869 г.), Липшица (1872 г.) и — в конце XIX века — Ж. Дарбу, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, П. Пенлеве, Г. Риччи, Т. Леви-Чивиту, Г. Герца. Но все это были исключения, и они не получали распространения. Кстати, среди перечисленных имен только одно принадлежит физику — Герц. Остальные ученые были математиками.

Следует отметить, например, что Гамильтон установил свою аналогию между оптикой и механикой и обобщил принцип наименьшего действия именно в трехмерном физическом пространстве, а не в пространстве конфигураций. Когда он рассматривал ансамбли частиц, он, конечно, записывал системы, состоящие из большого числа уравнений, но о том, что эти уравнения относятся к фазовому пространству, он тогда не говорил, — о фазовом пространстве стало принято говорить лишь позднее. То же самое происходило при рассмотрении механики Якоби, где знаменитое уравнение Гамильтона–Якоби записывалось для физического пространства, а не для пространства произвольной размерности, как это делается сегодня.

Что касается физиков, то в XIX в. еще никто из них не использовал систематически пространства большой размерности, даже в статистической механике, где такое использование совершенно необходимо. В самом деле, статистическая механика, описывающая системы, которые состоят из большого числа атомов или молекул, особенно нуждается в использовании фазового пространства[46], и именно в ней, кстати, в начале нашего века оно и было введено благодаря Гиббсу, одному из основателей теории. Гиббс еще удовлетворялся осторожным суждением о том, что «если мы рассмотрим все возможные фазы как некое пространство $2N$ измерений, то [произведение малых интервалов координат на возможные скорости] мы можем считать элементом этого пространства» [43]. Но это понятие отсутствует в трудах двух великих основателей кинетической теории газов — Максвелла и Больцмана.

Однако Больцман первым понял важность уравнений Гамильтона для статистической физики и использовал в своей теории два их существенных свойства:

[46]Все-таки укажем на то, что для описания молекул одного литра газа при обычных температуре и давлении необходимо ввести фазовое пространство, размерность которого имеет порядка двадцати нулей. Речь не идет о понимании очень сложных геометрических фигур, но некоторые простые геометрические понятия остаются, между тем, очень ясными: например, кривая, поверхность, объем.

1) они позволяют в простой форме выразить *закон сохранения энергии* и, тем самым, первое начало термодинамики;

2) они удовлетворяют *теореме Лиувилля*, выражающей *закон сохранения объема фазового пространства*. Следовательно, это пространство ведет себя как несжимаемая жидкость, что важно для использования теории вероятностей. Но Больцман, хотя и использовал теорию вероятностей в общем случае, в своих «*Лекциях по теории газов*» [44] дает геометрическую интерпретацию соответствующих процессов в терминах объема пространства только для частных случаев плоскости и трехмерного пространства (которое не рассматривается в статистической физике). Он не переносит этот образ на случай пространства произвольной размерности, что все-таки более важно.

Любопытно, что так поступали даже знаменитые математики, такие, как Ляпунов, который в конце прошлого и в начале нынешнего века стал, вместе с Анри Пуанкаре, одним из основоположников теории устойчивости движения. Хотя Ляпунов и рассматривал системы, описываемые большим числом параметров (положений и скоростей), он никогда не считал их координатами точки в фазовом пространстве. *A fortiori*[47], разве он говорил о *фазовых траекториях*, прочерчиваемых этими точками, как это делают теперь? Когда он описывал системы в состояниях движения, близких к исходному, он говорил, что параметры имеют близкие значения, но никогда не говорил, что изображающие их точки или фазовые траектории близки, как об этом говорится сегодня.

Даже Пуанкаре, который виртуозно действовал в геометрии многообразий произвольной размерности, в *«Новых методах небесной механики»* [45] принимал любопытные меры предосторожности, доказывая, например, свою знаменитую *теорему возврата*, следствие теоремы Лиувилля о сохранении объема фазового пространства. Теорема Пуанкаре относится к системе материальных точек, скорости которых ограничены, а сами точки заключены в опреде-

[47]Тем более (*лат.*). (*Прим. перев.*)

ленной области, как молекулы газа в сосуде. В теореме утверждается (с так называемой квазиуверенностью[48]), что если в данный момент времени молекулы находятся в определенных точках пространства и обладают определенными скоростями, то в будущем они бесконечное число раз возвратятся к состояниям движения, сколь угодно близким к исходным; теорема утверждает также, что это уже происходило в прошлом.

Доказать положения этой теоремы нелегко, хотя идея доказательства довольно проста. В самом деле, если принять, что фазовое пространство ведет себя как несжимаемая жидкость, то капля такой жидкости, приходя в движение, выходит за пределы того малого объема, который она занимала, чтобы занять новый объем, *равный* первому, затем капля покидает и этот новый малый объем, чтобы занять следующий, опять-таки равный, и т.д. Но, поскольку объемы равны друг другу, то их суммирование приводит к тому, что капля покидает объем всей жидкости, а так как она не может бесконечно занимать все новые объемы, она обязательно возвратится туда, где она уже побывала.

Совершенно в духе той эпохи Пуанкаре, исходя из этой идеи, начинает доказательство своей теоремы для случая обычной жидкости в физическом пространстве. Лишь после этого введения и принятия некоторых мер предосторожности, чтобы позволить своему читателю преодолеть сложность используемых им аналогий, он распространяет свою теорему на случай пространства произвольной размерности с целью применения ее к динамическим системам, подчиняющимся уравнениям Гамильтона. Итак, Пуанкаре очень осторожно обращается к очень хорошо подготовленным специалистам; в наше время, заметим, даже в элементарных рассуждениях, подобных мер пре-

[48]*Квазиуверенность* в данном случае означает, что существуют состояния, для которых это утверждение неверно; вероятность же возникновения таких состояний равна нулю. Поясним примером: если на сфере, которую помещают на стол, пометить некоторую точку, то *возможно*, что сфера будет опираться на выбранную точку, но вероятность этого события равна нулю, потому что на сфере имеется бесконечное число точек.

досторожности не принимает никто, и речь сразу идет о пространстве произвольной размерности[49]. Предостережения, которыми Пуанкаре окружает свои рассуждения, появились еще в его теории *интегральных инвариантов*, развитой в том же томе *«Новых методов небесной механики»*. Там он также начинает с объяснения принципа своей теории в трехмерном пространстве, добавляя несколько дидактическим тоном [45]:

> Очевидно, что использованное нами геометрическое представление не играет никакой существенной роли; мы можем оставить его в стороне, и ничто больше не мешает нам распространить предшествующие определения на случай, когда число переменных превышает три.

Далее, когда Пуанкаре говорит об области фазового пространства, он не забывает упомянуть, что эта область *«играет ту же роль, которую только что играл сосуд, заключавший в себе жидкость»*. И если Пуанкаре сохраняет применительно к фазовому пространству понятия точки и объема, то он все же не говорит ни о скоростях, ни о траекториях, хотя *de facto* использует эти понятия, не называя их, — настолько они пока второстепенны, потому что еще очень новы, если уж не для него самого, то, по крайней мере, для его читателей.

Работа Пуанкаре была опубликована в 1899 г.; по прошествии чуть более двадцати лет Эли Картан написал знаменитый трактат об *интегральных инвариантах*, в котором те же самые геометрические образы в произвольном пространстве стали настолько привычными, что для того, чтобы их ввести, он уже не предпринимал никаких маневров. Просто считалось, что его читателю они хорошо известны.

Сошлемся еще на работу Эмиля Бореля (1913 г.) *«Геометрическое введение в некоторые физические теории»* [47], в которой автор объясняет сущность четырехмерного

[49]Отметим, что в *теореме возврата* подчеркивается обратимость гамильтоновой динамики и объясняется трудность сочетания статистической физики с необратимостью природных явлений. Эти возражения выдвигались Пуанкаре [46] и Цермело.

пространства-времени физикам, сопровождая это объяснение множеством оговорок. Он начинает с рассмотрения перемещений в обычном *трехмерном* пространстве, а затем в *четырехмерном евклидовом пространстве*. Далее он обращается к тому факту, что расстояние не выражается суммой квадратов, как в обычном пространстве, а разностью между временем и пространством, и дает объяснения для случая *дву-*, *трех-* и *четырехмерного* пространства.

Можно без колебаний сказать, что, несмотря на работы великих геометров от Римана до Пуанкаре, абстрактные геометрии (евклидовы и неевклидовы) и геометрии, имеющие произвольную размерность, вошли в обиход лишь в нашем столетии, вызывая радикальные изменения в отношениях между математикой и физикой и внося свой вклад в триумф, одержанный формализмом над непосредственным интуитивным восприятием явлений.

Геометризация физики

Мы видели, что сначала, от Фалеса и Пифагора до Галилея и Ньютона, геометрия в своей элементарной форме, называемой *евклидовой геометрией*, безраздельно господствовала в физике. Лишившись своего престола из-за алгебры и анализа, она начала утрачивать свое влияние (тогда Лагранж считал, что он ее упразднил). Но мы являемся свидетелями ее возвращения в физику в начале XX века — поддерживаемое развитием аналитической механики, оно стало окончательным с появлением теории относительности и квантовой механики. Не следует удивляться тому, что главным «виновником» здесь стал Альберт Эйнштейн, величайший физик столетия, который изложил идею геометризации физики, прежде всего, в самой теории относительности, но также в своем несколько забытом старом мемуаре 1917 г., посвященном тому, что называется «старой квантовой теорией» [48]. Рассмотрим эту теорию подробнее.

Старая квантовая теория, называемая также теорией Бора–Зоммерфельда, создавалась, начиная с 1913 г., на основе теории атома Бора, в более общем виде Зоммерфельдом и Эпштейном. Эта теория оставалась значимой вплоть до появления современной квантовой механики, т.е. до середины двадцатых годов, до работ де Бройля, Гейзенберга и Шредингера. В ней была разработана остроумная, но половинчатая процедура для введения — в соответствии с квантовым законом Планка — прерывности определенных физических величин в рамки классической динамики, которая только и была известна в ту эпоху. В этой процедуре обобщалось то, что Бор ввел для частного случая своей модели атома, и она заключалась в приравнивании целочисленным кратным постоянной Планка тех величин, которые в аналитической механике называются *интегралами действия*. Мы уже сталкивались с ними, например, в главе III, где говорилось о действии по Мопертюи. Напомним, что для нахождения действия движущейся материальной точки на малом отрезке траектории ее *импульс* (произведение массы на скорость) умножается на длину малого элемента траектории. *Интеграл действия* равен сумме таких произведений, взятой по всей траектории, и, согласно принципу Мопертюи, движение материальной точки делает этот интеграл действия минимальным (или, по крайней мере, экстремальным).

Все усложняется, если рассматривать не изолированную точку, а систему, состоящую из произвольного количества точек, потому что теперь надо вычислить не физическую траекторию, а траекторию точки, представляющей систему в пространстве конфигураций (размерность которого в три раза больше количества точек, входящих в систему). Именно с таким случаем столкнулись физики, когда попытались создать механику на основе процедуры Бора. С этой целью они использовали прием, аналогичный тому, который мы видели в нашем примере двух движущихся тел, описывающих движение в одном измерении, что позволило нам получить простой образец двумерного пространства конфигураций. Как и в описанном примере, физики ограничились системами, движения которых они умели разлагать на простые движения в одном измерении: математики называют это *разделением переменных*.

Оказалось, что случай, интересующий квантовую теорию, сводится к тому, что простые движения являются

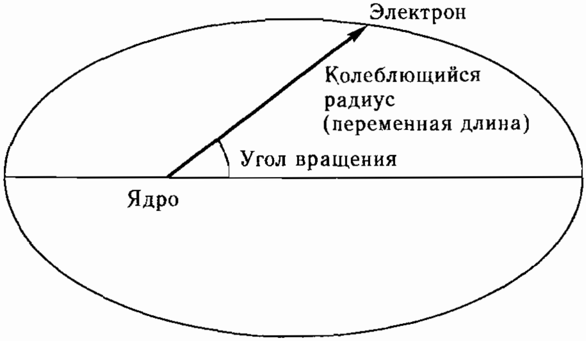

Рис. 14. Эллиптическая траектория электрона в атоме Бора

периодическими и, следовательно, представляют собой вращения или колебания. Это и был случай атома Бора, в котором планетарный электрон описывает эллипс вокруг ядра и, тем самым, совершает два движения: с одной стороны, он обращается (это вращение), а с другой стороны, он, вращаясь, попеременно то приближается к ядру, то удаляется от него (следовательно, это колебания длины радиуса).

Итак, в механике Лагранжа эти движения вращения или колебания[50] описываются с помощью *угла*, задающего положение точки на окружности, и постоянного значения *площади*, описываемой радиусом: старый закон площадей Кеплера и Ньютона, но здесь эта площадь называется *переменной действия*. Будучи заимствованным из небесной механики, в квантовой механике этот закон изменяется вследствие добавления к нему требования, чтобы переменные действия были кратны постоянной Планка.

Можно заметить, что каждое из частных движений, на которые было разложено движение системы, характеризуется *углом* и *переменной действия*, а эти две переменные могут задать абстрактное двумерное пространство. Это — «малое» фазовое пространство, и поскольку движение системы разлагается на совокупность таких движений,

[50]Нет большой разницы между вращением и колебанием, поскольку последнее представляет собой проекцию вращения на прямую.

то для того чтобы получить пространство, в котором будет представлена вся система, достаточно объединить все соответствующие «малые» фазовые пространства.

Отметим, что это разложение сложного движения на круговые движения заимствовано из небесной механики в предельно развитой форме. Оно вытекает из свойств гамильтоновой динамики, но, конечно же, не из особого пристрастия к круговым движениям. Однако разве не видно здесь возвращения господства платоновских круговых движений? Конечно, эти круговые движения происходят не в физическом пространстве, но эпициклы Гиппарха и Птолемея уже были абстрактными. Как не считать поразительным тот факт, что небесная механика кажется находящейся под властью окружности и что она заразила этим и мир атомов! Круговое движение еще отнюдь не утратило своей важности. Платон нащупал великую математическую идею.

Но вернемся к Эйнштейну, который в своей статье 1917 г. о теории Бора—Зоммерфельда критиковал процедуру квантования, о которой мы только что говорили. Он был потрясен использованием представления *ad-hoc*, приводившего к появлению переменных действия. «Квантовые условия, полученные таким образом, — говорил он, — не являются инвариантными». Это выражение имеет более общий смысл, чем в теории относительности, и касается какой угодно группы преобразований. Здесь речь идет об инвариантности относительно *канонических преобразований*, сохраняющих форму уравнений гамильтоновой динамики. Критика со стороны Эйнштейна вызвана тем, что в этой теории закон квантов основывается не только на законах динамики, но и на некоторой излишней гипотезе. Следует обратить внимание на тот способ рассмотрения, который Эйнштейн привнес в физику и к анализу которого мы еще вернемся: физика должна оставаться в рамках *законов инвариантности*. Выйдя за рамки интуитивного восприятия явлений, физики сосредоточили свое внимание на всех физических законах, нарушающих закон инвариантности, либо ставя его под подозрение, либо предчувствуя в нем некий новый результат. Если придерживаться догматического подхода, то это — стремление руководствоваться законами симметрии... при условии, что они в случае необходимости будут изменены, поскольку началом великого открытия может быть обнаружение нарушения закона инвариантности, который считается всеобщим.

Эйнштейн заметил, что если переменные действия и не являются инвариантными, то их *сумма* все же инвариантна. Итак, эта сумма является интегралом действия по Мопертюи, относящимся к принципу наименьшего действия. Необходимо, говорит Эйнштейн, ограничиться введением этой суммы. Но если прежде имелось столько же переменных действия, сколько и квантовых чисел, то что делать с единственным действием в смысле Мопертюи? Как снова получить все предшествующие условия? Именно здесь в игру вступает геометрия.

Как только механическая система становится сложнее простой материальной точки, принцип Мопертюи выражается в пространстве конфигураций, имеющем столько же измерений, сколько имеется вращательных (или колебательных) движений, на которые разлагается движение большой системы. Именно к этому пространству и обращается Эйнштейн, в отличие от своих предшественников, рассматривавших только частные движения. Со смелостью, которой не было ни у кого из физиков того времени и почти ни у кого из математиков, Эйнштейн дал новую формулировку квантовой теории, основываясь на геометрии траекторий в пространстве конфигураций или, точнее, описывая некоторое число топологических свойств этих траекторий.

Сначала он провел различие между *эргодическими* траекториями, характеризующими неповторяемость в смысле статистической механики[51], и регулярными траекториями, периодическими или квазипериодическими, рассматриваемыми в квантовой теории. Он доказал, что пространство конфигураций допускает существование внутренне присущих ему сингулярных линий, поскольку они характеризуют систему. Их нельзя пересечь, так что путь, проложенный

[51]Эти траектории соответствуют тому, что сегодня называется «хаосом».

в пространстве конфигураций, должен их огибать — так же, как тропинка в лесу огибает деревья.

Эйнштейн определил правило квантования, приравнивая целочисленным кратным постоянной Планка интеграл действия, вычисленный вдоль всех замкнутых путей, которые отличны друг от друга и которые можно проложить в пространстве конфигураций. Эти пути зависят от сингулярных линий, которые они содержат в себе, и если два из них окружают одинаковым образом одни и те же линии, то доказывается, что они эквивалентны; о таких путях говорят, что они являются *гомотопными*[52]. Число действительно различных путей в точности равно числу переменных действия старой теории, и Эйнштейн снова нашел те же квантовые условия. Старая процедура состояла просто в том, что в конфигурационном пространстве отдавалось предпочтение некоторым путям и игнорировалось то обстоятельство, что в нем всегда существует бесконечное число путей, которые эквивалентны (гомотопны) друг другу.

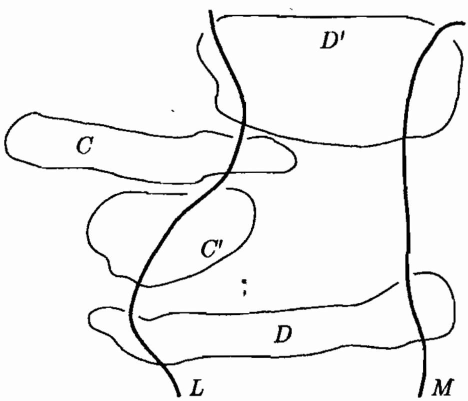

Рис. 15. Гомотопные пути. Сингулярные линии L и M продолжаются до бесконечности. Пути C и C' обвиваются вокруг L и являются гомотопными. Пути D и D' обвиваются одновременно вокруг L и M: они гомотопны друг другу, но не C и C'

[52]Два пути гомотопны, если один из них преобразуется в другой непрерывной деформацией без пересечения сингулярной линии.

Но для чего было нужно правило Эйнштейна? В ближайшем будущем оно действительно не пригодилось, поскольку с его помощью были лишь заново открыты результаты предшественников Эйнштейна, но процедура не стала более удобной. Напротив, лучшее, что можно было сделать на практике, так это продолжать производить вычисления тем же способом, что и прежде. Но даже если Эйнштейн и пришел всего лишь к тому же, что и прежде, то он все-таки пришел к этому более понятным способом. Выражаясь на языке геометра, он обнаружил структуру позади рецепта. Топология пространства конфигураций была определена указанием на внутренне присущие ему свойства и оказывалась *инвариантной* в описанном выше смысле. Этот концептуальный прогресс не оказал никакого влияния на старую теорию квантов, но мы увидим, что через несколько лет он стал решающим для развития волновой механики, созданной де Бройлем и Шредингером.

Этот вклад Эйнштейна в геометризацию физики был совершен им через год после его статьи 1916 г. «Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie» («Основы общей теории относительности»). В течение всего одного года он предоставил два великолепных образца геометрических рассуждений, поднявших физическую интуицию до небывалого уровня, и это предшествовало обращению к проблемам, поставленных опытом. Один из этих образцов стал со временем знаменитым — это теория относительности, — а другой мало известен, но качество воображения, продемонстрированного в нем, не ниже, и мы увидим, что именно здесь Эйнштейн вплотную подошел к волновой механике. В обоих случаях мы сталкиваемся с *физической интуицией второго порядка*, которая относится не непосредственно к физическому объекту, пусть даже выраженному в понятиях физики, а к отдаленному от реальности абстрактному представлению, установление связи которого с опытом оказывается уже сложной проблемой. Главной составной частью этого типа рассуждений является понятие *инвариантности* законов относительно *групп преобразований.*

Заслуживает внимания еще одно обстоятельство. Став однажды известным, геометрическое рассуждение Эйнштейна, о котором только что говорилось, может быть выражено, хотя и в несколько усложненном виде, в трехмерном физическом пространстве. Это было бы неким парафразом, преимущество которого состояло бы в использовании в ходе рассуждения терминов, соответствующих наблюдаемым величинам (координат и скоростей в обычном пространстве). Однако этот выигрыш достался бы ценой отказа от достигнутого Эйнштейном понимания, хотя и более абстрактного, но все же более общего. Допустимо спросить, можно ли *открыть* результаты Эйнштейна, оставаясь в физическом пространстве? Вероятно, нет. Уже одного этого вопроса достаточно для того, чтобы подтвердить важность достигнутого концептуального прогресса, и это обусловливается одновременно и эвристическими возможностями, и новым пониманием физических законов, к которому он привел. Но с этим прогрессом связана и некоторая опасность, поскольку он отдаляет нас от реальности.

Перед лицом успеха этих абстрактных идей — и в силу самого этого успеха — следует обратить особое внимание на присущую гению Эйнштейна непосредственную физическую интуицию. Ибо человек, столь высоко поднявшийся в области абстракций, прежде (а иногда в то же самое время) предоставлял доказательства того, что он является незаурядной личностью, обладая чувствительной, конкретной интуицией на уровне опыта. Некогда он смог рассуждать о римановых пространствах, и он же смог — при помощи на удивление простых аргументов — предвидеть эффекты общей теории относительности за шесть или семь лет до того, как написал уравнения, — в те времена, когда он даже еще ничего не слышал о римановом пространстве. Человек, способный заниматься топологией в пространстве конфигураций, был также изобретателем холодильника без мотора, он же создал теорию образования излучин рек и написал десятки мемуаров, в которых применял к различным задачам закон Планка и соответствующую статистику с таким умением, что нельзя удержаться от предположения, что при желании он мог бы стать блестящим экспериментатором[53].

[53]После того, как Эйнштейн ушел из патентного бюро в Берне, его шеф очень сожалел о потере столь блестящего инженера.

Это качество ума является очень важным, поскольку оно означает, что у Эйнштейна физика господствует над абстракцией и что он сам не становится пленником абстракции. У него формальное рассуждение не предназначалось для того, чтобы скрыть отсутствие интуиции. Между Эйнштейном и некоторыми физиками, за недостатком физических идей превратившимися в посредственных алгебраистов, существует такая же разница, как между Пикассо, гениальным рисовальщиком, решившимся на разложение и деформирование тел и образов по своему разумению, и некоторыми его подражателями, о которых обычно думают, что они могли бы обойтись и без игры в таинственность.

Глава VII

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ГЕОМЕТРИЯ

Само собой разумеется, что это использование пространства конфигураций должно рассматриваться лишь как математический прием [...]. Когда наши знания в достаточной мере увеличатся, все снова станет понятным в трехмерном пространстве.

Эрвин Шредингер [49]

...Важнее обнаружить красоту в записываемых уравнениях, чем увидеть, что уравнения согласуются с опытом. Если бы Шредингер больше себе доверял, то он опубликовал бы свою работу двумя месяцами раньше, и его уравнение было бы более адекватным.

П. А. М. Дирак [50]

Геометрическое рассуждение Эйнштейна и волновая механика де Бройля

Хотя Луи де Бройль добился триумфа волн в механике, он чаще вступался за Ньютона, чем за Гюйгенса или Френеля. Причиной было то, что он настаивал, прежде всего, на дуализме волн и корпускул и на характеристической частоте, приписываемой корпускуле, — на идеях, родоначальником которых был Ньютон. Де Бройль придавал большое значение корпускулярному аспекту и противился чисто волновому описанию как применительно к свету, так и к материи. Но это не мешает волнам играть определяющую роль в становлении волновой механики у него и у Шредингера, и об этом мы только что говорили при рассмотрении работ Эйнштейна. В сущности, волновая механика возникла из трех составных частей — *теории относительности*, *теории фотонов* и вышеупомянутого *геометрического рассуждения*, и все три заимствованы у Эйнштейна. Но для того, чтобы понять эту третью составляющую, следует уделить некоторое время уточнению предмета теории Гамильтона–Якоби, уже упомянутой в главе IV, одной из прекраснейших теорий аналитической механики. Идея заключается в следующем.

Если материальная точка подвергается действию «консервативных» сил (к ним относятся, например, гравитационные, электрические или магнитные силы) и из некоторой точки пространства движется в другую точку, то ее траектория может быть предсказана с помощью принципа наименьшего действия путем вычисления *интеграла действия* вдоль линий, соединяющих две точки, и поиска тех из них, которые делают действие *наименьшим*. Теперь предположим, что при той же начальной точке мы связываем то же самое наименьшее действие со всеми возможными направлениями вдоль новых траекторий: их концы образуют поверхность, окружающую начальную точку.

Если движущаяся материальная точка не подвергается действию никакой силы, то траектории будут прямыми линиями. Если она подвергается действию сил, они будут кривыми линиями: например, если она подвергается притяжению со стороны Солнца, она опишет дугу эллипса, гиперболы или параболы. Но какими бы ни были консервативные силы, мы знаем, что можно сконструировать риманово пространство, в котором длина будет определяться интегралом действия. Найденные нами траектории всегда будут *геодезическими линиями*, и поверхность, которую мы получим, будет геометрическим местом точек, располагающихся на равном расстоянии от некоторой фиксированной точки: следовательно, это будет *сфера* (в отсутствие силы это будет даже «настоящая» сфера).

Вернемся теперь к обычному евклидову пространству, пространству геометрических фигур, и будем считать *все* поверхности, сконструированные описанным ранее способом, соответствующими различным значениям действия. Они окружают начальную точку, и исходящие из этой точки траектории ортогональны поверхностям, равно как радиусы совокупности концентрических сфер ортогональны этим сферам. В сущности, доказывается, что все эти поверхности порождаются одна другой, как фронт волны, испущенной начальной точкой и распространяющейся с течением времени все дальше: следовательно, *принцип наименьшего действия позволяет связать совокупность возможных траекторий материальной точки с распространением волны, к которой траектории движущегося тела ортогональны*, точно так же, как световые лучи ортогональны соответствующим световым волнам.

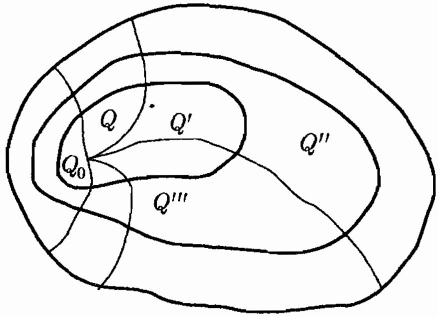

Рис. 16. Поверхности постоянного действия и траектории наименьшего действия с начальной точкой Q_0

Эта аналогия между оптикой и механикой и эта связь между распространением волнового фронта и корпускулой были открыты столетие спустя после Гамильтона. Как мы указывали в главе IV, именно Якоби доказал, что знание об этой волне, определенной *действием* рассматриваемой динамической системы, достаточно для описания всей эволюции системы. *Уравнение Гамильтона–Якоби*, описывающее распространение упомянутой волны, полностью эквивалентно *уравнениям Гамильтона*, описывающим движение системы в терминах корпускулы. Нормали к волновому фронту в уравнении Гамильтона–Якоби тождественны траекториям, предсказываемым уравнениями Гамильтона.

Мы уже говорили о том, что впечатляющие аналогии между оптикой и механикой, открытые Гамильтоном, вскоре были забыты (даже Якоби!) и что в течение почти столетия развивались лишь математические процедуры теории.

Следует все же отметить, что в конце XIX века великий математик Феликс Клейн понял важность этих аналогий, но, несмотря на весь свой авторитет, тщетно пытался привлечь к ним внимание теоретиков, да и сам ничего не сделал для их развития. Что касается Эйнштейна, то он, похоже, ничего об этом не знал, но именно на основе теоремы Якоби, о которой мы только что говорили, и уравнения Гамильтона—Якоби он развил идеи своего мемуара о геометрии пространства конфигураций. Именно эта геометрия сыграла определяющую роль, потому что у де Бройля уже была мысль о разработке оптико-механической аналогии.

Де Бройль опирался непосредственно на аналогии между принципами Мопертюи и Ферма, а не на работы Гамильтона, но именно благодаря мемуару Эйнштейна у него возникла идея *отождествления интеграла действия с фазой существующей, по его предположению, волны.* Он понял, что когда Эйнштейн приравнял действие вдоль замкнутой траектории целочисленному кратному постоянной Планка, то он сделал не что иное, как признал связанную с частицей волну *стоячей.*

Можно сказать, что благодаря мемуару Эйнштейна де Бройль сыграл по отношению к теории Гамильтона роль, аналогичную роли Френеля по отношению к теории Гюйгенса. У Гюйгенса световая волна сводилась к распространению *волнового фронта*, а этого недостаточно для обоснования всей оптики; заслуга Френеля состояла во введении идеи *периодичности*, что позволило ему описать прямолинейное распространение света, дифракцию, интерференцию и цвета.

Поверхности равного действия, сконструированные Гамильтоном и Якоби, подобным же образом сводились к волновым фронтам и не могли привести ни к чему другому, кроме механики Лагранжа и Гамильтона. Как и Френель в оптике, де Бройль, опираясь на идею периодических волн, благодаря которой он продвинулся намного дальше классической механики, смог предсказать *дифракцию* материальных частиц и объяснить *условие квантования* Бора—Зоммерфельда, придав физический смысл геометрической интерпретации, предложенной Эйнштейном.

Однако следует подчеркнуть некоторую двойственность в отношении де Бройля к геометрии. Конечно, в его рассуждениях, когда это было необходимо, использовалось пространство конфигураций, и он прибегал к помощи четырехмерного релятивистского пространства-времени, чтобы найти законы инвариантности, но он позаботился и о том, чтобы сразу же вернуться в обычное пространство с целью интерпретации этих законов в рамках физической реальности. Итак, он ввел два *мировых вектора* — вектор энергии-импульса частицы и вектор частоты и длины волны, получив, тем самым, две величины, аналогичные величинам теории относительности. Приравняв их друг другу с помощью закона Планка, он нашел *длину волны де Бройля* и доказал эквивалентность принципов Мопертюи и Ферма.

Но эта волна, связанная с движущимся материальным телом, в глазах де Бройля могла бы иметь смысл только в физическом пространстве, и у него никогда не было идеи о том, что она должна распространяться в некотором абстрактном пространстве. Впрочем, прежде он открыл другой способ введения того, что он называл *законом совпадения фаз*, — также релятивистским, но относящимся к обычному пространству, — и именно этот закон является для него предпочтительным. Но время рассудило иначе: Шредингер вскоре заставил волну распространяться в пространстве конфигураций произвольной размерности, и, в конце концов, из диссертации де Бройля значение сохранили лишь формальные релятивистские рассуждения, а не идея совпадения фаз. Квантовая механика обратилась к абстрактным пространствам.

Шредингер и структурная роль пространства конфигураций

Шредингер сделал, по сравнению с де Бройлем, два существенных шага. Де Бройль оставался еще слишком связан с классической механикой и оптикой. Он был слишком близок к механике, представляя волну распространяющейся вдоль траектории частицы и, следовательно, вдоль направления распространения луча, которое он считал данным *a priori*, ограничиваясь, таким образом, тем, что называется *приближением геометрической оптики.* Кроме того, воодушевленный этой гениальной аналогией между механикой и оптикой, он точно так же оставался и слишком близок к оптике, отождествляя открытую им волну со световой волной, что мешало открытию уравнения волны волновой механики [51]. Шредингер же, приступив в решению задачи вторым и потому оказавшись чуть дальше от источника, придал волне материи независимость как от оптики, так и от механики. Именно таким образом он открыл свое знаменитое *уравнение Шредингера.*

С самого начала он оставил в стороне аналогию между материей и светом и рассматривал материальную волну саму по себе. Более того, он, как Эйнштейн и де Бройль, даже если и ссылался на уравнение Гамильтона–Якоби, то «забывал» при этом (вот и главное отличие) о траектории, по которой реально следует частица, и рассматривал поверхность равного действия Гамильтона (ставшего *волной фазы* у де Бройля) как некий самостоятельный объект, определяя совокупность возможных траекторий без учета реальной траектории.

Наконец, когда Шредингер развивал идеи де Бройля, он — в глазах этого последнего — совершил святотатство, отказавшись от теории относительности, несмотря на ту определяющую роль, которую она играла[54]. Причиной этого отказа стало то, что первая релятивистская попытка Шредингера оказалась неудачной: она неожиданно привела к таким результатам для спектра атома водорода, которые были гораздо менее удовлетворительны, нежели прежде полученные Зоммерфельдом в рамках старой теории квантов. Мы увидим, что именно Дирак два года спустя должен будет решить задачу релятивистского электрона. Таким образом, Шредингер отказался от преимуществ пространства-времени ради преимуществ геометрии пространства конфигураций классической механики. Именно это позволило Шредингеру рассмотреть задачу *системы частиц*, отказавшись от теории относительности из-за трудностей, вызываемых измерением времени.

[54]Де Бройль руководствовался не только теорией относительности, но можно показать, что без теории относительности его рассуждения были бы невозможны [52].

Шредингеру хватило смелости представить распространение волны де Бройля в пространстве конфигураций системы частиц, и именно в этом абстрактном пространстве он развил теорию волн. Эту идею можно назвать даже скандальной, если учитывать, что реальность волн де Бройля была доказана немного позже знаменитым экспериментом Дэвиссона и Джермера[55]; но как же не верить в подход Шредингера после достигнутых им успехов?

Де Бройль признал этот успех и восхищался им, но подход Шредингера в не меньшей степени и возмущал; но разве Шредингер не понимал тех трудностей, которые вызывала его теория? В сущности, он недалеко ушел от того, чтобы разделить мнение де Бройля, поскольку и сам считал, что он добился успеха с помощью математической уловки, позволявшей правильно предсказывать экспериментальные результаты. Однако, сколь законной ни была гордость Шредингера, он прекрасно понимал, что ему еще только предстоит научиться описывать явления в физическом пространстве. Именно таков смысл эпиграфов к этой главе.

Здесь мы сталкиваемся с трудностью (типичной для абстрактной геометризации квантовой механики), которая заслуживает особого рассмотрения, так как использование пространства конфигураций в этом случае сильно отличается от подхода классической механики. В сущности, пространство конфигураций используется в классической механике ради математического удобства, но можно было бы обойтись и без него, даже если бы теория усложнилась, поскольку всегда можно перенести в физическое пространство не только результат вычислений, но и сами вычисления, с этого момента обеспечивающие описание движения вместе с учетом индивидуального поведения различных частиц системы. В квантовой механике это не так, поскольку для современного состояния теории никакое индивидуальное описание в физическом пространстве невозможно, и теория в ее абстрактной форме остается заключенной в пространстве конфигураций, обеспечивая чисто статистические предсказания. *Теория способна предсказывать, но не описывать.*

[55]Теория Шредингера возникла в 1926 г., а эксперимент Дэвиссона и Джермера был поставлен в 1927 г.

Несомненно, на это можно возразить, что именно присутствие волны заставляет частицы утрачивать свою индивидуальность, и именно поэтому их перемещения нельзя проследить по отдельности. Это верно, поскольку квантовый постулат *неразличимости* тождественных частиц подтвержден опытом. Но даже если это так, можно выдвинуть два важных возражения.

1) Если поведение системы частиц как единого целого налицо, то должна существовать также и возможность описания в том пространстве, в котором эти явления наблюдались, то есть в физическом пространстве. Пусть общая волна руководит системой частиц, но она не должна быть заключена в пространстве конфигураций. Конечно, бывают случаи вроде сверхтекучести или сверхпроводимости, в которых вводится некая коллективная волна в физическом пространстве, но здесь речь идет о «феноменологических» теориях, которые представляют собой, скорее, показательные описательные процедуры (впрочем, несомненно, верные), но к которым, в общем случае, теория систем частиц Шредингера не приводит.

2) Если две частицы первоначально были удалены друг от друга, так что одна находится на Земле, а другая — на Сириусе, а затем они начинают сближаться, то, даже если они тождественны друг другу, трудно поверить, что они были неразличимы с самого начала. Трудно поверить, что уже изначально они образовывали единую квантовую систему, в которой их «индивидуальность» тонет в «целостном» поведении. Напротив, кажется более естественным предположить (вместе с де Бройлем), что связанная с частицей волна обладает лишь ограниченной пространственной протяженностью и что действие типичных квантовых законов — вроде *неразличимости* тождественных друг другу частиц и *принципа запрета Паули*[56] — проявляется лишь

[56]Принцип Паули запрещает двум тождественным друг другу *фермионам* (например, двум электронам в атоме) находиться в одном и том же квантовом состоянии. Этот принцип играет важную роль в атомной физике и определяет статистику Ферми–Дирака, которой подчиняются фермионы. Напротив, *бозоны* (в частности, фотоны) могут накапливаться в одном и том же квантовом состоянии, подчиняясь статистике Бозе–Эйнштейна.

тогда, когда частицы подходят друг к друг достаточно близко для того, чтобы волны наложились друг на друга.

Мы больше не будем развивать эти возражения, касающиеся великого спора об интерпретации квантовой механики, — темы, которой посвящены, в частности, работы [25, 53].

Матричная механика Гейзенберга, Борна и Иордана

В 1925 г., в промежутке между появлением теории де Бройля и теории Шредингера, Гейзенберг открыл совершенно иной путь разработки квантовой механики. Испытав влияние Бора и атмосферы иррационализма, царившей в некоторых группах немецких интеллектуалов, он не стремился к созданию причинной картины реальности и был воодушевлен платоновской идеей, согласно которой нужно искать не модели физических явлений, а математические формы, в которые они вписываются [54]:

> Элементарные частицы можно сравнить с правильными телами, описанными в «*Тимее*» Платона. Это — изначальные образы, фундаментальные идеи материи.

Пока де Бройль и Шредингер с помощью физических аналогий искали пространственно-временной образ квантовых явлений, Гейзенберг искал *алгоритм*, способный предсказывать доступные наблюдению факты. Поэтому он отказался от всех гипотез о лежащей в их основе реальности и ограничивался оперированием лишь *наблюдаемыми величинами*. В то время как де Бройль стремился проникнуть в природу явлений, чтобы обнаружить там скрытые физические сущности (вроде волны), которые могли бы быть причиной этих явлений, Гейзенберг следовал предписанию Гете: «Не ищите скрытой за фактами теории, факты сами по себе уже суть теория». Но если он и испытывал влияние философских взглядов Бора, то лишь под воздействием результатов научной работы; одним из таких результатов было найденное в рамках старой теории квантов остроумное решение задачи вычисления спектра излучения квантованного атома, известное как *принцип соответствия*. Этот принцип был лишь временным выходом, однако сыграл огромную роль, преодолевая недостатки модели атома Бора, которая позволяла находить частоты испускаемых или поглощаемых атомом излучений, но не предоставляла средств для вычисления интенсивности и поляризации. Зато такие средства были в распоряжении старой теории электронов Лоренца, позволявшей вычислять интенсивность и поляризацию, но ведущей к ошибкам при вычислении частот.

Идея принципа соответствия состояла в том, чтобы объединить в одном рецепте вычисление частот в соответствии с квантовой теорией и вычисление интенсивностей в соответствии с классической теорией, замечая, что для *больших квантовых чисел* (иначе говоря, для «сильно возбужденных» атомов) обе теории объединяются вследствие малости постоянной Планка. Следовательно, существует *соответствие* между двумя теориями на грани больших квантовых чисел, и тогда классическое вычисление интенсивности оказывается применимым к теории квантов.

У Бора возникла дерзкая идея продолжить применение классических формул даже тогда, когда квантовые числа малы, т.е. в том единственно интересном случае, когда обнаруживается прерывность, приведшая к триумфу теории квантов. Бор прекрасно понимал, что его подход нелогичен, поскольку он одновременно использовал две теории (классическую и квантовую) тогда, когда они не могли быть объединены. Процедура могла быть лишь предварительной, но результаты были достаточно хороши. Гейзенберг «восстановил в правах» принцип соответствия, но посредством процедуры настолько формальной, что ее почти невозможно описать с помощью слов, так что мы удовлетворимся рассмотрением только двух ее элементов.

Первый из них — вычисление интенсивностей в атоме Бора. Оно основывается на том факте, что в силу правил квантования, о которых мы говорили в предшествующей главе, энергия атома может равняться лишь некоторым прерывным величинам, зависящим от целых чисел. У Бора эти величины соответствуют особым орбитам электрона, а в волновой механике они соответствуют стоячим волнам де Бройля (стационарным состояниям). Но эти исследования Гейзенберга не интересовали. Для него важно было лишь вычисление частот испускаемого и поглощаемого света. Именно эти частоты соответствуют, согласно Бору, скачкообразному переходу электрона с одной орбиты на другую в случае испускания света и обратному скачкообразному переходу в случае его поглощения. В обоих случаях речь идет о переходе из одного квантового состояния в другое, и эти квантовые состояния характеризуются двумя различными целыми квантовыми числами. Согласно Бору, частота света равна разности двух соответствующих величин энергии, деленной на постоянную Планка: иначе говоря — и именно это следует запомнить, — *характеристические частоты атома зависят от двух целых чисел*. На самом деле эта формула была известна из эмпирических данных еще на рубеже веков благодаря Бальмеру и Ритцу, но заслуга Бора состоит в понимании того, что речь идет об уровнях энергии, и вычислении этих уровней для случая атома водорода. В волновой механике тем временем, разумеется, также были заново обнаружены эти величины.

Итак, вычисление частот было первым элементом, на который опирался Гейзенберг. Вторым элементом стал замечательный *закон композиции*, который следовал из первого элемента и служил для вычисления частот излучения, испускаемого атомом, переходящим с одного уровня на другой, более низкий, и проходящего при этом через промежуточные уровни. Открытый эмпирически Ридбергом и Ритцем, этот закон был заново открыт Бором в его теории атома, а затем Шредингером благодаря его уравнению.

Без рассмотрения деталей вычисления очень трудно дать явное описание теории Гейзенберга. Просто скажем, что, используя эти две небольшие «зацепки» — закон частот и закон композиции, — он сумел «закрепиться» на отвесной стене квантовой механики. Наличие *пар целых чисел* в законе частот навело его на мысль, которая даже сейчас, спустя больше трех четвертей века, еще вызывает у нас удивление. Гейзенберг представил физические величины не с помощью обычных чисел, а с помощью *бесконечных таблиц* чисел, в которых упомянутые пары целых чисел служат для нумерации строк и столбцов. Такие таблицы называются *матрицами*, и теория матриц уже была создана, но Гейзенберг ничего не знал об этом. Но даже если бы он об этом знал, его идея не стала бы менее удивительной, ведь для построения теории одного этого недостаточно. Как бы то ни было, он не знал о существовании теории матриц и изобрел ее заново. Более того, используя закон композиции частот, он смог перемножать матрицы. Научившись выполнять матричные вычисления, Гейзенберг ввел матрицы в классические вычисления Лоренца и, исходя из уравнений классической механики, открыл уравнения новой механики, сначала в частном случае, а затем, вместе с Борном и Иорданом, в общем виде. Он назвал эту теорию *квантовой механикой*, или *матричной механикой*.

Несмотря на формальные аналогии, существует фундаментальное различие между новой и старой механикой, поскольку произведение матриц *некоммутативно*, в противоположность случаю умножения обычных чисел: произведение двух матриц зависит от порядка, в котором они перемножаются, тогда как для обычных чисел перестановка множителей местами ничего не меняет (например, $2\times 3=3\times 2$). В этой новой алгебре, которая была *названа квантовой алгеброй* и важность которой была впервые оценена Дираком, проводится различие между q-числами (q в качестве квантовых величин) и обычными числами, или c-числами (c в качестве классических величин). В такой алгебре именно Дирак ввел постоянную Планка в разность произведений различных пар матриц, перемноженных в прямом и обратном порядке.

Становится ясно, какое невероятно огромное расстояние отделяет эту теорию от волновой механики де Бройля и Шредингера или от теории квантов Планка. В ней всякая плоть исчезает, и остается только алгебраический скелет. Дирак выразил это всего одной шутливой фразой, сказав, что переход от классической к квантовой механике произошел «просто» путем переписывания уравнений классической механики в символах некоммутативной алгебры.

Впрочем, никто не считал, что все так просто. В частности, Шредингер с притворной скромностью заявлял, что он еще не чувствует себя «созревшим» для того, чтобы обнаружить в такого рода утверждениях какое-либо физическое объяснение [49].

И все же с самых первых задач, которые решала *квантовая механика*, эти решения согласовывались с опытом. В некоторых случаях заново были получены результаты Бора и Зоммерфельда, а когда результаты квантовой механики отличались от прежних, то именно они лучше соответствовали опыту. Это было началом новой физики, удивительно отважной, абстрактной, формальной, одновременно чудесной и беспокоящей, вызвавшей у современников впечатление математического чуда, глубинный физический смысл которого ускользал от понимания. Ее создатели (кроме Макса Борна) были очень молодыми физиками. Все это происходило в промежутке между 1925 г. и 1926 г., и в 1925 г. Гейзенбергу было двадцать четыре года, Дираку — двадцать три, а Паули (который к ним присоединился) — двадцать шесть. Поэтому говорили о *«Knabenphysik»* [55], «мальчишеской физике», но что это были за мальчишки!

Существовала лишь одна теория. Все взбирались на одну и ту же вершину. Бесконечномерная геометрия

Хотя 1925 г. был годом, следующим после защиты де Бройлем диссертации, *квантовая механика* еще ничем не была ему обязана, поскольку развивалась тогда, исходя из иных положений. Но уже в следующем году (1926), когда эта новая механика приняла законченный вид, Шредингер развил идеи де Бройля и в течение шести месяцев опубликовал четыре мемуара (ставшие такими же знаменитыми, как и работы Гейзенберга, Борна, Иордана и Дирака), которые образуют том объемом почти в двести страниц и в которых он разработал формализм уже упомянутой *волновой механики*. Она также приняла свой окончательный вид и, к удивлению Шредингера, хотя и полностью отличалась от квантовой механики, приводила все-таки к тем же результатам. Скоро мы узнаем почему.

Именно за эти три решающих года — 1924, 1925, 1926 — произошло разделение современной физики на два лагеря, во главе которых стояли, соответственно, Эйнштейн и Бор. Лагерь Бора имел значительный численный перевес. Раскол был виден уже в совершенно противоположных друг другу предпосылках двух теорий и совершенно отчетливо отразился в первых же ответах Эйнштейна. Получив от Ланжевена рукопись диссертации де Бройля, он 16 декабря 1924 г. ответил нижеследующей фразой:

> Он приподнял краешек огромной завесы.

Эйнштейн сразу же усвоил идеи де Бройля и применил их к тому, что впоследствии стало «статистикой Бозе—Эйнштейна». Однако даже полностью понимая важность квантовой механики, он говорил о ней в скептическом тоне, в частности, в письме к Бессо от 25 декабря 1925 г. [35]:

> Самое интересное, произошедшее в области теории за последнее время, — это теория Гейзенберга–Борна–Иордана, описывающая квантовые состояния. Это настоящее колдовское исчисление, в котором вместо декартовых координат появляются бесконечные определители (матрицы). Это в высшей степени изобретательно и против любого доказательства ложности защищено большой сложностью.

Спустя год он писал Борну [56]:

> Квантовая механика вызывает уважение. Но внутренний голос говорит мне, что это не *nec plus ultra*. Теория дает нам многое, но она совсем не приближает нас к пониманию тайны Господа Бога. Как бы то ни было, я убежден, что он, по крайней мере, не играет в кости».

Мы узнаем знаменитую фразу о том, что Бог не играет в кости, которая здесь была написана впервые. Несколькими месяцами раньше, 16 апреля 1926 г. Эйнштейн послал теплое письмо Шредингеру:

> Профессор Планк сообщил мне о Вашей теории со вполне оправданным энтузиазмом, и я также изучил ее с огромным интересом [57].

И на полях он добавил [57]:

Идея Вашей статьи свидетельствует о настоящей гениальности.

Однако, какими бы радикальными ни были различия между предпосылками и интерпретацией квантовой и волновой механики, получаемые результаты совпадали, а тогда, когда они отличались от старой квантовой теории, они оказывались вполне согласованными друг с другом. Именно Шредингер был тем человеком, который разгадал тайну и представил великолепное доказательство того, что для написания уравнения волны следует формальным образом избегать физических рассуждений, которые сослужили службу и де Бройлю, и ему самому, и просто заменить в уравнениях *классической* механики привычные величины надлежащим образом определенными *операторами*.

Оператор — это отображение множества на другое множество или на само себя. Например, переезд — это отображение одного дома на другой, но *оператор переезда* не есть множество людей и объектов, переезжающих в другое место, а преобразование, которое, будучи применено к обитателям и вещам дома А, перемещает их в дом В.

Пользуясь этим образом, можно сказать, что если грузчик при переезде ставит ящик с вещами на землю и толкает его, то он действует на этот ящик *оператором трансляции*. Здесь оператором тоже является не ящик и не грузчик, а действие, в результате которого ящик перемещается: другой человек мог бы совершить то же самое действие по отношению к другому предмету. Если грузчик повернет ящик вокруг ребра этого самого ящика, то мы скажем, что он подействовал на него *оператором вращения*, и эти слова опять-таки означают действие поворачивания. Наконец, если грузчик воспользуется лифтом и если мы будем рассматривать этажи дома в качестве различных (двумерных) пространств, то можно говорить, что грузчик подействовал на ящик оператором, осуществившим переход ящика из одного из этих пространств в другое.

Общие определения, примененные к простым примерам, всегда выглядят как бесполезный педантизм, приобретая подлинный смысл только в более сложных случаях. Именно так обстоит дело с операторами квантовой механики, которые действительно упрощают вычисления, подчиняются правилам некоторой алгебры и удовлетворяют некоторым уравнениям. Со времен Гейзенберга и Шредингера операторы прочно обосновались в естественном языке квантовой механики, где можно найти операторы *координаты, трансляции, вращения, перестановки* (в системе частиц), *рождения* и *уничтожения* частиц и еще многие другие. В самом начале у Шредингера были только операторы *координаты* и *импульса*: они соответствовали матрицам Гейзенберга. Ибо секрет эквивалентности двух механик заключается в том, что матрицы Гейзенберга и операторы Шредингера представляют собой одно и то же.

Эта эквивалентность позволяет нам попутно объяснить *некоммутативность* матриц Гейзенберга, алгебраические свойства которых снова обнаруживаются, как нетрудно догадаться, в операторах, геометрические определения которых более интуитивны. Эти свойства проявляются в уже приводившихся простых примерах, как это видно в случае операторов вращения, определенных ящиком или игральной костью (рис. 17), которые переворачиваются вокруг двух не параллельных друг другу ребер. Имеется два вращения на 90° вокруг различных осей, и нетрудно убедиться, что, совершая соответствующую последовательность действий, мы получим различные положения граней игральной кости: *произведение двух вращений в пространстве некоммутативно.*

Напротив, произведение двух трансляций коммутативно. В этом можно убедиться на примере той же игральной кости, перемещающейся в двух различных направлениях: она окажется в одной и той же точке, каков бы ни был порядок действий.

Следовательно, существуют операторы, которые обладают свойством коммутативности, тогда как другие операторы им не обладают. Коммутировать могут даже вращения, если они осуществляются вокруг одной и той же оси, поскольку в этом случае их углы поворота только складываются, и результат этих действий не зависит от порядка их выполнения. Но в качестве общего правила *алгебры операторов некоммутативны,* даже если некоторые частные пары комму-

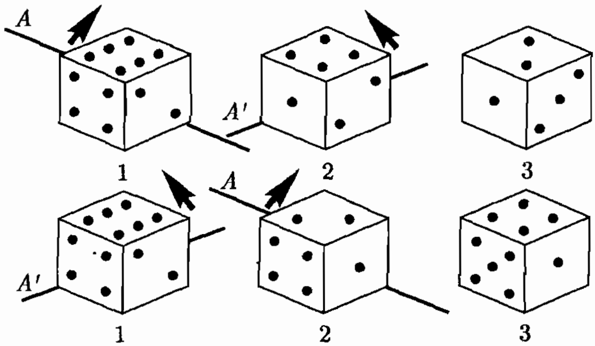

Рис 17. *Начиная с одного и того же положения игральной кости 1, мы получаем положения 3, отличающиеся друг от друга порядком, в котором игральная кость переворачивалась вокруг осей A и A': группа вращений не обладает свойством коммутативности*

тируют. Таким образом, в квантовой механике операторы координаты, введенные Шредингером, коммутируют между собой, и операторы импульса также, но *операторы координаты и импульса, действующие в одном и том же направлении, не коммутируют.* Мы уже нашли те же правила для матриц Гейзенберга или q-чисел Дирака, причем именно это отсутствие коммутации между координатой и импульсом (а следовательно, между координатой и скоростью) и служит основанием для введения постоянной Планка[57].

Шредингер показал, как перейти от языка операторов к языку матриц и как его уравнение преобразуется в матричное уравнение Гейзенберга. Он также раскрыл геометрическое значение этой эквивалентности.

В самом деле, волну волновой механики можно рассматривать как вектор в определенном бесконечномерном пространстве, в котором операторы Шредингера и матрицы Гейзенберга представляют в различной форме одни и те же геометрические преобразования.

[57]Некоммутативность координаты и импульса ведет к знаменитым соотношениям неопределенностей Гейзенберга, которые ограничивают одновременные значения координаты и импульса частицы, откуда и возник спор о детерминизме, в рассмотрение которого мы не вдаемся. Среди большого количества литературы по этой теме назовем [23] и [53].

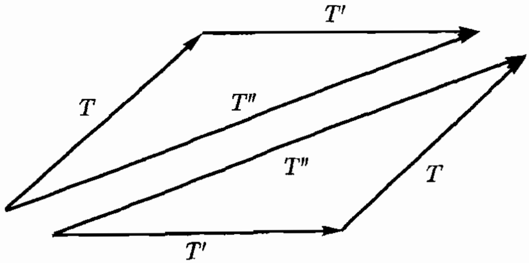

Рис. 18. Результирующий перенос T'' не зависит от порядка, в котором осуществляются переносы T и T'. Группа переносов коммутативна

Следовательно, волновая и квантовая механика тождественны друг другу и действуют в одном и том же пространстве. Именно поэтому обе теории приходят к одним и тем же результатам. Они, скорее, образуют некое единое тело учения под общим названием *«квантовая механика»*, которое мы отныне и будем использовать.

Шредингеру в его первых шагах в квантовой механике помог Герман Вейль, один из величайших математиков XX столетия. Их встреча, воплощение по-настоящему удивительной встречи физики и математики, много значила для развития и понимания квантовой механики. У математиков уже было готовое средство для осмысления новой теории — гильбертово пространство, которое, впрочем, тогда еще не называлось гильбертовым.

Гильбертово пространство

Отдаленные истоки понятия гильбертова пространства восходят к задаче колеблющихся струн (здесь нетрудно увидеть связь с будущей волновой механикой). Уравнение колеблющейся струны было записано Д'Аламбером в середине XVIII века, а другие известные работы по этой проблеме принадлежат Эйлеру, Даниилу Бернулли и Лагранжу. Именно Бернулли получил интересующий нас результат. Как это делали и другие авторы, он рассмотрел задачу колебаний струны в упрощенном виде жемчужного ожерелья, причем жемчужины нанизаны на упругую нить пренебрежимой массы, и концы этой нити закреплены.

Бернулли доказал, что самая общая форма колебаний жемчужного ожерелья сводится к суперпозиции независимых элементарных колебаний, число которых равно количеству жемчужин. Сейчас они называются *нормальными модами колебаний*, и их *собственные частоты* являются целочисленными кратными некоторой основной частоты.

Затем осуществляется переход к предельному случаю однородной струны путем рассмотрения такого ожерелья, количество жемчужин в котором стремится к бесконечности, а масса каждой жемчужины становится бесконечно малой. Колебание струны, как и в предыдущем случае колебаний ожерелья, представляет собой суперпозицию нормальных мод, но теперь *число мод бесконечно*, как и количество жемчужин. Частоты этих мод образуют бесконечную последовательность гармоник, частоты которых кратны основной частоте.

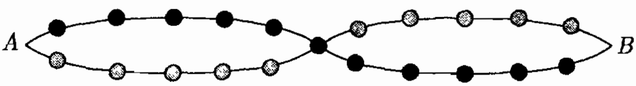

Рис. 19. Ожерелье из колеблющихся жемчужин Д'Аламбера. Представленное движение образует две веретенообразные конфигурации. Часть, обозначенная черными кружочками, изображает мгновенное состояние максимального удаления. Часть, обозначенная серыми кружочками, соответствует максимальному удалению для фазы, противоположной первой

Нормальная мода колебаний струны — это движение, в процессе которого все точки колеблются с одной и той же частотой, отличаясь лишь фазами, что порождает вид последовательности веретенообразных фигур, которые можно наблюдать при рассмотрении колеблющейся струны: налицо последовательность *пучностей*, отделенных друг от друга *узлами*[58].

[58]Иногда можно видеть, как скрипачи извлекают гармоники из струны, осторожно прижимая ее пальцем посередине или на расстоянии одной трети ее длины, что в результате приводит к исчезновению колебаний соответствующей пучности, и позволяет зазвучать гармонике высшего порядка.

Тот факт, что частоты нормальных мод являются целочисленными кратными основной частоты, характерен для струны и других простых колебательных систем вроде органных труб, но появление целых чисел является общим правилом и характеризует всю физику колебаний, включая колебания мембран, колоколов или резонирующих полостей. Это замечание сыграло определяющую роль для де Бройля, наведя его на мысль о том, что целые числа, обнаруживаемые в квантовых явлениях, должны быть связаны с колебаниями, что и привело его к волновой механике.

Но продолжим эту историю. Теория гармонических колебаний породила одно из величайших математических открытий XIX века — теорию *рядов Фурье*, представляющих периодическую функцию (например, колебание струны) в виде суммы гармонических колебаний. Составляющие колебания умножаются на *коэффициенты Фурье*, характеристики той функции, которую хотят представить таким образом. И наоборот, этих коэффициентов достаточно для того, чтобы представить функцию.

Именно ряды Фурье лежат у истоков понятия гильбертова пространства. В самом деле, изучая колебания мембран и различного рода ограниченных пространств, математики выявили собственные колебания различного вида. Однако в начале XX века в другом контексте в математике внезапно возникло нечто новое — *интегральное уравнение Фредгольма*, вместе с которым было неявно введено понятие оператора и в новой форме была выражена проблема колебаний. Благодаря этому уравнению Гильберт заметил, что исследование колебаний мембраны или полости обладает заслуживающим внимания геометрическим значением: оно аналогично исследованию осей симметрии конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы).

Каждой оси конического сечения в геометрическом образе Гильберта соответствует собственная мода колебаний. Но конических сечений недостаточно, поскольку плоская кривая имеет лишь две оси, которым могут соответствовать лишь два колебания. Даже в трехмерном пространстве обобщение конического сечения является не чем иным, как поверхностью второго порядка (эллипсоидом, гиперполоидом или параболоидом), которая может представлять лишь три собственных колебания, соответствующих трем осям симметрии. Следовательно, таким образом можно представить колебания только простой системы, вроде ожерелья, содержащего не больше трех жемчужин.

Для более сложной системы, содержащей большее количество элементов, вроде ожерелья с произвольным количеством жемчужин, необходимо будет ввести пространство произвольной размерности (эта размерность равна количеству жемчужин в ожерелье), и именно в таком пространстве будет обобщено понятие конического сечения, число осей симметрии которого равно размерности пространства. Но если рассмотреть колебания непрерывной среды, вроде струны, мембраны, воздуха в духовых инструментах, электромагнитных волн в ограниченном объеме или волн электрона в атоме, то количество колебаний оказывается бесконечным, и задача требует *исследования осей конического сечения в бесконечномерном пространстве.*

Оси конического сечения или поверхности второго порядка перпендикулярны друг другу независимо от того, какова размерность пространства, включая сюда и тот случай, когда она бесконечна. Следовательно, эти оси образуют удобную систему координат, ортогональность которой позволяет использовать теорему Пифагора и определить квадрат расстояния. В самом деле, в геометрии на плоскости это расстояние можно считать гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат. В трехмерном пространстве расстояние будет диагональю прямоугольного параллелепипеда, и ее квадрат будет равен сумме квадратов трех сторон. В пространстве произвольной размерности все остается по-прежнему, но параллелепипед имеет столько же сторон, сколько измерений у пространства, и, в принципе, число этих измерений может быть бесконечным.

Если пространство имеет бесконечную размерность, квадрат расстояния равен *бесконечной сумме квадра-*

тов, и такая сумма называется рядом. Но всегда ли она имеет смысл? Нет, и в этом можно убедиться, пытаясь, например, сложить бесконечное число членов, каждый из которых равен единице: их сумма, очевидно, бесконечна, и мы не можем ничего с этим поделать. Однако представим себе сумму членов, которые убывают, все больше приближаясь к нулю (но не становясь нулевыми, иначе ряд больше не был бы бесконечным). Тогда сумма может быть конечной величиной, как доказывает пример, связанный с парадоксом Зенона. Возьмем вазу, заполненную водой, и отольем из нее половину, затем половину того, что осталось (следовательно, четверть), затем половину этой четверти (одну восьмую), затем половину одной восьмой и т.д. Следовательно, мы исчерпаем бесконечный ряд убывающих объемов воды, каждый из которых равен половине предыдущего, но сумма этого ряда конечна, поскольку она равна содержимому вазы. Мы можем придать смысл бесконечной сумме членов, только если она обладает этим свойством: говорят, что ряд *сходится*. В бесконечномерных пространствах, которые здесь рассматриваются, мы скажем, что вектор — ориентированный отрезок — принадлежит к пространству, если его длина конечна и, следовательно, согласно теореме Пифагора, если сумма его координат, возведенных в квадрат, конечна. Совокупность таких векторов, удовлетворяющих некоторым другим условиям, называется *гильбертовым пространством*. Но все еще более усложняется, потому что векторы этого пространства являются не обычными геометрическими объектами, как стрелки, которые можно нарисовать на классной доске, а *функциями*, которые в простейших случаях представляют колебания, подобно гармоникам, появившимся у Бернулли и Фурье. Эти ряды периодических или непериодических функций всегда называются *рядами Фурье*, и их суммы представляют векторы в гильбертовом пространстве.

Теория гильбертовых пространств была уже хорошо разработана в двадцатые годы, и потому она была готова принять в свой контекст квантовую механику, точно так же, как геометрия римановых пространств казалась готовой для использования в теории относительности. Заслуга создания алгебры операторов в этом пространстве и придания квантовой механике математической формы в знаменитой работе [58] принадлежит Джону фон Нейману.

Понятно, почему это начинание было обречено на успех, — потому, что теория гильбертова пространства была порождена общей теорией колебаний. Итак, благодаря волновой механике сама квантовая механика предстала как теория колебаний. Со времен Шредингера квантовая система вроде атома представляет собой не что иное, как ограниченное пространство, внутри которого волна де Бройля находится в стационарных состояниях, соответствующих нормальным модам физики колебаний. Квантовые значения энергии и других физических величин суть собственные частоты этих нормальных мод, разновидности музыкальных нот, связанных с квантовыми состояниями атома.

Геометрическое представление квантовой механики в гильбертовом пространстве основывается на том, что операторы Шредингера (или матрицы Гейзенберга), связанные с физическими величинами нашего пространства, *в гильбертовом пространстве задают определенное коническое сечение (эллипс или гиперболу)*, являющееся характеристическим для оператора и, следовательно, для физической величины. Конечно, в общем случае речь идет о «конических сечениях» в пространстве бесконечной или, по крайней мере, большой размерности, но для большей простоты мы здесь сохраняем язык геометрии на плоскости, который позволяет иметь дело с геометрическими фигурами. Еще больше упрощая, мы предположим, что рассматриваемое коническое сечение является эллипсом[59].

Это коническое сечение (эллипс) своими осями определяет все то, что относится к рассматриваемой физической величине: 1) число осей соответствует количеству кванто-

---

[59]Мы еще больше все упростим, пренебрегая тем фактом, что вычисления в квантовой механике приводят к использованию *мнимых* чисел. Но значения физических величин в соответствии с опытом вещественны, потому что квантовые операторы являются *эрмитовыми*, т.е. обладают свойством, которое мы не будем рассматривать.

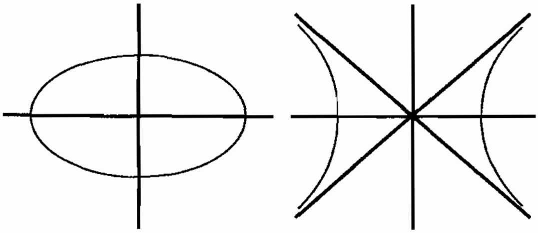

Рис. 20. Эллипс и гипербола с их осями

вых значений (или числу *собственных значений*), которые может принимать величина; например, на плоскости эллипс определяет два значения; 2) длина осей обозначает сами значения; 3) наконец, ориентация определенной оси определяет *квантовое состояние*, в котором находится система, когда физическая величина принимает соответствующее *собственное значение*.

Следовательно, задача квантования сводится к определению конического сечения (в общем случае бесконечномерного): это то, что называется *диагонализацией оператора или матрицы*. Теперь мы в состоянии понять общую причину и физический смысл того, что некоторые операторы коммутируют, а некоторые — нет.

Выберем некоторую физическую величину (например, энергию), представленную оператором, который задает определенный эллипс, по крайней мере, в нашем простом случае. Все это происходит так, словно у нас есть окружность, которую оператор деформирует, превращая в эллипс путем растягивания (или сжатия) в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые совпадают с осями эллипса. В действительности же это мы осуществляем такие деформации, поскольку для измерения физической величины мы должны *подготовить* атомную систему таким образом, чтобы она могла иметь ансамбль только таких состояний, что сам факт фиксации системы в одном из этих состояний позволяет нам вывести определенное значение физической величины. И поскольку рассматриваемые физические состояния представлены собственными значениями оператора, то *предсказание квантовых состояний и измеряемых величин означает предсказание ориентации и длины осей эллипса.*

Если мы обнаружим, что система находится в состоянии, соответствующем одной из двух осей, то мы узнаем ее длину и, следовательно, значение, принятое той величиной, которую мы хотим измерить. Итак, именно направление и степень растяжения гильбертова пространства, вызванного оператором, позволяют предсказать результат измерения.

Теперь выберем другую величину, представленную другим оператором. Сначала предположим, что новый оператор преобразует окружность (в нашем случае всегда ограниченную) в коническое сечение, имеющее те же оси, что и прежде, хотя и с другим растяжением (иначе это был бы тот же самый оператор). Если после первого оператора мы подействуем вторым, то он не изменит оси уже полученного конического сечения, поскольку это его собственные оси. Он лишь растянет каждую ось в соответствии со своей мерой, и произведение действий сведется к растягиванию общих осей их репрезентативных эллипсов. Итоговое растяжение равно произведению растяжений, вызванных каждым из операторов. Следовательно, это произведение будет произведением обычных чисел, и оно не зависит от того порядка, в котором оно производится: операторы коммутируют.

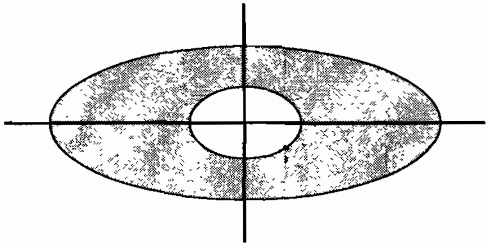

Рис. 21. Два соосных эллипса с различными эксцентриситетами

Предположим, что в результате измерения одной из двух физических величин, соответствующих этим операторам, обнаружено, что система находится в определенном квантовом состоянии и, следовательно, «на» одной из осей конического сечения. Эта ось приписывает физической величине собственное значение, которое соответствует растяжению вдоль этой оси. Теперь произведем измерение другой величины: новый оператор, поскольку у него те же самые оси, вызовет лишь присущее ему растяжение. Состояние системы не изменится, и можно будет измерить в том же самом состоянии соответствующие значения обеих величин: таким образом, они *могут быть измерены одновременно.*

Теперь предположим, что второй оператор задает коническое сечение, имеющее *оси, не совпадающие* с осями первого оператора (тогда говорится, что *операторы имеют различные собственные значения*). Если последовательно подействовать обоими операторами, то второй оператор будет действовать уже не на сферу (она была деформирована) и не на коническое сечение, имеющее те же оси, что и его собственные. Результат окажется намного более сложным, чем прежде: в сущности, мы еще будем иметь коническое сечение, но оно, в отличие от обоих предыдущих случаев, будет повернуто и, кроме того, мы не получим той же фигуры, если поменяем порядок, в котором мы применяем операторы.

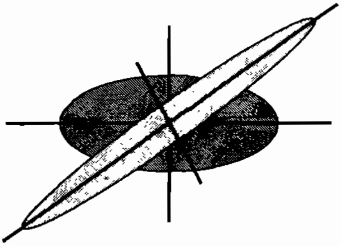

Рис. 22. Два эллипса с различными эксцентриситетами и различными осями

Следовательно, если два оператора не задают одни и те же оси симметрии (тогда говорят, что у них различные собственные состояния или *собственные векторы*), то они *не коммутируют.*

Теперь рассмотрим измерение физической величины, представленной первым оператором, и предположим, что это измерение допускает пребывание системы в определенном собственном состоянии, соответствующем этой величине, и, следовательно, на одной из осей конического сечения, которое задано этим оператором. Теперь подействуем вторым оператором, который представляет измерение другой величины.

Этот оператор будет действовать, как и прежде, на ось, на которой находится система, но с тем отличием, что эта ось, определенная первым оператором, *больше не является* одной из его собственных осей, вследствие чего фигура полностью изменится. Поскольку осей, общих для обоих эллипсов, не существует, то больше нельзя обнаружить систему находящейся в том же самом состоянии, которое позволяло бы приписать определенное значение двум физическим величинам. Иначе говоря, мы больше не можем начать с измерения одной из величин, имеющей некоторое собственное значение, а затем измерить другую величину, приписывая ей собственное значение, которое соответствовало бы тому же самому состоянию: *две величины не могут быть измерены одновременно*, и они представлены *операторами, некоммутативными* в гильбертовом пространстве.

Глубинная причина существования величин, которые не могут быть измерены одновременно, — что, как уже говорилось, лежит в основании соотношений неопределенностей Гейзенберга — это дуализм волн и корпускул, который не является предметом рассмотрения этой книги. Но мы только что видели, как этот глубокий физический факт выражается в теории с помощью удивительно абстрактного геометрического образа. И мы еще крайне упростили его! Нельзя не восхищаться тем, что весьма абстрактные математические концепции могут использоваться для описания и учета реальных физических свойств, и в то же самое время не испытывать некоторого смутного беспокойства из-за того, что в современной физике экспериментально исследуемая реальность слишком далеко отстоит от ее теоретической интерпретации.

Глава VIII

КАК СИММЕТРИЯ ПРОЯВИЛАСЬ В ФИЗИКЕ

> Я думаю, что было бы интересно ввести в изучение физических явлений соображения симметрии, привычные для кристаллографов.
>
> Пьер Кюри [59]

> Насколько я знаю, все физические результаты *a priori* имеют свои источник в симметрии.
>
> Герман Вейль [60]

Симметрия, всегда известная, но поздно понятая

Дадим сначала общее определение из словара *«Petit Larousse»* (1952 г.): «*Симметрия* — соразмерное расположение тождественных друг другу частей в виде некоторой целостности. Гармония, возникающая из определенных комбинаций и правильных пропорций».

Слово «соразмерность» прекрасно выявляет универсальность этого понятия, которое повседневный язык неоправданно ограничивает зеркальным подобием. Слово «гармония» подчеркивает эстетические коннотации, которые мы соотносим с «симметрией». Понятая таким образом, идея симметрии кажется глубоко укорененной в человеческом мышлении. Любопытно, что она начала играть важную роль в науке лишь с середины XX столетия, но роль эта не связана с теми блестящими достижениями, о которых мы говорили. Однако если мы коснемся искусства, то нет такой цивилизации, которая не была бы близко знакома с симметрией, как явно, так и неявно используя ее в своих творениях, — и даже в процессе их разрушения путем отказа от молчаливо принятого образца, предоставляя глазу или уху неожиданные формы или звуки. Симметрия обнаруживается во всех областях искусства — в живописи, скульптуре, архитектуре, градостроительстве, музыке, поэзии, в театральных и кинематографических мизансценах, декоративном искусстве. В нашу задачу не входит, впрочем, рассмотрение этой темы, однако ей посвящено множество других работ ([5], [61], [62], [63]). Мы приведем лишь некоторые примеры.

Каждый может вспомнить о совершенной симметрии египетской живописи, греческих ваз, арабских мозаик, индийских фризов, о прекрасной симметрии собора св. Петра в Риме или Дома Инвалидов в Париже, о симметрии фасада Института Франции, которая скрывает асимметричные крылья, об искусно нарушенной симметрии Страсбургского собора или арки Дефанс (Обороны), ось которой расположена под углом к оси Триумфальной арки.

Хотя в живописи симметрия никогда не была совершенной, иногда она бывает явной, как в «Тайной вечере» по причине соответствующего числа апостолов, хотя в картине Леонардо да Винчи симметрия лишь целостна. Однако чаще в живописи симметрия более или менее скрыта, и это одновременно наука и разновидность игры, которая состоит в обнаружении симметрии в качестве некоей глубинной структуры, отражающей тайное намерение живописца [63]. Существуют также различные виды скрытой симметрии в архитектуре, например, внутренняя радиальная симметрия так называемого «сияющего города» вблизи Марселя, где Ле Корбюзье изобрел искусную периодичность различных типов квартир, что предоставило их разработчику достаточную повторяемость для упрощения его труда, но одновременно вызывает у жильца неосознанное впечатление, что он обитает в неповторимой квартире.

В поэзии симметрия всегда была важным элементом, за исключением нынешней эпохи, когда она часто нарушается: чем были бы ритм, рифма, условные форма сонета или баллады или, более общо, просодия и метрика, если бы не законы симметрии? Можно указать на крайний случай обтекаемой формы «Джиннов», где Гюго от строфы к строфе сначала заставлял расти, а затем уменьшаться число стихотворных стоп, чтобы подчеркнуть ту тишину и ту тайну, которые окружают появление джиннов в ночи, противопоставляя их шуму и гаму присутствия джиннов. Что касается музыки, то она по своей природе является прибежищем симметрии, будь это в гармонии, ритме, правилах композиции или оркестровки. Здесь тоже обнаруживаются крайние случаи, в частности, некоторые произведения Баха или Моцарта, обратный порядок нот в которых обладает симметрией относительно «центра». Более общо, симметрия тем, повторов — и, следовательно, «переносов» — встречается очень часто. В оркестровке симметрия инструментов или групп инструментов отсылает почти к тем же самым темам. Однако следует заметить, что ухо, в отличие от глаза, довольно редко замечает симметрию одновременных элементов, оно реагирует, скорее, на симметрию элементов, следующих друг за другом через бóльшие или меньшие промежутки времени. Зато оно прекрасно замечает искусные изменения этой симметрии.

Чтобы осмыслить роль, которую симметрия играет в науке, нужно вспомнить о ее роли в искусстве, поскольку именно благодаря эстетическому вкусу человек впустил симметрию в свое восприятие мира, или, более общо, речь идет о той повторяемости, которая образует саму сущность понятия *физического закона*. Однако в течение тысячелетий, за редкими исключениями, вроде упомянутого в главе I рассуждения Аристотеля о том, что Земля — круглая, это исследование оставалось лишь предварительным и редко выходило за границы стадии метафоры. Дело в том, что для придания законам симметрии роли некоторого исследовательского инструмента необходимо было понять ее математические законы. Значит, это открытие произошло поздно, поскольку оно датируется лишь XIX веком.

Долгое время люди довольствовались обнаружением некоторых видов симметрии в природе — таких, как симметрия зеркального отражения, или аксиальная симметрия человеческого тела и большинства животных, или центральная симметрия цветов, кристаллов и некоторых морских существ (вроде иглокожих), но эти наблюдения не позволяли объяснить соответствующие явления.

Только космогонические теории основывались на законах симметрии. Мы видели два образца такого подхода — теорию элементов Платона и систему мира Кеплера. Обе они основывались на представлении о правильных многогранниках в трехмерном пространстве, знаменитых *телах Платона*. Но эти несомненно великолепные теории имели существенные слабые места. Теория Платона была чисто метафорической и не могла считаться (даже частично) настоящим научным объяснением свойств тех «элементов», которые рассматривал Платон. Что касается теории Кеплера, располагавшей известные эпохе планеты внутри пяти правильных многогранников, то, в принципе, она могла привести к открытию некоторых новых свойств пространства, времени или тяготения; этого, впрочем, не случилось. В частности, преимущества, которые ей давало ограничение количества планет, обратились против нее самой: из-за этого ограничения она становилась не способна открыть новые планеты (что и произошло в действительности).

Первые шаги теории симметрии. Открытие атомных решеток как основы правильной формы кристаллов

То, что составляло несчастье космогонии Кеплера (ее не следует путать со знаменитыми законами движения планет), оказалось, напротив, достижением для кристаллографии, которой все удалось и которой принадлежит честь создания условий для триумфа законов симметрии в физике. Как и в системе мира Кеплера, законы симметрии кристаллов *a priori* ограничивали число возможных кристаллических форм, но на этот раз опыт подтвердил предсказание, и все кристаллы были классифицированы на основе этих законов (мы проследим, как это происходило вплоть до нашего времени). Точно так же можно было ожидать, что и в космогонии симметрия кристаллических форм откроет некую потаенную структуру материи. Но если космогония обманула эти надежды, то кристаллография их оправдала и внесла свой вклад в триумф одной из величайших научных гипотез — *атомистической гипотезы*.

Кеплер был так убежден в важности геометрических закономерностей, что стал отдаленным предшественником представлений о симметрии кристаллов, изложив свои соображения в небольшой работе, которая опубликована в 1611 г. и среди его трудов стоит особняком. В этой работе он ставит вопрос о формах кристаллов, в частности, о снежинках, и пытается объяснить эти формы, представляя кристаллы как совокупность слоев маленьких плотно упакованных сфер, что опять-таки было отдаленным предвосхищением атомистической структуры. Идея была вновь использована Гюйгенсом в его *«Трактате о свете»*, в котором большая глава посвящена «странному преломлению в кристалле исландского шпата»: речь шла о двояком лучепреломлении, открытом Бартолином, которое Гюйгенс объяснял с помощью своей волновой теории. Чтобы объяснить разделение падающего света на *два* луча, преломившихся внутри кристалла, он предположил, что корпускулы, на которые ссылался Кеплер, являются не сферическими, а яйцеобразными. Это было первой идеей об учете природы молекул при изучении симметрии кристаллов, хотя эти слова явно не фигурируют в тексте. Нужно было ждать еще два столетия, прежде чем эта идея получила признание.

Первый шаг был сделан Стеноном, современником Гюйгенса, заметившим, что у кварца и некоторых других кристаллов всегда сохраняется один и тот же угол между кристаллическими гранями, независимо от величины кристалла. Однако это наблюдение не привлекало особого внимания до того момента, как в 1772 г. Роме де Лиль обобщил его на основе изучения большого количества минералов и понял, что рассматриваемые углы характеризуют кристаллические формы. Спустя несколько лет (в 1784 г.) эта идея послужила основанием работы Рене Жюста Гаюи, подлинного отца минералогии.

Гаюи начал с распространения на все кристаллы вывода из важного наблюдения, сделанного Бергманом при изучении кальцита. Он доказал, что все вторичные формы кристалла, встречающиеся в природе (а они могут быть весьма разнообразными) в действительности образуют различные комбинации одного и того же «ядра», разновидности примитивной кристаллической формы, характерной для того строения кристалла, которое он может приобрести при раскалывании. Таким образом, для кальцита этим ядром является ромбоэдр, который, впрочем, встречается в природе, поскольку исландский шпат ромбоэдричен, но другие разновидности кристаллов не таковы, и их нужно раскалывать для того, чтобы снова обнаружить примитивную форму.

Затем Гаюи открыл, что если разбить такое ядро, то получаются все более мелкие кристаллы, имеющие, однако, ту же самую форму, потому что свойством самого этого ядра является обладание окончательной формой: например, ромбоэдр раскалывается на ромбоэдры меньшего размера. Но Гаюи также понял, что этот процесс нельзя продолжать до бесконечности. Он предположил, что если попытаться это сделать, что процесс закончится получением некоей разновидности элементарного кристалла минимальных размеров, который называется «составляющей молекулой» [16], [62], [64], [65]: в случае кальцита она состоит из нескольких молекул (в химическом смысле термина) карбоната кальция.

Наконец, Гаюи предположил, что кристаллы всегда образуют упорядоченные *наслоения* элементарных кристаллов, разновидность скопления элементарных ядер, которые расположены периодически. Таким образом он объяснил существование различных природных кристаллических форм и их свойств расслоения (сланцеватости). Отталкиваясь от своего образа наслоения, он также показал, что в природе могут существовать только кристаллы, имеющие оси симметрии порядка 2, 3, 4 и 6, а порядок 5 невозможен, равно как и порядки выше 6. Мы еще вернемся к этому важному пункту. Гаюи определил также важные понятия *кристаллической решетки* и *элементарной ячейки*.

Казалось, чтобы подойти к идее атомистического строения кристаллов, достаточно сделать лишь один шаг, но это требовало гениального усилия, и понадобилось еще сорок лет для того, чтобы наконец в 1824 г., когда Дальтон завершил свое великое сочинение, *«Новую систему химической философии»*, ученый, несправедливо забытый историей, Людвиг Августус Зеебер, сделал этот шаг. Смело перебросив мост между работами Гаюи и Дальтона, Зеебер выдвинул гипотезу о том, что *кристаллическая решетка* состоит из атомов, оценил межатомные расстояния и установил связь своей гипотезы со свойствами упругости и расширением твердых тел при нагревании. Чтобы оценить то, что Макс фон Лауэ считал научным подвигом [65], следует напомнить, что все это происходило более чем за тридцать лет до того, как атомистическая гипотеза стала играть существенную роль в физике (вместе с кинетической теорией газов). Следует также напомнить, что атомистическая гипотеза лишь к началу XX века преодолела то сильное сопротивление, с которым она долгое время сталкивалась. В течение двадцати четырех лет после Дальтона и Зеебера такие выдающиеся химики, как Бертло, и такие физики, как Мах или Дюгем, даже слышать ничего не хотели об атомах.

Для того, чтобы доказать точность представлений Зеебера о кристаллах, понадобились, конечно же, не только воображение и новые технические средства, но и независимость и великая вера в атомизм: заслугой фон Лауэ были именно последовавшие одно за другим в 1912 г. теоретическое предсказание и экспериментальное доказательство дифракции рентгеновских лучей на кристаллах. Он одним выстрелом убил двух зайцев, одновременно доказав и волновую природу рентгеновский лучей (в чем прежде сомневались), и существование кристаллических решеток вместе с их атомной структурой, объединив в одном опытном факте концепции Гаюи и Зеебера.

Кристаллические решетки стали играть еще более важную роль с момента открытия Луи де Бройлем волновых свойств материи. Дифракция электронов и нейтронов дополняет факт дифракции рентгеновских лучей при изучении твердых тел. В частности, учет свойств электрона лежит в основе современной теории кристаллических решеток. Можно сказать, что если очевидная симметрия кристаллов уже сама по себе является замечательным фактом, то их внутренняя симметрия имеет еще большее значение. Как говорил Герман Вейль [60]:

> ...реальная физическая симметрия кристалла намного слабее раскрывается в ее внешнем аспекте, чем во внутренней физической структуре кристаллической субстанции.

Без *открытия* кристаллических решеток мы не смогли бы понять строение кристаллических форм, но точно так же верно и то, что видимые проявления вещей становятся понятными лишь при проникновении внутрь этих самых вещей.

Симметрия кристаллов и теория групп

Математические аспекты кристаллографии выражаются через посредство теории групп, и, следовательно, *теория групп — это симметрия в движении.*

Чтобы понять смысл этой формулировки, уточним идею симметрии. Сначала можно рассмотреть ее в статике, то есть как установившийся порядок вещей: будем говорить, что некоторый объект или некоторая фигура обладает определенной симметрией, если их подобные части могут быть наложены друг на друга или если они являются зеркальными образами друг друга. Это свойство с очевидностью проявляется у тел Платона или у правильных многогранников.

Но можно взглянуть на вещи иначе. Вместо того, чтобы констатировать равенство или зеркальное соответствие различных фигур, можно представить себе *преобразования* или *отображения*, переводящие одни фигуры в другие. Таким образом, в кристаллографии вводятся преобразования, называемые *конгруэнциями*, включающие в себя *вращения* и *переносы* пространства и зеркальные *симметрии*[60]. Заметим, между прочим, что симметрия относительно прямой является в действительности вращением на 180^0, произведением симметрий относительно взаимно перпендикулярных зеркал (как пол и стены в углу комнаты).

Именно динамический язык преобразований приводит симметрию в движение и ведет к понятию *группы*. Совокупность преобразований образует *группу* при соблюдении следующих условий:

[60]Заметим, что термин *«симметрия»* охватывает собой все преобразования, которые «что-то сохраняют» (что именно — уточняется впоследствии). В кристаллографии это слово часто сохраняет свой особый смысл, но *«симметрии кристалла» обозначают* все преобразования, сохраняющие его форму.

— *произведение* двух преобразований группы должно принадлежать к группе;

— преобразование, *обратное* некоторому преобразованию, должно принадлежать к группе, равно как и *нейтральное,* или *тождественное,* преобразование;

— наконец, произведение должно быть *ассоциативным* для того, чтобы в произведении многих преобразований можно было заменить часть множителей их частичным произведением.

Если некоторая часть таких преобразований подчиняется тем же критериям, то она образует подгруппу.

В главе VII мы уже встречались с группой переносов и группой вращений в связи с рассмотрением понятия оператора. Оператор — это не что иное, как математическое выражение того, что мы здесь называем преобразованием. Не говоря об этом явно, мы в этом случае уже доказали, что переносы образуют группу, поскольку произведение двух переносов есть перенос. Мы видели также, что эта группа *коммутативна*, потому что переносы могут производиться в произвольном порядке (говорится, что это *абелева группа*, по имени математика Абеля).

Если вращения производятся вокруг одной и той же оси, то их углы, точно так же, просто прибавляются друг к другу и вычитаются друг из друга, и они коммутативны, как и переносы. Но все обстоит не так, когда вращения происходят вокруг различных осей, даже если они проходят через некоторую неподвижную точку. Конечно, вращения образуют группу, *группу пространственных вращений*, или *пространственных перемещений, сохраняющих некоторую точку*[61], но эта группа *некоммутативна*, как

[61]Определение группы вращений указывает лишь на неподвижную точку, но всегда существует и неподвижная ось. В самом деле, сфера с центром в некоторой неподвижной точке остается инвариантной, и вращение заставляет фигуры, начерченные на ее поверхности, скользить без изменения их формы. В частности, меридиан преобразуется в меридиан. Тогда либо оригинал и тот, который получен в результате преобразования, совпадают, и, следовательно, их общей осью является ось вращения, либо они не совпадают, и тогда они пересекаются в противоположных точках, остающихся инвариантными, но, поскольку это верно для сферы любого радиуса, то эти две точки определяют неподвижную ось.

мы об этом знаем из примера переворачивания ящика (глава VII).

Вернемся к рассмотрению кристаллической решетки. Сперва заметим, что любой перенос *не оставляет* решетку инвариантной: еще требуется, чтобы он помещал каждый атом кристалла в то место, которое прежде было занято другим атомом. Такие переносы кратны элементарным переносам, определенным ячейкой решетки[62]. Аналогично, все вращения не оставляют решетку инвариантной: годятся лишь отдельные углы. Эти вращения вокруг данной оси, кратные элементарным вращениям (поскольку по завершении конечного числа этих вращений вновь получается исходное положение), образуют *конечную группу*. Число различных вращений, содержащихся в группе (ее *порядок*) равен числу сторон правильного многоугольника, остающегося инвариантным для рассматриваемой группы. При порядке 3 — это равносторонний треугольник, при порядке 4 — квадрат, при порядке 6 — шестиугольник. Следовательно, соответствующие *оси вращения* имеют порядок 3, 4 или 6. Порядок 2 соответствует элементарному вращению на 180^0 и, следовательно, *обороту* вокруг оси, и правильный многоугольник, соответствующий такому вращению, — это лента с параллельными краями.

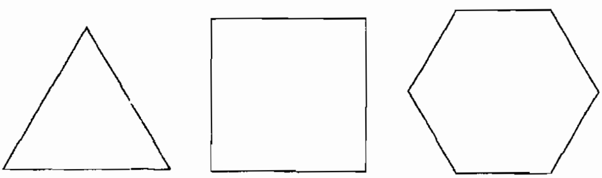

Рис. 23. Фигуры замощения плоскости: равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник

Как мы уже говорили, приведенные нами примеры исчерпывают список конечных групп вращения, которые

[62]Чтобы понять это, можно представить ячейки кристаллической решетки в виде ячеек рыболовной сети, но в трех измерениях пространства (параллельные сети размещены рядом друг с другом). Узлы, вершины ячеек, соответствуют настоящим узлам рыболовной сети.

существуют в мире кристаллов! В самом деле, нетрудно показать, что группа инвариантности кристаллической решетки, вследствие того, что она содержит одновременно переносы и вращения, может иметь оси вращения только порядков 2, 3, 4 и 6. В природе нельзя найти кристаллические грани в форме правильного пятиугольника или в форме многогранника, число сторон которого больше шести, и было бы интересно понять, почему это так (даже если впоследствии мы должны будем указать на нарушение правила).

Для этого рассмотрим на плоскости, на которой нам известны решетки, аналогичные кристаллическим, замощение, состоящее из *тождественных друг другу* кафельных плиток. Перечисление возможных форм этих плиток не потребует много времени, поскольку этих форм всего четыре. В самом деле, возможно замощение — даже если оно никогда не будет использовано — порядка 2 (в форме параллельных лент), порядка 3 (в форме равносторонних треугольников), порядка 4 (в форме квадратов) и порядка 6 (в форме шестиугольников, как французские закусочные сырки). Но не существует других форм, поскольку это невозможно. Мы собираемся доказать это двумя разными способами, используя в качестве примера правильный пятиугольник, потому что его отсутствие кажется странным, как какой-то пропуск в списке.

Начнем со статического рассмотрения одного из возможных замощений — замощения шестиугольниками. Возьмем две кафельные плитки, имеющие некоторую общую сторону (рис. 24).

Правильный шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников, и его углы в вершине равны $60^0 \times 2 = 120^0$. Следовательно, два шестиугольника, имеющие общую вершину, образуют угол $120^0 \times 2 = 240^0$, и остается $360^0 - 240^0 = 120^0$, что позволяет приложить еще один шестиугольник и продолжить замощение. Тот же результат получается в случае замощения квадратами. Что касается случая равностороннего треугольника, то он содержится в случае шестиугольника, который состоит из таких треугольников.

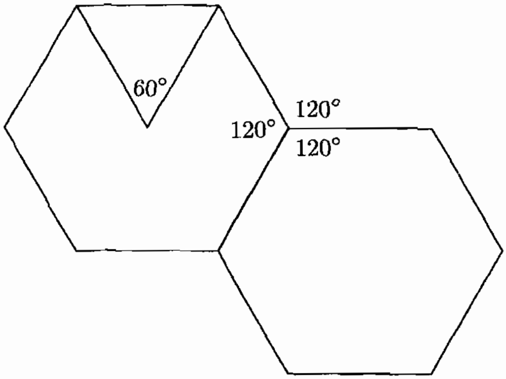

Рис. 24. Начало замощения плоскости шестиугольниками. Первые два элемента определяют углы нового шестиугольника, что позволяет продолжать замощение

Но если мы проведем такое же рассуждение применительно к двум примыкающим друг к другу пятиугольникам, то получится следующее: угол у вершины правильного пятиугольника равен 108^0, и следовательно, угол, образуемый двумя пятиугольниками у их общей вершины, — это $108^0 \times 2 = 216^0$. Тогда остается $360^0 - 216^0 = 144^0$, и, поскольку этот угол отличен от 108^0, то замощение на этом и заканчивается. То же самое будет и в случае многоугольников порядка больше 6.

Теперь, если читатель готов совершить небольшое усилие, чтобы проследить за очень простым математическим рассуждением, то он получит удовольствие от созерцания той же картинки, но не в статической форме замощения, а в виде движущегося образа теории групп. Возьмем снова те же два пятиугольника (рис. 25) и предположим, что они принадлежат периодической решетке. Следовательно, центр каждого из них будет центром симметрии порядка 5 для всей решетки, и это означает, что решетка остается инвариантной, если мы ее повернем на одну пятую часть оборота, например, вокруг центра *O*. Теперь рассмотрим одну из двух вершин, общих для обоих пятиугольников, — скажем, точку *A*. Поскольку это узел решетки, то, когда он повернется на одну пятую полного оборота вокруг центра *первого* пятиугольника, он перейдет

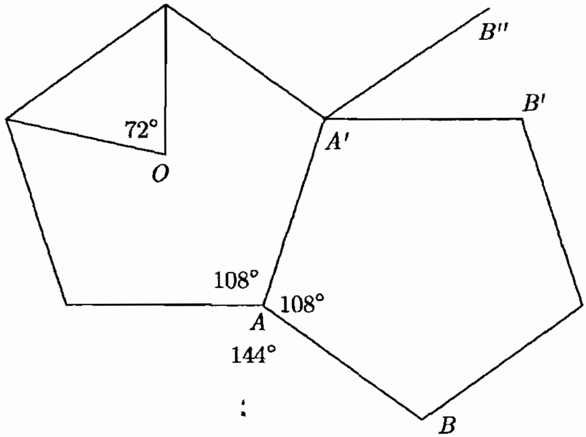

Рис. 25. Попытка замостить плоскость пятиугольниками. Два первых элемента задают угол, отличный от угла у вершины правильного пятиугольника. Замощение не может быть продолжено. Если при вращении вокруг точки O точка A переходит в точку A', то точка B переходит не в B', а в B'', которая не является узлом решетки

в другой узел A', и мы выберем *направление* вращения таким образом, чтобы точка A' совпадала с другой вершиной, общей для двух пятиугольников. Но посмотрим теперь на *второй* пятиугольник, вершины B и B' которого соседствуют по прямой с A и A', соответственно. Они также являются узлами решетки и остаются ими в ходе вращения, но на чертеже видно, что узел, находившийся сначала в B, не приходит в B', но совмещается с другим узлом, скажем, B'', и видно также, что каждый из углов OAB и $OA'B''$, получающихся один из другого в результате вращения, равен тройной величине половины угла при вершине пятиугольника: $54^0\times3=162^0$. Но как располагается наша новая вершина по отношению к B'? Видно, что угол $OA'B'$, как и угол $OA'B''$, равен 162^0, но при вращении в обратном направлении. Следовательно, угол $B'A'B''$ равен $360^0-2\times162^0=36^0$, и отсюда легко получить расстояние $B'B''$ как функцию расстояния $A'B'$. Получается $B'B''=0{,}618A'B'$. Итак, $A'B''$ — это расстояние между двумя следующими один за другим в элементарной ячейке атомами, и $B'B''$

также должно быть расстоянием между двумя атомами решетки, но оно оказывается значительно меньшим! Возобновляя то же вращение, мы могли бы таким образом найти в кристалле атомы, сколь угодно близкие друг к другу: следовательно, эти расстояния должны были бы быть бесконечно малыми, что находится в противоречии с предположением об атомистической структуре материи. Итак, *либо симметрии порядка 5 не существуют, либо следует отказаться от атомистической гипотезы.*

Этот тип рассуждений кажется более сложным, чем элементарное геометрическое рассуждение о замощении, но зато можно придать ему систематическую форму, и его польза заключается в показе природы рассуждений теории групп в ходе описания кристаллических решеток. Возможные группы инвариантности — это такие группы, что вызываемые ими преобразования «замыкаются» в самих себе и оставляют решетку инвариантной. Мы не будем здесь приводить номенклатуру кристаллических форм[63]. Ограничимся лишь указанием на некоторые важные пункты.

Мы видели, что число кристаллических форм ограничено условиями инвариантности кристаллической решетки относительно определенных групп преобразований (вращений, переносов, симметрий). Подчеркнем еще и то, что если бы решетки не было, если бы вопрос переноса не ставился, то могли бы существовать оси симметрии любого порядка. Число возможных вращений ограничено необходимостью примыкания ячеек решетки друг к другу: именно инвариантность при переносе ограничивает инвариантность при вращении. Чтобы убедиться в этом, укажем на открытие (сделанное в конце восьмидесятых годов XX века) молекул углерода C_{60}, состоящих из шестидесяти атомов углерода, расположенных в шестидесяти вершинах усеченного икосаэдра. Можно сказать, что такая молекула похожа на футбольный мяч. Тогда получается, что этот мяч замощен шестиугольниками и *пятиугольниками*! Но таким образом у атомов есть «право» располагаться в вер-

[63]Эту номенклатуру можно найти в трактатах по минералогии. Герман Вейль дал блестящее резюме в [60].

шинах пятиугольника, поскольку речь идет не о периодической решетке, а о молекуле. И в самом деле, когда такие молекулы образуют кристалл и, следовательно, решетку, она обладает кубической симметрией и никоим образом не может обнаруживать свойства симметрии порядка 5. Итак, разница между молекулой и кристаллом заключается в том, что в кристалле атомы образуют периодическую решетку.

Будучи ограниченным самим существованием решетки, число комбинаций вращений равно тридцати двум. Такое ограничение имеет следствием то, что существует только пять выпуклых правильных многогранников (тел Платона), о чем знали уже греки.

Если теперь мы рассмотрим совокупность вращений и переносов, ограниченных таким образом, то общее число групп инвариантности заметно увеличится: их будет двести тридцать. Заслуга их открытия во второй половине XIX века принадлежит, в основном, Бравэ, Зонке, Жордану, Федорову и Шенфлису (два последних исследователя дали полную номенклатуру). Но не следует думать, что в природе существует только двести тридцать кристаллических форм. В действительности, при всем уважении к законам симметрии, их число намного больше, потому что оно зависит еще от физических условий роста кристаллов, что порождает весьма разнообразные кристаллические ячейки, как об этом уже догадывался Гаюи. Отсюда и возникает огромное разнообразие природных форм, что свидетельствует о хорошо известном многообразии кристаллов, из которых состоят снежинки.

Тем не менее, из этого следует, что «скелет» кристаллов ограничен инвариантностью группы кристаллической решетки, и это хорошо подтверждено опытом, в частности, дифракцией рентгеновских лучей и электронов. И для атомистической гипотезы, и для теории групп такое экспериментальное подтверждение было победой, которую нельзя рассматривать как что-то само собой разумеющееся под тем предлогом, что победа эта включена в принимаемую нами сегодня картину мира. Физика — экспериментальная наука, и нет ни такой гипотезы, ни такой теории, которые имели бы абсолютное значение. Все подвергается пересмотру, всякий раз проходя новую экспериментальную проверку, даже если теория проверена так же хорошо, как теория симметрии кристаллов. Доказательством может послужить то, что сравнительно недавно эта теория была перепроверена с помощью более точных инструментов именно в связи с запретом существования осей симметрии порядка 5.

Прежде всего обратим внимание на тот факт — это говорит в пользу теории, — что пятиугольные кристаллические грани все же существуют в природе. Это случай железного колчедана, который часто бывает в продаже и формой которого, как говорят, восхищался еще Пифагор, называя этот минерал золотистым. Однако пятиугольники колчедана не являются правильными, и у него нет оси симметрии порядка 5. Теория спасена.

Более значительным и более интересным представляется то, что в 1984 г. был создан сплав алюминия и марганца, в котором дифракция электронов выявила симметрию икосаэдра — многогранника, обладающего осями симметрии порядка 5. Проблема оказалась серьезной. Но это кристаллическое состояние появлялось только при определенной (достаточно высокой) скорости охлаждении сплава. Когда охлаждение производилось медленно, появлялись известные простые симметрии, а если охлаждение было еще более быстрым, то состояние сплава оказывалось не кристаллическим, а аморфным. Следовательно, можно предположить, что рассматриваемый кристалл является некоторым образом незавершенным и что эта странная симметрия, считавшаяся запрещенной, обязана своим существованием несовершенному порядку, например, дефекту периодичности решетки.

И в самом деле, было доказано, что кристаллическую структуру этого сплава можно представить, прибегнув к помощи теории так называемых «замощений Пенроуза» — *квазипериодической* решетки, кристаллические ячейки которой повторяются не периодически, но через менее правильные расстояния, хотя им все-таки присуща такая повторяемость в пространстве, которая достаточна для возникновения картины дифракции электронов, похожей на соответствующую картину в случае совершенных кристаллов. Были созданы такие «замощения», которые допускают ячейки, имеющие симметрию икосаэдра и, следовательно, оси симметрии порядка 5. Затем были рассчитаны параметры картины дифракции электронов, соответствующей таким замощениям, и эта картина оказалась удивительно похожей на ту, которая наблюдалась в случае сплава металлов. В настоящее время считается, что структура этого интересного кристалла может относиться к такому типу.

Эта теория поучительна, потому что она выявляет пределы не только законов симметрии в природе, но еще и пределы любой теории. В самом деле, что кажется нам более надежным, чем атомистическая гипотеза, подтвержденная опытом, или теория групп, математически совершенно строгая, на которых основывается теория симметрии кристаллов? В сущности, ни та, ни другая здесь не ставится под сомнение. Под сомнение ставятся только условия их применимости. Не следует забывать о словах Эйнштейна: «В той мере, в какой математические суждения относятся к реальности, они недостоверны, а в той мере, в какой они достоверны, они не относятся к реальности» [27]. Если инвариантность при переносе *периодической* решетки является достоверным математическим фактом, то отсюда вовсе не следует фактическое существование таких решеток в природе, даже если эта гипотеза кажется нам естественной. Можно было бы возразить, что периодичность предполагает бесконечную систему, а это отнюдь не так в случае кристалла, но данное возражение не имеет силы, потому что даже кристалл размером порядка одного микрона содержит тысячу миллиардов атомов, так что его границы почти неощутимы. Если под сомнение ставится периодичность, то здесь дело просто в том, что у атомов, похоже, не было времени для упорядочения.

Значит, следует воздержаться от рассмотрения закона симметрии в качестве некоего *a priori* божественного закона. Поскольку любой закон является плодом воображения теоретика, то он может быть нарушен опытом, но если пример поучителен, то он поучителен также и для противоположного соображения. В самом деле, нарушение закона симметрии, казавшегося надежным, заставляет нас, конечно же, быть осторожными, но и наоборот: как не заметить того, что понадобилось столетие исследований и высокое техническое оснащение для случайного обнаружения некоторого исключительного случая? А кроме того, даже в этом случае частичного беспорядка картина дифракции электронов остается такой же и сохраняет ту же четкость, что и в случае совершенных кристаллов Она выявляет порядок, — конечно, несовершенный, но очень близкий к порядку, описанному теорией. Если закон симметрии и перестает быть всеобщим, — а это закон физики, а не закон природы, — то разве не поражает его немыслимая прочность? Удивительно не то, что этот закон нарушается, а то, что отклонение от сделанных на его основе предсказаний оказывается столь малым.

Это наводит на мысль о том, что за законами симметрии — такими, как законы симметрии кристаллов — скрывается *устойчивость структуры*, которая сохраняет их неизменными и которая, очевидно, возникает в эволюционном процессе, заканчивающемся появлением законов симметрии, — в нашем случае, в процессе формирования кристалла. Изучение одних лишь состояний равновесия и стационарных состояний не позволяет понять эту устойчивость.

«О симметрии в физических явлениях»

Именно Пьеру Кюри, представителю блестящей французской школы кристаллографии, принадлежит заслуга совершения решающего шага во введении общих соображений симметрии в физику. Это было сделано им в статье, опубликованной в 1894 г. [59]. У него мы и позаимствовали название данного параграфа. Несомненно, работы Пьера Кюри по симметрии, хотя они хорошо известны, заслуживают более широкого признания и, конечно же, более вдумчивого прочтения. Их усвоение не должно ограничиваться формулой или замечанием, как это часто случается с фундаментальными мемуарами. Впрочем, можно задаться вопросом, не оказался ли столь важный вклад Пьера Кюри в науку просто-напросто в тени той славы, которую они вместе с Марией Кюри заслужили в связи с открытием радия?

В своей статье Кюри предложил физикам постараться тщательно определить симметрию физических явлений, как это уже сделали кристаллографы в своей области, и взять за правило учет этих законов как для контроля правильности теоретических выводов, так и для превращения идеи симметрии в систематический процесс предсказания новых явлений. Дело было вовсе не в том, что прежде физики совершенно не обращали внимания на симметрию. Однако они обращались к этой идее только от случая к случаю, а не систематически. Когда Архимед предположил, что весы, на концы плеч которых подвешены равные грузы, находятся в равновесии, потому что длина этих плеч одинакова, или когда мы приписываем одну и ту же вероятность выпадению любой из шести граней игральной кости, это — утверждения *a priori*, «источником которых является симметрия». Именно об этом говорит Герман Вейль в цитате, ставшей эпиграфом к этой главе. Но здесь речь о другом.

Кюри начинает с создания номенклатуры: семь классов, разделенных на девятнадцать семейств, — группы преобразований пространства, оставляющих физическое явление инвариантным. Не следует смешивать эти группы (называемые *группами Кюри*) с группами Федорова и Шенфлиса, задающими кристаллические формы, поскольку здесь речь идет не о периодических решетках, а о системах, *ограниченных* в пространстве. Эти группы состоят из *вращений* (вместе с осями произвольного порядка) и *зеркальной симметрии*. Кюри не рассматривал переносы, потому что не затрагивал кинематику. Действительно, заголовок его статьи вносил уточнение: «Симметрия электрического и магнитного полей».

Установив свою номенклатуру, Кюри делает основополагающее замечание. Парадоксальным образом он называет параграф «Характерная асимметрия физических явлений». Вопреки тому, что можно было бы предположить, руководствуясь здравым смыслом, он говорит, что излишняя симметрия мешает, и дает следующее определение:

> Присущая явлениям симметрия — это *максимальная* симметрия, совместимая с существованием явления.

И дальше поясняет [59]:

> Определенные элементы симметрии могут сосуществовать с определенными явлениями, но они не являются необходимыми; необходимо лишь отсутствие определенных элементов симметрии. *Именно асимметрия создает явление.*

Кюри мог бы сказать, что более логичным ему представляется создание номенклатуры асимметрий, а не номенклатуры симметрий, если бы его не удерживали от этого некоторые соображения удобства. Из наблюдений он знал, что если множество явлений накладывается друг на друга, то их асимметрии складываются, и остаются только те элементы симметрии, которые были общи им всем. И он ввел свой принцип, ставший знаменитым. Это тот главный урок, который физики извлекли из его работы [59]:

> Когда некоторые причины вызывают некоторые следствия, то элементы симметрии причин должны обнаруживаться в вызванных ими следствиях.
>
> Когда определенные следствия проявляют определенную асимметрию, то эта асимметрия должна обнаруживаться в породивших их причинах.

Поскольку второе суждение тесно связано с первым, то следствие может быть более симметричным, чем причина, и определенные причины асимметрии могут не оказывать воздействия на явления или оказывать воздействие, слишком слабое для того, чтобы оно стало наблюдаемым. Законы симметрии (или, следовало бы сказать, асимметрии) создают лишь необходимые условия максимальной симметрии. Следовательно, причины, чтобы быть в состоянии вызывать следствия, должны удовлетворять таким условиям, но этих условий, наверное, недостаточно для предсказания существования явлений.

Продолжение статьи Пьера Кюри посвящено установлению законов симметрии электромагнитного поля с помощью строгих рассуждений, основанных на точных экспериментальных данных. Итак, для иллюстрации своих принципов он избрал именно явления электромагнетизма. В связи с этим следует признать, что, несмотря на силу, с которой квантовая механика позже привлекла внимание ученых к законам симметрии, различиям в симметрии электричества и магнетизма в большинстве научных работ не придано особого значения. В лучшем случае, например, в превосходной работе Джексона [66], законы симметрии электромагнитного поля выводятся чисто формально, путем использования уравнений Максвелла. Но эти уравнения лишь придают краткий вид законам электричества и магнетизма, и, следовательно, симметрию поля нужно найти в опыте, а не в уравнениях. Именно это сделал Пьер Кюри на десятке страниц, представляющих собой прекрасный урок физики.

Прежде чем перейти к рассмотрению электромагнетизма, Кюри анализирует более простой случай поля тяготения, создаваемого однородным шаром и действующего на малую внешнюю массу (как в случае Солнца, притягивающего материальную точку). Сразу же понятно, что прямая, соединяющая эту точку с центром шара, является осью вращения системы, а плоскость, которой принадлежит эта ось, является плоскостью симметрии. Можно подумать, что полная симметрия — это сферическая симметрия, но тогда не учитывалось бы то, что система обладает привилегированной точкой, — той, которая притягивается шаром. Шар не может самостоятельно задать *форму силовых линий* поля, что равносильно невозможности определить, по каким траекториям будет двигаться точка, сначала бывшая неподвижной. Следовательно, симметрия системы является, самое большее, *цилиндрической*, с осью вращения, исходящей из точки в центре. Но этого еще мало, поскольку, хотя и известна форма силовых линий, но не известно *направление действия поля*, т.е. не известно, притягивает ли шар массу или отталкивает ее. Симметрия сводится к симметрии *усеченного конуса* с той же самой осью, что позволяет определить одновременно форму силовых линий и направление действия поля. Эта симметрия — не что иное, как симметрия *вектора*, представляющего поле тяготения в теории Ньютона, вектора, которому не хватает только определенной длины для того, чтобы представлять *силу* поля, но это уже не имеет отношения к симметрии.

Пьер Кюри переходит к электрическому полю, точно так же доказывая его векторный характер. Он постоянно исходит из опыта, опираясь на рассмотрение электрического поля, возникающего между двумя круглыми металлическими пластинами, равно как и на рассмотрение действия электрического поля на заряженный шар, а также на анализ свойств симметрии пироэлектрических и пьезоэлектрических кристаллов[64].

На примере магнитного поля, обращаясь только к элементарным явлениям, мы увидим, насколько тонкими могут быть основанные на идее симметрии рассуждения. Пьер Кюри рассматривал магнитное поле, создаваемое витком, по которому пропущен электрический ток. Он заметил, что ось витка является *осью изотропии*, а его плоскость — *плоскостью симметрии*. Симметрия причин проявляется в их следствиях, и Пьер Кюри, основываясь на этом, пришел к следующему выводу. Хотя магнитное поле (которое параллельно оси изотропии) перпендикулярно плоскости витка и ориентировано вдоль указанной оси, именно плоскость витка является для него плоскостью симметрии! Иначе говоря, отражение магнитного поля в зеркале, перпендикулярном направлению поля, совпадает с исходным образом, а не является привычным зеркальным отражением. Это похоже на картину Магритта, на которой человек, смотрящий в зеркало, изображен со

[64]Пироэлектричество — это присущее некоторым кристаллам свойство электризоваться при нагревании. Пьезоэлектричество — это свойство кристаллов электризоваться при сжатии или растяжении, либо, наоборот, расширяться или сжиматься при приложении электрического напряжения. Указанное свойство, присущее кварцу и другим кристаллам, было открыто в 1880 г. Пьером и Жаком Кюри. Это открытие имеет много практических приложений, самое распространенное из которых — кварцевая зажигалка для газовых приборов.

спины, но его отражение — вместо того, чтобы быть его зеркальным отражением — это тот же *вид со спины*, и оба они тождественны.

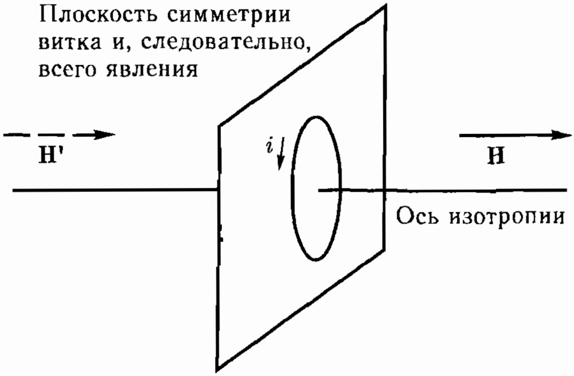

Рис 26. Виток, по которому пропущен ток i, создает магнитное поле, являющееся своим собственным образом относительно плоскости этого витка

Вместе с тем, Пьер Кюри *констатировал, что пропущенный по витку электрический ток не допускает ни оси симметрии в плоскости этого витка, ни плоскости симметрии, перпендикулярной этой плоскости* (это изменило бы направление тока на противоположное). Но обнаруживаются ли эти асимметрии причины в следствии, в магнитном поле? Для выяснения этого Кюри берет металлический стержень, катящийся по рельсам (их ось симметрии является осью симметрии системы), и помещает его в магнитное поле, перпендикулярное плоскости рельсов: стержень во время своего качения пересекает магнитный поток, что создает напряжение между рельсами и порождает асимметрию, доказывающую, что у магнитного поля нет оси симметрии, которая была бы ему перпендикулярна.

Впрочем, как мы знаем, *у магнитного поля есть перпендикулярная плоскость симметрии, и нам остается выяснить, есть ли у него плоскость симметрии*, которая была бы параллельна ему. Ответ прост: если бы такая плоскость

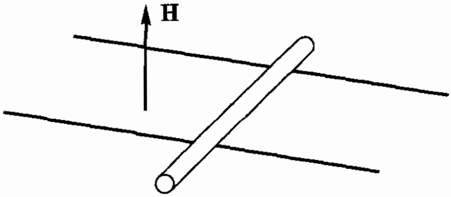

Рис. 27. Стержень катится по рельсам и пересекает магнитный поток

существовала, то имелись бы две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, одна из которых была бы перпендикулярна полю, и эти плоскости пересекались бы по прямой, также перпендикулярной полю, так что эта прямая была бы осью симметрии. Однако мы только что показали, что такой оси быть не может. Следовательно, не существует и плоскости симметрии, параллельной полю.

Вывод таков: *магнитное поле допускает перпендикулярную, но не параллельную ему плоскость симметрии, и все в точности наоборот в случае электрического поля.* В общем, электрическое поле ведет себя, как нормальный человек перед зеркалом: стоя лицом к зеркалу и глядя, скажем, вправо, человек видит в зеркале себя смотрящим влево, но если он повернется к зеркалу в профиль, то и отражением его будет тот же профиль (отражение, если можно так выразиться, «смотрит» в том же направлении). Магнитное же поле ведет себя подобно персонажу Магритта: его отражение «анфас» смотрит в ту же сторону, что и он сам, то есть повернуто к нему спиной, тогда как его отражение в профиль смотрит в противоположном направлении (Магритт не думал о такой связи с электрическим и магнитными полями). Видно, что в связи с симметрией между электричеством и магнетизмом обнаруживается большая разница, значительно ослабляющая аналогию, на которую «в первом чтении» указывают знаменитые уравнения Максвелла.

Пьер Кюри обратил внимание на то, что представление магнитного поля в виде направления, подобно электрическому полю, обманчиво. И он оказался совершенно прав, однако мы до сих пор пользуемся таким представлением!

В современных терминах можно сказать, что электрическое поле является *вектором* (или полярным вектором), тогда как магнитное поле является *псевдовектором* (или *аксиальным* вектором); или — в более интуитивном геометрическом смысле: электрическое поле обладает симметрией усеченного конуса, тогда как магнитному полю присуща симметрия вращающегося цилиндра.

Речь идет о том пункте, который недостаточно подчеркивается в большинстве работ по электромагнетизму, что вызывает сожаление, поскольку разница в симметрии, возможно, является основанием преобладания электричества над магнетизмом в природе. Мы еще вернемся к этому важному пункту.

Но Пьер Кюри пошел дальше. Он обратил внимание на доказательство, вытекающее из рассуждений о симметрии и ведущее к выводу о том, что одно из полей (электрическое или магнитное) является полярным, а другое — аксиальным. Тем не менее, при этом не говорится, *какое из полей является полярным, а какое — аксиальным*. Все, что мы можем утверждать — это то, что если одно поле произвольно считать полярным, то другое будет аксиальным. Но как правильно выбрать? Общие рассуждения об электричестве и магнетизме не могут дать ответа на этот вопрос. Кроме того, Кюри заметил наличие в некоторых из этих рассуждений неявного предположения о том, что *вакуум не обладает асимметрией*. Точно так же предполагается, что *материя, лишенная способности вращаться* (т.е. материя, не изменяющая поляризацию света), — это естественная, но произвольная гипотеза, означающая, что мы свободно выбираем симметрию среды отсчета (вакуума или материи) и что эта симметрия для изучаемой нами среды лишь *относительна*. Однако Пьер Кюри указал, что возможен абсолютный выбор между электричеством и магнетизмом без обращения к другим явлениям[65] и что именно электричество обладает векторными свойствами.

[65]Имеются в виду электрохимия, пироэлектричество и пьезоэлектричество или эффект Холла, состоящий в появлении электрического напряжения между гранями помещенной в магнитное поле пластинки, по которой пропущен электрический ток.

Все это является еще только определением законов симметрии. Эти законы необходимо использовать для предсказания новых явлений, что и сделал Кюри, показав, как такие предсказания становятся возможными благодаря суперпозиции причин асимметрии среды и учету того, что причиной является именно *асимметрия*, а не симметрия.

Например, это дает *суперпозиция электрического и магнитного полей в некотором теле с одним и тем же направлением*. Общая ось изотропии двух полей сохраняется, но больше не существует плоскости симметрии, поскольку электрическое поле не допускает плоскости, перпендикулярной этой оси, а магнитное поле — параллельной ей плоскости. Такая среда или порождаемое ею явление не накладываются на свое зеркальное отображение. Оно *энантиморфно*, и говорится также, что оно является *киральным*, или наделенным *киральностью*: по-гречески «*enantios*» означает «противоположный», а «*kheir*» означает «рука». Существуют энантиоморфные молекулы и кристаллы. Мы еще не упоминали о них, чтобы сделать рассуждения о симметрии в квантовой механике более общими, потому что киральность играет большую роль в природе в целом.

В теле, в котором имеет место суперпозиция коллинеарных полей — электрического и магнитного, — возникает, по наблюдениям Пьера Кюри, асимметрия кручения, а этого достаточно для предсказания эффекта Видемана: *если электрический ток проходит по намагниченной железной нити, то она закручивается*. Совершенно так же и при закручивании намагниченной железной нити между ее концами возникнет напряжение, а если закручивать железную нить, по которой пропущен ток, то она намагничивается. Аналогичные рассуждения позволяют предсказать явления пьезоэлектричества, пироэлектричества и эффект Холла.

Но даже мощь и элегантность этих рассуждений не позволяют нам забыть о важном ограничении, сформулированном самим же Пьером Кюри: из всех следствий, полученных на основании законов симметрии, наиболее надежными оказываются те, что носят отрицательный, а не утвердительный характер.

В самом деле, поскольку *не бывает следствия без причины*, то эти законы достоверно свидетельствуют о том, что бесполезно исследовать явление в той среде, которая обладает симметрией, избыточной для того, чтобы породить это явление. И поскольку мы придерживаемся идеи о том, что *не бывает причины без следствия*, то присутствие в среде асимметрии побуждает нас исследовать в этой среде те явления, которые к ней приспособлены. Однако здесь есть некоторое ограничение: хотя асимметрия дает нам надежду на существование явления, она все же не позволяет узнать ни порядок его величины, ни даже его точную природу. Это — только некоторое качественное описание, а не полный детальный «портрет» исследуемого явления.

Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых, не следует удивляться тому, что наши ожидания могут оказаться обманутыми. Во-вторых, если наши ожидания обмануты, то это не доказывает несуществования явления: оно может быть всего лишь ненаблюдаемым в тех условиях, в которых мы его изучали. Потому что в ряде случаев можно изменять эти условия, не нанося ущерба законам симметрии. Пьер Кюри приводит соответствующие примеры. Многие явления, ожидать существования которых нам позволяет симметрия, не были обнаружены. Наиболее интересным является последний пример с турмалином — кристаллом, симметрия которого заставляет думать, что он поляризуется в электрическом поле. Но наблюдаемым это явление становится только при нагревании кристалла, что не изменяет его симметрию. Симметрия не могла бы нам это подсказать.

В этой главе мы видели, как группы появились в физике — сначала в кристаллографии, а затем как обобщение кристаллографических законов. Они были выведены из опыта при изучении явлений, которые были схематизированы и смоделированы. Из изучения таких явлений была извлечена структура группы, а затем она была снова соотнесена с природными явлениями, чтобы выявить их природу и, возможно, предсказать новые явления.

Этот метод исследования явлений использовали все теории, включая теорию относительности и квантовую механику, но эти последние теории, вероятно, породили новый взгляд на вещи. Суть его в том, что сначала исследуется структура группы или другого математического объекта *a priori*, а затем сделанный выбор некоторым образом обосновывается.

Глава IX

ГРУППЫ ЗАХВАТЫВАЮТ ВЛАСТЬ

В качестве обобщения геометрии возникает следующее утверждение: если дано многообразие[66] и группа преобразований для этого многообразия, то необходимо изучать объекты с точки зрения тех свойств, которые не изменяются при преобразованиях.

Феликс Клейн [67]

Специальная теория относительности не выходит за рамки геометрии по Клейну.

Эли Картан [68]

Все квантовые числа, за исключением квантового числа, называемого главным, являются характерными показателями представлений групп.

Герман Вейль [69]

Власть математики в физике

Власть, которую теория групп обрела в физике, воплощает математическую власть вообще — с ее величием, красотой, плодотворностью, но также и со злоупотреблением ею и теми опасностями, о которых физики нашего столетия слишком уж склонны забывать. Если у них и была причина пойти на роскошный обед, на который их приглашают математики, им следовало бы являться туда только с «длинной ложкой»[67], что спасло бы их от некоторых крайностей, прежде всего, от заманчивой уверенности в том, что они освоились с духом математики, тогда как они всего лишь более или менее умело пользуются ею. Но эти

---

[66]«Многообразие» — это любое обобщение понятия пространства (имеющее, конечно, какую-либо размерность).

[67]Старая французская пословица: «Чтобы обедать с дьяволом, надо идти с длинной ложкой». (*Прим. автора к русскому переводу.*)

несколько заурядные крайности — еще не самое страшное. Настоящая опасность менее заметна и почти неизбежна.

В самом деле, роль математики в физике является двойственной. С одной стороны, она служит для адекватного перевода гипотез и моделей реальности, что лежат в основании физики, на некоторый формальный язык. Это делает возможным создание логических связей, невыразимых в обычном языке и позволяющих выводить из исходных принципов многочисленные следствия, которые допускают сравнение с опытом. Но это почти второстепенная роль, хотя она и неоспорима. Главная роль математики — структурная, и структурирование здесь заключается в предоставлении теории некоторого скелета, некоторой арматуры. Восхищаясь красотой теории, мы отдаем должное ее простоте, гармоничности и связному характеру ее гипотез, объединяющих в единое самосогласованное целое огромное количество фактов. Именно структура теории и ее формальная гармоничность вселяют в нас уверенность в надежности теории и приводят к мысли, что это человеческое творение, возможно, является творением самой природы.

Мы особенно восприимчивы к этому аспекту теории по многим причинам. Прежде всего, именно он убеждает нас в определенной логической надежности теории, хотя она далеко не всегда может быть такой надежной, как хотелось бы. Именно этот аспект позволяет нам лучше понять случайные гипотезы, выдвинутые в ходе рассуждений и начавшие затем играть ключевые роли. Примечательно, что это происходит без четкого осознания того, идет ли речь о независимых гипотезах, либо их все-таки можно вывести из основных принципов (принцип запрета Паули является такой гипотезой в квантовой механике). Этот вопрос нельзя было бы поставить, если бы теория была неформальной и допускала бы сравнение с некоей разновидностью мягкого теста, к которому можно было бы добавить новые ингредиенты, по воле случайных трудностей.

Но особенно важно то, что математическая структура обладает собственными достоинствами и предстает перед нами в качестве независимого, отделенного от нас явления, заслуживающего изучения как таковое — не только как абстрактный математический объект, но как новый физический объект, который сам по себе есть часть природы и который, впрочем, обнаруживает действенную способность подсказывать новые идеи и поднимать новые вопросы. Так, например, Герц говорил об уравнениях Максвелла [70]:

> Нельзя удержаться от мысли, что эти математические формулы обладают независимым существованием и собственным рассудком, что они знают больше, чем мы, и даже больше, чем те, кто их открыл, и что мы выводим из них больше, чем было вложено в них изначально.

Именно в этой собственной жизни структур и формул одновременно и заключается сила математики, и таится ее опасность. Ее сила очевидна, тогда как опасность — менее очевидна, и заключается она в том, что необходимо принести жертву призраку. Жертвой здесь оказывается природа, а теория есть не что иное, как призрак, — нечто хрупкое, изменчивое, подверженное пересмотру, всегда находящееся под угрозой появления новой идеи или нового опыта. Теория, как говорил Эйнштейн, это «не что иное, как вопрос, заданный опыту». Математика — это скелет призрака.

Опасность заключается в соблазне отождествить теорию с природой, а математику — с теорией, счесть, что мир является релятивистским и квантовым, тогда как он совсем не релятивистский и квантовый, а такой, какой он есть. Столь же опасно считать, что специальная теория относительности является разделом теории групп, общая теория относительности — разделом теории римановых пространств, а квантовая механика — алгеброй операторов. В общем, опасность заключается в убеждении, что Бог сотворил мир для удобства математиков. Фраза Галилея «Книга природы написана на языке математики» стала знаменитой, но не следует забывать, что *книга написана не Богом, а нами*, поскольку именно мы описываем мир на этом языке. То, что мог написать Бог, остается тайной.

Самые лучшие физики не защищены от головокружения, вызванного формализмом, но самые великие из них способны этого избежать. Однажды еще молодой Гейзенберг прогуливался по сельской местности в Баварии с одним из своих блестящих учеников, и тот с энтузиазмом отозвался о только что прочитанной книге Вейля *Raum. Zeit. Materie* («*Пространство. Время. Материя*») [30]:

> А что, если пространство в конечном счете является только полем отображения эрмитовых операторов?

Но Гейзенберг воскликнул:

> Что за нелепость! Пространство голубое, и в нем летают птицы.

Рождение теории групп и Эрлангенская программа

Известно, что, несмотря на наличие знаменитых предшественников, именно Эварист Галуа создал теорию групп, по-новому поставив задачу изучения алгебраических уравнений. Новаторский гений Галуа, его короткая беспокойная жизнь, его общеизвестная дерзость, его мания преследования, переданная ему отцом и усугубленная непониманием со стороны старших современников и ударами судьбы (одна его рукопись была утеряна Коши, а другая пропала после смерти Фурье), и, наконец, его собственная смерть в трагической и нелепой дуэли — все это создало вокруг рождения теории групп атмосферу незабываемой романтической драмы.

Исторической заслугой Галуа, помимо решения той задачи, которую он поставил применительно к алгебраическим уравнениям (и его вклад в эту область вполне сравним с достижениями Лагранжа, Гаусса и Абеля), стало не только введение нового метода. Он вызвал к жизни новый математический дух, доказав, что при исследовании корней алгебраического уравнения надо прежде всего приступать не к вычислению этих корней, а к исследованию существующих между ними отношений, для того чтобы узнать, имеем ли мы средства для их вычисления. Он открыл, что характерные свойства корней уравнения состоят в тех подстановках, которые поддерживают определенные отношения между ними. Эти подстановки образуют группу, в рамках которой с помощью вспомогательных уравнений можно определить инвариантные подгруппы, и, если уравнение разрешимо посредством определенных нами методов, то результатом будет нахождение некоторой группы, которая сводится к тождеству и не допускает другого отношения между корнями, чем их выражение как функции коэффициентов уравнения: это и есть решение задачи. Кроме того, Галуа доказал, *a contrario*, что, начиная со степени 5, алгебраические уравнения вообще неразрешимы в радикалах, как это имеет место в случае степеней 2, 3 и 4.

Хотя решение алгебраической задачи само по себе является выдающимся результатом, гениальное открытие Галуа состояло в том, что он *поставил структуру прежде объекта* и определил объект, исходя из структуры. Структура в данном случае — это *закон инвариантности* определенных отношений между корнями в качестве еще неизвестных объектов, существующий даже тогда, когда уравнение неразрешимо, но об этих корнях мы никогда ничего не узнали бы, если бы не открытие упомянутой структуры.

Здесь мы имеем дело с первым приложением общего *принципа*, провозглашенного Эли Картаном — одним из выдающихся знатоков теории групп, — в форме, которой хотя и приданы сознательно несколько неопределенные очертания, но все же лучшей, чем сухое определение понятия группы, приведенное в предшествующей главе; это общее определение проливает свет на вопрос: почему это понятие играет такую важную роль [68]:

> Группу можно рассматривать как составленную из всех операций данной природы, сохраняющих или определенные свойства объектов, к которым эти операции применяются, или определенные отношения между объектами.

В общем, закон инвариантности в виде группы — это, *прежде всего, закон сохранения*: сохранения формы, отношения, закона или физической величины. После первых успехов, которых эта идея добилась в алгебре, она была введена в геометрию, а затем распространена и на физику. Мы видели важность кристаллографических групп, которым посвящены работы Феликса Клейна, вдохновленного теорией Галуа и применившего ее к группам преобразований, оставляющих инвариантными правильные многогранники[68]. Но Клейну мы обязаны не просто неким результатом, а новым пониманием геометрии, носящим название *Эрлангенской программы* — по имени того университета, в который он в возрасте двадцати трех лет в начале академического года (1872 г.) представил свои идеи в виде «диссертации».

Концепция Клейна, как и концепция Римана, играла прежде всего объединяющую роль. В ней впервые в геометрии рассматривались уже не фигуры, но сохраняющие их группы преобразований. Мы видели такие преобразования при анализе *вращений* и *переносов*, которые представляют собой *перемещения* евклидова пространства и преобразуют фигуры в равные им фигуры[69]. Камиль Жордан описал структуру этой группы и, таким образом, стал первым, кто вышел за узкие рамки подстановок — единственной группы, изученной до него.

Добавим еще, что кристаллография, правильные многогранники и алгебраические уравнения стали причиной введения лишь *конечных* и, следовательно, точечных групп: групп вращений, кратных данному углу, переносов, кратных определенному шагу (периоду кристаллической решетки), или подстановок корней уравнения. Геометрия Клейна, напротив, требовала *непрерывных групп*, подобных перемещениям, которые непрерывно зависят от таких параметров, как ось и угол вращения или направление и величина переноса.

Софусу Ли, другу Клейна, мы обязаны первым общим исследованием непрерывных групп. Сама концепция возникла из честолюбивого желания создать теорию, аналогичную

---

[68]В частности, алгебраическое уравнение пятой степени связано с группой икосаэдра и, следовательно, с *осями симметрии порядка 5*, *которые* мы рассматривали в предыдущей главе.

[69]Укажем еще на *инверсию* евклидовой плоскости, которая не является перемещением: она заменяет каждую точку точкой, лежащей с ней на одной прямой с некоторым центром, так что произведение их расстояний от центра считается некоторой данной величиной. Инверсии сохраняют совокупность прямых и окружностей, равно как и углы между кривыми. Геометрия, имеющая в качестве основной группы инверсии и перемещения, называется *аналлагматической*.

теории Галуа, не только для алгебраических, но и для *дифференциальных* уравнений. Его проект не был завершен, но непрерывные группы, созданные для этого, *группы Ли*, стали великим открытием. Именно они играют важную роль в физике — даже более важную, чем конечные группы.

В Эрлангенской программе, как и у Галуа, видно, что структура берет верх над объектом. Геометрия основывается уже не на традиционных объектах (точках, линиях, поверхностях, фигурах), а на группе преобразований, которые их сохраняют. Две геометрии, кажущиеся отделенными друг от друга теми объектами, которыми они оперируют, считаются эквивалентными, если они имеют некоторую общую группу, которая и является источником плодотворных сближений. И наоборот, именно разница между структурами групп двух геометрий создает различия между этими геометриями.

Примером стало представленное Ли доказательство того, что при выборе достаточно общих гипотез существует лишь три геометрии, имеющие группу трансляций, — геометрии Евклида, Лобачевского и Римана. Более того, мы знаем, что упомянутые три геометрии отличаются друг от друга своей кривизной — нулевой у Евклида, положительной у Римана, отрицательной у Лобачевского[70]. Однако, согласно теории групп, геометрия Евклида является также и единственной, в которой имеются подобные фигуры[71]. Ведь только она имеет *группу подобий*, преобразующую одинаковые фигуры в такие фигуры, которые не только не одинаковы между собой, но и имеют, по сравнению с исходными фигурами, большие или меньшие размеры.

Теория относительности и группа Лоренца

Специальная теория относительности, о которой мы уже говорили в главе V, была первой великой теорией,

[70]По правде говоря, геометрия Римана включает в себя три типа геометрии, евклидовой или неевклидовой, но в некоторых случаях имя Римана связывается с геометрией с положительной кривизной, а имя Лобачевского — с геометрией с отрицательной кривизной.

[71]У подобных треугольников равны соответствующие углы, но не стороны.

в которой понятие группы играло важную роль. Но чтобы понять это, мы должны внести некоторые уточнения. Вернемся к рассмотрению законов классической механики: мы знаем, что они одни и те же для всех галилеевых наблюдателей или, иначе говоря, для наблюдателей, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Можно сделать некоторое замечание об этом *принципе относительности Галилея.* Мы знаем, что если наблюдатель определяет некоторые законы механики, то другой наблюдатель, движущийся относительно первого равномерно, откроет те же самые законы, а еще один наблюдатель, движущийся равномерно относительно второго, откроет те же законы, что и он. Но можно ли утверждать, что он также находится в равномерном движении относительно первого наблюдателя и что он наблюдает действие тех же самых законов, что и тот? Да, поскольку скорости наблюдателей складываются или вычитаются, если они параллельны, и складываются как векторы по правилу параллелограмма, если они образуют угол, отличный от нуля. Иначе говоря, преобразования в случае равномерно движущихся наблюдателей — это *преобразования Галилея,* образующие группу — *группу Галилея,* которая определяет *эквивалентность* этих наблюдателей[72].

В теории относительности задача усложняется, поскольку время для разных наблюдателей течет по-разному, и, следовательно, новые преобразования — *преобразования Лоренца* — действуют одновременно и на пространство, и на время. Но они зависят от отношения скорости движущегося тела к скорости света. Таким образом, если это отношение становится небольшим, то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, а время для всех наблюдателей начинает течь одинаково. Релятивистские явления становятся господствующими, только если отношение достаточно близко к единице, т.е. в случае скоростей, сравнимых со скоростью света в вакууме (300 000 километров в секунду). Законы теории относитель-

[72]Галилей осознал эквивалентность законов механики для различных наблюдателей, но он, очевидно, не говорил о группе преобразований: это уже современная терминология Эйнштейна.

ности отличаются от законов классической механики только для очень больших скоростей, представить себе которые мы не можем, откуда и возникают ошибки любителей, не отдающих себе в этом отчета. Но преобразования Лоренца теряют свой смысл, если рассматриваемое отношение равно единице: *теория относительности запрещает какому бы то ни было материальному движущемуся телу достигать скорости света*.

Преобразования Лоренца, как и преобразования Галилея, образуют особую группу — *группу Лоренца*, — но группу на этот раз более сложную, потому что скорости больше не складываются, как в классической механике. В частности, можно сколько угодно увеличивать скорость, прибавляя к ней другие скорости, но результирующая скорость все равно останется меньше скорости света. Если же какую-нибудь скорость прибавить к скорости света, то в результате получится все та же скорость света, которая выступает в качестве предельной скорости.

Эта структура группы, установленная Пуанкаре, приобрела смысл, когда Эйнштейн в электродинамике и механике заменил преобразования Галилея преобразованиями Лоренца, превратив именно группу Лоренца в новое выражение эквивалентности галилеевых наблюдателей. Структурная роль группы Лоренца в теории относительности выдвинула на первый план идеи Пьера Кюри об инвариантности законов физики относительно групп преобразований. Эта роль важна как в электромагнетизме, так и в любой теории волн, и даже в случае исследования материальных тел, движущихся с небольшими скоростями.

Релятивистская ковариантность

После открытия теории относительности необходимо было реформировать динамику. Эта задача была решена Эйнштейном, Планком и фон Лауэ (Лоренц и Пуанкаре видели лишь отдельные аспекты этой задачи). Но как согласовать динамику с принципом относительности? Это было сделано сперва на ощупь, чисто формально, путем видоизменения уравнений. Главным следствием стало то, что масса движущегося тела оказывается больше массы покоящегося тела. Импульс — произведение массы на скорость — модифицируется, что изменяет закон Ньютона: сила теперь уже равна не произведению массы на ускорение, а производной по времени от произведения массы на скорость (что совпадает с законом Ньютона только при том условии, что масса остается неизменной). Наконец, это вызывает изменение понимания энергии, которая, как доказал Эйнштейн, равна произведению массы покоящегося тела на квадрат скорости света: это известная формула $E=mc^2$, которая означает, что масса тела служит мерой его внутренней энергии. Мы увидим, что энергия связана с импульсом общим законом сохранения.

Эти понятия, преобразившие механику, оказываются необходимы для описания движущегося тела, скорость которого сравнима со скоростью света, как у электронов в атоме или у сильно ускоренных частиц.

Таким образом, до сих пор развитие физики шло по *конструктивному пути*; но все меняется, когда пространство-время Минковского приводит к *формальному пути*. В самом деле, что такое физический закон, соответствующий принципу относительности? Это закон, выражение которого не меняется при переходе от одного галилеева наблюдателя к другому и, следовательно, при применении к нему преобразования Лоренца: это то, что называется *релятивистской инвариантностью,* или *инвариантностью Лоренца,* или *релятивистской ковариантностью.* Итак, если проверить ковариантность данного закона легко, то сконструировать его *a priori* трудно. Именно здесь вводится пространство-время, поскольку доказывается, что преобразования Лоренца представляют собой *вращения* четырехмерного мира и что релятивистские законы *инвариантны относительно группы вращений пространства-времени*, которое является более простым геометрическим понятием.

Преобразования Лоренца — это достаточно частные «вращения», поскольку пространство-время Минковского, напомним, на самом деле не является евклидовым. В нем в теореме Пифагора пространство и время фигурируют с противоположными знаками (квадрат длины является не суммой, а разностью квадратов). Это обстоятельство можно несколько смягчить, дав определение *мнимого* времени, что заставляет ввести корень из «минус единицы», а это придает пространству Минковского вид евклидова пространства четырех измерений. Тогда преобразование Лоренца соответствует повороту на мнимый угол[73].

Следовательно, *наша задача* снова сводится к выражению законов физики таким образом, чтобы они не изменялись при вращениях пространства-времени. Среди них фигурируют вращения обычного пространства, являющегося частью пространства-времени, и его вращения заставляют ввести обычные, известные нам углы. Заметим, что точно так же, как и при повороте прямой, проведенной на столе, она вращается вся целиком, вращение времени (на мнимые углы) заставляет нас поворачивать также и ось пространства. Это не удивительно, потому что преобразование Лоренца изменяет одновременно пространство и время.

Наконец, вращения пространства-времени объединяют релятивистские преобразования времени, движения переноса в обычном пространстве и вращения этого пространства. *Группа Лоренца*, совокупность вращений пространства-времени, превращает вращения обычного пространства в свою *подгруппу*[74].

Нам остается показать, как инвариантный физический закон выражается в нашем пространстве или пространстве-времени благодаря величинам или геометрическим объектам, сохраняющимся при вращении. Простым примером такой величины служит расстояние между двумя

---

[73]О «фантазиях», на которые ссылаются некоторые вульгаризаторы и которые сводятся к утверждению, что «скорость галилеева наблюдателя является мнимым вращением оси времени»: это верно, но представляет собой всего лишь математическую уловку, которую они обычно сами не понимают.

[74]Выше мы говорили, что преобразования Лоренца образуют группу, но они осуществляются в *одном и том же направлении*. В случае *различных* направлений их произведение больше не является простым преобразованием, поскольку оно производит вращение обычного пространства, откуда и появляются вращения в полной группе.

точками пространства (или пространства-времени), поскольку перенос не изменяет расстояния. Совершенно аналогичным примером служит факт, что три точки лежат на одной прямой, и он является инвариантным относительно перемещения, а следовательно, и относительно вращения. Таким образом, *вектор* является неделимым объектом, поворачивающимся только целиком. Но вот более сложный пример.

Возьмем два вектора в обычном пространстве. Они задают параллелограмм, площадь поверхности которого зависит от длины этих векторов и угла между ними. Теперь введем третий вектор, который перпендикулярен первым двум векторам и длина которого равна площади поверхности параллелограмма, и зададим «порядок», назвав эти векторы **A**, **B** и **C** и введя правило буравчика, который направлен вдоль **C** и вращается от **A** к **B**. Следовательно, если поменять **A** и **B** местами, то **C** изменит свое направление. Определенный таким образом, вектор **C** является *векторным произведением* **A** и **B**.

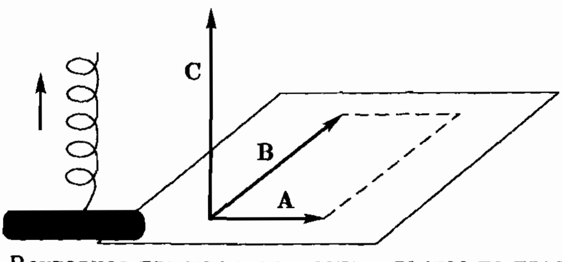

Рис. 28. Векторное произведение, направленное по правилу буравчика, вращающегося от **A** к **B**

Вектор **C** является не полярным, как два первых вектора, а аксиальным (как вектор магнитного поля), поскольку его зеркальное отражение является обратным из-за того, что отражение буравчика является «левым». Этот вектор, произведение двух других, принадлежит к общему классу *тензоров*, хотя это и частный тензор, являющийся *антисимметричным* вследствие свойств зеркала. Но здесь является важным то, что его *определение* не меняется, если он вращается в пространстве, и эта инвариантность остается в силе для всех тензоров.

Приведем другой пример тензора. Найдем все силы, которые могут действовать на некоторый куб. Его шесть граней определяют три плоскости, и относительно каждой из них выделим три силы: одну перпендикулярную грани куба, а две остальные — параллельные, но действующие в разных направлениях. Таким образом, в итоге мы получаем *девять сил* относительно трех плоскостей, и их можно объединить в некоторую единую величину, *тензор*, *компонентами* которого и являются девять сил. В механике эти силы называются «натяжениями», откуда и происходит слово «*тензор*», поскольку Фойгт ввел это понятие именно для решения описанной задачи, которая затем была обобщена. Оказывается, в теории относительности почти все физические величины объединяются в *тензоры пространства-времени*. Заметим, что вектор или число (*скаляр*) также являются частными случаями тензоров. Применительно к вращению используются еще другие инвариантные объекты — *спиноры*, о которых сейчас мы не будем говорить.

Теперь приведем примеры релятивистских тензоров. Прежде всего, векторы электрического и магнитного полей, хотя они и имеют различную геометрическую природу, объединяются в единый тензор в пространстве-времени. Следовательно, электрическое и магнитное поля больше не имеют отдельных обозначений: только электромагнитное поле как совокупность обоих полей является чем-то единым. Это не означает, что теория относительности запрещает измерять электрические или магнитные эффекты по отдельности, но она предупреждает нас (в согласии с опытом), что для движущихся тел или наблюдателей мы не можем отделять друг от друга два типа полей, поскольку каждое из них порождает другое.

Кроме того, опять-таки в противоположность классической механике, теория относительности говорит нам, что энергия движущегося тела и его импульс не являются независимыми друг от друга и не сохраняются по отдельности. Сохраняется именно *вектор энергии-импульса* (или *мировой импульс*). Он имеет четыре компоненты: соответствующая *направлению времени* представляет энергию, а другие компоненты, параллельные пространству, представляют импульс. Точно так же частота волны в теории относительности не является независимым объектом, она связана с волновым вектором, направленным вдоль распространения волны, и изменяется обратно пропорционально длине волны. Релятивистский вектор — это *мировой волновой вектор*, временная компонента которого определяет частоту, а пространственные компоненты — обычный волновой вектор.

Таким образом, поскольку *импульс* и *мировой волновой вектор* являются четырехмерными релятивистскими векторами, а галилеев наблюдатель устанавливает их равенство, то они равны для всех наблюдателей, поскольку это равенство сохраняется при вращении в пространстве-времени. Теперь понятно, почему де Бройль (см. главу VII) мог приравнять их друг другу для того, чтобы объединить корпускулярное и волновое описания природы. Действительно, благодаря закону Планка, достаточно *для всех наблюдателей* объединить временные компоненты двух векторов (энергию частицы и частоту волны), чтобы в силу релятивистских законов это равенство имело место также и между пространственными компонентами (следовательно, между импульсом и волновым вектором). Это простейшим способом доказывает формулу для вычисления длины волны де Бройля, способ, который он сам предложил.

Изложенные рассуждения дают один из первых образцов физического закона, установленного с помощью релятивистской ковариантности, и они выявляют существенное правило рассуждений о ковариантности. Если две физические величины равны или пропорциональны друг другу[75] для всех галилеевых наблюдателей, то же самое справедливо для величин, которые связаны с ними своей принадлежностью к тому же самому тензору. Сказанное может быть пояснено с помощью простой геометрической иллюстрации.

---

[75]В предыдущем примере энергия не равна, а пропорциональна частоте, и коэффициентом пропорциональности служит постоянная Планка.

Предположим, что тени, отбрасываемые двумя палками на стену, равны. Можем ли мы из этого сделать вывод, что палки параллельны и имеют одну и ту же длину? Нет, поскольку они могут быть различными по длине, но ориентированными таким образом, что их тени оказываются равными друг другу. Но если нам скажут, что *отбрасываемые тени остаются равными независимо от того, каким бы ни был угол, под которым их освещают и каким ни был способ, которым их заставляют одновременно поворачиваться в пространстве*, то мы можем утверждать, что они равны друг другу и параллельны. Эти палки являются почти векторами (им недостает только ориентации), и то, что мы сказали о вращениях в пространстве, может быть распространено *mutatis mutandis* на вращения пространства-времени и, следовательно, на переход от одного галилеева наблюдателя к другому. Отбрасываемая на стену тень — это компонента вектора.

В заключение отметим, что равенство между собой двух объектов может быть установлено либо путем сравнения их теней, отбрасываемых по всем направлениям, либо путем сравнения их теней, отбрасываемых в одном направлении, но при условии вращения этих объектов всеми возможными способами. В теории относительности тень называется «компонентой тензора», а вращение — «преобразованием Лоренца».

Релятивистская ковариантность порабощает физиков, но она же становится ведущей их силой. Таким образом, хотя пространство и время измеряются по отдельности, эти физические величины могут фигурировать в уравнениях физики только вместе и с сохранением инвариантности при вращении пространства-времени, чтобы законы сохраняли свою форму для всех галилеевых наблюдателей. Математические операции также должны оставаться одними и теми же для всех наблюдателей, а следовательно, операторы будут ковариантными и, как и физические величины, объединятся в тензоры в пространстве-времени. Именно с помощью подчиняющихся этим законам величин и операторов мы можем записывать *ковариантные уравнения*, которые описывают релятивистские законы. С этого момента ковариантность становится явной, и физикам она прекрасно известна.

Таким образом, теория относительности сводится к простому геометрическому свойству — инвариантности относительно вращения в пространстве-времени, и это — одно из чудес геометризации физики. Такой формальный путь позволяет написать сколько угодно релятивистских уравнений, но — увы! — эти уравнения в общем случае не имеют никакого смысла. Дело в том, что для правильности уравнения одной только ковариантности недостаточно; чтобы уравнение было правильным, по-прежнему необходим научный гений. Ковариантность отнюдь не является машиной для совершения научных открытий.

Мнения о достоинствах формальной ковариантности весьма разноречивы. Сам Эйнштейн не использовал ее в специальной теории относительности, предпочитая конструктивный путь, на котором он многого добился благодаря своей удивительной интуиции. И если верно то, что он установил уравнения общей теории относительности благодаря формальным рассуждениям о тензорных уравнениях в римановом пространстве, то все же он — благодаря физическим рассуждениям — заранее знал о тех физических эффектах, которые он должен был исследовать. Точно так же Планк, в значительной степени являющийся основателем релятивистской динамики, сделал все чисто конструктивным способом. Де Бройль, формальные рассуждения которого о ковариантности на начальных этапах развития волновой механики мы упоминали, не любил ковариантности, предпочитая конструктивное рассуждение, *закон совпадения фаз*[76]. Другие теоретики, часто знаменитые, напротив, предпочитали формальный путь: к таковым относятся Гейзенберг и Дирак, рассказывавший, что он посвящал большую часть своего времени тому, чтобы повозиться с уравнениями для выяснения того, что они могут дать. Таким образом, мы можем только преклоняться перед определенным успехом формальных аналогий. Впрочем, истина оказывается более сложной,

[76]Два рассуждения приведены в его диссертации [37]. См. также его биографию [25].

поскольку все великие физики-формалисты доказали, что они обладают исключительной физической интуицией, а все самые искусные конструктивисты умели, когда им это было необходимо, использовать формализм.

Чтобы способствовать утверждению формальной тенденции, этой *интуиции второго порядка*, направленной уже не на опытные факты, а на структуру теории, была необходима теория представлений групп и, что самое главное, область физики, в которой такая теория стала бы господствующей, — квантовая механика.

Представления групп

К сожалению, мы коснемся этого вопроса лишь очень кратко, так как о нем трудно говорить на обычном языке, но обойти его нельзя, поскольку его важность имеет для этой книги почти философский смысл. Мы предложим только несколько фрагментарное изложение этого вопроса в надежде, вопреки всему, показать, как средствами геометрических абстрактций современных физических теорий физики все же обнаруживают некоторую часть реальности.

То, что мы сказали о группе Лоренца, позволяет понять принцип теории представлений. Мы видели, что преобразования Лоренца можно заменить вращениями в пространстве-времени, даже если это вынуждает немного расширить геометрию введением мнимых углов. Мы получили образ одной группы, более физической, на другой группе, более абстрактной, но с которой проще иметь дело. В таком случае говорят, что эти группы изоморфны. Если бы преобразования имели много образов на другой группе, то это был бы более специальный случай *гомоморфизма*.

Такая процедура не свойственна теории относительности, и она была создана применительно к многочисленным группам преобразований, особенно к тем из них, которые встречаются в физике. С каждой из них можно соотнести не только одно, но и бесконечное число пространств, размерность которых возрастает от единицы до бесконечности, и они называются *пространствами представления*. Это — *векторные пространства* в том смысле, что они сконструированы из таких геометрических объектов, для которых можно (в общем виде) определить направление, длину, правила сложения и умножения на число. Компоненты этих векторов представляют собой *функции*, которые подвергаются преобразованиям группы, называемым *линейными преобразованиями*. Они названы так потому, что преобразуют прямую линию в другую прямую линию. Эти преобразования являются *линейными представлениями* группы порядка 1, 2, 3 и т. д. в соответствии с размерностью пространства, в котором они осуществляются. Вращения служат примером линейных преобразований, и те преобразования в пространстве-времени, о которых говорилось прежде, образуют представление группы Лоренца.

Если в группу входит только конечное число элементов, как в кристаллографии, или если у нее есть свойство, называемое *компактностью*[77], которым обладает, например, группа вращений обычного пространства, то *все* линейные представления можно свести к вращениям в пространствах конечной размерности, о которых мы уже говорили. В сущности, эти вращения являются более общими, чем те, которые нам известны, поскольку они вводят мнимые величины. Если группа не является компактной, то существуют бесконечные представления, и это случай группы Лоренца.

Здесь нам необходимо ответить на вопрос, задать который способен любознательный ум: что физике приносит замена вращения твердых тел, которые нам известны и которые происходят в таком пространстве, как наше, вращениями, которые по-настоящему не являются вращениями и которые применяются к векторам, определенным с помощью мнимых функций в абстрактных пространствах? Ответ прост: уравнения квантовой механики имеют в ка-

[77]Компактное множество — это непрерывное множество, ограниченное включением в себя своей границы (как отрезок прямой с ее граничными точками или шар с его поверхностью). Евклидово пространство не компактно, поскольку оно не ограничено, но из него можно вырезать компактные множества, вроде шара или отрезка прямой; говорят, что оно *локально компактно*. Группа обычных вращений компактна, но группа Лоренца лишь локально компактна.

честве решений не объекты в нашем пространстве, а упомянутые функции, и именно с их помощью описываются явления, происходящие в физическом пространстве.

Группы инвариантности и испускаемый атомами свет

Как мы уже говорили, уравнение Шредингера не описывает непосредственно физический объект, вроде атома, — оно делает это с помощью волны, различные выражения которой соответствуют состояниям атома. Это — те формулы, о которых мы упоминали. Но функция должна зависеть от определенных переменных. В данном случае это координаты электрона в атоме, последнее эхо некоторой локализации, существование которой теоретики часто отрицают, но которая обнаруживает себя, например, при описании силы Кулона. Она действует между двумя электрическими зарядами и изменяется обратно пропорционально квадрату разделяющего их расстояния.

Если это так, то атом или молекула будут обладать определенными видами симметрии, и именно здесь происходит вторжение геометрии. Приведем пример. Поскольку электроны в атоме неотличимы друг от друга, описывающие их законы должны оставаться *инвариантными относительно перестановки* их координат. С другой стороны, если атом не находится ни в каком силовом поле, ни в магнитном, ни в электрическом, которое делало бы определенное направление в пространстве «привилегированным», то этот атом будет изотропным, и законы должны быть *инвариантными относительно вращения* вокруг произвольной оси. Мы ограничимся этими видами симметрии, опуская релятивистскую инвариантность, поскольку уравнение Шредингера ее игнорирует, но вернемся к ее рассмотрению в следующей главе.

Различные группы преобразований, вторгающиеся в предшествующие виды симметрии, не имеют одного и того же статуса. Так, например, инвариантность относительно перестановки электронов — следствие их неотличимости друг от друга — является симметрией, внутренне присущей каждому состоянию атома. Она предоставляет нам знание *a priori* о форме решений уравнения, которое будет иметь смысл даже до того, как мы эти решения получим, и даже если мы не знаем, как эти решения найти. Но инвариантность изолированного атома относительно вращений выглядит иначе. Она вытекает из сферической симметрии силы притяжения атомного ядра. Это — *внешняя* симметрия, подчиняющая себе закон движения, а не каждое состояние атома. Следовательно, эти состояния не будут сферически симметричными, и только набор состояний будет обладать сферической симметрией.

Это нетрудно понять в случае Солнечной системы (строение которой стало отправной точкой концепции атома Бора). Поскольку пространство изотропно, то Солнечная система обладает сферической симметрией, однако планеты описывают вокруг Солнца не окружности, а эллипсы, поскольку движение ни одной из планет не обладает сферической симметрией. Только совокупность возможных движений обладает такой симметрией, и это означает, что если мы знаем движение планеты, то любое движение, полученное из этого движения с помощью вращения, также возможно. В частности, оказывается, что планетные орбиты располагаются в одной и той же плоскости, но это не внутренне присущее им свойство, а лишь указание на условия рождения Солнечной системы. Они могли бы быть расположены иначе, как это доказывают искусственные спутники, плоскость вращения которых произвольна и зависит от направления их запуска. Точно так же и в атоме ни одно из состояний не обладает сферической симметрией (хотя такие состояния вообще существуют), но любое вращение состояния приводит к другому состоянию. Более общо, если система инвариантна относительно группы, то всякое принадлежащее к группе преобразование, примененное к состоянию системы, приводит к другому возможному состоянию.

Именно здесь обнаруживает себя фундаментальное свойство уравнения Шредингера и главных уравнений квантовой механики — *линейность*. За последние несколько страниц это слово встречается уже во второй раз. Здесь его использование означает, что сумма двух или большего числа решений уравнения Шредингера также является его решением и что, умножая решение на некоторое число, мы снова получаем решение. У векторов обычного пространства есть такое свойство: сумма многих векторов является вектором, равно как и результат умножения вектора на некоторое число.

Следовательно, волны — решения уравнения Шредингера — образуют *векторное пространство*; это функции, поэтому говорят, что имеется функциональное пространство, а поскольку уравнение имеет бесконечное число решений, пространство будет бесконечномерным. Если атом находится в *связанном состоянии*, — т.е. электроны не могут оторваться, — то в этом пространстве имеет силу теорема Пифагора. Здесь благодаря наличию двух взаимно «перпендикулярных» (в каком-то общем смысле) решений определяется «длина» функций-векторов и конструируются «прямоугольные треугольники», квадрат гипотенузы которых (диагональ параллелепипеда) будет равен бесконечной сумме квадратов его сторон.

Такое пространство является *гильбертовым пространством*. Любое решение уравнения, любое физическое состояние будет представлено суперпозицией состояний, получающейся путем проецирования их на стороны параллелепипеда. Эти основные решения, эти «стороны» представляют квантовые состояния Бора и являются частным случаем нормальных мод колебаний волны, с которыми мы встречались в главе VII. Это оси бесконечномерной поверхности второго порядка, о которой шла речь в той же главе и благодаря которой гильбертово пространство предстало в виде комплексного евклидова пространства (мнимости присутствуют в нем всегда).

Вернемся к теории групп. Мы сказали, что если физическая система, представленная уравнением Шредингера, обладает группой инвариантности (например, атом инвариантен относительно вращения) и находится в определенном состоянии, то преобразование, принадлежащее к группе, приводит к другому состоянию системы. Итак, состояние представлено вектором в гильбертовом пространстве. Другое состояние будет другим вектором, и преобразование является вращением первого вектора в сторону второго. Следовательно, мы имеем представление группы преобразований через посредство *вращений* в пространстве, образованном решениями уравнения Шредингера.

Более того, можно доказать, что бесконечномерное гильбертово пространство дробится на последовательность подпространств размерности 1, 2, 3 и т. д., причем основные состояния каждого из них являются решениями уравнения. Если применить к системе преобразование, принадлежащее к ее группе инвариантности (например, вращение физического пространства), то каждое подпространство совершит поворот внутри самого себя, не смешиваясь с другими подпространствами, и только в самом себе образует некоторое *представление* группы[78]. Следовательно, эти представления имеют физический смысл и играют большую роль в квантовой механике, поскольку они известны заранее, исходя из законов инвариантности системы, и дают знание *a priori* о волновых функциях до решения уравнения, даже если мы не знаем, как его решить. Разновидностью такого знания является *классификация квантовых состояний* на основе простых геометрических данных.

Например, если группа инвариантности является группой вращений физического пространства, то каждое представление соответствует величине момента импульса атома, который дан просто *порядком* представления. А состояния атома соответствуют той же самой величине момента импульса относительно некоторой оси, в качестве каковой выступает ось магнитного поля, действующего на атом[79].

Следовательно, классификация состояний атома дается линейными представлениями группы инвариантности физической системы, а соответствующие квантовые состояния нумеруются значениями, которые принимают физические величины, связанные с этой группой. Именно об

[78]Это немного похоже на то, как если бы обитатели многоэтажного дома тем или иным образом переместились, оставаясь при этом на своих этажах и не заходя на другие.

[79]Этот вопрос рассматривается во второй части работы [72].

этом говорится в цитате из Германа Вейля, избранной в качестве эпиграфа к этой главе. Теперь необходимо напомнить, что самым ярким проявлением квантования атомных систем является существование спектральных линий в испускаемом или поглощаемом свете. Итак, эти линии появляются в результате различных переходов из одного состояния системы в другое[80]. Следовательно, классификация квантовых состояний с помощью групп инвариантности одновременно дает и классификацию спектральных линий, и она получается, чаще всего, даже без решений уравнения Шредингера, с помощью простых рассуждений о симметрии физических систем и силовых полей, действующих на эти системы.

Симметрия способна и на большее. В самом деле, наблюдаются не все спектральные линии, соответствующие переходам между квантовыми состояниями: некоторые состояния являются «разрешенными», а некоторые — «запрещенными». Это действуют так называемые *правила отбора*. Эти правила также следуют из критериев симметрии, так что знания групп инвариантности достаточно для нахождения правил отбора, даже если неизвестно, как решать уравнение Шредингера.

Остается еще один важный вопрос, который будет затронут далее. Мы говорили о нем лишь вскользь: он касается физических величин, связанных с группами инвариантности. Чтобы не томить читателя в ожидании, напомним об идее Эли Картана, на которую мы уже ссылались. Ее суть заключается в том, что группа характеризуется сохранением чего-либо. Так, в системе, инвариантной относительно вращения, сохраняется момент импульса, о чем знал еще Ньютон, когда доказывал, что закон площадей (второй закон Кеплера) следует только из сферической симметрии поля тяготения.

Это замечание влечет за собой другое. Классификация квантовых состояний, основанная на представлениях группы, имеет смысл лишь потому, что бесконечное пространство состояний (гильбертово пространство) разлагается на

[80] В данном случае соседи по дому воспользовались лифтом.

конечные представления, и это разложение *сохраняется* во времени. Очевидно, что если физическая система, эволюционируя, могла бы переходить от одного представления к другому, то эта классификация уже была бы невозможна. Итак, сохранение этого разложения пространства связано с сохранением соответствующей физической величины. В самом деле, поскольку представления связаны с квантовыми значениями физической величины, то сказать, что разложение пространства сохраняется, — значит сказать, что сохраняются значения соответствующей величины.

Понятно, что законы симметрии могут действовать только в тех физических системах, в которых уже установлены законы сохранения. Они действуют лишь в неподвижном мире без прошлого и без будущего, где у эволюции нет права гражданства и где время не течет.

Глава X

КОГДА ФИЗИКА ПОРОДИЛА ГРУППЫ: В ПОИСКАХ ЛОГИЧЕСКОЙ ПРОСТОТЫ

Physical laws should have mathematical beauty[81].

П. А. М. Дирак

Краткая антология формальной физики

Теперь мы подошли к рассмотрению одного из величайших переломных моментов в развитии физики XX столетия. Собственно, это был *величайший* переломный момент. Мы видели, как законы симметрии понемногу приобрели важное значение в физике. Сначала они были лишь некоторым свойством, которое исследователи научились различать в объектах, известных в кристаллографии и в электромагнетизме. Затем мы присутствовали при первом утверждении власти групп в математике, которое превратило инвариантность относительно группы из свойства в определение.

В физике развитие было более долгим. В кристаллографии инвариантность была свойством, которое *устанавливалось*, и точно так же обстояли дела в теории электромагнетизма, когда Пьер Кюри вывел законы симметрии из опыта. Он уже дал доказательство появления некоторого нового мышления, занявшись поисками свойств и даже физических объектов (вроде магнитного монополя) просто потому, что их наличие допускалось законом симметрии. Но все изменилось именно с появлением теории относительности. Инвариантность Лоренца, присущая электромагнетизму и учрежденная Эйнштейном в качестве общего принципа, породила понятие ковариантности и ее геометрическое выражение в пространстве-времени.

[81]Физические законы должны обладать математической красотой (*англ.* — *Прим. перев.*).

Произошедший перелом был описан Ченом Нингом Янгом на уже упоминавшейся конференции [39]:

> Первым великим принципом симметрии в фундаментальной физике была инвариантность Лоренца, открытая в качестве математического свойства уравнений Максвелла, которые основывались на экспериментально наблюдаемых законах электромагнетизма. Затем, исходя из инвариантности Лоренца, Минковский потребовал, чтобы все уравнения поля были бы ковариантны относительно этого закона симметрии, что можно резюмировать следующим образом:
>
> опыт → уравнения поля → симметрия (*до* Эйнштейна и Минковского);
>
> симметрия → уравнения поля (*после* Эйнштейна и Минковского).
>
> Мощь законов симметрии и их физических следствий произвела сильное впечатление на Эйнштейна. Он занялся обобщением принципа инвариантности Лоренца, которое вкупе с принципом эквивалентности привело его к общей теории относительности. Можно утверждать, что именно Эйнштейн ввел новый принцип: взаимодействия предписываются симметрией.

Пьер Кюри мог бы провозгласить этот принцип, но он, несомненно, предпочел бы формулу «обусловливаются». Новизна проявилась уже на уровне терминологии: то, что прежде было предположением, стало теперь принципом. Но этот поворот был совершен не в 1905 г., а лишь позже, в 1915 г., найдя свое отражение в общей теории относительности Эйнштейна, а затем и в квантовой теории. Конечно, в 1916 г. Зоммерфельд ввел концепцию относительности в теорию атома Бора, но тогда, без введения ковариантности, это была всего лишь поправка. Положение изменилось только в 1923–1924 гг. с появлением волновой механики, когда де Бройль включил ковариантность в структуру теории квантов. Он сделал это в самом начале своих изысканий, стремясь объяснить квантование атома с помощью внутренних «часов» электрона, находящегося на своей орбите в резонансе, и, хотя это объяснение было затем отклонено (самим же де Бройлем), потому что оно не было ковариантным, именно оно привело его к гипотезе волны [19]. Обнаружение этой связи между ковариантностью и волнами материи является одной из величайших побед теории относительности. Но вначале рассуждения де Бройля не были *формальными*, они были *конструктивными*, и ковариантность вводилась только для разработки релятивистской модели электрона. Формальными его рассуждения стали только тогда, когда он отождествил релятивистский импульс с мировым волновым вектором, что оказалось первым образцом применения в квантовой механике того метода, на который указывал Янг.

Однако ни Шредингер (выводя свое уравнение), ни Гейзенберг (конструируя матричную механику) не обращались к законам симметрии. Следовательно, они действовали отлично от схемы Янга, самой известной иллюстрацией которой стало открытие Дираком релятивистского уравнения электрона. Именно на этом основании произойдет затем отказ от любых моделей в физике, которую сочтут уже слишком сложной для того, чтобы сохранять ремесленные процедуры. Эта идея была замечательным образом выражена Дираком в 1931 г. в статье, в которой он выдвинул гипотезу существования магнитного монополя, исходя из законов симметрии квантовой механики, — точно так же, как Пьер Кюри сделал это, исходя из законов электромагнетизма [59]. Дирак писал [73]:

> В настоящее время существуют такие ждущие своего решения фундаментальные проблемы теоретической физики, как релятивистская формулировка квантовой механики или природа атомного ядра (вместе с еще более сложными проблемами — такими, как проблема жизни). Решение этих проблем потребует, вероятно, более мучительного пересмотра наших фундаментальных понятий по сравнению с тем, как это происходило прежде. *Грядущие изменения, как представляется, будут настолько значительными, что способностей человеческого ума может оказаться недостаточно для открытия новых идей. Но именно такие идеи совершенно необходимы для того, чтобы, исходя из опытных результатов, попытаться сразу же сформулировать их в математических терминах.* Следовательно, будущий теоретик должен будет действовать косвенно. *Са-*

мый эффективный метод, который можно предложить в настоящее время, — это использование всех ресурсов чистой математики для усовершенствования и обобщения математического формализма, образующего настоящую основу теоретической физики. Лишь добившись успеха в этом направлении, следует стремиться истолковывать новые математические аспекты теории в терминах физических сущностей [...].

Я подчеркнул самые важные идеи, к которым Дирак неоднократно возвращался даже в форме заявлений эстетического характера, одно из которых приведено в качестве эпиграфа к данной главе и история которого заслуживает того, чтобы о ней рассказать. Во время визита в Москву Дирак оказался в кабинете Иваненко, и тот попросил его оставить в качестве сувенира какую-нибудь надпись, в которой он выразил бы свою концепцию физики. Дирак взял кусочек мела и написал на стене то кредо, которое мы процитировали. Этот жест вызвал некоторое затруднение, потому что кабинет пришлось запереть на ключ до тех пор, пока столяр не обеспечил сохранность ценного граффити стеклом в рамке. Я видел этот автограф Дирака целым и невредимым спустя годы, и каждый новый посетитель оказывался посвящен в историю появления здесь этой надписи.

Читателю — даже когда он узнает о подвиге, которым по праву можно назвать открытие Дираком своего уравнения, — такое отношение, вероятно, покажется все же немного чересчур восторженным. Ведь просто подвига еще недостаточно — нужно, чтобы он соответствовал духу времени, а дух времени олицетворял прежде всего Эйнштейн, который в письме, адресованном де Бройлю, выразился так [74, 75]:

15 февраля 1954 г.

Дорогой де Бройль!

[...] Вероятно, мотив моего обращения к Вам представляется немного странным. Ведь мне хотелось бы Вам объяснить, как я пришел к той методологии, которая взгляду стороннего наблюдателя кажется довольно своеобразной. Должно быть, я похож на страуса, который постоянно прячет свою голову в релятивистский песок, чтобы не смотреть в лицо гадким квантам. На самом же деле я — точно так же, как и Вы, — убежден, что следует искать некую субструктуру, некую необходимость, которую современная квантовая теория ловко скрывает, используя статистическую форму.

Но я уже давно убежден, что эту субструктуру нельзя обнаружить на конструктивном пути, исходя из поведения физических объектов, известных из опыта, поскольку необходимый концептуальный прыжок превосходит человеческие возможности. Я пришел к этому мнению не из-за безуспешности многолетних усилий, но исходя из моего опыта в теории тяготения. Уравнения тяготения могли быть открыты лишь на основе чисто формального принципа (общей ковариантности), т.е. на основе того убеждения, что законам природы присуща самая большая простота, которую только можно себе вообразить. Поскольку было очевидно, что теория тяготения является лишь первым шагом в направлении открытия общих, самых простых, какие только возможны, законов поля, то мне казалось, что этот логический путь сначала должен быть пройден до конца, чтобы точно так же надеяться на решение квантовой проблемы. Именно так я стал фанатичным приверженцем метода «*логической простоты*».

Альберт Эйнштейн.

Подчеркнутая фраза почти тождественна одной из подчеркнутых фраз Дирака. Их сближение тем более удивительно, что эти два автора придерживались значительно отличающихся друг от друга концепций квантовой механики, хотя в дальнейшем [76] Дирак не раз спрашивал себя, не прав ли, в конце концов, Эйнштейн. Во всяком случае, в 1931 г. его образ мыслей сильно отличался от эйнштейновского. Поэтому мы и говорим, что переход от физики моделей к формальной физике, переход от понятия симметрии, вытекающей из физических законов, к понятию физических законов, вытекающих из симметрии, приводит к появлению огромного разрыва между физикой XX столетия и прежней физикой. Этот разрыв превосходит разрыв принципа неопределенности. Доказательством может послужить сближение Эйнштейна и Дирака по поводу формализма. Возможно и другое доказательство, *a contrario*: расхождения между де Бройлем и Эйнштейном по вопросу формализма, несмотря на схожесть их позиций в совместном противостоянии неопределенности. Я могу сослаться и на личные воспоминаниями, касающиеся изменения отношения де Бройля к обсуждаемой проблеме. К моменту получения уже упомянутого нами письма Эйнштейна де Бройль вполне разделял эйнштейновскую позицию и ответил ему 8 марта 1954 г. [74]:

> То, что Вы написали мне в своем письме о Вашем отношении к проблемам квантов и о Вашем доверии к методу «логической простоты», вызвало у меня большой интерес. Мне действительно кажется правдоподобным, что очень общие взгляды на логическую самосогласованность, которые привели Вас к великолепным результатам в обобщенной теории тяготения и теориях единого поля, относятся именно к тем взглядам, которые когда-нибудь позволят лучше понять подлинный смысл квантов и корпускулярно-волнового дуализма.
>
> В моих нынешних исследованиях я пришел к мысли, что для учета дуализма «волна–корпускула» необходимо развить волновую механику, основанную на нелинейных уравнениях, по отношению к которым обычные линейные уравнения были бы всего лишь приближенными формами, имеющими силу в определенных условиях. Но чтобы продвинуться на этом пути, следовало бы уточнить форму еще неизвестных нелинейных уравнений. Это — трудная задача, и я не понимаю, как можно вывести такие уравнения, исходя только из результатов физики. Согласно Вашими идеям, эта задача, несомненно, может быть решена лишь при движении по пути, аналогичном тому, который привел к уравнениям общей теории относительности, т.е. при следовании идее логической простоты.
>
> Луи де Бройль.

Следует сказать, что тогда для де Бройля едва закончился тот длительный период, в течение которого он полагал аргументацию Копенгагенской школы убедительной (и впоследствии горько упрекал себя в том, что этот период в его жизни вообще был) [25]. Де Бройль целиком посвятил себя исследованию нелинейного уравнения волны. Он считал, что такое уравнение необходимо вывести для новой интерпретации волновой механики. И разве мог он не быть глубоко впечатлен полученным им выдающимся свидетельством? В то время он надеялся, что общие условия, выведенные из теории относительности и волновой механики, позволят ему записать верное уравнение, и мечтал о сближении с общей теорией относительности. Затем, после многих неудач разочаровавшись в этом методе, де Бройль убедился в необходимости выдвижения новой физической идеи, выходящей за пределы существующих теорий. Ниже я хочу поделиться воспоминанием о событиях, произошедших более тридцати пяти лет назад.

В 1979 г., в столетний юбилей Эйнштейна, мы собирались опубликовать некоторые его письма в «*Annales de la fondation Louis de Broglie*»[82] [74], что стало для де Бройля поводом эти письма перечитать. К тому времени он уже подзабыл и их, и свои ответы, и как бы новыми глазами вместе со мной прочел письмо, приведенное выше. Его реакция был очень живой:

> Ну что же, он глубоко заблуждается [воскликнул он]. В эпоху разработки общей теории относительности Эйнштейн подпал под дурное влияние своих молодых ассистентов, которые слишком налегали на математику. Великая эпоха Эйнштейна, когда он проявил всю мощь своего гения, была эпохой теорий в области молекулярной физики, квантовых теорий и специальной теории относительности. Общая теория относительности далека от того, чтобы быть столь же надежной. Это восхитительная интеллектуальная конструкция, но в том, что касается физики, она подобна пирамиде, стоящей на своей вершине. Она связана с наблюдениями и опытом только через посредство небольшого числа фактов. Ее надежность совершенно несопоставима с надежностью специальной теории относительности или квантовых теорий. Если оставаться в рамках ее формализма — как, впрочем, и в рамках любого формализма, — то никогда не удастся прийти ни к какой по-настоящему новой идее. Не следует забывать, что если Эйнштейн в эпоху создания обобщенной теории относительности смог с успехом использовать теорию римановых пространств и тензорное исчисление, то лишь потому, что прежде он интуитивно понял те проблемы, которые он хотел решить. Похоже, в своем письме он забыл, что задолго до того, как он смог вычислить параметры физических эффектов, поддающихся

[82]«Анналы фонда Луи де Бройля» (*фр. — Прим. перев.*).

предсказанию или объяснению на основе общей теории относительности, он уже знал об этих эффектах. К сожалению, ситуация с проблемами, которые мы должны решить для новой интерпретации квантовой механики, выглядит иначе. Если мы еще не приблизились к такой новой интерпретации, то лишь потому, что мы недостаточно хорошо понимаем те физические трудности, с которыми мы сталкиваемся. Адекватный математический формализм может появиться лишь потом. Поставить его на первое место значило бы ограничить себя рамками существующих теорий и затемнить суть дела. (*Из личных архивов автора.*)

Я цитирую слова де Бройля не по памяти, а по тем записям, которые я сделал сразу же после того, как ушел от него. Он обращался ко мне с подобными речами не раз. Так, например, по случаю столетия Эйнштейна де Бройль посоветовал мне сделать все от меня зависящее, чтобы в центре внимания оказалась не формальная красота общей теории относительности, а прежде всего физический гений самого Эйнштейна, которым он бесконечно восхищался.

Между тем, две точки зрения (точка зрения Дирака и Эйнштейна, с одной стороны, и точка зрения де Бройля — с другой) не столь противоположны друг другу, как можно было бы подумать: все зависит от обстоятельств и решаемой проблемы. В то время, когда Дирак написал процитированные нами строки, он пытался развить квантовую механику в тех рамках, которые уже принял сам и которые сохраняются в наше время: придерживаться их означало не недостаток, а достоинство. Точно так же и Эйнштейн стремился включить квантовую механику в расширенную концепцию геометрии, разработанную в общей теории относительности. Поэтому было естественным сообразовываться с теми принципами, которые эта концепция выдвигала, и руководствоваться критериями логической простоты. Что касается де Бройля, то поначалу он верил, что сможет дать просто новую интерпретацию квантовой механики. Оставаясь в этих рамках, он опирался исключительно на принципы теории относительности и квантовой механики. Прошли годы, и ему стало ясно, что его проект оказался гораздо шире и сложнее, чем он предполагал, и что он должен был бы открыть новые физические принципы, которые от него все еще ускользают. В этой новой перспективе приверженность к существующим формализмам выглядела как ошибка, и резкая перемена его взглядов в связи с письмом Эйнштейна явно свидетельствует об этом.

Вернемся к геометрии, к законам симметрии и их роли в физике XX века. Их господство было настолько всеобъемлющим, что они привели, в конце концов, к вытеснению из теоретической картины мира самой материи. Эти законы не только предписывают уравнения и физические законы, они сами *суть* материя. В главе VI уже говорилось, что Эйнштейн показал, как материя благодаря окружающему ее полю тяготения вызывает искривление пространства и как ее можно отождествить с этим искривлением: материя *и есть* кривизна, *она сама стала* геометрическим свойством. Можно провести здесь параллель с лекцией Гейзенберга в Гарварде *«Развитие понятий в истории квантовой механики»*, которая заканчивалась следующим образом [77]:

> Остается вопрос: чем должно быть заменено понятие элементарной частицы? Я думаю, его следует заменить понятием фундаментальной симметрии. Фундаментальные симметрии задают фундаментальные законы, определяющие спектр элементарных частиц [...]. То, что мы должны искать, — это не фундаментальные частицы, а фундаментальные симметрии. И когда мы, опираясь на открытие Дираком антиматерии, эффективно изменим это наше главное понятие, то, по моему убеждению, нам больше не придется ждать какого-то нового прорыва для понимания элементарных частиц, — или, скорее, не-элементарных. Мы должны будем только научиться работать с этим новым и довольно-таки абстрактным понятияем.

Повторим еще раз, материя и геометрия тождественны друг другу. Поиски законов симметрии частиц закончены: эти законы *суть* сами частицы.

Уравнение Дирака

Дирак, один из оригинальнейших умов XX столетия, оказал науке неоценимую услугу науке — но, по-видимому, не теоретикам. Его чудо-уравнение произвело на теоретиков такое же впечатление, какое на золотоискателей производит находка огромного самородка: это событие отравило их умы мечтами о том, что чудо повторится. Общая теория относительности, плод грандиозного усилия одиночки, не произвела такого впечатления, поскольку давала ответ на вопрос, который задавал себе только Эйнштейн, и все согласились, что он единственный, кто может найти ответ на него. Напротив, открытие Дираком своего уравнения создавало видимость простоты и порождало ощущение в духе вопроса: «Почему не я?». Однако за этим уравнением открывался такой мир, существование которого не мог представить себе даже сам Дирак, — мир, который погружал в грезы и вызывал страстные желания.

В 1928 г. Дираку было двадцать шесть лет (это была эпоха *Knabenphysik*). «Новая механика», как тогда говорили, буквально бурлила. Волне де Бройля исполнилось уже пять лет, теории матриц Гейзенберга — три, а уравнению Шредингера — два. Механика уверенно шла от успеха к успеху. Но оставались некоторые непроясненные моменты. Конечно, из уравнения Шредингера получались великолепные результаты, и оно по своим возможностям явно превосходило теорию Бора. Однако вычисления строения спектров были не столь успешными. Спектральные линии, предсказываемые обеими теориями, совпадали и довольно точно соответствовали наблюдениям, но при ближайшем рассмотрении эти линии оказались состоящими из совокупности более тонких линий. Они обладали *тонкой структурой*, которую теория не учитывала. И речь шла вовсе не о деталях: слабые следствия могут скрывать под собой сильные причины, что и имело место в данном случае.

Зоммерфельд смог учесть спектральное раздвоение (*дублеты Зоммерфельда*) благодаря *теории относительности*. Но эта поправка отсутствовала в уравнении Шредингера, потому что оно не является релятивистским, и это первая из причин, по которым из него не может быть выведена тонкая структура. Судя по всему, и идея Зоммерфельда не в состоянии была разрешить проблему в целом, поскольку дробление спектральных линий является более сложным. Временный выход из этого затруднения был найден с помощью введения в теорию Бора квантового числа *ad hoc*, но Уленбек и Гаудсмит вскоре открыли, что это число представляет собой вращение электрона вокруг своей оси. Следовательно, электрон обладает моментом импульса, как волчок, а магнитный момент должен возникать вследствие вращения электрического заряда. Это — *спин* электрона (от англ. «to spin» — «вертеть», «вращать»), фундаментальное свойство частиц. Но, как и в случае теории относительности, этому свойству ничто не соответствует в уравнении Шредингера. Это другая причина, по которой оно не учитывает тонкую структуру спектральных линий.

Сперва делались попытки временно смягчить эти недостатки уравнения по отдельности. С одной стороны, релятивистское уравнение, *уравнение Клейна–Гордона*, выводили многие авторы, но их результаты, как ни странно, были хуже результатов, которые дает теория Зоммерфельда. Кроме того, в них не учитывался спин, а вместе с ним и половина спектральных линий. С другой стороны, Паули вывел уравнение, в котором спин учитывался и которое давало достаточно точные предсказания, но в нем, как и у Шредингера, не учитывалась теория относительности. Следовательно, спин и теория относительности оставались отделенными друг от друга.

Именно тогда и вмешался Дирак. Он отклонил уравнение Паули, поскольку оно содержало слишком много произвольных гипотез. Дирак хотел, чтобы уравнение следовало из общих принципов. Не будучи в состоянии справиться с проблемой спина, он отказался от ее решения — запомним это! — чтобы посвятить себя анализу соображений, вытекающих из теории относительности. Не принял он и уравнение Клейна–Гордона, выдвинув два критических замечания.

Первое вытекало из вероятностной интерпретации квантовой механики. Для того, чтобы статистика величин, характеризующая атомную систему, описывалась бы волной в качестве решения уравнения, необходимо, чтобы выражение этой волны в пространстве в некоторый момент времени определяло бы ее эволюцию. Так обстоит дело у Шредингера, но не у Клейна и Гордона, что и побудило Дирака отказаться от их уравнения[83].

Второе критическое замечание касалось энергии и электрического заряда. Когда получали решение уравнения Клейна–Гордона, представляющее частицу, которая обладает определенной энергией с положительным знаком (как и все виды энергии), то получалось и другое решение, представляющее ту же самую частицу, но с *отрицательной энергией*. Точно так же, если находилось решение, соответствующее электрическому заряду определенного знака, то существовало и другое решение с противоположным знаком. При попытках же исправить знак заряда изменялся знак энергии. Таким образом, выходило, что существуют электроны с отрицательной энергией, что казалось нелепым, и электроны с положительным зарядом, чего никто никогда не наблюдал.

Дирак не знал, как избавиться от этого второго недостатка, и занялся достаточно абстрактной задачей: попытаться удовлетворить вероятностным условиям, оставаясь в согласии с теорией относительности[84]. Критические замечания и принципы, положенные Дираком в основание его теории, лишь кажутся простыми: об этом свидетельствует то, что он был единственным, кто их сформулировал. В них не было ничего, кроме логической простоты, но это и было самое главное.

Увы, нам придется здесь опустить рассуждения о математических процедурах, которые Дирак использовал для решения своей проблемы и которые невозможно перевести на обычный язык. Заметим только, что он исходил все-таки из уравнения Клейна-Гордона, единственного релятивистского уравнения, известного в то время. Дирак избавил его от присущих ему недостатков благодаря смелому символическому исчислению, потребовавшему

[83]В техническом отношении производная по времени имеет первый порядок у Шредингера и второй — у Клейна и Гордона.

[84]Следовательно, он поставил на первое место производные по времени.

введения не одной, а четырех волн, подчиняющихся четырем уравнениям, которые формально объединяются в одно — в *уравнение Дирака,* и чудеса начали следовать одно за другим.

Когда Дирак ввел в свое уравнение электромагнитное поле, он заметил, что его электрон ведет себя не как простой электрический заряд, а как маленький магнит: у него был *магнитный момент*, и величина этого магнитного момента, хотя Дирак его не искал, была правильной. Еще удивительнее то, что движущийся электрон обладал электрическим моментом: в теории относительности движущийся магнитный момент порождает электрический момент, и уравнение само сообщило об этом. Эти два момента — магнитный и электрический — являются плодом ковариантности, и оба существуют в реальности.

Затем Дирак ввел в уравнение поле атомного ядра, чтобы описать атом Бора, пробный камень атомистических теорий. Кроме того, он хотел проверить сохранение момента импульса, т. е. второй закон Кеплера — *закон площадей*, которому удовлетворяют модель Бора и уравнение Шредингера. И вот результат проверки: этот закон не выполняется для уравнения Дирака! Истинный же закон намного красивее: сохраняющейся величиной является *сумма* обычного момента импульса и *спина* электрона — закон, который, следовательно, содержался в уравнении Дирака, хотя Дирак его в это уравнение и не вводил.

Появление в уравнении Дирака спина (одновременно механического и магнитного) кажется чем-то чудесным, но задним числом можно отыскать причину этого. В предшествующей главе мы видели, что группа Лоренца содержит одновременно преобразования Лоренца и вращения пространства. За релятивистской ковариантностью скрываются вращения, которые Дирак выявил с помощью корректного использования условий инвариантности.

С другой стороны, мы видели, что вместо одной шредингеровской функции Дирак был вынужден ввести четыре волновые функции. Между тем, единственная функция соотносится с простым случаем звуковых волн, направленных по линии своего распространения. Напротив, волна, имеющая много составляющих, напоминает об оптике Френеля или Максвелла и о *поляризации* света. Электрон Дирака также является поляризованным вследствие его собственного вращения, т.е. наличия у него спина. Эта поляризация отличается от поляризации света, но связь со спином была подтверждена де Бройлем, который доказал, что поляризация света связана со спином фотона, отличным от спина электрона, из чего и проистекает различие в поляризации.

Когда Дирак хотел проверить, является ли его уравнение релятивистски ковариантным, он заметил, что четыре волновые функции образуют новую сущность в теории относительности — *спинор*, о котором мы упоминали в предыдущей главе. Ученые застигнуты врасплох — все, за исключением Эли Картана, открывшего спиноры пятнадцатью годами ранее в теории *группы вращения*. В общем, благодаря теории относительности все предрасполагало к тому, чтобы «в этом уравнении что-то вращалось»!

Но оставалось еще нечто таинственное. Если бы Дирак удовольствовался лишь релятивистскими условиями, то стала бы понятной связь между появлением спина и имплицитным введением группы вращений с помощью группы Лоренца. Но это не совсем так. На самом деле не менее важную роль играет другое условие[85], касающееся вероятностного представления и позволяющее получить уравнение, отличное от уравнения Клейна–Гордона, от которого Дирак как раз и хотел отказаться. Не связанное логически с теорией относительности, это условие определяется лишь интерпретацией квантовой механики и зависит от другого закона инвариантности, *теории преобразований*, которая, в свою очередь, связана со структурой динамики Гамильтона. Можно сказать, что вращение, «скрытое» в группе Лоренца, было извлечено на свет вероятностным условием, выдвинутым Дираком ... но это ничего не объясняет!

Вернемся к рассмотрению атома водорода. Разумеется (не странно ли звучит это привычное «разумеется», когда

[85]Это условие исключает вторые производные и вводит первые производные. Они подразумевают лишь время, но, поскольку теория относительности связывает время и пространство между собой, то все производные являются первыми.

речь идет о чуде?), уравнение предсказывает все спектральные линии вместе с их тонкой структурой, относительные интенсивности этих линий, поляризацию, ширину. Все это в уравнении действительно есть. Его точность намного превосходит легендарную астрономическую точность. Понадобилось двадцать лет и прогресс радиотехники (начало которому положило появление во время войны радара), чтобы опытным путем была наконец обнаружена последняя тонкая структура, которую теория не предсказывала. Эта структура связана с *эффектом Лэмба* — микроскопическим смещением спектра, которое после нового улучшения теории было-таки в нее включено.

И все же оставался некий «изъян» — *отрицательные энергии*, к огорчению и досаде Дирака неизменно присутствовавшие в уравнении. На этот раз чуда не произошло. Он надеялся, что они представляют протон, но это оказалось не так. Он пытался устранить их, но безуспешно. В самом деле, решения *линейного* уравнения Дирака могут быть представлены в качестве подходящей суперпозиции *плоских волн*, обладающих определенной энергией и распространяющихся в определенном *направлении. Но для этого необходимо* иметь плоские волны, обладающие всеми возможными энергиями. Правда, во многих случаях достаточно допущения о существовании волн, обладающих положительной энергией, но иногда все же приходится допускать наличие волн, обладающих отрицательной энергией. Такая необходимость появляется при рассмотрении резкого перехода электрона из одной среды в другую (*парадокс Клейна*) или в том случае, когда электрон заключен в объеме, размеры которого меньше *комптоновской длины волны* (она в сто раз меньше размеров атома и в сто раз больше размеров электрона).

Решения, дающие отрицательные энергии, в течение нескольких лет рассматривались как недостаток уравнения, но в 1931 г. Дирак задался вопросом, не соответствуют ли они *антиэлектрону* — частице с той же массой, что и электрон, но противоположной по знаку заряда. В том же году Андерсон (не читавший работ Дирака!) открыл эту новую частицу в космических лучах. Она получила название *«позитрон»*.

Таким образом, единственный «недостаток» уравнения Дирака обернулся его триумфом, тем более, что связь «частица—античастица» оказалась всеобщей. Открытие позитрона стало открытием антиматерии. Однако может возникнуть вопрос: чьей заслугой следует считать «открытие» самих отрицательных энергий? Произошло ли это благодаря квантовой механике, или теории относительности, или, быть может, важно было само их объединение? Конечно же, одной только квантовой механики для этого недостаточно, поскольку в уравнении Шредингера проблема отрицательных энергий не возникает. В сущности, «ответственность» за отрицательные энергии несет теория относительности. К анализу этого вопроса мы еще вернемся.

На этом рассмотрение уравнения Дирака мы завершим, поскольку для понимания окружающего его ореола сказано уже достаточно. Собственно, к нему, равно как и к уравнению Максвелла, в полной мере можно отнести фразу Герца, приведенную в главе IX: «... эти математические формулы обладают независимым существованием и собственным рассудком [...] они знают больше, чем мы...». Теоретическая физика XX столетия достигла головокружительных успехов: никогда прежде столь прямолинейный и столь простой логически подход не приводил к подобным результатам.

Дирак довел геометризацию физики до совершенства. Он сконструировал свое уравнение отнюдь не путем добавления в него членов, предназначенных для учета определенных явлений. Более того, существования многих явлений он просто не предвидел. Он опирался лишь на великие принципы, выраженные через посредство математических процедур. Эти процедуры таили в себе удивительные неожиданности, превосходящие самые смелые фантазии. Такой итог обусловлен действием законов симметрии, связывающих между собой математические выражения. На первый взгляд (а иногда и на второй, и на третий...) они могут показаться необычными и громоздкими. Но такая видимость сохраняется лишь до тех пор, пока не будет разрешена физическая интерпретация этих математических выражений путем соотнесения их с экспериментальными фактами. Решения, дающие отрицательную энергию, — пожалуй, самый знаменитый пример, но есть и другие, менее известные.

В сущности, уравнение Дирака дает шестнадцать непосредственных фундаментальных величин (еще больше других, более сложных). Это — *тензорные величины*, и все взаимосвязаны, так что ни одну из них нельзя отбросить без того, чтобы не расшатать все здание. Некоторые из них прозрачны, наполнены физическим смыслом и радуют ум исследователя. Но есть среди них и столь неожиданные, что непонятно, как они были обнаружены при движении по конструктивному пути. Только формальный путь мог бы, начинаясь с общих аргументов, привести к их открытию. Однако есть еще и такие, которые даже спустя семьдесят лет остаются непрозрачными и сохраняют свою тайну. Но теоретический подход изменился: прежде, если что-то в уравнении казалось странным, теоретики подозревали, что в него вкралась ошибка. Теперь же, когда они добились таких больших успехов, разве можно не верить в то, что каждая величина, предсказанная уравнением, когда-нибудь все-таки будет понята?

Именно таким образом при интерпретации одной из этих «остаточных» величин — угла, введенного в теорию в обход всех известных законов, — было доказано, что существует другой способ введения электромагнитного поля в уравнение Дирака. Был также доказан тот замечательный факт, что существует только два способа сделать это. Один, общеизвестный, описывает электрический заряд, а другой описывает магнитный монополь, существование которого предсказали Пьер Кюри (исходя из других соображений) и Дирак. Если эта частица однажды будет обнаружена, то она будет описываться уравнением, полученным из уравнения Дирака[86].

Теперь мы временно оставим рассмотрение непрерывных групп ради анализа дискретных преобразований, играющего большую роль в квантовой механике.

---

[86]Это было открыто автором книги. С тех пор как эта книга была написана, русские работы (особенно Уруцкоева и сотрудников) позволяют думать, что эта частица — магнитный монополь — действительно существует и производит эффекты.

Дискретные преобразования

Некоторые дискретные преобразования уже давно были известны в кристаллографии, в механике и в теории электромагнетизма: это симметрии относительно плоскости, оси или центра, которые встречаются также в химии и биологии. Но квантовая механика придала всеобщее значение этому типу преобразований, особенно трем из них, к которым она свела и все остальные: *зарядовое сопряжение* (С), или симметрия «частица–античастица», *инверсия пространства* (Р), или зеркальная симметрия, и *обращение времени* (Т), или замена будущего на прошлое, а прошлого на будущее, т.е. зеркало времени; каждое из них образует группу, сводящуюся к самому преобразованию и единице, поскольку произведение каждого преобразования на само себя восстанавливает начальное состояние, что равносильно воздействию единичного элемента. Эти «малые» группы чрезвычайно важны.

Зарядовое сопряжение (зарядовая четность) (С). Мы встречались с зарядовым сопряжением в уравнении Дирака при открытии позитрона, но, вопреки общепринятому мнению, отнюдь не квантовая механика, а теория относительности породила эту проблему в 1925 г., опять благодаря Эйнштейну [79], еще до появления уравнения Клейна–Гордона и даже до уравнения Шредингера. Статья Эйнштейна была написана в его особой манере, с этаким «невинным видом», с извинениями за простоту того, что он должен сказать, и с выражением надежды на то, что это может быть полезно другим, потому что для него самого это было неожиданностью. Он писал [79]:

> Если электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором второго ранга, то в общем случае невозможно найти релятивистские ковариантные уравнения, которые: 1) имеют решения, соответствующие отрицательному электрону; 2) не имеют никакого решения, соответствующего положительному электрону с той же массой.

Следовательно, отрицательный и положительный электроны взаимосвязаны, и то, что связывает их, как доказал Эйнштейн, — это обращение времени (значительно позже

Фейнман показал, что в квантовой механике позитрон можно рассматривать как электрон, движущийся вверх по течению времени). Неприятность заключалась в том, что никто никогда не видел положительного электрона. Эйнштейн не дошел до того, чтобы предсказать его существование, однако заметил, что единственным средством преодоления трудностей было бы допущение, что электромагнетизм навязывает времени направление его течения, а тяготение — нет, что и побудило Эйнштейна сделать следующее замечание:

> Здесь заключена существенная разница между электромагнетизмом и тяготением, и поэтому все попытки отлить в одной и той же форме электродинамику и законы тяготения кажутся нам недостаточно обоснованными.

Иначе говоря, Эйнштейн сознательно, несмотря на почти робкий тон заявления о важности замеченной им разницы, без колебаний «бросает камень» в собственный «огород», т.е. в теорию единого поля. Он делает это не только из научной честности, но, несомненно, вследствие беспристрастного отношения к науке вообще, в которой ничто нельзя считать хорошо известным[87,88].

Отчасти основываясь именно на этой статье Эйнштейна, мы и утверждали выше, что за появление античастиц ответственна теория относительности, а вовсе не квантовая механика. Но Меллер [80] привел другой аргумент, доказав, что отрицательные энергии появляются в *специальной*

---

[87]Чтобы избавиться от положительных электронов, Эйнштейн попытался переставить в уравнениях электрические и магнитные поля, но заметил, что в этом случае *инверсия пространства* изменила бы на противоположные знаки зарядов, что и понятно, поскольку это приводило бы к замене электрона магнитным монополем! Он добавил, что любое произведение PT, т.е. произведение инверсии пространства на обращенное время, всегда меняет знаки зарядов на противоположные, а это уже не что иное, как CPT-теорема (с ней мы тоже скоро познакомимся), доказанная за двадцать пять лет до появления ее официального доказательства!

[88]Можно добавить, что недавний пересмотр (автором книги) теории света и теории гравитона де Бройля и Тоннела показывает: а) существование магнитного фотона (наряду с обычным фотоном); б) связь этого фотона, а не обычного с гравитоном; в) откуда пересмотр теории одного поля связана со словами Эйнштейна

теории относительности во вращательных движениях: если релятивистский волчок *вращается слишком быстро* и *слишком мал*, то у него есть зоны отрицательной энергии. Результат выражается неравенством, которое, хотя оно и не является квантовым, объясняет, почему электрон Дирака, локализованный в очень маленьком пространстве, не может быть представлен волнами, обладающими положительной энергией.

Интересно, что несмотря на успех своего уравнения Дирак всю жизнь искал другое уравнение, не допускающее отрицательных энергий, к которым он продолжал испытывать отвращение [76]. Однако Дирак не сомневался в важности античастиц, само существование которых стало многократно подтвержденным законом физики. Но если открытие позитрона произвело научную революцию, то открытие антипротона стало всего лишь научным событием, а открытие других античастиц превратилось в рутину. Заряженные частицы существуют парами, и никто в этом не сомневается. Любопытно, что трудности связаны именно с электрически нейтральными частицами, потому что, хотя они и взаимосвязаны, но распадаются на две категории:

— иногда античастица отличается от частицы: так, например, антиводород состоит из антипротона и позитрона, чем отличается от обычного атома, а антинейтрон обладает магнитным моментом, противоположным моменту нейтрона;

— однако существуют *истинно* электрически нейтральные частицы, почти тождественные своим античастицам, от которых они отличаются фазой связанной с ними волны.

Среди электрически нейтральных частиц самыми важными являются *нейтрино*, участвующие в слабых взаимодействиях. Согласно ныне господствующим теориям, масса нейтрино равна нулю, как у фотона, а согласно опыту, она очень незначительна. У нейтрино есть фундаментальное свойство: оно является *левовинтовым*, или обладает *левой спиральностью* (точно так же, как у руки или резьбы на винте есть свойство быть «левой»). Напротив, антинейтрино является *правовинтовым*, или обладает *правой спиральностью*: это отражение нейтрино в зеркале. Обратим внимание и на то, что *магнитный монополь* должен иметь такое же свойство: монополь и антимонополь не могут быть носителями противоположных по знаку магнитных зарядов, они должны быть двумя противоположными состояниями одного и того же заряда, отражениями друг друга в зеркале [78]. Это обстоятельство обнаруживает радикальное различие между электричеством и магнетизмом.

Инверсия пространства (пространственная четность) (P). Это — зеркальная симметрия, старше всех в науке. Однако именно она, благодаря квантовой механике, преподнесла самый большой сюрприз. В самом деле, физики всегда думали, что вселенная тождественна своему отражению в зеркале[89]. Паули говорил: «Я не думаю, что Бог — левша». Фактом является то, что трем из четырех известных взаимодействий (тяготение, электромагнетизм и сильное взаимодействие) свойственна зеркальная симметрия. Говорят, что в них сохраняется *четность пространства*, и долгое время считалось очевидным, что то же самое имеет место и для четвертого, *слабого, взаимодействия*. Но в 1956 г. Ли и Янг в коротком мемуаре, произведшем эффект разорвавшейся бомбы, заметили, что экспериментально это никогда не было доказано и что это представление, скорее всего, неверно. Вскоре пришлось признать, что их предвидение было прекрасно подтверждено великолепным опытом г-жи Ву: Бог — совершенно явный левша. Это обнаруживается в макроскопических эффектах, напоминающих о том, что говорил Пьер Кюри об электрическом и магнитном полях (глава X). Кратко остановимся на этом.

Само собой разумеется, в зеркале нельзя увидеть отражение взаимодействий между элементарными частицами, но можно сделать это косвенно. Сперва поставим простой опыт перед зеркалом: ввинтим штопор в пробку бутылки.

[89]Потому что они забыли, что Пастер и Пьер Кюри уже давно знали что это не правда, и изучали это. (*Примечание автора.*)

Мы увидим, что штопор и его отражение двигаются в одном и том же направлении и погружаются, соответственно, в пробку и ее отражение, но вращаются они в противоположные стороны.

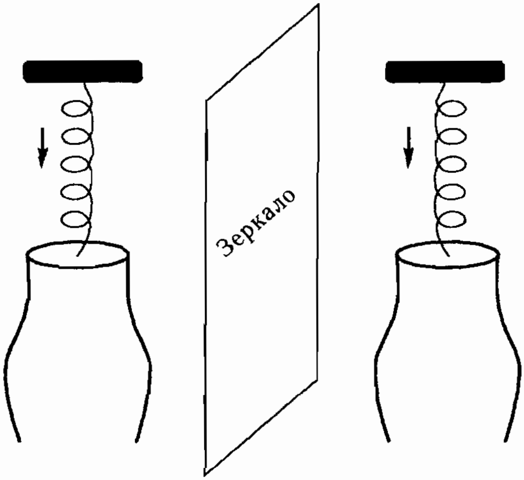

Рис. 29. Штопор и его отражение двигаются в одном и том же направлении, но вращаются в разные стороны

В абстрактных терминах можно сказать, что опыт характеризуется двумя векторами (глава IX).

Первый вектор определяет скорость, с которой движется штопор: это — *полярный* вектор, и его зеркальное отражение в профиль тождественно ему.

Второй вектор является *аксиальным*: он определяет вращение штопора. Он направлен вдоль оси, но его ориентация зависит от направления вращения. Его отражение в профиль является обратным.

Следовательно, совокупность двух векторов не накладывается на свое отражение — точно так же, как в случае совокупности электрического и магнитного полей (глава IX). Теперь заменим бутылку образцом радиоактивного кобальта, используемого в лучевой терапии. Атом испускает β-частицу: его ядро распадается при испуска-

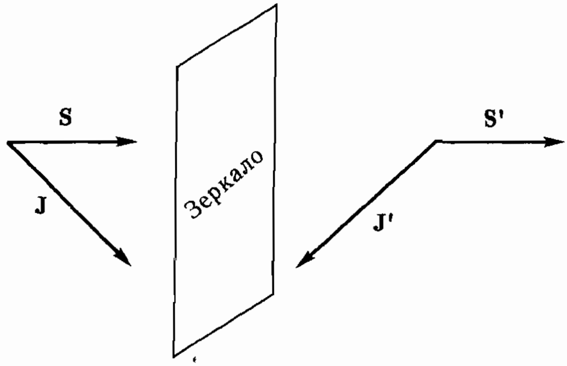

Рис. 30. Аксиальный вектор, перпендикулярный зеркалу, тождественен своему отражению, тогда как полярный вектор направлен в другую сторону, потому что его компонент, перпендикулярный зеркалу, имеет противоположное направление

нии электрона. Это — *слабое взаимодействие*. Кроме того, у ядра есть спин, который мы можем сориентировать в определенном направлении с *помощью магнитного поля*. Это будет наш *аксиальный вектор*, аналогичный штопору. *Полярным вектором* будет интенсивность радиоактивного излучения во внешнее пространство.

Следовательно, совокупность двух векторов (спина и интенсивности излучения) не совместима со своим зеркальным отражением, потому что первый вектор изменяет свое направление, а второй — нет, так что образуемый ими угол в отражении заменяется его дополнением до 180^0.[90]

Конечно, мы не можем непосредственно видеть отражение радиоактивной реакции в зеркале, но мы можем найти ей эквивалент. Для этого измерим радиоактивное излучение, испускаемое в каком-либо направлении, что даст нам определенный угол относительно спина образца вещества, направление которого сохраняется неизменным с помощью магнитного поля. Согласно вышеизложенному,

[90]Не следует забывать, что в случае штопора, аксиальный и полярный векторы, оба были параллельны зеркалу. Здесь аксиальный вектор (спин) перпендикулярен к зеркалу, тогда как полярный вектор (интенсивность излучения), наклонен к зеркалу. (*Добавление автора к русскому переводу.*)

если бы мы могли рассматривать явления в зеркале, отражение интенсивности образовывало бы не тот же угол относительно спина, а угол, дополняющий его до 180^0. Следовательно, для наложения явления на свое отражение, нужно, чтобы, измеряя радиоактивность в двух направлениях, образующих относительно спина углы, в сумме равные 180^0, мы получили бы один и тот же результат. Но это же неправильно! Будут обнаружены различные интенсивности, и это означает, что β-радиоактивность не совпадает со своим «отражением» в зеркале. Следовательно, слабые взаимодействия нарушают закон сохранения четности или, как говорят, *они не являются Р-инвариантными*. Обнаружение этого свойства одновременно привело к открытию киральности нейтрино, о которой мы говорили, потому что в ходе β-распада нейтрино испускается в то же самое время, что и электрон.

Другие опыты (распад пиона и мюона), концептуально подобные предшествующему, доказали, что слабые взаимодействия нарушают также закон зарядовой четности. В них сохраняется только произведение PC двух преобразований.

Прошли годы, прежде чем мы привыкли к идее несохранения четности. Оглядываясь назад, мы могли бы сказать, что во всем этом не было ничего удивительного, потому что в природе мы сталкиваемся с киральностью буквально на каждом шагу, примером тому могут послужить наше собственное зеркальное отражение и наши «не совпадающие» руки. Верить в приложимость этого замечания к закону элементарного взаимодействия мешает нам наша приверженность известному аристотелевскому предрассудку. Наше тело и явления, сопоставимые с нашим масштабом, согласно этому предрассудку, «подвержены порче», а фундаментальные взаимодействия — нет, точно так же, как прежде подверженной порче считалась Земля, но не небесные светила.

Однако первая неожиданность в этой области восходит к знаменитому открытию Пастера (см. [16] и [62]), разгадавшего тайну двух химических веществ, *виннокаменной и виноградной кислот*, имеющих одинаковое химическое строение, но отличающихся друг от друга тем, что раствор первой кислоты вызывает вращение плоскости поляризации света, а раствор второй — нет. Ответ Пастера состоял в том, что молекула виннокаменной кислоты является *киральной*: для одного и того же химического состава существуют два способа расположения атомов, которые являются зеркальными отражениями друг друга. Таким образом, существуют две виннокаменные кислоты: одна — *вращающая плоскость поляризации света влево*, а другая — *вращающая плоскость поляризации света вправо*[91]. Эту разницу можно наблюдать невооруженным глазом, поскольку она проявляется в форме кристаллов. Вызывая кристаллизацию виноградной кислоты, Пастер доказал, что она состоит из смеси левовращающей и правовращающей кислот. Он терпеливо вручную отделил различные виды кристаллов друг от друга и доказал, что после растворения они вращают плоскость поляризации света в двух различных направлениях. Так он открыл киральность (названную *энантиоморфизмом*).

Кратко изложим продолжение этой истории, выходящей за рамки данной книги. Пастер обнаружил, что живая материя отдает предпочтение одному из двух направлений вращения, что дало толчок его дальнейшей научной деятельности. Но если и в самом деле живая материя предпочитает определенную киральность, то вовсе не следует думать, будто совокупность всего живого является либо левой, либо правой. В природе одно и то же химическое вещество, произведенное одним и тем же видом растения, может быть левым или правым, в зависимости от места, в котором эти растения были собраны. Напротив, β-радиоактивность, а точнее, β^--радиоактивность с испусканием электронов всегда имеет одну и ту же киральность, тогда как β^+-радиоактивность с испусканием позитронов всегда имеет противоположную киральность. Следовательно, киральность слабого взаимодействия более определенна, чем киральность живой природы. Связаны ли они между

[91]В действительности существует еще и третья кислота, мезовинная, молекулы которой симметричны. Она не вращает плоскость поляризации, очевидно, не являясь — в отличие от виноградной кислоты — смесью двух первых кислот.

собой? Некоторые исследователи подозревают, что связаны, но достоверно этого никто не знает.

Причина киральности живой природы, занимавшая еще Пастера, по-прежнему остается тайной. Можно предположить, что очень незначительная киральная асимметрия слегка изменяет равновесие некоторого сорта винограда в сторону одной или другой ориентации, и понемногу в течение столетий эта ориентация берет верх. Среди возможных причин фигурируют слабые взаимодействия, но есть и другие кандидаты. Обратим внимание на очевидный элемент киральности: *совокупность магнитного поля Земли и поля тяготения*. Первое поле является аксиальным, второе — полярным, а следовательно, их совокупность является энантиоморфной[92].

Обращение времени (Т) и СРТ-теорема. Это третья и последняя из великих дискретных симметрий, которой следует большинство известных явлений. Еще в большей степени, чем в связи с киральностью, здесь важен вопрос: «Как мы смогли о ней узнать?» В самом деле, если трудно «пронаблюдать» взаимодействие между частицами в зеркале, то как изменить направление течения времени? Ответ таков.

Т-инвариантность имеет простое следствие. Предположим, что две частицы А и В аннигилируют, порождая две частицы С и D, и предположим, что явление Т-инвариантно. При обращении времени получилась бы обратная реакция: С и D аннигилировали бы, чтобы породить А и В. Т-инвариантность означает, что мы наблюдаем явление и его обращение во времени с одинаковой вероятностью. Конечно, мы не можем изменить направление течения времени, но мы можем вызвать две реакции: если они равновероятны, то имеет место Т-инвариантность.

[92]В любой точке Земли, кроме экватора, существует вертикальная составляющая магнитного поля, которая, следовательно, параллельна полю тяготения, но направлена в южных широтах в ту же сторону, а в северных — в противоположную. [Следует, однако, заметить, на что обратил мое внимание известный русский физик Летохов, что каждые несколько сотен тысяч лет земное магнитное поле переворачивается. (Добавлено автором к переводу.)].

В этом примере речь идет лишь о простой констатации, но существует окольный путь, отправная точка которого позволяет делать чисто теоретические предсказания. Констатируется, что релятивистские уравнения, в том числе, уравнение Дирака, равно как и взаимодействия между элементарными частицами, остаются инвариантными, если успешно произведены зарядовое сопряжение, инверсия пространства и обращение времени. Порядок преобразований неважен, но тот, который приведен нами, стал традиционным. Говорят, что *законы CPT-инвариантны*, — это утверждение и есть *CPT-теорема*, из которой выводятся замечательные следствия. В частности, из нее следует, что массы и времена жизни частиц и их античастиц должны быть одними и теми же, что подтверждается опытом. Вплоть до настоящего времени всякий раз, когда возникает сомнение в правильности CPT-теоремы, опыт свидетельствует в ее пользу.

В некоторых случаях инвариантность C, P и T подтверждается *по отдельности*. Это случай электрона в электромагнитном поле или электронно-позитронной пары[93]. Но более интересным является случай, когда некоторые из этих законов инвариантности нарушаются, поскольку — в силу CPT-теоремы — эти нарушения не могут быть произвольными. Например, в слабом взаимодействии нарушается пространственная четность (P) и инвариантность зарядового сопряжения (C), но произведение PC остается инвариантным, и можно утверждать, что взаимодействие будет T-инвариантным. Зато если нарушается CP-инвариантность, то это означает, что T-инвариантность также будет нарушена, чтобы сохранить CPT-инвариантность. Именно это происходит в процессе определенных типов распада нейтрального мезона K_0, при котором нарушается четность CP и, следовательно, четность T.

Отметим существенную разницу между *невозможностью перестановок в пространстве* и *необратимостью во времени*. В первом случае это сравнительно небольшое на-

[93]Позитрон редко встречается не потому, что он неустойчив, но потому, что он очень быстро сталкивается с электроном и вместе с ним аннигилирует. Зато у того факта, что мир населен электронами, нет объяснения.

рушение симметрии, а во втором — значительное, поскольку необратимость предполагает увеличение *энтропии*.

Добавим к этому пару исторических фактов. Вигнеру и Вейлю принадлежит заслуга введения теории групп в квантовую механику. Именно Вигнер обнаружил роль дискретных групп и был первым из исследователей, осознавших важность понятия группы при анализе перестановок, рассматриваемых статистической физикой. В 1928 г. он заметил инвариантность некоторых квантовых явлений относительно инверсии пространства и обращения времени. Это вызвало сомнение у великих физиков, среди которых был и Дирак. CPT-теорема в квантовой механике была введена позже Люддерсом (1951 г.) и Паули (1955 г.), но мы видели, что Эйнштейн знал о ней уже в 1925 г. применительно к общей теории относительности.

Дискретные группы относятся к числу тех законов симметрии, которые доказали свою плодотворность, но лежащие в их основе механизмы игнорировались: физика породила группы, но было неизвестно, в какую область она проникла[94].

[94]После издания этой книги автор стал пересматривать C-, P-, T-инвариантности. То, что здесь рассказывается, основано на так называемых «правилах Рака», которые допускают, что электрический заряд T-инвариантен (значит, не изменяется на противоположный при обращении времени). Правда это или нет, не решается чистыми правилами электромагнетизма. Только электролитические явления показывают, что нет: заряд переворачивается со временем и настоящий закон оказывается не $T_{Рака}$, а ($T_{Рака} \times P$), что известно как «слабое обращение времени» (добавлено автором к русскому переводу). Это не меняет аргумент о K_0-мезоне (в тексте), потому что надо заменить CPT на CPT* (T*=CT). Тогда, если нарушается CT, то нарушается T*.

Глава XI

ВОЗВРАЩЕНИЕ ЭПИЦИКЛОВ

> Если кварки и лептоны элементарны, то мы имеем дело с 45 элементарными сущностями. «Естественная» группа, фундаментальные представления которой они образуют, — это SU(45) с 2024 калибровочными бозонами. Можно снизить размерность этой группы, например, до SU(11) со 120 калибровочными бозонами, но тогда число фермионов возрастет до 501.[95]
>
> Абдус Салам [81]

Два великих пути геометризации физики: единое поле в теории относительности и калибровочные теории в квантовой механике

Сущность науки можно определить как редукционизм, а «призвание» — как унитаризм. Геометризация физики не может избежать этой естественной склонности к созданию единой картины мира. Конечно, законченная картина мироздания — цель недостижимая, но в ней воплощена великая мечта человечества, и потому она подобна холсту Пенелопы, который та ткала, распускала и ткала вновь.

Геометрия нашего века породила две мечты. Первая возникла из теории относительности и нашла выражение в *теориях единого поля*, а вторая — порождение квантовой механики, воплощенное в *калибровочных теориях*. Хотя эти две мечты имеют разное происхождение, они вдохновлены схожими идеями.

[95]После прочтения главы эта цитата из работы Салама станет понятнее. Она отсылает к замечанию Альфонса X Кастильского: «Если бы Бог, создавая мир, спросил у меня совета, то все было бы устроено намного лучше и проще!» (см. главу I).

Рассмотрим первую мечту, попытавшись представить состояние ума Эйнштейна и физиков-релятивистов великой эпохи. На фундаменте максвелловской теории электромагнетизма Эйнштейн воздвиг здание специальной теории относительности, которое спустя десять лет превратилось во дворец — общую теорию относительности. Но в этом дворце была некая асимметрия: право первородства теории электромагнетизма, лежавшей в основе теории относительности, было похищено теорией тяготения. В самом деле, общий принцип относительности привел Эйнштейна к тому, чтобы свести тяготение к свойству пространства-времени, кривизне. Здесь электромагнетизм «отставал»: он не порождал никакой геометрии и оставался чуждым пространству. Это была особая «сила», которую следовало добавлять чисто искусственно. По правде говоря, именно так всегда и поступали в классической механике, но для сторонников новой теории это было неприемлемо. Необходимость представить электромагнитное поле геометрическим свойством пространства (каковым представлялось поле тяготения) породила идею *единого поля*. Осуществлена она не была, но стала толчком для появления других идей и оставила нам в наследство великую мечту, которая поддерживала усилия нескольких величайших умов нашего времени. Эйнштейн размышлял над теорией единого поля до конца своей жизни.

Обобщения производились многими способами. Первый способ был предложен в 1918 г. Германом Вейлем, который ввел новый вид инвариантности — *калибровочную инвариантность*. Идея, как мы увидим, имела успех, но не в той форме, которую ей придал Вейль. То, что он с ней связывал, заключалось в утверждении, что для измерения длины необходимо перемещение от одной точки вселенной к другой маленького пространственно-временного эталона длины[96], *калибра*. В теории риманова пространства предполагается, что перемещение такого

[96]Можно спросить, что такое «пространственно-временной эталон длины», потому что время не является длиной. Однако отнюдь не время размечается в мире Минковского, а его произведение на скорость света и, следовательно, длина.

эталона зависит только от начальной и конечной точек, но не от пройденного пути. Однако Вейль поставил вопрос о том, что произойдет, если перемещение калибра будет зависеть от пути. Он доказал, что изменения калибра тогда описываются (четырехмерным) вектором, а величина, вводимая для характеристики пути, является тензором, который называется *ротором* вектора. Но на самом деле теория электромагнетизма Максвелла также приводит к описанию некоторого четырехмерного вектора пространства-времени, *потенциала Лоренца*, и компоненты электромагнитного поля оказываются равными четырехмерному *ротору* этого потенциала. Отсюда и возникает идея о том, что потенциал можно было бы отождествить с калибровочным вектором, только что определенным Вейлем, и что электромагнитное поле получается из него. К сожалению, у Эйнштейна нашлось возражение: если длина эталона зависит от пути, по которому он перемещается, и, следовательно, от его *истории*, то отсюда должны вытекать такие экспериментальные следствия, которые никогда не наблюдались [93]. Итак, проект был оставлен, однако Эйнштейн все равно считал находку Вейля очень удачной. Позже идея была возрождена, но уже не в теории относительности, а в квантовой механике.

Другая попытка, предпринятая Калуцей, позже была перенесена Клейном опять-таки в квантовую механику. Она заключалась в создании дополнительных возможностей путем приписывания пространству-времени еще одного измерения. Таким образом, релятивистская вселенная приобрела *пять измерений*, причем пятое измерение носило чисто формальный характер, и было нелегко объяснить, почему на опыте не удавалось обнаружить даже его следов. Эйнштейн, долго работавший над этой теорией, и Бергман нашли (весьма изобретательно) подходящее объяснение; находка их, впрочем, тут же была отвергнута, но мы еще вернемся к ней позднее, потому что и об этом объяснении, и об идее Калуцы затем вспомнили в другом контексте.

Еще две попытки основывались, как и у Вейля, на том факте, что в теории относительности электромагнитное поле представлено *антисимметричным тензором.* Напомним, что антисимметрия является не противоположностью, а видом симметрии. Можно вспомнить, что векторное произведение двух векторов, о котором мы говорили в главе IX, изменяет свое направление при перестановке векторов: это — антисимметричный тензор, как и электромагнитное поле. Мы говорим также о тензорах *напряжений*, действующих на элемент вещества. Если напряжения сводятся к сжатиям и растяжениям, то этот тензор является симметричным, но если имеет место *кручение*, то он становится *суммой симметричного и антисимметричного тензоров.*

Эта идея была использована в теории относительности. Поскольку в ней используется риманово пространство, позволяющее вводить только симметричные тензоры, то обращаются к более общим пространствам, называемым пространствами *афиннной связности*, которые можно «закрутить», как винт. Это *кручение пространства* представляется антисимметричным тензором, с которым попытались связать электромагнитное поле. Но теория не получила удовлетворительной физической интерпретации.

Следующая идея состояла в разработке теории *несимметричного* поля. В главе V мы видели, что в римановом пространстве квадрат расстояния между двумя соседними точками выражается в форме, обобщающей известную форму суммы квадратов, с помощью которой в теореме Пифагора квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника выражается как функция его катетов. Этот *элемент длины*, как его называют, содержит члены с квадратами координат (подобно теореме Пифагора) и «прямоугольные» члены, в которых различные координаты перемножаются друг на друга, как в формуле площади прямоугольного треугольника. Перед всеми этими членами стоят коэффициенты, являющиеся функциями пространства и времени и образующие *метрический тензор*, компоненты которого играют роль гравитационного потенциала и заменяют собой тот потенциал, из которого выводил силу тяготения Ньютон. Тензор является симметричным, поскольку прямоугольные члены не зависят от порядка, в котором перемножаются координаты. Идея теории несимметричного поля Эйнштейна и Шредингера состояла в том, чтобы добавить к метрическому тензору антисимметричный тензор, который должен представлять электромагнетизм, не затрагивая при этом поле тяготения. Но и эта теория натолкнулась на возражения.

Теперь мы более пространно поговорим о втором способе сведения к единству физики полей и о калибровочных теориях; мы увидим, что он столь же логичен, как и первый. Теория единого поля была порождена успехом римановой геометрии в общей теории относительности и состояла в поисках более сложных геометрий, пригодных для нового описания полей взаимодействия. В то же время и квантовая механика, воодушевленная успехом, которого достиг Дирак, применяя группу Лоренца в квантовой механике, также приступила к поискам более сложных групп инвариантности для описания новых взаимодействий и создания теории элементарных частиц.

У физиков, занимающихся квантовой теорией, вошло в привычку выражать свои результаты в терминах *законов инвариантности* и терминах *законов симметрии*. Интересным примером этого может послужить понятие изотопического спина, или *изоспина*, введение которого ознаменовало очередной этап развития физики. Идея, принадлежащая Гейзенбергу, возникла на основе некоторой модели, выраженной для удобства в терминах симметрии, но вскоре от модели отказались. Мы тоже не будем останавливаться на ней, ограничившись рассмотрением только симметрии.

Гейзенберг пытался описать силы, связывающие между собой *нуклоны* (протоны и нейтроны) в атомном ядре. Они сильнее электромагнитных сил, откуда и их название — *сильные взаимодействия*, и они не зависят от электрического заряда частиц, тем самым приравнивая друг другу нейтрон и протон. Нужно было найти два квантовых числа, позволяющих отличить протон от нейтрона, объединяя их (на основе их поведения по отношению к ядерным силам) в дублет, названный *изотопическим дублетом*. По формальным причинам Гейзенберг ввел эти числа, исходя из матриц Паули, заимствованных из теории спина и группы вращений. Эта привело к тому, что слово «спин» в термине осталось, но, по правде говоря, изотопический спин (или изоспин) — это вовсе не спин, и он совершенно не изотопичен. Кроме того, он не имеет никакого отношения к группе вращений. Но теория Гейзенберга включена в более общую теорию, действительно основанную на теории групп.

Речь идет о редком и уже давнем (1932 г.) случае — о теории, которая хоть и была введена посредством модели, явилась, в сущности, одной из причин господства теории групп в теории элементарных частиц. Сегодня мы уже не говорим, как прежде, о симметриях, открытых задним числом, и даже, как мы только что видели, о введенных с помощью моделей, подсказанных опытом. Мы говорим о симметриях, которые навязаны *a priori*, безотносительно к какому-либо понятному физическому свойству, о симметриях, возможные экспериментальные следствия которых изучаются *a posteriori*. Это та же эволюция мышления, что и эволюция теории единого поля, в которой поиск был *a priori* направлен только на абстрактные геометрические свойства. Это делалось в надежде, что они по формальным причинам будут соответствовать физическим законам, описывать которые исследователи и стремились.

Мы не входим здесь в джунгли теории элементарных частиц и не рассматриваем усилия, прилагаемые для создания их классификации в качестве функции их взаимодействий. Эти вопросы не относятся к теме данной книги, и определенные сведения об этом можно получить, например, в [55]. Мы намерены рассмотреть лишь некоторые важные моменты, и в частности, геометрическую идею, появившуюся в этой области, — идею *теории калибровки*.

Симметрия и сохранение физических величин. Теорема Нетер

Сначала вернемся к анализу инвариантности относительно *непрерывных групп*, таких, как группы переносов, вращений, преобразований Лоренца и т.д. Мы уже знаем (глава III), что законы симметрии имеют следствием законы сохранения. Это известно с тех пор, как Ньютон понял, что *закон площадей* Кеплера обязан своим существованием сферической симметрии силы тяготения. Точно так же, если на материальную систему в некотором направлении не действует никакая внешняя сила, то движение в этом направлении будет инерционным, т.е. равномерным. Об этом Ньютон также знал, но вот о чем он не знал, так это о том, что связь между симметрией и сохранением обеспечивается *принципом наименьшего действия* (глава IV). Но приводимые им примеры — начиная с тяготения — делали это явным образом, и они уже заранее проникали в область аналитической механики Лагранжа и Гамильтона (глава VI). В самом деле, законы симметрии и сохранения вообще действуют не во всей механике Ньютона, а лишь в частных случаях сил, выводимых из потенциала, что и является областью аналитической механики. Если мы хотим приблизиться к общей формулировке, выражая предшествующие примеры в терминах групповой инвариантности, то мы должны вводить не силы, а *потенциалы*, из которых и выводятся силы. Приведем первый такой пример: *если потенциал сил, действующих на систему, инвариантен относительно группы пространственных вращений, то момент импульса остается постоянным.* Не забудем, что во втором законе Кеплера площадь, описываемая за единицу времени радиусом, соединяющим Солнце и планету, равна моменту импульса планеты относительно Солнца (глава III).

Что касается второго примера, то он будет выражен следующим образом: *если потенциал сил, действующих на систему, остается инвариантным при переносе в определенном направлении* (следовательно, он постоянен в этом направлении, а получающаяся из него сила равна нулю), *то компонент полного импульса системы в этом направлении будет постоянным*[97].

---

[97]Следовательно, в классической механике постоянна и скорость, потому что не изменяется масса. Но это не так в теории относительности, в которой масса может изменяться.

К этим примерам мы можем добавить еще один, очень важный, уже встречавшийся в главе III: *если силы, действующие на систему, получены из потенциала, инвариантного относительно группы переносов во времени, то энергия системы является константой движения.* В этом простом случае формулировка слишком высокопарна, поскольку в действительности она просто-напросто означает, что если потенциал не зависит от времени, то энергия сохраняется. Но в сложных случаях формулировка становится более общей, и тогда возникает *теорема Нетер: если динамическая система, инвариантная относительно непрерывной группы преобразований, подчиняется принципу наименьшего действия, то существует такая определенная группой инвариантности физическая величина, которая в процессе движения остается постоянной.*

Небольшое отступление об уравнениях поля

Теорема Нетер была доказана в 1918 г., до появления квантовой механики, но так как квантовая механика вытекает из экстремальных принципов (см. главу IV), то к ней теорема применима. Конечно, речь идет об уравнениях «кратчайшего пути», но понятие пути усложняется, потому что имеется не точка, а *волна, поле.* Пространственные координаты больше не описывают траекторию, они суть зависящие от поля параметры. Настоящими координатами являются компоненты поля, функции пространства и времени. Что касается «кратчайшего пути», то он пролегает не в обычном пространстве, а в пространстве компонент поля. Это отнюдь не элементарная геометрия, но интересно, что в квантовой механике теорема достаточно проста[98].

[98]Технически причиной является то, что любая физическая величина представлена оператором, с помощью которого конструируется *группа, унитарная по параметру*, представляющая группу инвариантности. Сохранение величины и инвариантность относительно группы вытекают из перестановочных отношений оператора и гамильтониана. Несмотря на сложный вид этого выражения, оно оказывается проще, чем в классическом случае. (*Примечание автора к переводу.*)

Теоретики не дожидались наступления XX века и открыли такие уравнения (называемые *уравнениями в частных производных*), которые позволяют описывать непрерывные среды. Этими уравнениями описывались теплота, электромагнетизм, жидкости и газы, а также колеблющиеся струны. Но именно такие среды и были введены квантовой механикой и теорией относительности.

На примере колеблющихся струн можно попытаться понять, как происходит переход от языка обычной механики к языку уравнений поля. Это стало возможным благодаря датируемому XVIII веком ухищрению, обязанному своим появлением Д'Аламберу и Лагранжу и состоящему (см. главу VII) в представлении колеблющейся струны в виде ожерелья из жемчужин, нанизанных на упругую нить. Затем эти жемчужины сдвигают очень близко друг к другу, чтобы воспроизвести непрерывную струну.

Вернемся к рассмотрению движения такого ожерелья. Попробуем сначала сдвигать и раздвигать жемчужины: упругость нити будет противодействовать нам с силой, зависящей от отклонения каждой жемчужины от ее положения равновесия. В общем, это *отклонение* не будет повсюду одним и тем же, так что расстояние между жемчужиной и ее соседями — и, следовательно, *сила*, действие которой она будет испытывать с их стороны, — будет изменяться как функция ее *номера* на ожерелье. Описать эту систему движущихся жемчужин — значит описать в каждый *момент* отклонение каждой из них от положения равновесия в качестве функции ее *номера* на нити.

Следовательно, мы должны были бы изучить некую величину — отклонение от положения равновесия, — изменяющуюся как функция времени и дискретной переменной, номера жемчужины. Между тем, этот номер представляет собой всего лишь способ обозначения абсциссы жемчужины, и, следовательно, отклонение зависит от времени и от абсциссы. Но если число жемчужин будет стремиться к бесконечности из-за того, что мы будем все плотнее сдвигать их друг к другу, то их абсциссы, бывшие дискретными и поддававшиеся подсчету, теперь становятся непрерывными. Отклонение жемчужин от их положений равновесия превращается в отклонение струны в каждой из этих точек, и это отклонение будет зависеть от двух непрерывных переменных: времени и абсциссы точки на струне. *Такое отклонение, определенное в каждый момент времени и в каждой точке*, — это *поле*, и оно описывается первым известным уравнением поля — *уравнением колеблющейся струны*, выведенным Д'Аламбером. В более общем виде оно называется *волновым уравнением*.

Калибровочные теории

Теорема Нетер — это, конечно, апогей законов симметрии в механике Лагранжа и Гамильтона, но можно спросить, обладает ли она подлинными эвристическими возможностями или представляет собой всего лишь целостное описание законов сохранения. До тех пор, пока выводятся уравнения, описывающие в математической форме модель реальности, именно физическая интуиция позволяет, вообще говоря, угадывать константы движения и законы симметрии. В этом смысле теорема Нетер дает очень не много новых результатов. Но ее заслуга заключается в другом: доказывая эквивалентность законов сохранения и законов инвариантности, она выдвигает программу, состоящую *в установлении связи между природными явлениями, законами сохранения и выражением этих законов в терминах законов симметрии.*

В сущности, физика всегда искала в природе законы сохранения, по крайней мере, пока ее интересы ограничивались стационарными явлениями. Что касается связи между законами симметрии и сохранения, то идея элегантна, но действенна ли она? Отнюдь не обязательно, потому что подлинная проблема состоит не в установлении связи идей, а в обнаружении динамики, а для этого нужно знать, как взаимодействуют изучаемые объекты, — а об этом-то законы симметрии ничего не говорят. Именно здесь вмешиваются *калибровочные теории*, подлинная реализация программы, выдвинутой теоремой Нетер. Вот в чем идея этих теорий.

Отправной точкой является *переход от глобальной к локальной симметрии*: *глобальное* относится ко всему пространству, а *локальное* относится к каждой точке в отдельности и, следовательно, требует более жестких условий. Вообразим объект, обладающий вращательной симметрией, например, глиняный горшок, который остается тождественным самому себе, когда его поворачивают на некоторый угол вокруг его оси симметрии. В общем случае под этим подразумевается, что горшок поворачивается целиком: симметрия является *глобальной*, и мы можем заметить, что, превращая все пространство горшка в единое целое, мы допускаем мгновенное действие на расстоянии. Но если мы мысленно разрежем горшок перпендикулярно его оси на тонкие слои, то он превратится в стопку дисков различного диаметра, но одной и той же формы. Если каждый диск повернется на какой-либо угол, то форма горшка как целого сохранится, включая сюда и тот случай, когда угол поворота будет меняться от диска к диску: симметрия становится *локальной*, и действия на расстоянии не допускаются. Но чтобы осуществить эту локальную симметрию, необходимо преодолеть силы сцепления, соединяющие друг с другом различные слои горшка: локальная симметрия достигается только ценой введения некоторой силы взаимодействия, которая в нашем простейшем случае разломала бы горшок[99].

Это только искусственный пример перехода от глобальной к локальной симметрии, но мы уже встречались и с другим, более важным примером перехода от специальной теории относительности к общей (глава V). В сущности, что такое специальная теория относительности? Это учение об инвариантности законов физики относительно группы Лоренца, которая образует группу однотипных преобразований как в пространстве, так и во времени. Это — глобальная группа. Что такое общая теория относительности? Это переход от глобально равномерного

[99]Приведем в связи с этим примером забавное замечание Дирака: «Если твердое тело, — говорит он, — действительно является телом вращения, то на его поверхности не может быть никакой выделяющейся точки, и само совершенство симметрии не позволит нам заметить, что оно вращается, и, следовательно, определить, что оно является телом вращения. Для того, чтобы увидеть его вращение, нужно сделать на нем отметку, но тогда оно уже не будет телом вращения».

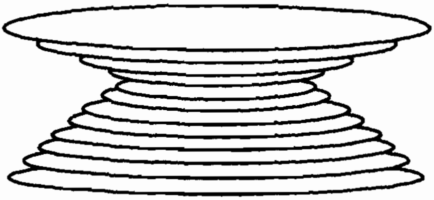

Рис. 31. Этот горшок является телом вращения и, следовательно, он инвариантен относительно *глобального* вращения вокруг его оси. Но он обладает также локальной симметрией при вращении на произвольные углы его слоев, перпендикулярных оси

движения с повсюду одной и той же скоростью к ускоренному движению, которое является равномерным только в небольших областях пространства и в течение коротких промежутков времени. Группа Лоренца, которая при одной и той же скорости была законна везде и всегда, при различных скоростях остается законной лишь в окрестности каждой точки и при переходе от одного момента времени к другому. Произошел переход от *глобальной* группы к *локальной*.

Но за это пришлось уплатить высокую цену, потому что допустить изменение скорости — значит ввести ускорение и, тем самым, силы инерции, отсутствовавшие в специальной теории относительности. Вспомним, как Эйнштейн доказал, что появление сил инерции эквивалентно появлению поля тяготения, учет которого необходим для признания инвариантности физических законов. Но на этот раз они инвариантны относительно локальных преобразований пространства и времени, так что глобальные преобразования Лоренца оказываются лишь частным случаем. В других терминах, *переход от глобальной группы к локальной приводит к появлению поля взаимодействия* — в данном случае, поля гравитации.

Единое поле, которое вместе с другими теоретиками искал Эйнштейн, — это попытка обобщить такой подход, перенеся его на электромагнитные силы и объединив их с силами притяжения в рамках единой геометрии пространства. Мы видели, что первый шаг в этом направлении был сделан Германом Вейлем и состоял в замене глобальной калибровки (или эталона), используемой во всем пространстве-времени для измерения длин и промежутков времени, локальной калибровкой. Мы знаем, что возражение Эйнштейна заставило ученых отказаться от этой идеи, но спустя десять лет, в 1927 г., Лондон сделал формальное замечание, трудно поддающееся объяснению с помощью обычного языка и оставившее некоторых читателей в недоумении. Он подметил аналогию между тем способом, которым Вейль выражал в теории относительности изменение функции при изменении эталона длины, и способом, которым другой физик, Фок, выражал подобное изменение в квантовой механике с тем, чтобы учесть не изменение эталона длины, а присутствие электромагнитного поля. *Вектор Вейля*, описывавший изменение калибровки, был заменен *потенциалом Лоренца*, с помощью которого выражалось электромагнитное поле. Аналогия между этими двумя векторами, введенная в научный оборот Вейлем, вышла на первый план, но с важным формальным изменением — наличием в квантовой формуле *мнимого коэффициента*, которого не было в формуле Вейля. Это был уже не первый случай появления в квантовой механике мнимого коэффициента: например, Шредингер в самом начале своих исследований ввел такой коэффициент в свое уравнение просто потому, что «это его устраивало»[100].

Разница между аналогией Вейля и аналогией Лондона состоит в том, что Лондон благодаря мнимому коэффициенту заменяет измерения длины вдоль прямой ее измерением на окружности. Таким образом, он вводит угол, который оказывается *фазой волны*, и калибровка изменяет свой смысл. Нетрудно догадаться, что, согласно новому определению, уравнения Шредингера или Дирака, описывающие свободный электрон (в отсутствие поля) обладают *калибровочной инвариантностью*. Это означает, что характер движения электрона не изменится, если изменять фазу волны на *один и тот же угол* в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Этот новый закон симметрии уравнений квантовой механики

[100] В сборнике своих мемуаров 1926 г. Шредингер объясняет почти непроизвольное появление этой мнимости столь пикантным образом, что это напоминает поэму Бодлера «Исповедь» [84].

является *глобальной симметрией*, потому что угол везде и в течение всего времени остается одним и тем же. Как и любой непрерывной группе, ей соответствует закон сохранения — *сохранения электрического заряда*.

Можно ли превратить этот глобальный закон в *локальный закон калибровки*, изменяя фазу волны на угол, который изменяется в пространстве и времени? Да, можно; но мы не удивимся, узнав, что новая инвариантность порождает новое взаимодействие. И поскольку глобальная калибровочная инвариантность имеет следствием сохранение электрического заряда, то мы опять-таки не удивимся, узнав, что новое поле взаимодействий — это *электромагнитное поле*.

Здесь мы видим проявление общего механизма: *глобальная калибровочная инвариантность имеет следствием сохранение электрического заряда, а локальная инвариантность приводит к появлению поля взаимодействий*, действующего на заряд. Поле, введенное в соответствии с условием локальной инвариантности, — это компенсационное поле, допускающее инвариантность. Оно называется *калибровочным полем*. Именно оно является подлинным приобретением теории, потому что оно соответствует взаимодействию между частицами. Как и любое поле, оно посредством дуализма связано с новой частицей. Она, как и в случае любого поля взаимодействий, является частицей Бозе, *бозоном*, одной из тех стадных частиц, которые стремятся собраться на волне и о которых мы вскользь говорили в главе VII. Они называются *калибровочными бозонами*, и их можно было бы исследовать на опыте. Скоро мы приведем пример калибровочных бозонов, но сначала подытожим то, что мы только что сказали об электромагнетизме.

В терминах калибровочных теорий мы можем сказать, что глобальная инвариантность фазы уравнений квантовой механики имеет следствием сохранение электрического заряда. Локальная инвариантность фазы вводит калибровочное поле — электромагнитное поле, действующее на рассматриваемый заряд. Наконец, калибровочное поле связано с калибровочным бозоном, *фотоном*. Похоже, что все это — только парафраз того, что мы уже знали. И в самом деле, открытие будет совершено в другой области. Тем не менее, даже в связи с электромагнетизмом мы еще можем сделать несколько общих замечаний.

1) Мы видели, что локальная калибровочная инвариантность (здесь — инвариантность фазы) совершенно достаточна для указания на то, *как* калибровочное поле (электромагнитное поле) действует на частицу. Это называется *связью*. Заряд (электрический), через посредство которого осуществляется связь, выступает одновременно и как *константа связи*, и как *источник* калибровочного поля. Но калибровочная симметрия приводит только к *минимальной связи*, позволяющей ввести лишь потенциалы (потенциалы Лоренца), из которых выводится калибровочное поле. Однако возможно существование других связей, в границах которых калибровочное поле (электромагнитное поле) действует непосредственно в буквальном смысле, т.е. без посредников. Эти связи не предусматриваются условиями калибровки именно потому, что они приводят к появлению полей. Поскольку такие поля сами по себе калибровочно инвариантны, то условие инвариантности не накладывает на них каких-либо новых ограничений и не может предписывать форму взаимодействия.

2) Калибровочное поле также обладает калибровочной симметрией, а это означает, что это поле может определяться бесконечным набором возможных потенциалов, о чем Лоренц знал уже применительно к электромагнетизму. Название «*калибровка*» обозначает те значения потенциалов, которые соответствуют данному значению калибровочного поля.

Локальная инвариантность калибровочного поля позволяет, не модифицируя само поле, выбирать его собственную калибровку, чтобы компенсировать изменение локальной калибровки поля того заряда, с которым оно взаимодействует. Таким образом, когда мы локально изменяем фазу волны электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем, мы можем выбирать потенциалы Лоренца, из которых это электромагнитное поле выводится, не модифицируя само поле, но компенсируя изменение фазы электрона. Из этого следует инвариантность совокупности двух взаимодействующих полей.

Следовательно, эта симметрия калибровочного поля является полезной, потому что, если бы ее не было, не было бы и теории калибровки. Но у этой симметрии есть также и неприятные следствия, самым серьезным из которых является то, что *инвариантность калибровочного поля требует, чтобы масса калибровочных бозонов была равна нулю.* Это ведет к утверждению о том, что масса фотона равна нулю, тогда как это не является опытным фактом. Можно даже сказать, что никакое измерение не в состоянии доказать, что масса равна нулю, потому что это был бы бесконечно точный, а следовательно, невозможный экспериментальный результат. Опыт может, самое большее, доказать, что масса мала, и как раз это имеет место в случае фотона. Утверждение, что масса фотона равна нулю, следует из догмата, суть которого, в общем, сводится к тому, что симметрия диктует природе свои законы. Великие физики — и среди них де Бройль и Шредингер — выступали против этого. Де Бройль, к примеру, разработал даже новую теорию электромагнетизма, в которой вполне естественно вводится отличная от нуля масса фотона, и при этом не нарушается ни один известный закон. Но до настоящего времени эта масса так и не была измерена.

Весьма досадно, что заключения относительно массы фотона являются общими и что все калибровочные бозоны должны иметь нулевую массу. Итак, масса бозона связана с *радиусом действия* поля. Если известно, что масса фотона мала, то лишь вследствие больших расстояний, на которых действует электромагнитное поле. И наоборот: поскольку Юкаве было известно о небольшом радиусе действия ядерных сил, то он заранее знал, что связанный с таким радиусом бозон, существование которого он предсказал (π-мезон), должен быть тяжелым. Если бы все калибровочные бозоны имели нулевую массу, то на основе калибровочной инвариантности нельзя было бы создать теорию взаимодействий. Мы увидим, как это препятствие было преодолено.

Теория Янга и Миллса. Расслоенные пространства. Неабелевы калибровки

Теорией электромагнетизма исчерпываются возможности теории калибровки, основанные на понятии обычной фазы. Мы увидим, как можно добиться большего, но сначала немного по-другому повторим то, что было сказано об элементарной фазе. Эта фаза волны есть не что иное, как фаза из обычной теории интерференции. Ее можно отождествить с определенным углом вращения вокруг оси, закрепленной в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Этот угол локально определяет некоторое состояние колебания волны. Глобальное калибровочное преобразование состоит в том, что к этому углу фазы добавляется один и тот же же угол вращения. Локальное преобразование состоит в прибавлении угла, который изменяется от точки к точке и от одного момента времени к другому.

Это можно представить себе следующим образом. Соотнесем с каждым моментом времени и с *каждой точкой* пространства ось, направление которой не имеет значения. Вокруг этой оси опишем небольшую окружность (единичного радиуса). Тогда фаза будет углом вращения вокруг оси, а локальное калибровочное преобразование будет состоять в дополнительном вращении на окружности, соответствующей точке и моменту времени, в которых мы пребываем. Мы можем рассматривать изменение фазового угла как разновидность *внутренней симметрии* частицы (обладающей электрическим или магнитным зарядом), добавившейся ко «внешней» пространственной симметрии, определенной преобразованиями Лоренца, относительно которых законы движения остаются инвариантными. Маленькая окружность, добавляемая нами к каждой точке пространства-времени и образующая новое одномерное пространство как бы добавляется к чисто пространственному описанию частицы. Таким образом, подлинное пространство, в котором частица отныне будет описываться, не является больше обычным пространством-временем: это пространством-время, в каждой своей точке снабженное некоторым малым дополнительным пространством (в данном случае — маленькой окружностью). Совокупность этих вспомогательных пространств образует *расслоенное пространство* или, короче, *расслоение*, и каждая из маленьких окружностей является *слоем*. Именно на это намекает Янг в разговоре с Черном (эпиграф к главе VI).

Этот более абстрактный способ описания электромагнитной фазы позволяет многое понять. Сначала мы видим, что если ограничиться вращениями на окружности, *простыми*, как и она сама, то мы не сможем сделать ничего, кроме того, что уже сделали. Единственный вариант, который еще можно было бы осуществить, — это киральное вращение, служащее для отличения друг от друга электричества и магнетизма. Более того, вращения на окружности, очевидно, коммутативны: результат многих вращений не зависит от порядка, в котором они были произведены. В главе VIII такая группа была названа *абелевой*. Электромагнитная калибровка — это *абелева калибровка*. Можно догадаться, в каком направлении пойдет обобщение — в направлении усложнения геометрии дополнительных пространств (слоев), соотнесенных с точками пространства-времени путем замены плоских вращений некоммутативными группами, из чего и возникают *неабелевы калибровочные теории*. Эта идея была предложена в 1954 г. Янгом, Миллсом и Рональдом Шоу, работа которого была опубликована позже, в результате чего в названии теории фигурируют только два первых имени.

Естественным обобщением вращений на окружности является группа трехмерных вращений[101]. Напомним, что эта группа некоммутативна, т.е. неабелева (глава VIII). Слои расслоения, соотнесенные с каждой точкой пространства-времени, теперь станут «малыми» трехмерными

---

[101]Поясним некоторые термины Салама из эпиграфа к этой главе. Группа вращений представлена через посредство SU(2), *специальные* унимодулярные матрицы (отсюда S), *унитарные* (отсюда U), размерности 2 (отсюда 2). При размерности n будет SU(n). SU(45) Салама имеет размерность 45!

пространствами, в которых калибровочные преобразования будут вращениями вокруг различных осей. Они зависят от избранной точки, и калибровка будет локальной. Но здесь необходима осторожность! Эти пространства (которые мы назвали «малыми», как если бы речь шла об их расположении на чертеже!) больше не представляют собой обычное пространство. Они обладают его геометрическими свойствами, но речь идет об абстрактных пространствах.

Сначала это обобщение было использовано для создания теории изоспина, потому что он уже был соотнесен с трехмерными вращениями. Инвариантность относительно группы изоспина является характеристикой *сильного взаимодействия*, точно так же как инвариантность фазы является характеристикой электромагнитного взаимодействия. Напомним, что сильное взаимодействие охватывает целиком одну категорию частиц — *адроны*, к которым относятся протон и нейтрон. Впрочем, заметим, что, с другой стороны, протон имеет электрический заряд и участвует в электромагнитных взаимодействиях, как и электрон, но знак его заряда — *положительный*, противоположный знаку заряда электрона. Напротив, нейтрон электрически нейтрален, чем и объясняется его название. Точно так же, как инвариантность фазы приводит ко введению электрического заряда и электромагнитного поля, здесь появляется заряд изоспина и поле сильного взаимодействия. Точно так же, как частица (типа «частицы Бозе») *фотон*, связан с электромагнитным полем, и с сильным взаимодействием связана частица типа частиц Бозе — *пион, или π-мезон*. Разница между ними лишь в том, что заряд фотона равен нулю, а спин — единице, тогда как π-мезон является тяжелым, имеет нулевой спин и может иметь три возможных заряда — положительный, нулевой и отрицательный.

В новой теории все выглядит еще сложнее. Первое отличие заключается в том, что эквивалент потенциала Лоренца представлен теперь одновременно четырехмерным вектором пространства-времени и вектором в трехмерном пространстве изоспина. Таким образом, имеется $3\times4=12$ компонент. Соответствующее поле, как и в теории электромагнетизма, разлагается на два поля, которые формально подобны электрическому и магнитному полям, но одновременно являются векторами в обычном физическом пространстве и в пространстве изоспина, так что вместо 3 компонент их здесь 3×3=9. Но самое важное отличие состоит в том, что в электромагнитном взаимодействии заряд имеют только исходные взаимодействующие частицы (электроны, протоны и т. д.), но не калибровочные бозоны (фотоны), служащие переносчиками взаимодействия. Это означает, что фотоны не притягиваются ни друг к другу, ни к электронам, и не отталкиваются ни друг от друга, ни от электронов. Вот почему два пучка света могут интерферировать, изменяя распределение фотонов в той зоне, где они накладываются друг на друга, что и создает интерференционные полосы. Разделившись, эти полосы «забывают» о своем пересечении: нельзя заставить один пучок света отклониться, используя для этого другой пучок; это вытекает из линейности уравнений Максвелла. Поле же изоспина, напротив, нелинейно, и изоспиновые бозоны сами имеют заряд и взаимодействуют не только через посредство электромагнитного взаимодействия, но и через посредство сильного взаимодействия, как протоны и нейтроны. Заметим, что некоторые теории предсказывают аналогичное явление и для фотонов, но речь пока идет лишь о недостоверных эффектах.

Однако наибольшего успеха калибровочная теория достигла в области не сильных, а слабых взаимодействий.

Теория электрослабых взаимодействий Вайнберга–Салама

Эта теория без особого шума возникла из простой модели, авторы которой сами немало были удивлены тем, что предсказанные ею свойства обнаружены. Целью теории, как об этом говорит уже и название, является объединение электромагнитного и слабого взаимодействий. Для этого в избранной группе инвариантности объединяется группа U(1) вращений на окружности, соответствующая инвариантности электромагнитной фазы, и... еще раз группа вращений в трехмерном пространстве или, точнее SU(2). Разумеется, первая группа действует в пространстве, которое независимо от второй группы, в противном случае она была бы ее подгруппой, и ее присутствие не расширяло бы группу инвариантности. Кроме того, вопреки видимости, введенная здесь группа трехмерных вращений изоморфна группе изоспина, но не совпадает с ней, потому что она действует не в том же самом пространстве: она связывает частицы между собой иным способом.

Таким образом, группа изоспина объединяет протон с нейтроном, а группа слабых взаимодействий, кроме того, объединяет электрон с «его» нейтрино, а мюон — с «его» (это разные нейтрино, и существует еще третье нейтрино, связанное с τ-лептоном). В противоположность группе изоспина, новая группа связывает протон уже не с нейтроном, а с «суперпозицией» множества частиц, составной частью которого является нейтрон.

Не вдаваясь в тонкости теории, ограничимся рассмотрением некоторых существенных пунктов, имеющих отношение к нашей общей проблеме — проблеме геометризации физики. С этой целью мы остановимся на анализе двух главных трудностей, которые теория должна была преодолеть, — на проблеме *массы* калибровочных бозонов и проблеме *перенормировки*.

1) Проблема массы и спонтанное нарушение симметрии. Мы уже указывали на то, что калибровочная инвариантность имеет серьезный недостаток — вывод о нулевой массе посредствующих бозонов, являющихся переносчиками взаимодействия. Итак, поскольку слабое взаимодействие имеет короткий радиус действия[102], нетрудно догадаться, что бозоны будут очень тяжелыми, как считалось уже в первой теории, созданной Ферми. Но если ввести такую массу «насильно», то это вызовет две катастрофы. С одной стороны, будет разрушена калибровочная симметрия, а с другой стороны — в опасности окажется возможность перенормировки теории (мы увидим, что это означает).

[102] Радиус действия слабого взаимодействия настолько невелик, что он даже не измеряется на опыте: он кажется нулевым. Теория позволяет оценить его как 10^{-15} см — в сто раз меньше, чем радиус действия сильного взаимодействия, который сравним с порядком размера ядра (10^{-13} см).

Следовательно, первая проблема заключалась в том, чтобы ввести массу, не нарушая при этом калибровочную симметрию. Теоретики обошли трудность, заметив следующее: если верно, что *симметрия причин обнаруживается в следствиях* (принцип Кюри), то она не может обнаружиться в *каждом* следствии, а только во всей их совокупности. Мы видели это на примерах симметрии атома и Солнечной системы, и можно посмотреть на это под другим углом зрения на примере случайных явлений, связанных с объектами или состояниями, условия появления которых мы не можем выявить. Какой бы совершенной ни была симметрия монеты или игральной кости, все же, вопреки всему, всегда выпадает *одна* из сторон. Однако довод относительно симметрии, на который опираются при утверждении равновероятности, остается в силе, потому что он подтверждается большим числом бросаний. Об этом же говорит и пример рулетки, когда шарик останавливается в определенной лунке, несмотря на равную вероятность попадания в каждую из тридцати семи лунок. Точно так же однородная цилиндрическая вертикальная колонна под действием возрастающей продольной нагрузки в конце концов изгибается в некотором направлении (это — *продольный изгиб*), но симметрия спасена тем, что все направления изгиба равновероятны.

Общая черта этих примеров — отсутствие единственного и точно определенного конечного состояния. Всегда существует много и даже бесконечное число возможных состояний, сама симметрия которых не позволяет нам их выявить. Этим и обусловлено замечание Дирака о симметрии тел вращения, процитированное нами выше. Во всех случаях, когда существуют физически неразличимые состояния, говорят, что *система является вырожденной*: степень вырождения монеты равна двум, игральной кости — шести, рулетки — тридцати семи, а колонны — бесконечности. Тот факт, что одно из возможных состояний появляется случайно — это *спонтанное нарушение симметрии*.

Калибровочные теории находятся не в таком положении, но оно было создано искусственно путем добавления в уравнения нелинейного члена *ad hoc*, который спонтанно нарушает симметрию состояния, обладающего самым низким уровнем энергии и называемого *вакуумом*. Появление бозонов с ненулевой массой вызвано *механизмом Хиггса*, и это — *хиггсовы бозоны*.

2) Проблема перенормировки. Однако чтобы осуществить то, о чем мы говорим, необходимо, чтобы теория «работала». Но это не всегда возможно, поскольку квантовая теория поля испытывает трудности, возникшие еще в начале века в классической теории электронов Лоренца. Она оказалась поставлена перед альтернативой: либо заряженные частицы можно схематично представить в виде не имеющих размеров точек, и их масса будет бесконечной, что недопустимо, либо следует признать наличие у заряженных частиц размеров, но это вступает в противоречие с теорией относительности.

В квантовой теории поля эта трудность появляется в форме *расходящихся интегралов* при вычислении некоторых физических величин. Возникает нелепое положение, когда крайне слабые физические эффекты на удивление точно предсказываются теорией, но для того, чтобы получить соответствующий результат, сначала следует с помощью произвольных процедур исключить из вычислений бесконечно большие члены, не имеющие физического смысла. Большинство теоретиков принимает эти процедуры, но некоторые из них — и среди них величайшие — не склонны к такому подходу. Для Дирака это отнюдь не «разумная математика», так как по его мнению, «разумная математика предполагает, что некоторой величиной пренебрегают, потому что она мала, а вовсе не потому, что она бесконечно велика, а нам этого не надо!» [76]. Эта трудность обязана своим возникновением не квантовой теории поля, а общей проблеме дуализма волн и частиц, которая, несмотря на гениальные прорывы, в сущности своей остается нерешенной.

Важным моментом является то, что массы и заряды, фигурирующие в вычислениях, отличаются от наблюдаемых величин, модифицирующих поле взаимодействия (электромагнитное поле). *Голой массой, или голым зарядом*, называются введенные *a priori* физические величины, а *перенормированной массой* (или, соответственно, *перенормированным зарядом)* — модифицированные величины. Увы, бесконечность возвращается в вычисления перенормировки, и от нее избавляются с помощью сомнительных математических процедур, которые почти всегда представляют собой уловки, приводящие к успеху лишь в некоторых случаях.

В теории поля проводят различие между *перенормируемыми* полями, к которым эти процедуры приложимы, и *неперенормируемыми*, к которым эти процедуры неприложимы, что препятствует их сравнению с опытом (может быть так, что некоторые теории, отклоненные на этом основании, хороши, но они не принимаются во внимание). Как бы то ни было, после длительных сомнений Герард ‘т Хоофт доказал, что калибровочные теории поддаются перенормировке путем введения масс с помощью механизма Хиггса. Это именно случай теории Вайнберга–Салама.

Теория, модифицированная таким образом с помощью спонтанного нарушения симметрии, предсказывает существование четырех калибровочных бозонов. Два из них — это тяжелые мезоны, имеющие заряд и называемые W^- и W^+. Два других нейтральны и сочетаются, чтобы породить тяжелый нейтральный бозон, также имеющий отношение к слабому взаимодействию и называемый Z^o, и фотон, переносчик электромагнитного взаимодействия. С тремя бозонами W^+, W^- и Z^o, являющимися переносчиками слабого взаимодействия, связаны *слабые токи*, самыми замечательными из которых являются *нейтральные токи*, связанные с Z^o, и их существование было предсказано именно теорией Вайнберга–Салама. Их существование, долгое время остававшееся гипотетическим, было подтверждено в 1973 г. очень элегантными экспериментами, проведенными в ЦЕРНе (Европейском центре ядерных исследований) и обеспечившими теории первую экспериментальную победу. Но великой ее победой стало наблюдение в 1983 г., десять лет спустя, также в ЦЕРНе, самих мезонов $W^\pm$ и Z^o.

Это наблюдение было блестяще проведено многочисленной командой экспериментаторов, работавших под руководством Руббиа на циклическом ускорителе протонов и антипротонов, спроектированном Ван дер Мером. Чтобы составить себе представление о трудности этого эксперимента, следует сначала обратить внимание на то, что частицы W и Z имеют массу порядка, соответственно, девяноста и ста масс протонов, что приводит к созданию физических объектов таких же тяжелых, как и атомы с достаточно большими атомными массами, расположенные за пределами периодов таблицы Менделеева. Сама экспериментальная процедура превосходит самые смелые мечты. Она состоит в том, что друг на друга направляются два пучка — пучок протонов и пучок антипротонов, существование которого поддерживается в течение часов и который разгоняется до приобретения частицами очень большой энергии, в три раза превышающей их собственную энергию. Выше мы уже упоминали об открытии в 1955 г. антипротона — пусть даже оно и не стало научной революцией, как открытие протона, но все же было немаловажным событием. Собрать вместе антипротоны, стабилизировать и ускорить их пучок — это можно назвать великим техническим подвигом.

Сильные взаимодействия и квантовая хромодинамика

Мы знаем, что переносчиком электромагнитного взаимодействия является единственная частица — фотон — и что это взаимодействие вызывает появление электрического заряда — величины, природа которой остается загадочной, но свойства проявляются в относительно простом, по сравнению с другими взаимодействиями, виде.

Как мы видели, слабые взаимодействия уже не столь просты, но, по крайней мере, они имеют отношение к достаточно небольшому количеству частиц — к электрону, мюону, τ-частице и трем сопутствующим нейтрино, к которым добавляются шесть соответствующих античастиц и три калибровочных бозона.

Более сложной является ситуация в случае сильных взаимодействий. Они охватывают более ста частиц (*адронов*), не считая античастиц. Адроны подразделяются на *мезоны*, которые являются бозонами, и *барионы*, которые являются фермионами и среди которых выделяются *нуклоны* (протон и нейтрон), *гипероны* (нестабильные и более тяжелые, чем нуклоны) и барионные *резонансы*, возбужденные, отличные друг от друга состояния с очень коротким временем жизни. В этих джунглях частиц ничто не выделяет те из них, которые могли бы оказаться «более фундаментальными», чем остальные, но и попытки «уравнять» их потерпели неудачу. Например, предпринимались попытки сгруппировать их в «мультиплеты» с помощью некоторых общих характеристик, выведенных из изучения продуктов реакций между частицами, как это делается в химии. При этом допускалось, что в этих реакциях сохраняется «нечто», так что это «нечто» может быть представлено квантовыми числами, количество которых пытались ограничить.

Поскольку теорема Нетер связывает законы сохранения с законами симметрии, то эти квантовые числа были отождествлены с собственными значениями операторов, действующих в качестве групп инвариантности в абстрактном пространстве, названном *внутренним пространством*. Но какие группы следовало для этого выбрать? Поскольку дана схема, основанная на квантовой механике, то выбор не слишком велик. Обратимся еще раз к унитарной симметрии, т.е. к уже упомянутым группам — SU(2), SU(3), SU(4), SU(5),..., выбранным самым простым способом. Но возникает осложнение вследствие как большого числа подлежащих классификации частиц, так и сложности явлений, которые необходимо учесть.

Над этой теорией в начале шестидесятых годов работали многие физики. Не претендуя на составление почетного списка, мы не можем умолчать о Нисидзиме и Гелл-Манне. Гелл-Манн особенно выделяется своей изобретательностью, смелостью и широтой теоретического мышления. Он сыграл ведущую роль в этом длительном процессе, о котором мы вкратце расскажем, указав, какое место занимали в нем геометрические идеи.

Столкнувшись с фактом слишком большого разнообразия адронов и квантовых чисел для описания их структуры, физики были вынуждены отказаться от мысли, что речь идет об элементарных частицах, и найти их фундаментальные составляющие части. Главная гипотеза в этом направлении — это гипотеза *кварков*, датируемая 1964 г. и принадлежащая Гелл-Манну и Цвейгу. Слово «кварк» намекает на три мифические сущности из романа Джойса «*Finnegan's Wake*» («Поминки по Финнегану» (*англ. — Прим. перев.*), поскольку сначала кварков было три: три фермиона со спином 1/2, которые должны были образовывать материю трех адронов. Два из них были обозначены как *u* и *d* («*up*» и «*down*») («верхний» и «нижний» (*англ. — Прим. перев.*) и образовывали дублет изоспина. Третий, *s* (*s* — «*strange*» («странный» (*англ. — Прим. перев.*), вводил «странность» — квантовое число, которое было добавлено к изоспину Нисидзимой и Гелл-Манном. Предполагалось, что кварки имеют электрический заряд, но несколько необчный. Кварку *u* приписывается заряд +2/3, а кваркам *d* и *s* — по −1/3 каждому; кроме того, заряды противоположного знака антикваркам. Это было сделано для того, чтобы получить заряды обычных частиц, представляя барион (*фермион*, способный к сильному взаимодействию) как связанное состояние трех кварков, а мезон (*бозон*, способный к сильному взаимодействию) — как связанное состояние кварка и антикварка.

Увы, этот образ был еще слишком прост, и, чтобы ввести дополнительных «спасителей», пришлось добавить два других кварка — ничего не поделаешь, мистер Джойс! — названных *c* («*charm*») («очарование» (*англ. — Прим. перев.*) и *b* («*bottom*» и «*beauty*») («дно» и «прелесть» (*англ. — Прим. перев.*) с зарядами, соответственно, +2/3 и −1/3. Был введен даже шестой кварк (*t* как обозначение «*top*» или «*truth*») («верхушка» или «истина» (*англ. — Прим. перев.*). Кроме того, необходимо было придать кваркам три дополнительных заряда, названных *цветами* (как намек на основные цвета — красный, синий и желтый или красный, синий и зеленый), чтобы лучше отличать их друг от друга. Ведь в противном случае они, будучи фермионами, могли бы нарушить принцип Паули.

Наконец, кварки, каждый из которых мог быть носителем одного из трех цветов, были упорядочены в соответствии с унитарной симметрией, ставшей основой новой калибровочной теории, *квантовой хромодинамики*, которая для сильных взаимодействий имеет то же значение, что и теория Вайнберга–Салама — для слабых. В ней снова появляются калибровочные бозоны — *глюоны*, без нарушения симметрии имеющие нулевую массу. Они играют роль цемента (клея), удерживающего кварки внутри частиц, и препятствуют их вылетанию наружу: говорят, что кварки остаются *в заточении* в частице, потому что они не наблюдаются в свободном состоянии (явление «*конфайнмента*»). (От англ. confinement — ограничение, заточение. — *Прим. перев.*) В действительности глюоны и цвета также находятся в заточении и не принадлежат к непосредственно наблюдаемым величинам. Между тем, измерения параметров столкновения заставляет предположить, что кварки, оставаясь в заточении, обнаруживают большую свободу на малых расстояниях: это — *асимптотическая* свобода, намек на большой разброс возможных значений импульса, который кварки должны иметь вследствие своего заточения в соответствии с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

Квантовая хромодинамика не добилась успехов, сравнимых с теорией электрослабых взаимодействий, поскольку она не дает ни значений масс, ни решений своих уравнений, ни какого-либо точного численного результата, который доказывал бы, что адроны действительно состоят из кварков. Но она устанавливает некие рамки мышления для описания сильных взаимодействий, и, на взгляд некоторых ученых, это описание кажется удовлетворительным.

Совокупность теории электрослабых взаимодействий и квантовой хромодинамики, т. е. представление мира в терминах кварков и лептонов, получила название *стандартной модели*. Очевидно, предпринимаются попытки продвинуться дальше и объединить две части теории в единую калибровочную теорию. Это называется теорией великого объединения, или GUT (Grand Unification Theory), но она еще далека от завершения. Но не потому ли, что одним из следствий теории является нестабильность протона?

Конечно, речь идет о слабой нестабильности (время жизни протона должно было бы в миллиард триллионов раз превышать допускаемый возраст вселенной), но продукты распада, вопреки всему, должны были бы быть видимыми на очень больших материальных массах, например, на больших массах воды. Однако ничего подобного никогда не наблюдалось, что ставит упомянутые попытки под сомнение. Что же касается объедения четырех фундаментальных взаимодействий (*электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного*), то до него еще далеко, потому что общая теория относительности и квантовая механика кажутся особенно плохо подходящими для объединения.

Приверженность этим благородным мечтаниям привела ко введению других симметрий, таких, как *суперсимметрия*, разрушившая барьер между фермионами и бозонами и позволившая им в определенных границах превращаться друг в друга, порождая новые типы гипотетических частиц (как будто нам их без этого мало!)[103]. Именно на этом общем теоретическом пути возникли также условия, способствовавшие возрождению теории Калуцы—Клейна. Как мы говорили выше, начала даже вновь разрабатываться (часто без упоминания об этом) старая идея Эйнштейна и Бергмана, состоящая в предположении, что пятое измерение, введенное Калуцей и Клейном, остается скрытым, потому что оно некоторым образом циклически замкнуто само на себя, и в нем можно пройти только чрезвычайно малые расстояния (скажем, 10^{-40} см). Это измерение недоступно экспериментальному наблюдению, вследствие чего окружающий мир продолжает казаться нам (3+1=4)-мерным. Аналогичная идея была заново воспроизведена в теории *суперструн*, представляющей частицы не как точки, а как колеблющиеся струны. Такое представление добавляет струне новые степени свободы, но имеет досадный недостаток: оно не дает никаких новых физических результатов

[103]Уже давно теория де Бройля, развитая затем Паули и многими другими, установила тесную связь между фермионами и бозонами, представляя эти последние как *слияние* многих фермионов. Именно из этой теории возникла теория света де Бройля и теория *гравитона*, пока еще гипотетической частицы, которая связывалась бы с эйнштейновским полем тяготения.

и использует описание в пространстве, размерность которого равна десяти, причем здесь тоже предполагается, что шесть измерений не проявляются для нас, потому что они циклически замкнуты на самих себя.

Эти замечания о современных и пока сомнительных теориях завершают наше путешествие в область проблем геометризации физики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение двух последних веков были созданы условия для расцвета все более общих геометрий, которые в большей степени, чем язык, стали самой структурой теоретической физики, как это когда-то произошло с геометрией Евклида. Итак, ныне эта структура развилась и приобрела почти независимое положение, как если бы она была не элементом организации теории, а единственным источником прогресса. Но структура теории связана с ее основными идеями, возникшими из определенной области физики и применяемыми к четко обозначенным проблемам. Каждая теория верна *лишь* в некоторой области, которая гораздо более ограниченна, чем хотелось бы думать. Если распространять теорию на другие области, то рано или поздно она окажется плохо приспособленной для этого, и экстраполяция представляемых ею формальных процедур обновит ее лишь чисто внешне. Она окажется в плену постоянно возрастающей сложности, над которой неумолимо парит призрак «синдрома Бове» — настолько высокого собора, что в конце концов он обрушивается.

Время логической простоты давно прошло! Время, когда теория относительности и квантовая механика исходили из нескольких принципов, которые, конечно, было трудно принять, но которые обладали предсказательной и объединительной способностью, вызывавшей восхищение и заставлявшей замолчать хулителей и даже кое-кого из основателей квантовой механики, выступавших с критикой ее эволюции. Тем не менее, когда делаются попытки обозначить область их *применимости*, праздник заканчивается. Теория единого поля, в которой налицо было стремление ввести электромагнетизм в геометрию пространства-времени, несмотря на титанические усилия величайших теоретиков, лишь усложнила общую теорию относительности и не привела к успеху. После смерти Эйнштейна от ее разработки отказались. То же произошло и тогда, когда в квантовой механике пытались оставить область электромагнетизма и атома, чтобы заняться исследованием ядерных сил и частиц: теория стала тяжеловесной и приблизительной. Естественным стремлением теоретиков является исследование простоты — если уж не технической, то хотя бы логической. Физики, изучающие частицы, ведут себя точно так же, и приложенные ими в этом направлении усилия заслуживают внимания. Однако сложность все-таки берет верх. Особенно впечатляющей в этом смысле выглядит теория кварков. Однако предназначавшиеся для того, чтобы оказать сопротивление увеличению числа адронов, кварки и их цвета, в свою очередь, сами увеличились в числе, когда того потребовал опыт. В прошлом веке математик Жозеф Бертран иронически заметил: «Дайте мне четыре параметра, и я создам для вас слона. Дайте мне пятый параметр, и у слона будет хобот».

Возникает то же ощущение, что и при рассмотрении теории эпициклов Птолемея, которая усложнялась с каждым новым достижением наблюдений. Так продолжалось до тех пор, пока астрономы упорствовали в следовании давней рекомендации Платона объяснять все с помощью окружностей. В наши дни калибровочные теории поступают точно так же. Они пытаются воссоздать мир с помощью неизменного комбинирования одних и тех же элементов унитарной симметрии, которые не приводят к открытию ни одного общего закона и ни одного физического факта. Унитарная симметрия — это просто та симметрия, которую теоретики умеют использовать. Ее порядок выбирается в соответствии с критерием, который оказывается слишком высоким для того, чтобы содержать достаточное количество параметров, и слишком низким для того, чтобы избежать излишнего усложнения.

Этот метод достоин теории эпициклов, а не современной теории, связанной с уравнениями, от которых она не отказывается и на основе которых она ставит задачи уточнения законов силовых полей и внешних условий. У теории частиц нет таких уравнений, она никогда не формулировала по-настоящему точных предсказаний и была неспособна упростить свою структуру. После модели кварков никакие новые идеи (вроде теории суперструн и прочие) не формулировали никаких предсказаний и не добивались концептуального прогресса. Будучи по своему происхождению чисто математическими, они могут лишь ценой нового усложнения изменить частности подхода.

Самой поразительной чертой современной теоретической физики является эволюция той роли, которую в ней играет исследование симметрии. Мы видели, что использование симметрии началось с простого обнаружения известных физических законов, затем ее стали рассматривать как определенное завершение, в конечном же итоге симметрия превратилась в некое самостоятельное средство исследования, занявшее центральное место, поскольку она стала считаться самой сущностью физических законов. Интересно отметить, что аналогичная эволюция в это же время произошла и в других областях: скажем, в искусстве, где формы и звуки лишились плоти, место которой занял формальный скелет, в результате чего вместо идеала красоты мы имеем набор абстрактных правил.

Эволюция архитектуры, в которой геометрия играет большую роль, похожа на эволюцию физики. Чистые линии, пропорции и симметрия восторжествовали и в ней. Идея о том, что параллелепипед, имеющий пропорции греческого храма, также обладает художественными достоинствами, захватила наши города, состоящие из параллелепипедов. Преобладание алгебры и симметрии изменило пейзаж физики точно так же, как современная архитектура изменила городские пейзажи. В физике еще можно найти старые кварталы с дворцами и храмами, такими как механика, электромагнетизм, теория относительности, квантовая механика (несмотря на некоторую экстравагантность стиля), однако эти кварталы примыкают к современным кварталам, застроенным бетонными кубами — типовыми многоэтажными домами с дешевыми квартирами, — поскольку и здесь храм был заменен симметрией храма.

Многие теоретики с уверенностью и даже ликованием говорят о том, что новые теории настолько абстрактны, что даже их общие идеи уже не могут быть выражены на обычном языке и потому остаются недоступны для непосвященных. Но в такой теории, как теория электрослабых взаимодействий, трудно увидеть синтез электромагнетизма и слабых взаимодействий, который обладал бы достоинствами синтеза электричества и магнетизма, осуществленного Максвеллом. Это, скорее, простое соединение двух групп инвариантности, одна из которых, SU(2), возникает неизвестно откуда, поскольку ничто не заставляет ее вводить. Конечно, теория снова дает два взаимодействия, но она создает столь же малые возможности для синтеза, как Лувр и пирамида Лувра или Пале-Рояль и колонны Бурена, и выявляет разительное несходство великого произведения искусства и бесплотной модели.

Здесь подвергается критике не геометрия, а та роль, которую ее заставили играть и которую преувеличивали все сильнее и сильнее, особенно со второй трети XX века, когда новаторские порывы теории относительности и квантовой механики, несмотря на их блестящие успехи, начали ослабевать. Впрочем, можно заметить, что квантовая механика сохраняет свой блеск и в наши дни, в атомной физике. Ведь теория становится тяжеловесной только после того, как она покидает свою область.

Такое уже было с механикой Ньютона: в своей области она остается в силе и продолжает прогрессировать, но когда в XIX веке исследователи слишком увлеклись механическим описанием в оптике, механика стала заметно усложняться и смогла преодолеть эту тенденцию только с помощью теории волн (достаточно просто сравнить мемуары Био о двойном лучепреломлении в кристаллах, описанном в терминах «колебаний молекул света» [85], с мемуарами Френеля о том же явлении в волновой оптике [86]). Лоренц на основе механики Ньютона разработал только неполную и непоследовательную электродинамику движущихся тел, и прояснилось все лишь позднее, уже в теории относительности.

То, что теория, развиваясь, технически усложняется, является общим правилом, но теория сохраняет свою логическую простоту до тех пор, пока физика господствует над формализмом. При этих условиях новое геометрическое представление застает теоретиков врасплох, но в конце концов все же принимается, поскольку оно отнюдь не усложняет, а упрощает теорию. И вот приходит день, когда нечто вроде эстетического вкуса заставляет нас ощутить, что теория «живет не по средствам», что она «заплыла жиром». Применение старых рецептов становится бесплодным, математическая новизна больше не является выражением новой идеи, а скрывает отсутствие идеи. Похоже, что сейчас положение дел именно таково.

Разумеется, я не настолько самоуверен, чтобы, завершая книгу, сказать: «Вот эта недостающая идея», но я хотел бы привлечь внимание к одной общей для всех современных теорий черте. Какими бы ни были их новаторские аспекты, они не выходят за определенные рамки — рамки принципа наименьшего действия, из чего, как мы знаем, следует, что эти аспекты не учитывают направление стрелы времени. Им не известны ни эволюция, ни причинность. Они могут быть детерминистичными лишь при условии, что мгновенное состояние системы определяет ее прошлое и ее будущее, но причинность предполагает предшествование одного явления другому и, следовательно, течение времени.

Вот почему в статистических теориях плохо учитывается принцип Карно, предполагающий необратимость, которая в этих теориях должна вводиться с помощью дополнительных гипотез[104]. Релятивистские и квантовые теории способны описывать лишь некое стационарное состояние, а не тот способ, которым оно установилось. Поэтому симметрия играет в них большую роль: они описывают лишь мир, застывший в некоей разновидности вечности, в которой все уже произошло.

Следует считать вполне нормальным то, что описание мира сначала опирается на устойчивые и повторяющиеся явления. Само понятие физического закона предполага-

[104]Не имея возможности осветить этот вопрос подробнее, ограничусь указанием на работы [87] и [88], а также на еще одну, более простую — [89].

ет повторяемость и упорядоченность явлений. Но нельзя забывать, что природе вообще свойственны эволюция и переходные процессы на всех уровнях. Звезды рождаются и умирают, кристаллы растут и разрушаются, между квантовыми состояниями происходят переходы, частицы создаются и аннигилируют. О живой природе можно и не говорить.

Физика не бессильна перед лицом этих фактов, но это другая физика, созданная для описания *переходных* состояний, которые мы не можем обсуждать в этой книге. Ведь от неизменных теорий нельзя требовать описания эволюции, разве что с помощью различных уловок. Эта другая физика создана для того, чтобы понять, как стационарные состояния возникают из переходного процесса, завершением которого они являются, как появляется симметрия и растут кристаллы, как устанавливаются и сохраняются равновесные состояния и как такие процессы, как ход часов, колебания скрипичной струны или биение сердца, могут создать видимость стационарности, тогда как они не сохраняют энергию, не являются обратимыми и не подчиняются принципу наименьшего действия.

Для рассмотрения всего этого понадобилась бы другая книга — книга о *необратимости и о течении времени* — и в ней энтропия была бы более важна, чем энергия, а эволюции — более важны, чем сохранение. Симметрия больше не была бы фундаментальной данностью, и речь шла бы о радио, об автоматизации, об электронике, о живых организмах, о музыкальных инструментах.

Эта физика лишь приближается к тем областям, о которых мы говорили. Если бы однажды она в них проникла, то это стало бы научной революцией. И все же в этом направлении уже есть некоторые достижения, о которых упоминалось выше и о которых я хотел бы сказать несколько слов в качестве заключения. Речь идет о программе, набросок которой был сделан Луи де Бройлем в конце его жизни [90] и в которой он видел завершение своих идей и линии мысли, восходящей к Гельмгольцу и Больцману.

Напомним, что первоначальная идея де Бройля состояла в объединении экстремальных принципов Мопертюи и Ферма в пограничную совокупность явлений, в которой оптические лучи отождествляются с траекториями классической механики. Волновая механика состоит в том, чтобы выйти из этой области в направлении волновой оптики. Новая идея де Бройля состояла в объединении *трех принципов экстремума* — принципов Ферма, Мопертюи и Карно — и, следовательно, принципов кратчайшего оптического пути, наименьшего механического действия и максимума энтропии (соответствующего термодинамическому равновесию). Тогда геометрическая оптика, механика Лагранжа и Гамильтона и термодинамика равновесных состояний образуют единое целое. Если принять сторону волн, сохраняя принцип максимума энтропии, то получится волновая механика; если принять сторону термодинамики, но отказаться от волн, то получится необратимая классическая механика, остающаяся ньютоновской, но больше не подчиняющаяся принципу наименьшего действия; наконец, если принять одновременно волны и термодинамику, то получится новая квантовая (или волновая) механика, которая будет *неравновесной* и позволит описывать квантовые переходы и рождение или аннигиляцию частиц в качестве быстрых, но не мгновенных явлений.

В настоящее время эта идея является мечтой, которая сводится к нескольким формулам, и никто не знает, верны ли они. Но сила аналогий, возвышенность принципов, красота синтеза заставляют меня думать, что это — великая идея. Может быть, мне не хватает объективности, потому что я сам участвовал в разработке этой идеи, сотрудничая с Луи де Бройлем, и я был одним из первых, кому он рассказал о ней. Как же остаться безучастным, когда слышишь об этой идее из уст того, кто этот синтез уже «наполовину» осуществил?

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] P. Duhem, *Le Système du monde,* tome I, Hermann, Paris, 1954.

[2] H. Barreau, *Aristote,* Seghers, Paris, 1972.

[3] A. Koyré, *Nicolas Copernic: des révolutions des orbes célestes. Paris, 1934.*

[4] A. Koestler, *Les Somnambules,* Calmann-Lévy, Paris, 1960.

[5] M. Kline, *Mathematics in Western Culture,* Pelican, 1972.

[6] Galilée, *Dialogues,* Hermann, Paris, 1966.

[7] G. Simon, *Kepler astronome-astrologue,* Gallimard, Paris, 1979.

[8] J. Lacarrière, *En cheminant avec Hérodote,* Seghers, Paris, 1981.

[9] I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (traduction de la marquise du Châtelet augmentée des *Commentaires* de Clairaut), réedition Albert Blanchard, Paris, 1966.

[10] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique,* Albert Blanchard, Paris, 1965 (fac-similé de la 4e édition de 1888 publiée par G. Darboux chez Gauthier-Villars, avec des notes de plusieurs auteurs, dont Bertrand et Darboux).

[11] W. Hamilton, *Mathematical Papers,* Cambridge Univer-sity Press, 1940.

[12] R. Descartes, *Œuvres et Lettres,* Gallimard, coll. «Bibliothèque de la Pleiade», Paris, 1953.

[13] P. Fermat, *Œuvres,* Paris, 1891.

[14] P. Maupertuis, *Œuvres,* Lyon, 1744.

[15] Cité par C. W. *Riedtdijk, Annales de la fondation Louis de Brogiie, 13,* 141, 1988.

[16] M. Daumas (ed.). *Histoire de la science,* Gallimard, coll. «Encyclopedie de la Pléiade», Paris, 1957.

[17] L. C. Polak, *Les Principes variationnels de la mécanique,* Éditions de littérature physico-mathématique, Moscou, 1960.

[18] Ch. Huygens, *Traité de la lumière,* Gauthier-Villars, Paris, 1920.

[19] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta* (thèse de 1924), *Annales de physique,* 1925. Réimpressions: Masson, 1963; fondation Louis de Broglie, 1992.

[20] L. de Broglie, *Un itinéraire scientifique.* La Découverte, Paris, 1987.

[21] L. de Broglie, *La Physique nouvelle et les quanta,* Flammarion, Paris, 1937, 1974, 1986.

[22] A. Einstein et L. Infeld, *L'Evolution des idées en physique,* Flammarion, Paris, 1938, 1985.

[23] J. Andrade e Silva et G. Lochak, *Quanta, Grains et Champs,* Hachette, Paris, 1969.

[24] B. Hoffmann, *L'Etrange Histoire des Quanta,* Le Seuil, Paris, 1981.

[25] G. Lochak, *Louis de Broglie, un prince de la science,* Flammarion, Paris, 1992.

[26] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (leçon inaugurale à Göttingen, 1954). Traduction anglaise commentée dans Mike Spivak, *Differential Geometry,* vol. II, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[27] A. Einstein, *L'Ether et la Théorie de la relativité: la géometrié et l'experience,* Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[28] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* Flammarion, Paris, 1948.

[29] R. Bonola, *Non-euclidean Geometry,* traduit de l'italien avec des complements, Dover, New York, 1955. Edition originale: Zanichelli, Pavie, 1906.

[30] H. Weyl, *Space, Time, Matter,* traduit de l'allemand, Dover, New York, 1952. Première édition: *Raum, Zeit, Materie,* 1918.

[31] A. Einstein, *La Théorie de la relativité restreinte et géneralé* (exposé élémentaire), Gauthier-Villars, coll. «Discours de la méthode«, Paris, 1954.

[32] A. Einstein, *Quatre Conférences sur la théorie de la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[33] S. Mavrides, *La Relativite*, PUF, coll. «Que sais-je?», Paris, 1988.

[34] A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl et H. Minkowski, *The Principle of Relativity*, Dover, New York, 1952.

[35] A. Einstein et M. Besso, *Correspondance (1903–1955)*, traduction, notes et introduction de P. Speziali, Hermann, Paris, 1972.

[36] L. de Broglie, *Comptes rendus*, 180, 498, 1925.

[37] L. de Broglie, 7. *Phys.*, série VI, t. VII, 321, 1926.

[38] L. de Broglie, 7. *Phys.*, série VI, t. VIII, 225, 1927.

[39] C. N. Yang, *Einstein and the Physics of the Second Half of the Twentieth Century*, Second Seminar Marcel Grossman, 1979.

[40] L. de *Broglie, Annales de la fondation Louis de Broglie*, 1, 116, 1976.

[41] L. de Broglie, *Continu et discontinu en physique moderne*, Albin-Michel, Paris, 1941.

[42] O. Costa de Beauregard, *Le Temps déployé: passé-futur-ailleurs*, Le Rocher, Paris, 1988.

[43] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press, 1902; Dover, New York, 1960.

[44] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, 1896 (I), 1904 (II); *Leçons sur la théorie des gaz*, Gauthier-Villars, *Paris, 1905*.

[45] H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, t. **I**, 1892, t. **II**, 1893, t. **III**, 1899; Dover, New York, 1957.

[46] H. Poincaré, «Réflexions sur la théorie cinétique des gaz», *Œuvres*, t. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1954, p. 587.

[47] E. Borel, *Introduction géometriqué à quelques théories physiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[48] A. Einstein, «Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein», *Verhandiungen der Deutschen Physikallische Gesellschaft*, 1917, *19*, 82–92.

[49] *Electrons et photons*, actes du V[e] conseil de physique Sol» vay tenu à Bruxelles en 1927, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[50] P.A.M.Dirac, «The Evolution of the Physicist's Picture of Nature», *Scientific American, 208,* 46, 1963.

[51] L. de Broglie, *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 180,* p.498, 1925.

[52] G.Lochak et R.*Dutheil, Annales de la fondation Louis de Broglie, 16,* 109, 1991.

[53] L. de Broglie, *Nouvelles Perspectives en microphysique,* Albin-Michel, Paris, 1956; Flammarion, coll. «Champs», 1992.

[54] W.Heisenberg, *La Partie et le Tout,* Albin-Michel, Paris, 1972; rééd. Flammarion, coll. «Champs», 1990.

[55] A.Pais, *Inward Bound. Of Matter and Forces in the Physical World,* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[56] A.Einstein et M.Born, *Correspondance (1916–1955),* Le Seuil, Paris, 1972.

[57] A.Einstein, E.Schrödinger, M.Planck et H.A.Lorentz, *Letters on Wave Mechanics,* Vision Press, Londres, 1967.

[58] J. von Neumann, *Les Fondements mathématiques de la mécanique quantique,* trad. A. Proca, Alcan, Paris, 1947.

[59] P.Curie, «Sur la symetrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique», *Journal de physique,* série III, t. III, 1894, p.393; suivi de «Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre», p.415.

[60] H.Weyl, *Symetrie et Mathématiques modernes,* Flammarion, Paris, 1964.

[61] G.D.Birkhoff, *Aesthetic Measure,* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1933.

[62] *La Symétrie aujourd'hui* (treize auteurs interrogés par Emile Noël: A.Brack, G.Cohen-Tannoudji, Y.Coppens, Y.Guiard, C.Houzel, J. Jacques, G. Lascault, J.-M. Levy-Leblond, B.Maitte, J.-C.Risset, S.Schonen, J.-M.Souriau). Le Seuil, Paris, 1989.

[63] Ch. Bouleau, *Charpentes: la géometrié secrète des peintres,* Paris, Le Seuil, 1978.

[64] R.J.Haüy, *Essai d'une theorie sur la structure des cristaux appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées,* Paris, 1784.

[65] M. von Laue, *Geschichte der Physik,* Athenaum, Bonn, 1950.

[66] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics,* John Wiley, New York, 1975.

[67] F.Klein, *Le Programme d'Erlangen (1872),* Gauthiers-Villars, coll. «Discours de la méthode», Paris, 1974.

[68] E.Cartan, «La théorie des groupes», conférence faite au palais de la Découverte en 1944, *Revue du palais de la Découverte, 17,* 15, 1989.

[69] H.Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics,* Dover, New York. Edition originale: *Gruppentheorie und Quantenmechanik,* Zurich, 1928. Premiere edition americaine: Princeton, 1931.

[70] H.Hertz, «On the Relations between Light and Electricity» (1889), *Miscellaneous Papers,* McMillan, Londres, 1896. Reproduit dans *Physics History from AAPT Journals,* American Association of Physics Teachers, College Park, Md., 1985.

[71] E.Galois, *Œuvres mathématiques* (avec une notice biographique et un exposé élémentaire de la theorie par G. Verriest), Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[72] G.Lochak, S.Diner et D.Fargue, *L'Objet quantique,* Flammarion, Paris, 1989.

[73] P.A.M.Dirac, «Quantised Singularities in the Electromagnetic Field», *Proc. of the Royal Society, A 133,* 60, 1931.

[74] A.Einstein, *Annales de la fondation Louis de Broglie, 4,* 57, 1979.

[75] A.Einstein, *Correspondances françaises.* Le Seuil, Paris, 1989.

[76] P.A.M.Dirac, *Directions in Physics,* Wiley, New York, 1978.

[77] W.Heisenberg, «Development of Concepts in the History of Quantum Mechanics», in J.M.Mehra (ed.). *The Physicist's Perception of Nature,* Reidel, Dordrecht, Pays-Bas, 1973, et *Physics History from AAPT Journals,* American Association of Physics Teachers, College Park, Md., 1985.

[78] G.Lochak, «Wave Equation for a Magnetic Monopole», *International Journal of Theoretical Physics, 24,* 1019, 1985.

[79] A.Einstein, «Elektron und allgemeine Relativitätstheorie», *Physica,* 5, 330, 1925.

[80] K. Møller, «Sur la dynamique des systèmes avant un moment angulaire interne», *Annales de l'institut Henri-Poincaré, 11,* 251, 1949.

[81] A. Salam, «Gauge Unification of Fundamental Forces» (discours Nobel 1979), *Reviews of Modern Physics, 52,* 525, 1980.

[82] A. Einstein, «Eine naheliegende Ergänzung des Fundamentes der allgemeine Relativitätstheorie», *Sizungsber. preuss. Akad. Wiss., I,* 261, 1921.

[83] E. Schrödinger, *Mémoires sur la mecanique ondulatoire,* Alcan, Paris, 1933.

[84] Ch. Baudelaire, *Œuvres complètes,* Gallimard, coll. «Bibliothèque de la Pléiade», Paris, 1954.

[85] J.-B. Biot, *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut imperial de France,* 1re partie, Paris, 1812.

[86] A. Fresnel, *Œuvres complètes.* Imprimerie impériale, Paris, t. I, 1866, t. II, 1868, t. III, 1870.

[87] F. Fer, *L'Irreversibilité fondement de la stabilité du monde physique,* Gauthier-Villars, Paris, 1977.

[88] G. Lochak, «Irreversibility in Physics: Reflections on the Evolution of Ideas in Mechanics and the Actual Crisis in Physics», *Found. of Phys., 11,* 593, 1981; traduction française avec des complements bibliographiques: *Annales de la fondation Louis de Broglie,* 13, n°4, 1988, pp. 409–447.

[89] G. Lochak, «Temps physique et irréversibilité», *Revue du palais de la Decouverte, 14,* n°134, 1986, p. 65.

[90] L. de Broglie, *La Thermodynamique de la particule isolée,* Gauthier-Villars, Paris, 1964.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Жорж Лошак

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФИЗИКИ

Дизайнер М.В.Ботя
Корректор З.Ю.Соболева
Технический редактор А.В.Широбоков

Подписано в печать 19.08.2005. Формат $84\times108^1/_{32}$.
Гарнитура Литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,7. Уч. изд. л. 14,21.
Бумага офсетная №1. Заказ №68.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (3412) 500–295

Жорж Лошак - физик-теоретик, ученик Луи де Бройля, написавший биографию своего учителя (*Louis de Broglie, coll. Figures de la Science*, Flammarion, 1922; переиздание coll. Champs, 1995). Кроме того, в соавторстве с С. Динер и Д. Фаргом им написана книга о приложениях квантовой механики (*L'objet quantique*. Flammarion, 1989, переиздание coll. Champs, 1992). Его последняя книга: *Защита и прославление науки: Ученый, наука и тень* [*Defense et illustration de la science (Le savant, la science et l'ombre*. Ellipses, 2002], где 'ombre', или 'тень' (а *не* мрак) намекает на сказку Андерсена.

EXIT

ISBN 5-93972-460-4

9 785939 724609