Н. Н. ЛУЗИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ВЫСШАЯ ШКОЛА
МОСКВА — 1960

Акад. Н. Н. ЛУЗИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для ВУЗОВ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1960



ЛУЗИН Николай Николаевич

Лузин Николай Николаевич (09.12.1883-28.02.1950). Родился в Томске; дед по отцу был крепостным графа Строганова, отец- торговым служащим, мать происходила из забайкальских бурятов. В старших классах гимназии много читал, особенно по философии. Математику в то время не любил, так как ее преподавание было схоластичным (от учеников требовали механического запоминания и точного воспроизводства текста книги). Отец взял ему репетитора из студентов Томского политехнического института, который сумел показать математику как систему знаний. С этого времени будущий ученый, решивший все задачи гимназических пособий, становится первым учеником. Поступает на математическое отделение Московского университета, который окончил в 1908г., и был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию. В 1910 г. командирован в Геттинген и Париж для углубленного изучения математики. В Сорбонне слушал лекции Э.Бореля, А. Пуанкаре и других крупнейших математиков. Возвратившись из командировки (1916), защищает магистерскую диссертацию на тему "Интеграл и тригонометрический ряд", но ему сразу присваивают ученую степень доктора чистой математики.

До конца своей жизни был неразрывно связан с Московским университетом. В 1917 г. избран профессором, в 1927 г.- членом-корреспондентом, а в 1929 г.- академиком АН СССР. Работал в университете, а также в Математическом институте АН СССР (руководил отделом теории функций), Институте автоматики и телемеханики АН СССР, в последнее время заведовал теоретическим отделом Сейсмологического института АН СССР.

Основные труды относятся к теории функций. Упомянутая выше диссертация содержит фундаментальные результаты, оказавшие определенное влияние на дальнейшее развитие метрической теории функций. Один из создателей дескриптивной теории функций, сделавший важное открытие проективных множеств, относительно которых высказал мнение, что для них не может быть решен (в классическом смысле) ряд задач, в частности вопрос об их измеримости. В 70-е годы XX в. доказано методами математической логики, что предвидение ученого в этом направлении подтверждается. Получил важные результаты о граничных свойствах аналитических функций и единственности их определения по краевым значениям.

Ряд работ посвятил вопросам математического анализа, дифференциальным уравнениям и дифференциальной геометрии; в проблеме об изгибании поверхностей на главном основании достиг, в некотором смысле, окончательного результата. В теории функций действительного переменного труды Н. Н. Лузина и его учеников сыграли важную роль в развитии этого раздела математики. Кроме теоретических исследований выполнил работы, которые тесно связаны с методами академика А. Н. Крылова по вековому уравнению и академика С. А. Чаплыгина по приближенному интегрированию дифференциальных уравнений. Интересовался также историей математики, в частности историей десятичной системы счисления. Говорил, что "... преимущество десятичной системы не математическое, а зоологическое. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмиричной системой". Имел много учеников, среди первого поколения которых известные математики П. С. Александров, Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, П.С.Урысон и др. Работами, выполненными совместно с учениками, было положено начало длинному и непрерывному ряду исследовании московских математиков в области теории функции. В начале 20-х годов большинство московских студентов-математиков, занимавшихся наукой, считало себя учениками Н. Н. Лузина. Кружок лиц, группировавшихся около ученого, получил в то время особое наименование "Лузитания". Для своих учеников устраивал "среды", во время которых в неофициальной обстановке рождались новые проблемы, новые методы подхода к старым, еще нерешенным задачам. Доказательством большой известности Н. Н. Лузина является тот факт, что на международном математическом конгрессе 1928 г. (в Болонье) сделать один из немногих обзорных докладов (по теории множеств) было предложено именно ему.

Большое внимание уделял созданию вузовских учебников. Очень популярным в свое время был учебник по дифференциальному и интегральному исчислению для технических вузов американского математика Грэнвиля под редакцией Н. Н. Лузина. Этот учебник переиздавался 17 раз. В 1940 г. написал курс теории функций действительного переменного. В 1953-1954 гг. в Издательстве АН СССР вышло из печати трехтомное собрание сочинений Н. Н. Лузина. Вместе со своим учителем Д. Ф. Егоровым положил начало знаменитой Московской школе теории функций действительного переменного. Второе поколение учеников Н. Н. Лузина обогатило математику такими известными именами, как А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, П. С. Новиков, М. В. Келдыш, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман и др. Был действительным членом Краковской АН, почетным членом математических обществ в Калькутте и Брюсселе. Награжден орденом Трудового Красного Знамени.



Н. Н. ЛУЗИН в 1917 году





ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Автор настоящего двухтомного курса математического ана- академик Николай Николаевич Лузин (1883—1950) являет- дним из крупнейших советских математиков, по книгам рого училось не одно поколение советских инженеров и гогов.

Николай Николаевич Лузин родился в г. Томске 10 декабря г. в семье служащего. По окончании Томской гимназии, в 1901 г., он поступил на математическое отделение физи- тематического факультета Московского университета, ко- й окончил в 1906 г. Здесь Николай Николаевич учился у нитых русских профессоров Н. Е. Жуковского, Б. К. Млод- кого, Д. Ф. Егорова, оказавших значительное влияние на последующую деятельность.

По окончании университетского курса Николай Николаевич оставлен при университете для подготовки к профессор- у званию.

В 1909 г. Николай Николаевич сдал магистерские экзамены тветствуют современным кандидатским экзаменам) и полу- вание приват-доцента по кафедре «чистой математики».

1914 г. Николай Николаевич приступил к чтению лекций новным и факультативным курсам в Московском универ- те. Блестящий лекторский талант соединился у него с уме- увлечь молодежь, воодушевить ее научным энтузиазмом елить веру в собственные силы. Николай Николаевич с са- начала и до конца своей деятельности был неисчерпаемым ником свежих математических идей, преподносившихся им лекательной форме. Лекции, которые читал Николай Нико- ич, пользовались большой популярностью и неизменно лекали большое число слушателей.

В 1916 г. Николай Николаевич представил к защите на со- ние ученой степени магистра диссертацию под названием теграл и тригонометрический ряд». Эта диссертация явилась олько глубоким и фундаментальным исследованием, что ки существовавшим традициям, молодому математику, степень магистра, была присвоена ученая степень доктора

математических наук. Эта диссертация не потеряла своего значения и в настоящее время: в 1951 г. она была переиздана в виде отдельной научной монографии.

В 1917 г. Николай Николаевич был избран профессором математики Московского университета.

Профессорская деятельность его в Московском университете ознаменовалась созданием большого коллектива математиков, работавших в области теории функции действительного переменного.

Н. Н. Лузин сплотил вокруг себя научных работников различных возрастов — от сформировавшихся ученых, ставших работать вместе с ним, до начинающих свою научную деятельность математиков из числа студентов и аспирантов, а также воспитал ряд ученых, из которых многие сыграли и играют в настоящее время выдающуюся роль в развитии математики.

В 1927 г. Николай Николаевич был избран членом-корреспондентом, а в 1929 г.— действительным членом Академии наук СССР. С этого времени он работал в основном в научных учреждениях Академии наук. В последние годы жизни Николай Николаевич возглавлял отдел теории функции действительного переменного в Математическом институте им. Стеклова и принимал участие в работе Института автоматики и телемеханики Академии наук.

Основная научная деятельность Николая Николаевича протекала в области исследования теории функций действительного переменного; в этой дисциплине им получены результаты, обогатившие математическую науку важнейшими открытиями. Труды Николая Николаевича в теории функций действительного переменного стали в настоящее время классическими. Глубокие фундаментальные исследования принадлежат Николаю Николаевичу в теории тригонометрических рядов и в теории аналитических функций, в которой им были применены методы исследования теории функций действительного переменного.

В своей творческой работе Николай Николаевич не оставался в рамках чисто теоретических исследований. Ему принадлежит ряд работ по прикладной математике, а именно по численным методам алгебры и анализа и, в частности, им произведены важные исследования по численному интегрированию дифференциальных уравнений методом акад. С. А. Чаплыгина.

Николай Николаевич скоропостижно скончался 28 февраля 1950 г. от болезни сердца.

Имя Николая Николаевича Лузина — крупнейшего советского ученого, педагога и патриота нашей великой Родины занимает почетное место в истории советской науки.

ГЛАВА I

ЧИСЛО

§ 1. Рациональные числа. Все положительные и отрицательные целые числа и дроби, а также нуль, называются *рациональными числами.* Предполагается, что учащийся знаком с большинством элементарных свойств этих чисел и с пользованием этими числами по обычному учебнику арифметики.

Учащийся знает, что четыре основные действия арифметики: сложение, вычитание, умножение и деление, проделанные над рациональными числами, дают в результате опять рациональные числа. Значит, этим путем мы не получим никаких иных чисел.

§ 2. Практическое значение рациональных чисел. С точки зрения практики никаких других чисел, кроме рациональных, нам и не нужно знать для выполнения измерений.

Надо иметь в виду, что задача фактического измерения заданной величины всегда есть *неопределенная* задача. Пусть, например, нужно измерить длину некоторого прямолинейного отрезка, данного нам *физически.* Самые его концы всегда ведь несколько неопределенны, ибо всегда можно заменить данный отрезок другим, столь нечувствительно от него отличающимся, что мы не в силах обнаружить этой подмены: для этого достаточно только, чтобы разница длин обоих этих отрезков лежала за порогом чувствительности наших инструментов.

Таким-то образом имеется бесчисленное множество рациональных чисел, чрезвычайно близких друг к другу, каждое из которых вполне можно принять за «истинную» длину нашего физического отрезка. Свободой такого выбора на практике очень часто и пользуются. Так как результат какой-либо арифметической выкладки изменится весьма мало, если мы слегка изменим те числа, над которыми производится самая выкладка, то для удобства вычислений обычно сохраняют только очень небольшое количество десятичных знаков измеряемой величины. Так, например, часто просто принимают

$$\pi = 3{,}14$$

и отбрасывают все остальные десятичные знаки у более точного значения

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\ldots$$

Таким образом оказывается, что одних только рациональных чисел вполне достаточно для нужд измерительной *практики,* ибо они позволяют выполнять измерения *с какою угодно степенью точности.* Но одних только рациональных чисел становится уже недостаточно, когда надо решать вопросы геометрии, механики и теоретической физики с *абсолютной точностью,* ибо здесь необходимо уже знание так называемых *иррациональных чисел.*

Мы сейчас увидим, как возникают эти новые числа и как их следует понимать.

§ 3. Сопоставление рациональных чисел с точками прямой линии. Последовательность рациональных чисел сама по себе есть *всюду плотная,* ибо между двумя такими числами — какими бы близкими друг к другу они ни были — всегда можно найти сколько угодно промежуточных рациональных чисел. Поэтому-то на первый взгляд и кажется, что для каких-нибудь новых чисел в последовательности рациональных чисел как будто совсем не остается никакого места.

Однако указанное первое впечатление оказывается глубоко ошибочным, потому что в последовательности рациональных чисел повсюду имеются *просветы,* как это становится ясным, когда сопоставим последовательность всех рациональных чисел с последовательностью точек на прямой линии.

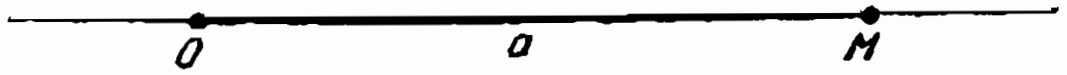


Рис. 1

Чтобы осуществить такое сопоставление, возьмем прямую линию бесконечную в обе стороны, на ней выберем начальную точку O и примем определенную единицу длины для измерения отрезков. Очевидно, всегда можно построить отрезок, имеющий своею длиною любое заранее заданное рациональное число a, и нанести его вправо, либо влево от O, смотря по тому, будет ли a положительно или отрицательно. Таким образом мы получим определенную концевую точку M, которую можно рассматривать, как точку, соответствующую рациональному числу a[1]. Следовательно, можно сказать, что **всякому рациональному числу соответствует одна, и только одна, точка на прямой** (рис. 1).

Полученную точку M мы воображаем черной и непрозрачной; она-то и сопоставляется с взятым рациональным числом a,

[1] На чертеже a взято положительным.

называющимся *абсциссой* точки M. Когда это проделано со всяким рациональным числом a, прямая окажется покрытой густой сетью черных непрозрачных точек M, как бы осевших на прямой и населяющих — без пустот — каждый ее участок, т. е. отрезок, где бы он ни лежал и как бы мал он ни был [1]. У всякой из этих точек M имеется своя абсцисса a, являющаяся рациональным числом. Ясно, что точки M с положительными абсциссами a лежат вправо от начала O, с отрицательными абсциссами — влево. Абсцисса самого начала O равна нулю. Чем больше арифметически, т. е. беззначно, величина абсциссы a, тем дальше от начала O лежит точка M.

Это и есть искомое нами сопоставление последовательности рациональных чисел с точками прямой, при котором все точки M полученной черной непрозрачной сетки имеют, очевидно, совершенно такое же взаимное расположение друг относительно друга, какое имеют между собой их рациональные абсциссы a. Конец M всякого отрезка OM, *соизмеримого с взятой единицей длины*, заведомо содержится в сети, ибо такая точка M имеет рациональную абсциссу. Точки с рациональными абсциссами мы, для краткости речи, будем называть просто *рациональными точками*, и составленную из таких точек сеть будем называть тоже *рациональной сетью*.

Других точек и других чисел мы пока не знаем.

§ 4. Несоизмеримые отрезки. Если бы всякая точка прямой оказалась содержащейся в построенной нами сети, т. е. если бы совсем не существовало никаких несоизмеримых отрезков, тогда все дело обстояло бы необыкновенно просто: в этом случае каждая точка нашей прямой имела бы рациональную абсциссу и, значит, мы не имели бы ни малейшей нужды в каких-либо новых числах, ибо тогда одних только рациональных чисел было бы достаточно для выражения *всех* теоретических соотношений.

Но действительность оказывается гораздо сложнее, и одним из великих открытий, сделанных, видимо, в глубокой древности, является установление наличия отрезков, *несоизмеримых с данной единицей длины*. По-видимому, первым примером этого рода была *диагональ квадрата*, сторона которого принята за единицу длины [2].

---

[1] Это утверждение является *постулатом*, связанным с нашим обычным представлением о прямой.

[2] Нельзя установить даже приблизительно время этого открытия. Предание, приписывающее его греческому философу Пифагору (около 2500 лет назад), сохранило следы сильного впечатления, вызванного этим открытием в древнем мире.

Однако не исключено и то, что Пифагор познакомился с ним во время своего путешествия по Востоку и что сведения о существовании несоизмеримых

Отложив такой отрезок от начала O — что проще всего можно сделать, заставив диагональ OC квадрата, вращающуюся около O как твердый стержень, упасть на нашу прямую — мы получим точку M, которая не соответствует никакому рациональному числу и *у которой, строго говоря, пока нет никакой абсциссы* (рис. 2). А так как имеется бесчисленное множество различных длин, несоизмеримых с единицей масштаба, то прямая линия оказывается в бесконечное число раз более богатой своими точками, чем последовательность рациональных чисел своими числами. Значит, рассматриваемое сопоставление точек и чисел вынуждает нас признать некоторую неполноту в последовательности рациональных чисел, тогда как прямой линии мы приписываем всю полноту и абсолютное отсутствие каких-либо просветов, т. е. *сплошность*, или *непрерывность*.

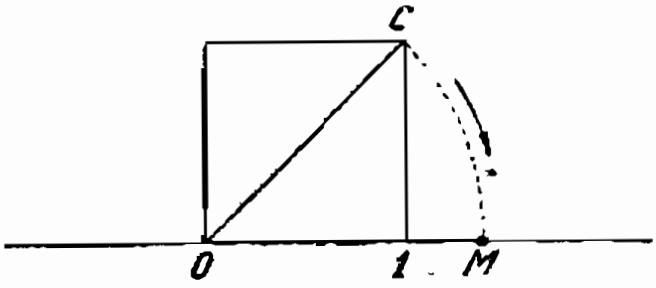


Рис. 2

Если представить себе рациональные точки черными и непрозрачными, а все другие точки прозрачными, то мы, став против света и держа нашу прямую перед глазами, увидали бы пробивающиеся всюду бесконечно тонкие лучи света, прошедшие через точки, соответствующие концам отрезков, несоизмеримых с принятой единицей длины.

отрезков восходят к глубинам ассиро-вавилонской культуры. В наше время факт несоизмеримости отрезков стоит наряду со многими другими «фактами невозможности». Так, имеются два равнообъемные тетраэдра, которые невозможно рассечь на попарно тождественные более мелкие тетраэдры; невозможно — с помощью циркуля и линейки — разделить на три равные части угол равностороннего треугольника и т. д. Каждое такое установление невозможности является существенным шагом в ходе наших знаний.

Геометрическое рассуждение Пифагора о взаимной несоизмеримости стороны и диагонали квадрата имеется во всяком полном учебнике геометрии.

Арифметическое же доказательство таково: длина диагонали квадрата, сторона которого есть единица, $=\sqrt{2}$. Число это не может быть ни целым, ни дробью. В самом деле, пусть, если возможно, будет $\sqrt{2}=\frac{x}{y}$, где x и y целые числа, не имеющие общего делителя. Возвышая обе части в квадрат, имеем $2=\frac{x^2}{y^2}$, т. е. $2y^2=x^2$. Значит, целое x должно быть четным, т. е. $x=2x^*$, где x^* целое. Подставляя это выражение для x, имеем $2y^2=4x^{*2}$, т. е. $y^2=2x^{*2}$. Мы видим, что и целое y обязано также быть *четным*, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{x}{y}$. Итак, $\sqrt{2}$, не будучи ни целым числом (когда $y=1$), ни дробью, не может быть числом рациональным.

§ 5. Иррациональные числа. Если мы желаем изучить прямую линию арифметически, то, так как последовательность рациональных чисел оказывается недостаточной, является необходимость в пополнении нашей последовательности чисел таким образом, чтобы она получила такую же *сплошность*, т. е. *полноту* или *непрерывность*, как и сама прямая линия. Это достигается введением *иррациональных чисел*, определяемых лишь при посредстве рациональных чисел.

Рамки этой книги не дозволяют нам развить здесь одну из обычных теорий иррациональных чисел. Поэтому мы ограничимся только тем, что остановим внимание читателя на существовании иррациональных чисел и на следующем положении: *иррациональные числа совершенно заполняют все просветы, имеющиеся в последовательности рациональных чисел, т. е. мы принимаем, что всякой точке прямой соответствует число, рациональное или иррациональное, называемое абсциссой этой точки, и обратно.*

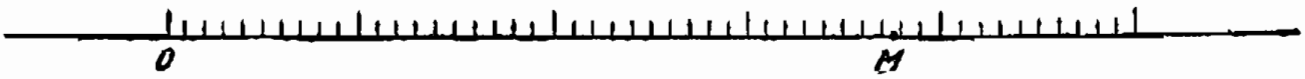


Рис. 3

Арифметически же иррациональные числа могут быть представлены в виде бесконечных десятичных дробей. Чтобы видеть как это выходит, представим себе, что нам нужно измерить с абсолютной точностью длину отрезка OM, лежащего на прямой (рис. 3) и несоизмеримого с единицей длины.

С этой целью мы прикладываем к прямой идеально точную измерительную линейку, разделенную на *метры, дециметры, сантиметры, миллиметры* и т. д. *до бесконечности*. Слово «метр» здесь взято только в смысле единицы длины; существенным является лишь то, что каждое деление нашей измерительной линейки разделено на десять дальнейших более мелких делений, так что «дециметр» обозначает просто $\frac{1}{10}$ единицы длины, «сантиметр» — $\frac{1}{100}$, «миллиметр» — $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Самый процесс измерения длины несоизмеримого отрезка OM мы ведем методически следующим образом:

Первый шаг. Заставляем левый конец измерительной линейки совпасть с начальной точкой O и затем прочитываем на линейке *максимальное* число *полных* метров, содержащихся в OM, начиная от точки O. Пусть это будет a_0 метров (на рисунке 3 $a_0 = 3$).

Второй шаг. Остаток измеряемой длины, содержащийся между точкой a_0 метров и M, имеет длину меньшую метра. Мы

прочитываем на измерительной линейке *максимальное* число полных дециметров, содержащихся в этом остатке. Пусть это будет a_1 дециметров (на рисунке $a_1 = 7$); ясно, что всегда $a_1 \leqslant 9$, т. е., что целое число a_1 есть просто *цифра*.

Третий шаг. Новый остаток измеряемой длины, содержащийся между точкой a_0 метров $+ a_1$ дециметров и M, имеет длину меньшую дециметра. Мы прочитываем на измерительной линейке максимальное число полных сантиметров, содержащихся в этом остатке. Пусть это будет a_2 сантиметров; ясно, что a_2 также есть цифра, т. е. $a_2 \leqslant 9$.

Этот процесс мы продолжаем, делая четвертый, пятый и дальнейшие шаги.

Так как взятый нами отрезок OM по предположению несоизмеримый с единицей длины («метром»), то наш измерительный процесс не может закончиться на конечном шаге, потому что точка M никогда строго не попадает ни на одну из делящих точек линейки. Поэтому, если мы, *для памяти* выпишем подряд одну за другой прочитанные на линейке цифры, отделив начальное число a_0 от них запятой, то *наш нескончаемый процесс измерения развернет перед нами единый целый бесконечный символ*

$$a_0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

состоящий из бесконечного множества цифр, поставленных рядом друг с другом, и называемый бесконечной десятичной дробью.

Для цели *точного* измерения этот бесконечный символ, разумеется, служить никак не может, потому что нельзя же на самом деле сложить, в буквальном серьезном смысле этого слова, бесконечно много слагаемых

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots{}^{1}.$$

Однако указанный бесконечный символ $a_0, a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n \ldots$ очень удобен для *приближенного измерения с любой степенью точности*. Действительно, обрывая этот бесконечный символ оста-

[1] Никто никогда не мог, не может и не сможет сложить, в буквальном смысле слова, бесконечно много слагаемых. И если говорят о «сумме» членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии вроде $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, то учащийся должен все время иметь в виду, что сумма эта *не настоящая*, а есть лишь *предел* суммы S_n, составленной из первых n членов, к которому она стремится при беспредельном возрастании числа n взятых членов.

новкой нашего измерительного процесса на $(n+1)$-м шаге, мы получаем *конечную* десятичную дробь

$$a_0,\ a_1a_2\ldots a_n,$$

т. е. получаем длину

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\ldots+\frac{a_n}{10^n},$$

заведомо *меньшую* измеряемого отрезка OM, потому что цифры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ прочитывались нами на измерительной линейке так, чтобы мы не перешагнули через точку M. А так как цифры эти прочитывались всегда *максимальными*, то *усиление* какой-нибудь одной из этих цифр хотя бы одной единицей наверное заставит нас переступить вправо через конец M, т. е. мы будем иметь уже больший отрезок, чем OM. Итак, при всяком n имеем неравенства

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n}{10^n}<OM<$$

$$<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n},$$

показывающие, что *конечная десятичная дробь*

$$a_0,\ a_1a_2\ldots a_n$$

является приближением по недостатку несоизмеримой длины OM с точностью до $\frac{1}{10^n}$ единицы, и что, усилив последнюю цифру a_n на одну единицу, т. е. взяв вместо a_n цифру a_n+1, мы получаем уже *приближение по избытку с той же самой точностью до* $\frac{1}{10^n}$.

§ 6. Иррациональное число есть непериодическая бесконечная десятичная дробь. До сих пор мы предполагали, что измеряемый отрезок OM есть несоизмеримый с принятой единицей длины. Однако ясно, что указанный процесс измерения годится и для того случая, когда *OM соизмерим с единицей*, т. е. когда точка M имеет абсциссой некоторое рациональное число $\frac{p}{q}$. Только в этом случае, как тому учит нас элементарная арифметика, бесконечная десятичная дробь $a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ становится *периодической* (простой или смешанной), и в арифметике в этом случае пишут условное[1] равенство

$$\frac{p}{q}=a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots, \qquad (1)$$

[1] Учащийся хорошо сделает, если отметит всю условность этого равенства ведь настоящее «=» должно писаться, собственно, только тогда, когда обе его ча-

выражающее только ту мысль, что рациональное число $\frac{p}{q}$ постоянно содержится между двумя конечными десятичными дробями, из которых меньшую получают, просто останавливая бесконечную дробь на какой-нибудь n-й цифре, а бóльшую получают, увеличивая на единицу последнюю цифру остановленной дроби, причем обе эти дроби сближены между собой на $\frac{1}{10^n}$.

Этим условным равенством (1) арифметики и пользуется математический анализ, *называя иррациональным числом просто всякую непериодическую бесконечную десятичную дробь* $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots$, и рассматривая это *иррациональное число большим всякого приближения по недостатку и меньшим всякого приближения по избытку.*

Таким образом, например, пишут

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{,}414\,213\,6\ \ldots, \\ \pi &= 3{,}141\,592\,653\,5\ \ldots, \\ e &= 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ \ldots, \\ \lg 5 &= 0{,}698\,970\,0\ \ldots{}^{1}. \end{aligned}$$

Учащийся должен понимать, что никакого таинственного смысла в этих равенствах нет, потому что бесконечный символ, стоящий направо, *есть просто инструмент, при помощи которого указывают точку на прямой или — что все то же самое — при помощи которого указывают то отверстие* (просвет) *в последовательности рациональных чисел, которое называется* «чис-

---

сти, левая и правая, суть *истинные числа*. Здесь же налево стоит истинное число $\frac{p}{q}$, а направо — не число, но лишь бесконечный символ, позволяющий получить для истинного числа, написанного налево, его десятичные приближения. Истинным это условное равенство становится только тогда, когда цифры a_n, начиная с некоторого номера k, сплошь равны нулю:

$$a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = 0.$$

В этом случае мы имеем уже истинное равенство

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_k}{10^k},$$

в котором сумма, стоящая направо, составлена из *конечного* числа слагаемых, каковые *все* можно фактически сложить.

[1] Десятичный (обыкновенный) логарифм Бригга $\lg 5$ есть число *иррациональное*. В самом деле, если бы $\lg 5 = \frac{a}{b}$, где a и b целые, то имели бы $10^{\frac{a}{b}} = 5$, или $10^a = 5^b$, что невозможно, ибо левая часть этого равенства есть число *четное*, а правая — *нечетное*.

лом $\sqrt{2}$» и которое лежит между десятичными приближениями 1,414 213 и 1,414 214, *разность которых равна одной миллионной.*

§ 7. Действительные числа. Все вместе рациональные и иррациональные числа называются *действительными*, или *вещественными* числами. Ясно, что действительные числа образуют, как и рациональные числа, последовательность, располагаясь в порядке их возрастания; из двух неравных действительных чисел a и b одно всегда больше другого. Всякое положительное число больше нуля; всякое отрицательное число меньше нуля. Сам же нуль нейтрален; не будучи ни положительным, ни отрицательным числом, нуль является лишь границей положительных и отрицательных чисел и благодаря этому, как увидим дальше, имеет совсем особенные свойства, которых не имеют другие числа.

Символ $>$ читается «больше чем»; символ $<$ читается «меньше чем». Поэтому, чтобы показать, что число a больше числа b, пишут $a>b$. Формула $a>0$ указывает, что число a положительно. Точно так же формула $b<0$ указывает, что b отрицательно.

Все такие формулы называются *неравенствами*. Неравенства можно умножить на *положительные* числа. Так, если $a<b$, то справедливо и неравенство $ac<bc$, если c положительное число. Наоборот, умножая какое-нибудь неравенство на *отрицательное* число, необходимо *переменить самое направление неравенства на обратное*. Так, если $a<b$ и число d отрицательно, то $ad>bd$.

Символ $\geqslant$ читается «больше или равно» и символ $\leqslant$ читается «меньше или равно». Поэтому, если число a не превосходит числа b, пишут: $a\leqslant b$.

В этой книге, если не сделано оговорки, рассматриваются только действительные числа.

§ 8. Абсолютная величина. Под *абсолютной величиной* действительного числа a понимают его величину, взятую *беззначно*. Поэтому следует отличать абсолютную величину действительного числа от его алгебраической величины, которая всегда пишется или мыслится со знаком. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Так, имеем:

$$|+5|=5, \quad |-7|=7, \quad |\pm 0|=0.$$

Из этого определения прямо следуют два положения:

I. *Абсолютная величина алгебраической суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых,* т. е.

$$|a+b-c+\ldots|\leqslant|a|+|b|+|c|+\ldots.$$

Например:

$$|7-3+8-13|<7+3+8+13.$$

II. *Абсолютная величина разности больше или равна разности абсолютных величин*, т. е.

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Доказательство. Первое предложение, примененное к тождеству $a=(a-b)+b$, дает $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$. Отсюда непосредственно следует, что $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

Укажем еще на следующее положение, также прямо вытекающее из самого определения абсолютной величины.

III. *Абсолютная величина произведения и частного в точности равна произведению и частному абсолютных величин*, т. е.

$$|a\cdot b\cdot c\cdot d|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot|d|,\quad\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

§ 9. Деление на нуль запрещается. Во всех математических расчетах, теоретических и практических выкладках учащийся неизменно обязан руководствоваться одним из самых важных правил математического анализа:

деление на нуль, безусловно, недопустимо ни в одном случае.

Это можно обнаружить самым отчетливым образом. Для этого достаточно дать себе отчет в том, что такое частное $\frac{a}{b}$ двух чисел a и b. Основное положение арифметики гласит: «частным двух данных чисел a и b называется такое третье число c, которое при помножении на него делителя b дает делимое a, т. е. для которого $cb=a$».

В силу этого чрезвычайно ясного определения деление на нуль как раз и невозможно. В самом деле, надо рассмотреть только два случая: во-первых, когда делимое a есть нуль, и, во-вторых, когда делимое a не есть нуль.

В первом случае, $\frac{0}{0}$ *есть полная неопределенность.* Действительно, когда и делимое a, и делитель b оба суть нули, т. е. когда $a=0$ и $b=0$, тогда всякое число c удовлетворяет равенству $cb=a$, потому что каждое число при умножении его на нуль дает нуль. Поэтому $\frac{0}{0}$ и есть полная неопределенность.

Во втором случае, $\frac{a}{0}$ *не имеет никакого смысла*, если a отлично от нуля. Действительно, поскольку произведение всякого числа на нуль есть нуль, постольку нет никакого числа c, которое, будучи помноженным на нуль дало бы число a, отличное от нуля.

Отсюда следует, что обе формы

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{a}{0}$$

являются только кажущимися математическими формулами: первая абсолютно бесполезна, вторая абсолютно бессмысленна.

Таким образом, *деление на нуль есть действие всегда недопустимое.*

Кажущийся парадокс. Для того чтобы научить учащегося осторожности в обращении с нулем, мы сейчас докажем равенство $1=2$ и попросим учащегося, чтобы он сам отыскал то место, где рассуждение грешит против вышеуказанного правила.

Возьмем число a, отличное от нуля, и число b, равное a. Очевидно, имеем равенство $ab=a^2$. Вычитая из обеих частей этого равенства b^2, получаем:

$$ab-b^2=a^2-b^2.$$

Разлагая на множители левую и правую части, имеем:

$$b(a-b)=(a+b)(a-b).$$

Опуская общий множитель у левой и правой частей, находим:

$$b=a+b.$$

Так как, по сделанному предположению, число b равно числу a, то из последнего равенства следует, что

$$a=2a.$$

Деля обе части этого равенства на число a (что вполне законно, ибо число a отлично от нуля), мы находим окончательно:

$$1=2.$$

ГЛАВА II

ВЕЛИЧИНА

§ 10. О величинах вообще. Не следует смешивать понятие *числа* с понятием *величины.* Число всегда *отвлеченно*, так как получается в результате индивидуального измерения; поэтому число всегда единично, т. е. как бы кристаллично, и неспособно, само по себе, ни к какому изменению. Напротив, величина всегда *конкретна,* так как является *качеством* предмета; поэтому величина всегда как бы аморфна и в высокой степени склонна к изменению.

Величины бывают самых разнообразных родов. Всякая наука, изучающая природу, имеет дело со своими собственными величинами, характерными для нее. В *физике,* например, температура, теплоемкость, удельный вес, сила электрического тока суть величины. В *механике* величинами являются скорость, масса, тяжесть; в *геометрии* — длина линий, углы, площади, объемы и т. д.

Несмотря на чрезвычайное разнообразие величин, у всех у них имеется одно общее свойство: каждая величина может быть измерена единицей величины этого же самого рода. Так, длина измеряется единицей длины — *метром;* температура измеряется единицей температуры — *градусом;* сила электрического тока измеряется своей единицей — *ампером* и т. д. Как было уже указано, результатом такого измерения является всегда отвлеченное число, выражающее собой меру рассматриваемой величины в принятой для нее единице масштаба.

Отвлеченное число, получающееся как результат измерения данной конкретной величины единицей масштаба этого же рода, называется численным значением рассматриваемой величины.

Таким образом, *значение величины* есть всегда *отвлеченное число.*

В математике величину обозначают просто буквой, например x или a, которая может становиться тем или иным отвлеченным числом.

Это отвлеченное число называется «численным значением» математической величины x или a.

Про это отвлеченное число, приписываемое букве x или a, говорят, что оно «принимается» математической величиной.

Благодаря такой точке зрения на величину вообще, математический анализ достиг чрезвычайной мощности и гибкой приложимости к разнообразнейшим наукам и отделам техники, так как любую конкретную величину, наблюдаемую в жизни, всегда можно обозначить буквой x или a, а про численное значение этой конкретной величины, полученное путем ее измерения, всегда можно выразиться, что «оно принимается буквой», т. е. приписать это отвлеченное число нашей букве как ее «численное значение».

§ 11. Переменная величина. В текущей жизни почти все конкретные наблюдаемые величины являются *переменными*, т. е. изменяющимися с течением времени, хотя бы и немного. Если я бросаю вверх камень, его *расстояние x до поверхности земли* есть, разумеется, величина переменная, потому что это расстояние сначала увеличивается, пока камень уносится вверх, а затем начнет уменьшаться, когда камень, достигнув высшей точки, начинает падать, и под конец станет равным нулю, когда камень, упав, будет покоиться. Значит, в этом случае расстояние x есть величина переменная, т. е. имеющая в различные моменты времени различные числовые значения.

Мы сказали, что в жизни почти *все величины являются переменными*. Даже там, где внимательное наблюдение как будто дает величину постоянную, более тонкое измерение точным чувствительным прибором обнаруживает, что наблюдаемая величина все-таки есть переменная, например рост учащегося в течение одних только суток. Привычка заставляет нас считать этот рост в продолжение одного дня одним и тем же. На самом же деле измерение точным прибором обнаруживает, что утром рост всегда немного выше, чем вечером, когда накопившаяся за день усталость, какой бы незначительной она ни казалась, заставляет неизбежно мускулы ослабевать и делает организм ниже.

Как общее правило, всякая величина, наблюдаемая в действительности, есть переменная. Лишь *научное мышление* видит в текущей жизни постоянные величины, например, когда речь идет о законах сохранения энергии или количества материи. Мы уже видели, что математический анализ всякую конкретную величину обозначает *буквой*. И так как конкретная величина все время меняется, то математический анализ должен сообразно этому предполагать, что эта буква все время меняет свои численные значения.

Например, если в случае брошенного камня буква x обозначает расстояние его до земли, то численное значение буквы x зависит от времени и меняется непрерывно, сначала увеличиваясь, а потом убывая до нуля и оставаясь далее нулем, если мы не

трогаем камня и пренебрегаем мелкими сотрясениями почвы, которые всегда имеются. Таким образом: *переменная величина в математическом анализе обозначается буквой, например x, которая с течением времени изменяет свое численное значение.*

Следовательно, если x есть переменная величина, то буква x обозначает в разные моменты времени различные числа. То число, которое обозначает буква x в данный момент, называется *значением переменной величины x в данный момент.* Это значение вообще изменяется от момента к моменту. Это обстоятельство часто выражают словами, говоря, что «переменное x последовательно проходит через ряд значений», или что «буква x пробегает ряд значений».

Переменные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита:

$$x,\ y,\ z,\quad \text{а также}\quad t,\ u,\ v,\ w.$$

§ 12. Постоянная величина. Величина, которая совсем не изменяется, носит название п о с т о я н н о й в е л и ч и н ы. Так, в геометрии сумма углов в треугольнике есть *величина постоянная*, каким бы образом ни менялся треугольник, как бы ни вытягивались или ни укорачивались его стороны и как бы ни изменялись его углы. Другой пример из геометрии же — это отношение длины окружности к ее диаметру, остающееся всегда тем же самым (равным π, где $\pi = 3{,}141592653\ldots$), какие бы окружности, большие или маленькие, мы ни брали.

Постоянные величины принято обозначать первыми буквами латинского алфавита:

$$a,\ b,\ c \text{ и т. д.}$$

Среди постоянных величин полезно различать *абсолютные постоянные* и *параметры*. Первые сохраняют в любых условиях и при всяких заданиях одно и то же определенное численное значение, например $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ и т. д. Параметры же суть лишь *условные постоянные*, т. е. в пределах одного вопроса их рассматривают как величины не меняющиеся, но в пределах другого вопроса они могут иметь совсем другие значения, хотя точно так же не меняющиеся.

Например, рассматривая *какую-нибудь одну* прямую линию в аналитической геометрии, мы пишем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где x, y суть «текущие координаты» движущейся точки, описывающей своим движением нашу прямую, следовательно, истинные *переменные величины*; числа же a, b суть *параметры*, потому что остаются постоянными, коль скоро мы выбрали определенную прямую; но они изменятся и будут другими,

если мы перейдем от данной прямой к какой-нибудь другой прямой, так же данной.

В этом же смысле говорят, например в электротехнике, о «параметрах» радиолампы: это суть величины, характеризующие данную радиолампу и, значит, остающиеся для нее постоянными, но изменяющиеся при переходе от одной лампы к другой.

§ 13. Геометрическое изображение величин. Оно то же самое, какое употребляется для изображения отвлеченных чисел.

Если хотят геометрически изобразить п о с т о я н н у ю в е л и ч и н у a, для этого ищут по прямой (рис. 4) ту точку A, абсцисса которой как раз равна численному значению постоянной величины a. Так как a есть величина п о с т о я н н а я, то ее численное значение сохраняется все время неизменным, и, значит, точка A будет неподвижной. Итак, *постоянная величина геометрически изображается неподвижной точкой прямой линии.*

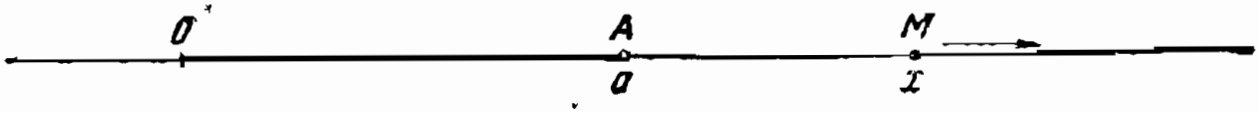


Рис. 4

Если хотят геометрически изобразить *переменную величину* x, то для этого сначала вспоминают, что она меняется с течением времени, проходя через различные численные значения.

Поэтому сначала рассматривают переменную величину x, захватывая ее в какой-нибудь определенный, хотя и произвольный, момент времени. В этот самый момент x принимает некоторое совершенно определенное численное значение и в этот же самый момент мы поступаем с x точно так же, как поступали раньше при геометрическом изображении постоянного числа a, именно, находим на прямой ту точку M, абсцисса которой как раз равна численному значению переменной величины x в этот момент. Такая точка M отыскивается легко и будет единственной (рис. 4).

Но с течением времени x изменяет свое численное значение. Следовательно, в другие моменты времени точка M будет находиться в других местах на нашей прямой, т. е. будет *двигаться.* Таким образом, *переменная величина геометрически изображается движущейся точкой прямой линии.*

§ 14. Область значений переменного. Мы знаем, что всякая переменная величина x с течением времени проходит через ряд различных численных значений, принимая их одно за другим. Часто очень полезно обратить внимание на эти принимаемые переменной величиной x численные значения и выделить их совокупность отдельно от прочих чисел. *Эта совокупность численных значений, принимаемых переменной величиной* x, *называется областью ее значений.*

Не следует думать, что раз x есть величина переменная, то уже тем самым она способна принимать всякие значения. Например, если x есть число шахматных партий, выигрываемых каким-нибудь опытным шахматным игроком со дня его рождения, то x увеличивается с течением времени, значит, есть переменная величина. Но x может принимать только целые положительные значения, ибо нельзя, например, выиграть $\sqrt{2}$ партий. Значит, областью значений переменной величины x в этом случае явится некоторая сравнительно небольшая группа целых чисел.

После того что мы говорили о геометрическом изображении переменной величины, ясно, что *область численных значений переменной величины x геометрически изобразится просто в виде некоторого собрания точек прямой;* это будет совокупность тех самых точек, на которых побывает движущаяся точка M, потому что абсцисса всякой такой точки и является тем значением, которое примет x в некоторый соответствующий момент времени.

На приведенном примере шахматного игрока область численных значений переменного x изобразится просто в виде некоторого собрания точек с целыми абсциссами.

§ 15. Отрезок и промежуток. Часто приходится встречаться с такими переменными величинами, у которых область значений есть либо «отрезок», либо «промежуток».

Отрезок

Отрезком называется часть прямой, отсекаемая двумя неподвижными точками a и b, *с обязательным присоединением к этой части ее концевых точек* a и b (рис. 5).

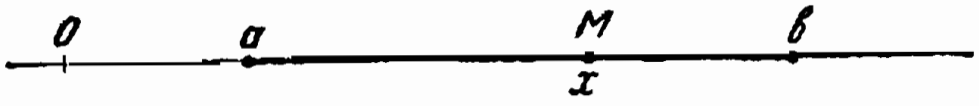


Рис. 5

Следовательно, отрезок есть совокупность точек прямой, содержащихся между двумя ее точками a и b, причем слово «*между*» в этом случае понимается в широком смысле, принуждающем к *обязательному включению сюда и самих граничных точек* a и b (рис. 6).

Это последнее важное обстоятельство, характеризующее область значений рассматриваемого переменного x, записывают в виде двойного неравенства-равенства

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Самая же область значений сокращенно обозначается через $[a \leqslant x \leqslant b]$ или просто как $[a, b]$ с непременным употреблением *квадратных* скобок для напоминания о включении в область граничных точек.

Итак, граничные точки a и b *включены в область* и называются *концами* отрезка. Ясно, что точка a есть *самая левая* точка отрезка, а точка b — *самая правая* точка отрезка. Таким образом *всякий отрезок* $[a, b]$ *всегда замкнут своими концами* a и b. Отрезок можно изобразить схематически в виде рисунка 6.

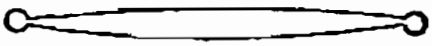


Рис. 6

Пример. Пусть x есть переменная величина, определенная как синус времени t, $x = \sin t$. Ясно, что по мере возрастания времени t переменная величина x всегда колеблется между -1 и $+1$, проходя постоянно не только все промежуточные значения между границами -1 и $+1$, но *принимая и самые эти граничные числа, ибо*

$$\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi = +1 \text{ и } \sin\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi = -1$$

при любом *целом* k. Значит, область значений нашего переменного x есть отрезок $[-1, +1]$.

Промежуток

Промежутком называется часть прямой, отсекаемая двумя неподвижными точками a и b, *с обязательным выключением из этой части ее граничных точек* a и b (рис. 7).



Рис. 7

Следовательно, промежуток есть совокупность точек прямой, содержащихся между двумя ее точками a и b, причем слово «*между*» теперь уже понимается в строгом смысле, принуждающем к *обязательному выключению отсюда самых граничных точек* a и b (рис. 8).

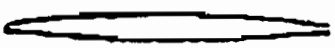


Рис. 8

Это последнее важное обстоятельство, характеризующее область значений рассматриваемого переменного x, записывают в виде двойного *строгого* на этот раз неравенства

$$a < x < b.$$

Самая же область значений сокращенно обозначается через $(a < x < b)$ или просто как (a, b) с переменным на этот случай употреблением *круглых* скобок для напоминания об исключении из области граничных точек.

Итак, граничные точки a и b теперь уже не входят в область и называются *границами* для промежутка (но не концами промежутка, ибо промежуток концов, в него входящих, как раз и не имеет). Из сказанного ясно, что всякая неподвижная точка M промежутка (a, b) всегда отлична от обеих границ a и b и поэтому отстоит от них на некоторое конечное (существенно *положительное,* а не нулевое) расстояние. Значит, всякая точка M промежутка является всегда окруженной с обеих сторон только точками этого же промежутка (рис. 7). Здесь мы имеем дело с чрезвычайно важным свойством всех промежутков, которое обычно выражают словами:

всякая точка промежутка есть его внутренняя точка.

Отсюда следует, что какую бы мы ни взяли точку промежутка, по обе стороны от нее окажутся опять точки этого же промежутка. Поэтому в отличие от отрезка промежуток *не может иметь ни самой левой, ни самой правой точки.* По этой причине, в отличие от отрезка, промежуток не имеет концов: точки a и b являются границами *для* промежутка, но *в него* не входят.

Итак, промежуток *открыт* с обеих сторон, будучи без концов; схематически его можно изобразить в виде рис. 8.

Не следует путать отрезок с промежутком[1]. Хотя отрезок богаче промежутка лишь на *две* точки, однако разница между ними крайне важна для математического анализа.

Примечание. Учащийся, прочитавший только что изложенное, без всякого сомнения, почувствует живейшее недоумение и крайнее неудобство мыслить промежуток как не имеющий концов и постарается самостоятельно каким-нибудь образом устранить кажущуюся «нелепость». Однако пусть учащийся знает, что здесь нет никакой нелепости и что все дело только в привычке к такого рода фактам. Для того чтобы облегчить действительно нелегкое дело приспособления, мы советуем учащемуся проделать следующий «умственный опыт»: пусть учащийся попробует представить себе, что он разламывает прямую линию в какой-нибудь точке $П$ и затем отделяет друг от друга получившиеся две части. Ясно, что самая точка перелома $П$ войдет лишь в одну часть (рис. 9), *будучи ее истинным концом*, а другая часть уже станет *открытой*, потому что точка перелома $П$ не может появиться в двух экземплярах и быть сразу и в одной и в другой части прямой.

К тому же самому учащийся придет, если попробует окрасить в какую-нибудь краску только те точки прямой, *которые имеют* существенно *положительную* абсциссу: тогда самой левой окрашенной точки у учащегося не будет, потому что всякую *положительную* абсциссу x можно разделить пополам, и, значит, влево от каждой окрашенной точки M будет иметься опять окрашенная точка (рис. 10).

---

[1] Терминологию мы здесь устанавливаем *русскую*, заменяя иностранные термины, иногда употребляемые в русской литературе, следующим образом: слово «сегмент» переведено словом «отрезок», а «интервал» переведен словом «промежуток».

Пример. Пусть t есть *время*, а x переменная величина, определенная формулой $x = \frac{1}{1+2^{-t}}$. Ясно, что по мере возрастания времени t переменная величина x увеличивается и что при этом *всегда* имеем *строгое двойное неравенство* $0 < x < 1$. Ясно далее, что переменная x имеет численные значения, сколь угодно близкие к нулю: для этого достаточно брать t отрицательным, увеличивая абсолютную величину $|t|$ безгранично; так же точно x имеет

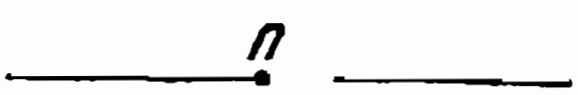


Рис. 9

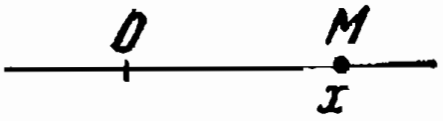


Рис. 10

численные значения, сколь угодно близкие к единице: для этого достаточно брать t положительным и увеличивать его безгранично. И так как ни при каком t переменная величина x не может стать ни нулем, ни единицей, то отсюда следует, что область численных значений переменной величины x есть промежуток $(0, 1)$.

§ 16. Классификация переменных величин. Предварительное замечание. Всякая переменная величина x изменяет свое численное значение с течением времени. Самый характер этого изменения может быть весьма разнообразный. Естественно, что в основу классификации переменных величин кладут именно характер изменения.

Монотонные переменные величины

Те численные значения, которые переменная величина x принимает раньше других, называются «предшествующими», а те, которые принимаются ею позже, называются «последующими».

Определение. Если переменное x изменяется таким образом, что всякое последующее его значение *больше,* чем предшествующее, тогда переменная величина x называется *возрастающей.* Аналогично, если всякое последующее значение *меньше* предшествующего, x называется *убывающей* переменной величиной. *Переменные величины как возрастающие, так и убывающие, называются все вместе монотонными величинами.*

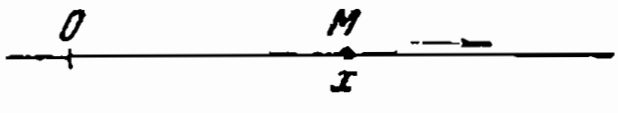


Рис. 11

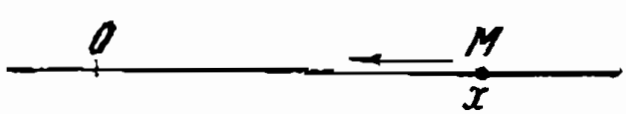


Рис. 12

Ясно, что возрастающая величина x изобразится точкой M, перемещающейся постоянно вправо (рис. 11), а убывающая величина x изобразится точкой M, движущейся все время влево (рис. 12).

В противоположность этому, переменная величина, изменение которой уже не монотонно, называется *колеблющейся* величиной.

Примеры. Примером реальной возрастающей величины служит само *время*, отсчитываемое от определенной даты. Время обычно обозначают буквой t (первая буква латинского слова «tempus», что обозначает «время»). По самой своей природе время t есть величина *возрастающая*.

Примером *убывающей* величины является дробь $\frac{1}{t}$, где t — время.

Примером *колеблющейся* величины служит синус времени $\sin t$.

Чтобы убедиться в этом, возьмем окружность радиуса 1 с центром O и неподвижным диаметром AB (рис. 13). По ней заставим двигаться точку M так, чтобы угол AOM между неподвижным радиусом AO и подвижным радиусом OM был в точности равен времени t. В этих условиях наша окружность становится в некотором роде точными *математическими часами* об одной стрелке, ибо единственная подвижная стрелка OM своим концом M равномерно движется по циферблату, вечно обходя окружность и указывая точное время t своим углом AOM. Ясно, что перпендикуляр PM, равный синусу времени, $PM = \sin t$, вечно колеблется между $+1$ и -1 и принимает эти численные значения бесконечное число раз при вертикальном положении стрелки. Таким образом, $\sin t$ есть колеблющаяся переменная величина, все время совершающая размахи между $+1$ и -1.

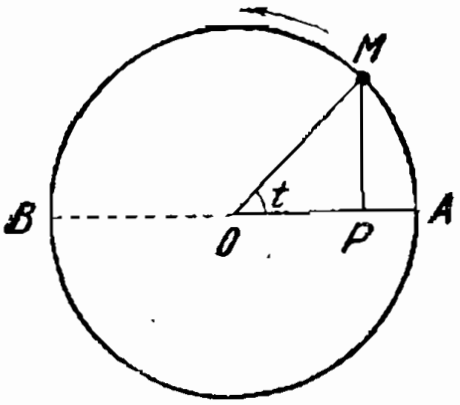


Рис. 13

Ограниченные переменные величины

Определение. Переменная величина x называется *ограниченной*, если, начиная с некоторого момента времени, ее абсолютная величина $|x|$ сделается и будет впредь всегда оставаться меньше некоторого постоянного положительного числа A.

Говоря *аналитически*, т. е. языком алгебраических формул, переменная величина x есть ограниченная, если, начиная с некоторого момента времени, сделается верным и будет впредь оставаться всегда верным неравенство

$$|x| < A, \qquad (1)$$

где A есть некоторое неизменное положительное число.

Геометрически это означает, что на прямой имеется такой неподвижный промежуток BC, внутри которого, *начиная с некоторого момента времени*, будет впредь постоянно оставаться движущаяся точка M с абсциссой x (рис. 14).

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, во-первых, что соблюдение алгебраического неравенства (1) указывает на геометрическое пребывание движущейся точки $M(x)$ внутри неподвижного промежутка $(-A, A)$ и, во-вторых, что пребыва-

ние точки $M(x)$ внутри какого-нибудь неподвижного промежутка BC наверное заставит соблюдаться неравенство (1), ибо положительное число A можно взять столь большим, что промежуток BC попадет внутрь промежутка $(-A, A)$.

Переменная величина x называется *неограниченной*, когда нельзя найти такого положительного числа A, чтобы неравенство

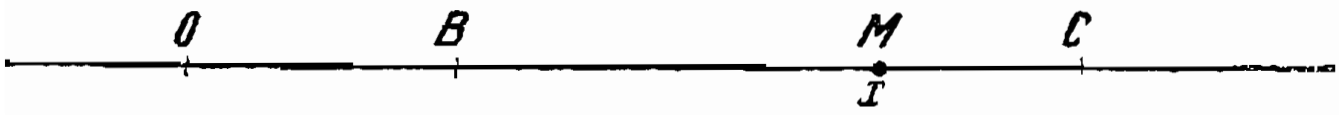


Рис. 14

(1) было постоянно соблюдено, начиная с некоторого момента времени.

Из сказанного выше ясно, что точка $M(x)$, изображающая неограниченную переменную величину x, будет — хотя бы по временам — выходить из всякого начерченного промежутка BC, как бы велик он ни был, причем моменты времени этого выхода имеются за всякой эпохой, сколь бы отдаленной от нас она ни была.

Примеры. 1. Если t есть время, то переменная величина x, определенная равенством

$$x = \sin t,$$

есть *ограниченная* величина, ибо синус не может *никогда* превосходить по абсолютной величине единицу.

Кстати, отметим одну особенность этой ограниченной переменной величины: она *все время* (т. е. во все эпохи) остается по абсолютной величине меньшей или равной единице.

Но отнюдь нет никакой необходимости удовлетворять неравенству $|x| < A$ действительно *все время*, чтобы x была ограниченной величиной: достаточно, если это неравенство сделается верным, лишь *начиная с некоторого момента*.

Это обстоятельство обнаруживается на следующем примере.

2. Если t есть время, переменная величина x, определенная равенством

$$x = \frac{1}{t},$$

есть *ограниченная* величина, ибо, начиная хотя бы с момента времени $t \geqslant 2$, мы имеем неизменно сохраняющимся неравенство $|x| < \frac{1}{2}$. То обстоятельство, что x очень велико при весьма малом положительном t, не имеет никакой важности, потому что решающее значение для признания x ограниченной переменной величиной имеет только тот факт, что $|x|$ сделается и будет оставаться всегда меньше положительной постоянной A, т. е. что будем иметь $|x| < A$, *начиная с некоторого момента*.

3. Само время t, как и его квадрат t^2, его куб t^3 и т. д., очевидно, величины уже *неограниченные*, ибо с течением времени они превзойдут любое постоянное A.

4. Интересна переменная величина $x = t \sin t$, где t есть время. Она равна нулю в моменты времени 2π, 4π, 6π, 8π, ..., ибо синус равен нулю для этих

углов. Можно, поэтому, подумать, что x есть ограниченная величина. Однако, если мы учтем то обстоятельство, что синус для углов

$$2\pi+\frac{\pi}{2},\quad 4\pi+\frac{\pi}{2},\quad 6\pi+\frac{\pi}{2},\quad 8\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots$$

равен единице и что поэтому произведение $t\sin t$ для таких моментов времени t просто равно самому времени t, то мы немедленно заключим отсюда, что x есть величина *неограниченная*.

Непрерывные переменные величины

Определение. Монотонная величина x называется *изменяющейся непрерывно* на отрезке $[a, b]$, когда она, выходя из одного его конца и приходя к другому, последовательно проходит через *все* промежуточные численные значения, не пропустив никакого из них.

Геометрически непрерывное изменение *монотонной* величины x поясняется чрезвычайно просто: движущаяся по отрезку $[a, b]$ точка M, имеющая x своей абсциссой, при непрерывном изменении численной величины x должна своим движением образовать *весь* этот отрезок со *всеми* его точками; поэтому его нужно рассматривать как след этого движения, т. е. как траекторию движущейся точки (рис. 15).

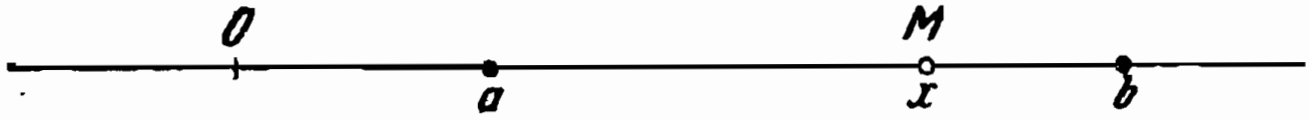


Рис. 15

Таким образом, *движущаяся в одну только сторону по прямой точка M, описывающая какой-нибудь неподвижный отрезок* $[a, b]$ *со всеми его точками, имеет своей абсциссой x монотонную* непрерывно *изменяющуюся величину*. И обратно: *всякая* непрерывно *изменяющаяся монотонная величина x является абсциссой движущейся указанным образом точки.*

Примечание I. Полезно указать, что монотонная величина x, не имеющая непрерывности, всегда изменяется *скачками* так, что на отрезке $[a, b]$ непременно существует *пустой промежуток, не заполненный никакими численными значениями рассматриваемой монотонной величины x.*

Чтобы убедиться в этом, предположим, что возрастающая от a до b переменная величина x не принимает некоторого частного численного значения x_0 (рис. 16).

Мы рассматриваем сначала то время, когда движущаяся точка M с абсциссой x находится *левее* непринимаемой точки x_0, а потом то время, когда M находится *правее* точки x_0. Благодаря этому вся прямая времени (рис. 17) разломится на две части (см. § 15, примечание): левую, когда точка M еще не перескочила через точку x_0, и правую, когда M уже перескочила через x_0. Самая точка разлома t_1 явится концом лишь *одной* части, например, правой. В момент времени t_1 переменное x получит некоторое численное значение

x_1, $x_1 > x_0$, отличное от непринимаемого значения x_0, и ясно, что между x_0 и x_1 не может оказаться никакого принимаемого численного значения: ибо *до* момента времени t_1 точка M находится *левее* точки x_0, а *после* t_1 точка M находится *правее* точки x_1. Поэтому переменное x должно перескочить через весь промежуток (x_0, x_1).

Итак, переменная величина x, возрастая от a до b, но не принимая численного значения x_0, обязательно должна сделать *скачок*, *перескочив не только через рассматриваемую* отдельную *точку* x_0, *но и целиком через некоторый ненулевой промежуток* (x_0, x_1), *к ней примыкающий*.



Рис. 16

Случай, когда точка t_1 является концом левой части, рассматривается аналогично.

Примечание II. В тексте мы определили непрерывность *монотонно* изменяющейся величины x. Гораздо труднее определить непрерывность *немонотонной* переменной величины. Делается это следующим образом.

Определение. Немонотонная *переменная величина x называется* непрерывно изменяющейся в течение отрезка времени (T_1, T_2), *когда для всякого численного промежутка* (a, b), *содержащего численное значение* x_0, *принимаемое ею в какой-нибудь момент времени* t_0, *имеется* временной промежуток, *содержащий* t_0, *в течение которого рассматриваемая переменная величина не выйдет из* (a, b) (рис. 18).

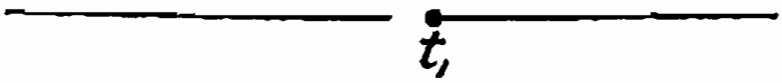


Рис. 17

Смысл этого вполне точного, но трудного для усвоения начинающим определения тот, что пространственный промежуток (a, b), охватывающий точку x_0, может быть взят сколь *угодно малым*. А тогда это определение вполне согласуется с нашим повседневным представлением о непрерывном изменении как таком, при котором численное значение переменной величины x изменяется «*нечувствительно мало*», «*очень слабо*» и т. д. в течение «*достаточно малого*»

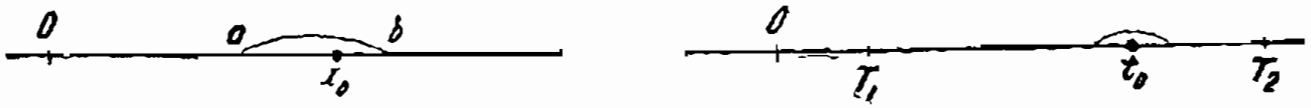


Рис. 18

промежутка времени. Сказанное определение есть только математическая формулировка этого представления, заимствованного из жизни, ибо показывает, что *точка x не может выйти за границы сколь угодно малого фиксированного промежутка* (a, b) *в течение достаточно малого промежутка времени.*

Учащийся видит, что это определение имеет много общего с понятием ограниченной переменной величины, где изображающая переменную величину x точка M *также* не может покинуть неподвижный промежуток BC (см. рис. 14), но только в течение бесконечного промежутка времени (ибо там в тексте говорится: «*начиная с некоторого момента времени*»), здесь же точка x не может покинуть сколь угодно малый неподвижный промежуток (a, b) в течение лишь достаточно малого промежутка времени.

§ 17. Приращение переменной величины. Изучение какой-либо переменной величины начинается обычно с того, что наблюдают

то *приращение,* которое она получает, когда переходит от *прежнего* (т. е. более раннего) численного значения к новому (т. е. более позднему).

Если переменная величина x, имея сначала некоторое численное значение x', примет затем некоторое другое численное значение x'', то разность

$$x'' - x'$$

между новым и прежним значениями называется приращением *переменного, потому что эту разность как раз и нужно прибавить к прежнему значению x', чтобы получить новое значение x''.*

Действительно, если эту разность обозначим через h, т. е. если напишем:

$$x'' - x' = h,$$

то отсюда получим:

$$x'' = x' + h,$$

т. е. *новое значение равно прежнему плюс приращение.*

Приращение h обозначается еще и другим способом и должно сказать, что этот другой способ предпочтительнее первого. Именно, по-латыни разность называется *differentia*; но так как буквой d в дифференциальном исчислении обозначается специальное понятие «дифференциала» (о чем будет дальше), то для обозначения приращения переменной берется буква Δ — «дельта» греческого алфавита, соответствующая латинскому d. Сообразно этому принято писать приращение $x'' - x'$ в виде значка

$$\Delta x',$$

который читается так: «*дельта икс прим*». Этот значок есть единое целое, и нельзя отделить Δ или рассматривать его как множитель, стоящий при x'. Значит, новое значение x'' теперь напишется в виде

$$x' + \Delta x'.$$

Подобным же образом, если переменное y перейдет от y к новому значению, получив приращение Δy, то новое значение напишется в виде

$$y' + \Delta y'.$$

Точно так же новое значение для переменного z пишется: $z' + \Delta z'$ и т. д. Значки $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ и т. д. очень удобны, потому что сразу видно, для какого переменного берется приращение.

Сделаем одно важное примечание: число x', которое мы назвали «старым значением», или «прежним значением», называется обычно просто *первоначальным значением,* и его чаще всего обозначают той же буквой x, что и самую переменную величину x, т. е. без значка «*прим*» *вверху*.

Сообразно этому *первоначальное значение переменной величины будет* x, *а новое значение будет* $x+\Delta x$.

Чтобы геометрически изобразить приращение Δx переменной величины x, изобразим точкой M первоначальное значение x, а новое ее значение $x+\Delta x$ изобразим N (рис. 19).



Рис. 19

Значит, отрезок OM равен x и отрезок ON равен $x+\Delta x$. Отсюда следует, что отрезок MN, *направленный от старой точки* M *к новой точке* N, и есть геометрический образ приращения Δx.

Если бы новое положение N было левее старого M, то отрезок MN был бы направлен влево, и приращение Δx было бы *отрицательным,* потому что новое значение $x+\Delta x$ оказалось бы *меньше* старого x.

§ 18. Постоянная величина как переменная. На первый взгляд, понятия переменной величины и постоянной величины столь противоположны, что их нельзя и сравнить. На самом деле очень часто бывает полезно *рассматривать постоянную величину как частный случай переменной величины.*

Делается это вот зачем: нередко, изучая какую-нибудь формулу, можно, на первый взгляд, подумать, что имеют дело с истинной переменной величиной, и только внимательное изучение ее обнаруживает, что это *не переменная,* а *постоянная величина.*

Например, лицо, не знающее тригонометрии или забывшее ее, легко может счесть сумму

$$\sin^2 t+\cos^2 t$$

за переменную величину, так как, когда меняется время t, изменяются и оба слагаемых суммы. Но известно, что эта сумма всегда равна единице.

Аналогично можно думать, что дробь

$$\frac{1-t^3}{(1-t)(1+t+t^2)}$$

есть переменная величина, потому что числитель имеет другой вид, чем знаменатель. На самом же деле числитель равен знаменателю, и дробь есть просто 1.

И геометрически также может случиться, что постоянная величина явится частным случаем переменной. Например, если точка M движется как-нибудь на плоскости, ее расстояние x от наблюдателя вообще меняется, т. е. является переменной величиной. Но если точка M бежит по кругу, в центре которого стоит наблюдатель, то x будет постоянной величиной, равной радиусу этого круга.

Включить постоянную величину в разряд переменных можно вот каким образом: переменную величину x мы выше рассматривали как проходящую последовательно через ряд значений. Но в частном случае эти значения могут оказаться все *равными друг другу*. В этом случае переменное x является на самом деле постоянной величиной C.

Приращение ΔC постоянной величины C равно нулю, потому что всякое новое значение всегда равно старому значению (раз все значения равны между собой), и поэтому их разность есть нуль:

$$\Delta C = 0.$$

Очевидно, верно и обратное предложение: *величина, у которой приращение всегда равно нулю, есть величина постоянная.*

Ясно также, что *всякая постоянная величина C есть величина ограниченная,* ибо ее абсолютная величина остается неизменной и, следовательно, меньше некоторого постоянного числа.

ГЛАВА III

ФУНКЦИЯ

§ 19. Функция. Наблюдения в текущей жизни с очевидностью убеждают нас в том, что *одни переменные величины* зависят *от других*. Говоря наиболее общим образом, ту переменную величину, которая зависит от другой, называют *функцией* этой другой.

Почти все величины, наблюдаемые в действительности, зависят одни от других, будучи связаны между собою. Почти все научные проблемы имеют дело с *соотношениями величин*, т. е. с *зависимостью* их друг от друга. В опытах повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с обстоятельствами, подтверждающими эту *зависимость* одной величины от другой. Так, тяжесть, которую может поднять человек, зависит от его силы, если считать другие обстоятельства одинаковыми. Равным образом расстояние, которое пробегает мальчик, зависит от времени, т. е. есть *функция* времени. Площадь квадрата есть функция его стороны, объем шара есть функция его радиуса и т. д.

Математический анализ выделяет *понятие функции* и изучает свойства функций, отвлекаясь от того, какие зависимости между физическими величинами они выражают.

§ 20. Зависимые и независимые переменные. Переменное, численные значения которого находятся всецело в нашем распоряжении, т. е. то переменное, которому можно приписать какие угодно численные значения в границах, зависящих от рассматриваемой частной задачи (т. е. произвольные допустимые значения), называется *независимым переменным*, или еще иначе — *аргументом*. Переменное же, численное значение которого вполне определится, коль скоро дается численное значение независимого переменного, называется *переменным зависимым*, или *функцией*.

Когда мы рассматриваем два такие связанные одно с другим переменные, часто от нас самих зависит, которое из них принять за независимое переменное. Но всякий раз, как такой выбор уже сделан и нами после такого выбора написаны некоторые

формулы, менять дальше роли независимого и зависимого переменных уже нельзя, по крайней мере, без больших предосторожностей и без введения надлежащих дополнительных формул.

Одна какая-нибудь переменная величина может оказаться в действительности функцией одновременно двух или даже большего числа других переменных величин. Например, *цена* предлагаемой материи есть функция ее *качества* и ее *количества; площадь треугольника* есть функция *основания* и *высоты; объем прямоугольного параллелепипеда* есть функция *трех его ребер* и т. д.

§ 21. Характеристика функции. Мы уже указали на то обстоятельство, что современное естествознание изучает зависимости одних переменных величин от других, т. е. занимается изучением *функций*.

Открытие закона, по которому одна переменная величина зависит от другой,— это та цель, которую ставит себе всякая ветвь естествознания. Цель считается достигнутой, когда удается выразить зависимость наблюдаемой переменной величины y от другой наблюдаемой переменной величины x с помощью математических знаков, т. е. с помощью *формулы*.

Например, механика ищет зависимость длины пути s, пройденного падающим в пустоте телом, от времени t, в течение которого падало это тело. И когда механика пишет эту зависимость в виде формулы

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

где $g = 981, \ldots$ *см/сек*^{2}, то вопрос решен до конца, так как закон открыт.

Всякая формула есть не что иное, как указание тех математических действий, которые надо произвести над величинами, входящими в формулу.

Таким образом, *всякая формула, выражающая зависимое переменное y через x, есть не что иное, как совокупность тех действий, которые надо произвести над независимым переменным x и над коэффициентами, чтобы получить y.*

Так, например, уравнение

$$y = \frac{3x^2 + \lg x - \sin x}{2^x + \sqrt{x - 6}}$$

ясно указывает, что́ именно нужно проделать с x и некоторыми постоянными числами, чтобы получить y.

Часто случается, что одна и та же функция y от независимого переменного x много раз встречается в каком-либо исследовании. Чтобы не выписывать каждый раз полностью формулу, выражающую зависимость y от x, что явилось бы крайне затруд-

нительным, когда выражение y через x очень громоздко[1], согласились обозначать эту формулу сокращенно, одной буквой. Именно, согласились писать

$$y=f(x),$$

обозначая значком $f(x)$ рассматриваемую формулу, содержащую независимое переменное x. Это равенство читают так: «*игрек есть функция от икса*», или, еще короче, «*игрек есть эф от икс*».

В этом обозначении букву f называют *характеристикой функции, причем она обозначает просто совокупность тех действий, которые надо проделать над величиной x, чтобы получить величину y.*

Если в одном и том же исследовании встречается несколько различных функций от одного и того же переменного x, будет неудобно и вызовет крайнюю путаницу употребление одной и той же буквы для обозначения различных характеристик этих функций. Так, если встречаются функции:

$$y=3x^2+1,\ z=\lg x,\ t=\sqrt{x},\ u=\sin\frac{1}{x^2+8}\ \text{и т. д.},$$

то лучше писать сокращенно:

$$y=f(x),\quad z=F(x),\quad t=\Phi(x),\quad u=\varphi(x)\ \text{и т. д.}$$

Но если одна и та же зависимость связывает разные пары букв, можно и должно употребить ту же самую букву для характеристики, потому что вид зависимости остается один и тот же. Так, например, если

$$y=\frac{3x^2+1}{\lg x+8}\ \text{и}\ v=\frac{3u^2+1}{\lg u+8},$$

то следует писать сокращенно:

$$y=f(x)\ \text{и}\ v=f(u),$$

потому что совокупность f действий та же самая в обоих случаях. Таким образом, всякая характеристика в течение одного рассуждения необходимо должна обозначать одну и ту же совокупность действий; для обозначения различных совокупностей действий должны употребляться различные характеристики.

По поводу сокращенного способа письма

$$y=f(x)$$

следует заметить, что он удобен и не ради устранения одной только громоздкости: часто бывает так, что, наблюдая в природе изменение переменной величины y, зависящей от x, мы еще

[1] Например, формула движения луны занимает около восьмидесяти страниц.

не успели открыть математическую структуру этой зависимости, т. е. еще не умеем изобразить y в виде математической формулы, содержащей x, потому что от нас еще скрыта совокупность математических действий, дающих y. В этом случае *самая зависимость y от x на деле сказывается только в том, что изменение величины x вызывает изменение величины y и постоянство x сопровождается постоянством y.*

Именно здесь-то и оказывается особенно удобным сокращенный способ записывания:

$$y = f(x),$$

потому что характеристика f как раз обозначает эту еще нам не известную совокупность действий. В этом же случае зависимость величины y от x облекается в форму соответствия: *мы говорим, что y есть функция от x, если всякому рассматриваемому значению x соответствует определенное значение y.*

Следует сказать, что учащийся уже, собственно, знаком с такого рода символическим обозначением. Так, когда он в тригонометрии встречает

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$ и т. д., а также в алгебре

$$y = \lg x,$$

то символы sin, cos, tg, ctg, arc sin, lg как раз и обозначают *характеристики функций,* прямое выражение которых через x *не может быть дано элементарной математикой.*

Наконец, когда переменное z является функцией многих, например двух, независимых переменных x и y, то пишут:

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ обозначает формулу, известную или еще не известную, содержащую переменные x и y.

§ 22. Вычисление функций. Когда y есть функция аргумента x с характеристикой f:

$$y = f(x),$$

тогда естественно обозначить через

$$f(a)$$

то *численное* значение, которое принимается функцией y при получении ее аргументом x *численного* значения a (т. е. для $x = a$).

Например, если $f(x)=x^2-9x+14$, тогда

$$f(0)=0^2-9\cdot 0+14=14,$$
$$f(-1)=(-1)^2-9\cdot(-1)+14=24,$$
$$f(3)=3^2-9\cdot 3+14=-4$$

и вообще, когда a есть какое-нибудь *численное* значение аргумента x, мы имеем:

$$f(a)=a^2-9a+14.$$

Такие же вычисления делаются и с функциями двух и более независимых переменных: если z есть функция двух аргументов x и y с характеристикой f

$$z=f(x, y),$$

тогда обозначают через

$$f(a, b)$$

то численное значение, которое принимается функцией z при получении ее аргументами x и y численных значений a и b (т. е. для $x=a$ и $y=b$).

Например, если

$$f(x, y)=\frac{x-y}{x^2+y^2},$$

то

$$f(2, 1)=\frac{2-1}{2^2+1^2}=\frac{1}{5},$$

$$f(3, 0)=\frac{3-0}{3^2+0^2}=\frac{1}{3}$$

и вообще

$$f(a, b)=\frac{a-b}{a^2+b^2}.$$

§ 23. Область изменения аргумента. По самому определению функции $y=f(x)$, зависимое переменное y получает вполне определенное численное значение всякий раз, как аргументу x нами дано определенное численное значение. Но отсюда отнюдь еще не следует, что мы можем давать аргументу x решительно всякие численные значения. Могут иметься такие исключительные значения аргумента x, при которых *формула разрушается*, утрачивая всякий математический смысл. Эти исключительные значения аргумента x называются *особыми* для рассматриваемой формулы.

Так, например, функция

$$y=\frac{7}{x-5}$$

особой величиной аргумента имеет $x=5$, потому что при $x=5$ делитель делается нулем и величину y уже вычислять невозможно, ибо делить на нуль нельзя.

При *особых* величинах аргумента функцию прямо по формуле нельзя вычислять, потому что формула утрачивает при этих значениях аргумента всякий численный смысл. Но, кроме особых значений аргумента x, приходится часто избегать давать x такие величины, при которых формула дает *мнимые* значения для y, хотя и вполне определенные. В задачах практики нередко приходится избегать давать x такие значения, при которых y мнимое, потому что практике с мнимыми числами часто нечего делать.

Например, функция

$$y=\sqrt{x}$$

мнима, когда x отрицателен. Приходится, следовательно, ограничиваться *положительными* значениями x.

Функция

$$y=\log_a x$$

при основании *а положительном* становится мнимой, если x отрицателен: ведь отрицательные числа не имеют действительных логарифмов.

Аналогично функции

$$y=\arcsin x,$$

$$y=\arccos x$$

не имеют смысла для x вне отрезка $[-1, +1]$, потому что синус и косинус не могут быть больше 1 и меньше -1.

Напротив, функции

$$x^2-2x+5, \quad \sin x, \quad \operatorname{arc\,tg} x$$

можно вычислять при всяких конечных действительных x.

Всякая функция $y=f(x)$ имеет свою собственную совокупность всех допустимых значений для аргумента x. Эта совокупность допустимых значений аргумента называется областью определения функции.

Пример. Найти совокупность допустимых значений аргумента функции $\sqrt{4+x}+\sqrt{3-x}$, приняв во внимание одни только действительные значения.

Решение. Чтобы первое слагаемое было действительным, надо, чтобы подкоренное выражение $4+x$ было положительным или нулем. Поэтому $x\geqslant -4$. С другой стороны, чтобы второе слагаемое не дало мнимого числа, надо, чтобы $x\leqslant 3$. Значит, область определения есть отрезок $[-4, +3]$.

§ 24. Приращение функции. Для дифференциального исчисления в высшей степени важно уметь находить приращение функции, ибо полное значение функции достигается нами лишь тогда, когда мы знаем ее изменение при изменении аргумента. А для этого мы должны уметь вычислять для функции y ее приращение Δy, когда мы даем ее аргументу x приращение Δx.

Итак, пусть $y=f(x)$ есть изучаемая функция.

Предположим, что аргумент сначала имеет некоторое значение x, а затем получаем приращение Δx. Тогда новое значение[1] аргумента будет $x+\Delta x$.

Но раз аргумент изменился и перешел от старого значения x к новому значению $x+\Delta x$, изменится и зависимое переменное, перейдя от старого значения y к некоторому новому значению $y+\Delta y$, где Δy есть приращение функции, вызванное приращением Δx аргумента.

Но если аргумент имел старое значение, то и значение функции тоже было старым. Значит:

$$y=f(x).$$

А если аргумент получил новое значение, то и значение функции тоже сделалось новым. Следовательно,

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

Вычтя из этого равенства предыдущее, мы найдем основное, *важнейшее по следствиям и по приложениям* равенство:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Таким образом, чтобы вычислить приращение Δy функции $y=f(x)$, надо сделать следующие шаги:

Первый шаг. Заменить в формуле $f(x)$, дающей функцию, старый аргумент x на новый, наращенный аргумент $x+\Delta x$. Получим новое значение $f(x+\Delta x)$ нашей функции.

Второй шаг. Взять старое значение $f(x)$ функции.

Третий шаг. Вычесть из нового значения $f(x+\Delta x)$ ее старое значение $f(x)$. Разность $f(x+\Delta x)-f(x)$ и есть искомое приращение Δy функции.

Пример 1. Найти приращение функции $y=x^2$.

Решение. Первый шаг [замена первоначальной величины x на наращенную величину аргумента $(x+\Delta x)$] дает:

$$(x+\Delta x)^2.$$

Второй шаг (взятие функции при старом аргументе) дает x^2.

[1] О приращении переменного вообще см. § 17 предыдущей главы.

Третий шаг (составление разности новой и старой величин функции) дает формулу приращения:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2,$$

которая после вычисления и упрощения принимает вид:

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Пример 2. Найти приращение функции $y = \sqrt{x}$.
Решение. Согласно общему правилу, имеем:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Это приращение после преобразований можно представить в виде:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Пример 3. Найти приращение функции $y = 5 - 3x + 4x^2$.
Отв. $\Delta y = (-3 + 12x^2)\,\Delta x + 12x\,(\Delta x)^2 + 4\,(\Delta x)^3$.

§ 25. Геометрическое изображение функций. Мы уже видели, что всякая величина изображается точкой. Легко также геометрически изобразить всякую функцию.

Пусть нам дана некоторая функция y аргумента x:

$$y = f(x),$$

определенная в некотором промежутке.

Это значит, что *всякому значению переменного x из этого промежутка отвечает одна совершенно определенная величина переменного y.*

Заметив это, возьмем прямоугольную систему координатных осей XOY на плоскости. Пусть P есть точка рассматриваемого промежутка, у которой абсцисса равна x. Если мы восставим к оси абсцисс перпендикуляр в этой точке P, то на этом перпендикуляре всегда можем отыскать такую единственную точку M, ордината которой PM в точности равна величине $f(x)$ нашей функции (рис. 20). Значит, мы имеем:

$$OP = x, \quad PM = y = f(x).$$

Вообразим, что наше построение мы проделали для *всех* значений, которые можно дать переменному x. Тогда во *всех* точках P нашего промежутка будет восставлено по перпендикуляру и на *всяком* перпендикуляре будет отложено по отрезку PM, равному значению данной функции y, когда аргумент имеет значение абсциссы точки P.

В результате геометрическое место точек M образует некоторую *кривую* (рис. 21).

Таким образом, *всякая функция $f(x)$ может быть изображена геометрически такой кривой, ордината которой y в лю-*

бой точке x оси абсцисс в точности равна численному значению $f(x)$ функции, когда ее аргумент равен абсциссе x.

Обратно, если мы имеем кривую, пересекаемую всякой прямой, перпендикулярной к оси абсцисс в одной только точке, *то такая кривая изображает вполне определенную функцию, именно ту, численные значения которой равны ординатам кривой при численных значениях аргумента, равных абсциссам.*

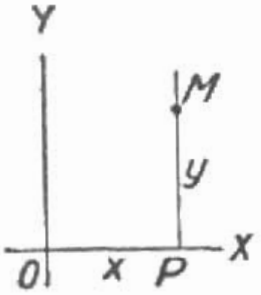


Рис. 20

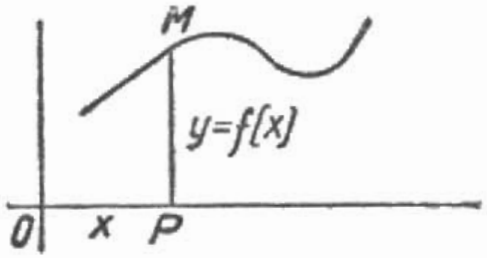


Рис. 21

Это обстоятельство можно выразить весьма кратко, сказав: *для всякой кривой ордината есть функция абсциссы.*

В результате функция и кривая оказываются так тесно связанными друг с другом, что не приходится удивляться тому, что математик, естественник и статистик отождествляют в уме эти два понятия и, говоря о функциональной зависимости, своим воображением *видят* соответствующую кривую.

§ 26. Геометрическое изображение приращения функции. Раз всякая функция $y=f(x)$ изобразима геометрически в виде кривой, то весьма важно получить *геометрическое изображение ее приращения* Δy.

Пусть данная функция

$$y=f(x)$$

изображена геометрически в виде кривой (рис. 22.)

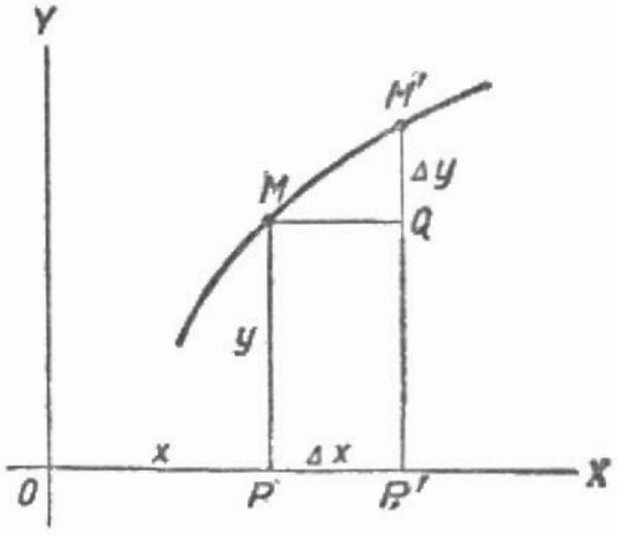


Рис. 22

Пусть точка P на оси X изображает первоначальное значение аргумента, т. е. пусть отрезок OP равен x. Тогда ордината PM равна значению рассматриваемой функции при этом значении аргумента, т. е. имеем $PM=f(x)=y$. Дадим x приращение Δx; тогда *новым* значением аргумента будет $x+\Delta x$. Если точка P' изображает это новое значение аргумента, то направленный отре-

зок PP' (от точки P к точке P') изобразит приращение Δx, т. е. $PP'=\Delta x$. Поэтому ордината $P'M'$ равна величине нашей функции для нового значения аргумента, т. е. имеем:

$$P'M'=f(x+\Delta x).$$

Но величина функции при новом значении аргумента является, очевидно, ее *новым* значением, равным, поэтому, ее старому значению y плюс приращение Δy. Значит,

$$P'M'=y+\Delta y.$$

Теперь достаточно провести через точку M параллель к оси OX, чтобы получить прямоугольник $PP'QM$, в котором сторона $P'Q$ равна y.

Следовательно, *приращение Δy функции геометрически изображается вертикальным катетом QM' криволинейного прямоугольного треугольника MQM'.*

Заметим, что горизонтальным катетом MQ этого треугольника служит приращение Δx аргумента, гипотенузой же — дуга MM' кривой, изображающей данную функцию $y=f(x)$.

§ 27. О различном происхождении функций. *С формальной* точки зрения *переменная величина y является тогда функцией переменной величины x:*

$$y=f(x),$$

когда всякому численному значению переменного x отвечает вполне определенное численное значение переменного y.

Учащийся, однако, не должен переоценивать силы этого определения функции, потому что в нем выражается только та мысль, что когда нам дается численное значение для x, то мы *умеем вычислить* или вообще как-то *определить* соответствующее численное значение для y. И ничего больше в вышеприведенном понятии функции не содержится.

Поэтому эта формальная точка зрения является, собственно говоря, лишь логической схемой, в которой мы укладываем самые разнообразные по своей природе функциональные зависимости.

I. Наше умение вычислять y, задав себе x, может проистекать из полного знания тех *аналитических (алгебраических)* операций, которые следует произвести над x, чтобы получить y.

Таков, например, случай, когда y дается каким-нибудь *дробным* выражением от буквы x, вроде

$$y=\frac{x^2-7x+6}{3x^4+x^2+x+1}.$$

II. Полная определенность переменного y при знании величины x может проистечь из *фактов геометрической природы* при полном неумении отыскать соответственное аналитическое выражение.

Таков, например, случай, когда мы имеем *абсолютно точную* окружность радиуса 1, на которой измеряются дуги x (рис. 23). Ордината PM точки M, описывающей эту окружность, очевидно, равна $\sin x$, если дуга AM обозначена через x, потому что угол AOM измеряется дугой AM окружности. Эту ординату $\sin x$ мы можем определить *с безграничной точностью*, и однако сущность тех *аналитических* действий, которые надо проделать над x, чтобы получить $\sin x$, нам остается пока неизвестной. Учащийся видит поэтому, что здесь знак синуса $\sin(\ )$ не стóит бóльшего, чем самый общий функциональный значок $f(\ )$.

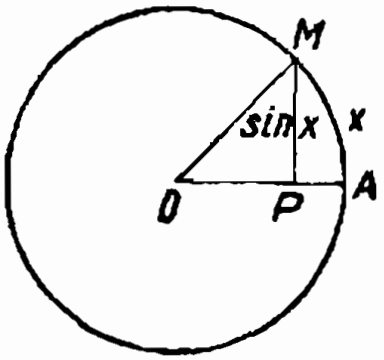


Рис. 23

III. Наконец, зависимость переменного y от x может проистекать не из какой-либо аналитической формулы и не из геометрической обстановки, но может создаться фактами *механического* характера.

Таков, например, случай движения в космическом пространстве тела, подчиненного только силам всемирного тяготения. В принципе, одно лишь знание места этого тела и его скорости *в какой-нибудь фиксированный момент времени* t_0 определяет положение этого тела во все времена. Таким образом, это положение есть *совершенно определенная функция времени* t. Однако мы не имеем для нее ни точных аналитических формул, ни точно указанной геометрической кривой.

§ 28. Классификация функций. Предварительное замечание. Здесь рассматриваются функции y только от одного независимого переменного x. Всякая такая функция y пишется в виде

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ есть формула, содержащая x и дающая величину рассматриваемой функции y. Эта формула является совокупностью математических действий, проделываемых над аргументом x, и ясно, что чем больше этих действий и чем они труднее выполняемы, тем более сложной является сама функция $y = f(x)$ и тем ее труднее изучать.

Поэтому, прежде чем приступить к изучению *всяких* функций $f(x)$, естественно постараться сначала их расклассифицировать по характеру указанных в формуле $f(x)$ *аналитических* действий.

Многочлены

Так называются такие функции, $f(x)$, которые получаются из x только тремя первыми действиями арифметики: *сложением, вычитанием и умножением*. Эти действия должны быть притом проделаны *конечное* число раз.

Из элементов алгебры известно, что когда произведены упрощения, т. е. когда все скобки раскрыты и все подобные члены соединены в один, то многочлен можно написать по *убывающим* степеням аргумента x, например:

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 3,$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

и т. д. Самый старший член пишется первым. Его степень называется *степенью всего многочлена*. Так, первый многочлен есть кубический, второй квадратный.

Рациональные функции

Если к сложению, вычитанию и умножению мы прибавим еще действие *деления*, то получающиеся при помощи этих четырех действий (проделанных конечное число раз) функции называются *рациональными*. Эти функции, разумеется, не содержат радикалов, относящихся к аргументу, и если мы выполним надлежащие упрощения, то эти функции пишутся довольно просто: *в виде отношения двух многочленов*.

Например, если

$$y = \frac{\dfrac{2x-3}{x-1} + \dfrac{3x-2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-2}} + 7x,$$

то эта же самая функция y после выполнения указанных действий изображается гораздо проще:

$$y = \frac{7x^4 + 5x^3 - 23x^2 + 11x + 2}{x^3 - x}.$$

Явные алгебраические функции

Если к четырем предыдущим действиям — сложению, вычитанию, умножению и делению — мы присоединим еще одно действие — извлечение радикалов любых степеней: квадратных, кубичных и т. д., то получаемые от выполнения этих пяти дейст-

вий[1] (в конечном, разумеется, числе) функции называются *явными алгебраическими.*

Так,

$$y=\frac{2x^3+\sqrt{x^2-1}-8x}{\sqrt[3]{4x+1}-\sqrt{x+7}}-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^5-6}}+11x^2+9$$

есть явная алгебраическая функция.

Явные алгебраические функции вообще очень сложны и редко могут быть упрощены.

Важно, однако, заметить, что, проделывая надлежащие преобразования, все радикалы можно устранить. Но это достигается ценою того, что мы получаем такое равенство, где буква y встречается уже в квадрате, кубе и в еще более высоких степенях. Например, явная алгебраическая функция

$$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

допускает вот такие преобразования:

$$y-\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x},\quad (y-\sqrt{1+x})^2=1-x,$$
$$y^2-2y\sqrt{1+x}+(1+x)=1-x,$$
$$y^2+2x=2y\sqrt{1+x},\quad (y^2+2x)^2=4y^2(1+x),$$

и окончательно

$$y^4-4y^2+4x^2=0,$$

где уже нет радикалов, но где y входит в высоких степенях

Как общее правило следует отметить, что

всякая явная алгебраическая функция $y=f(x)$ после надлежащих преобразований, предпринятых для удаления радикалов, приводит к уравнению вида

$$F(x, y)=0,$$

где F есть многочлен от двух букв x и y, т. е. к уравнению вида

$$A(x)y^n+B(x)y^{n-1}+C(x)y^{n-2}+\ldots+G(x)y+H(x)=0,$$

где $A(x), B(x), C(x), \ldots, H(x)$ суть *многочлены от одной только буквы x.*

---

[1] Учащийся должен помнить, что в расчет берутся лишь действия, проделываемые над теми частями формулы, в которые аргумент x *входит на самом деле*, но отнюдь не принимаются во внимание действия, проделываемые над *коэффициентами*, ибо последние дают опять только коэффициенты же. Например, функция $\sqrt{2}\,x^3-6x+8$ есть просто многочлен третьей степени, так как радикал $\sqrt{2}$ считается целиком за один из коэффициентов, притом этот радикал можно обозначить одной буквой и написать весь многочлен в виде ax^3-6x+8. Здесь радикала уже нет, и a есть постоянное число, не содержащее буквы x, равное $\sqrt{2}$.

Неявные алгебраические функции

Предыдущий результат наводит вот на какие размышления. Выше мы назвали *функцией* всякое зависимое переменное y, зависящее от аргумента x, и обозначили y через $f(x)$:

$$y=f(x),$$

где $f(x)$ есть формула, выражающая y через x, т. е. указывающая совокупность математических действий, которые нужно проделать над x, чтобы иметь y. Если эта совокупность действий еще пока нам неизвестна, то мы все-таки удерживаем прежнее обозначение

$$y=f(x),$$

где $f(x)$ обозначает как раз эту самую не известную нам пока совокупность математических действий.

Функция y называется явной, если известны все те действия, которые должны быть проделаны над аргументом x, чтобы получить y.

Если же для определения функции y аргумента x нам дано лишь уравнение, содержащее обе буквы y и x:

$$F(x, y)=0,$$

решение которого определяет функцию y, и если мы не умеем решить это уравнение относительно буквы y или если мы не хотим его решать, то тогда y называется неявной функцией аргумента x.

Неявная функция y становится тотчас же явной, если мы решим уравнение $F(x, y)=0$ относительно буквы y; в этом случае $y=f(x)$ обозначает найденную при решении совокупность действий над x. Если же мы не умеем решить уравнение $F(x, y)=0$ относительно буквы y или забыли его решение, тогда в способе писать $y=f(x)$ значок $f(x)$ обозначает эту не известную нам или забытую нами совокупность действий над x.

Если $F(x, y)$ обозначает многочлен от двух букв, x и y, то неявная функция y, удовлетворяющая уравнению $F(x, y)=0$, называется алгебраической неявной функцией от буквы x.

Сперва можно подумать, что всякая неявная алгебраическая функция y обращается в явную алгебраическую функцию, стоит только решить уравнение $F(x, y)=0$ с помощью радикалов. На самом деле не всякое алгебраическое уравнение разрешимо при помощи радикалов, и, значит, класс алгебраических неявных функций более широк, чем класс явных алгебраических функций, т. е. написанных при помощи радикалов.

Так, например, уравнение

$$y^5+y+x=0$$

уже не разрешимо относительно буквы y с помощью радикалов любых степеней и в любом количестве, если бы даже мы их выписывали миллионы. Значит, это уравнение определяет букву y как *существенно неявную* алгебраическую функцию от x, которая никогда не сделается явной, пока мы ограничиваемся рассмотрением первых *пяти* действий: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения радикалов.

Учащийся не преминет отметить, что каждый из рассмотренных четырех классов функций — *многочлены, рациональные функции, явные алгебраические, неявные алгебраические* — объемлет все предыдущие. Так, многочлен есть частный случай рациональной функции (когда ее знаменатель есть единица), рациональная функция есть частный случай явной алгебраической (когда все радикалы извлекаются) и, наконец, явная алгебраическая функция есть частный случай неявной алгебраической (когда уравнение разрешимо в радикалах).

Трансцендентные функции

Понятие *трансцендентной функции* является одним из наиболее слабых и уязвимых мест современного математического анализа, потому что до сих пор еще не имеется прямого и положительного определения трансцендентной функции с перечислением и классификацией *всех* трансцендентных действий. Такой каталог трансцендентностей пока невозможен.

Поэтому в настоящее время ограничиваются совершенно *отрицательным* определением трансцендентной функции, а именно:

трансцендентной функцией называется всякая не алгебраическая функция (ни явная, ни неявная).

Вначале математический анализ имеет дело лишь со следующими *простейшими* трансцендентными функциями (так называемыми *элементарными трансцендентностями):*

1. Степенная трансцендентность. Это есть функция вида

$$x^{\alpha},$$

где α есть *иррациональное* число[1], например $x^{\sqrt{2}}$.

2. Показательные функции, где аргумент находится в показателе:

$$2^x, \quad a^x, \quad x^x.$$

---

[1] *Дробная* степень не дает ничего нового, так как $x^{\frac{p}{q}}$ обозначает $\sqrt[q]{x^p}$, следовательно, есть явная алгебраическая функция. Иное дело — иррациональная степень.

3. Логарифмические функции при различных постоянных основаниях:

$$\log_a x,\ \lg x.$$

4. Тригонометрические функции, т. е.

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x.$$

5. Обратные тригонометрические функции[1]

$$\operatorname{arc\,sin} x,\ \operatorname{arc\,cos} x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x.$$

В высших же ветвях математического анализа изучаются еще и другие трансцендентные функции (например, ценные для механики *эллиптические* функции и др.).

Функция от функции

Классификацию функций на основе *аналитического* признака мы заканчиваем указанием важного семейства функций, получаемых комбинированием предыдущих классов. Именно, среди разнообразных примеров получения функций *все более и более сложных* одним из самых важных является образование так называемых «*функций от функций*».

Вот сущность этого приема.

Предположим, что $f(x)$ есть какая-нибудь данная нам функция, определенная на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$. Пусь ее величина при изменении аргумента x от a до b остается всегда заключенной между двумя числами A и B.

Пусть теперь $\varphi(y)$ есть некоторая функция аргумента y, также нам данная, определенная как раз на отрезке $[A \leqslant y \leqslant B]$ или на отрезке еще более широком, т. е. содержащем отрезок $[A \leqslant y \leqslant B]$.

Если теперь мы будем рассматривать букву y как равную во всякий момент по величине первой функции $f(x)$, т. е. если мы положим $y = f(x)$, то тогда $\varphi(y)$, т. е. $\varphi[f(x)]$ окажется просто обыкновенной функцией аргумента x. В знак ее происхождения она называется «*функцией от функции*», причем первая функция аргумента x, т. е. $f(x)$, называется *внутренней*, а вторая функция с аргументом y, т. е. $\varphi(y)$, называется *внешней* (наружной).

---

[1] Равенство $y = \operatorname{arc\,sin} x$ читается так: *игрек равен углу, синус которого есть* x (по-латыни угол или дуга называется arcus). Значит, написанное соотношение между буквами y и x есть не что иное, как перефразировка первоначального уравнения $x = \sin y$.

Например, равенство (первоначальное) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ можно написать в виде

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1.$$

Ясно, что полученная таким образом новая функция аргумента, написанная *явно:*

$$\varphi[f(x)]$$

или *неявно:*

$$\varphi(y), \quad \text{где} \quad y=f(x),$$

определена везде на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, ибо всякой величине x этого отрезка отвечает вполне определенная величина y и, значит, вполне определенное число $\varphi(y)$.

Разумеется, мы можем продолжать и дальше: если величина второй функции $\varphi(y)$ все время содержится в том отрезке, где определена некоторая *третья функция аргумента* z, например $\psi(z)$, то можно, положив $z=\varphi(y)$, рассматривать $\psi(z)$ опять как функцию первоначального аргумента x, написав ее или *явно* в виде

$$\psi\{\varphi[f(x)]\}$$

или *неявно* в виде

$$\psi(z), \text{ где } z=\varphi(y), \ y=f(x).$$

И так далее.

Здесь кроется некоторое общее понятие, которым учащийся уже пользовался много раз. Так, функция $\sin^2 x$ есть не что иное, как функция y^2, где y замещено через $\sin x$, функция $\sqrt{1+\sin^2 x}$ есть просто $\sqrt{z}$, где z замещено через $1+y^2$, а буква y, в свою очередь, замещена через $\sin x$. Функция $a^{\log_a x}$ может быть рассматриваема как a^y, где y замещено через $\log_a x$, притом $a^{\log_a x}$ есть просто x (если $x>0$), как это следует из теории логарифмов.

Более того: можно утверждать, что *всякая написанная в конечном виде функция аргумента* x (т. е. выраженная через конечное число элементарных знаков, вроде $\sqrt{\ }$, lg, sin и т. д.) *составляется повторным применением операции «функции от функции»*. Учащийся скоро убедится в этом, если станет разбивать любые сложные написанные функции аргумента x на повторные применения принципа «функции от функции».

Пример. Разбить функцию

$$y=\sqrt{1+\lg\left(3+\cos a^{\sqrt{x}}\right)}$$

на повторные процессы функции от функции.

Решение. Ясно, что написанная функция составлена так:

$$y=\sqrt{z}, \quad z=1+\lg u, \quad u=3+\cos v, \quad v=a^t, \quad t=\sqrt{x}.$$

Мы переходим сейчас к указанию еще нескольких классов функций исходя скорее из *геометрического* признака, чем чисто аналитического.

Однозначные и многозначные функции

Переменное y называется *однозначной* функцией другого переменного x, если каждому значению x соответствует *одно и только одно* значение y. Так, в уравнении

$$y = 3x^2 \tag{1}$$

y есть однозначная функция от x.

Если каждому значению переменного x соответствует не одно, а несколько значений переменного y, то оно называется *многозначной* функцией от x. Например, уравнение

$$x = 3y^2 \tag{2}$$

определяет y как *двузначную* функцию от x, потому что

$$y = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}. \tag{3}$$

Легко объяснить, откуда взялась двузначность функции y, определенной из уравнения (2). Для этого заметим сперва, что

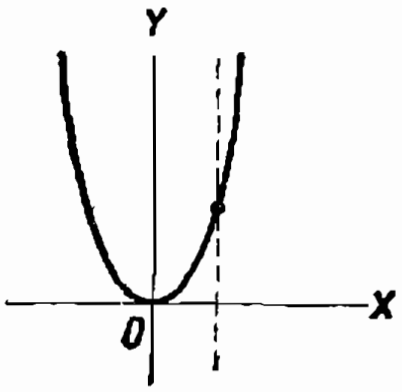


Рис. 24

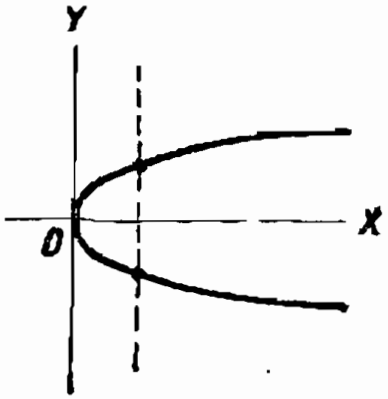


Рис. 25

уравнение (1) есть уравнение *параболы*, имеющей вершину в начале координат O и ось ординат OY своей *осью* (рис. 24).

А так как парабола, расположенная указанным образом, пересекается лишь в одной точке всякой прямой, параллельной ее оси, то однозначность функции y, определенной из уравнения (1), сама собой понятна.

Теперь уравнение (2) отличается от уравнения (1) только тем, что в нем буквы x и y *переставлены*. Это показывает, что уравнение (2) есть уравнение *той же самой параболы*, с той только разницей, что оси координат OX и OY поменялись местами. Значит, для уравнения (2) наша парабола будет иметь такое расположение, какое указано на рисунке 25. Поэтому двузнач-

ность функции y, полученной от решения уравнения (2), вполне понятна: парабола, изображенная на рисунке 25, расположена симметрично относительно ее оси OX и всякая параллель оси OY ее пересекает в *двух* точках, симметрично (зеркально) расположен-

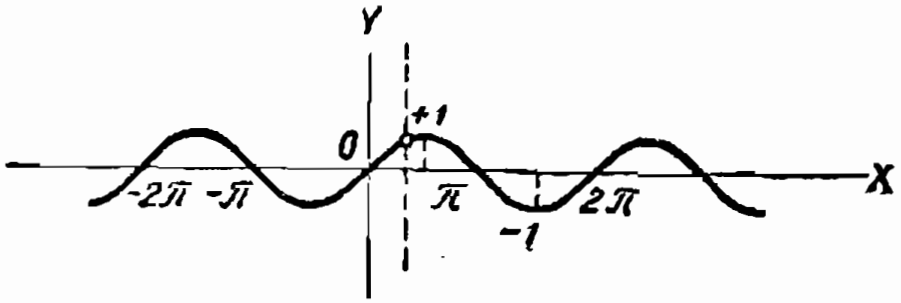


Рис. 26

ных по отношению к оси OX; одна из этих точек имеет положительную ординату $+\sqrt{\frac{x}{3}}$, другая — отрицательную $-\sqrt{\frac{x}{3}}$, с той же самой абсолютной величиной.

Таким образом, однозначные *функции возникают от изображения кривых, пересекаемых параллелями оси OY в* одной *только точке; если же кривая повернута так, что пересекается каждой такой параллелью в* нескольких *точках, тогда изображающая ее функция* многозначна.

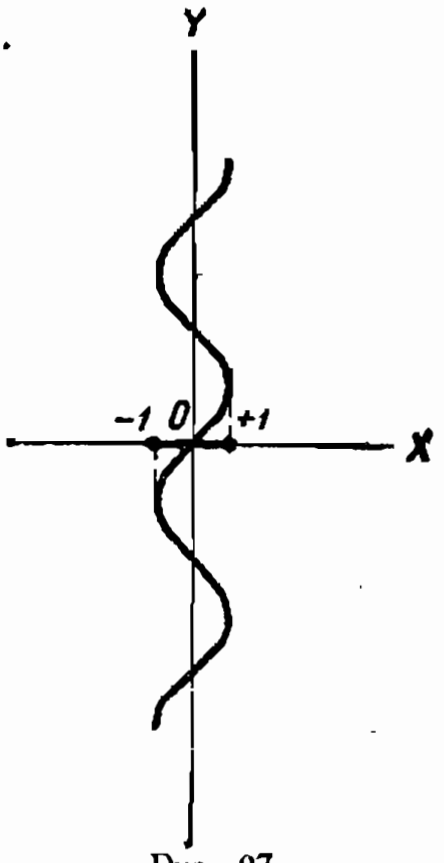


Рис. 27

Пример. *Показать, что функция* $\arcsin x$ *есть бесконечнозначная.*

Решение. Функция $\sin x$ есть однозначная и уравнение $y = \sin x$ есть уравнение волнистой линии *(синусоиды)*, проходящей через начало координат O и пересекаемой всякой вертикальной прямой только в одной точке (рис. 26). Важно, что линия эта состоит из бесконечного числа одинаковых волн, идущих в горизонтальном направлении, причем их гребни поднимаются *над* осью OX на расстояние $+1$, а впадины их находятся *под* осью OX на расстоянии -1.

Очевидно, что уравнение $x = \sin y$, полученное из предыдущего обменом мест буквами x и y, изображает ту же самую кривую, но только поставленную вертикально (рис. 27). Ясно, что проекция вертикально стоящей кривой на ось OX есть отрезок $[-1, +1]$. Ясно, наконец, что всякая параллель оси OY, пересекающая этот отрезок, *обязательно пересечет нашу кривую в бесконечном числе точек.* Поэтому функция $y = \arcsin x$, полученная решением уравнения $x = \sin y$ относительно неизвестного y, есть функция бесконечнозначная.

Возрастающие и убывающие функции

Одна из важнейших задач математического анализа состоит в изучении *изменения* функций. Самым простым изменением функции является такое, при котором функция *возрастает* или *убывает*. Дадим точное определение, что нужно понимать под этим.

Какая-нибудь функция $y=f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *возрастающей на этом отрезке*, если чем больше будет взятая величина аргумента x, тем большим станет соответствующее значение функции. И аналогично, $f(x)$ называется *убывающей на отрезке* $[a, b]$, когда увеличение величины аргумента x влечет за собой, наоборот, уменьшение значения функции.

С аналитической точки зрения, это значит, что из неравенства

$$x_1 < x_2$$

следует неравенство

$f(x_1) < f(x_2)$, если функция есть *возрастающая*,

и неравенство

$f(x_1) > f(x_2)$, если функция есть *убывающая*.

С геометрической точки зрения, возрастающая функция изображается кривой, поднимающейся направо вверх, а убывающая функция изображается кривой, наоборот, опускающейся направо вниз (рис. 28 и 29).

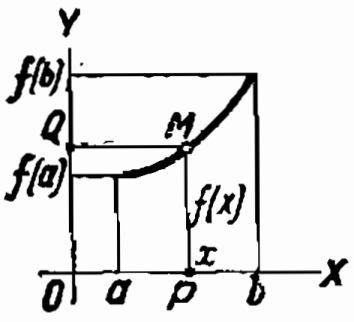


Рис. 28

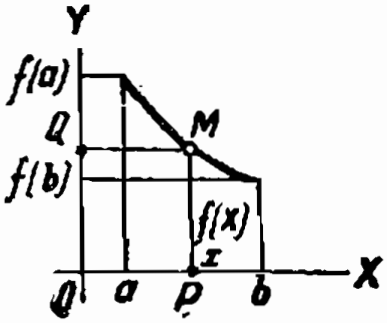


Рис. 29

У возрастающей функции самая малая величина (минимум) на отрезке $[a, b]$ осуществляется в его левом конце, т. е. при $x=a$, а самая большая величина (максимум) осуществляется в его правом конце, т. е. при $x=b$. У убывающей, наоборот, максимум имеется в левом конце a, а минимум — в правом конце b.

Если аргумент x возрастающей функции $f(x)$ увеличивается от a до b, точка P, имеющая x своей абсциссой, движется по оси OX вправо, тогда соответствующая точка M движется по кривой, а ее проекция Q на ось OY движется по этой оси постоянно *вверх* (рис. 28). Наоборот, если функция $f(x)$ есть убывающая, тогда при увеличении ее аргумента x от a до b, точка Q движется по оси OY постоянно *вниз* (рис. 29).

Функции возрастающие и функции убывающие называются все вместе **монотонными** функциями. Из того, что сейчас было сказано, вытекает следствие:

если у монотонной функции $y=f(x)$ аргумент x возрастает, то численное значение этой функции есть монотонная переменная величина.

Определение. *Функция $y=f(x)$, монотонная на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, называется* **непрерывной на этом отрезке,** *если ее численное значение есть непрерывная переменная величина.*

Отсылая учащегося к § 16, где было дано определение монотонной непрерывной переменной величины, мы напоминаем ее основное свойство: *проходить последовательно через* все *промежуточные значения, лежащие между двумя ее крайними значениями.*

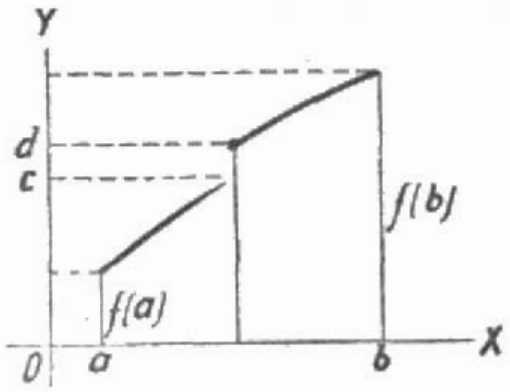


Рис. 30

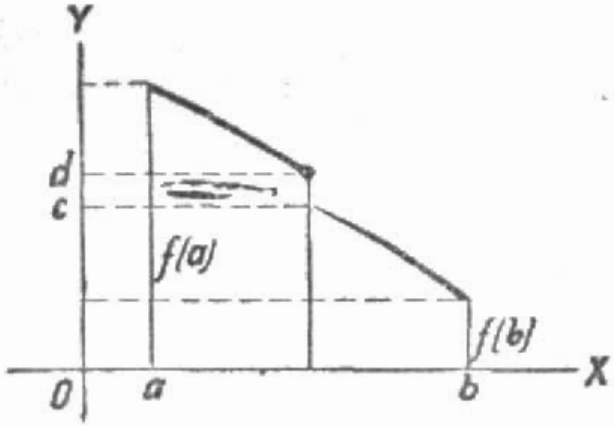


Рис. 31

Так как в данном случае точка y движется по оси ординат OY, а двумя крайними ее значениями служат максимальное и минимальное значения $f(a)$ и $f(b)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то значение y изменяется монотонно и непрерывно, *не делая скачков* и проходя последовательно *по одному разу* через все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Монотонные функции, изображенные на рисунках 28 и 29, очевидно *непрерывны* на отрезке $[a, b]$.

Если же монотонная функция $f(x)$ не непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее численная величина y делает *скачок,* как было разъяснено в § 16, ибо y не может пробегать всех промежуточных значений между $f(a)$ и $f(b)$, но при своем изменении должна оставить пустым некоторый промежуток (c, d), перескочив через него.

Монотонные функции, возрастающая и убывающая, изображенные на рисунках 30 и 31, очевидно разрывны на $[a, b]$, ибо имеют скачок, потому что на промежуток (c, d) не попадает ни одного численного значения той и другой функции.

Если под абсциссой x мы будем понимать время, тогда численная величина функции $f(x)$ будет зависеть только от времени, т. е. явится истинной *переменной величиной*, и тогда к ней приложимо все сказанное в § 16 о скачке монотонной не непрерывной величины.

Дадим, наконец, следующее определение:

функция, немонотонная на отрезке $[a, b]$, *называется* колеблющейся *на этом отрезке.*

Примечание. Полезно иметь в виду следующее определение: *если колеблющаяся на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *допускает разбиение этого отрезка на конечное число отрезков, на каждом из которых* $f(x)$ *монотонна и непрерывна, тогда такая колеблющаяся функция* $f(x)$ *называется* непрерывной *на отрезке* $[a, b]$.

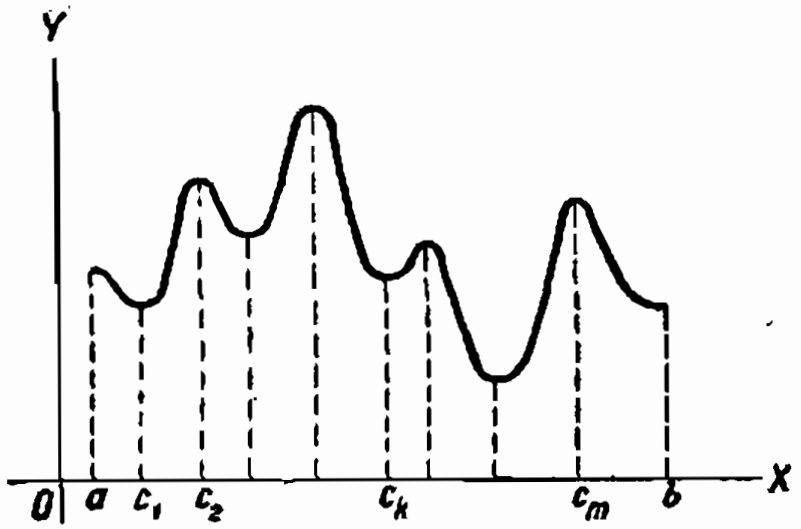


Рис. 32

Было бы весьма естественным предположить, что, вообще, всякая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, не являющаяся на нем все время возрастающей или убывающей, позволяет разрезать этот отрезок $[a, b]$ на конечное число таких более мелких отрезков $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $[c_2, c_3]$, ..., $[c_m, b]$, на каждом из которых рассматриваемая функция возрастает или убывает. К этому как будто склоняет и рисунок 32, указывающий ясно, как надо сделать разрезы.

Но на самом деле это не так: возможность такого разрезания отрезка $[a, b]$ вовсе не следует логическим образом из определения непрерывности. Читатель должен быть предупрежден заранее, что имеются такие функции $y=f(x)$, которые *удовлетворяют определению непрерывности*, которое будет дано дальше (см. гл. VI), и которые тем не менее *не возрастают и не убывают* (и не постоянны) *ни на каком сколь угодно мелком отрезке, являющемся частью отрезка* $[a, b]$.

Обратные функции

Возьмем какую-нибудь функцию

$$y=f(x), \tag{1}$$

определенную на отрезке $[a, b]$ оси OX. Здесь характеристика f обозначает, как всегда, совокупность аналитических действий, которые надо проделать над независимым переменным x, чтобы получить численную величину переменного y. Но если *в равенстве* (1) мы переменим *роли* x и y и будем рассматривать букву y как переменное независимое, а букву x—как зависимое, то тогда нам придется решать *уравнение* (1) относительно вели-

чины x, чтобы иметь ее численное значение при произвольно заданном численном значении величины y. Ясно, что когда это решение будет закончено, тогда буква x предстанет выраженной через букву y в виде

$$x = F(y). \tag{2}$$

Таким образом, теперь уже буква x является некоторой функцией переменного y, подобно тому, как раньше буква y была функцией f переменного x.

Функции $f(x)$ и $F(y)$ называются взаимно-обратными одна по отношению к другой.

Их свойство взаимности следует из того, что если мы вместо уравнения (1) отправимся от уравнения (2) и решим его относительно буквы y, то должны будем, очевидно, придти к первоначальному уравнению (1).

Поэтому, теоретически говоря, от нас самих зависит, которую из обеих функций $f(x)$ и $F(y)$ рассматривать как *прямую функцию*, а которую — как *обратную функцию*.

В нижеследующих примерах, если правые части в первом столбце принять за прямые функции, то соответственные части второго столбца будут их *обратными функциями:*

$y = x^2 + 1,$	$x = \pm\sqrt{y-1},$
$y = a^x,$	$x = \log_a y,$
$y = \sin x,$	$x = \arcsin y.$

Но в практическом отношении за прямые функции обычно принимают однозначные функции, потому что обратные им функции почти всегда многозначны.

Чтобы понять причину этого, рассмотрим сначала те редкие случаи, когда обратная функция также однозначна. Это те случаи, когда данная функция $y = f(x)$ *монотонная* и *непрерывная* на отрезке $[a, b]$ оси OX. Здесь мы имеем только две возможности: либо $f(x)$ есть возрастающая (рис. 33), либо убывающая (рис. 34).

Оба рисунка говорят одно и то же: когда переменное x непрерывным движением описывает отрезок $[a, b]$, лежащий на оси OX, тогда переменное y также непрерывным движением описывает отрезок $[c, d]$, лежащий на оси OY. Если точка x движется всегда направо, описывая отрезок $[a, b]$, тогда в первом случае точка y движется *вверх*, во втором случае — *вниз*.

Таким образом, оба отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$, лежащие на осях OX и OY, *точка по точке соответствуют друг другу*. Если, имея x, мы хотим найти y, нам надо в заданной точке x восстановить перпендикуляр к оси OX; он пересечет кривую в точке M,

ордината которой $f(x)$ и будет искомой величиной y. Обратно, если, имея y, мы хотим найти x, нам надо в заданной точке y восставить перпендикуляр к оси OY; он пересечет кривую *в той же самой* точке M, *абсцисса* которой $F(y)$ и будет искомой величиной x.

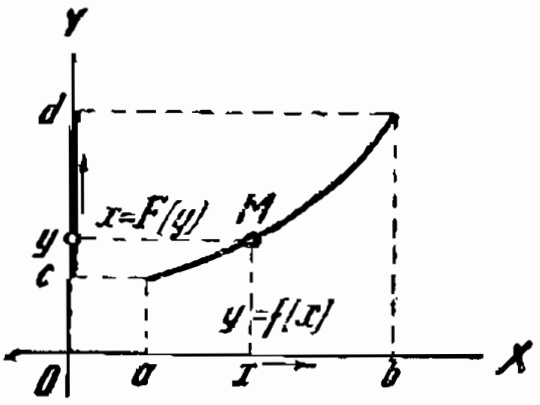


Рис. 33

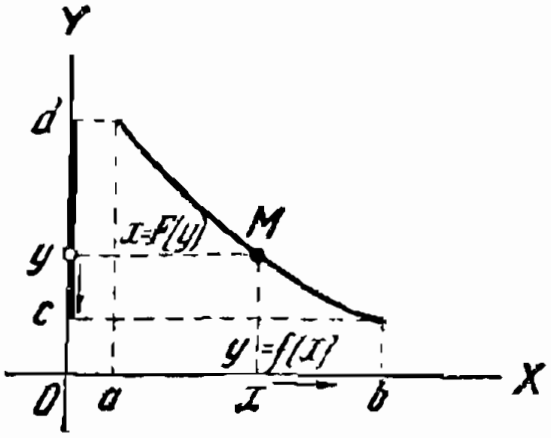


Рис. 34

Так как новое уравнение (2) есть не что иное, как старое уравнение (1), только разрешенное относительно буквы x, то, с геометрической точки зрения, и старому уравнению (1) $y=f(x)$ и новому уравнению (2) $x=F(y)$ соответствует та же самая кривая линия, только для уравнения (1) осью независимого переменного является ось OX, а для уравнения (2) осью независимого переменного является ось OY.

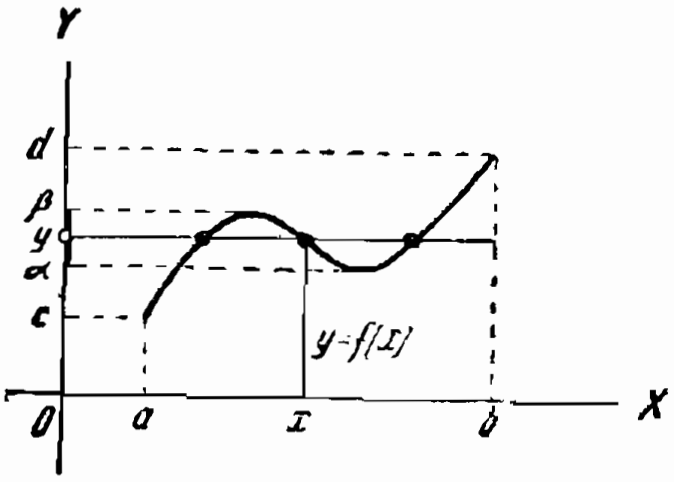


Рис. 35

Говоря образно, для наблюдателя, идущего по оси OX и имеющего голову, направленной вверх в положительном направлении оси OY, уравнением кривой линии будет прежнее уравнение (1):

$$y=f(x),$$

а для другого наблюдателя, идущего по оси OY (служащей теперь для него осью *его* «абсцисс») и имеющего голову в положительном направлении оси OX (оси, играющей теперь для него роль оси *его* «ординат»), уравнением той же самой кривой станет новое уравнение (2):

$$x=F(y).$$

Итак, когда данная функция $y=f(x)$ есть монотонная и непрерывная, обратная ей функция $x=F(y)$ также монотонна и непрерывна.

Но когда данная функция $y=f(x)$ *не есть монотонная*, тогда обратная функция $x=F(y)$ всегда многозначная. Достаточно просто взглянуть на рисунок 35, где прямая функция $y=f(x)$, хотя и непрерывная, но не есть монотонная на отрезке $[a, b]$, а обратная функция $x=F(y)$ есть уже трехзначная на промежутке (α, β), ибо всякая прямая, параллельная оси OX, проведенная через какую-нибудь точку y этого промежутка, пересечет кривую в *трех* точках.

ЗАДАЧИ

1. Дано $f(x)=x^2-9x+14$; показать, что $f(b+1)=b^2-7b+6$.
2. Дано $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$; показать, что $f(0)=-30$, $f(2)=0$, $f(3)=f(5)$, $f(-1)=-6f(6)$.
3. Если $f(x)=x^3+3x^2-5$, найти $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.
4. Если $F(x)=4^x$, найти $F(0)$, $F(-1)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. Дано $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$; показать, что $f(x-2)=x^3-16x^2+83x-140$.
6. Дано $f(x)=x^2-3x+7$; показать, что $f(x+h)=x^2-3x+7+(2x-3)h+h^2$.
7. Дано $f(x)=x^2+4x-1$; показать, что $f(x+h)-f(x)=(2x+4)h+h^2$.
8. Дано $f(x)=\frac{1}{x}$; показать, что
$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}.$$
9. Если $\Phi(x)=a^x$, показать, что $\Phi(y)\cdot\Phi(z)=\Phi(y+z)$.
10. Дано $\Phi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$; показать, что
$$\Phi(y)+\Phi(z)=\Phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$
11. Дано $f(x)=\sin x$; показать, что $f(x+2h)-f(x)=2\cos(x+h)\cdot\sin h$.

ГЛАВА IV

ПРЕДЕЛ

§ 29. Предел переменного. Мы рассматриваем переменную величину x, которая *изменяется все время*. Изменяясь с течением времени, переменное x принимает *последовательно* бесконечное множество численных значений, через которые оно «проходит».

Для нас особенно существенно будет то обстоятельство, что *переменное x изменяется все время*. Это значит, что переменное x *никогда не перестает меняться*. Поэтому *никакое из значений, принятых переменным x, не будет самым последним*, так как за каждым значением, принятым переменным x, имеются еще дальнейшие значения, через которые наше переменное x пройдет несколько позже.

Учащийся должен с самого же начала чрезвычайно внимательно отнестись к этому в высшей степени важному факту. Ведь нельзя представить себе, что имеется какой-то самый последний момент времени, за которым уже совсем нет никакого времени; аналогично нельзя представить себе на прямой линии какую-то самую последнюю точку, за которой дальше наша прямая уже перестает простираться; нельзя, наконец, вообразить себе какое-то самое большое натуральное число, к которому уже нельзя было бы прибавить одну единицу и тем самым еще более увеличить его.

Выше, в § 18, мы согласились рассматривать постоянную величину как переменную (такую, которая последовательно проходит через ряд значений, *равных друг другу*). Учащийся не должен при рассмотрении предела переменной величины изгонять постоянные величины только на том основании, что «они совсем не изменяются». Для нас важно, собственно, не то, что переменная величина x изменяется все время, а важно то, что нами *рассматривается все время* независимо от того, проходит ли она через ряд существенно различных или же равных между собой значений.

Изменение переменного x может протекать весьма разнообразно. Но среди всех возможных изменений переменного x заслуживает особенного внимания такое изменение переменной величины x, про которое обычная речь выражается такими словами: «переменное x *стремится* к постоянной величине a», «переменное x *безгранично приближается* к a», «x *становится соседним* с a», «x с течением времени *нечувствительно мало* отличается от a» и т. д.

Все эти фразы достаточно ярко указывают, в чем дело: характер изменения переменного x должен быть таким, что отличие x от a все более и более сглаживается с течением времени. Но фразы эти опасны в том отношении, что всякая из них имеет свой собственный оттенок, что может легко отразиться на самом понимании основного явления. Поэтому все они должны быть заменены *математическим* описанием, т. е. *математическим определением:*

мы говорим, что переменное x стремится к пределу a, если абсолютная величина разности $x-a$ со временем сделается и будет потом все время оставаться меньшей любого малого положительного числа ε, т. е. если, начиная с некоторого момента, будет все время справедливым неравенство:

$$|x-a|<\varepsilon,$$

каково бы ни было, по своей малости, взятое положительное число ε.

Геометрически наличие предела у переменной величины истолковывается очень просто. В самом деле, изобразим в виде точки



Рис. 36

M переменную величину x, а в виде точки A — постоянную величину a (рис. 36). Так как x есть переменное и a — постоянное, то точка M есть *движущаяся*, а точка A *неподвижна.*

Выберем теперь *произвольно* какое-нибудь положительное число ε; выбор его *произволен,* но раз мы его сделали, то в дальнейшем следует рассматривать ε уже как совершенно определенное число, не подлежащее никакому дальнейшему изменению. Взяв ε, мы откладываем вправо и влево от неподвижной точки A промежуток длины ε. Мы получим на прямой небольшой *неподвижный* промежуток длины 2ε с центром в неподвижной точке A.

Теперь, по мере того как будет протекать время, точка M будет как-нибудь двигаться по прямой. Но раз число a есть предел переменной величины x, точка M *кончит тем, что непременно попадет на этот неподвижный промежуток и будет там с этих пор оставаться все время,* потому что разность $x-a$ по абсолютной величине сделается и останется меньше ε, по определению предела. А эта разность и есть расстояние подвижной точки M до неподвижной точки A, ее предела.

Таким образом: *сказать, что движущаяся точка M стремится к неподвижной точке A как к своему пределу, это зна-*

чит просто сказать, что точка M движется так, что попадет со временем на любой заранее выбранный нами маленький промежуток, охватывающий A, и будет впредь там оставаться.

Но то, *каким именно образом* будет двигаться в дальнейшем точка внутри вышеупомянутого промежутка, попав на него, это отнюдь не указывается, не предрешается и не важно для понятия предела: это движение может быть весьма разнообразным; мы увидим сейчас, что точка M может идти к A или *справа,* или *слева,* или даже *попеременно то с той, то с другой стороны.*

Из указанного геометрического истолкования предела переменной величины следует, что

одна и та же самая переменная величина x может иметь не более одного предела a.

В самом деле, если бы пределов было два разных, то одна и та же движущаяся точка M при дальнейшем своем движении оказалась бы одновременно вблизи двух совершенно разных точек, что невозможно.

Но переменная величина может иногда совсем не иметь никакого предела.

Например, переменная величина x, определенная равенством

$$x = \sin t,$$

где буква t обозначает *время,* совсем не имеет никакого предела, так как мы знаем (см. § 16), что синус будет колебаться все время между $+1$ и -1 и, значит, не может приближаться ни к какой постоянной величине.

Когда переменное x стремится к пределу a, это записывают символически в виде

$$\lim x = a$$

или в виде

$$x \to a.$$

Выше мы сказали, что всякую *постоянную* величину a можно рассматривать как *переменную* (такую, которая проходит через ряд значений, равных a). Из самого определения предела переменной величины следует, что рассматриваемая величина a имеет своим пределом a. Это можно выразить, сказав:

предел постоянной величины есть она сама:

$$\lim a = a.$$

§ 30. О способах переменной величины приближаться к своему пределу. Для ясного понимания идеи предела переменной величины надо иметь в виду, что переменная величина может стремиться к своему пределу различными способами: переменная

величина может или все время быть *меньше* своего предела, или быть все время *больше* своего предела, или *колебаться* около своего предела, т. е. проходить *через бесчисленное множество значений, попеременно то больших, то меньших* этого предела; наконец, переменная величина может во время процесса своего изменения и стремления к пределу *неограниченно большое число раз проходить через значение, в точности равное самому пределу*. Иллюстрируем все эти обстоятельства на примерах, частью уже хорошо известных учащемуся.

I. Переменное меньше своего предела

Если число сторон правильного *вписанного* в окружность многоугольника неограниченно увеличивается, то пределом площади этого многоугольника служит площадь круга. В этом случае *переменное всегда меньше своего предела.*

II. Переменное больше своего предела

Подобно этому, если рассмотреть *описанный* около окружности правильный многоугольник, то при безграничном увеличении числа его сторон площадь круга явится по-прежнему пределом площади этого многоугольника. Но теперь уже *переменная всегда больше своего предела.*

III. Переменное, приближаясь к своему пределу, все время колеблется около него

Чтобы дать конкретный пример и для этого случая, представим себе, что мы чертим *вписанные* в окружность правильные многоугольники только с *нечетным* числом сторон, а правильные *описанные* многоугольники — только с *четным* числом сторон. Тогда, если M_n есть начерченный нами правильный n-угольник, то он окажется вписанным, если n нечетно, и описанным — если n четно. Ясно, что при безграничном увеличении числа сторон n площадь круга явится по-прежнему пределом площади многоугольника M_n. Но в рассматриваемом случае переменное то больше, то меньше своего предела, смотря по тому, четно или нечетно число n.

IV. Переменное, стремясь к своему пределу, бесконечно много раз делается ему равным во время своего изменения

В указанных выше примерах переменное *никогда не достигало* своего предела. Но это есть лишь просто *случайное* обстоятельство, которое отнюдь нельзя возводить в общее правило.

В самом деле, из самого *определения предела* переменного ясно, что самая сущность этого определения состоит просто только в том, что абсолютная величина разности между переменным и его пределом, т. е. $|x-a|$, должна в некоторый момент сделаться и в дальнейшем остаться меньше любого данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было. И ни о чем другом здесь больше не говорится.

Рассмотрим пример. Переменная величина x, определенная равенством

$$x=\frac{\sin t}{t},$$

где буква t обозначает *время*, имеет, очевидно, своим пределом нуль, когда время t безгранично возрастает. Действительно, числитель, будучи синусом, никогда не больше единицы; значит, при любом t имеем:

$$|x|<\left|\frac{1}{t}\right|,$$

откуда видим, что x стремится к нулю, когда t безгранично растет, т. е.

$$\lim x=0.$$

Ясно, с другой стороны, что эта переменная величина x во время своего изменения бесконечно много раз принимает в точности значение 0: это происходит всякий раз, когда время t (т. е. угол t) делается равным π, 2π, 3π, 4π, 5π... и т. д. (т. е. целому числу полуокружностей).

Итак, в этом случае *переменное, стремясь к своему пределу, бесконечно много раз в точности принимает его величину в течение своего изменения.*

§ 31. Бесконечно малые. Мы теперь вводим самое основное понятие, на котором строится весь математический анализ.

Определение. *Переменная величина называется бесконечно малой, если она имеет своим пределом нуль.* Следовательно, если x есть бесконечно малое, то мы должны писать:

$$\lim x=0, \quad \text{или} \quad x\to 0.$$

Чтобы понять самую сущность бесконечно малого, необходимо, разумеется, вернуться к определению предела, которое мы дали несколькими страницами выше (см. § 29). Там мы установили, что когда какая-либо переменная величина x стремится к пределу a, то разность $x-a$ по абсолютной величине сделается и останется меньше ε, т. е. $|x-a|<\varepsilon$. Теперь в нашем случае, когда x есть бесконечно малое, его предел a есть нуль: $a=0$. Поэтому разность $x-a$ есть просто x, и абсолютная величина $|x-a|$ есть просто $|x|$.

Из сказанного ясно, что *переменная величина x называется бесконечно малой, если она себя ведет так, что ее абсолютная величина $|x|$, начиная с некоторого момента, сделается и будет все время в дальнейшем оставаться меньше любого наперед заданного положительного числа ε, как бы мало оно ни было, т. е. если мы с известного момента постоянно будем иметь удовлетворенным неравенство*

$$|x|<\varepsilon$$

Для правильного понимания самой *сути дела* учащийся должен хорошо усвоить, что бесконечно малое *по самому своему определению* есть всегда *переменная* величина и что поэтому никакое постоянное число, как бы мало оно ни было, *никогда* не есть бесконечно малое. Учащийся должен остерегаться пользоваться сравнениями или уподоблениями вроде, например, следующего: «один сантиметр есть величина бесконечно малая по сравнению с диаметром солнца». Эта фраза совершенно неправильна. Обе величины — и сантиметр и диаметр солнца — суть величины постоянные и, значит, *конечные,* только, разумеется, одна значительно меньше другой. Притом и сантиметр вовсе не представится маленькой величиной, если мы, например, сравним его с «толщиной волоса», а для движущегося микроба сантиметр явится пространством колоссальной величины. Чтобы избавиться впредь от всяких рискованных сравнений и субъективных случайных уподоблений, учащийся твердо *должен помнить, что никакая постоянная величина не является бесконечно малой, так же как никакое число, как бы мало оно ни было.*

Поэтому, в сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин «*бесконечно малое*», но термин «бесконечно умаляющееся», как более ярко выражающий *идею переменности*. Согласно традиции мы, однако, сохраним прежний термин.

Исключением из всех чисел является нуль, который мы будем считать величиной бесконечно малой, несмотря на то, что нуль есть число постоянное. Вспомнив о том, что было сказано о величине постоянной, рассматриваемой как переменная, условимся и в данном случае считать нуль за величину переменную, принимающую в течение процесса изменения все время одно и то же значение. Так как предел величины, принимающей только значения, равные нулю, есть нуль, то, следовательно, нуль можно считать величиной бесконечно малой. Такого рода точка зрения позволит нам в дальнейшем сокращать формулировку большого числа определений и теорем.

Геометрически, если мы изобразим бесконечно малую величину в виде точки M на прямой, то получим движущуюся *точку*,

перемещающуюся по этой прямой таким образом, что, каким бы малым промежутком длины 2ε мы ни охватили начало координат O, точка M в некоторый момент времени попадает на этот промежуток и в дальнейшем будет двигаться только внутри его (рис. 37).

Следствие. *Всякое бесконечно малое есть величина ограниченная.*

В самом деле, только ограниченные величины изобразимы движущейся точкой, остающейся, начиная с некоторого момента времени, на конечном неподвижном отрезке.

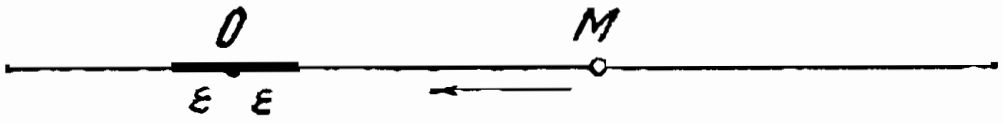


Рис. 37

§ 32. Связь понятия предела и бесконечно малого. Легко усмотреть зависимость, которая имеется между переменной величиной, стремящейся к пределу, и бесконечно малым. В самом деле, если какая-либо переменная величина x стремится к пределу a, то разность $x-a$ будет, очевидно, бесконечно малой величиной, потому что согласно определению предела мы должны иметь, начиная с некоторого момента, неравенство $|x-a|<\varepsilon$, каково бы ни было заданное положительное число ε. А это неравенство именно и характерно для бесконечно малого.

Отсюда, обозначая разность $x-a$ через α, т. е. написав $x-a=\alpha$, мы получим:

$$x=a+\alpha,$$

из чего и выводим, что

всякая переменная величина, стремящаяся к пределу, разбивается на сумму двух слагаемых: первое слагаемое есть постоянное число, являющееся пределом рассматриваемой переменной величины, второе же слагаемое есть бесконечно малое.

Обратно также очевидно: если какая-либо переменная величина x написана в виде двух слагаемых:

$$x=a+\alpha,$$

из которых первое, a, есть *постоянное* число, второе же, α, есть бесконечно малое, то такая переменная величина x стремится к постоянному a как к своему пределу:

$$\lim x=a \quad \text{или} \quad x\to a.$$

Эта зависимость и устанавливает связь теории пределов и теории бесконечно малых.

§ 33. Предварительные свойства переменных величин, стремящихся к пределу. Мы знаем, что далеко не всякая переменная величина стремится к пределу. Но раз какая-нибудь переменная величина x стремится к пределу, то оказывается, что уже в силу только одного этого обстоятельства она обладает рядом свойств, которые важно иметь в виду.

I. *Всякая переменная величина, стремящаяся к пределу, есть величина* ограниченная.

Доказательство. Если переменная величина x имеет предел, пусть равный a, ее можно написать в виде $x=a+\alpha$, где α есть бесконечно малое. Но всякая бесконечно малая величина есть величина ограниченная (§ 31). Поэтому, начиная с некоторого момента времени, мы будем иметь неравенство $|\alpha|<A$, где A есть неизменное положительное число. Значит, с этого момента мы будем иметь $|x|<|a|+A$. И так как в правой части этого неравенства стоит неизменная положительная сумма, то x есть ограниченная переменная величина.

II. *Если переменная величина x имеет предел a, отличный от нуля, тогда обратная величина $\frac{1}{x}$ есть величина ограниченная.*

Доказательство. Прежде всего пишем $x=a+\alpha$, где α есть бесконечно малая величина. Так как, по условию, $a\neq 0$, то $|a|>0$. И так как α есть бесконечно малое, то, начиная с некоторого момента времени, мы будем иметь неравенство $|\alpha|<\frac{|a|}{2}$. Поэтому с этого момента мы будем иметь

$$|x|>|a|-|\alpha|>|a|-\frac{|a|}{2}=\frac{|a|}{2},$$

т. е. окончательно: $|x|>\frac{|a|}{2}$. Разделив единицу на обе части этого неравенства, мы обязаны переменить направление этого неравенства на обратное, т. е. должны написать $1:|x|<1:\frac{|a|}{2}$. Выполнив деление, мы имеем $\frac{1}{|x|}<\frac{2}{|a|}$, откуда окончательно $\left|\frac{1}{x}\right|<\frac{2}{|a|}$. А это и показывает, что переменная величина $\frac{1}{x}$ есть величина ограниченная, ибо правая часть этого неравенства есть неизменное положительное число.

Примечание. Свойство это *становится абсолютно неверным, если предел переменной величины x равен нулю*, ибо в этом случае обратная величина $\frac{1}{x}$ не может быть ограниченной. Например, если t есть *время*, тогда

$x=\frac{1}{t}$ имеет пределом нуль, т. е. $\lim x=0$, ибо x становится с течением времени меньше сколь угодно малого положительного числа. Но обратная величина $\frac{1}{x}$, равная, как показывает вычисление $\frac{1}{x}=1:\frac{1}{t}=t$, самому времени t, понятно, не есть величина ограниченная.

§ 34. Важнейшие свойства бесконечно малых. Эти свойства следующие.

Свойство 1. *Сумма* двух, трех *и, вообще, любого* неизменяющегося *числа бесконечно малых есть всегда бесконечно малая величина.*

Доказательство. Начнем с суммы $\alpha+\beta$ *двух* бесконечно малых α и β. Пусть ε какое-нибудь заданное (т. е. неизменное) положительное число. Мы знаем, что, начиная с некоторого момента времени T_1, мы будем иметь справедливым неравенство $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$. Точно так же, имеется такой момент времени T_2, начиная с которого удовлетворится и будет сохраняться неравенство $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что после наибольшего из обоих моментов T_1 и T_2 мы будем иметь одновременно осуществленными и сохраняющимися неравенства $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что мы будем иметь

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |\alpha+\beta|<\varepsilon.$$

Это и показывает, что *сумма* $\alpha+\beta$ *двух бесконечно малых есть бесконечно малое.*

Легко теперь видеть, уже не делая никакого нового рассуждения, что *сумма* трех, четырех, пяти и, *вообще,* ограниченного числа *бесконечно малых есть бесконечно малое.*

Ибо сумму трех $\alpha+\beta+\gamma$ бесконечно малых можно написать при помощи скобок в виде $(\alpha+\beta)+\gamma$. Согласно предыдущему, сумма в скобках есть бесконечно малое. Значит, и вся сумма $\alpha+\beta+\gamma$ есть бесконечно малое.

Точно так же, сумму *четырех* $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ бесконечно малых можно написать в виде $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$. Согласно предыдущему, сумма в скобках есть бесконечно малое. Значит, и вся сумма $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ есть бесконечно малое. *И так далее.* Повторяя этот прием, мы можем шаг за шагом дойти до суммы любого, заранее заданного, числа m бесконечно малых слагаемых и, следовательно, можем установить бесконечную малость этой суммы.

Примечание. Доказанное свойство 1 бесконечно малых *существенно* требует, чтобы общее число m складываемых бесконечно малых *все время* оставалось *неизменным*, т. е. *ограниченным*.

Эта оговорка крайне необходима, потому что свойство 1 может оказаться прямо ложным, когда общее число складываемых бесконечно малых не остается неизменным, т. е. ограниченным, но, например, безгранично растет по мере того, как каждое слагаемое стремится к нулю. В этом случае сумма $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu$ этих бесконечно малых может оказаться уже не бесконечно малой. Этим обстоятельством все время и пользуется *интегральное исчисление*.

Например, пусть имеем n переменных величин α, β, γ, ..., ν, каждая из которых равна $\frac{1}{n}$, т. е.

$$\alpha=\frac{1}{n},\ \beta=\frac{1}{n},\ \gamma=\frac{1}{n},\ \ldots,\ \nu=\frac{1}{n}.$$

Когда общее число их n неограниченно увеличивается, каждая из этих величин, очевидно, стремится к нулю, следовательно, это будут все бесконечно малые величины. И, однако, их сумма

$$\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

остается все время равной единице.

Сделаем еще одно замечание. Так как всякая бесконечно малая величина, при перемене ее знака, продолжает, очевидно, оставаться бесконечно малой, то отсюда следует, что свойство 1 говорит нам не только об *арифметической* сумме бесконечно малых, но и о более общей алгебраической сумме $\alpha+\beta-\gamma$, т. е. о такой, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака $+$, но еще и при помощи знака $-$. Значит, как *частный случай* мы получаем предложение:

разность $\alpha-\beta$ двух бесконечно малых α и β есть опять бесконечно малое.

Свойство 2. *Произведение $x\cdot\alpha$ ограниченной переменной величины x на бесконечно малое α есть опять бесконечно малое.*

Действительно, раз x есть величина *ограниченная*, имеется такое неизменное положительное число A, что, начиная с некоторой эпохи T_1, мы постоянно будем иметь неравенство $|x|<A$.

Зададим теперь положительное число ε. Так как α есть бесконечно малое, то, начиная с некоторой эпохи T_2, мы будем иметь соблюденным неравенство $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{A}$.

Но так как всегда

$$|x\cdot\alpha|=|x|\cdot|\alpha|,$$

то, значит, за эпохами T_1 и T_2 мы будем иметь:

$$|x\cdot\alpha|<A\cdot\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon$$

или окончательно

$$|x\cdot\alpha|<\varepsilon,$$

что и доказывает бесконечную малость произведения $x\cdot\alpha$.

Учащийся уже знает, что всякая постоянная величина и всякая переменная величина, стремящаяся к пределу, суть величины *ограниченные* (§ 18 и § 33).

Отсюда, как *частный случай,* мы получаем предложение: *произведение постоянной величины на бесконечно малое есть величина бесконечно малая; произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малое есть опять бесконечно малое.*

Свойство 3. *Частное $\frac{\alpha}{x}$ от деления бесконечно малого α на переменную величину x, стремящуюся к пределу a, отличному от нуля, есть опять бесконечно малое.*

Действительно, частное $\frac{\alpha}{x}$ можно написать в виде произведения

$$\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\alpha,$$

и так как, в силу доказательства II в § 33, обратная дробь $\frac{1}{x}$ есть величина *ограниченная,* а α — бесконечно малая, то, применяя только что установленное свойство 2 бесконечно малых, мы имеем рассматриваемое свойство 3 доказанным.

Примечание. Оговорка, делаемая в формулировке свойства 3 о том, что предел a знаменателя x должен быть отличным от нуля, в высшей степени важна по двум причинам.

Во-первых, если бы предел x был равен нулю, то все доказательство II в § 33 свойства обратной величины $\frac{1}{x}$, на которое опирается вывод свойства 3, никуда бы не годилось, ибо в упомянутом доказательстве II всюду стоит в знаменателе число $|a|$, т. е. *нуль.* А мы знаем, что ни при каких обстоятельствах *на нуль никогда делить нельзя* (см. § 9). Таким образом, все доказательство II в § 33 становится бессмысленным.

Во-вторых, если знаменатель x частного $\frac{\alpha}{x}$ имеет пределом нуль (т. е. если $a=0$) и, *значит, если этот знаменатель сам есть тоже бесконечно малое,* то тогда свойство 3 может стать ложным. Дело в том, что тогда частное $\frac{\alpha}{x}$ вообще уже *не есть бесконечно малое*; этим обстоятельством все время и пользуется *дифференциальное исчисление.*

Пусть, например, имеем частное $\frac{\alpha}{\alpha}$, в котором числитель и знаменатель суть равные бесконечно малые. Это частное все время равно единице, ибо $\frac{\alpha}{\alpha}=1$ и, значит, уже *не есть бесконечно малое.*

Свойство 3 здесь перестает иметь силу именно вследствие того, что предел знаменателя α есть число, *равное нулю*.

§ 35. Основные теоремы о пределах. Доказанные свойства бесконечно малых без труда позволяют установить следующие три основные теоремы из теории пределов.

Теорема I. *Предел алгебраической суммы любого неизменного числа переменных равен такой же алгебраической сумме пределов отдельных складываемых переменных.*

В символах:

$$\lim(x-y+z+\ldots+t)=\lim x-\lim y+\lim z+\ldots+\lim t.$$

Доказательство. Докажем ее, например, для случая алгебраической суммы трех слагаемых $x-y+z$. Пусть пределы переменных x, y и z соответственно равны числам a, b и c. Значит, мы можем написать равенства:

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta,\quad z=c+\gamma,$$

где α, β и γ — бесконечно малые. Беря теперь алгебраическую сумму этих равенств, мы получаем:

$$x-y+z=(a-b+c)+(\alpha-\beta+\gamma).$$

Первая скобка $(a-b+c)$ представляет собой, очевидно, величину постоянную. Вторая же скобка $(\alpha-\beta+\gamma)$ есть величина бесконечно малая (свойство 1). Поэтому первая скобка есть предел переменной величины $x-y+z$, т. е.

$$\lim(x-y+z)=a-b+c=\lim x-\lim y+\lim z,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. *Предел произведения любого неизменного числа переменных равен произведению пределов отдельных перемножаемых переменных.* В символах:

$$\lim(x\cdot y\cdot z\ldots t)=(\lim x)\cdot(\lim y)\cdot(\lim z)\ldots(\lim t).$$

Доказательство. Докажем ее сначала для случая только *двух* множителей $x\cdot y$. Пусть пределы x и y суть соответственно a и b; следовательно, имеем

$$x=a+\alpha,\quad y=b+\beta,$$

где α, β бесконечно малые.

Отсюда, перемножая, находим:

$$x\cdot y=(a+\alpha)\cdot(b+\beta)=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta).$$

Трехчленное выражение, написанное в самой правой скобке, есть, очевидно, величина бесконечно малая (свойства 2 и 1).

Поэтому постоянная величина ab есть предел переменной величины xy, т. е.

$$\lim(xy) = ab = (\lim x)\cdot(\lim y).$$

А теперь легко уже без всяких вычислений доказать нашу теорему для *трех, четырех* и вообще любого заданного числа множителей.

Например, имеем для *трех* множителей x, y и z следующие равенства:

$$\lim(x\cdot y\cdot z) = \lim([x\cdot y]\cdot z) = \lim[x\cdot y]\cdot\lim z = \lim x\cdot\lim y\cdot\lim z.$$

Теорема III. *Предел частного двух переменных равен частному пределов отдельных переменных,* если только предел знаменателя не равен нулю. В символах:

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0.$$

Доказательство. Пусть пределы x и y суть соответственно a и b, причем мы предполагаем, что $b \neq 0$.

Можем писать

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta,$$

где α и β суть бесконечно малые.

Сделаем вот какую выкладку: напишем $\frac{x}{y}$ и вычтем из этого переменного его предполагаемый предел $\frac{a}{b}$; если после этого вычитания у нас окажется в результате бесконечно малое, то постоянное число $\frac{a}{b}$ явится тогда на самом деле пределом переменной величины $\frac{x}{y}$:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha b - ab - a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{b\alpha - a\beta}{b^2 + b\beta}.$$

В *числителе* находится бесконечно малое, потому что уменьшаемое $b\alpha$ и вычитаемое $a\beta$ бесконечно малы, как произведения постоянного на бесконечно малое (свойство 2). А знаменатель есть переменная величина, стремящаяся к пределу b^2, *отличному от нуля,* ибо $b\beta$ есть бесконечно малое.

Значит, в силу свойства 3 вся полученная нами дробь есть бесконечно малое. Поэтому

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y},$$

при условии $\lim y \neq 0$, что и требовалось доказать.

Доказанные три основные теоремы обычно препровождают следующим замечанием, нередко оказывающим большую услугу при вычислениях предела, а именно:

Если переменная величина остается заключенной все время между двумя переменными величинами, стремящимися к одному и тому же пределу, то она необходимо стремится к тому же самому пределу.

Чтобы видеть справедливость этого, предположим, что $\lim x = \lim y = c$ и что переменная величина z все время содержится между x и y, т. е. $x < z < y$. Если мы по обе стороны от точки c (рис. 38) отложим промежуток ε, то получим вдвое больший промежуток, имеющий своей серединой точку c. Так как обе движущиеся точки x и y имеют неподвижную точку c своим пределом, то наступит такой момент времени, когда обе они вступят в этот промежуток и никогда более его не покинут. Ясно, что, начиная с этого момента времени, и точка z, содержащаяся между точками x и y, также будет находиться на этом промежутке, не покидая его более никогда. А это и показывает, что постоянное c

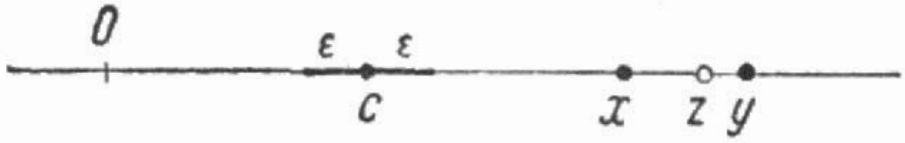


Рис. 38

служит пределом для переменной величины, т. е. что

$$\lim z = c = \lim x = \lim y.$$

Эти три основные теоремы постоянно употребляются в задачах, содержащих отыскание предела той или другой переменной величины. Поэтому эти теоремы имеют самое важное значение.

Формулируя их, мы, понятно, предполагали, что предел каждой переменной существует.

Очевидно, что если одна или несколько из переменных в этих теоремах будут заменены постоянными, то наши рассуждения не теряют силы и вышеприведенные теоремы останутся верными. Действительно, любую постоянную величину законно рассматривать как переменную величину, у которой все ее значения оказываются (случайно) равными между собой. Очевидно, что такая «переменная» величина имеет предел (согласно определению понятия предела), который равен, понятно, этой же самой постоянной величине. Это замечание и делает предыдущие теоремы применимыми также к постоянным величинам.

В качестве примеров чрезвычайно легкой и быстрой приложимости этих основных теорем к фактическому вычислению пределов мы даем здесь вычисление предела многочлена $P(x)$ и рационального выражения $R(x)$, оба *с постоянными коэф-*

фициентами, когда их аргумент x стремится к пределу c, т. е. когда $\lim x = c$.

I. *Предел многочлена $P(x)$ равен значению этого же многочлена от предела, т. е. если* $\lim x = c$, *то*

$$\lim P(x) = P(c).$$

В самом деле, по условию мы имеем

$$P(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Gx + H,$$

где все коэффициенты A, B, ..., G, H суть постоянные числа. Поэтому, когда аргумент x стремится к пределу c, нам остается лишь обратиться к основным теоремам I и II, применение которых нам и даст

$$\lim P(x) = Ac^m + Bc^{m-1} + \ldots + Gc + H = P(c).$$

II. *Предел рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q суть многочлены от x, равен значению этой же функции от предела, при непременном условии, чтобы знаменатель $Q(x)$ в пределе не обращался в нуль, т. е. если* $\lim x = c$, то имеем $\lim R(x) = R(c)$ *при условии, чтобы* $Q(c) \neq 0$.

В самом деле по условию мы имеем

$$R(x) = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Gx + H}{Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + Mx + N} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где все коэффициенты суть постоянные числа. Согласно предыдущему, по причине $\lim x = c$, мы в отдельности имеем $\lim P(x) = P(c)$ и $\lim Q(x) = Q(c)$, *не делая никаких ограничений на предел c.* Но если мы при этом вводим дополнительное требование, чтобы $Q(c)$ не был равен нулю, т. е. чтобы $Q(c) \neq 0$, то тогда становится законным применение основной теоремы III, и мы в этом случае имеем право писать

$$\lim \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim P(x)}{\lim Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Отсюда мы и заключаем, что

$$\lim R(x) = R(c), \text{ при условии } Q(c) \neq 0.$$

Вычисление же пределов $\lim f(x)$ иррациональных или трансцендентных функций $f(x)$, когда $\lim x = c$, представляет большие трудности и требует предварительного развития других теорий.

§ 36. Понятие о бесконечно большом (*бесконечности:* $+\infty$, $-\infty$ и ∞). В математическом анализе встречаются три символа:

$$+\infty, \quad -\infty \text{ и просто } \infty,$$

называемые «*положительной бесконечностью*», «*отрицательной бесконечностью*» и просто «*бесконечностью*».

Эти символы в анализе играют весьма заметную роль, но, к сожалению, само появление их представляется делом весьма деликатным и нередко сопровождается огромной опасностью, потому что влечет за собой у лиц, не приобревших опыта в математических рассуждениях, нескончаемые неясности, иллюзии, недоразумения, парадоксы и очень часто приводит к грубейшим ошибкам при числовых выкладках.

Первоосновой всех этих недоразумений является то бессознательно вкрадывающееся в еще неопытный ум искушение, которое приглашает нас считать эти символы *числами*. Это искушение, по-видимому, столь сильно, что часто приходится слышать вырывающиеся невольно фразы: «возьмем конечное число», «пусть a есть какое-нибудь конечное число» и т. д. А между тем такая квалификация рационального или иррационального числа прилагательным *конечное* является, собственно, бессмысленной и излишней: по самой природе своей всякое без исключения число всегда «конечно», потому что всякое без исключения число a, рациональное или иррациональное, всегда содержится между такими двумя *целыми* числами m и n, из которых одно меньше его, а другое его превосходит:

$$m < a < n;$$

всякое же *целое* число как собрание ограниченного количества единиц — положительных или отрицательных, понятно, всегда является «конечным» числом.

Всякое число, рациональное или иррациональное по самой своей природе, всегда «конечно», и это обстоятельство должно настолько вытекать из его природы, что, собственно, не должно подниматься и речи о прозвании их «конечными»: обычно в жизни никогда не поднимают разговора о вещах, и без того ясных всякому.

Аналогично, всякая постоянная величина есть необходимо «конечная», потому что измеряется рациональным или иррациональным числом.

Бесконечных чисел нет, бесконечных постоянных величин также нет. И если математический анализ вводит свои символы $+\infty$, $-\infty$ и ∞, то вовсе не как некоторые таинственные числа, предназначенные для выражения таких идей, как: «безграничность в пространстве», «вечность во времени» и т. п. Назначение символов $+\infty$, $-\infty$ и ∞ в математическом анализе, так сказать, более прозаическое.

Роль символов $+\infty$, $-\infty$ и ∞ состоит только в указании на то или иное поведение переменных величин, «конечных» во всякий момент времени.

Определение 1. *Переменная величина x называется положительной бесконечно большой, или, короче,* положительной

бесконечностью, *если ее изменение будет иметь следующий характер: x со временем сделается и впредь будет всегда оставаться большей любого, выбранного по произволу положительного числа N (где $N>0$), каким бы большим N ни было, т. е. если осуществится и останется затем всегда в силе неравенство*

$$x>N.$$

В этом случае мы иногда станем говорить, что x «*неограниченно увеличивается*», и будем это символически обозначать в виде условного равенства

$$\lim x=+\infty.$$

Это условное равенство, ради участия в нем знака предела lim, а также еще ради однообразия в произношении с предыдущими обозначениями (когда предел у переменного x действительно имелся), иногда произносят так: «*x приближается к пределу, равному плюс бесконечность*».

Хотя это символическое равенство, $\lim x=+\infty$, и вышеприведенное устное его чтение и представляют практические удобства, однако чересчур сильная привычка к нему может создать теоретическую опасность: может бессознательно усвоиться та мысль, что бесконечность есть какое-то число вроде обычных «конечных» чисел и что оно, стало быть, подчинено действиям арифметики. А такой взгляд на бесконечность, как на постоянное число легко может вызвать у учащегося неправильные представления и повлечь впоследствии даже к ошибкам в вычислениях (особенно при обращении с интегралами между бесконечными пределами) [1].

Учащийся должен хорошо помнить, что бесконечность не есть предел в настоящем смысле (как мы выше его определили), ибо настоящий предел есть число, а бесконечность не есть число: и бесконечно большое и бесконечно малое суть прежде всего величины *переменные*, в каждый момент времени имеющие определенное численное (конечное) значение.

Геометрически бесконечно большая положительная величина x изображается весьма просто: это есть *движущаяся* точка M, перемещающаяся по прямой таким образом, что со временем уйдет

[1] Математическому анализу стоило много времени и труда освободиться от взгляда на бесконечность как на постоянное число. Это очищение анализа вызывается существеннейшими теоретическими соображениями и в настоящий момент может считаться почти законченным. К сожалению, старый взгляд на бесконечность как на постоянное число еще до сих пор имеет следы в уцелевшей прежней терминологии и символизации (вроде цитированного выше), что нередко влечет за собой недоразумения и всегда создает большие педагогические трудности.

вправо за всякую положительную грань N, какую только мы ни выберем, и будет впредь двигаться лишь за этой гранью (рис. 39).

Определение 2. *Переменная величина x называется отрицательной бесконечно большой, или, короче,* отрицательной бесконечностью, *если ее изменение будет иметь следующий характер: x со временем сделается и будет впредь оставаться менее произвольно выбранного отрицательного числа $-N$ (где $N>0$), каким бы большим N ни было нами выбрано, т. е. если осуществится и останется затем всегда в силе неравенство $x<-N$.*

В этом случае мы иногда станем говорить, что x «*неограниченно убывает*»[1], и будем записывать это символически в виде условного равенства

$$\lim x=-\infty.$$

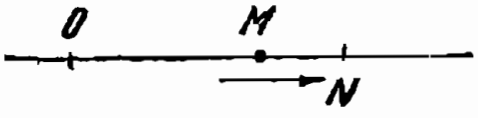


Рис. 39

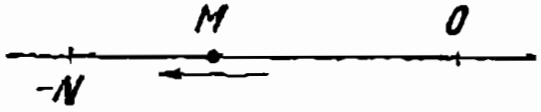


Рис. 40

Это равенство иногда читают так: «*x приближается к пределу, равному минус бесконечность*».

Геометрически бесконечно большая отрицательная величина x изобразится в виде движущейся точки M, в некоторый момент уходящей *влево* за всякую грань — N и впредь там остающейся (рис. 40).

Наконец, *если переменная величина x меняет свой знак от времени до времени, но его абсолютная величина $|x|$ неограниченно увеличивается, тогда мы просто называем переменную величину x бесконечно большой или скажем, что x стремится к бесконечности,* и напишем

$$\lim x=\infty.$$

Геометрически бесконечно большая величина x изображается просто в виде точки M, безгранично удаляющейся от начала координат O, но могущей *двигаться прыжками* так, что точка M оказывается попеременно то по одну сторону от начала координат O, то по другую его сторону.

---

[1] Учащийся не должен здесь быть введен в заблуждение некоторым недостатком обычной речи. Мы здесь говорим, что x «неограниченно *убывает*», но это вовсе не значит, что x «мало» по абсолютной величине, т. е. мало в *арифметическом* смысле. По абсолютной величине x здесь громадно, превышает миллионы и миллионы единиц, но оно «мало» в *алгебраическом* смысле, потому что является *колоссальным отрицательным* числом. Поэтому слово «убывает» надо здесь понимать в *алгебраическом* смысле.

Все оговорки, сделанные выше, сохраняются и здесь: ∞ (бесконечность) не есть число, а есть не что иное, как *способ называть* такое изменение переменной величины x, в силу которого она неограниченно увеличивается по абсолютной величине.

§ 37. Связь бесконечно большого и бесконечно малого. Связь эта самая тесная. Пусть x есть бесконечно большое, т. е. $\lim x = \infty$. Разделим единицу на x и полученную таким образом дробь обозначим через α:

$$\alpha = \frac{1}{x}.$$

Легко видеть, что α есть *бесконечно малая величина.*

Действительно, зададимся каким-нибудь произвольным положительным числом ε. Так как x есть бесконечно большая переменная величина, то наступит такой момент времени, начиная с которого мы все время будем иметь неравенство $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда мы заключаем на основании равенства

$$|\alpha| = \frac{1}{|x|},$$

что

$$|\alpha| < 1 : \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon,$$

т. е. $|\alpha| < \varepsilon$. А это неравенство и характеризует бесконечно малую величину, что и требовалось доказать.

Обратно, если α есть какая-нибудь бесконечно малая величина, никогда не обращающаяся в нуль, то *величина x, определенная равенством*

$$x = \frac{1}{\alpha},$$

есть бесконечно большая.

Действительно, пусть N есть произвольно взятое большое положительное число. Обозначим через ε положительное количество $\frac{1}{N}$, т. е. положим $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Так как α есть бесконечно малое, то, начиная с некоторого момента, мы будем все время иметь неравенство $|\alpha| < \varepsilon$. Значит, в силу равенства

$$|x| = \frac{1}{|\alpha|}$$

мы, начиная с этого момента времени, будем постоянно иметь неравенство

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N,$$

т. е. $|x|>N$. А это неравенство как раз характеризует бесконечно большую величину, что и требовалось доказать.

Итак, *единица, деленная на бесконечно большое, есть бесконечно малое; единица, деленная на бесконечно малое, не обращающееся никогда в нуль, есть бесконечно большое.*

Это обычно символически записывают в виде *условных* равенств

$$\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{0}=\infty,$$

относительно которых читатель должен помнить, что *эти равенства не настоящие*, так как бесконечность не есть число, а также потому, что на нуль делить нельзя. Только так и надо понимать эти «равенства», которые некоторые авторы записывают даже в виде

$$\infty^{-1}=0 \text{ и } 0^{-1}=\infty,$$

пользуясь просто тем соглашением, делаемым в элементах алгебры, в силу которого дробь $\frac{1}{\alpha}$ можно написать в виде α^{-1}.

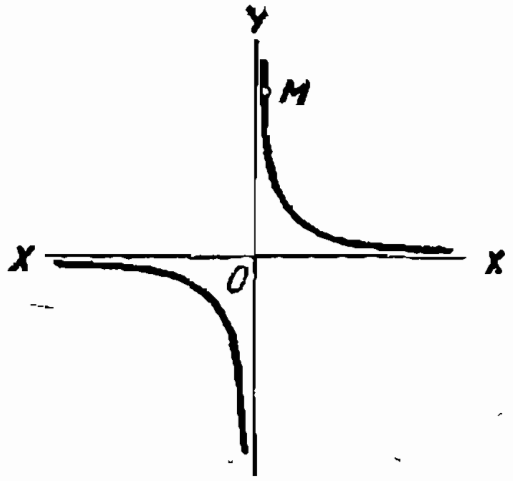


Рис. 41

Если α есть *положительное бесконечно малое*, тогда $\frac{1}{\alpha}$ есть *положительная бесконечно большая* величина; если α есть *отрицательное бесконечно малое, тогда* $\frac{1}{\alpha}$ есть *отрицательная бесконечно большая* величина; если α меняет свой знак, $\frac{1}{\alpha}$ тоже изменяет знак.

Учащийся очень легко освоится с этим, когда изобразит функцию

$$y=\frac{1}{x}$$

в виде кривой (рис. 41).

ЗАДАЧИ

Доказать каждое из следующих утверждений:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x)=12$.
2. $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2-9}{z+2}=-\dfrac{5}{4}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{3x}=\dfrac{1}{3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2}=-\dfrac{2}{5}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}=-\dfrac{2}{7}$.
6. $\lim\limits_{h\to 0}(4y^3+3hy^2-2h^2)=4y^3$.

ГЛАВА V

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 38. Понятие непрерывности функции. Это понятие, кажущееся вполне ясным, в действительности является сложным и очень тонким.

Простейший вид его есть *непрерывность функции* $y=f(x)$ *в заданной точке* a. Чтобы подойти к нему, мы сначала отметим, что эта непрерывность вызывает в нас представление об «очень слабом» отклонении величины $f(x)$ от первоначального значения $f(a)$ при «очень малом» удалении аргумента x от a. Это обстоятельство выражают еще иначе, говоря, что численное значение функции $f(x)$ «нечувствительно мало» отличается от $f(a)$, когда величина x аргумента «достаточно близка» к a.

Все эти фразы, смысл которых, разумеется, один и тот же, наводят на мысль сказать: функция $f(x)$ непрерывна в данной точке a, если разность $f(x)-f(a)$ «очень мала» по абсолютной величине всякий раз, как разность $x-a$ «очень мала» по абсолютной величине.

Такое понимание непрерывности является почти правильным, но здесь помехой служит некоторая относительность и субъективность представления об «очень малой» величине: один сантиметр есть, разумеется, очень малая величина для движущегося на полном ходу поезда, который ее пробежит в незначительную долю секунды; для движущегося микроба это очень большая величина, которую он может пройти лишь в течение ряда лет.

§ 39. Определение непрерывности функции в точке. Чтобы избавиться от указанной относительности и сделать определение вполне математическим, надо понимать непрерывность так.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной в точке* a, *если неравенство* $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, где ε есть заранее взятое какое-нибудь положительное число, *делается заведомо верным всякий раз, как соблюдено неравенство* $|x-a|<\eta$, где η есть некоторое положительное специально подобранное число, величина которого обусловливается ранее взятым числом ε.

7. $\lim\limits_{h\to\infty}(2x^2-3hx+h^2)=+\infty$.

8. $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(2x+k)^2-3kx^2}{x(2x+k)}=2$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{x^2+2x-7}=3$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{6-5x^2}=0$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx+c}{dx^2+ex+f}=\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{bx^3+ex+f}=0$.

Следовательно, непрерывность функции $f(x)$ в точке a математически выражается *двумя основными неравенствами:*

$$\left.\begin{array}{ll} |f(x)-f(a)|<\varepsilon & \text{(I)} \\ |x-a|<\eta & \text{(II)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{основные} \\ \text{неравенства,} \end{array}$$

из которых первое (I) *должно оказаться следствием второго* (II).

Учащийся легко найдет смысл каждого из этих неравенств. Неравенство (I) говорит о том, что численная величина $f(x)$ функции «сколь угодно мало» отличается от величины $f(a)$ функции в самой точке a. Неравенство же (II) говорит о том, что аргумент x является «достаточно близким» к числу a. И, наконец, само требование, чтобы неравенство (I) делалось верным, когда удовлетворяется неравенство (II), как раз и говорит о том, что численное значение $f(x)$ функции «сколь угодно мало» отличается от $f(a)$ при «достаточной близости» аргумента x к a.

Определение. *Функция $f(x)$, не имеющая непрерывности в точке a, называется разрывной в этой точке.*

§ 40. Геометрическое изображение непрерывности функции в точке. Мы уже знаем (см. § 25), что всякая функция $y=f(x)$ геометрически изображается в виде кривой линии. Чтобы при этом изобразить геометрически непрерывность этой функции в заданной точке a, нужно только перевести на язык геометрии оба наши основные неравенства (I) и (II).

Первое основное неравенство (I), где мы вместо $f(x)$ пишем просто букву y

$$|y-f(a)|<\varepsilon \qquad \text{(I)}$$

выделяет на плоскости XOY *горизонтальную* полоску шириной 2ε и имеющую серединной линией прямую $y=f(a)$, проведенную через заданную точку $M[a,\ f(a)]$ кривой параллельно оси абсцисс OX. Действительно, только внутри этой полоски и содержатся точки, ордината y которых уклоняется от числа $f(a)$ меньше, чем на ε (рис. 42).

Второе основное неравенство (II)

$$|x-a|<\eta \qquad \text{(II)}$$

выделяет на плоскости XOY *вертикальную* полосу шириной 2η и имеющую серединной линией прямую $x=a$, проведенную через заданную точку M кривой параллельно оси ординат OY. Действительно, только внутри этой полосы и содержатся точки, абсцисса x которых уклоняется от a меньше, чем на η (рис. 43).

Поэтому *оба основные неравенства* (I) и (II) выделяют на плоскости XOY *маленький прямоугольник* R, являющийся пересечением обеих указанных полосок, горизонтальной и вертикаль-

ной. Высота этого прямоугольника произвольно мала, будучи равна 2ε; его основание равно положительному числу 2η. А центром его служит как раз заданная точка M нашей кривой $y=f(x)$.

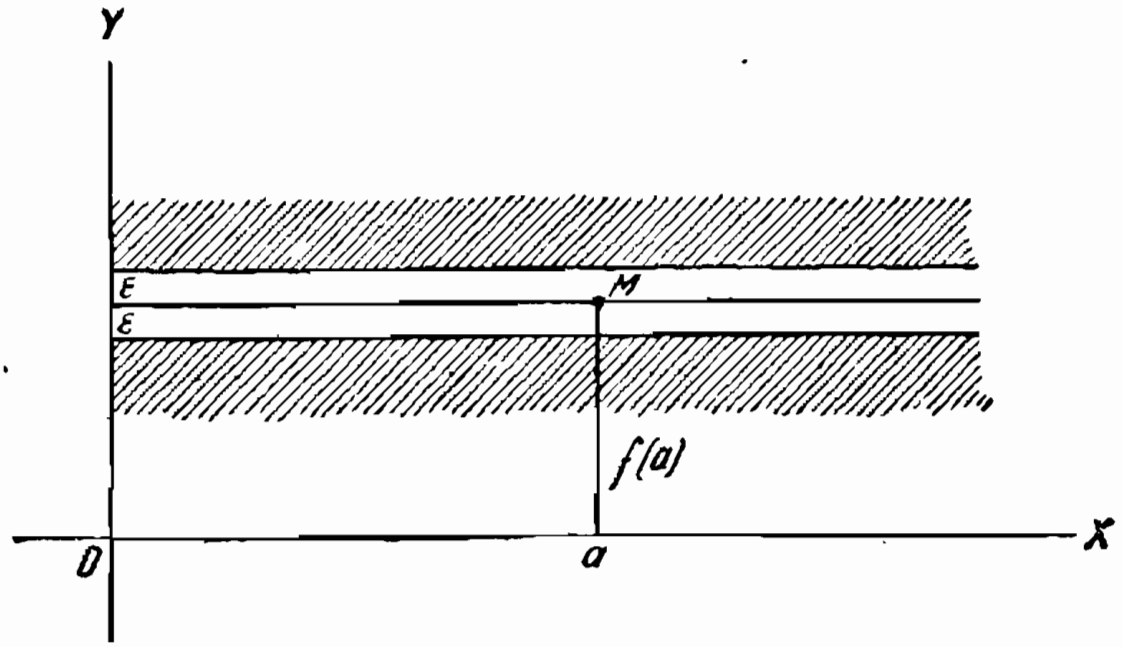


Рис. 42

Существенно то, что *все течение кривой $y=f(x)$ совершается внутри этого маленького прямоугольника R, когда аргумент x уклоняется от a меньше, чем на η*. В этом и состоит геометриче-

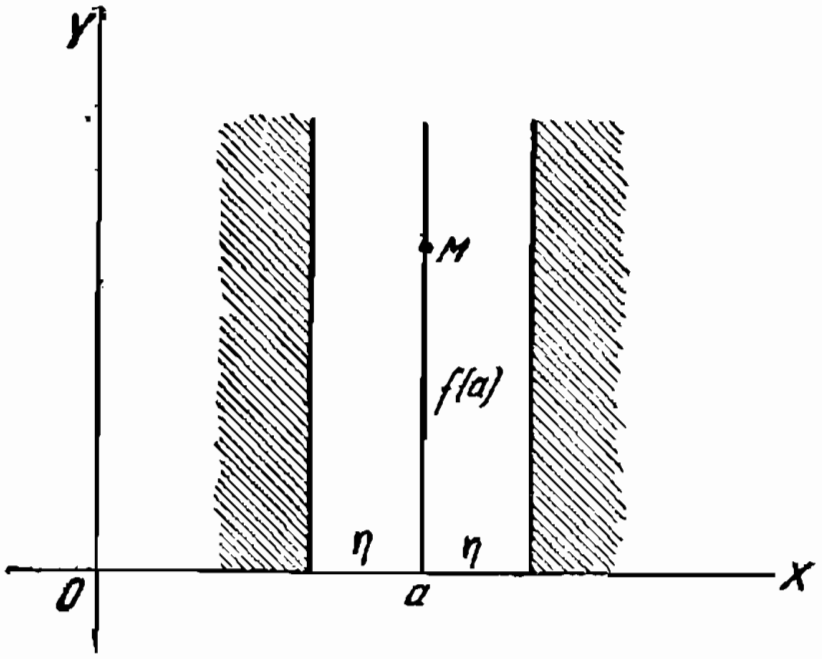


Рис. 43

ское изображение непрерывности функции $f(x)$ в точке a (рис. 44). Таким образом, *кривая $y=f(x)$ непрерывна в заданной ее точке $M[a, f(a)]$, когда эту точку можно сделать центром такого*

прямоугольника R со сторонами, параллельными осям координат XOY, и с произвольно малой высотой 2ε, что кривая содержится внутри него, когда x описывает его проекцию на ось OX.

Но как будет вести себя кривая $y = f(x)$, попав внутрь прямоугольника R при выбранной произвольно малой его высоте 2ε,

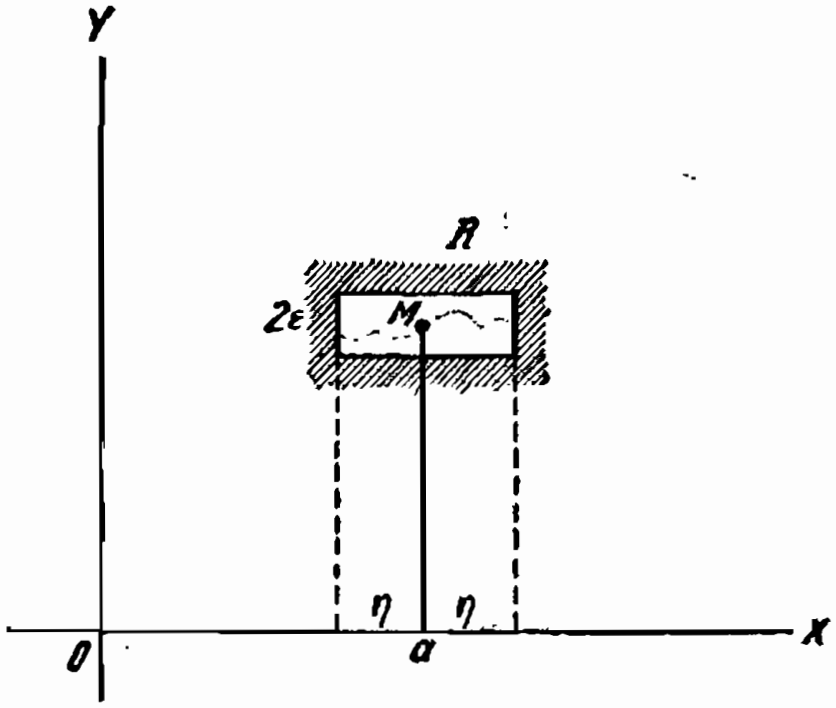


Рис. 44

это совершенно безразлично, ибо нисколько не влияет на непрерывность функции $f(x)$ в рассматриваемой точке a.

§ 41. Непрерывность в точке: двусторонняя и односторонняя. При определении непрерывности в точке a функции $f(x)$ молчаливо предполагалось, что эта функция была определена на всей оси OX или, по крайней мере, на каком-нибудь отрезке $[c, d]$, содержащем точку a *внутри*. Это предположение делается



Рис. 45

в целях учета *всяких* значений аргумента x: как *бóльших* числа a, когда $x > a$, так и *меньших* его, когда $x < a$. Поэтому во втором основном неравенстве (II) аргумент x предполагается безразлично: бóльшим или меньшим числа a, лишь бы расстояние обеих точек x и a было меньшим, чем постоянное η.

Следовательно, при осуществлении второго основного неравенства (II) совершенно безразлично, с какой именно стороны точки a лежит точка x: справа или слева.

Определенная таким образом непрерывность функции $f(x)$ в точке a называется *непрерывностью обыкновенной* или *двусторонней* в точке a.

Но если осуществление второго основного неравенства (I) предполагается только по одну сторону точки a, справа или слева, причем такое осуществление его по-прежнему вызывает верность первого основного неравенства (I), то такая непрерывность функции $f(x)$ называется *непрерывностью односторонней*: она правосторонняя, когда точка x находится направо от точки a или совпадает с ней, и она левосторонняя, когда точка x лежит налево от точки a или совпадает с ней.

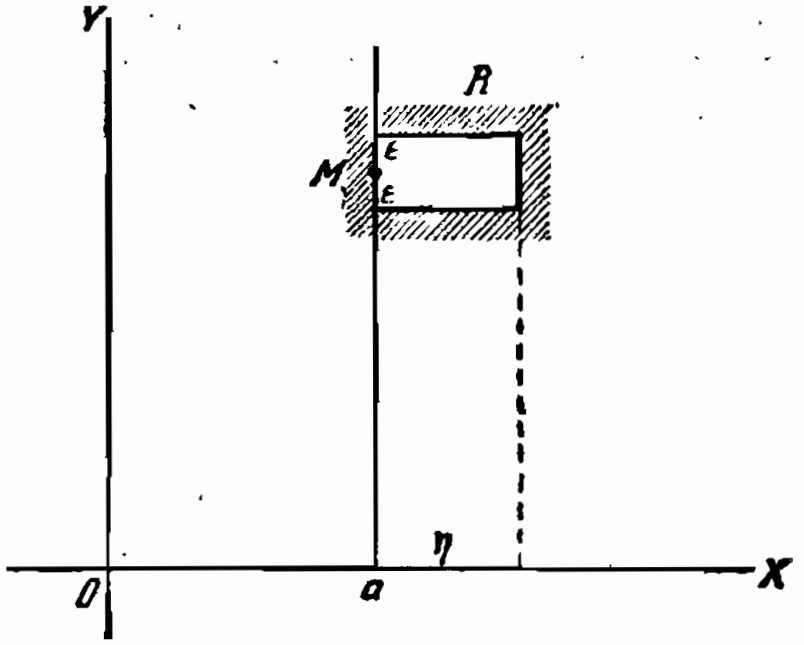


Рис. 46

Односторонняя непрерывность геометрически изображается таким же образом, как и непрерывность обыкновенная: по-прежнему кривая должна содержаться внутри прямоугольника R, когда точка x описывает его проекцию на ось OX. Только этот прямоугольник, имеющий по-прежнему высоту 2ε, теперь обязан иметь заданную точку $M[a, f(a)]$ кривой $y=f(x)$ в середине левой стороны для случая непрерывности *правосторонней* (рис. 46) и в середине правой стороны для случая непрерывности *левосторонней* (рис. 47).

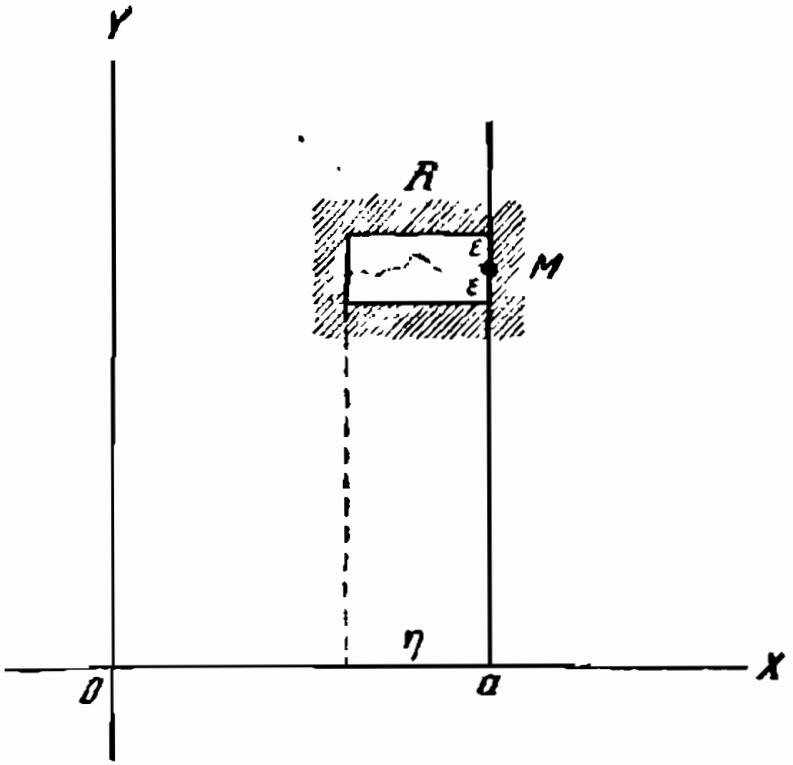


Рис. 47

Ясно, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a в обычном смысле, то она непрерывна в точке a одновременно: и справа, и слева. В этом случае прямоугольник R просто разрезается прямой $x=a$ на две половины, характеризующие порознь правостороннюю непрерывность и левостороннюю непрерывность. Ясно, и обратное тоже будет верным: если функция $f(x)$ непрерывна в точке a одновременно и справа и слева, то она непрерывна в обыкновенном смысле в этой точке. Чтобы убедиться, достаточно просто склеить оба прямоугольника R, левый и правый,

уменьшив сначала основание более длинного из них, если они были до этого не равны, в целях сделать их равными.

Пример. Функция $f(x)$, равная -1 для x отрицательного и равная $+1$ для всех остальных значений аргумента x, очевидно непрерывна справа в точке $x=0$, но слева в точке $x=0$ она уже не будет непрерывной, потому

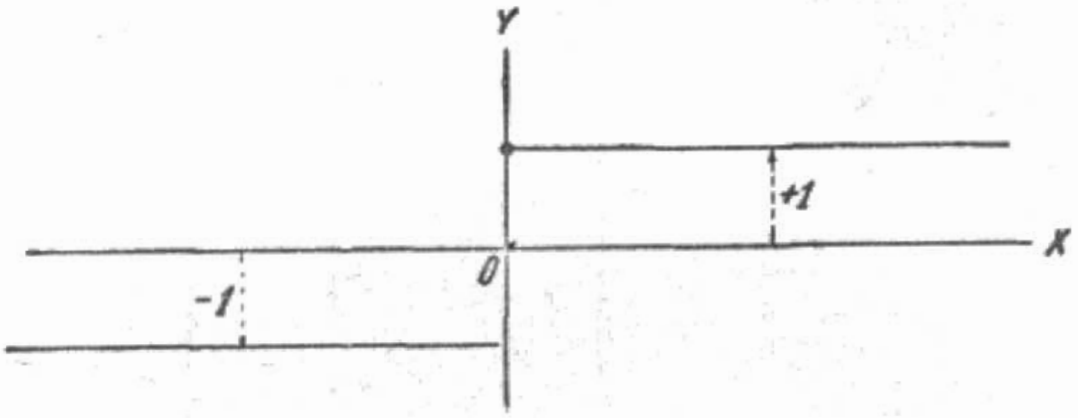


Рис. 48

что мы имеем $[f(x)-f(0)]=2$ для всякого x, меньшего нуля, и, значит, основное неравенство (I) уже неверно для x отрицательного.

§ 42. Важнейшие свойства функций, непрерывных в точке.

Непрерывность функции $f(x)$ в точке a вполне равносильна стремлению численного значения $f(x)$ к пределу $f(a)$, когда аргумент x стремится к пределу a любым способом.

Доказательство

Самая равносильность заставляет разделить рассуждение на две части. *Во-первых*, надо предположить функцию $f(x)$ непрерывной в точке a и доказать, что переменная величина $f(x)$ стремится к пределу $f(a)$, когда x стремится к пределу a каким бы то ни было способом. *Во-вторых*, надо предположить численное значение $f(x)$ стремящимся к пределу $f(a)$, когда x стремится к пределу a любым способом, и доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Первая часть. Когда переменное x стремится к пределу a, тогда обязательно удовлетворяется второе основное неравенство (II), начиная с некоторого момента времени. А так как функция $f(x)$ предположена непрерывной в точке a, то поэтому с этого же момента времени обязано быть верным и первое основное неравенство (I), которое и говорит о том, что $f(a)$ есть предел переменной величины $f(x)$.

Вторая часть. Так как численное значение $f(x)$ стремится к пределу $f(a)$ при любом способе аргумента x приближается к пределу a, то за способ приближения мы имеем право взять также и *монотонное непрерывное* приближение x к точке a

с той или другой ее стороны, т. е. *такое ее движение*, при котором с бесконечным течением времени точка x безгранично приближается к точке a, двигаясь к ней *постоянно в одну и ту же сторону, не делая при этом никаких скачков* и *никогда не вступая в самую точку* a. Отсюда же следует, что первое основное неравенство (I) заведомо будет верным, начиная с некоторого момента времени, т. е. при достаточной близости точки x к пределу a и, значит, при соблюдении второго основного неравенства (II). А это и говорит о том, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, ч. т. д.

Примечание. Из самого доказательства свойства I следует, что *односторонняя* непрерывность функции $f(x)$ в точке a равносильна стремлению численного значения $f(x)$ к пределу $f(a)$, когда аргумент x стремится к точке a *любым образом с той стороны, с какой предполагается односторонняя непрерывность в точке* a.

Обыкновенная же (двусторонняя) непрерывность равносильна стремлению функции $f(x)$ к пределу $f(a)$ *любым образом с обеих сторон*.

Доказанное важное свойство 1 функций, непрерывных в точке, можно формулировать еще и так:

непрерывность функции $f(x)$ *в точке* a *равносильна системе двух основных равенств*

$$\left.\begin{array}{ll}\lim f(x)=f(a) & \text{(I)}\\ \lim x=a & \text{(II)}\end{array}\right\}\ \text{основные равенства,}$$

из которых первое обязано быть верным или при любом *стремлении аргумента* x *к пределу* a, *или, по крайней мере, при монотонном без скачков стремлении его к* a.

Законность такой формулировки прямо вытекает из самого доказательства свойства 1.

Примечание. Не лишне указать на то, что оговорка: «*без скачков*» чрезвычайно существенна, ибо верность первого равенства (I) при монотонном *скачущем* стремлении аргумента x к пределу a нисколько не обеспечивает непрерывности функции $f(x)$ в точке a.

Пример. Возьмем функцию $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. Она определена для всякого x, кроме $x=0$, где она не имеет никакого численного значения. Поэтому ничто нам не мешает условиться считать, что $f(0)=0$.

Если теперь n есть целое положительное число, и если мы увеличиваем число n безгранично, то аргумент $x=\dfrac{1}{2\pi n}$ является положительной переменной величиной, стремящейся к пределу 0 монотонно, а именно: убывая. *Поэтому мы имеем удовлетворенным второе основное равенство* $\lim x=0$ (II) *монотонным образом*. С другой стороны, мы имеем для нашего аргумента x очевидное тождество $f(x)=0$ и, значит, имеем в пределе $\lim f(x)=0$. *Поэтому, приняв* во внимание, что $f(0)=0$, *мы имеем верным и первое основное равенство* $\lim f(x)=f(0)$. (I)

Таким образом, оба основные равенства (I) и (II) удовлетворены, причем второе даже и монотонным образом. И, однако, *точка* $x=0$ *заведомо*

есть точка разрыва, и притом справа и слева, *для рассматриваемой функции* $f(x)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заставить аргумент x убывать до нуля непрерывно. В этом случае дробь $\frac{1}{x}$ непрерывно возрастает, уходя в положительную бесконечность. Поэтому рассматриваемая функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, будучи синусом непрерывно увеличивающегося угла $\frac{1}{x}$, должна совершать, по мере приближения x к нулю, бесконечно много размахов, колеблясь от -1 до $+1$ и, значит, не может стремиться ни к какому пределу, когда аргумент x *непрерывно* уменьшается, стремясь к нулю. Таким образом, функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ *разрывна справа* в точке $x=0$. Но она *разрывна и слева* в этой точке, ибо с переменой знака аргументом x функция $f(x)$ только лишь изменит свой знак, не утратив своего колебательного (от -1 до $+1$) характера.

Объяснение же того явления, почему соблюдение обоих основных равенств (I) и (II) не вызывает непрерывности функции, состоит в том, что употреблявшийся там аргумент $x=\frac{1}{2\pi n}$, при стремлении целого n к $+\infty$ или к $-\infty$, хотя и монотонно стремится к нулю, но *скачками*, которые сами по себе никакой непрерывности для функции обеспечить не могут.

Следствие 1. *Непрерывная функция позволяет переходить к пределу под ее знаком, т. е. делает законным равенство:*

$$\lim f(x)=f(\lim x). \qquad \text{(III)}$$

Это равенсто говорит нам о том, что для вычисления предела непрерывной функции достаточно вычислить эту функцию для самого предела аргумента.

Чтобы доказать это, заменим в первом основном равенстве (I) букву a через ее выражение из второго основного равенства (II); тогда мы и получим желаемое равенство (III).

Краткость и выразительность равенства (III) делает его весьма привлекательным и внушает мысль воспользоваться им для самого определения непрерывности функции в точке, вместо прежней системы двух основных равенств (I) и (II). Но надо иметь в виду, что равенство (III) не вполне ясное, ибо приходится указывать дополнительно, что функция f не вообще непрерывна, а что она непрерывна именно в точке $\lim x$ и что при этом x стремится к точке $\lim x$ каким угодно способом. Но с такими разъяснениями равенство (III) становится слишком громоздким и утрачивает выгоду своей кажущейся краткости. Поэтому гораздо более предпочтительна система двух основных равенств (I) и (II).

Следствие 2. Обращаясь к § 35, мы видим, что там основные равенства (I) и (II) были доказаны для многочленов и рациональных функций, при условии необращения в нуль знаменателя. Отсюда мы заключаем, что *всякий многочлен* $P(x)$ *с постоянными коэффициентами*

$$P(x)=Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Gx+H$$

есть всюду непрерывная функция и что *всякая рациональная функция* $R(x)$ с постоянными коэффициентами

$$R(x)=\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Gx+H}{Kx^n+Lx^{n-1}+\ldots+Mx+N}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

есть непрерывная функция в каждой точке a, исключая значения a аргумента x, обращающих в нуль знаменатель, т. е. корней уравнения $Q(x)=0$; всех этих корней имеется не больше, чем n, и в них иногда случается нарушение непрерывности функции $R(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\frac{1}{x-1}$ непрерывна всюду, кроме точки $x=1$. В этой точке непрерывности уже нет, ибо функция не имеет предела при безграничном приближении x к 1, так как ее численное значение уходит в бесконечность.

Хотя непрерывность функций представляет собой явление общего характера, однако для других (т. е. для нерациональных) функций оно доказывается гораздо труднее и требует предварительной выработки особого *правила испытания на непрерывность,* которое будет дано в следующем параграфе.

Свойство 2 (арифметическая теорема о непрерывности). *Складывая, вычитая, умножая и деля две непрерывные функции в какой-либо точке a, мы получаем в результате опять непрерывную функцию в этой точке,* если только знаменатель частного не обращается в ней в нуль; в этом последнем случае непрерывность в точке a, вообще, уже нарушается.

Доказательство

Мы знаем уже, что непрерывность двух функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке a равносильна системе равенств $\lim u(x)=u(a)$ и $\lim v(x)=v(a)$, когда имеем $\lim x=a$. Поэтому, в силу основных теорем о пределах (см. § 40), мы имеем равенства

$$\lim[u(x)+v(x)]=u(a)+v(a),\quad \lim[u(x)-v(x)]=u(a)-v(a),$$

$$\lim[u(x)\cdot v(x)]=u(a)\cdot v(a),\quad \lim\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(a)}{v(a)},$$

если $v(a)\neq 0$. Так как при этом аргумент x может стремиться к a любым способом, то рассматриваемая арифметическая теорема о непрерывности доказана.

Заметим, что теорема имеет силу не только для суммы и произведения *двух* непрерывных в точке a функций, но и для суммы и произведения *трех, четырех* и вообще *любого неизменяющегося* числа функций. Ибо с помощью скобок, всегда возможно, например, сумму и произведение трех функций представить как сумму и произведение двух функций:

$$u(x)-v(x)+w(x)=[u(x)-v(x)]+w(x),$$
$$u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)=[u(x)\cdot v(x)]\cdot w(x).$$

Но теорема может стать и *ложной*, если число слагаемых или множителей *не остается ограниченным*, но, например, безгранично возрастает.

Следствие 3 (непрерывность функции от функции). *Функция от функции* $\varphi[f(x)]$ *непрерывна в точке* a, *если* внутренняя *функция* $f(x)$ *непрерывна* в a, и *если* наружная *функция* φ *непрерывна* в точке $f(a)$.

Доказательство

Так как внутренняя функция $f(x)$ непрерывна в точке a, мы имеем $\lim f(x)=f(a)$, когда $\lim x=a$, причем x может стремиться к a любым способом. С другой стороны, так как наружная функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $f(a)$, мы имеем $\lim \varphi(y)=\varphi[f(a)]$, когда $\lim y=f(a)$. Следовательно, мы имеем:

$$\lim_{x\to a}\varphi[f(x)]=\lim_{y\to f(a)}[\varphi(y)]=\varphi[f(a)].$$

И так как x может стремиться к a любым способом, то непрерывность функции от функции $\varphi[f(x)]$ в точке a доказана.

Говоря образно, непрерывность функции от функции $\varphi[f(x)]$ возникает под действием двух отдельных непрерывностей: непрерывности внутренней функции f и непрерывности наружной функции φ.

Точно так же, многократная функция от функции, например, $\phi\{\varphi[f(x)]\}$, непрерывна в точке a, если в точке a непрерывна внутренняя функция $f(x)$, если в точке $f(a)$ непрерывна промежуточная функция φ и если в точке $\varphi[f(a)]$ непрерывна наружная функция ϕ. *И так далее.*

§ 43. Правило испытания на непрерывность. В целях выработки этого правила напишем сначала систему двух основных равенств, выражающую непрерывность функции $f(x)$ в точке a:

$$\left.\begin{array}{ll}\lim f(x)=f(a) & \text{(I)}\\ \lim x=a & \text{(II)}\end{array}\right\}\ \text{основные равенства}$$

так: первое в виде $\lim[f(x)-f(a)]=0$ и второе в виде $\lim(x-a)=0$; на это мы имеем право, ибо $f(a)$ и a суть величины постоянные, и, значит, пределы их равны им самим.

Чтобы пойти дальше, обозначим через h разность $x-a$, т. е. напишем $x-a=h$. Отсюда имеем $x=a+h$. Это позволяет переписать предыдущие равенства в виде:

$$\lim[f(a+h)-f(a)]=0, \qquad (\text{I}^*)$$
$$\lim h=0. \qquad (\text{II}^*)$$

Легко дать словесную формулировку написанной системе равенств. Для этого будем рассматривать число a как *старое* значение аргумента, а букву x — как *новое* его значение. В этих условиях разность $x-a=h$ явится, очевидно, *приращением аргумента,* а разность $f(a+h)-f(a)$ *приращением* функции (см. § 24), вызванным приращением аргумента $\Delta x=h$.

Ясно теперь, что предыдущая система равенств (I*) и (II*) должна читаться так:

непрерывность функции $f(x)$ в точке a равносильна утверждению, что приращение $f(a+h)-f(a)$ функции делается величиной бесконечно малой, когда приращение h аргумента становится бесконечно малым.

Из системы двух равенств (I*) и (II*) легко выводится важнейшее практическое правило испытания на непрерывность. Но только для целей практики употребляют обычно другие обозначения, руководясь полезным в практике принципом:

производить под знаком f функции $y=f(x)$ как можно меньше перемен.

Поэтому вместо буквы a оставляют прежнюю букву x, зато вместо буквы h пишут символ Δx приращения аргумента. Вследствие этого система равенств (I*) и (II*) принимает вид:

$$\lim[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim\Delta y=0;$$

$$\lim\Delta x=0,$$

откуда и вытекает:

Правило испытания на непрерывность

Первый шаг. *В функцию $f(x)$ вместо x подставляем $x+\Delta x$, что дает нам новое значение $f(x+\Delta x)$ функции.*

Второй шаг. *Вычитаем старое значение $f(x)$ функции из ее нового значения $f(x+\Delta x)$ и таким образом находим приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.*

Третий шаг. *Ищем предел найденного выражения*

$$f(x+\Delta x)-f(x),$$

рассматривая букву x как постоянное *и делая Δx бесконечно умаляющимся. Если получим $\lim\Delta y=0$ для точки x, то функция $f(x)$* непрерывна в *этой точке.*

Учащийся должен вполне освоиться с этим правилом, прилагая его к большому числу примеров.

Пример. Испытать непрерывность функции $\sin x$.

Решение. Полагаем $y=\sin x$.

Первый шаг.

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x).$$

Второй шаг.

$$\begin{aligned} y+\Delta y &= \sin(x+\Delta x)\\ -y &= \sin x\\ \hline \Delta y &= \sin(x+\Delta x)-\sin x. \end{aligned}$$

Вспомнив из тригонометрии, что

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2},$$

мы (полагая $a=x+\Delta x$ и $b=x$) имеем:

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Третий шаг. Делаем Δx бесконечно умаляющимся. Тогда, очевидно, и $\sin\frac{\Delta x}{2}$ будет также бесконечно умаляющимся. Так как оба другие множителя: 2 и $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ суть величины *ограниченные*, а «произведение ограниченной величины на бесконечно малое есть опять бесконечно малое» (§ 34, свойство 2) то видим,

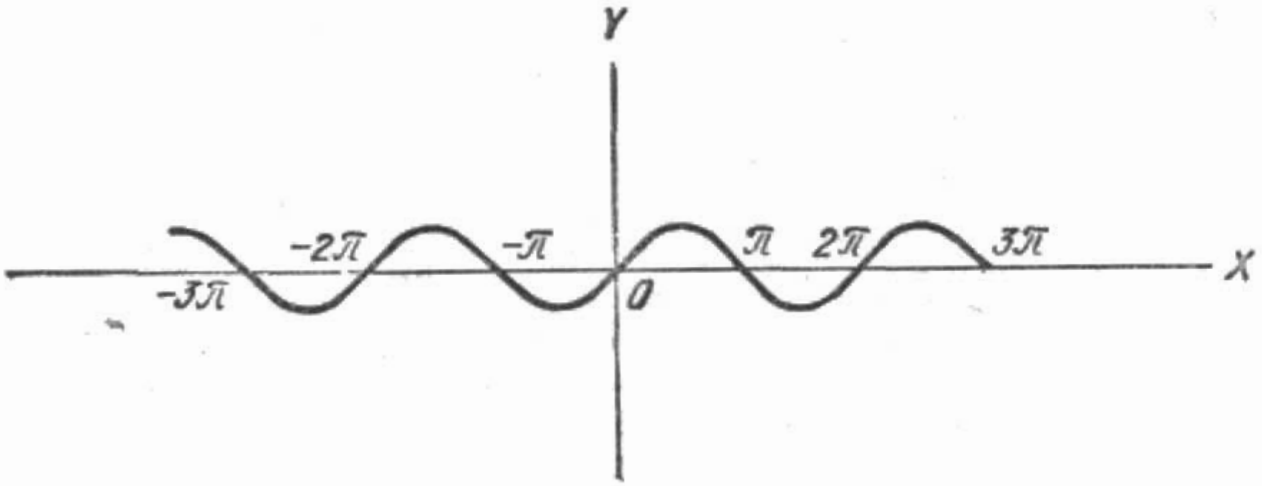


Рис. 49

что $\lim\Delta y=0$. Поэтому функция $\sin x$ непрерывна во всякой точке x, как это можно видеть из рисунка 49.

Заметим, что теперь *без всяких вычислений* можно утверждать непрерывность функции $\cos x$ во всякой точке x, ибо $\cos x$ можно написать в виде $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, а по теореме о непрерывности функции от функции это есть непрерывная функция во всякой точке x.

Отсюда следует общая непрерывность *всех* основных тригонометрических функций $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, $\sec x$ и $\operatorname{csc}x$, ибо соответствующие выражения их через синус и косинус: $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\cos x}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\sin x}$ показывают, что непрерывность

их может перестать существовать только в случае уничтожения знаменателя, т. е. для тангенса и секанса лишь в точках, где имеем $\cos x = 0$, и для котангенса и косеканса лишь в точках, где $\sin x = 0$. Значит, $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ могут стать разрывными лишь для $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{csc} x$ — лишь для $x = n\pi$; здесь n есть число *целое*.

§ 44. Свойства функций, непрерывных на отрезке. *Основное определение. Функция $f(x)$, определенная на каком-либо отрезке $[a, b]$, называется непрерывной на этом отрезке, когда она непрерывна во всякой его точке, включая концы.*

Так как функция $f(x)$ может совсем не существовать вне отрезка $[a, b]$, то непрерывность этой функции в его концах подразумевается *односторонняя:* правосторонняя в точке a и левосторонняя в точке b.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом исключительно важных свойств, из которых мы укажем три самые главные.

В крупном шрифте мы даем лишь *описание* этих трех свойств, не пытаясь дать доказательств их, ибо хотя свойства эти и выводятся логически из самого определения непрерывности на отрезке, однако вывод этот крайне труден и основан на одном специальном принципе, с которым учащийся дальше не будет встречаться.

В мелком шрифте *в целях научной необходимости* мы даем эти доказательства, но рекомендуем учащемуся при первом чтении пропустить их и рассматривать сказанные свойства *как очевидные,* по крайней мере для таких непрерывных функций, которые имеют *геометрическое* или *механическое* (кинематическое) происхождение.

Свойство 1. *Среди численных значений, принимаемых на отрезке непрерывной на нем функцией, всегда имеется как* самое большое, *так и* самое малое *значение.*

Геометрически это означает, что непрерывная кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ всегда имеет и *самую большую* ординату $f(c) = M$ и *самую малую* ординату $f(d) = m$, где c и d суть две надлежащие точки этого отрезка. Поэтому все течение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ остается сжатым между этими двумя числами M и m, т. е. имеем:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

какова бы ни была точка x отрезка $[a, b]$ (рис. 50).

Отсюда следует, что непрерывная функция на отрезке не может уходить в бесконечность (ни в $+\infty$, ни в $-\infty$), ибо *все* ее течение на *целом* отрезке должно быть ограниченным, так как *все* численные значения рассматриваемой функции $f(x)$,

которые она может принимать на этом отрезке, должны покоиться на отрезке $[m, M]$ оси ординат OY. Заметим, что этот отрезок нельзя уменьшить, ибо его концы m и M принимаются функцией.

Свойство. Непрерывная функция на отрезке, изменяющая

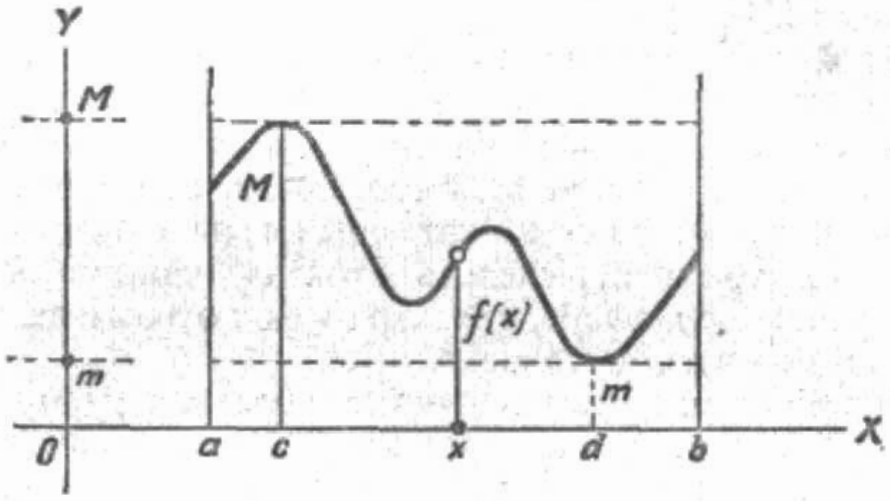


Рис. 50

свой знак, проходит через нуль; *непрерывная функция на отрезке, с наибольшей величиной M и с наименьшей величиной m, принимает на этом отрезке* любое *промежуточное значение L,* где $m<L<M$.

Первая половина этого свойства означает, что непрерывная кривая $y=f(x)$, соединяющая две точки A и B, расположенные по разные стороны абсцисс OX, непременно должна *пересечь* эту ось в некоторой промежуточной точке C (рис. 51).

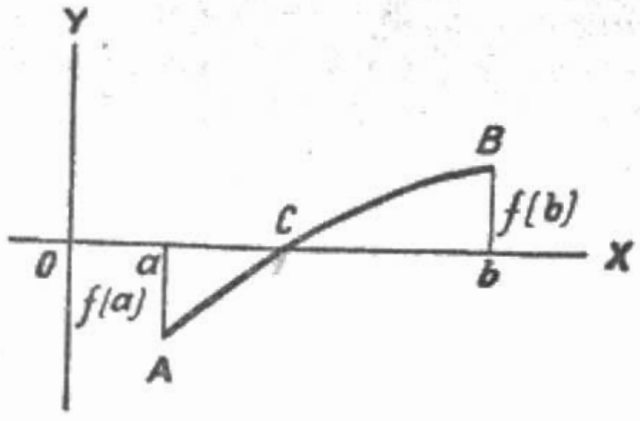


Рис. 51

Вторая половина этого свойства является, разумеется, предложением более общим. Однако она моментально сводится на первую часть. В самом деле, возьмем функцию $\varphi(x)=f(x)-L$. Ясно, что она также непрерывна на отрезке $[a, b]$. Но в точке $C(c, 0)$, где $f(c)=M$, мы имеем: $\varphi(c)=M-L>0$, а в точке d, где $f(c)=m$, мы имеем: $\varphi(d)=m-L<0$. Значит, $\varphi(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$. Поэтому, в силу первой половины рассматриваемого свойства, имеется на этом отрезке такая точка ξ, что $\varphi(\xi)=0$. А это и означает, что имеем $f(\xi)=L$, чем вторая половина рассматриваемого свойства доказана.

Свойство 3. *Непрерывная на отрезке функция* $f(x)$ имеет разность *значений* $f(x'')-f(x')$ *стремящейся к нулю, когда разность аргументов* $x''-x'$ *стремится к нулю.*

Это одно из самых важных свойств *непрерывности на отрезке* и его не надо смешивать с обычной *непрерывностью в точке:* при этой последней одна из точек x' и x'' неподвижна в то время, как другая безгранично приближается к ней как к пределу. При непрерывности на отрезке нет ни малейшей необходимости закреплять одну из этих точек x' и x'': обе они могут быть *подвижными* и обе могут двигаться по основному отрезку $[a, b]$ *как угодно,* совершая, например, бесконечно много незатухающих маятникообразных раскачиваний от одного его конца к другому; единственное, что от них мы требуем, это — чтобы во время этого движения они *безгранично сближались между собой,* ибо уже при одном только этом условии разность $f(x'')-f(x')$ делается бесконечно мала.

Это свойство функций, непрерывных на отрезке, часто называют равномерной непрерывностью.

Как и *обыкновенную непрерывность в точке,* так и *равномерную непрерывность на отрезке* можно выразить системой двух основных неравенств, вполне освобожденной от вмешательства времени. Эта система неравенств такова:

$$\left.\begin{array}{ll} |f(x'')-f(x')|<\varepsilon & (\text{I}^{**}) \\ |x''-x'|<\eta & (\text{II}^{**}) \end{array}\right\}$$ основные неравенства,

причем первое неравенство должно автоматически, т. е. *само собой* удовлетворяться всякий раз, как *мы* удовлетворяем второе неравенство. При этом положительное число ε должно быть произвольно малым, но заданным заранее, а положительное число η должно подбираться для уже известного нам ε. В этом смысле число η до известной степени зависит от величины числа ε.

Доказательства свойств функций, непрерывных на отрезке

Введение

Принцип стягивающихся отрезков. *Если имеем на прямой бесконечно много вложенных друг в друга отрезков* $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots > \sigma_n > \ldots$, *длина которых стремится к нулю с возрастанием* n, *то всегда имеется на этой прямой такая неподвижная точка, которая входит во все без исключения эти отрезки.*

Самое название этого принципа вызывается тем, что беспредельно уменьшающийся отрезок σ_n, при увеличении его значка n, не движется по прямой беспорядочным образом, но *стягивается* к неподвижной точке ξ, которую он обязан всегда в себе содержать (рис. 52).

Этот принцип тотчас же позволяет установить следующее общее предложение, имеющее в математике громадное теоретическое значение и, в частности, являющееся фундаментом изложенных здесь доказательств.

Теорема о промежутках. *Если для каждой точки c отрезка $[a, b]$ построен некоторый специальный промежуток δ_c, ее покрывающий, то тогда из этих специальных промежутков можно отобрать* конечное *число таких, совокупность которых целиком покроет весь отрезок $[a, b]$.*

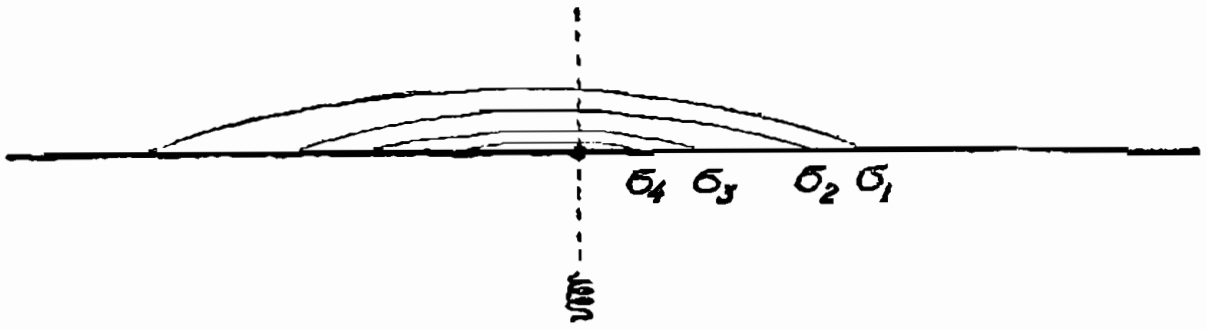


Рис. 52

Доказательство

Обозначим данный отрезок $[a, b]$ через σ_1 и разделим σ_1 пополам. Если σ_1 невозможно покрыть целиком *конечным* числом рассматриваемых специальных промежутков, то по крайней мере для одной из его половин это также невозможно сделать. Обозначим ее через σ_2 и, в свою очередь, разделим σ_2 пополам. Так как отрезок σ_2 невозможно покрыть *конечным* числом рассматриваемых специальных промежутков, то по крайней мере для одной из его половин это также невозможно сделать. Обозначим ее через σ_3 и будем поступать и далее по-прежнему.

Ясно, что мы получим бесконечно много отрезков

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots > \sigma_n > \ldots,$$

каждый из которых является половиной предыдущего и каждый из которых невозможно покрыть *конечным* числом рассматриваемых специальных промежутков. В силу принципа стягивающихся отрезков имеется на начальном отрезке σ_1 такая неподвижная точка ξ, к которой стягивается отрезок σ_n по мере увеличения его значка n.

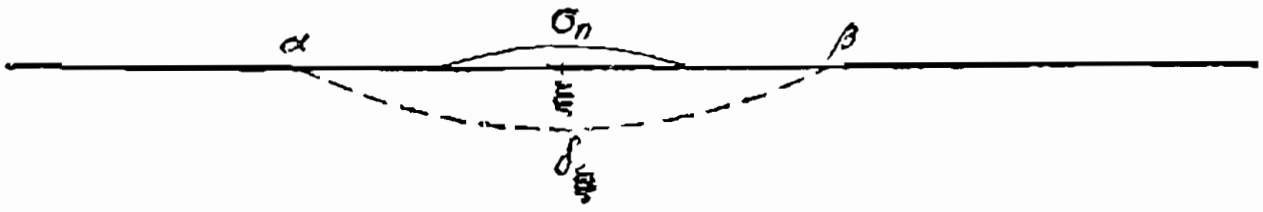


Рис. 53

С другой стороны, эта неподвижная точка ξ, как лежащая на начальном отрезке $\sigma_1 = [a, b]$, заведомо покрыта некоторым неподвижным специальным промежутком δ_ξ (рис. 53), внутри которого она и содержится и внутрь которого обязан целиком войти отрезок σ_n при достаточно большом значке n, ибо σ_n стягивается к нашей неподвижной точке ξ, а она отстоит на конечное расстояние от обеих неподвижных граничных точек α и β промежутка $\delta_\xi = (\alpha, \beta)$.

Таким образом выходит, что отрезок σ_n, который не мог быть покрытым никаким конечным числом специальных промежутков δ_c, на деле оказался покрытым даже *одним* специальным промежутком δ_ξ.

Из вскрывшегося противоречия следует, что и начальный отрезок $\sigma_1 = [a, b]$ достоверно может быть покрытым *конечным* числом специальных промежутков δ_c, ч. т. д.

Введем, наконец, последнее определение:

конечная система Σ *специальных промежутков* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, *покрывающая целиком данный отрезок* $\sigma = [\alpha, \beta]$, *называется* минимальной, *если из нее нельзя выбросить ни одного промежутка* δ_i *без того, чтобы не открылась хотя бы одна точка отрезка* σ.

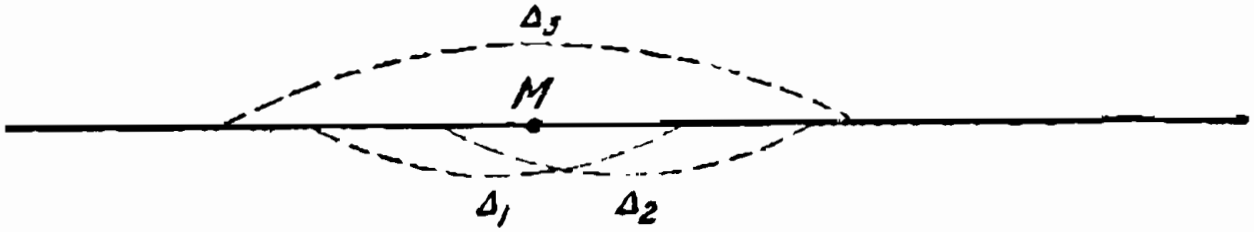


Рис. 54

Минимальная система Σ имеет особенное устройство, исключающее какую-либо беспорядочность в расположении образующих ее промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$. Чтобы усмотреть, каково оно, отметим сначала следующий вполне элементарный факт:

если три *какие-нибудь промежутка* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *имеют общую им всем трем точку* M, *тогда один из них целиком содержится в сумме двух других и, значит, он излишен для покрытия.*

На рисунке 54 промежуток Δ_2 является излишним, так как содержится в сумме промежутков Δ_1 и Δ_3.

Опираясь на это соображение, можно сказать, что в минимальной системе Σ никакие три из составляющих ее промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ не могут иметь общей точки. Поэтому общие точки могут иметь только два соседние перекрывающиеся промежутка, и, значит, минимальная система всегда имеет вид, как показано на рисунке 55.

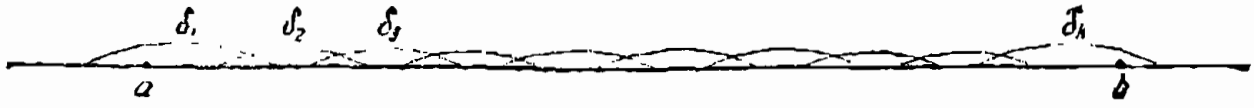


Рис. 55

После этого введения перейдем к прямым доказательствам основных свойств функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Свойство 1

Пусть $\varepsilon > 0$ заданное число. Так как $f(x)$ непрерывна в каждой неподвижной точке c отрезка $[a, b]$, то удовлетворена система двух основных неравенств:

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{I}$$

$$|x - c| < \eta_c, \tag{II}$$

где η_c есть некоторое положительное число, специально подбираемое для заданной неподвижной точки c и для заданного ε.

Обозначим через δ_c промежуток, имеющий своей серединой точку c и длиной $2\eta_c$, и будем его называть «*специальным промежутком*», покрывающим точку c.

В силу «теоремы о промежутках» имеется минимальная система Σ, составленная из специальных промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ (рис. 55), покрывающая целиком весь отрезок $[a, b]$.

Ясно, что граничные точки этих специальных промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ разделяют данный отрезок $[a, b]$ на *малые отрезки;* мы обозначаем через η длину наименьшего из этих малых отрезков $\eta > 0$.

Если теперь x' и x'' две какие-нибудь точки отрезка $[a, b]$, расстояние между которыми меньше, чем η, то имеем:

$$|x'' - x'| < \eta. \qquad (II^{**})$$

Ясно, что две такие точки x' и x'' обязаны попасть внутрь одного из промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, образующих нашу минимальную систему Σ. Пусть они попадут внутрь промежутка δ_i, имеющего серединой точку c_i, тогда в силу неравенства (I) мы имеем:

$$|f(x') - f(c_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|f(x'') - f(c_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ибо обе точки x' и x'' лежат внутри промежутка δ_i. Вычитая из нижнего неравенства верхнее, мы находим окончательное неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \qquad (I^{**})$$

Ясно, что система двух неравенств (I**) и (II**) и составляет доказательство свойства 1, ч. т. д.

Свойство 2

Сначала заметим, что *когда в какой-нибудь точке c отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ не равна нулю, $f(c) \neq 0$, тогда всегда можно построить такой специальный промежуток δ_c, покрывающий точку c, внутри которого везде имеем:* или $f(x) > \frac{f(c)}{2}$, *если* $f(c)$ *положительное число,* или $f(x) < \frac{f(c)}{2}$, *если* $f(c)$ *отрицательное число.*

Чтобы убедиться в этом, примем $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке c, всегда имеется такое положительное число η_c, что при осуществлении неравенства

$$|x - c| < \eta_c \qquad (II)$$

заведомо будет верным неравенство

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon. \qquad (I)$$

В качестве «специального промежутка» δ_c, покрывающего точку c, мы принимаем промежуток, имеющий серединой точку c, а длиной $2\eta_c$. Из сказанного следует, что внутри этого промежутка δ_c соблюдается всюду неравенство (I),

которое можно написать в виде равенства $f(x)-f(c)=\theta\varepsilon$, где $|\theta|<1$. Поэтому мы имеем $1+\theta>0$ и $-1+\theta<0$. В силу выбора числа $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(c)|$ мы имеем всюду внутри δ_c равенство $f(x)=f(c)+\theta\frac{1}{2}|f(c)|=\frac{1}{2}f(c)+\frac{1}{2}\{f(c)+\theta|f(c)|\}$. Если $f(c)>0$, тогда $f(c)=|f(c)|$; в этом случае фигурная скобка $\{\ldots\}$ положительна, ибо имеем $\{|f(c)+\theta|f(c)|\}=|f(c)|\cdot(1+\theta)>0$ и поэтому $f(x)>\frac{f(c)}{2}$. *Если же* $f(c)<0$, тогда $f(c)=-|f(c)|$; в этом случае фигурная скобка отрицательна, ибо имеем $\{-|f(c)|+\theta|f(c)|\}=|f(c)|\cdot(-1+\theta)<0$ и поэтому $f(x)<\frac{f(c)}{2}$, ч. т. д.

Как следствие мы выводим: *функция $f(x)$ на всем выбранном нами специальном промежутке δ_c имеет тот же самый знак, как и в его середине c, т. е. знак числа $f(c)$, если $f(c)\neq 0$.*

Теперь свойство 2 докажется сразу. Пусть Σ минимальная система специальных промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, покрывающих весь отрезок $[a, b]$. Так как мы предполагаем, что функция $f(x)$ ни в какой точке этого отрезка не обращается в нуль, то она обязана иметь во всех промежутках $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ тот же самый знак, как и в первом промежутке δ_1. В самом деле, в каждом из этих специальных промежутков δ_i функция $f(x)$, согласно доказанному, не может переменить знак; а второй промежуток δ_2 перекрывается с первым промежутком δ_1. Значит $f(x)$ сохраняет в обоих промежутках δ_1 и δ_2 тот же самый знак. И так как δ_3 перекрывается с δ_2, δ_4 перекрывается с δ_3 и т. д., то во всех $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ функция $f(x)$ сохраняет тот же самый знак и, следовательно, нигде не может переменить знак на отрезке $[a, b]$.

Поэтому *непрерывная на отрезке функция не может переменить на нем свой знак без того, чтобы не обратиться в нуль в какой-нибудь точке этого отрезка.*

Этим доказана первая половина свойства 2. Что же касается до второй его половины о непременном принятии функцией $f(x)$ любого промежуточного числа, лежащего между двумя заведомо принимаемыми значениями, то эта вторая половина свойства 2 была уже доказана выше в крупном шрифте.

Свойство 3

Возьмем минимальную систему Σ промежутков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, построенную нами для доказательства свойства 1. На всем промежутке δ_i мы имеем неравенство $|f(x)-f(c_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (I), где c_i есть середина этого промежутка. Отсюда следует неравенство $f(c_i)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(c_i)+\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, взяв k постоянных чисел $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k)$ и обозначив через A наименьшее из них, а через B — наибольшее, мы имеем неравенство:

$$A-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon, \qquad (I)$$

справедливое для всего промежутка δ_i и, значит, верное, когда аргумент x пробегает *весь* данный отрезок $[a, b]$.

Из неравенства (I) следует, что функция $f(x)$ есть *ограниченная* на всем отрезке $[a, b]$. А так как, в силу свойства 2, приняв два какие-нибудь численные значения m' и M', $m'<M'$, функция $f(x)$ обязана принять, как свое численное значение в некоторой точке ξ' отрезка $[a, b]$, также и всякое число L', содержащееся между ними, $m'<L'<M'$, т. е. $L'=f(\xi')$, то отсюда следует, что численные значения функции $f(x)$, принимаемые ею на отрезке $[a, b]$, сплошь заполняют некоторый промежуток (m, M) на оси ординат OY (рис. 56),

вне границ m и M которого нет ни одного численного значения функции $f(x)$, принимаемого ею где-нибудь на отрезке $[a, b]$.

Важно отметить, что *самые граничные числа m и M также принимаются функцией $f(x)$ на отрезке* $[a, b]$.

В самом деле, если бы, например, число M ею не принималось нигде на отрезке (a, b), то тогда функция $\frac{1}{f(x)-M}$ была бы непрерывной на отрезке $[a, b]$ и, значит, ограниченной, что невозможно, потому что $f(x)$ заведомо принимает численные значения, сколь угодно близкие к M.

Этим свойство 3 вполне доказано, ч. т. д.



Рис. 56

Примечание. Свойство 3 (равномерной непрерывности), очевидно, верно только для непрерывных функций. *Но свойство 2 (прохождения через всякое* промежуточное число) иногда наблюдается и у разрывных функций. Например, функция $y=f(x)=\sin\frac{1}{x}$, пополненная условием $f(0)=0$, проходит через всякое число отрезка $[-1\leqslant y\leqslant+1]$ и, однако, она разрывна при $x=0$.

§ 45. Пределы функции и их обозначения. Пределы в бесконечности. Иногда случается, что функция $f(x)$, определенная для всех численных значений аргумента x, стремится к вполне определенному конечному пределу, когда аргумент x безгранично увеличивается, не делая при этом никаких скачков.

Тогда этот предел функции обозначают через $f(+\infty)$ и пишут

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty).$$

Если же в указанных условиях $f(x)$ предела не имеет, тогда символ $f(+\infty)$ ничего не обозначает и его писать нельзя, потому что он не имеет никакого смысла.

Аналогично, символ $f(-\infty)$ обозначает предел (если он имеется) переменной величины $f(x)$; когда аргумент x алгебраически убывает безгранично и *непрерывно* (т. е. не делая скачков)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty).$$

Как пример *ложного задания функции* полезно указать фразу: «функция $f(x)$ равна нулю для всякого конечного x, $f(x)=0$, и равна единице для x бесконечного положительного, $f(+\infty)=1$». Такое задание функции $f(x)$ совершенно бессмысленно, потому что бесконечность не есть число и, значит, численного значения аргумента, равного бесконечности $+\infty$, быть не может. И тот, кто пишет $f(+\infty)=1$, должен иметь в виду, что есть просто сокращенный способ писать $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. А в данном случае это как раз и невозможно, ибо $f(x)=0$ для всякого конечного x, и значит, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, а не 1.

Пример 1. На рисунке 57 изображен случай, где $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$ еще являются настоящими значениями функции $f(x)$, но для двух очень небольших положительных величин аргумента x. В следующем примере этого уже нет совсем.

Пример 2. На рисунке 58 изображен случай, где *оба предела* $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$ *функции* $f(x)$ *ею не принимаются никогда ни при каком* x.

Следовательно, здесь оба числа: $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$ не суть численные значения функции ни при каком x, но суть только пределы ее настоящих значений.

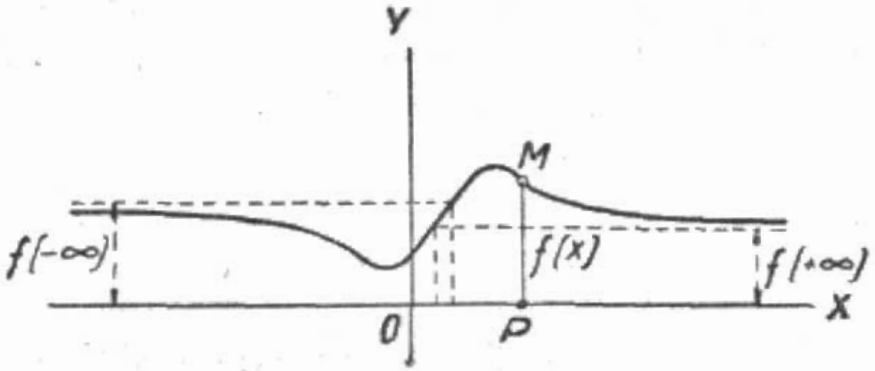


Рис. 57

Легко дать и *формулу* для этой функции: $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$. Если $x>0$, то $|x|=x$, и, значит, $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$. Поэтому $f(x)$ возрастает с увеличением x, и мы имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Если же $x<0$, то $x=-|x|$, и, значит, $f(x)=-\frac{|x|}{1+|x|}=-f(|x|)$. Поэтому $f(x)$ убывает с увеличением $|x|$ и мы имеем $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

Пределы в точке

Как и для бесконечности, этих пределов имеется тоже два: слева от точки c и справа от точки c, и обозначениями для этих пределов служат

$$f(c-0) \text{ и } f(c+0).$$

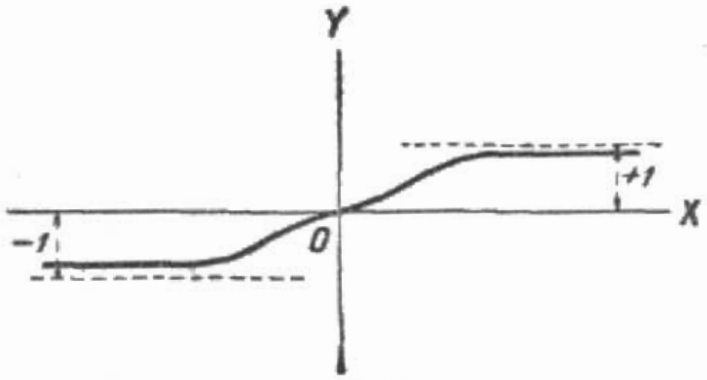


Рис. 58

Первый предел, $f(c-0)$, получается так: предполагают, что аргумент x непрерывно *возрастает* и безгранично приближается к значению c, никогда, однако, не делаясь ему равным. Если в этих условиях переменная величина $f(x)$ имеет предел, то его называют *пределом функции* $f(x)$ в точке c *слева,* обозначают через $f(c-0)$ и пишут

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)=f(c-0).$$

Если же в указанных условиях $f(x)$ не имеет предела, тогда символ $f(c-0)$ ничего не обозначает и его писать нельзя, ибо он не имеет смысла.

Второй предел, $f(c+0)$, получается точно так же: заставляют аргумент x непрерывно *убывать* и безгранично приближаться к значению c, никогда, однако, не делая его равным c. Если в этих условиях переменная величина $f(x)$ имеет предел, то его называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* c *справа,* обозначают через $f(c+0)$ и пишут

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)=f(c+0).$$

Примечание. Обозначения $f(c-0)$ и $f(c+0)$ возникли следующим образом. Когда имеем $x<c$, тогда $x=c-h$, где h есть *положительная* величина. Если x непрерывно возрастает, безгранично приближаясь к значению c, но никогда не делаясь ему равным, тогда h непрерывно убывает до нуля, причем, однако, во всякий момент времени мы имеем $h>0$. Поэтому до предела $f(x)$ пишется в виде $f(c-h)$, где положительное $h\to 0$ убывает непрерывно. Естественно и самый предел для $f(x)$ написать в *стилизованном* виде, т. е. так, *чтобы это обозначение* $f(c-0)$ *несло на себе отпечаток самого происхождения того числа, которое оно заменяет*[1].

Точно так же, когда $x>c$, мы имеем $x=c+h$, где h положительно. Если x непрерывно убывает, безгранично приближаясь к значению c, но никогда не делаясь ему равным, тогда h непрерывно убывает до нуля, будучи, однако, в каждый момент времени положительным, $h>0$. Поэтому до предела $f(x)$ напишется в виде $f(c+h)$, где положительное $h-0$ убывает непрерывно. Естественно, поэтому, и самый предел обозначить через $f(c+0)$.

Учащийся видит, что обозначения $f(c-0)$ и $f(c+0)$ составлены по тому же способу, как и обозначения $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$. Но для начинающего они представляют гораздо бо́льшую опасность. Легко понять причину этого.

Бесконечность не есть число и учащийся не станет рассматривать $f(+\infty)$ как настоящее значение функции $f(x)$, принятое ею при каком-то определенном x.

Но в обозначении $f(c-0)$, когда им пользуются неосторожно, не давая себе отчета в его истинном смысле, является громадная опасность принять $c-0$ за число, считать его равным числу c, и, вставив его в выражение функции $f(x)$ вместо x, начать производить с ним выкладки и, в конце концов, думать, что $f(c-0)$ и $f(c)$ одно и то же. *Это было бы грубейшей ошибкой,* и чтобы избежать ее, надо держаться правила:

рассматривать $f(c-0)$ *как обозначение* символическое, *т. е. не как настоящую величину функции* $f(x)$ *при* x, *равном* c, *но как предел ее настоящих величин* для x, непрерывно возрастающего и безгранично приближающегося к c, при условии иметь всегда $x<c$.

---

[1] *Буквально* же (т. е. грубо, не символически) их понимать, разумеется, невозможно, так как прибавление или отнятие нуля от c нисколько не изменит c, потому что $c+0=c$ и $c-0=c$ и, значит, обозначения $f(c+0)$ и $f(c-0)$ тогда не могут дать ничего ценного или интересного, выражая *при грубом, не символическом понимании их* просто величину функции $f(c)$ в самой точке c, которую и без того можно было бы прекрасно написать в виде $f(c)$.

Поэтому нельзя из символа $f(c-0)$ отдельно вынимать разность $c-0$ и производить на ней те или другие действия, но следует рассматривать $f(c-0)$ как единый цельный символ, от которого нельзя отделять частей, как нельзя, например, в обозначении $\arcsin x$ отделять arc от $\sin x$.

Все сказанное имеет силу и для обозначения $f(c+0)$.

С точки зрения геометрии, указанные обозначения: $f(c-0)$ и $f(c+0)$ являются чрезвычайно ясными и не могут послужить поводом к появлению каких-либо недоумений. Достаточно взглянуть на рисунок 59, где изображена некоторая возрастающая функция $y=f(x)$.

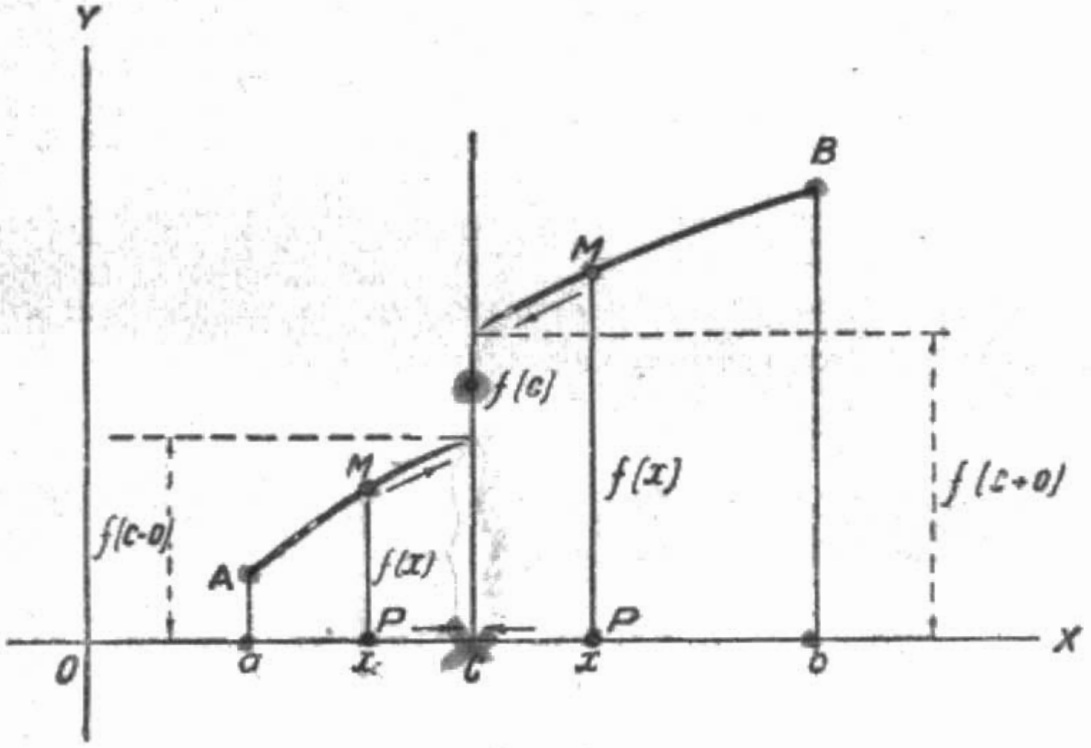


Рис. 59

Здесь сразу видно, что когда аргумент x, оставаясь меньшим чем c, возрастает и безгранично приближается к c, как к пределу, ордината PM кривой стремится к некоторой *предельной величине* $f(c-0)$, *которая заметно меньше значения* $f(c)$ *функции* $f(x)$ *в самой точке* c. И когда x, будучи бóльшим чем c, убывает и безгранично приближается к c, как к пределу, ордината MP кривой стремится к некоторой *предельной величине* $f(c+0)$, *которая заметно больше значения* $f(c)$ *функции* $f(x)$ в самой точке c.

В этом можно видеть доказательство того, что *вообще все* три числа

$$f(c-0), \quad \text{и} \quad f(c) \quad \text{и} \quad f(c+0)$$

различны друг от друга. Притом, в рассматриваемом случае, *только второе число* $f(c)$ *есть настоящее значение функции*

(в точке c); оба же остальные числа: $f(c-0)$ и $f(c+0)$ отнюдь не являются значениями рассматриваемой функции $f(x)$ *ни в какой точке* x, но суть лишь пределы ее настоящих значений.

Пример. Возьмем функцию $f(x)=\frac{x}{|x|}$, где предполагаем, что $x\neq 0$. *Если* $x>0$, имеем, очевидно, $x=|x|$ и, значит, $f(x)=+1$. *Если* $x<0$, имеем $x=-|x|$ и, значит, $f(x)=-1$.

Поэтому весь график функции $f(x)$ представится в виде двух половин переломленной прямой, помещенных *над* положительной частью оси OX и *под* ее отрицательной частью на расстоянии, равном единице. Важно отметить, что нижняя половина переломленной прямой не имеет самой последней точки, а ее верхняя половина не имеет самой первой (рис. 60).

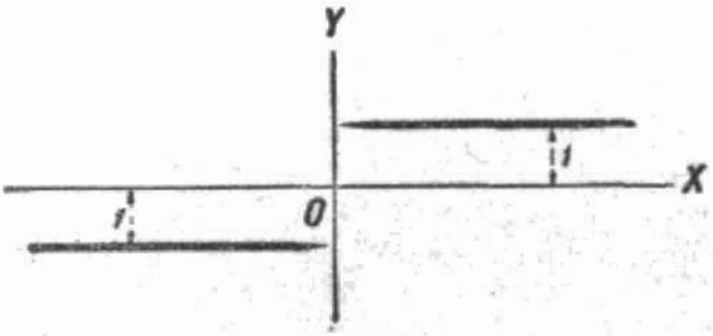


Рис. 60

Ясно теперь, что $f(-0)=-1$ и $f(+0)=+1$. Что же касается значения $f(0)$ функции $f(x)$ в самой точке 0, то *его совсем нет*, ибо формула, дающая функцию $f(x)$, при $x=0$ разрушается, принимая невычислимый вид $\frac{0}{0}$.

Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке

При помощи пределов $f(c-0)$ и $f(c+0)$ функции $f(x)$ слева и справа от точки c очень просто выразить и самую непрерывность функции в этой точке.

А именно, из свойства 1 (см. § 42) непрерывных функций в точке мы знаем, что необходимым и достаточным признаком непрерывности функции $f(x)$ в точке c является осуществление равенства $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ при монотонном без скачков стремлении аргумента x к c. Это и означает, что точка c непрерывности функции $f(x)$ вполне характеризуется двумя равенствами

$$f(c-0)=f(c)=f(c+0).$$

Таким образом, *необходимым и достаточным условием непрерывности функции* $f(x)$ *в точке* c *является осуществление двух равенств*

$$f(c-0)=f(c)=f(c+0). \qquad (1)$$

Примечание. Два равенства (1) характеризуют обыкновенную (т. е. *двустороннюю*) непрерывность функции $f(x)$ в точке c. Если же нам гарантировано только первое равенство $f(c-0)=f(c)$, то мы можем ручаться лишь за *левостороннюю* непрерыв-

ность функции $f(x)$ в точке c. Аналогично, если верным является второе равенство $f(c+0)=f(c)$, то функция $f(x)$ заведомо имеет *правостороннюю* непрерывность в точке c.

§ 46. Типы разрывов функций. Неустранимый и устранимый разрывы. Из предыдущего ясно, что *всякая точка разрыва* c может возникнуть лишь по двум причинам.

Первая причина — это *несуществование по крайней мере одного из пределов* $f(c-0)$ и $f(c+0)$.

Вторая причина — это, при наличии обоих указанных пределов, *нарушение равенств* $f(c-0)=f(c)=f(c+0)$.

Первая причина разрыва

Она наступает тогда, когда при безграничном приближении аргумента x к точке c функция $f(x)$

1) *либо* уходит в бесконечность (рис. 61 и 62);

2) *либо* совершает безгранично много незатухающих колебаний (рис. 63.)

Рисунок 61 изображает течение функции $y=\frac{1}{x-c}$, уходящей в $-\infty$ при приближении x к c *слева* и уходящей в $+\infty$, когда x приближается к c *справа*. Рисунок 62 изображает течение кривой $y=\frac{1}{(x-c)^2}$, уходящей в $+\infty$, когда $x\to c$ безразлично с какой стороны.

Рисунок 63 изображает течение функции $y=\sin\frac{1}{x-c}$, делающей бесконечное множество колебаний от $+1$ до -1, когда x неограниченно приближается к c.

Вторая причина разрыва

Она наступает тогда, когда, при существовании обоих пределов $f(c-0)$ и $f(c+0)$, мы имеем

1) *либо* неравенство $f(c-0)\neq f(c+0)$ (рис. 64);

2) *либо*, при наличии равенства $f(c-0)=f(c+0)$, имеем неравенство $f(c-0)\neq f(c)$ (рис. 65).

Рисунок 64 изображает две разорвавшиеся ветви кривой $y=f(x)$. *При этом совершенно безразлично, чему именно равно численное значение* $f(c)$ *функции* $f(x)$ *в самой точке разрыва* c, ибо, делая его каким угодно, мы никогда не устраним оторванности правой ветви кривой от левой и, значит, никогда не можем уничтожить разрыв функции $f(x)$ в точке c. Если мы, по тем или иным причинам, располагаем возможностью свободного выбора численного значения $f(c)$ функции $f(x)$ в самой точке c, то самое большее, что мы можем сделать, это выбрать $f(c)$ так, чтобы иметь: *или* $f(c)=f(c-0)$, *или* $f(c)=f(c+0)$. Ясно, что,

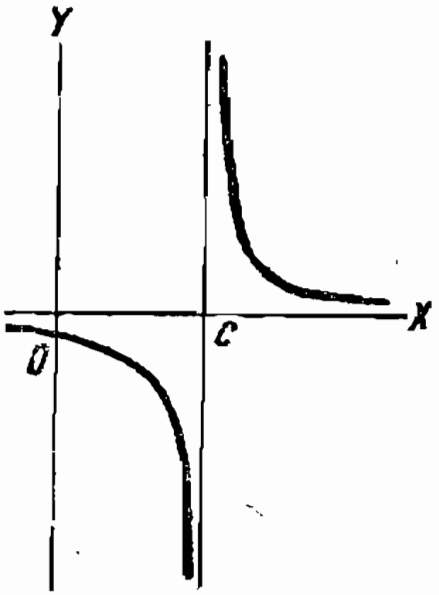


Рис. 61

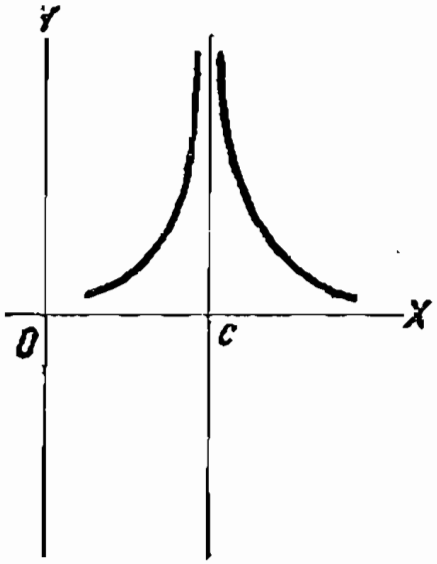


Рис. 62

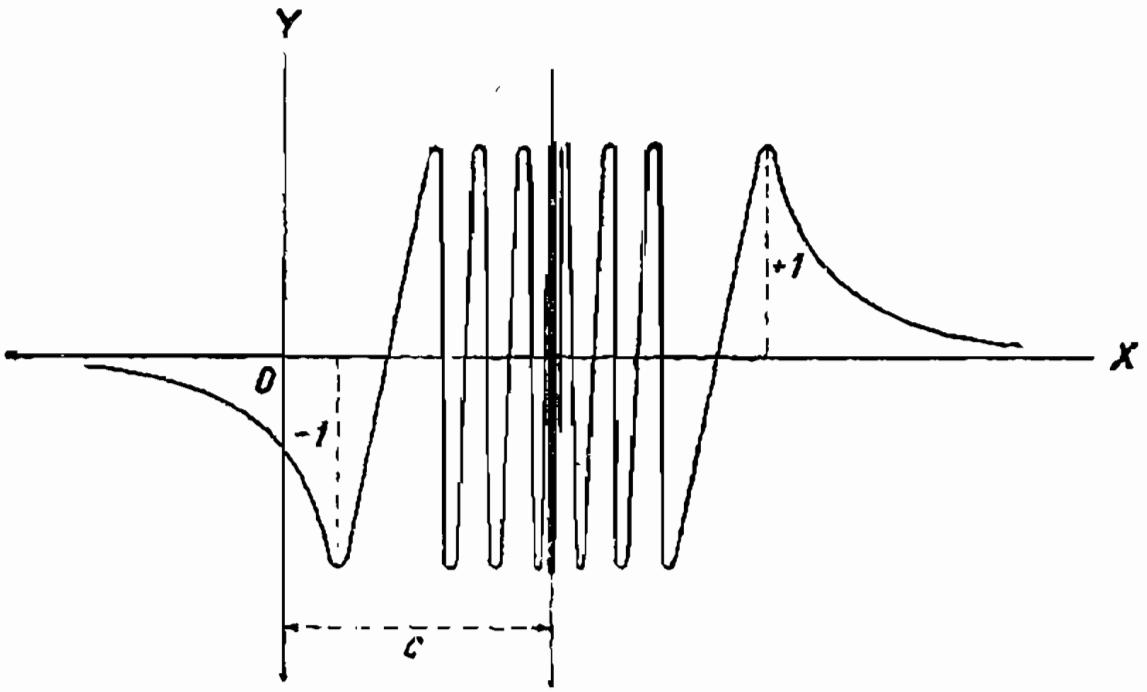


Рис. 63

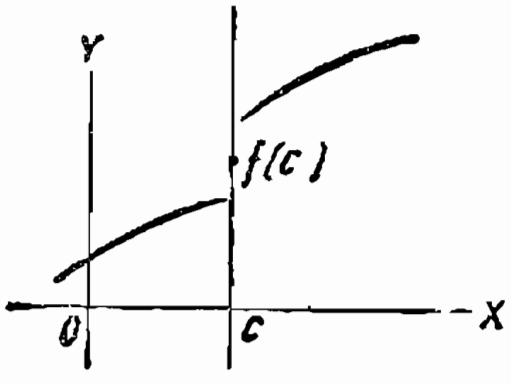


Рис. 64

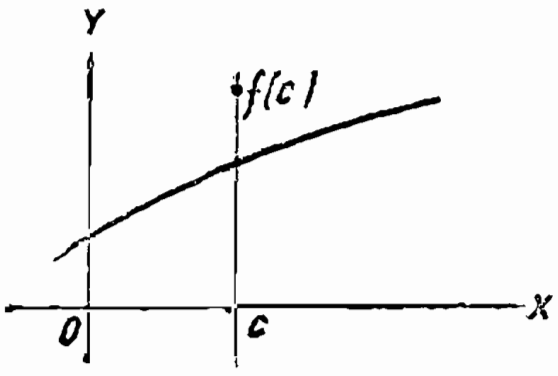


Рис. 65

в первом случае, функция $f(x)$ делается *непрерывной слева* в точке c, и, во втором случае, *непрерывной справа* в этой точке.

Рисунок 65 изображает наиболее интересный случай так называемого *устранимого разрыва,* когда левая и правая ветви кривой приближаются к одной и той же предельной точке $f(c-0)=f(c+0)$ на вертикальной прямой $x=c$. В этом случае разрыв функции $y=f(x)$ происходит только от того, что численной величиной функции $f(x)$ в точке c является не общая предельная величина $f(c-0)=f(c+0)$, но какое-то постороннее число $f(c)$. *Геометрически* этот случай надо понимать так, что из линии $y=f(x)$, непрерывной в точке c, вынута точка с абсциссой c и *либо* поднята выше кривой, *либо* опущена ниже нее. В этом случае ясно, что, возвращая вынутую из кривой точку на ее «прежнее место», мы восстанавливаем непрерывность кривой в точке c. Таким образом, если имеем $f(c-0)=f(c+0)$, всегда можно изменением численного значения функции $f(x)$ в одной только точке c сделать $f(x)$ непрерывной в этой точке. Поэтому этот вид разрыва носит название устранимый разрыв.

Все прочие виды разрывов невозможно превратить в непрерывность путем изменения численного значения функции $f(x)$ в одной только точке c. Поэтому они носят название неустранимых разрывов.

Учащийся отнюдь не должен думать, что все описываемые случаи разрывов функции «слишком отвлеченны», имеют лишь «теоретический» интерес и «никогда» не встречаются на практике. Напротив, современная техника как раз имеет дело с описываемым поведением функции[1]. Например, при возведении строения сплошь и рядом балка рассчитывается нагруженной неравномерно; в одной ее части нагрузка одна, а в непосредственно прилегающей к ней части нагрузка уже совершенно другая. Это соответствует как раз неустранимому разрыву (рис. 64) для функции, задающей нагрузку. Резкая (сосредоточенная) нагрузка балки в одной точке соответствует устранимому разрыву функции, задающей нагрузку.

§ 47. Кажущийся разрыв и так называемая «истинная величина» функции. Раскрытие неопределенностей. Случается, что функция выражается формулой, которая утрачивает численный смысл при каком-нибудь значении аргумента.

Например, функция

$$\frac{(x-c)^4}{x^3-3x^2\cdot c+3x\cdot c^2-c^3}$$

[1] Согласно акад. А. Н. Крылову: «Типичные встречающиеся в практике случаи прерывной нагрузки следующие: нагрузка на различных участках балки непрерывна на каждом участке в отдельности, но на разных участках представляется различным образом и в ряде точек имеет скачки конечной величины». Акад. А. Н. Крылов. О расчете балок, лежащих на упругом основании, Ленинград, 1930, стр. 26.

при $x=c$ не равна ничему, потому что числитель и знаменатель дроби оба обращаются при значении аргумента $x=c$ в *нуль*. В этих условиях формула, разумеется, невычислима.

Однако такое повреждение при $x=c$ *формулы* $f(x)$, дающей функцию $y=f(x)$, отнюдь не означает, что повреждена в этой точке и *сама функция* $y=f(x)$. Часто бывает, что формула $f(x)$ повреждается при $x=c$, переставая служить для вычисления величины $f(x)$, потому что утрачивает всякий смысл в точке c, в то время как сама функция $y=f(x)$ не представляет ничего особенного в этой точке, имея в ней столь же гладкое течение, как и в соседних точках.

Говоря *самым общим образом,* когда какая-нибудь формула $f(x)$, содержащая букву x, утрачивает численный смысл при каком-нибудь исключительном значении c аргумента x, тогда естественно ожидать в этой точке c какой-нибудь неприятности для течения функции, например *неустранимого* разрыва. Но часто случается, что можно дать такую численную величину функции y в точке c, что эта функция станет уже на отрезке $[a, b]$ непрерывной.

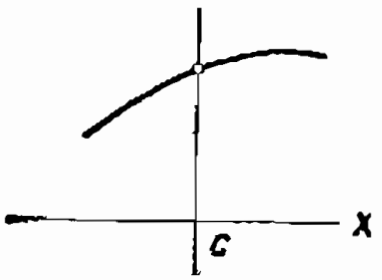


Рис. 66

Ясно, что для этого функция y должна стремиться к определенному пределу, когда аргумент x стремится к точке c, причем этот предел должен быть одинаковым независимо от того, стремится ли аргумент x к точке c возрастая или убывая (т. е. слева или справа от точки c). Ясно, наконец, что, давая функции y эту предельную величину как ее значение в самой точке c, мы делаем функцию y непрерывной в точке c. Такой устранимый разрыв называется *кажущимся разрывом,* и предельное значение функции y в точке c называется ее «*истинной величиной*» в этой точке.

Геометрически истинная величина функции y изобразится точкой, вставляемой между правой и левой ветвями функции, стремящимися к этой точке (рис. 66).

Таким образом, когда это обстоятельство случается, тогда находят искомую величину функции $y=f(x)$ в такой точке c, просто вычисляя $f(c+0)$ и $f(c-0)$. Если оказывается, что эти количества равны друг другу, то считают, что в точке c повреждена не сама функция, а лишь дающая ее формула, и тогда просто принимают за $f(c)$ общую величину

$$f(c+0)=f(c-0),$$

называя ее в этом случае *истинной величиной* функции в точке c. Мы знаем, что этим *восстанавливается непрерывность функции* $f(x)$ *в точке* c.

Иногда это восстановление величины функции $y=f(x)$ делается чисто алгебраически, именно так, что надлежащими элементарными *алгебраическими переделками в данной формуле*: сокращениями, приведением подобных членов и т. д., устраняется повреждение формулы для $x=c$ *без изменения численных величин функции в других точках.*

Из сказанного явствует, что естественно рассматривать этот случай как случай *кажущегося разрыва,* обязанного не недостаткам самой функции (в геометрическом смысле), а лишь некоторому недостатку дающей эту функцию *формулы,* утрачивающей случайным образом свой численный смысл при $x=c$.

Например, формула

$$f(x)=\left(3x^2+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{x-1}$$

перестает служить для вычисления величины функции при $x=1$, потому что тогда два знаменателя обращаются в нуль.

Если мы раскроем скобки и «сократим» члены

$$+\frac{1}{x-1} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{x-1},$$

то этим самым мы нисколько не изменим величины функции для значений аргумента x, *отличных от единицы,* но тогда рассматриваемая формула переходит в *другую* формулу:

$$\Phi(x)=3x^2,$$

которая дает уже непрерывную функцию и величина которой для $x=1$ равна 3.

Так как имеем равенство

$$f(x)=\Phi(x)$$

для всех x, отличных от *единицы,* то отсюда заключаем, что

$$f(1+0)=3 \quad \text{и} \quad f(1-0)=3.$$

Поэтому, полагая просто $f(1)=3$, мы восстанавливаем непрерывность функции и устраняем кажущийся разрыв, происшедший от разрушения формулы $f(x)$ при $x=1$.

Другой пример того, что подобная утрата численного смысла той или иной формулой может произойти чисто случайно, учащийся заметит из того обстоятельства, что достаточно написать любую непрерывную функцию $f(x)$ в виде

$$\frac{xf(x)}{x}$$

или в виде

$$\left[\frac{1}{x}+f(x)\right]-\frac{1}{x},$$

как новая формула уже утрачивает численный смысл при $x=0$.

В данном случае численное значение $f(0)$, утраченное функцией $f(x)$, восстанавливается «сокращением».

Сокращение, по самой своей сути, есть такое действие, которое, удаляя из написанной формулы те или другие ее части, благодаря присутствию которых она повреждается и становится невычислимой в некоторых точках, делает ее вычислимой и в этих точках. При этом сокращение не изменяет численной величины функции вне этих точек, а после сокращения оказывается, что в самих этих точках функция была непрерывной и только наличие сокращаемых частей завуалировало (маскировало) эту непрерывность.

Но далеко не всегда столь простым *чисто алгебраическим способом* удается восстановить непрерывность функции и открыть ее истинное значение в точке c, в которой разрушается формула.

Так, например, формула

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},$$

очевидно, разрушается при $x=0$, потому что мы получаем нуль в знаменателе. И устранить этот нуль никаким чисто алгебраическим способом нельзя. Однако функция $y=f(x)$, даваемая этой формулой, *непрерывна* при $x=0$, как мы докажем в конце этого параграфа, причем мы найдем, что «истинной величиной» функции $f(x)$ в точке $x=0$ будет единица.

Находить «истинную величину» функции $f(x)$ вообще дело очень трудное, потому что в самой точке c формула утрачивает смысл, и для нахождения предела $\lim f(x)$, когда x стремится к c, прибегают обычно к дифференциальному исчислению, дающему могучее средство к определению истинных величин функций, называемое иногда «*раскрытием неопределенности*», так как функция $f(x)$ неопределенна в точке $x=c$.

Неопределенность функции $f(x)$ в точке $x=c$ происходит от того, что формула $f(x)$ утрачивает смысл, когда полагают в ней $x=c$. Эта утрата смысла чаще всего происходит от того, что функция в точке $x=c$ принимает вид $\frac{0}{0}$. Вообще же, неопределенность может проистечь потому, что функция $f(x)$ в точке $x=c$ примет один из следующих *семи видов* неопределенности:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

Правила раскрытия этих неопределенностей изложены дальше (см. гл. XIV).

В заключение мы приведем таблицу простейших пределов, играющих особенно важную роль при изучении математического

анализа. В этой табличке предполагается, что $a>0$, а буква c всюду обозначает число, существенно не равное нулю.

В форме пределов	*В сокращенной, часто употребляемой форме*
1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x}=\infty$;	$\frac{c}{0}=\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} cx=\infty$;	$c\cdot\infty=\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\infty$;	$\frac{\infty}{c}=\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$;	$\frac{c}{\infty}=0$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$, если $a<1$;	$a^{-\infty}=+\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, если $a<1$;	$a^{+\infty}=0$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, если $a>1$;	$a^{-\infty}=0$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, если $a>1$;	$a^{+\infty}=+\infty$.
9. $\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=-\infty$ для $a>1$;	$\log_a 0=-\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ для $a>1$;	$\log_a(+\infty)=+\infty$.

Выражения, написанные во втором столбце, не следует рассматривать как выражения численных равенств (∞ не есть число); это просто — *символические* равенства, под которыми надо разуметь соотношения, указанные в первом столбце, и только так их и нужно понимать.

Предел отношения синуса к дуге

Знать этот предел необходимо для изучения дифференциального исчисления. Речь идет об отыскании предела отношения $\frac{\sin x}{x}$, когда аргумент x стремится к нулю, будучи отличным от нуля.

Возьмем для этого окружность радиуса 1 и в ней угол AOB, равный $2x$, который предполагаем небольшим (рис. 67). Ясно, что хорда AB равна $2\sin x$, а кривая дуга AB равно просто $2x$, ибо мы углы даем не в градусах, а в радианной мере. Наконец, проводя касательные AD и BD в точках A и B в окружности, мы видим, что $AD=\operatorname{tg} x$, и, значит, обхватывающая ломаная линия $ADB=2\operatorname{tg} x$. Но из элементарной геометрии известно, что обхватывающая линия ADB *больше* кривой дуги AB. Значит,

имеем неравенство $2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x$, которое после деления на $2\sin x$, запишется в виде $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Если мы, оставляя сначала x положительным, заставим его безгранично приближаться к нулю, то $\cos x$ будет стремиться к единице. Поэтому правая часть предыдущего неравенства имеет своим пределом 1 и, значит (§ 35), отношение $\frac{x}{\sin x}$ стремится к единице, когда положительное x стремится к нулю. А так как мы имеем очевидное тождество $\frac{(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-x}{-\sin x} = \frac{x}{\sin x}$, то из него заключаем, что отношение $\frac{x}{\sin x}$ стремится к единице и тогда, когда аргумент x, будучи отрицательным, стремится к нулю.

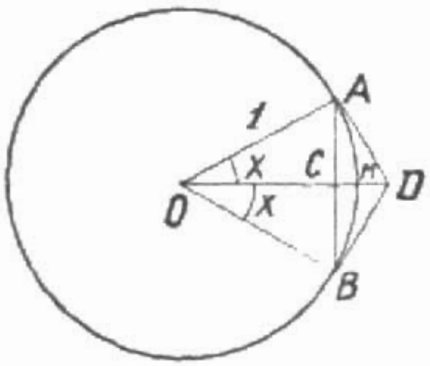


Рис. 67

Итак, *во всех случаях* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и, следовательно, мы имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где x стремится к нулю, проходя как через *положительные,* так и через *отрицательные* числа.

Если мы теперь рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$, то читатель видит, что она имеет кажущийся разрыв в начале координат $x = 0$, где ее «истинная величина» (т. е. предел для x, стремящегося к нулю) равна единице.

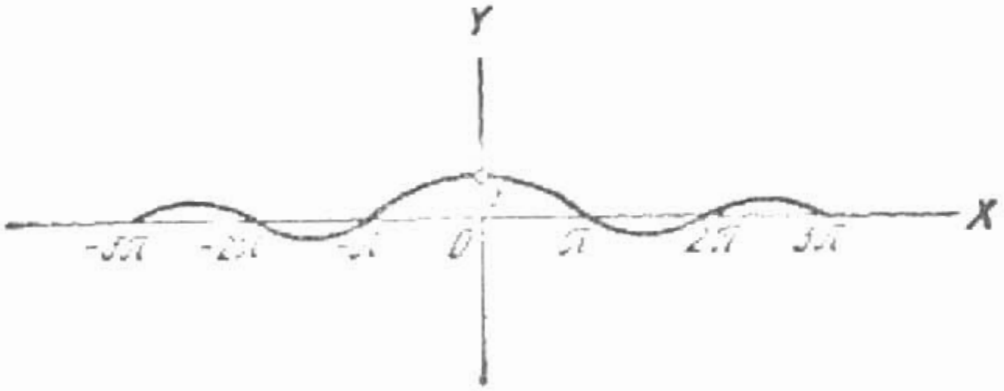


Рис. 68

И так как знаменатель уничтожается лишь в начале координат, то рассматриваемая функция нигде не имеет никаких разрывов. Так как перемена знака аргумента x функцию не изменяет, то кривая $y = \frac{\sin x}{x}$ симметрична относительно оси Y. Знак функции зависит только от знака $\sin x$, когда x возрастает от 0 до $+\infty$.

Притом функция стремится к нулю, когда x стремится к $+\infty$, ибо числитель по обсолютной величине не превышает 1, а знаменатель возрастает до $+\infty$.

Сказанного достаточно, чтобы видеть, что график функции

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

будет таким, как это изображено на рисунке 68.

Можно сказать, что хотя кривая и колеблется около оси абсцисс, то возвышаясь над нею, то уходя под нее, однако колебания эти затухают, так как ордината y кривой стремится к нулю, когда x возрастает до $+\infty$.

§ 48. Натуральные логарифмы. График показательной функции. ***Показательной функцией*** называется функция вида

$$y=a^x,$$

где a есть постоянное. Это постоянное, называющееся *основанием показательной функции,* берется нами превышающим единицу, $a>1$. Учащийся легко войдет во все свойства таких показательных функций, если представит себе, что основание a есть какое-нибудь целое положительное число, например 10.

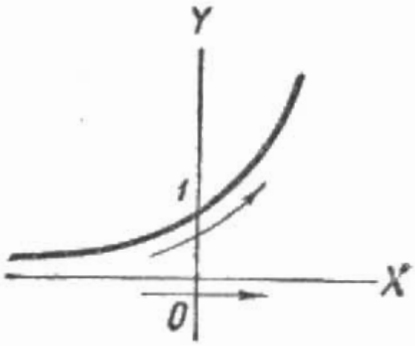


Рис. 69

Формула элементарной алгебры

$$a^0=1$$

обнаруживает, что показательная функция a^x равна 1 для $x=0$. Если x возрастает, начиная от нуля, до $+\infty$, показательная функция a^x чрезвычайно быстро возрастает, как читатель легко убедится, давая x последовательно значения 1, 2, 3, 4, ..., для которых значениями рассматриваемой функции являются числа

$$a,\ aa,\ aaa,\ aaaa,\ \ldots;$$

последовательность этих чисел возрастает чрезвычайно быстро, например, 10, 100, 1000, 10 000, ...

Для полного изучения показательной функции a^x надо было бы, собственно говоря, рассмотреть ее значения для дробных и иррациональных величин аргумента x и обнаружить, что эта функция непрерывна при всяком значении x и возрастает от 0 до $+\infty$, когда аргумент x растет от $-\infty$ до $+\infty$. Но мы не будем делать этого трудного, выходящего притом из рамок насто-

ящей книги, изучения. Мы ограничимся простым утверждением, что *показательная функция a^x с основанием a, большим единицы, есть всюду положительная и всюду непрерывная функция; она возрастает на всей оси абсцисс, причем она возрастает от 0 до 1 на ее отрицательной части и возрастает от 1 до $+\infty$ на ее положительной части.*

График показательной функции с основанием большим единицы изображен на рисунке 69.

График логарифмической функции. Обратимся теперь к логарифмической функции

$$y = \log_a x \qquad (a > 1).$$

Это равенство обозначает, что

$$x = a^y.$$

Отсюда мы заключаем, что абсцисса x есть показательная функция ординаты y. Поэтому, чтобы изобразить соотношение $x = a^y$ в виде геометрической линии, нужно просто на рисунке 69 переменить букву x на букву y, и обратно. Ясно, что тогда горизонтальная ось будет осью OY, а вертикальная ось станет осью OX. А так как такое расположение осей координат непривычно и неудобно, то нужно для приведения графика в обычный вид перевернуть чертеж так, чтобы новая ось OY стала вертикально и новая ось OX легла горизонтально. Это можно сделать, повернув всю плоскость чертежа на другую сторону около равноделящей прямой $y = x$, как около оси вращения; тогда положительная часть оси OY совпадает с положительной частью оси OX. Но проще всего — это отразить, как в зеркале, показательную кривую (рис. 69) в этой равноделящей прямой: тогда показательная кривая $y = a^x$ прямо отразится в логарифмическую кривую $y = \log_a x$, как это показано на рисунке 70.

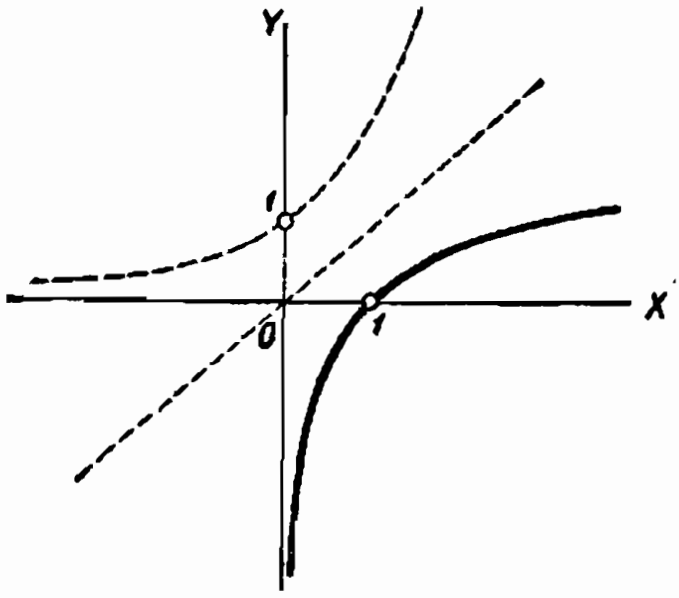


Рис. 70

Из этого рисунка мы непосредственно усматриваем, что:

1) *логарифмическая функция $\log_a x$ есть непрерывная функция на положительной части OX оси абсцисс, причем она*

отрицательна *на промежутке* (0, 1), *возрастая от* $-\infty$ *до нуля,* и положительна *на промежутке* $(1, +\infty)$, *возрастая от нуля до* $+\infty$;

2) для отрицательных значений аргумента x *функция* $\log_a x$ *не существует:* отрицательные числа не имеют логарифмов *(в области действительных чисел);*

3) $\log_a 1 = 0$ *при любом основании* a, $a > 1$.

До точки $x = 1$ логарифмическая кривая течет *под осью OX: логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны;* после этой точки кривая возвышается *над* осью *OX: логарифмы чисел, больших единицы, положительны.* При x, безгранично возрастающем, $\log_a x$ также безгранично возрастает, что условно (ибо бесконечность не есть число и логарифма не имеет) записывают в виде символического равенства

$$\log_a (+\infty) = +\infty.$$

Натуральные логарифмы, переход от них к обыкновенным логарифмам и обратно. Мы видим, что всякому основанию a, $a > 1$ соответствует своя собственная логарифмическая кривая $y = \log_a x$ и, значит, своя собственная система логарифмов. Таким образом, систем логарифмов имеется бесчисленное множество.

Но на самом деле употребительны только *две* системы логарифмов:

I. Система *логарифмов Бригга,* называемых иногда *обыкновенными,* или *десятичными,* логарифмами. В этой системе за основание a взято число 10, $a = 10$.

II. Система *логарифмов Непера,* называемых часто *натуральными,* или *гиперболическими,* логарифмами. В этой системе за основание a взято одно особенное иррациональное число, обозначаемое буквой e, приближенную величину которого нетрудно запомнить

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ \ldots$$

Таким образом, если y есть десятичный логарифм числа x, то имеем $10^y = x$, и если y есть натуральный логарифм числа x, то имеем $e^y = x$.

При первом знакомстве с теорией логарифмов кажется вполне естественным взять за основание системы логарифмов число 10, т. е. употреблять всегда бригговы логарифмы. Эта естественность обусловливается прежде всего нашей привычкой выражать целые числа в десятичной системе счисления и пользоваться десятичными дробями в наших выкладках: таким образом, взять число 10 за основание логарифмов побуждают, собственно, соображения практического порядка.

Однако более глубокое знакомство с логарифмами и логарифмическими функциями обнаруживает, что принятие числа 10 за основание является *случайным* обстоятельством и влечет за собой в дальнейшем такое усложнение формул, которое не может быть оправдано ни теоретическими, ни даже практическими соображениями.

Напротив, уже в элементах дифференциального исчисления представляется наиболее целесообразным принять за основание системы логарифмов не число 10, а вышеуказанное иррациональное число e.

Только при употреблении этого иррационального числа e, как основания логарифмов, формулы получают наиболее простой вид. Два иррациональные числа: e и $\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$ играют исключительно важную роль в математике: первое, e — в *анализе*, второе, π — *в геометрии*.

Логарифмы с основанием e называются *натуральными* логарифмами (или логарифмами Непера) и обозначаются просто

$$\ln N$$

без указания основания. Обозначение же $\lg N$ удерживается для десятичных логарифмов (логарифмов Бригга).

Мы предполагаем, что читатель из элементарной алгебры знаком с употреблением логарифмов Бригга $\lg N$ и умеет обращаться с таблицами этих логарифмов.

На первый взгляд может показаться, что одновременно с таблицами *бригговых* (десятичных) логарифмов, $\lg N$, необходимо иметь еще и таблицы натуральных логарифмов, $\ln N$. На самом деле это не так, потому что имеется очень простой способ перехода от одной системы логарифмов к другой, так что никакой новой таблицы уже не требуется.

В самом деле, пусть y есть логарифм числа x при основании a, т. е.

$$a^y = x.$$

Беря натуральный логарифм от обеих частей этого равенства, мы получаем:

$$y \ln a = \ln x. \tag{1}$$

Следовательно, если известен натуральный логарифм $\ln x$ числа x, мы будем иметь логарифм этого числа x при любом основании a простым умножением натурального логарифма на множитель $M = \frac{1}{\ln a}$. Этот множитель иногда называется *модулем* основания a. Значит, помножая всю таблицу натуральных логарифмов

на модуль M основания a, мы немедленно получим таблицу логарифмов при основании a.

Этот модуль M можно вычислить еще иначе: положим, в предыдущем равенстве (1) $x=e$. Тогда $\ln e=1$ (потому что всегда имеем $\log_a a=1$ при любом основании a), и, значит, $y=\frac{1}{\ln a}$. Но, с другой стороны, $y=\log_a x=\log_a e$. Значит,

$$\log_a e=\frac{1}{\ln a}=M.$$

И обратно: если известен логарифм числа x при основании a, мы немедленно получим *натуральный* логарифм этого числа простым умножением на число $\frac{1}{M}$, как показывает равенство (1).

В частности, для десятичных *(бригговых)* логарифмов

$a=10$ и $M=0{,}434\,294\,481\,903\ldots$, $\frac{1}{M}=2{,}302\,585\,092\,994\ldots$

Чтобы переходить от одних логарифмов к другим, надо пользоваться умножением на M и $\frac{1}{M}$;

$$\ln N=\frac{1}{M}\lg N;\quad \lg N=M\ln N.$$

Число e

Мы уже говорили, что наиболее целесообразной в теоретическом отношении является такая система логарифмов, в основание которых принято не число 10, а особенное иррациональное число e, называемое числом Непера или просто *числом* e, приближенная величина которого легко запоминаема:

$$e=2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ldots$$

Такая система логарифмов называется системой *натуральных* (или неперовых, или гиперболических) логарифмов. Натуральный логарифм какого-нибудь числа A обозначается просто

$$\ln A.$$

Самое введение в математический анализ числа e совершается при помощи следующей важной леммы:

Лемма. *Выражение* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, *где* n *есть целое положительное число, стремится к вполне определенному пределу, когда число* n *безгранично возрастает. Этот предел больше* 2 *и меньше* 3.

Действительно, вспомним бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}a^{n-k}b^k + \dots + b^n,$$

и положим в нем

$$a=1 \text{ и } b=\frac{1}{n}.$$

Тогда получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Полученную формулу крайне выгодно написать несколько иначе, так чтобы выявились некоторые ее свойства:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Для того чтобы понять как это делается, учащийся должен просто обратить свое внимание на общий (k-й) член предыдущей формулы и заметить, что в его числителе всех скобок имеется $k-1$ и что по сокращении первого множителя n со знаменателем n^k у нас в знаменателе останется n^{k-1}, значит, столько же множителей n, сколько в числителе скобок. А тогда, деля каждую скобку на одно n, мы и получаем выделенную последнюю формулу.

Свойства же последней формулы следующие:

С одной стороны, каждая из скобок есть число положительное, отсюда, заменяя всякую из этих скобок через *нуль,* мы получим в правой части нашего последнего равенства меньше того, что там ранее имелось; значит, всегда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

С другой стороны, каждая из этих скобок меньше единицы; отсюда, заменяя всякую из них *единицей,* а каждое из чисел 2, 3, 4, ..., находящихся в знаменателях перед скобками, просто *двойками,* мы получим в правой части нашего последнего равенства больше того, что там ранее имелось; значит,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Но правая часть этого неравенства всегда меньше 3, как учащийся легко убедится, вспомнив убывающую бесконечную геометрическую прогрессию

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

Итак, для любого целого положительного числа n мы имеем всегда:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Пусть теперь целое положительное число n начинает *безгранично возрастать*. Посмотрим, что происходит тогда с написанным выше разложением

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Прежде всего надо отметить, что *возрастает* число слагаемых в этом разложении и что, кроме того, все слагаемые этого разложения *положительны*. Затем следует заметить, что каждое слагаемое, рассматриваемое в отдельности, также *возрастает* по своей величине, ибо всякая скобка

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\quad \left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots$$

с увеличением числа n начинает возрастать, неограниченно приближаясь к своему пределу 1.

Так как сумма всех этих слагаемых и дает величину выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то отсюда необходимо заключить, что с *увеличением целого положительного числа n выражение* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *возрастает по своей ее величине.*

Итак, когда n безгранично возрастает, выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ есть положительная переменная величина, все время возрастающая, но остающаяся все время меньше 3. Поэтому эта переменная величина необходимо стремится к пределу [1], когда n безгранично возрастает, причем этот предел, очевидно, не меньше 2 и

[1] Опираясь на теорию иррациональных чисел, нетрудно доказать, что *всякая возрастающая переменная величина, остающаяся притом всегда меньше некоторого числа, необходимо стремится к пределу.* Не имея возможности расширить рамки нашей книги, мы примем этот факт просто как *принцип*, не входя в его обоснование. Геометрически этот принцип эквивалентен утверждению, что точка, движущаяся всегда в одном и том же самом направлении и не уходящая бесконечно далеко, необходимо приближается к некоторому определенному предельному положению.

не больше 3, раз сама переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ всегда находится между этими границами.

Доказанная лемма позволяет дать следующее определение.

Определение. *Предел выражения*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

когда натуральное число n возрастает безгранично, называется неперовым числом и обозначается буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Мы выше видели, что число e заключено между 2 и 3. Приближенная величина e следующая:

$$e=2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45.$$

Примечание. На примере числа e учащийся ясно видит, как нельзя быть легкомысленным и неосторожным в обращении с пределами и с бесконечностью. Ведь учащийся прекрасно мог «рассуждать» и так: «Мне надо найти предел

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

когда n безгранично увеличивается; очень хорошо: я и сделаю $n=\infty$. Тогда

$$\frac{1}{\infty}=0$$

и значит,

$$1+\frac{1}{\infty}=1+0=1.$$

Значит, мне надо 1 возвысить в бесконечную степень. Но так как

$$1^2=1,\quad 1^3=1,\quad \ldots,\quad 1^n=1,$$

то и в пределе я получу $1^\infty=1$. Значит,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\text{».}$$

Заключение, как мы видим, *совершенно ложное* и происходящее от того, что учащийся в выражении

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

сначала в скобке сделал $n=\infty$, положив

$$\lim\frac{1}{n}=0,$$

и уже *потом* в показателе скобки $(\ )^n$ сделал $n=\infty$.

На самом же деле *бесконечность* ∞ *не есть число*, и сначала вычислять $1+\frac{1}{n}$ при $n\to+\infty$ и уже после этого вычислять $(\ )^n$ при $n\to+\infty$ недопу-

стимо. В действительности нужно n безгранично увеличивать, одновременно и в скобке, и в показателе скобки. И когда мы это будем делать, то мы увидим, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7\ldots,\ \text{а не } 1.$$

Учащийся, безусловно, прав, когда в отдельности заключал, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

и что

$$\lim_{n\to+\infty} 1^n = 1.$$

Порознь так рассуждать можно. Когда n еще обозначает *число* (целое положительное и, значит, конечное), учащийся, вычисляя выражение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

имеет право *сначала* вычислить внутри скобки сумму $1+\frac{1}{n}$ и уже потом вычислить степень скобки $(\ )^n$. Но с символом ∞ этого нельзя делать, потому что этот символ не есть число, и тут уже надо одновременно увеличивать n и в скобке и в показателе.

Мы только что доказали, что выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где n означает *натуральное* число (т. е. целое положительное), имеет своим пределом число Непера e, когда n безгранично увеличивается:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Простые выкладки[1] обнаруживают, что *рассматриваемое* выражение продолжает иметь своим пределом число Непера e не только тогда, когда n, будучи натуральным числом, безгранично увеличивается, но и тогда, когда n стремится к $+\infty$, пробегая все положительные числа как целые, так и дробные и даже иррациональные. Более того, оказывается, что предел будет тот же самый, если n даже стремится к $-\infty$, пробегая все отрицательные (соизмеримые или несоизмеримые) числа.

Таким образом, имеется предложение:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

когда переменное n неограниченно увеличивается по абсолютной величине, пробегая какие угодно значения: $|n|\to+\infty$.

---

[1] Учащийся может найти эти выкладки в более обширном курсе по математическому анализу. Мы не приводим их, потому что они длинны, неинтересны и не могут дать учащемуся никакой новой мысли. Простая же *проверка* указываемого ниже факта еще не может служить оправданием помещения ее в кратком учебнике анализа.

Из этого предложения вытекает следующая важная теорема, ради которой, собственно, в математический анализ введено число Непера e.

Теорема. *Функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ аргумента x непрерывна в точке $x=0$, стремясь к числу Непера e как к пределу, когда аргумент x стремится к нулю.*

Доказательство. Аргумент x в выражении функции

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

может быть каким угодно: как *положительным,* так и *отрицательным,* за одним лишь исключением: он не может быть равным нулю, потому что при $x=0$ *формула*

$$(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

дающая *функцию* y, разрушается, переставая иметь какой-либо смысл.

Таким образом, мы как будто бы сначала вправе ожидать при $x=0$ разрыва рассматриваемой функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Однако это лишь *кажущийся разрыв,* и «истинная величина» функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$ равна числу Непера e.

Для того чтобы убедиться в этом, положим $x=\frac{1}{n}$. Тогда выражение $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ перепишется в виде $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Если x безгранично приближается к нулю безразлично каким способом, т. е. пробегая по положительным или отрицательным числам, абсолютная величина переменного n безгранично возрастает, так что $|n|\to+\infty$. А мы видели, что в этих условиях $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Следовательно, численная величина функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ безгранично приближается к числу Непера e, когда абсолютная величина $|x|$ аргумента x безгранично умаляется.

Полное построение графика рассматриваемой функции не может быть произведено без дифференциального исчисления, т. е. с помощью одних только элементарных методов. Забегая вперед, мы укажем учащемуся, что график функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет вид, изображенный на рисунке 71.

Таким образом, это есть непрерывная кривая, формой напоминающая одну ветвь гиперболы. Она спускается из $+\infty$ при значении $x=-1$ и идет, все время ниспадая, но, однако, оставаясь

все время выше прямой $y=1$. К этой последней кривая безгранично приближается, когда аргумент x стремится к $+\infty$. Итак, кривая имеет две асимптоты: прямую $x=-1$ и прямую $y=1$, к которым она безгранично приближается.

Ось Y пересекается нашей кривой в точке $y=e$, как мы это и обнаружили. Таким образом, разрыв кривой

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

при $x=0$ был лишь кажущимся, обязанным не недостаткам самой кривой, а лишь недостатку выражающей ее формулы

$$(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

случайно утрачивающей свой числовой смысл при $x=0$.

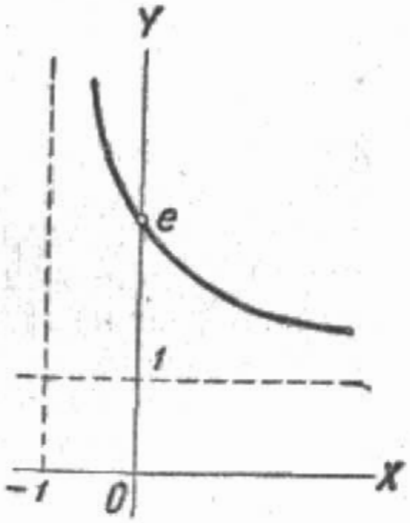


Рис. 71

Тот факт, что функция $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *убывает* на всем промежутке

$$(-1<x<+\infty),$$

можно обнаружить, лишь употребляя могущественные методы дифференциального исчисления.

Натуральные логарифмы обладают следующим характерным свойством: по мере приближения величины α к нулю как своему пределу — безразлично каким способом — мы всегда будем иметь равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\ln\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\ln\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\ln e=1,$$

ибо логарифм есть непрерывная функция, и, значит, можно переходить к пределу под его знаком (см. § 42).

ГЛАВА VI

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 49. Введение. Теперь мы должны перейти уже к *систематическому* исследованию того, каким именно образом изменяется величина y рассматриваемой функции $y=f(x)$ при изменении аргумента x. Основная задача дифференциального исчисления состоит в планомерной оценке этого изменения численного значения функции.

Указанная планомерная оценка изменения *величины функции*, происходящего по причине изменения величины *аргумента*, достигается сравнительной оценкой *приращений* функции и аргумента.

§ 50. Приращение. Вообще *приращением* какой-либо переменной величины, переходящей от прежнего численного значения к новому, называется тот прибавок, который надо придать к ее *прежнему* значению для того, чтобы получить ее *новое* значение. Значит, *приращение* переменной величины есть просто *разность* между новым значением и прежним, получаемая вычитанием прежнего значения из нового [1].

Приращение переменной величины x обозначается символом Δx, так что если *прежнее* значение этой переменной величины обозначено буквой x, то *новое* (наращенное) ее значение будет

$$x+\Delta x.$$

Символ Δx произносится «дельта x». Предупреждаем учащегося, что символ этот никоим образом нельзя читать «дельта, умноженная на x», или «дельта раз x», потому, что буква Δ неотделима от буквы x, без которой она не имеет никакого смысла; учащийся уже знаком с аналогичным явлением в элементарной

[1] Для более подробного знакомства с понятием *приращения* учащийся должен обратиться к §§ 17, 24 и 26.

алгебре, где lg A имеет определенный численный смысл, обозначая логарифм числа A, тогда как буквы l и g, оторванные от буквы A, не имеют в отдельности никакого численного смысла.

Очевидно, что *приращение* переменной величины вовсе необязательно положительно: оно будет отрицательным, когда *новое* значение *меньше прежнего*; это будет, например, когда переменная величина у б ы в а е т.

Аналогичным образом
Δy означает приращение y,
Δz означает приращение z,
$\Delta\varphi$ означает приращение переменного φ,
$\Delta f(x)$ означает приращение функции $f(x)$ и т. д.

Если в равенстве $y=f(x)$ независимое переменное x получит приращение Δx, то под Δy всегда разумеют соответствующее приращение функции $f(x)$, т. е. приращение зависимого переменного y.

Следует приращение Δy отсчитывать всегда от определенного начального значения y, соответствующего тому произвольно взятому начальному значению x, от которого отсчитывается приращение Δx. Рассмотрим, например, функцию

$$y=x^2.$$

Взяв за начальное значение $x=10$, получаем начальное значение $y=100$.

Пусть x увеличено до $x=12$, т. е. $\Delta x=2$; тогда y возросло до $y=144$, значит $\Delta y=144-100=44$.

Пусть x уменьшено до $x=9$, т. е. $\Delta x=-1$; тогда y убыло до $y=81$, следовательно, $\Delta y=81-100=-19$.

Вообще, если функция $y=f(x)$ *возрастающая,* как, например, наша x^2 в промежутке $0<x<+\infty$, то ясно, что если Δx положительно, то и Δy будет положительным, и если Δx отрицательно, то и Δy тоже будет отрицательным. Значит, оба приращения, Δx и Δy, в этом случае имеют всегда *одинаковые* знаки.

Если же функция $y=f(x)$ *убывающая,* то положительному Δx отвечает, очевидно, отрицательное Δy, потому что *новое* значение y *меньше прежнего,* а отрицательному Δx отвечает уже положительное Δy, ибо теперь *новое* значение функции *больше прежнего.* Значит, Δx и Δy в этом случае всегда будут противоположных знаков.

Наконец, мы знаем (см. § 43), что если функция

$$y=f(x)$$

непрерывна в точке x и если приращение Δx аргумента стремится к нулю:

$$\lim \Delta x = 0,$$

то и приращение Δy функции также будет *стремиться к нулю*:

$$\lim \Delta y = 0,$$

т. е. оба приращения, Δx и Δy, суть *одновременно величины бесконечно малые*.

§ 51. Сравнение приращений. Возьмем функцию

$$y = x^2. \tag{1}$$

Пусть *начальное* значение аргумента есть x, и пусть это начальное значение x получает *приращение* Δx.

Значит,

x есть *начальное (прежнее)* значение аргумента

и

$x + \Delta x$ есть *новое (наращенное)* значение аргумента.

Если аргумент имеет *прежнее* значение, то и вся функция имеет тоже *прежнее* значение, поэтому обе части равенства

$$y = x^2$$

являются *начальным (прежним)* значением функции.

Когда же аргумент делается *новым (наращенным)*, то и соответственное значение функции становится точно так же *новым (наращенным)*; поэтому обе части равенства

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \tag{2}$$

являются *новым (наращенным)* значением функции.

Чтобы найти приращение Δy функции, нам теперь достаточно просто вычесть из нового равенства (2) прежнее равенство (1). Это вычитание нам даст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2,$$

или раскрыв скобку и сделав приведение подобных членов:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2. \tag{3}$$

Мы теперь получили приращение Δy функции, выразив его через начальное значение x аргумента и через приращение Δx аргумента.

Если это приращение Δx аргумента начинает стремиться к нулю, т. е. делается *бесконечно малым*, $\lim \Delta x = 0$, тогда и соответственное приращение Δy функции также будет стремиться

к нулю, $\lim \Delta y = 0$, т. е. тоже будет *бесконечно малым*, как это обнаруживает найденная величина (3) приращения Δy функции.

Таким образом, мы имеем два *бесконечно малые*:

$$\Delta x \text{ и } \Delta y.$$

Чтобы сравнить между собой эти два бесконечно малые, разделим второе, Δy, на первое, Δx, т. е. составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для вычисления величины этого отношения достаточно просто разделить обе части равенства (3) на Δx, что дает нам:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x. \tag{4}$$

Чтобы видеть, каким образом одновременно изменяются приращения Δx и Δy, возьмем определенное числовое начальное значение аргумента, например, возьмем $x = 4$.

В этом случае предшествующая формула (4) нам даст:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Если мы хотим проследить тщательнее, каким образом изменяется отношение приращений Δy и Δx, когда приращение Δx начинает делаться все меньше и меньше, обратимся к табличке:

Начальное значение x аргумента	Новое значение аргумента	Приращение Δx аргумента	Начальное значение y функции	Новое значение функции	Приращение Δy функции	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5,0	1,0	16	25	9	9
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8,8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,01

Мы видим, что по мере уменьшения приращения Δx аргумента уменьшается и приращение Δy функции, но их отношение равно последовательно числам

$$9;\ 8{,}8;\ 8{,}6;\ 8{,}4;\ 8{,}2;\ 8{,}1;\ 8{,}01;$$

мы видим здесь на деле, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постепенно приближается к числу 8. И мы, действительно, теоретически уже знаем,

что это отношение можно как угодно близко подвести к 8, сделав надлежаще малым приращение Δx аргумента, ибо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

при начальном значении $x = 4$ аргумента.

§ 52. Производная функция одного переменного. Основное определение дифференциального исчисления таково:

Производная данной функции есть предел отношения приращения этой функции к приращению независимого переменного, когда это последнее приращение приближается к нулю как своему пределу.

Когда предел этого отношения существует и есть конечное число, тогда говорят, что данная функция *дифференцируема*, или что она *имеет производную* (обладает производной).

Вышеприведенное словесное определение можно дать в более сжатой *символической (математической)* форме следующим образом.

Дана непрерывная функция

$$y = f(x). \tag{1}$$

Пусть аргумент x получает приращение Δx. Тогда величина y функции получит приращение Δy, и новым значением функции будет

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

Чтобы получить приращение Δy функции, достаточно вычесть из равенства (2) равенство (1); находим:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{3}$$

Разделив обе части этого равенства на приращение Δx аргумента, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Так вот, *предел* этого отношения, когда приращение Δx аргумента приближается к пределу, равному нулю, по только что данному словесному определению, и есть *производная*.

Оказалось, по мере развития естествознания, что разрешение весьма многочисленных и крайне разнообразных задач сводится к вычислению *пределов* отношений вида (4). Поэтому *предел* отношения (4) получил особое имя «*производная*», и ему дано особенное стилизованное обозначение, такое, в котором как бы уцелели для нашей памяти *следы* самого *происхождения* этого *предела*. Именно производная обозначается символом

$$\frac{dy}{dx},$$

так что мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5}$$

или, более подробно:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6}$$

Это равенство и определяет *производную от функции* y [или от $f(x)$] *по переменному* x.

Процесс отыскания производной от функции называется *дифференцированием* ее.

Следует хорошо заметить, что производная есть предел отношения, но отнюдь не *отношение пределов*, ибо последнее отношение ввиду того, что Δx и Δy суть бесконечно малые, т. е. имеющие своим пределом нуль, должно написаться в виде $\frac{0}{0}$, а это есть полная неопределенность.

§ 53. Различные обозначения производной. До перехода к своему пределу, значит, *во всякий момент времени*, приращения Δx и Δy всегда конечны и имеют определенные численные значения. При этом первое приращение Δx, т. е. приращение аргумента, как всецело находящееся в нашем распоряжении, всегда может быть взято *отличным от нуля*. Поэтому отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

до своего перехода к пределу есть самая настоящая *дробь*, ибо до перехода к пределу тут есть и числитель и знаменатель, причем этот последний отличен от нуля.

Когда же мы отыщем *предел* этого отношения, т. е. когда мы вычислим производную

$$\frac{dy}{dx},$$

то эта производная есть просто только отвлеченное *число* (как всякий вообще предел) и уже не дробь, ибо в этом отвлеченном конечном числе, вычисленном как предел, мы не в состоянии более различать ни числителя, ни знаменателя. Поэтому на символ

$$\frac{dy}{dx}$$

нельзя смотреть как на неизменную *настоящую дробь*, но его следует рассматривать лишь как *предел* некоторой переменной истинной дроби. Тот факт, что эта переменная истинная дробь ранее писалась нами в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, отпечатлелся в несколько сти-

лизованном обозначении предела этой истинной дроби в виде $\frac{dy}{dx}$. Но учащийся должен помнить, что символ производной

$$\frac{dy}{dx}$$

отнюдь не есть истинная дробь и что поэтому отдельные частицы этого символа

$$dy \text{ и } dx$$

суть лишь символические (условные) числитель и знаменатель, не имеющие в отдельности пока ни малейшего числового смысла, если их брать порознь. Значит, все части символа $\frac{dy}{dx}$ являются крепко связанными между собой одним общим смыслом и неотделимы друг от друга (вроде того, как неотделимы буквы l и g друг от друга в символе логарифма $\lg N$). Поэтому мы должны рассматривать символ $\frac{dy}{dx}$ как *нечто цельное*[1].

То обстоятельство, что символ производной $\frac{dy}{dx}$ не есть настоящая дробь, и позволяет нам так свободно обращаться с этим символом, как мы никогда не рискнули бы, если бы символ $\frac{dy}{dx}$ был истинной дробью, с настоящими числителем и знаменателем. Так, производная функции

$$y=f(x)$$

не только обозначается в виде

$$\frac{dy}{dx}$$

или

$$\frac{df(x)}{dx},$$

но даже так:

$$\frac{d}{dx}f(x),$$

[1] В дальнейшем, именно в главе XII (в учении о дифференциале), учащийся познакомится с возможностью рассматривать символ производной $\frac{dy}{dx}$ как истинную дробь, с конечными числителем и знаменателем. Пока же читатель должен отказаться от толкования символа $\frac{dy}{dx}$ как дроби и должен рассматривать его как нечто цельное, без числителя и без знаменателя.

сильно опуская вниз значок функции $f(x)$. Здесь на символ

$$\frac{d}{dx},$$

очевидно, надо смотреть лишь как на слово «*производная*», которое он и заменяет.

Так, например, производная от функции $y=x^2$ может быть написана в виде $\frac{d(x^2)}{dx}$ или $\frac{d}{dx}(x^2)$. Аналогично производная от функции

$$y=3x^5-6x+\sqrt{x}$$

может быть обозначена через

$$\frac{d}{dx}(3x^5-6x+\sqrt{x}).$$

Учащийся отметит, что отношение приращений

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

до своего перехода к пределу зависит от *двух* переменных величин:

a) *от начального значения x аргумента*

и

b) *от величины приращения Δx аргумента.*

Так, например, когда рассматривают функцию $y=x^2$, то, согласно сделанным выше вычислениям, имеют для отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Но когда ищут *предел* этого отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращений, заставив приращение Δx аргумента стремиться к нулю, т. е. делая $\lim \Delta x=0$, тогда, разумеется, этот предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

перестает уже зависеть от исчезающего Δx, потому что во время отыскания указанного предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

начальное значение x аргумента предполагается *постоянной* величиной, а всякий вообще предел переменной величины есть величина постоянная. Поэтому предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, будучи величиной

постоянной, может оказаться зависящим только от начального значения аргумента x. Значит, этот предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. сама производная

$$\frac{dy}{dx},$$

окажется выражением, содержащим только букву x, и значит, это будет *некоторая новая функция аргумента* x.

Эта новая функция аргумента x, будучи *выведена* из данной функции $y=f(x)$ аргумента x или, иначе говоря, будучи *произведенной* данной функцией $y=f(x)$, и получила по этой причине имя *производной функции от данной функции* $y=f(x)$.

То обстоятельство, что эта новая функция выведена из данной функции $y=f(x)$ с помощью некоторого процесса или, еще иначе, что она произведена данной функцией $y=f(x)$ с помощью некоторого процесса, часто ставят на вид, обозначая производную просто такими символами:

$$y' \quad \text{или} \quad f'(x),$$

т. е. постановкой вверху функции *ударения*, или *штриха* (′).

Таким образом, если данная функция есть

$$y=f(x),$$

то ее производная пишется *шестью* способами:

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{df(x)}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}y \text{ или } \frac{d}{dx}f(x),$$

$$y' \quad \text{или} \quad f'(x).$$

Наиболее часто для производной от данной функции $y=f(x)$ пишут равенство:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

читая его вслух следующим образом: *производная от* y *по* x *равна эф штрих икс.*

Символ же

$$\frac{d}{dx},$$

рассматриваемый сам по себе, называется *знаком дифференцирования* и просто показывает, что функцию, за ним написанную, нужно продифференцировать по букве x.

Пример. *Вычислить и изобразить производную от функции* $y=x^2$.

Решение. Согласно сделанным выше для этой функции вычислениям, имеем для отношения приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$. Заставляя в этом равенстве приращение аргумента Δx стремиться к нулю, т. е. делая $\lim \Delta x=0$, мы находим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$, ибо Δx есть бесконечно малое; значит, производная от функции $y=x^2$ равна в точности $2x$. Найденный результат записывают, наконец, в виде одного из шести равенств:

$$\frac{dy}{dx}=2x;\quad \frac{d}{dx}y=2x;\quad y'=2x;\quad \frac{d(x^2)}{dx}=2x;\quad \frac{d}{dx}(x^2)=2x;\quad (x^2)'=2x.$$

§ 54. Дифференцируемые функции. Легко видеть, что *только непрерывные* функции $y=f(x)$ могут обладать производными.

Действительно, раз производная от функции $y=f(x)$ *существует* при начальном значении x аргумента, то это значит, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть переменная величина, стремящаяся к совершенно определенному конечному числовому пределу (к производной), когда приращение Δx стремится к нулю. Следовательно, тем самым это отношение есть *ограниченная* переменная величина (§ 33). С другой стороны, величина Δx есть *бесконечно малая*, ибо по условию $\lim \Delta x=0$. А так как произведение ограниченной переменной величины на величину бесконечно малую есть опять величина бесконечно малая (§ 34), то отсюда следует, что произведение

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x=\Delta y$$

есть величина *бесконечно малая*. Значит имеем:

$$\lim \Delta y=0.$$

А это и есть *определение непрерывности функции* $y=f(x)$ в точке x (§ 43).

Таким образом, *разрывные функции заведомо не имеют никакой производной в точках разрывов.*

Однако обратное заключение не всегда верно; в самом деле, в настоящее время известны функции, которые, *будучи непрерывными,* тем не менее *не имеют производной.* Но такие функции вообще не встречаются в прикладной математике, а *в этой книге будут рассматриваться только дифференцируемые функции,* т. е. функции, имеющие производную для всех значений независимого переменного, за исключением, разве, некоторых отдельных его значений.

Построение непрерывных функций, не имеющих производной, является поучительным эпизодом в истории математики. Вначале просто считали, что

всякая функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ всюду, кроме исключительных численных значений аргумента x. По этому поводу говорили: «Нет движения без скорости, кривой без касательной, функции без производной». Потом в научное сознание постепенно стала входить мысль о необходимости иметь точное доказательство существования производной $f'(x)$ у всякой непрерывной функции $f(x)$. На важности, имея индивидуальную непрерывную функцию $f(x)$, каждый раз доказывать существование ее производной $f'(x)$ со всею определенностью настаивал наш знаменитый геометр Н. И. Лобачевский еще задолго до развития критической деятельности Вейерштрасса. Затем были сделаны серьезные попытки известными математиками (Дюгамель и др.) доказать это существование. Безуспешность этих попыток теперь понятна, потому что хотели доказать ложную теорему; и, действительно, всякий раз обнаруживалось, что, кроме непрерывности, бессознательно вносилось в процесс доказательства еще какое-нибудь ограничительное предположение, например, что кривая $y=f(x)$ содержит дуги *конечной* длины. Затем Вейерштрасс дал пример непрерывной функции $f(x)$, не имеющей производной. Но, при расследовании, его пример оказался не вполне убедительным, так как и его функция $f(x)$ в действительности имела производную $f'(x)$ в некоторых точках *всякого* произвольно малого промежутка δ. Наконец, А. С. Безикович дал решающий пример непрерывной функции $f(x)$, действительно не имеющей производной (конечной или бесконечной) ни в какой точке x оси OX.

§ 55. Общее правило дифференцирования. Из определения производной следует, что процесс дифференцирования функции $y=f(x)$ распадается на следующие отдельные ступени.

Первый шаг. *В функцию вместо x подставляем $x+\Delta x$, что дает новое значение функции, т. е. $y+\Delta y$.*

Второй шаг. *Вычитаем данное значение функции из ее нового значения и таким образом находим излишек Δy (приращение функции).*

Третий шаг. *Делим излишек Δy (приращение функции) на Δx (на приращение независимого переменного).*

Четвертый шаг. *Находим предел частного, когда Δx (приращение независимого переменного) приближается к пределу, равному нулю. Это и будет искомая производная.*

Учащийся должен самым основательным образом усвоить себе это правило, прилагая его к возможно большему числу примеров.

Три подобные примера приводим со всеми деталями вычислений. Следует принять во внимание, что в четвертом шаге пользуются теоремами о пределах (§ 35), причем рассматривают букву x как *постоянное*.

Пример 1. Дифференцировать $3x^2+5$.

Решение. Положив $y=3x^2+5$, прилагаем последовательные шаги, указанные в общем правиле.

Первый шаг.

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5.$$

Второй шаг.

$$\begin{array}{rl} y+\Delta y = & 3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ -\ y = & 3x^2 \qquad\qquad +5 \\ \hline \Delta y = & 6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{array}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\cdot\Delta x.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx}=6x.$$

Можно написать ответ еще так:

$$y'=\frac{d}{dx}(3x^2+5)=6x.$$

Пример 2. Дифференцировать x^3-2x+7.

Решение. Полагаем

$$y=x^3-2x+7.$$

Первый шаг.

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7=$$
$$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7.$$

Второй шаг.

$$\begin{array}{rl} y+\Delta y = & x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+7 \\ -\ y = & x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad -2x \qquad\quad +7 \\ \hline \Delta y = & 3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 \qquad -2\cdot\Delta x \end{array}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-2$$

или

$$y'=\frac{d}{dx}(x^3-2x+7)=3x^2-2.$$

Пример 3. Дифференцировать $\frac{c}{x^2}$.

Решение. Полагаем

$$y=\frac{c}{x^2}.$$

Первый шаг.

$$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}.$$

Второй шаг.

$$\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}-\frac{c}{x^2}=\frac{-c\cdot\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-c\cdot\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{2c}{x^3}$$

или

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3}.$$

ЗАДАЧИ

Дифференцировать следующие функции, пользуясь общим правилом.

1. $y = 4x^2$. Отв. $\frac{dy}{dx} = 8x$.
2. $y = 3 - x^2$. » $\frac{dy}{dx} = -2x$.
3. $s = 2 - 5t$. » $\frac{ds}{dt} = -5$.
4. $\rho = \theta^3 - 3\theta$. » $\frac{d\rho}{d\theta} = 3\theta^2 - 3$.
5. $y = mx + b$. » $\frac{dy}{dx} = m$.
6. $z = 3t^2 - 2t^3$. » $\frac{dz}{dt} = 6t - 6t^2$.
7. $y = \frac{2}{x^3}$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^5}$.
8. $y = \frac{x^2}{2}$. » $\frac{dy}{dx} = x$.
9. $s = \frac{1}{2t+1}$. » $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{(2t+1)^2}$.
10. $\rho = \frac{1}{1-\theta}$. » $\rho' = \frac{1}{(1-\theta)^2}$.
11. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. » $y' = x^2 - 1$.
12. $y = \frac{1-x}{x}$. » $y' = -\frac{1}{x^2}$.
13. $y = \frac{x}{1-x}$. » $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$.
14. $y = \frac{x+2}{x^2}$. Отв. $y' = -\frac{x+4}{x^3}$.
15. $y = \frac{1}{x^2+1}$. » $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
16. $u = \frac{v}{v^2+1}$. » $u' = \frac{1-v^2}{(v^2+1)^2}$.
17. $s = \frac{at+b}{ct+d}$. » $s' = \frac{ad-bc}{(ct+d)^2}$.
18. $y = (x+2)^2$. » $y' = 2x + 4$.
19. $y = 5x^2 - 6x + 7$.
20. $s = 4 - t - 3t^2$.
21. $\rho = 9\theta - 3\theta^2$.
22. $y = (a-x)^2$.
23. $y = (x+1)(x+2)$.
24. $y = (3+x)(4-x)$.
25. $y = (b+x)^2$.
26. $y = \frac{x^2 - 2x}{2}$.
27. $y = \frac{x+2}{x-2}$.
28. $s = \frac{t}{1-t^2}$.
29. $y = \frac{x^2}{2x+1}$.
30. $y = \frac{x^2}{2-x}$.

§ 56. Геометрический смысл производной. Мы сейчас рассмотрим теорему, являющуюся самой основной во всех приложениях дифференциального исчисления к геометрии. Для этого необходимо напомнить определение *касательной* к кривой линии в какой-нибудь ее точке M.

На рисунке 72 секущая S проведена через данную неподвижную точку M кривой и через близкую к ней точку M', также лежащую на кривой. Пусть M' движется по кривой и безгранично приближается к M. Тогда секущая S поворачивается около M и

ее предельное положение T и есть касательная прямая к кривой AB в точке M.

Пусть, действуя, например, приемами аналитической геометрии на плоскости, нам удалось составить уравнение в декартовых координатах для кривой AB, и пусть это уравнение, разрешенное относительно ординаты y, будет

$$y = f(x).$$

В этом случае эта кривая явится графиком функции $f(x)$.

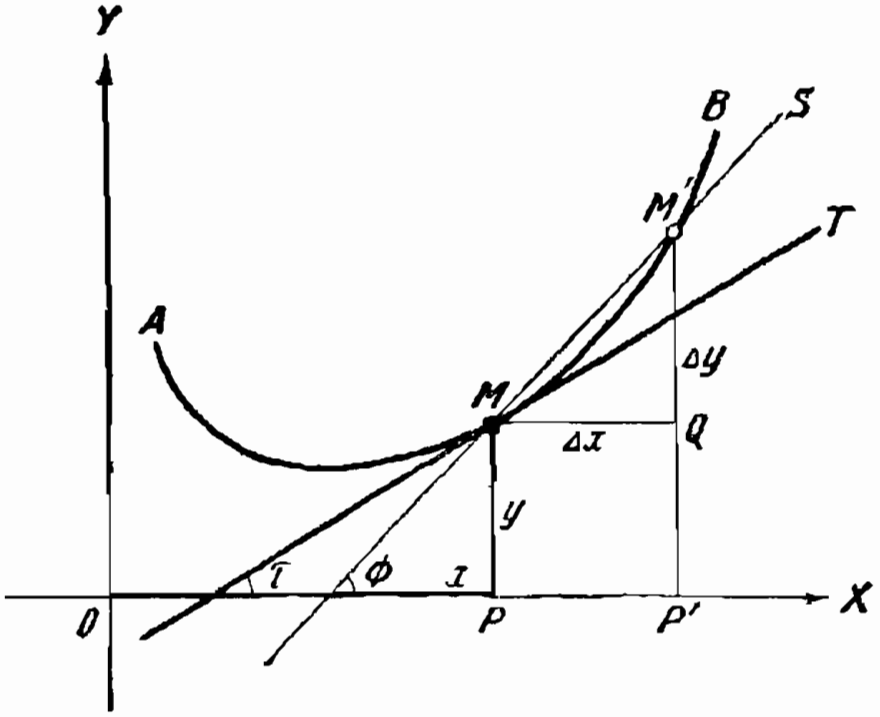


Рис. 72.

Будем теперь дифференцировать функцию $f(x)$ по общему правилу, причем мы будем истолковывать геометрически каждый шаг этого правила на рисунке.

Мы начали с того, что взяли на кривой точку $M(x, y)$ и еще другую точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$, близкую к M, тоже лежащую на кривой.

Первый шаг. $y+\Delta y = f(x+\Delta x) = P'M'$.

Второй шаг.
$$\begin{array}{rll} y+\Delta y = f(x+\Delta x) & = P'M' \\ \underline{y \quad\quad = f(x)} & = PM = P'Q \\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) & = QM'. \end{array}$$

Третий шаг. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{QM'}{PP'} = \dfrac{QM'}{MQ} =$
$= \operatorname{tg} QMM' = \operatorname{tg}\Phi =$ тангенсу наклона секущей MS к горизонту (т. е. к оси OX абсцисс).

Значит, отношение приращения Δy функции к приращению Δx аргумента есть не что иное, как тангенс наклона[1] секущей, проведенной через точки $M(x, y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ графика функции $f(x)$.

Для геометрического истолкования четвертого шага мы рассматриваем x как величину *постоянную*. Вследствие этого точка M на кривой *неподвижна*. Но Δx начинает изменяться и безгранично приближаться к нулю. Сообразно этому, точка M' приходит в движение и начинает, *двигаясь по кривой,* безгранично приближаться к M, как к своему предельному положению. На рисунке

$$\Phi = \text{наклону секущей } MS;$$
$$\tau = \text{наклону касательной } MT.$$

Значит, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Phi = \tau$. Так как тангенс есть функция *непрерывная* для всех численных значений аргумента (кроме значений вида $m\frac{\pi}{2}$, где m положительное или отрицательное нечетное число), то геометрический смысл четвертого шага будет следующий:

Четвертый шаг. $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\Phi = \operatorname{tg}\tau =$

$= \textit{тангенсу наклона касательной } MT.$

Таким образом мы получили важное предложение:

Численное значение производной в какой-нибудь точке кривой равно тангенсу наклона касательной в этой точке кривой к горизонту (т. е. к оси абсцисс).

Эта-то именно задача о проведении касательной и привела Лейбница[2], со своей стороны, к открытию дифференциального исчисления.

Пример. Найти наклоны касательных к параболе $y = x^2$ в вершине и в точке $x = \frac{1}{2}$.

---

[1] В дальнейшем, говоря о *«наклоне»*, мы всюду будем иметь в виду, что наклон — это угол, образуемый линией с осью абсцисс OX, всегда принимаемой за *горизонт*.

[2] Лейбниц (1646—1716), немецкий ученый, был уроженцем Лейпцига. Сведения об этом даны самим Лейбницем в его автобиографии.

Его выдающаяся изобретательная сила сказалась оригинальными исследованиями в различных областях знания. Свое открытие дифференциального исчисления впервые он обнародовал в форме краткой записки, появившейся на страницах ученого журнала «Acta Eruditorum» в Лейпциге, в 1684 г.

Решение. Дифференцируя по общему правилу, имеем $\frac{dy}{dx}=2x=$ = тангенсу наклона касательной в произвольно заданной точке $M(x, y)$ кривой.

Чтобы найти наклон касательной в вершине параболы, полагаем $x=0$ в выражении для $\frac{dy}{dx}$. Это нам дает

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Значит, касательная в вершине, имея нулевой наклон, параллельна оси абсцисс и, в нашем случае, просто совпадает с ней.

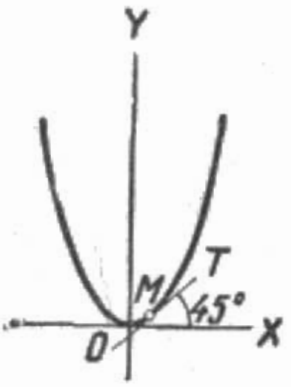


Рис. 73.

Чтобы найти наклон касательной в точке M, где $x=\frac{1}{2}$, мы полагаем $x=\frac{1}{2}$ в выражении для $\frac{dy}{dx}$. Это нам дает

$$\frac{dy}{dx}=1.$$

Значит, касательная в точке M делает угол в 45° с осью абсцисс (рис. 73).

ЗАДАЧИ

Найти дифференцированием наклон касательной к каждой из следующих кривых в указанной точке. Проверив результат, вычертить кривую и касательную прямую.

1. $y=4-x^2$, точка $x=2$. **Отв.** -4; 104°2′.
2. $y=4x-x^2$. $x=2$. » 0; 0°.
3. $y=\frac{9}{x}$, $x=3$. » -1; 135°.
4. $y=x^2-\frac{x}{2}$, $x=0$. » $-\frac{1}{2}$; 153°26′.
5. $y=x^3-3x$, $x=1$. » 0; 0°.
6. $y=2x-x^2$, $x=-1$. » -1; 135°.

В каждой из трех следующих задач найти: 1) точки пересечения данной пары кривых; 2) наклон касательной к той и к другой кривой; 3) угол между касательными в их точках пересечения.

7. $y=2-x^2$, $y=x^2$. **Отв.** Угол пересечения $=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\approx 53°8'$.
8. $y=x^2-5$, $y=3x-5$. » $\operatorname{arc\,tg}3\approx 71°34'$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{19}\approx 8°59'$.
9. $y=x^2-2x+1$, $y=7+2x-x^2$. » $\operatorname{arc\,tg}\frac{8}{15}\approx 28°4'$.
10. Найти угол пересечения двух кривых: $y=\frac{x^3}{4}$ и $y=6-x^2$ в точке (2,2).

ГЛАВА VII

ПРАВИЛА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 57. Важность общего правила. *Общее правило дифференцирования,* данное в предыдущей главе (§ 55), есть правило основное, найденное прямо из самого определения производной, и крайне важно, чтобы учащийся тщательно усвоил его. Однако процесс применения этого правила к конкретным случаям вообще есть вещь утомительная или даже трудная; вследствие этого, чтобы облегчить труд, из *общего правила* был выведен ряд специальных правил для быстрого дифференцирования выражений стандартного вида, часто встречающихся на деле.

Найдено было полезным выразить эти правила посредством формул, приводимых ниже.

Совокупность этих формул образует канон дифференциального исчисления, ибо это собрание является столь исчерпывающе полным, что позволяет продифференцировать уже *любую* произвольно написанную функцию, лишь бы она была представленной в законченном виде, т. е. написанной при помощи какого-нибудь *конечного* числа указанных в каноне действий.

Иначе говоря, после того, как канон дан, дифференцирование функции уже не нуждается ни в каком переходе к пределу и поэтому не требует от лица, отыскивающего производную, никакой изобретательности, а только простого внимания. Ибо после того, как канон сделан, дифференцирование является процессом, говоря образно, лишь *механическим,* следовательно, подчиненным определенному *алгоритму*, т. е. располагающимся в строго определенном русле вычислений, которые теперь не нуждаются ни в каких сторонних догадках, которые не представляют никакой неопределенности и которые поэтому *всегда* должны удаваться.

Этим каноном наука обязана Лейбницу, который достаточно долго искал канон и, наконец, дал его в указанных «Acta Eruditorum» (1684 г.) в приводимой ниже столь совершенной форме, что он быстро распространился и завоевал общее признание, отовсюду вытеснив систему обозначений, которая сначала вводилась Ньютоном.

Каких усилий этот канон стоил Лейбницу, это видно из того, что формула дифференцирования произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$ потребовала от Лейбница, по его собственному признанию, шесть недель прилежных поисков и размышлений, тогда как в настоящее время полный вывод этой формулы требует от учащегося на экзамене пять минут работы.

У Ньютона этого канона нет, один из создателей дифференциального и интегрального исчислений — Ньютон прибегал к приемам дифференцирования не в виде дифференциального *исчисления* как такового, т. е. не в общем виде, но пользовался этим приемом в отдельных конкретных случаях, каждый такой случай рассматривался заново. Такой же подход был у античных математиков, которые при рассмотрении конических сечений изучали каждую задачу заново, без связи с ранее решавшимися задачами. Лишь Декарт, с открытием им аналитической геометрии, радикально изменил положение дел и, введя общий метод *«кривых 2-го порядка»* (вместо рассматривавшихся отдельно конических сечений различных типов), сразу дал общий канон для решения этого рода задач.

Учащийся должен не только каждую формулу удержать в памяти, но и уметь соответствующее правило выразить словами. В этих формулах u, v и w означают функции от x; все эти функции предполагаются дифференцируемыми.

Формулы для дифференцирования

I. $\frac{dc}{dx}=0$ ($c=$ const, т. е. — постоянное).

II. $\frac{dx}{dx}=1$.

III. $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$.

IV. $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$.

V. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$.

VI. $\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$.

VI*. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$.

VII. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

VII*. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$.

VIII. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, *здесь y есть функция от u.*

IX. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, *здесь y есть функция от x.*

§ 58. Дифференцирование постоянного. Функция, о которой известно, что она сохраняет одно и то же значение (см. § 18) для всякого значения *независимого переменного*, есть *постоянное* количество, и можно ее обозначить буквой c:

$$y = c.$$

Когда x получает приращение Δx, функция не изменяет своей величины, т. е. $\Delta y = 0$, и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Поэтому мы имеем и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно,

I. $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Итак, *производная постоянного есть нуль.*

Этот результат легко можно было предвидеть. Ибо геометрическое место точек $y = c$ есть прямая линия, параллельная оси абсцисс; значит, ее наклон к горизонту равен нулю. А тангенс наклона и есть производная.

§ 59. Дифференцирование переменного по этому же самому переменному. Пусть

$$y = x.$$

Следуя *общему правилу*, мы имеем:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

Второй шаг.

$$\Delta y = \Delta x.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Четвертый шаг.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 1.$$

Следовательно,

II. $$\frac{dx}{dx} = 1.$$

Итак, *производная переменного по этому самому переменному равна единице.*

Этот результат также легко можно было предвидеть. Ибо наклон прямой $y = x$ к горизонту равен 45°, а tg 45° равен единице.

§ 60. Дифференцирование суммы (алгебраической). Пусть

$$y = u + v - w.$$

Следуя *общему правилу*, имеем:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w.$$

Второй шаг.

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

И так как имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx},$$

то отсюда следует (по § 35):

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Следовательно,

III. $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Подобным же образом доказывается теорема и для алгебраической суммы любого заданного конечного числа функций.

Итак, *производная алгебраической суммы заданного конечного числа функций равна той же алгебраической сумме их производных.*

§ 61. Дифференцирование произведения постоянного на функцию. Пусть

$$y = cv.$$

По общему правилу:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c \cdot \Delta v.$$

Второй шаг.

$$\Delta y = c \cdot \Delta v.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Отсюда (§ 35) имеем:

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Следовательно,

IV. $$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

Итак, *производная от произведения постоянного на функцию равна произведению постоянного на производную от функции.*

§ 62. Дифференцирование произведения двух функций. Пусть

$$y = uv.$$

По общему правилу:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

Выполнив умножение, получаем:

$$y + \Delta y = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Второй шаг.

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Применяя § 35 и заметив, во-первых, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ и, во-вторых, что вследствие этого предел произведения $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{dx}$ есть нуль, мы имеем:

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Отсюда

V. $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Итак, *производная произведения двух функций равна первой функции, помноженной на производную от второй, плюс вторая функция, помноженная на производную от первой.*

§ 63. Дифференцирование произведения любого заданного конечного числа функций. Разделив обе части формулы V на uv, придадим ей вид:

$$\frac{\frac{d}{dx}(uv)}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

Следовательно, взяв произведение n функций, где n есть число *заданное,*

$$y = v_1 v_2 \dots v_n,$$

можно написать:

$$\frac{\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \dots v_n)}{v_1 v_2 \dots v_n} = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{d}{dx}(v_2 v_3 \dots v_n)}{v_2 v_3 \dots v_n} = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{d}{dx}(v_3 v_4 \dots v_n)}{v_3 v_4 \dots v_n} =$$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{dv_3}{dx}}{v_3} + \dots + \frac{\frac{dv_n}{dx}}{v_n}.$$

Умножив обе части на $v_1 v_2 \dots v_n$, найдем:

VI. $$\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n)\frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \dots v_n)\frac{dv_2}{dx} + \dots$$

$$\dots + (v_1 v_2 \dots v_{n-1})\frac{dv_n}{dx}.$$

Итак, производная произведения заданного конечного числа функций равна сумме всех произведений, составленных умножением производной от каждой функции на произведение всех остальных функций.

§ 64. Дифференцирование функции с постоянным показателем степени. Правило степени. Если каждый из n множителей в предыдущем результате будет равен v, мы получаем:

$$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Если $v = x$, равенство VI дает:

VI*. $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Правило VI доказано только для случая *n целого положительного.* Но в § 93 будет показано, что эта формула остается верной для *какой угодно* величины постоянного n, так что имеем следующий общий результат:

производная степени функции с постоянным показателем равна произведению показателя на степень функции с показателем, единицей меньшим, и на производную этой функции.

Правило это называется правилом степени.

§ 65. Дифференцирование частного. Пусть

$$y = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0.$$

По общему правилу:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Второй шаг.

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Применяя § 35, мы имеем:
Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Следовательно,

VII. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Итак, *производная дроби равна произведению знаменателя на производную числителя минус произведение числителя на производную знаменателя, все делится на квадрат знаменателя.*

Если знаменатель есть количество постоянное, то, положив $v = c$ в VII, имеем:

VII*. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\dfrac{du}{dx}}{c}\left[\text{ибо } \frac{dv}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0\right].$$

Можно еще вывести VII* из IV так:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{c}.$$

Итак, *производная частного от разделения функции на постоянное равна производной от функции, разделенной на это постоянное.*

Если числитель будет постоянной величиной, то, положив $u = c$ в VII, найдем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\dfrac{dv}{dx}}{v^2}\left[\text{ибо } \frac{du}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0\right].$$

Итак, *производная частного от разделения постоянного на функцию равна минус произведению постоянного на производную от функции, разделенному на квадрат функции.*

Следуя выведенным до сих пор правилам, мы теперь уже в состоянии дифференцировать всякую явную алгебраическую функцию одного независимого переменного.

ЗАДАЧИ

Когда учатся дифференцировать, тогда учащийся должен привыкать *устно* дифференцировать следующие функции:

1. $y = x^3$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$ по VI* [$n = 3$]

2. $y = ax^4 - bx^2$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2) =$$ по III

$$= a\frac{d}{dx}(x^4) - b\frac{d}{dx}(x^2) =$$ по IV

$$= 4ax^3 - 2bx.$$ по VI*

3. $y = x^{\frac{4}{3}} + 5$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}}\right) + \frac{d}{dx}(5) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}.$$ по III, VI* и I

4. $y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x}} + 8\sqrt[7]{x^3}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{13}{5}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(8x^{\frac{3}{7}}\right) =$$ по III

$$= \frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}$$ по IV и VI*

5. $y = (x^2 - 3)^5$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4 \frac{d}{dx}(x^2 - 3) =$$ по VI

[$v = x^2 - 3$ и $n = 5$]

$$= 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 - 3)^4.$$

Можно бы было разложить эту функцию посредством бинома Ньютона, затем приложить III и т. д., но указанный путь короче.

12. $\frac{d}{dx}(ax^r - rx^a) = ar(x^{r-1} - x^{a-1})$.

13. $\frac{d}{dy}(5y^{\frac{1}{2}} + 6) = \frac{5}{2}y^{-\frac{1}{2}}$.

14. $\frac{d}{dx}(4x^{-1} - 7x^{-2}) = -4x^{-2} + 14x^{-3}$.

15. $\frac{d}{dx}\left(\frac{a + bx + cx^2}{x}\right) = c - \frac{a}{x^2}$.

16. $\frac{d}{dt}(6t^{\frac{1}{3}} - 9t^{\frac{2}{3}}) = 2t^{-\frac{2}{3}} - 6t^{-\frac{1}{3}}$.

17. $\frac{d}{dt}(12t^{\frac{3}{4}} + 12 + 12t^{-\frac{3}{4}}) = 9t^{-\frac{1}{4}} - 9t^{-\frac{7}{4}}$.

18. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

19. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отв. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

20. $s = \frac{a + bt + ct^2}{\sqrt{t}}$. » $s' = -\frac{a}{2t\sqrt{t}} + \frac{b}{2\sqrt{t}} + \frac{3c\sqrt{t}}{2}$.

21. $r = \sqrt{2\theta} - \frac{1}{\sqrt{2\theta}}$. » $r' = \frac{2\theta + 1}{2\theta\sqrt{2\theta}}$.

22. $y = \sqrt{3 + 4x}$. » $y' = \frac{2}{\sqrt{3 + 4x}}$.

23. $y = \sqrt[3]{4 - 3x}$. » $y' = -\frac{1}{\sqrt[3]{(4 - 3x)^2}}$.

24. $y = \sqrt{1 + 5x^2}$. » $y' = \frac{5x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$.

25. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. » $y' = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

26. $f(x) = \sqrt{1 + \frac{a}{x}}$. » $f'(x) = -\frac{a}{2x^2\sqrt{1 + \frac{a}{x}}}$.

27. $F(\theta) = (2 - 5\theta)^{\frac{1}{5}}$. » $F'(\theta) = -\frac{1}{(2 - 5\theta)^{\frac{4}{5}}}$.

28. $\Phi(y) = (3 + 5y^2)^3$. » $\Phi'(y) = 30y(3 + 5y^2)^2$.

29. $y = x\sqrt{a + bx}$. » $\frac{dy}{dx} = \frac{2a + 3bx}{2\sqrt{a + bx}}$.

30. $s = t^2\sqrt[3]{6t - 1}$. » $\frac{ds}{dt} = \frac{14t^2 - 2t}{(6t - 1)^{\frac{2}{3}}}$.

31. $y = \frac{a - x}{a + x}$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{(a + x)^2}$.

6. $y=\sqrt{a^2-x^2}$.
Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)= \quad \text{по VI}$$

$$\left[v=a^2-x^2 \text{ и } n=\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

7. $y=(3x^2+2)\sqrt{1+5x^2}$.
Решение.

$$\frac{dy}{dx}=(3x^2+2)\frac{d}{dx}(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+2)= \quad \text{по V}$$

$$\left[u=3x^2+2 \text{ и } v=(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=(3x^2+2)\cdot\frac{1}{2}(1+5x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(1+5x^2)+(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 6x= \quad \text{по VI}$$

$$=(3x^2+2)(1+5x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5x+6x\cdot(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{5x(3x^2+2)}{\sqrt{1+5x^2}}+6x\sqrt{1+5x^2}=\frac{45x^3+16x}{\sqrt{1+5x^2}}.$$

8. $y=\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a^2+x^2)-(a^2+x^2)\frac{d}{dx}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2-x^2}= \quad \text{по VII}$$

$$=\frac{2x(a^2-x^2)+x(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{3a^2x-x^3}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Проверить каждое из следующих дифференцирований:

9. $\dfrac{d}{dx}(6x^3-2x+5)=18x^2-2.$

10. $\dfrac{d}{dx}(5+3x^2-x^6)=6x-6x^5.$

11. $\dfrac{d}{dt}(at+bt^2)=a+2bt.$

32. $r=\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}$. Отв. $\frac{dr}{d\theta}=\frac{4\theta}{(1-\theta^2)^2}$.

33. $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. » $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

34. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$. » $\frac{dy}{dx}=-\frac{5}{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}$.

35. $y=(x+2)\sqrt{x^2+4x}$. » $\frac{dy}{dx}=\frac{2(x^2+4x+2)}{\sqrt{x^2+4x}}$.

36. $s=t^2\sqrt{7-2t}$. » $\frac{ds}{dt}=\frac{14t-5t^2}{\sqrt{7-2t}}$.

37. $y=\frac{\sqrt[3]{2+6x}}{x}$. » $\frac{dy}{dx}=-\frac{2+4x}{x^2(2+6x)^{\frac{2}{3}}}$.

38. $y=(x-1)\sqrt[3]{x+1}$. » $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$.

39. $y=\sqrt{2px}$. » $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$.

40. $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. » $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

41. $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. » $\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

Продифференцировать каждую из следующих функций:

42. $f(x)=x^3-2\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$.

43. $y=\frac{2-3x^2}{1+2x}$.

44. $y=\frac{x}{\sqrt{a-bx^2}}$.

45. $f(r)=\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$.

46. $s=\frac{\sqrt{3-t}}{t^3}$.

47. $F(\theta)=\sqrt[3]{3\theta^2-10}$.

48. $y=x\sqrt[3]{7-6x^2}$.

49. $y=\sqrt{\frac{3x+2}{3x-2}}$.

50. $r=\frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^3+4}}$.

51. $y=\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}$.

В каждой из следующих задач найти величину производной $\frac{dy}{dx}$ для заданного значения аргумента x:

52. $y=(x^2-2)^3$; $x=2$. Отв. 48.

53. $y=\sqrt{2x}+\sqrt{\frac{2}{x}}$; $x=2$. » $\frac{1}{4}$. 56. $y=\sqrt[3]{13-5x}$; $x=1$. Отв. $-\frac{5}{12}$.

54. $y=\frac{x+4}{4-x}$; $x=2$. » 2. 57. $y=\sqrt{25-x^2}$; $x=4$. » $-\frac{4}{3}$.

55. $y=\sqrt{10-2x}$; $x=3$. » $-\frac{1}{2}$. 58. $y=x\sqrt{6+5x}$; $x=2$. » $5\frac{1}{4}$.

59. $y=\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$; $x=4$. Отв. $-\frac{9}{80}$.
60. $y=x\sqrt[3]{2-x}$; $x=1$. » $\frac{2}{3}$.
61. $y=(2x-3)^3$; $x=1$.
62. $y=\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4x^2}$; $x=4$.
63. $y=\frac{2x-1}{2-x}$; $x=3$.
64. $y=\sqrt{13-2x}$; $x=2$.
65. $y=x\sqrt{25-x^2}$; $x=4$.
66. $y=\frac{\sqrt{5+2x}}{x}$; $x=2$.

§ 66. Дифференцирование функции от функции. Напоминая учащемуся, что первые сведения, относящиеся к понятию «*функции от функции*» и к ее непрерывности, были даны в §§ 28, 42; мы ограничиваемся здесь кратким указанием на суть дела.

Часто случается, что рассматриваемая нами величина y неизвестна нам непосредственным образом *как функция аргумента* x, но лишь из косвенных соображений мы убедимся, что y зависит от x.

Чаще всего это бывает тогда, когда y сначала дается нам как функция некоторой переменной величины u, $y=\varphi(u)$, и только впоследствии мы узнаем, что u есть функция аргумента x, $u=f(x)$. В этом случае y является *косвенной* функцией аргумента x, устанавливаемой через посредство переменной величины u, называющейся *промежуточным аргументом*, в отличие от истинного (окончательного) аргумента x.

Действительно, цепочка двух одновременных равенств

$$y=\varphi(u),\quad u=f(x) \tag{1}$$

ясно нам указывает, что при заданном численном значении аргумента x величина y приобретает неизменяющееся численное значение; при изменении же x величина y также становится изменяющейся. Значит, *через посредство буквы* u, y является какой-то определенной функцией аргумента x, т. е. мы должны иметь $y=F(x)$.

Чтобы отыскать эту функцию $F(x)$, надо *приобрести умение смотреть на букву* u, *стоящую под знаком* φ, *не как на независимое переменное, но как на функциональное выражение* $f(x)$, *прямым образом зависящее от* x. Этот прием прочитывания в букве u функционального выражения $f(x)$ *называется исключением переменного* u.

Применение этого приема приводит нас к искомой сложной функции $F(x)$, называемой «*функцией от функции*»,

$$y=F(x)=\varphi[f(x)], \tag{2}$$

дающей теперь уже *непосредственную* зависимость величины y от аргумента x.

Например, если

$$y = \frac{2u}{1-u^2}$$

и

$$u = 1 - x^2,$$

тогда y есть функция от функции. Исключая букву u, мы, разумеется, можем выразить y непосредственным образом как функцию аргумента x. Но, вообще, делать это излишне, когда нам нужно найти только $\frac{dy}{dx}$.

Важно заметить, что в равенствах (1) функции φ и f *сами по себе* (т. е. в отношении их *характеристик*) нисколько не зависят одна от другой, ибо и *наружная* функция φ и *внутренняя* функция f могут быть порознь взяты *какими угодно*.

Зависят друг от друга только их аргументы u и x.

Приступая теперь к отысканию производной $\frac{dy}{dx}$ функции от функции, возьмем цепочку двух одновременных равенств

$$y = \varphi(u), \quad u = f(x), \tag{1}$$

которые определяют y как функцию x через промежуточный аргумент u.

Отсюда следует, что когда мы даем x приращение (свободное) Δx, то тогда u получает приращение (вынужденное) Δu и поэтому y получит приращение Δy. Держа это в уме, применим общее правило дифференцирования одновременно к обеим функциям

$$y = \varphi(u) \quad \text{и} \quad u = f(x).$$

Первый шаг.

$$y + \Delta y = \varphi(u + \Delta u) \qquad u + \Delta u = f(x + \Delta x)$$

Второй шаг.

$$\begin{array}{rl} & y + \Delta y = \varphi(u + \Delta u) \\ - & y = \varphi(u) \\ \hline & \Delta y = \varphi(u + \Delta u) - \varphi(u) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & u + \Delta u = f(x + \Delta x) \\ - & u = f(x) \\ \hline & \Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)}{\Delta u}. \qquad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Левые части этих равенств представлены в виде отношения приращения каждой функции к приращению соответствующего переменного; правые же части дают те же самые отношения в другом виде. Прежде чем сделать переход к пределу, образуем произведение этих обоих отношений, выбрав для этой цели левые части.

Это дает $\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$, что равно $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Напишем же тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{2}$$

Четвертый шаг. Заставим свободное приращение Δx стремиться к нулю, т. е. сделаем $\Delta x\to 0$. Переходя к пределу,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Обе функции φ и f предполагаются дифференцируемыми: наружная φ в точке u, внутренняя f в точке x. Так как из дифференцируемости следует непрерывность, то, когда свободное приращение Δx стремится к нулю, тогда вынужденное приращение Δu обязано автоматически стремиться к нулю. Забывая телерь о вынужденности приращения Δu и считая, что его стремление к нулю обусловлено не необходимостью, а происходит *свободным образом*, мы можем переписать равенство (3) в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}, \tag{4}$$

откуда заключаем, что

VIII. $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\varphi'(u)\cdot f'(x).$$

Изложенное классическое доказательство формулы производной функции от функции, исключительно ясное и естественное, имеет против себя то формальное возражение, что *вынужденное* приращение Δu для некоторых численных значений Δx, отличных от нуля, может стать равным нулю, $\Delta u=0$. И так как делить на нуль не полагается, то пользование тождёством (2) для таких Δx невозможно.

Но здесь достаточно добавить всего несколько слов в разъяснение, чтобы сделанное возражение было полностью устранено. Для этого назовем «*позволенными*» те численные значения Δx, $\Delta x\neq 0$, при которых Δu отлично от нуля, и «*запрещенными*» такие Δx, $\Delta x\neq 0$, при которых $\Delta u=0$. Ясно, что равенство (4) остается безукоризненно верным, когда Δx стремится к нулю *по позволенным численным значениям*, и что *его правая часть в этом случае всегда равна произведению* $\varphi'(u)\cdot f'(x)$. Так как для всякого запрещенного Δx отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x}=0$, то при стремлении Δx к нулю по запрещенным значениям, мы обязаны иметь $\frac{du}{dx}=f'(x)=0$. Значит, *когда* $f'(x)\neq 0$, *тогда запрещенных* Δx *вблизи нуля не имеется, т. е. всякое достаточно малое* Δx *есть позволенное.* Поэтому в этом случае левая часть равенства (4) выражает истинную производную $\frac{dy}{dx}$, что и доказывает формулу (VIII) для случая $f'(x)\neq 0$.

Когда же мы имеем $f'(x)=0$, тогда равенство (4) показывает, что при стремлении $\Delta x \to 0$ *по позволенным численным значениям* отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к нулю. Но так как для всякого запрещенного Δx мы имеем:

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)=\Delta y=0,$$

то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ тем более стремится к нулю, когда Δx приближается к нулю по запрещенным численным значениям. Значит, когда $f'(x)=0$, тогда заведомо имеем $\frac{dy}{dx}=0$. Этим формула (VIII) полностью доказана для *всех* случаев.

Доказанная формула (VIII) имеет совершенно исключительную важность, ибо, в сущности, на основании ее одной ведется в математическом анализе дифференцирование всяческих выражений. Поэтому учащийся не только должен помнить ее наизусть, но обязан уметь ее прочесть *словесно:*

если $y=\varphi(u)$, $u=f(x)$, то производная функции y по аргументу x равна производной функции y по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по окончательному аргументу x.

Мы видим чрезвычайную практическую важность вопроса отыскания производных функций от функций, потому что большинство явлений действительности выражается формулами *функции от функции*, $y=\varphi[f(x)]$, где функции φ и f в свою очередь не очень просты, а сами часто являются опять *функциями от функций* и т. д.

Пусть же имеем функцию от функции

$$y=\varphi[f(x)]. \tag{2}$$

Вводя *промежуточный аргумент* u, мы эту сложную зависимость разбиваем на цепочку двух более простых зависимостей:

$$y=\varphi(u);\ u=f(x) \tag{1}$$

и тогда дифференцируем y по x, отыскивая производную $\frac{dy}{dx}$ по правилу (VIII).

Пример 1. Дано $y=2u^2-4$, $u=3x^2+1$; найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, где $\frac{dy}{du}=4u$ и $\frac{du}{dx}=6x$. Значит, подставляя сюда найденную промежуточную производную $\frac{dy}{du}$ и окончательную производную $\frac{du}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=4u\cdot 6x=24x(3x^2+1).$$

Пример 2. Дано: $y=(x^2+3)^{100}$; найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Разбивая данную сложную функцию $y=(x^2+3)^{100}$ на цепочку двух более простых зависимостей: $y=u^{100}$, $u=x^2+3$, имеем: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, где $\frac{dy}{du}=100u^{99}$ и $\frac{du}{dx}=2x$. Следовательно, подставляя, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=100u^{99}\cdot 2x=200x(x^2+3)^{99}.$$

Когда имеют дело не с двухзвенной, а с более длинной цепочкой зависимостей, например, с цепочкой из трех зависимостей

$$y=\varphi(u),\ u=\psi(v),\ v=f(x),$$

тогда, применяя два раза формулу (VIII), имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ \text{и}\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx},$$

откуда, подставляя в первое равенство найденное выражение для $\frac{du}{dx}$, получаем окончательно:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Формулу эту *словесно* можно прочесть так:

производная функции от функции равна произведению всех последовательных промежуточных производных на последнюю производную.

§ 67. Об ошибках, часто случающихся при дифференцировании функции от функции. Формулу (VIII), выделенную для случая самой короткой цепочки из двух только зависимостей

$$y=\varphi(u),\ u=f(x)$$

можно, очевидно, переписать в виде

VIII*. $$\frac{d}{dx}f(u)=f'(u)\cdot\frac{du}{dx},$$

которую нужно *словесно* читать так:

производная функции от какого угодно аргумента и по какому угодно независимому переменному x равна производной данной функции, помноженной на производную аргумента.

Эта формулировка, равно как и относящаяся к ней формула (VIII*) очень полезны в практике дифференциального исчисления, и поэтому знать ее нужно твердо.

Но иногда случается, что основную формулу (VIII), пользуясь по существу верными равенствами:

$$y=\varphi[f(x)],\ \frac{dy}{du}=\varphi'(u)=\varphi'[f(x)],\ \frac{du}{dx}=f'(x)$$

переписывают в виде:

VIII**. $$\{\varphi[f(x)]\}' = \varphi'[f(x)]\cdot f'(x)$$

и здесь следует указать, что формула эта, при небольшой невнимательности, может служить источником недоразумений и тяжелых ошибок. И это обстоятельство делается тем более опасным, что формула (VIII**) в глазах начинающего является обычно более привлекательной: «потому что тут нет никаких вспомогательных, а на деле мне мешающих букв u, а есть только функции настоящего переменного x». Но учащийся должен быть предупрежден относительно того, что формула (VIII**) может повлечь недоразумения: наиболее опасным является множитель $\varphi'[f(x)]$. Опасность его состоит в том, что этот множитель говорит нам сразу о двух действиях: a) действии *дифференцирования,* символизируемом значком штриха, и b) *алгебраическом действии подстановки,* символизируемом квадратными скобками [ ], в которые и вставляется функция $f(x)$. Надо в высшей степени твердо помнить, какое из этих действий делается *сперва* и какое *потом;* первым *производится действие дифференцирования* ('), *причем оно ведется, собственно, по ненаписанному аргументу* [ ], *и уже* вторым, *когда дифференцирование выполнено и закончено, производится алгебраическая подстановка в окончательном результате в ненаписанный аргумент* [ ] *функции* $\varphi(x)$.

Если же *сперва* вставить функцию $f(x)$ в ненаписанный аргумент, а потом продифференцировать, то учащийся наверное получит ошибку, ибо тогда он получит просто

$$\{\varphi[f(x)]\}',$$

т. е. самую производную функции от функции, а не промежуточную производную $\varphi'[f(x)]$.

Например, учащийся твердо должен помнить, что хотя символ $f'(x)$ и обозначает производную от функции $f(x)$, однако символ $f'(2x)$ отнюдь не обозначает производной от функции $f(2x)$, ибо *он вдвое меньше этой последней.*

Чтобы убедиться, положим $y = f(2x)$. Разбивая эту функцию от функции на цепочку двух более простых зависимостей введением промежуточного аргумента $y = f(u)$, $u = 2x$, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)\cdot 2 = 2f'(2x).$$

Значит, *производная функции* $f(2x)$ *вдвое больше числа* $f'(2x)$.

Обозначение производных через $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, ... более надежное, потому что, употребляя его, учащийся не сделает

ошибки. Если же не пользоваться этим обозначением, то производную от функции $f(2x)$ надо обозначить через

$$[f(2x)]',$$

а отнюдь не через

$$f'(2x).$$

Численная разница между ними та, что $[f(2x)]'$ вдвое больше, чем $f'(2x)$. *Теоретическая* же разница между ними та, что в $[f(2x)]'$ *сначала* вставляют в $f(\ )$ аргумент $2x$ и уже *потом* дифференцируют (по x), а в $f'(2x)$, наоборот, *сначала* дифференцируют функцию $f(\ )$ по пустому аргументу $(\ )$ и уже *потом* вставляют вместо $(\ )$ количество $2x$.

Таким образом, далеко не безразлично, *сначала* ли вставить в функцию $\varphi(\ )$ количество $f(x)$ и уже *потом* дифференцировать, или, наоборот, *сначала* получить дифференцированием $\varphi'(\ )$ и уже потом вставить $f(x)$. Результат вычислений зависит от *порядка* этих двух действий, и формула VIII*

VIII** $$\{\varphi[f(x)]\}' = \varphi'[f(x)]\cdot f'(x)$$

как раз и говорит нам об этой зависимости.

Если же не обращать внимания на порядок этих двух действий, то ошибка будет состоять в неизменном забвении множителя $f'(x)$.

§ 68. Практика дифференцирования функции от функции. Учащийся не преминет заметить, что формула VI, $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ представляет собою применение выведенной формулы производной функции от функции. Кроме того, очевидно, что задачи с 5 по 8 и упражнения с 21 по 41 решаются по существу применением этой же формулы. Равным образом и в дальнейшем вместо того, чтобы пользоваться уже готовыми формулами таблицы производных (§ 57), можно во всех случаях применять формулу производной функции от функции. Поэтому остановимся более подробно на практике применения этой формулы.

Ради наибольшей теоретической ясности мы были вынуждены в тексте нашего изложения изображать различными буквами u, v, w, ... те функции, которые вложены одна в другую в цепочках зависимостей.

Учащийся в самом начале своего обучения дифференцированию *может сначала подражать этому*, чтобы выучиться хорошо распознавать функции от функций.

Пример дифференцирования при отсутствии навыка

Найти производную функции $y = (1 + \sqrt{x})^n$.

Чтобы распознать здесь функцию от функции, учащийся *может* обозначить внутреннюю функцию буквой u, как мы это делали выше; тогда он получит цепочку зависимостей:

$$y=u^n;\ u=1+\sqrt{x},$$

откуда, применяя правило дифференцирования функции от функции, учащийся напишет:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{du^n}{du}\cdot\frac{d(1+\sqrt{x})}{dx}=nu^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=n(1+\sqrt{x})^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ибо согласно формуле VI, мы имеем:

$$\frac{du^n}{du}=nu^{n-1},\ \frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Но учащийся должен пользоваться *лишь короткое время* своим правом вводить буквы u, v, w, ... и должен в дальнейшем поскорее освободиться от этой ненужной привычки, пока еще она не слишком сильно в него вкоренилась. Привычка вводить буквы u, v, w, ... чрезвычайно затягивает выкладки и заставляет терять из виду самый ход вычислений; но, самое главное, она вредна для ума, ослабляя воображение.

Повторим предыдущий пример, не вводя никаких букв, т. е. *так, как надо всегда делать.*

Пример дифференцирования при навыке

Найти производную от $(1+\sqrt{x})^n$.

Надо говорить себе так: производная от $(1+\sqrt{x})^n$ равна производной от $(1+\sqrt{x})^n$ по $1+\sqrt{x}$, т. е.

$$n(1+\sqrt{x})^{n-1},$$

умноженной на производную $1+\sqrt{x}$ по x, т. е.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Значит, искомая производная равна

$$n(1+\sqrt{x})^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

В соответствии с изложенным рассмотрим на примере формы записей, которых следует придерживаться учащемуся.

Найти производную функции $y=\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{35}$.

1-й способ записи (при отсутствии навыка):

$$y=u^{35};\quad u=x^{\frac{2}{3}}+2x^{-3};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=35u^{34}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-4}\right)=$$

$$=35\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{34}\cdot\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{x^4}\right).$$

2-й способ записи, наиболее совершенный, к которому учащийся и должен в конце концов перейти:

$$\frac{dy}{dx}=35\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{34}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-4}\right)=$$

$$=35\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^{34}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{x^4}\right).$$

§ 69. Дифференцирование обратных функций. Отсылая учащегося к § 28, где были даны первые сведения, относящиеся к понятию «обратной функции», мы ограничиваемся здесь самым главным.

Когда переменное y определено как функция аргумента x при помощи уравнения

$$y=f(x), \qquad (1)$$

часто случается, что это уравнение можно разрешить относительно буквы x и написать

$$x=\varphi(y). \qquad (2)$$

В уравнении (1) независимым переменным является буква x; в уравнении (2) независимым переменным служит буква y. Самые же функции f и φ, рассматриваемые без аргументов, т. е. как *чистые характеристики*, называются *взаимно обратными*. Любую из обеих функций f и φ мы можем взять за прямую функцию, и тогда другая будет называться обратной.

Две взаимно обратные функции f и φ, если их аргумент обозначить какой-нибудь нейтральной буквой, например t, обладают тем замечательным свойством, что дают тождества

$$\varphi[f(t)]\equiv t \text{ и } f[\varphi(t)]\equiv t. \qquad (3)$$

Их получим: первое, внося y из (1) в (2), и второе, внося x из (2) в (1). Эти тождества (3) характеризуют взаимную обратность f и φ.

Примерами взаимно обратных функций могут служить три следующие пары:

$$y=x^2+1 \text{ и } x=\pm\sqrt{y-1};$$
$$y=a^x \quad \text{и } x=\log_a y;$$
$$y=\sin x \quad \text{и } x=\arcsin y.$$

По вопросу о самом *существовании* обратных функций, т. е. относительно возможности разрешить каждое из уравнений (1) и (2) относительно *аргумента*, мы отсылаем учащегося к § 28. Там доказывается, что *в случае монотонности и непрерывности функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a\leqslant x\leqslant b]$ *уравнение* (1) *всегда разрешимо относительно аргумента* x, *причем полученная обратная функция* $\varphi(y)$ *будет также монотонной и непрерывной на отрезке* $[A\leqslant y\leqslant B]$, *концами которого служат максимум и минимум функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$.

Для дифференцирования обратных функций мы применяем общее правило:

Первый шаг. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ $\quad x+\Delta x=\varphi(y+\Delta y)$

Второй шаг.
$$\begin{array}{l|l} y+\Delta y=f(x+\Delta x) & x+\Delta x=\varphi(y+\Delta y) \\ \underline{y \quad\;\; =f(x)} & \underline{x \quad\;\; =\varphi(y)} \\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) & \Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) \end{array}$$

Третий шаг. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $\quad \dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}$.

Взяв произведение левых частей этих отношений, мы имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1,$$

т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Четвертый шаг. Когда $\Delta x\to 0$, тогда, как было разъяснено выше, имеем и $\Delta y\to 0$. Переходя к пределу, имеем:

IX. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

или

IX*. $$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

где, разумеется, заранее предполагаем, что производная $\varphi'(y)$ отлична от нуля.

Полученные формулы (IX) и (IX*) и дают правило дифференцирования обратных функций. В этих формулах

функция $x=\varphi(y)$ рассматривается как *прямая*, ибо предполагается известной ее производная по букве y, т. е. $\frac{dx}{dy}=\varphi'(y)$, а функция $y=f(x)$ рассматривается как ей *обратная*.

Самое же правило *словесно* выражается так:

производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции.

Само собой разумеется, что для окончательного получения искомой производной $\frac{dy}{dx}$ в виде функции от буквы x, мы должны в знаменателе, т. е. в выражении $\varphi'(y)$ заменить букву y через $f(x)$.

§ 70. Дифференцирование неявных функций. Отсылая учащегося к § 28, где были даны первые сведения, относящиеся к понятию «*неявной функции*», мы ограничиваемся здесь необходимым напоминанием.

Если соотношение между переменными x и y дано в виде уравнения, еще не разрешенного относительно буквы y, тогда y называется *неявной функцией от* x. Например, уравнение

$$x^2-4y=0$$

определяет y как неявную функцию от x. Очевидно, что здесь и x есть также неявная функция от y.

Иногда возможно разрешить уравнение, связывающее переменные x и y, относительно одного из них; в этом случае мы имеем явную функцию. Например, решая написанное выше уравнение относительно буквы y, мы получаем выражение

$$y=\frac{1}{4}x^2,$$

дающее нам y уже как явную функцию от x.

В других же случаях такое разрешение является или совсем невозможным, или слишком трудным.

Когда мы имеем дело с таким уравнением

$$F(x, y)=0, \qquad (1)$$

которое мы либо не умеем, либо не хотим разрешать относительно одной из букв x и y, тогда y определяется этим уравнением как *неявная функция от* x, и тогда надо уметь находить производную $\frac{dy}{dx}$ этой неявной функции, не решая нашего уравнения.

Для этого имеется следующее правило: *дифференцировать написанное уравнение, рассматривая y как функцию аргумен-*

та x, и затем полученное новое уравнение разрешить относительно искомой производной $\frac{dy}{dx}$.

Это правило в дальнейшем будет доказано (см. § 167). Пока же мы заметим, что полученное дифференцированием новое уравнение всегда будет *первой степени* относительно искомой производной $\frac{dy}{dx}$, так что из него очень удобно находить эту производную, и что в найденное выражение для $\frac{dy}{dx}$ надо подставлять только такие численные значения букв x и y, которые удовлетворяют данному уравнению (1).

Применим это правило к отысканию $\frac{dy}{dx}$, когда неявная функция y дается уравнением:

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 17.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(17);$$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2x^3 - 7xy^6)\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y.$$

Отв. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$.

Учащийся заметит, что теперь результат будет содержать, вообще, сразу *обе* буквы x и y.

ЗАДАЧИ

Найти $\frac{dy}{dx}$ для каждого из следующих уравнений:

1. $y^2 = 2px$. Отв. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.
2. $x^2 + y^2 = r^2$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. » $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$.
5. $xy = c$. » $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.
6. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. » $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.
7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. » $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

8. $x^3+y^3-3axy=0$. Отв. $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

9. $x^2-2xy+y^2=1$.

10. $x+\sqrt{xy}+y=a$.

11. $x+2\sqrt{x-y}+4y=c$.

12. $x^2y^2-x^4-2y^4=6$.

13. $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=10$.

14. $\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{x}}=c$.

Найти тангенс наклона для каждой из следующих кривых в данной точке:

15. $x^3+3xy+y^2+1=0$; $(2,-1)$. Отв. $-\frac{1}{4}$.

16. $x^2y+x^3+y^3+1=0$; $(1,-1)$. » $-\frac{1}{4}$.

17. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$; $(4, 9)$. » $-\frac{3}{2}$.

18. $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}=1$; $(4, 1)$. » $\frac{1}{2}$.

19. $x^3-axy+2ay^2=2a^3$; (a, a). » $-\frac{2}{3}$.

20. $x^3=6y-y^3$; $(-2, 2)$. » $\frac{2}{3}$.

21. Показать, что параболы $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ и $y^2=2p\left(\frac{p}{2}-x\right)$ пересекаются под прямым углом.

22. Показать, что окружность $x^2+y^2-10x=0$ касается окружности $x^2+y^2-16x+8y-20=0$ в точке $(2, 4)$.

23. Под каким углом линия $y=x$ пересекает кривую $x^2+xy+y^2=12$?

ГЛАВА VIII

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 71. Направление кривой. В § 56 было показано, что если

$$y = f(x)$$

есть уравнение кривой (рис. 74), то $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau =$ *тангенсу наклона*[1] *касательной к кривой в некоторой точке* $M(x, y)$.

Направление кривой в любой точке определяют как направление касательной к кривой в этой точке. В силу этого опреде-

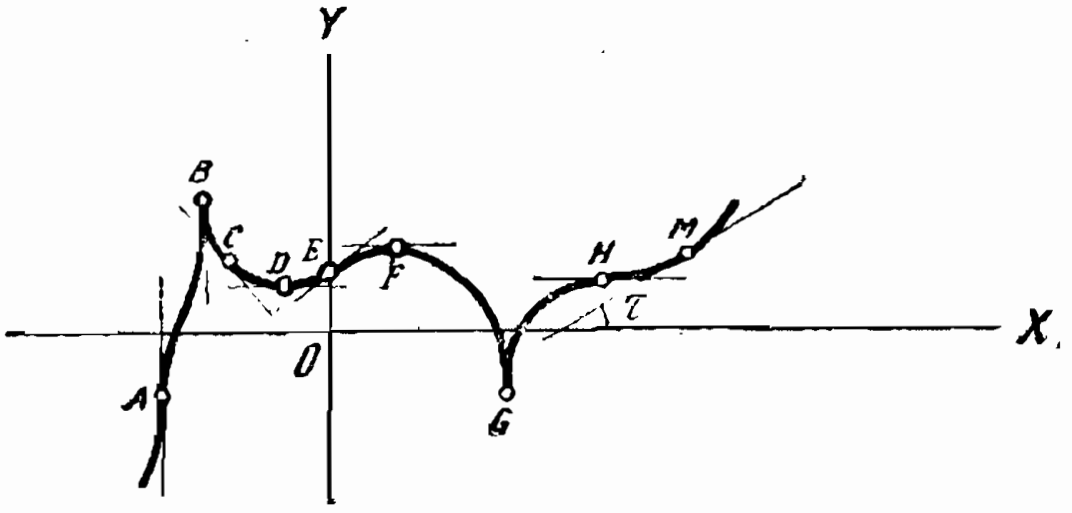


Рис. 74

ления $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau =$ *тангенсу угла наклона кривой в точке* M.

Для некоторого частного положения точки, координаты (x_1, y_1) которой известны, мы, следовательно, имеем:

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} =$ *тангенсу угла наклона кривой (или касательной)* в точке (x_1, y_1).

---

[1] В дальнейшем мы всюду термином «*наклон*» обозначаем угол, составляемый линией с осью абсцисс OX, всегда принимаемой за *горизонтальную*.

В таких точках, как D, F, H, где направление кривой *параллельно оси OX*, и, значит, *касательная горизонтальна:*

$$\tau = 0, \text{ следовательно, } \frac{dy}{dx} = 0.$$

В таких точках, как A, B, G, где направление кривой *перпендикулярно к оси OX*, и, значит, *касательная вертикальна:*

$$\tau = 90^\circ, \text{ следовательно, } \frac{dy}{dx} = \infty.$$

В точках, как E, где *кривая поднимается*[1], *τ = острому углу, следовательно, $\frac{dy}{dx}$ = числу положительному.*

Это имеет место влево от B, между D и F, и вправо от G.

В таких точках, как C, *где кривая падает*[1], *τ = тупому углу, а потому $\frac{dy}{dx}$ = отрицательному числу.*

Это имеет место между B и D и между F и G.

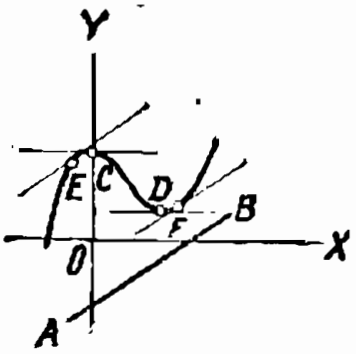


Рис. 75

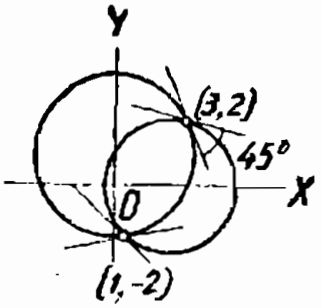


Рис. 76

Пример 1. Дана кривая $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ (рис. 75).

(a) Найти τ, если $x = 1$.
(b) Найти τ, если $x = 3$.
(c) Найти точки, где направление кривой параллельно оси OX.
(d) Найти точки, где $\tau = 45^\circ$.
(e) Найти точки, где направление кривой параллельно прямой (линии AB) $2x - 3y = 6$.

Решение. Дифференцируя, имеем $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = \operatorname{tg}\tau$.

(a) $\operatorname{tg}\tau = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$; следовательно, $\tau = 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$.

(b) $\operatorname{tg}\tau = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 9 - 6 = 3$; следовательно, $\tau = \operatorname{arc\,tg}\, 3 \approx 71^\circ 34'$.

(c) $\tau = 0$, $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = 0$, следовательно, $x^2 - 2x = 0$. Решая это уравнение,

[1] Если двигаться по кривой слева направо.

находим, что $x=0$ или 2, что дает точки C (0, 2) и $D\left(2, \frac{2}{3}\right)$, где касательная горизонтальна.

d) $\tau=45°$, $\operatorname{tg}\tau=\frac{dy}{dx}=1$; следовательно, $x^2-2x=1$. Решая, имеем:

$$x=1\pm\sqrt{2}\approx 2{,}41 \text{ и } -0{,}41,$$

что дает две точки, для которых тангенс наклона кривой (или касательной) есть 1.

e) Тангенс наклона прямой равен $\frac{2}{3}$, следовательно, $x^2-2x=\frac{2}{3}$.

Решив относительно x, находим:

$$x=1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\approx 2{,}29 \text{ и } -0{,}29,$$

это дает точки E и F, где направление кривой (или касательной) параллельно прямой AB.

Так как кривая в какой-нибудь точке имеет то же самое направление, как и касательная к ней в этой точке, то за угол между двумя кривыми в их общей точке принимается всегда угол, образуемый их касательными в этой точке.

Пример 2. Под каким углом пересекаются окружности (рис. 76)

$$x^2+y^2-4x=1, \quad \text{(A)}$$
$$x^2+y^2-2y=9? \quad \text{(B)}$$

Решение. Решая совместно эти уравнения, находим точки пересечения (3, 2) и (1, —2) (рис. 76). Далее,

$$k_1=\frac{dy}{dx}=\frac{2-x}{y} \quad \text{из (A) по § 56.}$$

$$k_2=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-y} \quad \text{из (B) по § 56.}$$

$k_1=\left[\frac{2-x}{y}\right]_{\substack{x=3\\y=2}}=-\frac{1}{2}=$ тангенсу угла наклона касательной к кривой (A) в точке (3, 2).

$k_2=\left[\frac{x}{1-y}\right]_{\substack{x=3\\y=2}}=-3=$ тангенсу угла наклона касательной к кривой (B) в точке (3, 2).

Формула для нахождения угла между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых суть k_1 и k_2, такова:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Подстановка дает

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{2}+3}{1+\frac{3}{2}}=1,$$

откуда

$$\theta=45°.$$

Таков же будет и угол пересечения кривых в точке (1, —2).

§ 72. Уравнения касательной и нормали; длины подкасательной и поднормали. Уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей k своим угловым коэффициентом, есть $y-y_1=k(x-x_1)$.

Если эта прямая есть касательная к кривой AB в точке M_1 (рис. 77), тогда угловой коэффициент k должен быть равен тангенсу наклона кривой в точке M_1; мы обозначаем через k_1 это численное значение углового коэффициента k. Ясно, что:

$$k_1 = \operatorname{tg}\tau_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = \frac{dy_1}{dx_1}\ ^*.$$

Поэтому для точки прикосновения $M_1(x_1, y_1)$ уравнение касательной M_1T_1 есть:

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1). \qquad (1)$$

А так как нормаль, по самому своему определению, есть прямая, проходящая через точку прикосновения M_1 и перпендикулярная к касательной в этой точке, то для того, чтобы написать уравнение нормали, нужно лишь знать ее угловой коэффициент. Но мы знаем, что он должен быть равен обратной величине коэффициента k_1, взятой со знаком минус, и, значит, равен $-\frac{1}{k_1}$. Поэтому уравнение нормали в точке M_1 напишется в виде:

$$y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1). \qquad (2)$$

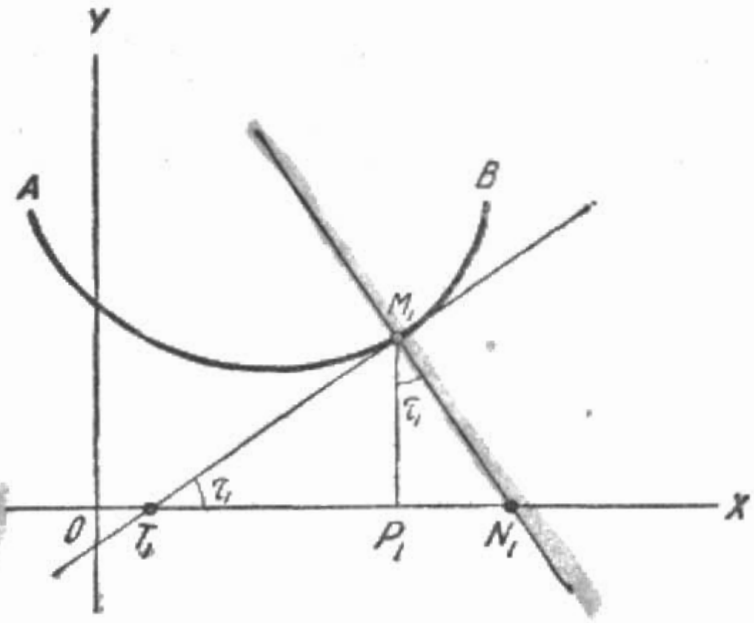


Рис. 77

Длина отрезка M_1T_1 касательной, имеющего своими концами: точку прикосновения M_1 и точку T_1 оси абсцисс, получила имя «*длины касательной*», а проекция T_1P_1 этого отрезка на ось абсцисс носит имя «*подкасательной*» («субкасательной»). Аналогично, длина отрезка M_1N_1 нормали, имеющего своими концами: точку прикосновения M_1 и точку N_1 оси абсцисс, называется «*длиной нормали*», а проекция P_1N_1 этого отрезка на ось абсцисс получила название «*поднормали*» («субнормали»).

---

* Под этим символом подразумевается, что сперва нужно найти $\frac{dy}{dx}$, затем в результат подставить x_1 вместо x и y_1 вместо y. Учащийся должен остерегаться понимать символ $\frac{dy_1}{dx_1}$ так, будто он обозначает *производную* от y_1 по x_1, ибо это не имело смысла, так как x_1 и y_1 суть величины *постоянные*, а не переменные; между тем всякое дифференцирование необходимо предполагает непрерывное изменение величины той буквы, по которой дифференцируют.

Длина касательной и длина нормали суть длины двух ненаправленных отрезков и поэтому всегда рассматриваются *положительными,* как это делает элементарная геометрия. Что же касается подкасательной T_1P_1 и поднормали P_1N_1, то это суть направленные отрезки, ибо они лежат на направленной оси абсцисс. Поэтому их длины могут иногда оказываться и отрицательными, именно когда отрезки T_1P_1 и P_1N_1 направлены *влево.*

В треугольнике $T_1P_1M_1$ имеем $\operatorname{tg}\tau_1 = k_1 = \frac{P_1M_1}{T_1P_1} = \frac{dy_1}{dx_1}$, следовательно,

$$T_1P_1 = \frac{P_1M_1}{k_1} = \frac{y_1}{k_1} = y_1\frac{dx_1}{dy_1} = \text{длине подкасательной.} \qquad (3)$$

В треугольнике $P_1N_1M_1$ имеем $\operatorname{tg}\tau_1 = k_1 = \frac{P_1N_1}{P_1M_1}$.

Отсюда

$$P_1N_1 = k_1 \cdot P_1M_1 = k_1y_1 = y_1\frac{dy_1}{dx_1} = \text{длине поднормали.} \qquad (4)$$

Что же касается до *длины касательной* M_1T_1 и *длины нормали* M_1N_1, то их лучше всего находить из чертежа, ибо эти отрезки суть гипотенузы прямоугольных треугольников, катеты которых известны.

Когда длина подкасательной или поднормали для какой-нибудь точки кривой найдена, тогда легко можно построить касательную и нормаль.

ЗАДАЧИ

1. Найти уравнения касательной и нормали, длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали в точке $M(a, a)$ циссоиды

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

(рис. 78).

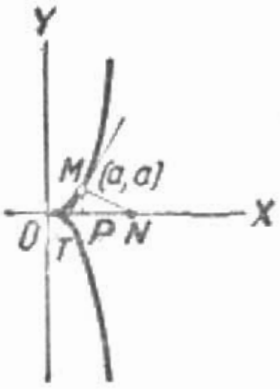


Рис. 78

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a - x)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=a\\y=a}} = \frac{3a^3 - a^3}{a(2a - a)^2} = 2 = \text{угловому коэффициенту касательной.}$$

Подстановка в (1) дает:

$$y = 2x - a.$$

Подстановка в (2) дает:

$$2y + x = 3a.$$

Подстановка в (3) дает:

$$TP = \frac{a}{2} = \text{длине подкасательной.}$$

Подстановка в (4) дает:

$$PN = 2a = \text{длине нормали.}$$

Значит:

$$MT = \sqrt{TP^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} = \text{длине касательной,}$$

$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} = \text{длине нормали.}$$

2. Найти уравнение касательной и нормали в заданной точке к каждой из следующих кривых:

(a) $y = x^2 - 3x + 2$; (0, 2). **Отв.** $3x + y = 2$, $x - 3y = -6$.

(b) $y = \frac{3x}{x+1}$; (2, 2). » $x - 3y = -4$, $3x + y = 8$.

(c) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$; (2, 1).

(d) $y^2 - 2y + 3x = 8$; (3, 1).

3. Показать, что подкасательная к параболе $y^2 = 2px$ делится пополам ее вершиной и что поднормаль есть величина постоянная, равная p.

4. Найти уравнения касательной и нормали, а также длины подкасательной и поднормали в точке (x_1, y_1) окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Отв. $xx_1 + yy_1 = r^2$, $yx_1 - xy_1 = 0$, $-\frac{y_1^2}{x_1}$, $-x_1$.

5. Найти уравнения касательной и нормали в (x_1, y_1) к эллипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Отв. $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$, $a^2xy_1 - b^2yx_1 = x_1y_1(a^2 - b^2)$.

6. Найти уравнения касательной и нормали, а также длины подкасательной и поднормали для каждой из следующих кривых в указанных точках:

(a) $y = \frac{x^2}{4}$; (2, 1). **Отв.** $x - y = 1$, $x + y = 3$, 1, 1.

b) $x^2 + 4y^2 = 25$; (3, 2). » $3x + 8y = 25$, $8x - 3y = 18$. $-\frac{16}{3}$, $-\frac{3}{4}$.

(c) $xy = 12$; (3, 4).

(d) $x^2 = 2y^2$; (6, −3).

7. Найти площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и нормалью к кривой $y^2 = 8x$ в точке (2, 4).

Отв. 16.

8. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат, касательной и нормалью к кривой $4x^2 + y^2 = 20$ в точке (1, −4).

9. Найти углы пересечения каждой из следующих пар кривых:

(a) $4y = x^2 + 4$, $x^2 = 8 - 2y$. **Отв.** 71°34′.

(b) $4y = 2x^2 - 3x$, $4y = x^2 + 4$. В точке (4, 5): 9°28′.

(c) $y^2 = x^3 - 4$, $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$. В точке (2, 2): 45°.

(d) $xy = 10$, $x^2 + y^2 = 29$.

10. Найти точки прикосновения с горизонтальными и вертикальными касательными для каждой из следующих кривых:

(a) $y = x^2 - 6x$. **Отв.** Горизонтальная в (3, −9);

(b) $x = 3y - y^2$. вертикальная в $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

(c) $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$.

(d) $x^2+xy+y^2=4$. Отв. Горизонтальная в $\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$; вертикальная в $\left(\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}, \mp\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.

(e) $x^2-xy+4y^2=16$.

(f) $x^2+4xy-y^2=9$.

11. Показать, что гипербола $x^2-y^2=5$ и эллипс $4x^2+9y^2=72$ пересекаются под прямыми углами.

12. Показать, что окружность $x^2+y^2=8ax$ и циссоида $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$

(a) перпендикулярны в начале координат;

(b) в двух других точках пересекаются под углом в 45°.

13. Показать, что касательные к листу Декарта $x^3+y^3=3axy$ в точках, где он пересекает параболу $y^2=ax$, параллельны оси ординат.

14. Найти уравнение нормали к параболе $y^2=16x$, образующей угол в 45° с осью абсцисс.

15. Найти уравнение касательных к окружности $x^2+y^2=41$, параллельных прямой $4x+5y=12$.

16. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2-y^2=36$, перпендикулярных к линии $x+2y=4$.

17. Найти уравнения двух касательных к эллипсу $x^2+4y^2=18$, проходящих через точку (2, 2). Отв. $x+2y=6$, $x+14y=30$.

18. Показать, что сумма отрезков, отсекаемых на осях координат касательной к параболе $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ в любой ее точке, есть величина постоянная, равная a.

19. Показать, что для гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ отрезок касательной, отсекаемый на ней осями координат, есть величина постоянная, не зависящая от точки прикосновения, и равна a.

20. Уравнением траектории снаряда служит парабола $y=x-\frac{x^2}{100}$, причем ось OX горизонтальна и выстрел производится в начале координат O: (a) под каким углом снаряд вылетает? (b) под каким углом снаряд поражает вертикальную стену, отстоящую на 75 единиц от точки выстрела? (c) под каким углом снаряд поражает горизонтальное покрытие, имеющее высоту 16 единиц? (d) если выстрел производится на высоте 24 единиц, под каким углом будет поражена почва? (e) если выстрел производится с вершины холма, склон которого образует угол в 45°, под каким углом будет поражен этот склон?

21. Канат висящего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 *м*. Самая нижняя точка каната находится на 40 *м* ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорными колоннами (рис. 79).

§ 73. Наибольшая и наименьшая величина функции; введение. В громадном числе практических вопросов мы имеем дело с функциями, у которых важно знать наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение. И тогда необходимо иметь те численные величины аргумента, для которых функция получает эти важные для нас значения.

Пусть, *например*, требуется определить размеры прямоугольника, имеющего наибольшую площадь из всех прямоугольников, какие могут быть вписаны в круг радиуса 5 *см*. Рассмотрим данный круг и впишем в него какой-нибудь прямоугольник $CDEB$ (рис. 80). Положим основание $CD=x$; тогда высота $DE=\sqrt{100-x^2}$, и площадь S прямоугольника выразится, очевидно, следующим образом:

$$S=x\sqrt{100-x^2}. \qquad (1)$$

То, что существует прямоугольник с наибольшей площадью, можно установить путем таких рассуждений.

Заставим возрастать основание $CD=x$ до тех пор, пока оно не станет равным 10 *см* (диаметр круга); при этом высота $DE=\sqrt{100-x^2}$ будет уменьшаться до нуля, и площадь S обратится также в нуль. Пусть теперь уменьшается до нуля основание; тогда высота будет возрастать до 10 *см*, и площадь S снова

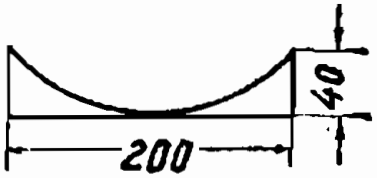


Рис. 79

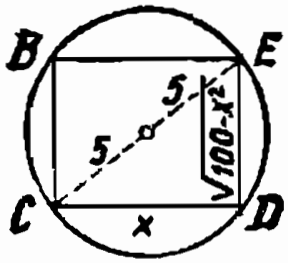


Рис. 80

обратится в нуль. Следовательно, интуитивно очевидно, что существует такой вписанный прямоугольник, площадь которого больше площадей всех других вписанных прямоугольников. Нетрудно догадаться, что когда прямоугольник обратится в квадрат, то площадь его станет наибольшей из всех возможных; но это — догадка и остается пока простым предположением.

Более надежный метод решения вопроса состоит, очевидно, в построении и исследовании графика функции (1). Для облегчения вычерчивания графика заметим, что:

a) согласно смыслу задачи величины x и S положительны;

b) значение x содержится между 0 и 10 включительно.

Составим теперь таблицу значений x и S и вычертим график (рис. 81).

Что нам дает исследование графика?

a) Если он аккуратно выполнен, мы можем весьма точно определить значение площади прямоугольника для любого значения x, измеряя длину соответствующей ординаты. Так, например, когда:

$x = OM = 3$ *см*, $S = MP = 28{,}6$ *см*^{2} и когда $x = ON = 4{,}5$ *см*, $S = NQ \approx 39{,}8$ *см*^{2} *.

b) Кривая имеет единственную горизонтальную касательную RT. Ордината HT точки T касания больше всех других ординат. Отсюда заключаем: один *из вписанных прямоугольников имеет, очевидно, наибольшую площадь сравнительно с площадью любого другого из прямоугольников.* Другими словами, мы можем отсюда заключить, что функция (1) имеет одно *наибольшее значение* (максимум). Мы не можем найти точно это значение ($= HT$), измеряя соответствующую ординату, но мы его легко найдем,

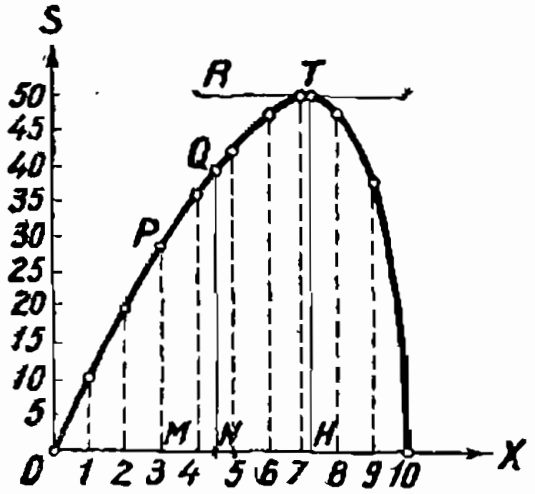


Рис. 81

x	S
0	0,0
1	9,9
2	19,9
3	28,6
4	36,6
5	43,0
6	48,0
7	49,7
8	48,0
9	39,6
10	0,0

воспользовавшись методами анализа. Нами замечено, что в точке T касательная горизонтальна; следовательно, наклон кривой в этой точке равен нулю (§ 71). Поэтому, чтобы определить абсциссу точки T, найдем производную функции (1), приравняем ее нулю и решим получающееся таким образом уравнение относительно x. Будем иметь:

$$S = x\sqrt{100 - x^2},$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0; \quad \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0.$$

Решая, имеем:

$$x = 5\sqrt{2}.$$

Подставляя это значение x в выражение, определяющее высоту DE, получим (см. рис. 81):

$$\text{высота } DE = \sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{2}.$$

* Значок $\approx$ указывает на приблизительную оценку численной величины, полученной путем *измерения* ординаты.

Итак, прямоугольник наибольшей площади, вписанный в данный круг, является квадратом и площадью его

$$S = CD \cdot DE = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50 \text{ см}^2.$$

Следовательно, длина ординаты HT равна 50.

Возьмем другой пример. Требуется сделать деревянную коробку, объем которой должен содержать 108 $см^3$. Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на нее пошло наименьшее количество материала?

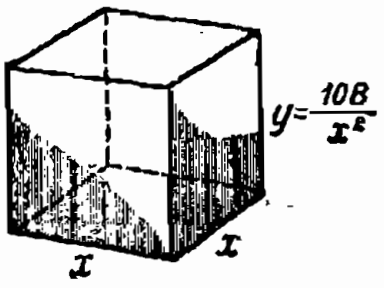


Рис. 82

Обозначим через x длину стороны основания коробки и через y ее высоту. Так как объем коробки известен, то y можно выразить функцией от x. В самом деле:

объем $= x^2 y = 108$,

откуда

$$y = \frac{108}{x^2} \quad \text{(рис. 82)}.$$

Теперь мы можем выразить через x число M квадратных сантиметров дерева, потребное для того, чтобы сделать коробку:

площадь основания равна x^2 $см^2$

и

площадь четырех боковых сторон равна $4xy = \frac{432}{x}$ $см^2$.

Следовательно,

$$M = x^2 + \frac{432}{x}. \qquad (2)$$

Построим график функции (2) (рис. 83).

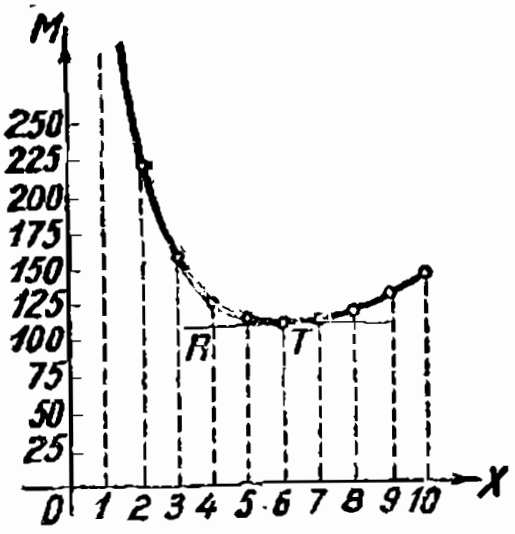


Рис. 83

x	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	108
7	111
8	118
9	129
10	142

Что дает нам исследование этого графика?

a) Если он тщательно выполнен, мы можем измерить ординату, соответствующую какому-нибудь значению x длины основания коробки, и определить таким образом число квадратных сантиметров дерева, требующегося для построения коробки.

b) Кривая имеет единственную горизонтальную касательную RT. Ордината точки касания имеет наименьшую длину сравнительно со всеми другими ординатами. Отсюда мы заключаем: *очевидно, существует коробка, на которую пойдет наименьшее количество дерева, сравнительно со всякой другой.* Другими словами, мы заключаем, что функция (2) имеет одно *наименьшее значение* (минимум). Найдем интересующую нас точку графика, пользуясь методами анализа. Дифференцируя функцию (2) для нахождения наклона кривой в любой точке, получим:

$$\frac{dM}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

В наиболее низкой точке графика наклон равен нулю:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Отсюда следует, что когда $x = 6$, необходимое количество материала для коробки будет наименьшим.

Подставляя найденное значение x в формулу (2), найдем, что

$$M = 108 \text{ см}^2.$$

Существование наименьшего значения функции M можно показать также путем следующего рассуждения. Предположим, что дно коробки изменяется, увеличиваясь от очень маленького квадрата до очень большого. В первом случае высота коробки очень велика, и поэтому количество необходимого материала тоже очень большое. Во втором случае высота становится очень малой, и поэтому для основания коробки при том же ее объеме потребуется большое количество дерева. Следовательно, функция M, отправляясь от очень большого значения, убывает, затем возрастает от другого тоже большого значения, а потому имеет наименьшее значение.

Перейдем к подробному исследованию вопроса о максимумах и минимумах.

§ 74. Функции возрастающие и убывающие; их отличительные признаки[1]. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей,* когда

[1] Рассуждения в § 74—81 и ниже в § 85—87 основаны преимущественно на наглядных геометрических представлениях и не являются строгими. Аналитическое решение изложенных вопросов дано в § 146. Как правило, ниже будут рассматриваться функции с непрерывной производной (примечание редактора).

y алгебраически увеличивается при возрастании переменного x и, значит, убывает при убывании x. Функция называется *убывающей*, когда y алгебраически уменьшается при возрастании переменного x и, значит, возрастает при его убывании.

Геометрическое изображение функции ясно показывает, возрастающая ли она или убывающая. Для примера рассмотрим функцию $y=a^x$, $(a>1)$, график которой дан на рисунке 84.

Если двигаться по кривой слева направо, то кривая *поднимается*, т. е. по мере возрастания x функция y все время возрастает. Следовательно, a^x есть функция, возрастающая для всех значений x.

С другой стороны, рассмотрим функцию $y=(a-x)^3$, геометрическое изображение которой дано на рисунке 85.

В этом случае, по мере того как мы двигаемся вдоль кривой слева направо, кривая

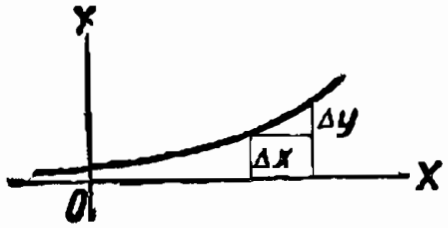


Рис. 84

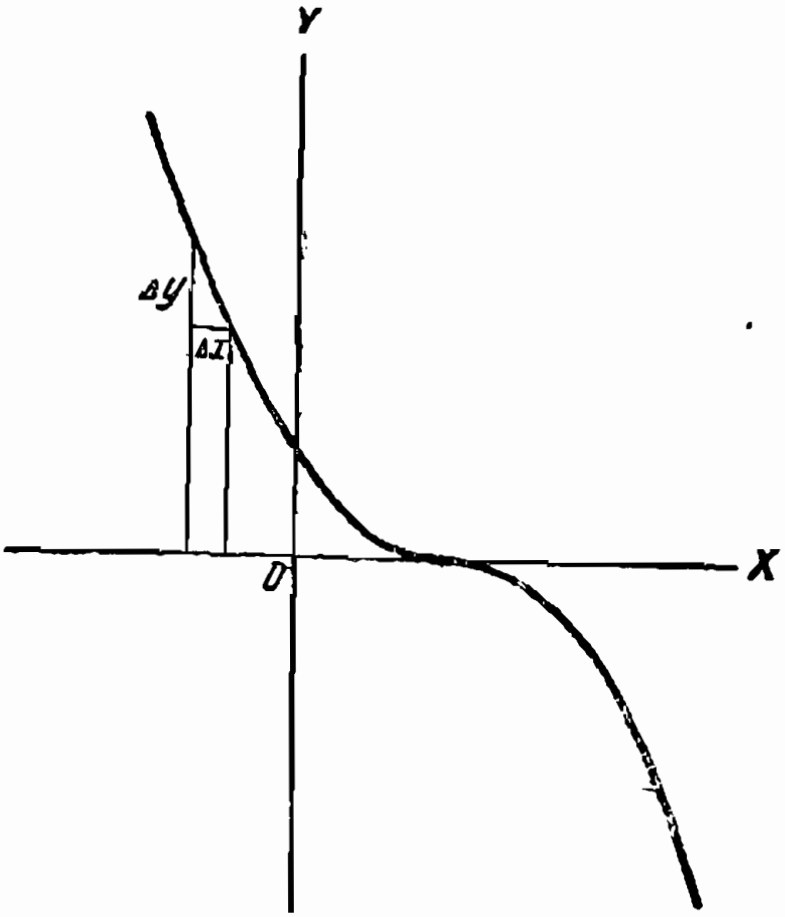


Рис. 85

падает, т. е. по мере возрастания x функция постоянно убывает. Следовательно, $(a-x)^3$ есть функция, убывающая для всех значений x.

Что функция может то возрастать, то убывать показывает функция (рис. 86):

$$y=2x^3-9x^2+12x-3. \qquad (1)$$

По мере того как мы передвигаемся по кривой слева направо, кривая поднимается, пока мы не достигнем точки A, затем — от A до B — она падает, а вправо от B идет все время поднимаясь.

Следовательно, от $x=-\infty$ до $x=1$ *функция возрастает*; от $x=1$ до $x=2$ *она убывает*; от $x=2$ до $x=+\infty$ *функция возрастает*.

Учащийся должен тщательно рассмотреть кривую, чтобы заметить, что делается с функцией при $x=1$ и при $x=2$. Очевидно, A и B суть точки поворота течения кривой: в точке A функция от возрастания переходит к убыванию; в точке B имеет место обратное. В точках A и B касательная (или кривая), очевидно, имеет направление параллельное оси OX и, следовательно, угловой коэффициент в этих точках равен нулю.

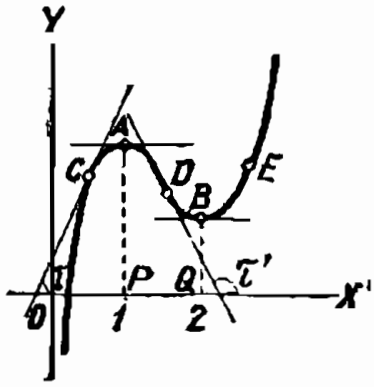


Рис. 86

В какой-нибудь точке, например C, где функция есть возрастающая, касательная делает *острый* угол с горизонтом (осью абсцисс). Поэтому тангенс ее наклона положителен.

С другой стороны, в таких точках, какова, например, точка D, где функция есть убывающая, касательная делает тупой угол с горизонтом. Поэтому тангенс ее наклона отрицателен.

Обратно, для данного значения x:

если $f'(x)>0$, то $f(x)$ *возрастает в этой точке*;

если $f'(x)<0$, то $f(x)$ *убывает в этой точке*.

Это следует из того, что функция $f(x)$ предполагается дифференцируемой в точке, x и, значит, кривая $y=f(x)$ имеет в точке x определенное направление, совпадающее с направлением касательной к ней в этой точке. И раз касательная делает с горизонтом острый угол, то кривая, следуя течению своей касательной, принуждена подыматься в точке x *вверх*; а если касательная образует с горизонтом тупой угол, кривая вынуждена в точке x опускаться *вниз*.

Мы сформулируем такой отличительный признак (критерий) возрастания и убывания функций:

функция есть возрастающая, когда ее производная положительна и есть убывающая, когда ее производная отрицательна.

Например, дифференцируя (1), мы имеем:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2). \qquad (2)$$

Когда $x<1$, производная $f'(x)$ положительна и $f(x)$ возрастает.
Когда $1<x<2$, производная $f'(x)$ отрицательна и $f(x)$ убывает.
Когда $x>2$, производная $f'(x)$ положительна и $f(x)$ возрастает.

Этот чисто аналитический признак, следовательно, находится в полном согласии с теми заключениями, которые мы вывели из наблюдения над кривой.

Если $f'(x)=0$, то касательная в точке x параллельна горизонту, и тогда без дальнейшего исследования нельзя решить, возрастает ли $f(x)$ или убывает в точке x, или x есть точка поворота.

§ 75. Максимальные и минимальные величины функции; их логические определения. *Максимальной* величиной какой-нибудь функции называем ту, которая *больше* чем другие ее величины для достаточно близких значений аргумента. *Минимальной* величиной ее называем ту, которая *меньше* чем другие ее величины для достаточно близких значений аргумента.

Например, на рисунке 86 ясно, что функция имеет максимальную величину $PA\,(=y=2)$, когда $x=1$, и минимальную величину $QB\,(=y=1)$, когда $x=2$.

Учащийся должен знать, что *максимальная величина* может не быть наибольшей из всех возможных ее величин, так же как и *минимальная величина* может не быть наименьшей из всех возможных ее величин. Например, из рисунка 86 ясно, что справа от точки B функция $(=y)$ имеет величины больше, чем ее максимум PA, а слева от точки A меньшие, чем ее минимум QB. Кроме того, если функция $y=f(x)$ имеет несколько максимумов и несколько минимумов, легко может случиться, что *иной ее минимум окажется больше какого-нибудь ее максимума,* ибо свойства максимальности и минимальности функции y сохраняют свою силу лишь при достаточно малых изменениях аргумента x и вполне могут утратить свою силу при больших отклонениях аргумента.

Предположим, что производная $f'(x)$ непрерывна и что она вблизи точки a изменяет свой знак лишь ограниченное число раз. Тогда если $f(x)$ имеет максимальную величину для $x=a$, то ясно, что $f(x)$ есть возрастающая функция от x, когда x незначительно меньше, чем a, и что $f(x)$ есть убывающая функция от x, когда x незначительно больше, чем a. Но тогда $f'(x)$ изменяет свой знак с $+$ на $-$ при проходе через точку a. Поэтому, раз производная $f'(x)$ непрерывна в точке a, она *должна в ней уничтожаться* и, значит, мы должны иметь равенство $f'(a)=0$.

Так, на рисунке 86 в точке C производная $f'(x)$ положительна, в точке D она отрицательна; а в точке же A имеем $f'(x)=0$.

С другой стороны, если $f(x)$ имеет минимальную величину для $x=a$, то $f(x)$ есть убывающая, когда x незначительно меньше, чем a, и $f(x)$ есть возрастающая, когда x незначительно больше, чем a. Следовательно, раз $f'(x)$ непрерывна в точке a, $f'(x)$ должна уничтожаться для $x=a$, т. е. имеем $f'(a)=0$.

Так, на рисунке 86, в точке D производная $f'(x)$ отрицательна, в точке E она положительна; в точке же B имеем $f'(x)=0$.

Справедливо и обратное предложение, дающее общие условия для максимальной и минимальной величин функции:

$f(x)$ есть максимум, если $f'(x)=0$ и $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$.

$f(x)$ есть минимум, если $f'(x)=0$ и $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$.

Значения независимого переменного x, удовлетворяющие уравнению $f'(x)=0$, называются *критическими*. Так, уравнение (2) показывает, что его корни: $x=1$ и $x=2$ суть критические значения аргумента x для функции, график которой дан на рисунке 86. Самые же точки на кривой $y=f(x)$, дающие максимум или минимум для функции $f(x)$, носят название *точек поворота* кривой $y=f(x)$. Ясно, что в точках поворота касательные к кривой *горизонтальны*.

Чтобы определить знак производной в точках, близких к рассматриваемой точке поворота, подставляем в производную сперва значения аргумента, незначительно меньшие соответствующей критической величины аргумента, а потом незначительно большие. Если первый знак $+$, а второй $-$, тогда функция имеет *максимальную* величину для соответствующей критической величины.

Если первый знак $-$, а второй $+$, тогда функция имеет *минимальную величину*.

Если же знак есть тот же самый в обоих случаях, тогда функция не имеет *ни максимальной, ни минимальной* величины для рассматриваемого критического значения аргумента, и тогда рассматриваемая точка на графике функции не есть точка поворота.

Например, возьмем функцию (1):

$$y=f(x)=2x^3-9x^2+12x-3. \tag{1}$$

Тогда, как мы видели:

$$f'(x)=6(x-1)(x-2). \tag{2}$$

Полагая $f'(x)=0$, мы находим две критические величины $x=1$ и $x=2$. Подвергаем испытанию сначала первую. Мы рассматриваем значения x, близкие к этой критической величине, подставляем их в правую часть равенства (2) и наблюдаем знаки множителей.

Когда $x<1$, $f'(x)=(-)(-)=+$
Когда $x>1$, $f'(x)=(+)(-)=-$

x	y
1 2	2 1

Поэтому $f(x)$ имеет максимальную величину, когда $x=1$. Из таблички мы видим, что эта величина есть $y=f(1)=2$.

Далее, подвергаем испытанию $x=2$. Поступая, как было указано, мы берем значения аргумента x теперь близкие к критической величине 2.

Когда $x<2$, $f'(x)=(+)(-)=-$.

Когда $x>2$, $f'(x)=(+)(+)=+$.

Поэтому $f(x)$ имеет минимальную величину, когда $x=2$. По указанной табличке эта величина есть $y=f(2)=1$.

Мы можем теперь соединить наши выводы в так называемое *рабочее правило.*

§ 76. Первый способ исследования функции на максимум и минимум. Рабочее правило.

Первый шаг. *Найти производную функции.*

Второй шаг. *Приравнять производную нулю и решить полученное уравнение, найдя все его действительные корни. Эти корни суть критические величины аргумента.*

Третий шаг. *Взять какую-нибудь критическую величину и подвергнуть испытанию производную, сначала для значения аргумента «немного меньшего», а потом «немного большего» этой критической величины. Если знак производной сначала +, а потом —, функция имеет* максимальную *величину для рассматриваемого критического значения аргумента; если знаки производной распределяются наоборот, функция имеет* минимальную *величину. Если знак производной не изменяется, функция не имеет* ни максимума, ни минимума.

Для третьего шага часто является удобным разложить $f'(x)$ на множители, как это сделано было на рассмотренном примере.

Пример 1. В первой задаче, рассмотренной нами в § 73, мы показали путем наблюдения графика кривой $S=x\sqrt{100-x^2}$, что прямоугольник максимальной площади, вписанный в круг радиуса 5 *см*, имеет вместимость 50 *см*^{2}. Это можно теперь доказать и аналитически, применив указанное правило.

Решение. $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$.

Первый шаг. $f'(x)=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$.

Второй шаг. Приравнивая $f'(x)=0$, мы имеем:

$$x=5\sqrt{2}\approx 7{,}07,$$

в качестве критической величины. У квадратного радикала нужно взять лишь положительный знак, ибо, по природе задачи, отрицательный знак не имеет смысла.

Третий шаг. Когда $x<5\sqrt{2}$, тогда $2x^2<100$ и знак $f'(x)$ есть +. Когда $x>5\sqrt{2}$, тогда $2x^2>100$ и знак $f'(x)$ есть —. Так как знак производной меняется с + на —, функция имеет *максимальную величину*:

$$f(5\sqrt{2})=5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=50.$$

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию $(x-1)^2(x+1)^3$.
Решение.

$$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3.$$

Первый шаг.

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

Второй шаг.

$$(x-1)(x+1)^2(5x-1)=0,$$

откуда критические величины $x=1,\ -1,\ \frac{1}{5}$.

Третий шаг.

$$f'(x)=5(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right).$$

Исследуем сначала критическую величину $x=1$ (C на рисунке 87).

Когда $x<1$, то $f'(x)=5(-)(+)^2(+)=-$.

Когда $x>1$, то $f'(x)=5(+)(+)^2(+)=+$.

Заключаем, что при $x=1$ функция имеет минимум $f(1)=0=$ ординате точки C.

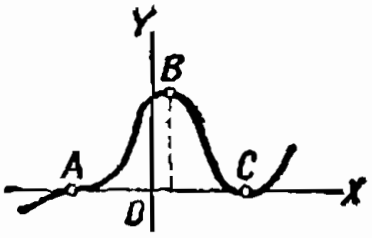


Рис. 87

Исследуем теперь критическую величину $x=\frac{1}{5}$ (B на рисунке 87).

Когда $x<\frac{1}{5}$, $f'(x)=5(-)(+)^2(-)=+$.

Когда $x>\frac{1}{5}$, $f'(x)=5(-)(+)^2(+)=-$.

Следовательно, при $x=\frac{1}{5}$ функция имеет максимум, равный $f\left(\frac{1}{5}\right)=$ $=+1{,}10592=$ ординате точки B.

Рассмотрим, наконец, критическую величину $x=-1$ (точка A на рисунке 87).

Когда $x<-1$, $f'(x)=5(-)(-)^2(-)=+$.

Когда $x>-1$, $f'(x)=5(-)(+)^2(-)=+$.

Следовательно, когда $x=-1$, функция не имеет ни максимума, ни минимума.

§ 77. Максимальная и минимальная величины непрерывной функции, когда у нее нет производной в некоторых точках. Этот случай самый трудный и в то же время вполне конкретный.

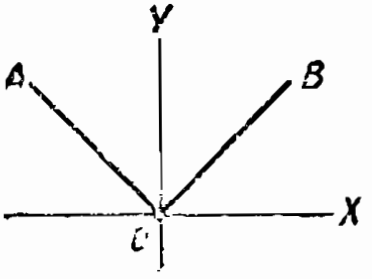


Рис. 88

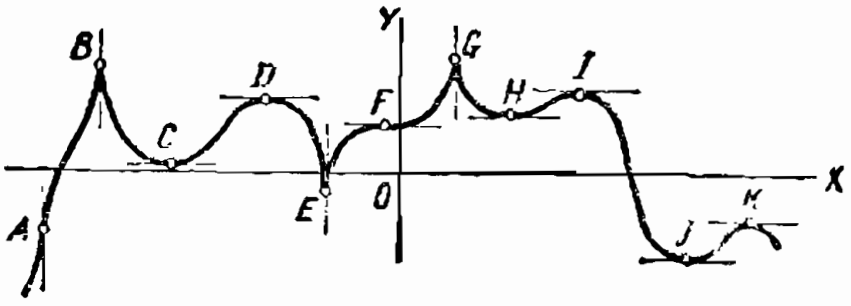


Рис. 89

Достаточно, например, взять функцию (рис. 88):

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2},$$

где квадратный радикал понимается всегда в арифметическом (т. е. *положительном*) смысле. Эта функция имеет своим графиком две полупрямые OA и OB, равноделящие углы второй и первой четверти. Она непрерывна и равна нулю в точке $x=0$, $f(0)=0$. Так как во всех других точках x функция $f(x)$ положительна, то ее значение $f(0)$ есть *величина минимальная*. И, однако, найти ее по вышеуказанному рабочему правилу невозможно, ибо *производной* $f'(x)$ *в точке* $x=0$ *не имеется*, и, значит, получить значение 0 аргумента x как критическую величину из уравнения $f'(x)=0$ *нельзя*.

Чтобы убедиться, что производной $f'(0)$ нет, достаточно, согласно общему правилу дифференцирования, рассмотреть отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для $x=0$. Оно, очевидно, равно $+1$, когда Δx положительно, и равно -1, когда Δx отрицательно. Поэтому предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю, не имеется никакого.

Точно так же, рассматривая график (рис. 89) некоторой функции $y=f(x)$, нетрудно сразу же заметить, что $f(x)$ имеет в точке E *минимальную величину*, а в точках B и G *максимальную*. Но абсциссу x_0 какой-нибудь из этих точек получить по рабочему правилу, как критическую величину, из уравнения $f'(x)=0$ *невозможно*, ибо ни для одной из этих точек производной $f'(x)$ *не имеется*.

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что график представляет три пары кривых дуг: AB и BC, DE и EF, FG и GH, имеющих в точках B, E и G прикосновение к вертикальным прямым. Поэтому, если мы составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для абсциссы x_0 какой-нибудь из этих точек, то сразу заметим, что абсолютная величина $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$ сказанного отношения стремится к $+\infty$, когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что производной $f'(x_0)$ *иметься не может* и, значит, абсцисса x_0 ни одной из этих трех точек B, E и G не может быть получена, как критическая величина, из уравнения $f'(x)=0$.

К тому же отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для абсциссы x_0 каждой из трех указанных точек *изменяет свой знак при перемене знака приращения* Δx, так что для стремящихся к нулю приращений Δx одного знака отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $+\infty$, а для приращений Δx противоположного знака это отношение стремится к $-\infty$.

Заметим, наконец, что в точке A, где кривая имеет настоящую, вертикальную целую касательную прямую (а не полупрямую, как в точках B, E и G), там отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $+\infty$ *независимо от знака приращения* Δx. Но в точке A мы не имеем ни максимальной ни минимальной величины.

Такие точки кривой, как B, E и G, называются *остриями*. При исследованиях, где ищутся у какой-нибудь функции $y=f(x)$ *все возможные* максимальные и минимальные величины, там надо принимать во внимание и острия. Для этого ищут из абсциссы посредством уравнения

$$\frac{1}{f'(x)}=0, \tag{1}$$

ибо по мере приближения аргумента x к абсциссе x_0 острия $|f'(x)|$ безгранично увеличивается, что указывает на непрерывность обратной величины производной в обращение ее в нуль для абсциссы x_0 острия. Поэтому *включают в число критических величин также и корни уравнения* (1). Этим изменяется лишь второй шаг рабочего правила. Остальные шаги остаются без перемены.

Поиски же других максимальных и минимальных величин, где нет производной $f'(x)$, очень трудны и не подчиняются никаким правилам.

Пример. Исследовать функцию $a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}$ на максимум и минимум.

Решение.

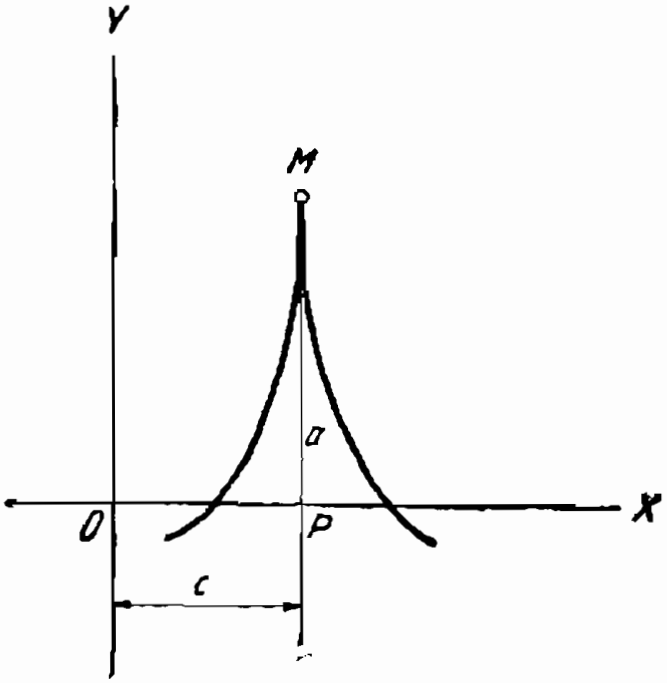


Рис. 90

$$f(x) = a - b(x-c)^{\frac{2}{3}},$$

$$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{1}{f'(x)} = -\frac{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}{2b}.$$

Здесь c есть критическая величина, для которой $\frac{1}{f'(x)} = 0$ и для которой функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому надо провести исследование на максимальную и минимальную величину для $x = c$.

Когда $x < c$, $f'(x) = +$.

Когда $x > c$, $f'(x) = -$.

Отсюда, когда $x = c = OP$, функция имеет максимальную величину $f(c) = a = PM$ (рис. 90).

ЗАДАЧИ

Исследовать каждую из следующих функций на максимальную и минимальную величины:

1. $2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$.

Отв. $x = -1$ дает макс. $= 1$,
$x = 4$ дает мин. $= -124$.

2. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

$x = -1$ дает макс. $= \frac{19}{6}$,
$x = 2$ дает мин. $= -\frac{4}{3}$.

3. $x^3 + 12x^2 + 36x - 50$.

$x = -6$ дает макс. $= -50$,
$x = -2$ дает мин. $= -82$.

4. $15 + 9x - 3x^2 - x^3$.

$x = 0$ дает макс. $= 0$,
$x = \pm 1$ дают мин. $= -1$.

5. $x^4 - 2x^2$.

$x = 0$ дает мин. $= 0$,
$x = \pm\sqrt{3}$ дают макс. $= 9$.

6. $6x^2 - x^4$.

7. $2 + 24x^2 - x^4$.

8. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

$x = 1$ дает мин. $= 3$.
$x = 2$ дает макс. $= 4$,
$x = 3$ дает мин. $= 3$.

9. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

10. $x^2 + \frac{16}{x}$.

$x = 2$ дает мин. $= 12$.

11. $x - \frac{108}{x^2}$.

12. $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Отв. $x = \pm 1$ дают мин. $= 2$.

13. $\frac{6x}{x^2+1}$.

$x = -1$ дает мин. $= -3$,
$x = 1$ дает макс. $= 3$.

14. $\frac{x^2+x+1}{x}$.

15. $\frac{x^2}{x+1}$.

16. $(x-1)^2(x-3)^2$.

17. $(x+2)^2(x-1)^2$.

18. $(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}$.

$x = 4$ дает макс. $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$,
$x = 6$ дает мин. $= 0$.

19. $x(6+x)^2(6-x)^4$.

$x = -6$ дает макс. $= 0$,
$x = -3$ дает мин. $= -19\,683$,
$x = 2$ дает макс. $= 8192$.
$x = a$ дает мин. $= b$.

20. $b + c(x-a)^{\frac{4}{3}}$.

21. $a - b(x-c)^{\frac{1}{3}}$.

нет ни макс., ни мин.

22. $\frac{(x-a)(b-x)}{x^2}$.

$x = \frac{2ab}{a+b}$ дает макс. $= \frac{(b-a)^2}{4ab}$,

$x = \frac{a^2}{a+b}$ дает макс. $= \frac{(a+b)^2}{a}$.

23. $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$.

$x = \frac{a^2}{a-b}$ дает мин. $= \frac{(a-b)^2}{a}$.

24. $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

$x = 2$ дает макс. $= \frac{5}{3}$,
$x = 0$ дает мин. $= -1$.

25. $\frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

$x = -3$ дает мин. $= -\frac{1}{8}$.

26. $(x-2)^5(2x+1)^4$.

$x = -\frac{1}{2}$ дает макс. $= 0$,

$x = \frac{11}{18}$ дает мин. $= -126$,

$x = 2$ не дает ничего.

27. $(2x-a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{2}{3}}$.

$x = \frac{2a}{3}$ дает макс. $= \frac{a}{3}$,
$x = a$ дает мин. $= 0$,
$x = \frac{a}{2}$ не дает ничего.

28. $x(a+x)^2(a-x)^3$.

$x = -a$ дает макс. $= 0$,

$x = -\frac{a}{2}$ дает мин. $= -\frac{9}{32}a^5$,

$x = a$ не дает ничего.

29. $\frac{x^2-7x+6}{x-10}$.

$x = 4$ дает макс. $= 1$,
$x = 16$ дает мин. $= 25$.

30. $\frac{(a-x)^2}{a-2x}$.

$x = \frac{a}{4}$ дает мин. $= \frac{27}{32}a^2$.

§ 78. Общие указания для наиболее практичного отыскания максимальных и минимальных величин. Во многих задачах нужно сперва составить, исходя из данных условий, ту функцию, максимальную и минимальную величины которой дальше будут искаться. Как делается такое составление, мы это видели на двух примерах, подробно разобранных в § 73. Составление функции иногда представляет значительные трудности. К сожалению, для этого составления нет никаких правил. Можно лишь руководствоваться следующим.

Общие указания

(a) *Попробовать написать функцию, максимальная или минимальная величина которой фигурирует в задаче.*

(b) *Если написанное выражение содержит более одного переменного, тогда самые условия задачи должны дать достаточное число соотношений между переменными для того, чтобы все они могли быть выражены через только одно.*

(c) *К полученной окончательно функции одного переменного применяем рабочее правило.*

(d) *В практических задачах обычно легко судить о том, какая критическая величина дает максимум и какая дает минимум, так что не всегда приходится прибегать к третьему шагу.*

(e) *Начертить график функции для проверки выполненной работы.*

Работа по нахождению максимума и минимума часто упрощается, когда пользуются следующими принципами:

(1) *Максимальные и минимальные величины непрерывной функции обязаны чередоваться.*

(2) *Если c положительное постоянное, тогда $cf(x)$ имеет максимум или минимум для таких значений переменного x и только для таких, которые дают $f(x)$ максимум или минимум.*

Поэтому при отыскании критических величин и испытании их на максимум и минимум можно опускать положительный постоянный множитель.

Если c есть число отрицательное, $cf(x)$ имеет максимум, когда $f(x)$ получает минимум и обратно.

(3) *Если c есть постоянное, тогда $f(x)$ и $c+f(x)$ имеют одновременно максимум и минимум для тех же самых значений переменного x.*

Поэтому можно опустить постоянный член при отыскании критических величин и их испытании.

ЗАДАЧИ

1. Из квадратного жестяного листа (рис. 91), сторона которого a, желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов?

Решение. Пусть сторона малого квадрата равна x; следовательно, сторона квадрата, образующего дно ящика, равна $a - 2x$, а объем его:

$$V = (a - 2x)^2 x;$$

такова функция, максимум которой нужно найти, выбирая надлежащим образом x. Прилагаем правило.

Первый шаг.

$$\frac{dV}{dx} = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = a^2 - 8ax + 12x^2.$$

Второй шаг. Решая уравнение

$$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0,$$

находим критические значения:

$$x = \frac{a}{2} \text{ и } \frac{a}{6}.$$

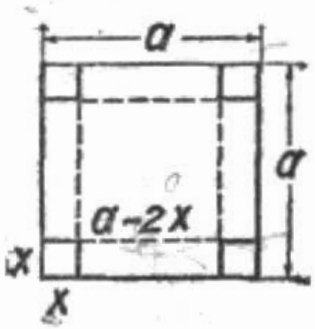


Рис. 91

Из рисунка 91 видно, что $x = \frac{a}{2}$ дает минимум, ибо в этом случае вся жесть будет вынута вырезкой, и материала для ящика не останется никакого. Обычным испытанием найдем, что $x = \frac{a}{6}$ дает максимальный объем, равный $\frac{2a^3}{27}$.

Итак, сторона у вырезаемых квадратов составляет шестую долю стороны данного квадрата.

2. Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением (рис. 92) изменяется прямо пропорционально ширине и квадрату высоты. Каковы будут размеры балки наибольшей прочности, какую только можно выпилить из круглого бревна, диаметр которого равен d?

Решение. Пусть x будет ширина, y — высота балки; по условию балка будет иметь наибольшую прочность, когда функция xy^2 достигает максимума.

Из чертежа имеем:

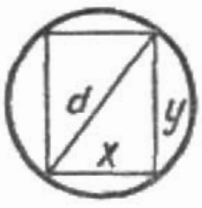


Рис. 92

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

следовательно, нужно исследовать функцию

$$f(x) = x(d^2 - x^2) = d^2x - x^3.$$

Первый шаг.

$$f'(x) = d^2 - 3x^2.$$

Второй шаг.

$$d^2 - 3x^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

есть критическое значение, при котором функция получает максимум. Заключаем, что если балка выпилена так, что

$$\text{высота} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{диаметра бревна},$$

$$\text{ширина} = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \text{диаметра бревна},$$

то балка будет иметь наибольшую прочность.

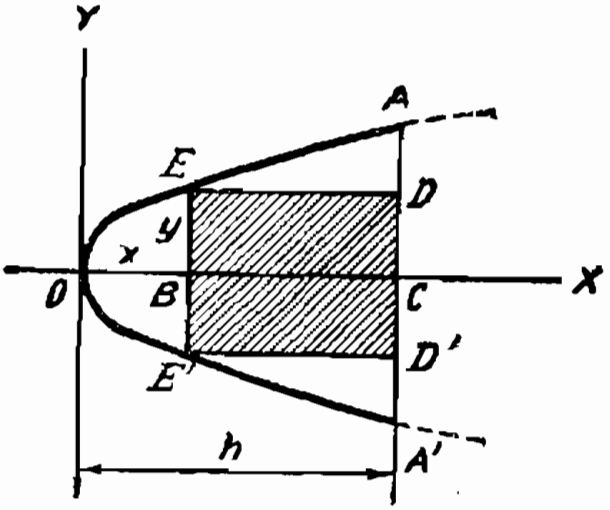


Рис. 93

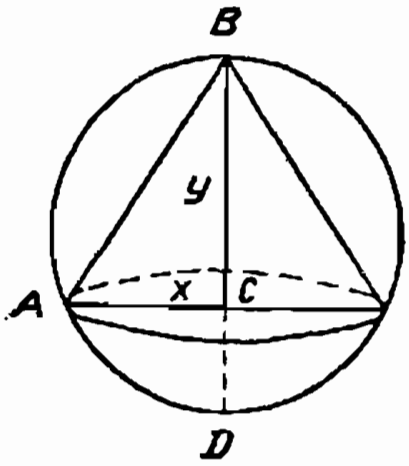


Рис. 94

3. Какова ширина прямоугольника максимальной площади, который можно вписать в данный сегмент OAA' параболы (рис. 93)?

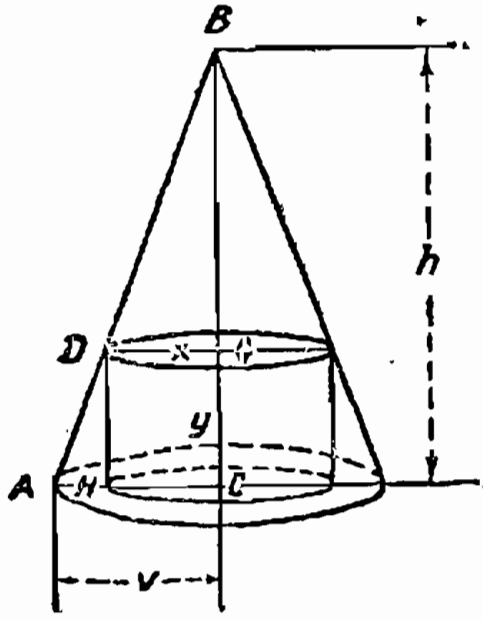


Рис. 95

Указание. Если:

$$OC = h,\ BC = h - x \text{ и } EE' = 2y,$$

то площадь прямоугольника $EDD'E'$ будет:

$$2(h - x)\,y.$$

Но так как точка E лежит на параболе

$$y^2 = 2px,$$

то исследуемая функция будет:

$$2(h - x)\sqrt{2px}.$$

Отв. Ширина равна $\frac{2}{3}h$.

4. Найти высоту конуса максимального объема, который можно вписать в шар данного радиуса r (рис. 94).

Указание. Объем конуса равен

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

но

$$x^2 = BC \cdot CD = y(2r - y);$$

поэтому исследуемая функция будет:

$$f(y) = \frac{\pi}{3}y^2(2r - y).$$

Отв. Высота конуса равна $\frac{4}{3}r$.

5. Найти высоту цилиндра максимального объема, который можно вписать в данный прямой конус (рис. 95).

Указание. Пусть $AC=r$ и $BC=h$. Объем цилиндра равен $\pi x^2 y$. Но из прямоугольных треугольников ABC и DBG имеем:

$$r:x=h:(h-y),$$

откуда

$$x=\frac{r(h-y)}{h}.$$

Таким образом, исследованию подлежит функция:

$$f(y)=\pi\frac{r^2}{h^2}y(h-y)^2.$$

Отв. Высота равна $\frac{1}{3}h$.

§ 79. Производная как быстрота изменения. В § 51 функциональная связь

$$y=x^2 \tag{1}$$

дала для отношения соответствующих приращений величину

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x. \tag{2}$$

Когда $x=4$ и $\Delta x=0{,}5$, тогда уравнение (2) дает

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=8{,}5. \tag{3}$$

В этом случае мы говорим, что средняя быстрота изменения переменного y относительно переменного x равна 8,5, когда x возрастает от $x=4$ до $x=4{,}5$.

Вообще, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ средней *быстроте изменения переменного y относительно переменного x, когда x изменяется от x до $x+\Delta x$.* (А)

Постоянная быстрота изменения. Если

$$y=kx+b, \tag{4}$$

тогда мы имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=k.$$

Это означает, что средняя быстрота изменения переменного y относительно переменного x равна k, т. е. угловому коэффициенту прямой линии (4), и, следовательно, *есть величина постоянная.* В этом случае, и только в этом случае, изменение Δy переменного y, когда переменное x возрастает от какой-нибудь величины x до $x+\Delta x$, равно быстроте изменения k, умноженной на Δx.

Мгновенная быстрота изменения. Если промежуток $(x, x+\Delta x)$ уменьшается и $\Delta x \to 0$, тогда средняя быстрота изменения переменного y относительно переменного x в этом промежутке становится в пределе *мгновенной быстротой*

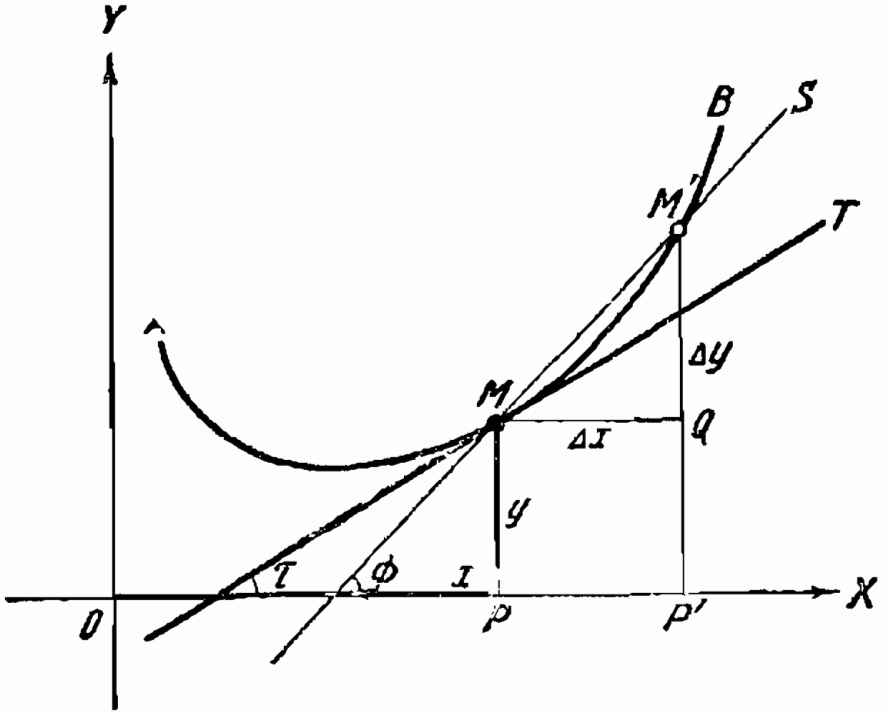


Рис. 96

изменения переменного y относительного переменного x.

Таким образом,

$\frac{dy}{dx}$ = мгновенной *быстроте изменения переменного y относительно переменного x для определенной величины переменного x.* (B)

Например, из уравнения (1) следует:

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{5}$$

Когда $x = 4$, мгновенная быстрота изменения переменного y есть 8 единиц на одну единицу измерения переменного x. Слово «*мгновенная*» часто опускают в формулировке (B).

Геометрическое истолкование. Начертим (рис. 96) график функции

$$y = f(x). \tag{6}$$

Когда x возрастает от OP до OP', тогда y возрастает от PM до $P'M'$. Средняя быстрота изменения y относительно x равна угловому коэффициенту секущей MS. Мгновенная быстрота, когда $x = OP$, равна угловому коэффициенту касательной MT.

Таким образом, *мгновенная быстрота изменения y в точке $M(x, y)$ кривой равна постоянной быстроте изменения y вдоль касательной прямой в M.*

Когда $x = x_0$, мгновенная быстрота изменения y, т. е. функции $f(x)$, есть $f'(x_0)$. Если x возрастает от x_0 до $x_0 + \Delta x$, тогда точное изменение x *не* равно $f'(x_0)\Delta x$, кроме того случая, когда $f'(x)$ есть постоянная величина, не зависящая от x, как в случае (4). Однако позже мы увидим, что это произведение есть «почти» Δy, когда Δx достаточно мало.

§ 80. Скорость прямолинейного движения. Важные приложения возникают тогда, когда независимым переменным в быстроте изменения является *время*. Тогда эта быстрота получает имя *скорости*. Скорость прямолинейного движения есть простейший пример тому.

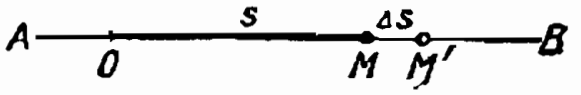


Рис. 97

Рассмотрим движение точки M по прямой AB (рис. 97). Пусть s есть расстояние, измеряемое от некоторой неподвижной точки, например O, до положения движущейся вправо точки M, которое она занимает в момент t времени. Ясно, что всякой величине времени t соответствует некоторое положение M точки и, следовательно, расстояние s. Поэтому s оказывается функцией времени t и, значит, мы можем писать:

$$s = f(t).$$

Пусть теперь t получает приращение Δt; тогда s получает приращение Δs, где Δs означает расстояние, пройденное в течение отрезка Δt времени, и

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \textit{средняя скорость} \qquad (1)$$

точки M, когда она переходит от положения M к положению M' в течение отрезка Δt времени. Если точка M движется равномерно (т. е. с постоянной скоростью), тогда указанное отношение (1) имеет ту же самую величину для всякого отрезка Δt времени и является скоростью в каждое мгновение.

Для общего случая движения, равномерного или неравномерного, мы определяем *скорость v* точки M (т. е. быстроту изменения проходимого точкой M пути s) *в какой-нибудь момент t времени как предел ее средней скорости, когда Δt безгранично приближается к нулю.*

Это означает, что:

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (C)$$

Скорость точки в какой-нибудь момент времени есть производная расстояния по времени, т. е. быстрота во времени изменения проходимого пространства.

Когда v положительна, расстояние s есть возрастающая функция времени, и тогда точка M движется направо, в направлении AB. Когда же v отрицательна, s есть убывающая функция от t, и тогда точка M движется влево, в направлении BA.

Чтобы показать, что это определение вполне согласуется с тем обычным представлением, которое мы уже имеем относительно скорости, достаточно отыскать, например, ту скорость, которую получает падающее тело в конце второй секунды.

Опытом найдено, что тело, падающее свободно из состояния покоя, в пустоте, вблизи поверхности земли, приблизительно следует закону:

$$s = 4{,}9t^2, \tag{2}$$

где s равно пройденному телом пространству в метрах, t равно времени в секундах. Прилагаем *общее правило дифференцирования.*

Первый шаг.

$$s + \Delta s = 4{,}9\,(t + \Delta t)^2 = 4{,}9t^2 + 9{,}8t \cdot \Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2.$$

Второй шаг.

$$\Delta s = 9{,}8t \cdot \Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2.$$

Третий шаг.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}8t + 4{,}9\Delta t =$ *средней скорости в течение отрезка времени* Δt, *отсчитывая его от некоторого определенного момента* t *времени.*

Полагаем $t = 2$.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}6 + 4{,}9\Delta t =$ *средней скорости в течение отрезка времени* Δt *по прошествии двух секунд падения.* (3)

Наше представление о скорости тотчас подсказывает нам, что (3) вовсе не представляет действительной скорости в *конце* двух секунд: в самом деле, если Δt взять даже весьма малым, положим Δt равным $\frac{1}{100}$ или $\frac{1}{1000}$ секунды, все равно (3) даст только *среднюю скорость* в течение соответствующего малого промежутка времени. Но то, что мы разумеем под скоростью в конце двух секунд, есть *предел средней скорости, когда* Δt *уменьшается до нуля*, т. е. скорость в конце двух секунд по (3) есть 19,6 *м/сек*. Таким образом, даже обычное представление о ско-

рости, получаемое из опыта, включает идею о пределе, или согласно нашему обозначению:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}6 \text{ м/сек.}$$

Приведенный пример хорошо иллюстрирует понятие о предельном значении. Учащийся должен освоиться с представлением, что *предельное значение* есть вполне *определенная величина,* но не есть нечто лишь приблизительное. *Предельное значение* переменной величины $19{,}6 + 4{,}9\Delta t$, когда Δt уменьшается до нуля, *в точности* равно 19,6.

§ 81. Связанные скорости. Во многих задачах встречаются *несколько* переменных, каждое из которых, по самому существу дела, есть функция времени. При этом соотношения между переменными устанавливаются из условий задачи. В этом случае соотношения между скоростями этих переменных находятся дифференцированием.

При решении задач на связанные скорости следует руководствоваться таким правилом:

Первый шаг. *Сделать чертеж, иллюстрирующий задачу. Обозначить через x, y, z и т. д. переменные, зависящие от времени.*

Второй шаг. *Получить соотношение между переменными задачи, остающееся верным в каждый момент времени.*

Третий шаг. *Дифференцировать по времени это соотношение.*

Четвертый шаг. *Составить перечень известных и искомых количеств.*

Пятый шаг. *Подставить известные количества в результат, полученный дифференцированием* (третий шаг) *и решить относительно неизвестного.*

1. Человек приближается со скоростью 8 *км/час* к подножию башни, вышиной в 60 *м*. Какова скорость его приближения к вершине башни в момент, когда он находится на расстоянии 80 *м* от ее основания?

Решение. Применим приведенное выше правило.

Первый шаг. Сделаем чертеж (рис. 98). Пусть x — расстояние человека от подножия башни и y — расстояние от вершины в произвольный момент времени.

Второй шаг. Из прямоугольного треугольника имеем:

$$y^2 = x^2 + 3\,600.$$

Третий шаг. Дифференцируя, получаем:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}. \qquad (1)$$

Четвертый шаг.

$$x=80,\quad \frac{dx}{dt}=8\ км/час,$$

$$y=\sqrt{x^2+3\,600}=100,\quad \frac{dy}{dt}=?$$

Пятый шаг. Подставляя в (1), находим:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{80}{100}\cdot 8=6{,}4\ км/час.$$

2. Точка движется по параболе $6y=x^2$ таким образом, что когда $x=6$, абсцисса возрастает со скоростью 2 *м/сек*. С какой скоростью возрастает в тот же самый момент ордината?

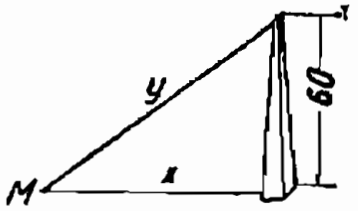


Рис. 98

Решение.

Первый шаг. Строим параболу (рис. 99).

Второй шаг.

$$6y=x^2.$$

Третий шаг.

$$6\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x}{3}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dx}{dt}=2\ м/сек,\quad x=6,\quad y=\frac{x^2}{6}=6.$$

$$\frac{dy}{dt}=?$$

Пятый шаг. Подставляя в (2), находим:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6}{3}\cdot 2=4\ м/сек.$$

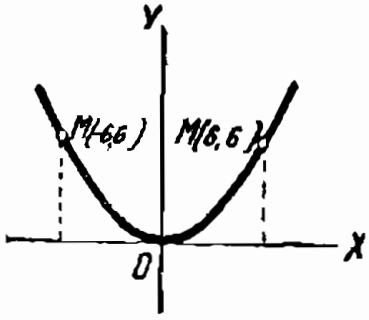


Рис. 99

Из этого результата мы видим, что в точке $M(6, 6)$ ордината изменяется по величине вдвое быстрее абсциссы.

В точке $M(-6, 6)$ при $\frac{dx}{dt}=2\ м/сек$ будем иметь $\frac{dy}{dx}=-4\ м/сек.$

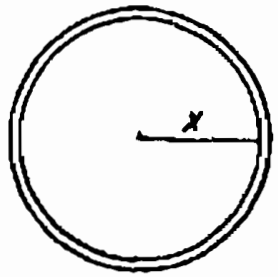


Рис. 100

Знак минус означает, что при возрастании абсциссы ордината убывает.

3. Круглый металлический диск расширяется от теплоты так, что его радиус равномерно увеличивается на 0,01 *см/сек*. С какой скоростью увеличивается его площадь, если радиус равен 2 *см*?

Решение. Пусть радиус x (рис. 100) и площадь диска y. Имеем $y=\pi x^2$, дифференцируем по времени t:

$$\frac{dy}{dt}=2\pi x\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (3)$$

Итак, в каждый момент площадь диска возрастает в квадратных сантиметрах в $2\pi x$ быстрее, чем возрастает радиус в линейных сантиметрах,

$$x=2,\quad \frac{dx}{dt}=0{,}01,\quad \frac{dy}{dt}=?$$

Подставляя в (3), получаем:

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}04 \cdot 3{,}14 \approx 0{,}13 \text{ } см^2/сек.$$

4. Дуговая лампа повешена на высоте 12 *м* над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек, рост которого равен 1,5 *м*. Насколько удлиняется его тень, если он удаляется от лампы со скоростью 49 *м/мин*?

Решение. Пусть расстояние человека от точки F, лежащей непосредственно под лампой L, будет x, а длина его тени y. Из рисунка 101 имеем:

$$y:(y+x) = 1{,}5:12,$$

откуда

$$y = \frac{1}{7}x.$$

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{7} \cdot \frac{dx}{dt},$$

т. е. удлинение тени составляет $\frac{1}{7}$ пути, пройденного человеком в то же время или 7 *м/мин*.

5. В параболе $y^2 = 12x$, когда x возрастает равномерно со скоростью 2 *см* в сек., требуется определить, с какой скоростью возрастает y, если $x = 3$ *см*? **Отв.** 2 *см*. в сек.

6. В какой точке предыдущей параболы абсцисса и ордината возрастают с одинаковой скоростью? **Отв.** (3,6).

7. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, как возрастает абсцисса? **Отв.** $\left(3, \frac{16}{3}\right)$.

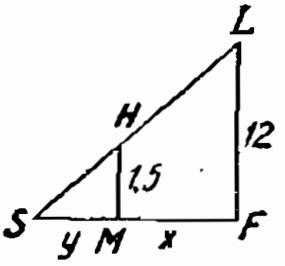


Рис. 101

8. Где в первой четверти угол увеличивается вдвое скорее его синуса? **Отв.** 60°.

9. Сторона равностороннего треугольника равна 24 *см* длины и увеличивается со скоростью 3 *см* в час. С какой скоростью увеличивается площадь этого треугольника?

Отв. $36\sqrt{3}$ *см*^{2} в час.

10. Вагон, стоящий на верхнем пути, находится на высоте 10 *м* прямо над нижним вагоном, причем их пути пересекаются под прямым углом. Скорость верхнего вагона равна 30 *км* в час, а нижнего 18 *км* в час. С какой скоростью они удаляются друг от друга 4 минуты спустя после встречи?

Отв. 34,9 *км* в час.

11. Один корабль плывет к югу со скоростью 6 *км* в час; другой — к востоку со скоростью 8 *км* в час. В 4 часа пополудни второй пересекает путь первого в точке, где первый проходил 2 часа тому назад. (a) Как изменялось расстояние между кораблями в 3 часа пополудни? (b) Как — в 5 часов пополудни? (c) Когда расстояние между ними не изменялось?

Отв. (a) Умепьшалось на 2,8 *км* в час.
(b) Увеличивалось на 8,73 *км* в час.
(c) В 3,28 час. пополудни.

12. Предполагая, что объем дерева в стволе пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год с ростом дерева, показать, что скорость роста, когда диаметр = 0,9 *м*, в 25 раз больше, чем при диаметре в 18 *см*.

ГЛАВА IX

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 82. Определение последовательных производных. Мы видели, что производная функция от x вообще также есть функция от x. Эта новая функция также может быть дифференцируема, и в этом случае производная этой *первой производной* называется *второй производной* первоначальной функции. Подобно этому производная второй производной называется *третьей производной* и т. д. до *n-й производной*. Так, если

$$y = 3x^4,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 36x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 72x$$

и т. д.

Обозначения. Символы для последовательных производных обыкновенно пишутся сокращенно следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

. . . . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Если $y = f(x)$, то последовательные производные обозначают еще так:

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{IV}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x);$$

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \quad \ldots, y^{(n)}$$

или

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad \frac{d^3}{dx^3}f(x), \quad \frac{d^4}{dx^4}f(x), \ldots, \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

В данном выше примере наиболее удобным обозначением является: $y=3x^4$, $y'=12x^3$, $y''=36x^2$, $y'''=72x$, $y^{IV}=72$.

§ 83. n-я производная. Для некоторых функций можно фактически для n-й производной найти общее выражение в функции числа n. Обычный прием состоит в нахождении нескольких последовательных первых производных, стольких, сколько будет нужно для раскрытия закона их образования; затем, по догадке, пишут n-ю производную и, наконец, оправдывают эту догадку приемом так называемой «*математической полной индукции*» (иначе говоря, «рассуждением от n к $n+1$»), состоящим в том, что *сначала* предполагают догадку верной для числа n и *потом* доказывают, что она остается верной и для числа $n+1$.

Пример. Найти n-ю производную произведения uv двух функций u и v.

Решение. Вводя обозначение

$$y=uv,$$

мы имеем, по основной формуле V, сначала для *первой* производной

$$y'=u'v+uv'.$$

Потом, для *второй* производной, имеем:

$$y''=(u'v)'+(uv')'=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''.$$

Далее, для *третьей* производной, имеем:

$$y'''=(u''v)'+(2u'v')'+(uv'')'=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=$$

$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Для догадки здесь можно остановиться, ибо сделанного уже достаточно. В самом деле, сопоставим найденные дифференциальные формулы с алгебраическими формулами степеней суммы:

$$y'=u'v+uv' \qquad y=u+v$$

$$y''=u''v+2u'v'+uv'' \qquad y^2=(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$$

$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''' \qquad y^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$$

Аналогия получается поразительная, если, *с одной стороны*, принять во внимание, что самые первоначальные функции u и v можно рассматривать как производные нулевого порядка, и значит, можно писать: $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, и поэтому третья производная напишется в виде:

$$y^{(3)}=u^{(3)}v^{(0)}+3u^{(2)}v^{(1)}+3u^{(1)}v^{(2)}+u^{(0)}v^{(3)}. \qquad (1)$$

С другой стороны, если примем во внимание, что алгебраическая нулевая степень всегда равна единице: $u^0=1$ и $v^0=1$, и что введение множителем 1 не вредит верности алгебраических формул, то куб суммы напишется в виде:

$$y^3=u^3v^0+3u^2v^1+3u^1v^2+u^0v^3. \qquad (2)$$

Таким образом, дифференциальная формула для третьей производной $(uv)^{(3)}$ производная двух функций и алгебраическая формула для куба суммы двух количеств в точности совпадают *по внешнему своему виду*.

Ясно, что такое совпадение имеется и для формулы второй производной и квадрата суммы.

Поэтому естественной является догадка, что дифференциальная *формула для n-й производной произведения двух функций* и алгебраическая *формула бинома Ньютона n-й степени всегда совпадают* по внешнему виду, т. е. что имеем:

$$(uv)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}u^{(n)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (A)$$

Эта догадка становится математической истиной, когда применяют способ *полной индукции* для доказательства формулы (A). Для этого предполагают, что (A) верна для какого-нибудь целого положительного числа n, и затем, дифференцируя обе части равенства (A) один раз по аргументу x, доказывают, что полученное таким образом новое равенство имеет в точности такой же вид, как и (A), но только здесь n заменилось на $n+1$. Действительно, после однократного дифференцирования по x, *налево* будет стоять $(uv)^{(n+1)}$, а *направо*, после почленного однократного дифференцирования по x, будет стоять такое выражение, которое — *по приведении подобных членов* — получит опять прежний вид с заменой всюду числа n на число $n+1$. Мы опускаем здесь соответствующие выкладки.

Формула (A) n-й производной произведения двух функций впервые была установлена *Лейбницем*.

§ 84. Последовательное дифференцирование неявных функций. Чтобы иллюстрировать процесс, найдем $\frac{d^2y}{dx^2}$ из уравнения гиперболы

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

Дифференцируя по x, как и в § 70, находим:

$$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}. \qquad (2)$$

Дифференцируя еще раз и замечая, что y есть функция от x, получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - b^2b^2x\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}.$$

Подставляем вместо $\frac{dy}{dx}$ ее значение из (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\frac{b^2x}{a^2y}}{a^4y^2} = -\frac{b^2(b^2x^2 - a^2y^2)}{a^4y^3}.$$

Но в силу данного уравнения

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

ЗАДАЧИ

Проверить каждое из следующих дифференцирований:

1. $y = 2x^3 + 4x^2 - 7x + 9$. Отв. $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 8$.

2. $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$. $f^{IV}(x) = \frac{4!}{(1-x)^5}$.

3. $u = \sqrt{4+t^2}$. $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{4}{(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4. $y = x\sqrt{1-2x}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x-2}{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}$.

5. $s = \frac{t}{2-t}$. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4}{(2-t)^3}$.

6. $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x+8}{4(x+2)^{\frac{5}{2}}}$.

7. $p = \frac{\theta^2}{\theta+1}$. $\frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{2}{(\theta+1)^3}$.

8. $y = \frac{1-x}{1+x}$. $\frac{d^ny}{dx^n} = 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Указание. Привести дробь к виду $-1 + \frac{2}{1+x}$.

9. $x^2 + y^2 = r^2$. Отв. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}$.

10. $y^2 = 4ax$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4a^2}{y^3}$.

11. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$.

12. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$.

13. $x^3 - xy + y^3 = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy}{(x-3y^2)^3}$.

14. $x^2 + 2y^2 - 2xy - x = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{(4y-2x)^3}$.

В задачах 15—19 найти величины y' и y'' для указанных значений переменных.

15. $y = \sqrt{3x} + \frac{13}{\sqrt{3x}}$; $x = 3$. Отв. $y' = -\frac{2}{9}$; $y'' = \frac{5}{18}$.

16. $y = \sqrt{4x+9}$; $x = 4$. $y' = \frac{2}{5}$; $y'' = -\frac{4}{125}$.

17. $y = x\sqrt{x^2-16}$; $x = 5$. $y' = \frac{34}{3}$; $y'' = \frac{10}{27}$.

18. $x^2 + 4y^2 = 25$; $x = 3$, $y = 2$. $y' = -\frac{3}{8}$; $y'' = -\frac{25}{128}$.

19. $x^2 - xy + y^2 = 7$; $x = 2$, $y = -1$. Отв. $y' = \frac{5}{4}$; $y'' = \frac{21}{32}$.

20. $y = (x^2 + 1)^5$; $x = 1$.

21. $y = \frac{x}{x-1}$; $x = 3$.

22. $y = \sqrt{10 - 3x}$; $x = 2$.

23. $y = \sqrt[3]{11 - 3x}$; $x = 1$.

24. $4x^2 - y^2 = 64$; $x = 5$; $y = 6$.

25. $x^3 + x^2y + y^3 = a^3$; $x = -a$, $y = a$.

В каждом из следующих примеров найти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

26. $y = x^2 + \frac{8}{x^2}$.

28. $y = \frac{x}{x-4}$.

30. $y^2 - 2xy = a^2$.

27. $y = \sqrt[3]{3x - 5}$.

29. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

31. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

§ 85. Направление изгиба кривой. Когда точка $M(x, y)$ описывает кривую, тогда изменяется наклон касательной в точке M.

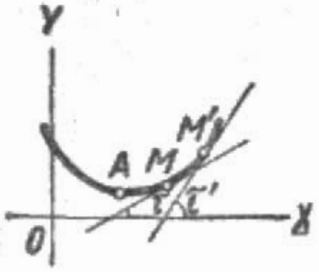


Рис. 102

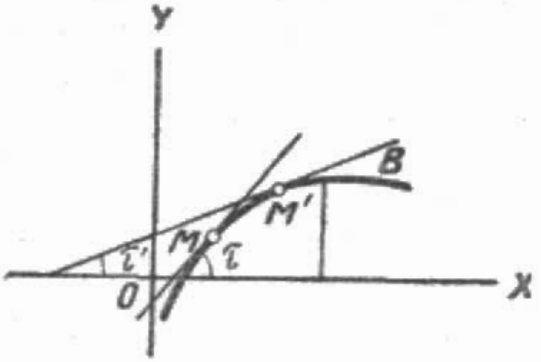


Рис. 103

Если касательная находится **под** кривой, тогда кривая направлена своей вогнутостью **вверх** (рис. 102); если касательная находится **над** кривой, тогда кривая направлена своей вогнутостью **вниз** (рис. 103). *В первом случае* наклон τ касательной возрастает, когда M описывает дугу AM'. Поэтому производная $f'(x)$ есть возрастающая функция аргумента x. *Во втором случае* наклон τ убывает и $f'(x)$ есть убывающая функция. Следовательно, в первом случае $f''(x)$ положительна (или равна нулю), во втором случае отрицательна (или равна нулю).

Справедливо и обратное предложение, являющееся признаком для распознавания *направления* изгиба кривой в точке: *кривая $y = f(x)$ направлена своей вогнутостью* вверх, *если вторая производная* $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительна *и направлена вогнутостью* вниз, *если эта производная* отрицательна.

§ 86. Второй способ испытания на максимум и минимум. На рисунке 104 в точке B кривая обращена своей вогнутостью вверх и ордината имеет минимальную величину. Значит, в точке B $f'(x)=0$ и $f''(x)$ положительна. В точке A имеем: $f'(x)=0$ и $f''(x)$ отрицательна.

Таким образом, мы имеем следующие *достаточные* условия максимума и минимума функции $f(x)$ для критических значений переменного:

$f(x)$ имеет максимальное значение, если $f'(x)=0$, а $f''(x)$ *отрицательна;*

$f(x)$ имеет минимальное значение, если $f'(x)=0$, а $f''(x)$ *положительна.*

Соответствующее *практическое пра*

Первый шаг. *Ищем первую производную функцию.*

Второй шаг. *Приравниваем первую производную нулю и из полученного уравнения находим действительные корни, которые и дадут критические значения переменного.*

Третий шаг. *Ищем вторую производную.*

Четвертый шаг. *Подставляем во вторую производную вместо переменного каждое критическое значение. Если получится результат отрицательный, то для испытуемого критического значения функция имеет* максимум; *если же результат подстановки будет положителен, то функция имеет* минимум.

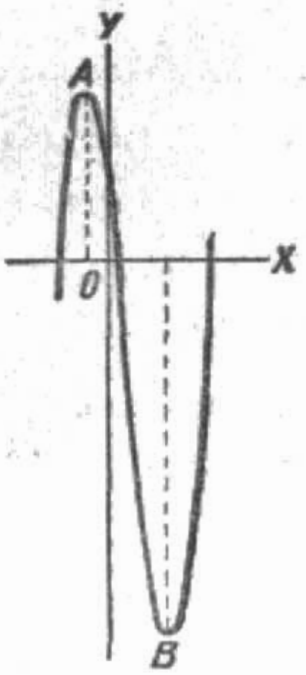


Рис. 104

Если $f''(x)=0$ или не существует, приведенное правило является недостаточным, хоть в этом случае также может быть максимум или минимум; в таких случаях обращаемся к первому основному методу. Обыкновенно пользуются вторым методом, и если процедура нахождения второй производной не слишком утомительна или продолжительна, то вообще метод этот кратчайший.

Пример 1. Применим предыдущее правило к аналитическому испытанию функции

$$M=x^2+\frac{432}{x}.$$

Решение.

$$f(x)=x^2+\frac{432}{x}.$$

Первый шаг.

$$f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}.$$

Второй шаг.

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

$x = 6$, критическое значение.

Третий шаг.

$$f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}.$$

Четвертый шаг.

$$f''(6) > 0.$$

Следовательно, $f(6) = 108$ — минимальная величина.

Пример 2. Исследовать функцию $x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на максимумы и минимумы (рис. 104).

Решение.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Первый шаг.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

Второй шаг.

$$3x^2 - 6x - 9 = 0;$$

отсюда критические значения:

$$x = -1 \text{ и } x = 3.$$

Третий шаг.

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Четвертый шаг.

$$f''(-1) = -12.$$

Следовательно,

$f(-1) = 10$ (ордината точки A) есть максимум.

Аналогично

$$f''(3) = +12,$$

следовательно,

$f(3) = -22$ (ордината точки B) есть минимум.

ЗАДАЧИ

Исследовать каждую из следующих функций на максимум и минимум:

1. $x^3 - 3x^2 + 5$.
   Отв. $x = 0$ дает $\max = 5$, $x = 2$ дает $\min = 1$.
2. $3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$.
   $x = -1$ дает $\max = 45$, $x = 3$ дает $\min = -51$.
3. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$.
   $x = 1$ дает $\max = -3$, $x = 6$ дает $\min = -128$.
4. $x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.
   $x = -1$ дает $\max = 7$, $x = 3$ дает $\min = -25$.
5. $9 - 24x + 15x^2 - 2x^3$.
   $x = 1$ дает $\min = -2$, $x = 4$ дает $\max = 25$.
6. $4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$.
   $x = \frac{1}{2}$ дает $\max = -\frac{33}{2}$, $x = \frac{5}{2}$ дает $\min = -\frac{65}{2}$.
7. $x^3 + 3x^2 + 9x - 5$.
   Ни max, ни min.
8. $3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 60$.
   $x = -2$ дает $\min = -4$, $x = 0$ дает $\max = 60$, $x = 3$ дает $\min = -129$.

9. $x^5 - 5x^2 - 20x + 10$.

10. $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

11. $2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$.

12. $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

13. $x^3 - 3x^2 + 6x + 10$.

14. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

15. $3x^5 - 125x^3 + 2160x$.

16. $(x-3)^2(x-2)$.

17. $(x-1)^3(x-2)^2$.

18. $(x-4)^5(x+2)^4$.

19. $(x-2)^5(2x+1)^4$.

20. $(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$.

21. $(2x-a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$.

22. $x(x-1)^2(x+1)^3$.

23. $x(a+x)^2(a-x)^3$ $(a>0)$.

24. $b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$ $(a>0,\ c<0)$.

Отв. $x=-2$ дает max $=-2$,
$x=2$ дает min $=-18$.

$x=1$ дает max $=\frac{7}{3}$,
$x=3$ дает min $=1$.

$x=2$ дает max $=38$,
$x=3$ дает min $=37$.

$x=1$ дает max $=4$,
$x=5$ дает min $=-28$.

Ни max, ни min.

$x=1$ дает max $=2$,
$x=3$ дает min $=-26$,
$x=0$ ни max, ни min.

$x=-4$ и 3 дают max,
$x=-3$ и 4 дает min.

$x=\frac{7}{3}$ дает max $=\frac{4}{27}$,
$x=3$ дает min $=0$,

$x=\frac{8}{5}$ дает max,
$x=2$ дает min,
$x=1$ нет ни max, ни min.

$x=-2$ дает max,
$x=\frac{2}{3}$ дает min,
$x=4$ нет ни max, ни min.

$x=-\frac{1}{2}$ дает max,
$x=\frac{11}{18}$ дает min,
$x=2$ нет ни max, ни min.

$x=\frac{1}{2}$ дает max,
$x=-1$ и 5 дают min.

$x=\frac{2a}{3}$ дает max,
$x=a$ дает min,
$x=\frac{a}{2}$ нет ни max, ни min.

$x=\frac{1}{2}$ дает max,
$x=1$ и $-\frac{1}{3}$ дают min,
$x=-1$ нет ни max, ни min.

$x=-a$ и $\frac{a}{3}$ дают max,
$x=-\frac{a}{2}$ дает min,
$x=a$ нет ни max, ни min.

$x=a$ дает max $=b$.

25. $a - b(x-c)^{\frac{1}{3}}$.

26. $\dfrac{ax}{x^2+a^2}$.

27. $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$.

28. $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$ $(a>0)$.

29. $\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$.

30. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$.

31. $\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

32. $\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

33. $\dfrac{1}{3x^5+20x^3+60x+1}$.

34. $\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x+17}$.

35. $2x^3-3x^2-12x+4$.

36. $2+3x-4x^2-x^3$.

37. $(x+1)^2(x-2)^2$.

38. x^4-2x^2+10.

39. $x^2-\dfrac{1}{x^2}$.

Отв. Ни max, ни min.

$x=a$ дает $\max=\dfrac{1}{2}$,

$x=-a$ дает $\min=-\dfrac{1}{2}$.

$x=4$ дает max,

$x=16$ дает min.

$x=\dfrac{a}{4}$ дает min.

$x=\dfrac{1}{2}$ дает min.

$x=\sqrt{2}$ дает min,

$x=-\sqrt{2}$ дает max.

$x=\dfrac{2ab}{a+b}$ дает max.

$x=1$ дает $\max=10$,

$x=\dfrac{1}{2}$ дает $\min=8$.

Нет ни max, ни min.

$x=2$ дает $\min=-3$,

$x=-3$ дает $\max=\sqrt[3]{98}$.

40. Доказать, что при любом значении x

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2.$$

41. Требуется измерить возможно точным образом некоторую неизвестную величину x. Положим, что для этого сделано было n одинаково тщательных наблюдений этой величины, давших результаты

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Погрешности этих наблюдений, очевидно, суть

$$x-a_1,\ x-a_2,\ x-a_3,\ \ldots,\ x-a_n,$$

из которых некоторые положительны, другие отрицательны.

Известно, что наиболее вероятное значение x есть то, которое равно сумме квадратов погрешностей, т. е. сумме

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+\ldots+(x-a_n)^2,$$

дает наименьшее значение. Показать, что наиболее вероятным значением x будет среднее арифметическое наблюдавшихся значений.

42. Момент изгиба в точке B равномерно нагруженного бруска длины l дается формулой

$$M=\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2,$$

где w — нагрузка на единицу длины. Показать, что максимум момента изгиба приходится в центре бруска (рис. 105).

43. Если полный расход энергии на каждую милю (1,596 *км*) для электрического проводника есть

$$W=i^2r+\frac{t^2}{r}+b,$$

где i — сила тока в амперах, r — сопротивление в омах на каждую милю и t и b — величины, не зависящие от i и r, то какого сопротивления проводник является наиболее экономным при i, t и b?

Отв. $r=\frac{t}{i}$.

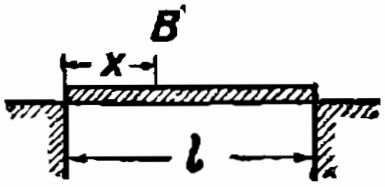


Рис. 105

44. Принимая, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, дается формулой

$$P=\frac{E^2R}{(r+R)^2},$$

где E — постоянная электровозбудительная сила, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление, доказать, что P имеет максимум, когда

$$R=r.$$

45. Сила, с которой круговой электрический ток радиуса a действует на небольшой магнит, ось которого совпадает с осью круга, пропорциональна

$$\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

где x — расстояние магнита от плоскости круга. Доказать, что сила достигает максимума при

$$x=\frac{a}{2}.$$

46. В A и B имеем два источника теплоты (рис. 105а), напряжения которых соответственно равны a и b. Полное напряжение теплоты в расстоянии x от A дается формулой:

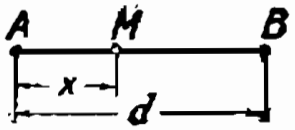


Рис. 105а

$$I=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Показать, что температура в точке M будет наименьшая, если

$$\frac{d-x}{x}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}},$$

т. е. если расстояния BM и AM относятся, как кубичные корни из соответствующих напряжений теплоты. Расстояние M от A будет

$$x=\frac{a^{\frac{1}{3}}d}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}.$$

§ 87. Точки перегиба. *Точкой перегиба* называется граничная точка, отделяющая дуги кривой, имеющие противоположный изгиб.

Так, на рисунке 106 точка B, очевидно, является точкой перегиба. Когда вычерчивающая кривую точка проходит через точку перегиба, тогда вторая производная должна переменить свой знак, и, значит, если она непрерывна, то тогда она обязана обращаться в нуль[1] в точке перегиба.

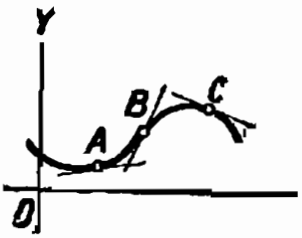


Рис. 106

Отсюда:

в точках перегиба $f''(x)=0$. (1)

Решая это уравнение, мы найдем абсциссы точки перегиба. Чтобы определить направление искривления в смежности с точкой перегиба, исследуют $f''(x)$ для значения x, сперва «немного меньших», потом «немногих бóльших» абсциссы этой точки.

Если $f''(x)$ меняет знак, мы имеем точку перегиба, а полученные знаки укажут направление изгиба в соседстве с точкой перегиба.

Знак второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ говорит нам, куда направлена кривая своей вогнутостью: вверх или вниз. Это означает, что мы судим по отношению к *вертикальной оси ординат OY*. Так как роли осей координат OX и OY одинаковы, то знак второй производной $\frac{d^2x}{dy^2}$ говорит нам, куда направлена кривая своей вогнутостью: вправо или влево, ибо мы в этом случае судим по отношению к *горизонтальной оси абсцисс OX*. Поэтому точки перегиба можно также определить как такие точки, где

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ меняет знак,

или

(b) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ и $\frac{d^2x}{dy^2}$ меняет знак.

Учащийся должен заметить, что поблизости с точкой, где кривая вогнута вверх (как в A), она лежит выше касательной, а у точки, где кривая вогнута вниз (как в C), она лежит ниже касательной. В точке перегиба (как в B) касательная, очевидно, пересекает кривую (прикасаясь в то же самое время к ней).

Итак, имеем следующее *правило для нахождения точек перегиба* кривой, уравнение которой есть $y=f(x)$, правило, содержащее также указания для исследования кривой на направление ее изгиба.

---

[1] Предполагается, что $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны. В примере 2, в конце этого параграфа, показано, как исследуют случай, когда и $f'(x)$ и $f''(x)$ обе бесконечны.

Первый шаг. *Ищем* $f''(x)$.

Второй шаг. *Полагаем* $f''(x)=0$ *и находим действительные корни этого уравнения.*

Третий шаг. *Исследуем* $f''(x)$ *для значений* x, *сперва «немного меньших», потом «немного больших» каждого корня уравнения* $f''(x)=0$. Если при этом $f''(x)$ *меняет знак, мы имеем точку перегиба.*

Если $f''(x)>0$, *кривая вогнута вверх* $(+)$.

Если $f''(x)<0$, *кривая вогнута вниз* $(-)$.

Это правило легко запомнить, сказав: сосуд, имеющий форму кривой, там, где она вогнута вверх, содержит $(+)$ воду, а там, где она вогнута вниз, не содержит $(-)$ воды (рис. 107).

Иногда это правило называется также «*правилом дождя*»: падающий на кривую сверху дождь собирается $(+)$ там, где кривая вогнута вверх, и скатывается $(-)$ с нее там, где она вогнута вниз.

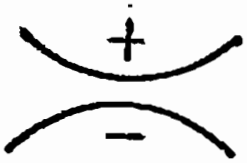


Рис. 107.

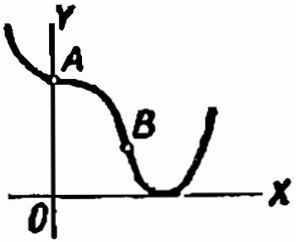


Рис. 108

Перед совершением третьего шага полезно разложить $f''(x)$ на множители.

ЗАДАЧИ

Исследовать следующие кривые на точки перегиба и на направление изгиба.

1. $y=3x^4-4x^3+1$ (рис. 108).

Решение.

$$f(x)=3x^4-4x^3+1.$$

Первый шаг.

$$f''(x)=36x^2-24x.$$

Второй шаг.

$$36x^2-24x=0,$$

откуда

$$x=\frac{2}{3} \text{ и } x=0 \text{ — критические значения.}$$

Третий шаг.

$$f''(x)=36x\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

Если $x<0$, тогда $f''(x)>0$.

Если $\frac{2}{3}>x>0$, тогда $f''(x)<0$.

Следовательно, кривая вогнута вверх налево от начала O координат, и вогнута вниз направо от него и вблизи него (на рис. 108 точка A).

Если $0 < x < \frac{2}{3}$, тогда $f''(x) < 0$.

Если $x > \frac{2}{3}$, тогда $f''(x) > 0$.

Следовательно, кривая вогнута вниз налево от точки $\frac{2}{3}$ и вблизи нее, и вогнута вверх направо от нее (на рис. 108 точка B).

Поэтому обе точки: $A(0, 1)$ и $A\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ суть точки перегиба.

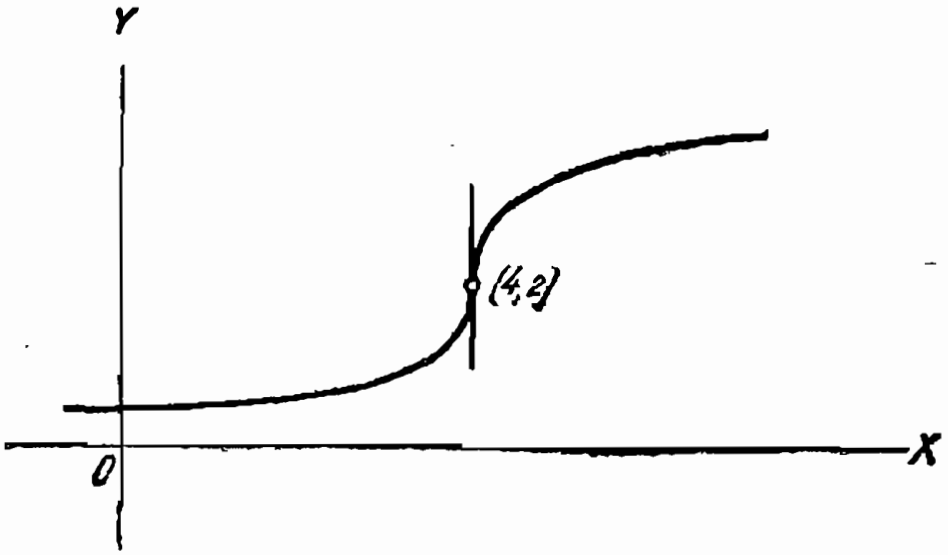


Рис. 109

Кривая, очевидно, обращена своей вогнутостью вверх везде налево от точки A, имеет вогнутость, обращенную вниз между точками A и B, и обращена вогнутостью снова вверх всюду направо от точки B.

2. $(y-2)^3 = x-4$ (рис. 109).

Решение.

$$y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}.$$

Первый шаг.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}.$$

Второй шаг. При $x=4$ и первая и вторая производные бесконечны.

Третий шаг. При $x < 4$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

а при $x > 4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Заключаем, что касательная в точке (4, 2) перпендикулярна к оси X и что влево от (4, 2) кривая вогнута вверх, а вправо от (4, 2) она вогнута вниз. Значит, точка (4, 2) является точкой перегиба.

3. $y = x^3$. Отв. Всюду вогнута вверх.

4. $y = 5 - 2x - x^2$. Всюду вогнута вниз.

5. $y = x^5$. Вогнута вниз влево и вогнута вверх вправо от точки (0, 0).

6. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Вогнута вниз влево и вогнута вверх вправо от точки (1, —2).

7. $y = a + (x - b)^3$ $(b > 0)$. Вогнута вниз влево и вогнута вверх вправо от (b, a).

8. $a^2 y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + 2a^3$ $(a > 0)$. Вогнута вниз влево и вогнута вверх вправо от $\left(a, \frac{4}{3}a\right)$.

9. $x^4 - 3bx^2 + a^2 y = 0$. Точка перегиба $\left(b, \frac{2b^2}{a^2}\right)$.

10. $y = x^4$. Всюду вогнута вверх.

11. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. Вогнута вверх влево от $x = 2$; вогнута вниз между $x = 2$ и $x = 4$; вогнута вверх вправо от $x = 4$.

12. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ $(a > 0)$. Вогнута вниз между точками

$$\left(\pm \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}a\right);$$

вогнута вверх вне этого промежутка.

13. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. Точки перегиба при $x = 2$ и $x = -3$.

14. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$. Вогнута вверх влево от точки

$$\left(-3a, -\frac{9}{4}a\right);$$

вогнута вниз между точками

$$\left(-3a, -\frac{9}{4}a\right) \text{ и } (0, 0);$$

вогнута вверх между точками

$$(0, 0) \text{ и } \left(3a, \frac{9}{4}a\right);$$

вогнута вниз вправо от точки

$$\left(3a, \frac{9}{4}a\right).$$

15. $\left(\frac{x^2}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ $(a > 0;\ b > 0)$. Точка перегиба

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

16. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. Точка перегиба при $x = b$.

17. Показать, что кривая

$$y(x^2 + a^2) = x$$

имеет три точки перегиба, лежащие на прямой линии

$$y - 4a^2 y = 0.$$

18. Показать, что абсциссы перегиба кривой $y^2 = f(x)$ удовлетворяют уравнению

$$[f'(x)]^2 = 2f(x) \cdot f''(x).$$

Найти точки перегиба и направление изгиба у следующих кривых:

19. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$.

20. $y = 24x^2 - x^4$.

21. $y = x + \frac{1}{x}$.

22. $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

§ 88. Вычерчивание кривых. Элементарный способ вычерчивания (построения) кривой по заданному уравнению в прямоугольных координатах, способ, с которым учащийся уже знаком, состоит в решении данного уравнения относительно y (или x), в вычислении y (или x) по произвольным значениям, задаваемым x (или y), в построении определяемых таким образом точек и в нанесении кривой, проходящей через эти точки, руководствуясь при этом соображением о непрерывности кривой; вычерченная таким способом кривая является приблизительным образом искомой кривой.

Этот способ исключительно кропотливый, и когда уравнение кривой выше второй степени, формула решения такого уравнения может оказаться весьма неудобной для вычисления значений зависимого переменного; этот способ может оказаться и совершенно непригодным, потому что не всякое уравнение степени выше четвертой разрешимо относительно y (или x).

Но обычно требуется найти только самый общий вид кривой, и в этом случае дифференциальное исчисление представляет в наши руки могущественные методы для определения *формы* кривой путем небольшого числа выкладок.

Первая производная дает наклон кривой (наклон касательной к кривой) в точке; вторая производная дает возможность определить интервалы, в которых кривая выпукла или вогнута книзу, и точки перегиба, разделяющие эти интервалы; точки максимума и минимума дают представление о том, где кривая достигает наибольшего подъема и наибольшего спуска, т. е. характеризуют гребни и впадины кривой.

Нижеследующее правило дает учащемуся руководство для работы по вычерчиванию кривых.

Правило для вычерчивания кривых, пользуясь прямоугольными координатами

Первый шаг. *Найти первую производную, приравнять ее нулю; решить полученное уравнение в целях определения абсцисс точек максимума и минимума. Подвергнуть исследованию эти абсциссы.*

Второй шаг. *Найти вторую производную; приравнять ее нулю; решить полученное уравнение в целях определения абсцисс точек перегиба. Подвергнуть исследованию эти абсциссы.*

Третий шаг. *Вычислить ординаты точек, абсциссы которых были найдены в первых двух шагах. Вычислить, кроме того, координаты нескольких дополнительных точек, которые необходимы для более точного представления вида кривой. Составить таблицу, подобную приводимой в нижеследующем примере.*

Четвертый шаг. *Построить найденные точки и начертить кривую, соответствующую результатам, представленным в таблице.*

Если значения ординат окажутся очень большими, то по оси ординат следует выбрать меньший масштаб с таким расчетом, чтобы кривая могла уместиться на предназначенном для вычерчивания листе бумаги. Удобно пользоваться для вычерчивания кривой миллиметровой бумагой. Следует составить таблицы из результатов вычислений так, как показано в разобранной ниже задаче. В этой таблице величины аргумента x следуют одна за другой, возрастая алгебраически.

ЗАДАЧИ

Вычертить кривые по нижеследующим уравнениям. Найти также уравнения касательных и нормалей к этим кривым в точках перегиба.

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

Решение. Воспользуемся данным выше правилом.

Первый шаг. $y' = 3x^2 - 18x + 24$.

$$3x^2 - 18x + 24 = 0,$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

Второй шаг.

$$y'' = 6x - 18.$$
$$6x - 18 = 0,$$
$$x_3 = 3.$$

Третий шаг.

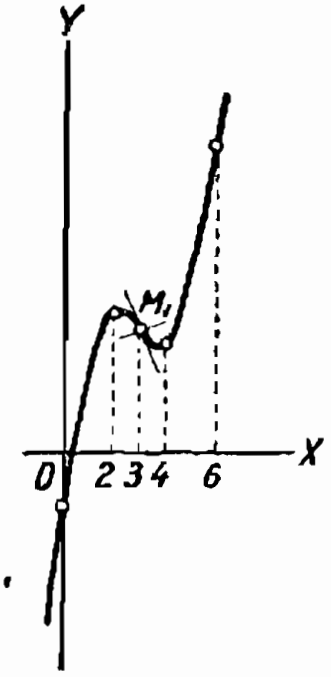


Рис. 110

x	y	y'	y''	Замечание	Ход кривой
0	− 7	+	−		вогнута книзу
2	13	0	−	max	
3	11	−	0	точка перегиба	
4	9	0	+	min	вогнута кверху
6	29	+	+		

Четвертый шаг. Построив точки и соединив их кривой, мы получаем график (рис. 110).

Чтобы найти уравнения касательной и нормали к кривой в точке перегиба M_1 (3, 11), мы употребляем формулы § 72. Это дает $3x + y = 20$ для касательной и $3y - x = 30$ для нормали.

2. $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 5$. Отв. max $(-2, 45)$; min $(6, -211)$; точка перегиба $(2, -83)$; уравнение касательной: $y + 48x - 13 = 0$; уравнение нормали: $48y - x + 3986 = 0$.

3. $y = x^4 - 2x^2 + 10$. max $(0; 10)$; min $(\pm 1, 9)$; точки перегиба $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{85}{9}\right)$.

4. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$. max $(0, 2)$; min $\left(\pm\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$; точки перегиба $\left(\pm 1, -\frac{1}{2}\right)$.

5. $y = \frac{6x}{1 + x^2}$. max $(1, 3)$; min $(-1, -3)$; точки перегиба $(0, 0)$; $\left(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. $y = 12x - x^3$. max $(2, 16)$; min $(-2, -16)$; точка перегиба $(0, 0)$.

7. $4y + x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. max $(2, 0)$; min $(0, -1)$; точка перегиба $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

8. $y = 3x^2 - x^3$.

9. $3y = 18x - x^3$.

10. $6y = 36x - 3x^2 - 2x^3$.

11. $6y = x^3 + 12x^2 + 36x$.

12. $12y = x^4 - 24x^2 + 24$.

13. $y = 3x^5 - 10x^3$.

14. $y = x^5 - 5x$.

15. $y = 2x^5 - 5x^2$.

16. $y = 3x^5 - 5x^3$.

17. $y = x(x-2)^2(x+4)^2$.

18. $y = x + \frac{4}{x}$.

19. $y = x^2(x^2 - 4)$.

20. $ay = x^2 + \frac{2a^3}{x}$.

21. $y = x^3 + \frac{48}{x}$.

22. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

23. $8x^2y - x^5 + 32 = 0$.

24. $x^3y - 8y - x^3 = 0$.

25. $y = \frac{x}{(x+3)^2}$.

§ 89. Ускорение прямолинейного движения. В § 80 скорость прямолинейного движения была определена как быстрота изменения во времени проходимого пространства. Мы теперь *определяем ускорение как быстроту изменения скорости во времени*. Это означает, что:

$$\text{ускорение} = j = \frac{dv}{dt}.$$

И так как $v = \frac{ds}{dt}$, то имеем:

$$j = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Согласно предыдущему, мы имеем следующие признаки, приложимые к определенному моменту $t=t_0$.

Если $j>0$, v возрастает (алгебраически).

Если $j<0$, v убывает (алгебраически).

Если $j>0$ и $v=0$, s имеет минимальную величину.

Если $j<0$ и $v=0$, s имеет максимальную величину.

Если $j=0$ и изменяет знак $+$ на $-$, когда t происходит через t_0, тогда v имеет максимум при $t=t_0$; если же смена знака величины j происходит от $-$ на $+$, тогда v имеет минимум при $t=t_0$.

В *равномерно ускоренном* прямолинейном движении j есть величина постоянная. Таков, например, случай тела, свободно падающего в пустоте под действием одной только силы тяжести; в этом случае $j=9{,}8$ *м* в сек. В самом деле, здесь мы имеем:

$$s=4{,}9t^2,\quad v=\frac{ds}{dt}=9{,}8t,\quad j=\frac{dv}{dt}=9{,}8.$$

ЗАДАЧИ

1. Опыты показали, что тело, свободно падающее в пустоте у поверхности земли, приблизительно следует закону

$$s=4{,}9t^2,$$

где s равно пространству (высоте) в метрах, t равно времени в секундах. Найти величины скорости и ускорения:

a) в любой момент, b) в конце первой секунды, c) в конце пятой секунды.

Решение.

$$s=4{,}9t^2.$$

a) Дифференцируя, имеем:

$$\frac{ds}{dt}=v=9{,}8t\ м/сек. \tag{A}$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$\frac{dv}{dt}=j=g=9{,}8\ м/сек^2, \tag{B}$$

откуда видно, что ускорение падающего тела есть величина постоянная; другими словами, что скорость возрастает на 9,8 *м* в каждую секунду падения.

b) Для нахождения v и j в конце первой секунды подставляем в (A) и (B) $t=1$:

$$v=9{,}8\ м/сек,$$
$$j=g=9{,}8\ м/сек^2.$$

c) Для нахождения v и j в конце пятой секунды подставляем в (A) и в (B) $t=5$:

$$v=49\ м/сек,$$
$$j=g=9{,}8\ м/сек^2.$$

2. Законы прямолинейных движений заданы нижеследующими уравнениями; найти в указанные моменты времени длину пути, скорость и ускорение.

a) $s=t^3+2t^2$;	$t=2$.	Отв. $s=16$,	$v=20$,	$j=16$.
b) $s=t^2+2t$;	$t=3$.	$s=15$,	$v=8$,	$j=2$.
c) $s=3-4t$;	$t=4$.	$s=-13$,	$v=-4$,	$j=0$.
d) $x=2t-t^2$;	$t=1$.	$x=1$,	$v=0$,	$j=-2$.
e) $y=2t-t^3$;	$t=0$.	$y=0$,	$v=2$,	$j=0$.
f) $h=20t+16t^2$;	$t=10$.	$h=1800$,	$v=340$,	$j=32$.

3. Высота s в метрах, какой достигает в t секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v_1 метров в секунду, дается формулой

$$s = v_1 t - 4{,}9t^2.$$

Найти:

a) величины скорости и ускорения в любой момент; если $v_1 = 100$ *м/сек*, найти величины скорости и ускорения;

b) в конце второй секунды;

c) » » пятнадцатой секунды.

Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Отв. a) $v = v_1 - 9{,}8t$, $j = -g = -9{,}8$;
b) $v = 80{,}4$ *м/сек*, $j = -g = -9{,}8$ *м/сек*^{2};
c) $v = -47$ *м/сек*, $j = -g = -9{,}8$ *м/сек*^{2}.

4. Пушечное ядро, выпущенное вертикально вверх, вылетает со скоростью 196 *м/сек*. Найти: a) величину его скорости в конце десятой секунды; b) сколько времени оно поднимается до наибольшей высоты.

Отв. a) 98 *м/сек*; b) 20 сек.

5. Поезд выходит со станции и через t часов находится на расстоянии $s = t^3 + 2t^2 + 3t$ километров от станции отправления. Найти величину его ускорения: a) в конце t часов и b) в конце 2 часов.

Отв. a) $j = 6t + 4$; b) $j = 16$.

6. В момент t часов поезд находится на расстоянии $\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ километров от точки отправления. Найти: a) скорость и ускорение поезда; b) в какой момент поезд остановится и изменит направление; c) описать характер движения поезда за первые десять часов.

Отв. a) $v = t^3 - 12t^2 + 32t$, $j = 3t^2 - 24t + 32$; b) в конце четвертого и восьмого часа; c) поезд будет двигаться вперед в течение первых четырех часов; обратно — в течении вторых четырех часов; снова вперед по истечении первых восьми часов.

7. Найти ускорение, если дано:

a) $v = t^2 + 2t$; $t = 3$. **Отв.** $j = 8$.
b) $v = 3t - t^2$; $t = 2$. $j = -9$.

8. Расстояние (в метрах), проходимое точкой в t секунд, выражается формулой $s = 30t - 6t^2$. Найти величины скорости и ускорения в конце 2,5 секунд.

Отв. $v = 0$, $j = -12$.

9. Дано $s = 2t + 3t^2 + 4t^3$ метров; найти величины скорости и ускорения: a) в начале; b) в конце 5 секунд.

Отв. a) $v = 2$ *м/сек*, $j = 6$ *м/сек*^{2};
b) $v = 332$ *м/сек*, $j = 126$ *м/сек*^{2}.

10. Дано $s = \frac{a}{t} + bt^2$, где a и b — постоянные; найти величины скорости и ускорения в любой момент.

Отв. $v = -\frac{a}{t^2} + 2bt$; $j = \frac{2a}{t^3} + 2b$.

11. В конце t секунд тело обладает скоростью $3t^2 + 2t$ метров в секунду; найти величину его ускорения: a) в любой момент; b) в конце 4 секунд.

Отв. a) $j = 6t + 2$ *м/сек*^{2}; b) $j = 26$ *м/сек*^{2}.

12. Если точка движется по прямолинейной траектории так, что $s = \sqrt{t}$, то показать, что величина ускорения отрицательна и пропорциональна кубу скорости.

ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

До сих пор мы рассматривали дифференцирование одних только *алгебраических* функций. Нам остается выучиться дифференцировать функции такие, каковы, например, $\sin 2x$, 3^x, $\log_a(1+x^2)$, называемые, в отличие от алгебраических, *трансцендентными* функциями.

§ 90. Формулы производных; второй основной список. Нижеследующие формулы, собранные вместе для целей справок, будут доказаны в этой главе. В соединении с формулами дифференцирования алгебраических выражений, данными в главе VII в § 57, они образуют полную таблицу производных, встречаемых в настоящей книге.

X. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$.

X*. $\frac{d}{dx}(\log_a v) = \frac{\log_a e}{v}\frac{dv}{dx}$.

XI. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$.

XI*. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$.

XII. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$.

XIII. $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$.

XIV. $\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \frac{dv}{dx}$.

XV. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \frac{1}{\cos^2 v}\frac{dv}{dx}$.

XVI. $\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v) = -\frac{1}{\sin^2 v}\frac{dv}{dx}$.

XVII. $\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$.

XVIII. $\frac{d}{dx}(\arccos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$.

XIX. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$.

XX. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,ctg} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$.

§ 91. Дифференцирование логарифма.

Пусть

$$y = \ln v.$$

Дифференцируем по общему правилу (§ 55), рассматривая v как независимое переменное. Мы имеем:

Первый шаг. $y + \Delta y = \ln(v + \Delta v)$.

Второй шаг.

$$\Delta y = \ln(v+\Delta v) - \ln v = \ln\left(\frac{v+\Delta v}{v}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Третий шаг. $\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v}\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)$.

К сожалению, мы не можем здесь вычислить прямо предел правой части на основании одних только основных теорем о пределах (§ 35), ибо знаменатель Δv стремится к нулю как к пределу. Но мы можем, еще *до* перехода к пределу, переписать предыдущее равенство в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{v\cdot\frac{\Delta v}{v}}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right) =$$

$$\left[\text{умножая знаменатель на } \frac{v}{v}\right]$$

$$= \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{\frac{\Delta v}{v}}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{1}{v}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta v}{v}}}\right].$$

Мы переписали отношение $\frac{\Delta y}{\Delta v}$ в этом виде, желая подогнать выражение, следующее за ln и написанное в квадратных скобках, к виду $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, встреченному нами в § 48, ибо мы можем здесь положить $\alpha = \frac{\Delta v}{v}$.

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}\ln e = \frac{1}{v}.$$

[Если $\Delta v \to 0$, тогда $\frac{\Delta v}{v} \to 0$. Поэтому, полагая $\frac{\Delta v}{v} = \alpha$, имеем $\alpha \to 0$. Значит, в силу § 48, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to e$ и, окончательно, $\ln\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \to 1$. Отсюда следует результат].

Так как v есть функция аргумента x и так как требуется продифференцировать $\ln v$ по x, то мы обязаны применить формулу VIII дифференцирования *функции от функции*, именно:

VIII. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

Подставив величину $\frac{dy}{dv}$ из результата четвертого шага, мы получаем:

X. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$.

Итак,

производная натурального логарифма функции равна ее производной, деленной на эту самую функцию (или обратной величине функции, умноженной на ее производную).

Так как $\log_a v = \log_a e \cdot \ln v$, то мы сразу получаем:

X*. $\frac{d}{dx}(\log_a v) = \frac{\log_a e}{v}\frac{dv}{dx}$,

так как множитель $\log_a e$ есть число постоянное[1].

§ 92. Дифференцирование показательной функции. Пусть

$$y = a^v.$$

Беря натуральный логарифм обеих частей этого равенства, получаем:

$$\ln y = v \ln a.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, причем к левой части мы применяем правило дифференцирования функции от функции, мы имеем:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d(\ln y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d}{dx}(v \ln a) = \ln a \frac{dv}{dx},$$

приравняв производные обеих частей, получим:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a \frac{dv}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = y \ln a \frac{dv}{dx}.$$

[1] Учащийся не должен забывать, что функция $\log_a v$ определена только для положительного постоянного основания a и для положительных же значений функции v.

Подставляя в обе части вместо буквы y ее величину a^v, мы находим окончательно:

XI. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$.

Итак, *производная от постоянного с переменным показателем степени равна произведению натурального логарифма постоянного на постоянное с переменным показателем и на производную показателя.*

В частности, когда постоянное $a = e$, тогда $\ln a = \ln e = 1$, и мы получаем чрезвычайно простую формулу:

XI*. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$.

§ 93. Дифференцирование общей показательной функции Доказательство правила степени.

Пусть

$$y = u^v,$$

где u и v суть функции от x, причем u может иметь только положительные величины.

Беря от обеих частей этого равенства натуральный логарифм, получаем:

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, причем при дифференцировании левой части мы пользуемся теоремой о производной функции от функции, а при дифференцировании правой части мы пользуемся еще и теоремой о производной произведения двух функций, мы находим:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}; \quad \frac{d}{dx}(v \ln u) = v \frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u \frac{dv}{dx} =$$

$$= v \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}.$$

Следовательно:

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{y}{u}\frac{du}{dx} + y \ln u \frac{dv}{dx}.$$

Наконец, заменяя налево и направо букву y выражением u^v, мы окончательно получаем:

XII. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$.

Итак,

производная от степени функции с переменным показателем равна сумме двух результатов, полученных: во-первых, *дифференцированием по формуле VI, рассматривая показатель как постоянное,* и, во-вторых, *дифференцированием по формуле XI, рассматривая основание степени как постоянное.*

Пусть теперь функция v есть какое-нибудь постоянное n (необязательно целое или дробное, но, вообще, какое-нибудь иррациональное число, положительное или отрицательное), $v=n$. В этом случае мы имеем $\frac{dv}{dx}=0$ и, значит, формула XII нам дает:

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Этим вполне доказано правило степени, сформулированное нами в § 64, но доказанное там лишь для целых положительных значений n.

ПРИМЕРЫ

Найти производные:

1. $y=\ln(x^2+a)$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(x^2+a)}{x^2+a}=\frac{2x}{x^2+a}. \qquad \text{по X}$$
$$[v=x^2+a]$$

2. $y=\ln\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}= \qquad \text{по X}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{x^2-1}. \qquad \text{по VI}$$

3. $y=a^{3x^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\ln a\cdot a^{3x^2}\frac{d}{dx}(3x^2)=6x\ln a\cdot a^{3x^2}. \qquad \text{по XI}$$

4. $y=be^{c^2+x^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=b\frac{d}{dx}(e^{c^2+x^2})= \qquad \text{по IV}$$

$$=be^{c^2+x^2}\frac{d}{dx}(c^2+x^2)=2bxe^{c^2+x^2}. \qquad \text{по IX*}$$

5. $y=x^{e^x}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=e^x x^{e^x-1}\frac{dx}{dx}+x^{e^x}\ln x\frac{d}{dx}(e^x)= \qquad \text{по XII}$$

$$=e^x x^{e^x-1}+x^{e^x}\ln x\cdot e^x=e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right).$$

§ 94. Практика дифференцирования логарифмических выражений. При дифференцировании логарифмических функций, вместо применения сразу формул X и X*, мы можем иногда ради упрощения сперва воспользоваться одним из преобразований элементарной алгебры. Так, пример 2 предыдущего параграфа можно было бы решить следующим образом.

Пример 1. Дифференцировать $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Можно сначала написать y в форме, свободной от радикала:

$$y = \frac{1}{2} \ln (1 - x^2).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{x^2 - 1}. \qquad \text{по X}$$

Пример 2. Дифференцировать $y = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

Решение. Упрощая, имеем

$$y = \frac{1}{2} [\ln (1 + x^2) - \ln (1 - x^2)].$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{1 + x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} \right] = \qquad \text{по X}$$

$$= \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x}{1 - x^2} = \frac{2x}{1 - x^4}.$$

Когда приходится дифференцировать показательную функцию, и именно переменное с переменным показателем, то лучше всего сначала взять логарифм функции, а затем дифференцировать. Так, пример 5 предыдущего параграфа изящнее решается следующим образом.

Пример 3. Дифференцировать $y = x^{e^x}$.

Решение. Взяв от обеих частей логарифм:

$$\ln y = e^x \cdot \ln x,$$

дифференцируем обе части по x:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \cdot \frac{d}{dx} (e^x) = \qquad \text{по X и по V}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot e^x \qquad \text{по X и XI*}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = e^x x^{e^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right).$$

Пример 4. Дифференцировать $y = (4x^2 - 7)^{2 + \sqrt{x^2 - 5}}$.

Решение. Берем логарифм:

$$\ln y = (2 + \sqrt{x^2 - 5}) \ln (4x^2 - 7).$$

Дифференцируем обе части по x:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=(2+\sqrt{x^2-5})\,\frac{8x}{4x^2-7}+\ln(4x^2-7)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-5}},$$

$$\frac{dy}{dx}=x(4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left[\frac{8(2+\sqrt{x^2-5})}{4x^2-7}+\frac{\ln(4x^2-7)}{\sqrt{x^2-5}}\right].$$

В случае, когда функция состоит из нескольких множителей, иногда выгоднее, прежде чем дифференцировать ее, взять логарифм.

Пример 5. Дифференцировать $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

Решение. Взяв логарифм, имеем:

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)].$$

Дифференцируем обе части по x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]=$$

$$=-\frac{2x^2-10x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2-10x+11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

ЗАДАЧИ

Проверить каждое из следующих дифференцирований.
Дифференцировать функции:

1. $y=\ln(x+a)$. Отв. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+a}$.
2. $y=\ln(ax+b)$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{ax+b}$.
3. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1-x^2}$.
4. $y=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{1-x^4}$.
5. $y=e^{ax}$. $\dfrac{dy}{dx}=ae^{ax}$.
6. $y=e^{4x+5}$. $\dfrac{dy}{dx}=4e^{4x+5}$.
7. $y=\ln(x^2+x)$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$.
8. $y=\ln(x^3-2x+5)$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.
9. $y=\log_a(2x+x^3)$. $\dfrac{dy}{dx}=\log_a e\cdot\dfrac{2+3x^2}{2x+x^3}$.
10. $y=x\ln x$. $\dfrac{dy}{dx}=\ln x+1$.

11. $f(x)=\ln(x^3)$. Отв. $f'(x)=\frac{3}{x}$.

12. $f(x)=\ln^3 x$. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$.

13. $f(x)=\ln\frac{a+x}{a-x}$. $f'(x)=\frac{2a}{a^2-x^2}$.

14. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

15. $y=a^{e^x}$. $\frac{dy}{dx}=\ln a\cdot a^{e^x}\cdot e^x$.

16. $y=b^{x^2}$. $\frac{dy}{dx}=2x\cdot\ln b\cdot b^{x^2}$.

17. $y=7^{x^2+2x}$. $\frac{dy}{dx}=2\ln 7\cdot(x+1)\,7^{x^2+2x}$.

18. $y=c^{a^2-x^2}$. $\frac{dy}{dx}=-2x\ln c\cdot c^{a^2-x^2}$.

19. $r=a^{\theta}$. $\frac{dr}{d\theta}=a^{\theta}\cdot\ln a$.

20. $r=a^{\ln\theta}$. $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$.

21. $s=e^{b^2+t^2}$. $\frac{ds}{dt}=2te^{b^2+t^2}$.

22. $u=ae^{\sqrt{v}}$. $\frac{du}{dv}=\frac{ae^{\sqrt{v}}}{2\sqrt{v}}$.

23. $p=e^{q\ln q}$. $\frac{dp}{dq}=e^{q\ln q}(1+\ln q)$.

24. $\frac{d}{dx}[e^x(1-x^2)]=e^x(1-2x-x^2)$.

25. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

26. $\frac{d}{dx}(x^2e^{ax})=xe^{ax}(ax+2)$.

27. $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^x}$.

28. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

29. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

30. $y=x^na^x$. $\frac{dy}{dx}=a^xx^{n-1}(n+x\ln a)$.

31. $y=x^x$. $\frac{dy}{dx}=x^x(\ln x+1)$.

32. $y=x^{\frac{1}{x}}$. $\frac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)}{x^2}$.

33. $y=x^{\ln x}$. $\frac{dy}{dx}=\ln x^2\cdot x^{\ln x-1}$.

34. $f(y)=\ln y\cdot e^y$. $f'(y)=e^y\left(\ln y+\frac{1}{y}\right)$.

35. $f(s)=\dfrac{\ln s}{e^s}$. Отв. $f(s)=\dfrac{1-s\ln s}{se^s}$.

36. $f(x)=\ln(\ln x)$. $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

37. $F(x)=\ln^4(\ln x)$. $F'(x)=\dfrac{4\ln^3(\ln x)}{x\ln x}$.

38. $\varphi(x)=\ln(\ln^4 x)$. $\varphi'(x)=\dfrac{4}{x\ln x}$.

39. $\varphi(y)=\ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. $\varphi'(y)=\dfrac{1}{1-y^2}$.

40. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

Указание. Сперва рационализировать знаменатель (т. е. освободиться в знаменателе от радикала).

41. $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$. Отв. $\dfrac{dy}{dx}=0$.

42. $y=e^{x^x}$. $\dfrac{dy}{dx}=e^{x^x}(1+\ln x)\,x^x$.

43. $y=\dfrac{c^x}{x^x}$. $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{c}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{c}{x}-1\right)$.

44. $y=\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$. $\dfrac{dy}{dx}=n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\dfrac{x}{n}\right)$.

45. $w=v^{e^v}$. $\dfrac{dw}{dv}=v^{e^v}e^v\left(\dfrac{1+v\ln v}{v}\right)$.

46. $z=\left(\dfrac{a}{t}\right)^t$. $\dfrac{dz}{dt}=\left(\dfrac{a}{t}\right)^t(\ln a-\ln t-1)$.

47. $y=x^{x^n}$. $\dfrac{dy}{dx}=x^{x^n+n-1}(n\ln x+1)$.

48. $y=x^{x^x}$. $\dfrac{dy}{dx}=x^{x^x}x^x\left(\ln x+\ln^2 x+\dfrac{1}{x}\right)$.

49. $y=a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy\ln a}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

50. $y=e^x[x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\ldots]$. $\dfrac{dy}{dx}=e^x x^n$.

51. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x+3)^4}$. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2(x+1)(2x^2+5x+1)}{(x+2)^3(x+3)^5}$.

Указание. В этом и в следующих номерах, прежде чем дифференцировать, взять от обеих частей логарифмы.

52. $y=\dfrac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}}$. Отв. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(x-1)^{\frac{3}{2}}(7x^2+51x-148)}{12\,(x-2)^{\frac{7}{4}}(x-4)^{\frac{10}{3}}}$.

53. $y=x\sqrt{1-x}(1+x)$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2+x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$.

54. $y=\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

55. $y=x^5(a+3x)^2(a-2x)^2$. Отв. $\frac{dy}{dx}=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

56. $y=\frac{\sqrt{(x+a)^3}}{\sqrt{x-a}}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2a)\sqrt{x+a}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$.

В задачах 57—66 найти величины $\frac{dy}{dx}$ для данного значения аргумента x.

57. $y=\ln\sqrt{x^2-4}$; $x=3$. Отв. $y'=\frac{3}{5}$.

58. $y=e^{\frac{x}{2}}$; $x=5$. $y'=6{,}09$.

59. $y=\lg(2x+3)$; $x=2$. $y'=0{,}124$.

60. $y=x\ln(x+1)$; $x=4$. $y'=2{,}409$.

61. $y=xe^{-x}$; $x=\frac{1}{2}$. $y'=0{,}304$.

62. $y=\frac{\ln x}{x}$; $x=5$. $y'=-0{,}024$.

63. $y=\lg\sqrt{15-x^2}$; $x=3$. $y'=-0{,}217$.

64. $y=10^{2x}$; $x=\frac{1}{2}$. $y'=46{,}1$.

65. $y=\left(\frac{2}{x}\right)^x$; $x=2$. $y'=-1$.

66. $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-12}}{\sqrt[3]{20-3x}}$; $x=4$. $y'=26$.

67. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для каждой из следующих функций:

(a) $y=\ln cx$.
(b) $y=e^{ax}$.
(c) $y=x\ln x$.
(d) $y=xe^{-x}$.
(e) $y=e^x\ln x$.
(f) $y=\frac{e^{2x}}{x}$.

Дифференцировать каждую из следующих функций:

68. $\ln(x\sqrt{a^2-x^2})$.

69. $x\ln\sqrt{a^2-x^2}$.

70. $\lg\frac{x^2+3}{x^2+1}$.

71. $\ln\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$.

72. $x\lg\sqrt[3]{6x}$.

73. $x^2e^{-x^2}$.

74. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

75. $e^{\frac{1}{x}}\ln\frac{1}{x}$.

76. $10^{\sqrt{t}}\lg t$.

77. $(ae)^{nx}$.

78. $3^s s^3$.

79. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{x}}$.

80. $\frac{e^x\sqrt{3+4x}}{x\sqrt{e^x+1}}$.

81. $\frac{(A+Bx)(C+Dx)}{(E+Fx)(G+Hx)}$.

§ 95. Дифференцирование $\sin v$. Пусть

$$y = \sin v.$$

Согласно общему правилу, рассматривая v как независимое переменное, имеем:

Первый шаг.

$$y + \Delta y = \sin(v + \Delta v).$$

Второй шаг.

$$\Delta y = \sin(v + \Delta v) - \sin v.$$

Правую часть приходится преобразовать, чтобы сделать возможным переход к пределу в четвертом шаге. С этой целью мы воспользуемся формулой тригонометрии

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

Полагая здесь $A = v + \Delta v$ и $B = v$, мы находим:

$$\sin(v + \Delta v) - \sin v = 2\cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)\sin\frac{\Delta v}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta y = 2\cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)\sin\frac{\Delta v}{2}.$$

Третий шаг.

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}.$$

Четвертый шаг.

$$\frac{dy}{dv} = \cos v.$$

[Так как $\lim\limits_{\Delta v \to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}\right) = 1$, в силу § 47, и

$\lim\limits_{\Delta v \to 0}\cos\left(v + \dfrac{\Delta v}{2}\right) = \cos v$ в силу непрерывности косинуса.]

Подставляя эту величину производной $\frac{dy}{dv}$ в формулу производной *функции от функции*:

VIII. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

мы получаем $\frac{dy}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}$ и, значит, имеем окончательно:

XIII. $$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

Правило легко словесно формулировать.

График функции $y=\sin x$ показан на рисунке 111. Так как $\frac{dy}{dx}=\cos x$, то, вспомнив, что $\operatorname{tg}\mu=\frac{dy}{dx}$, мы видим, что $\operatorname{tg}\mu$ колеблется, когда x непрерывно возрастает до бесконечности, между границами $+1$ и -1. Поэтому и самый наклон μ касательной к горизонту также колеблется, причем наибольший наклон достигается в точках 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... и имеет величину $\frac{\pi}{4}$, ибо в

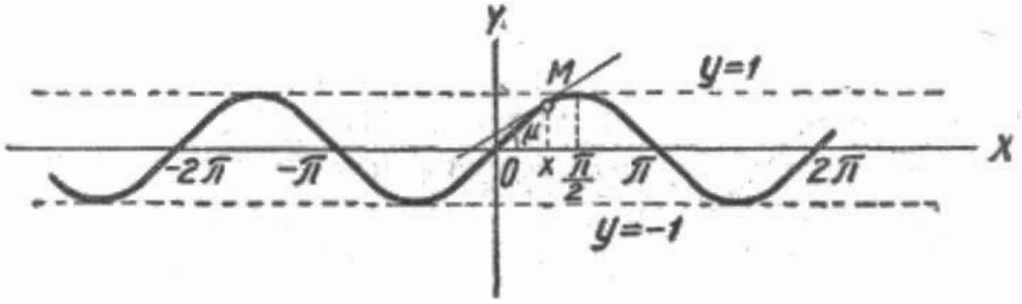


Рис. 111.

этих точках имеем $\operatorname{tg}\mu=1$ и, значит, $\mu=\frac{\pi}{4}$. Наименьший (алгебраически) наклон μ достигается в точках $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ..., где $\operatorname{tg}\mu=-1$ и где, следовательно, $\mu=-\frac{\pi}{4}$. Кривая $y=\sin x$ и называется *синусоидой*.

§ 96. Дифференцирование $\cos v$. Пусть

$$y=\cos v.$$

Эту функцию мы, очевидно, можем переписать в виде

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right).$$

Отсюда, применяя правило дифференцирования *функции от функции*, мы находим сразу:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\left(-\frac{dv}{dx}\right)=-\sin v\frac{dv}{dx}$$
$$\left[\text{ибо }\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\sin v\right].$$

Значит,

XIV. $$\frac{d}{dx}(\cos v)=-\sin v\frac{dv}{dx}.$$

График функции $y=\cos x$ (рис. 112) легко получить из предыдущего графика 111, ибо для этого нужно лишь перенести старую ось ординат OY' в новое место, именно направо от прежнего начала координат O' на расстояние $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, при таком переносе оси ординат, преобразование старой абсциссы x'

будет: $x' = \frac{\pi}{2} + x$, где x есть новая абсцисса. Значит, прежнее уравнение $y = \sin x'$ получит теперь новый вид:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

На рисунке 112 старая ось ординат намечена пунктиром. Кривая $y = \cos x$ называется *косинусоидой*.

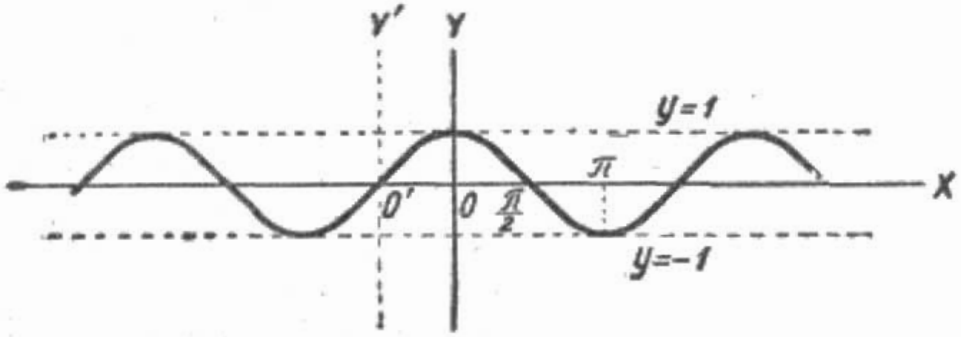


Рис. 112

§ 97. Дифференцирование tg v. Пусть:

$$y = \operatorname{tg} v.$$

По определению тангенса, имеем $y = \frac{\sin v}{\cos v}$. Дифференцируя как частное, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos v \frac{d}{dy}(\sin v) - \sin v \frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v} = \frac{\cos^2 v \frac{dv}{dx} + \sin^2 v \frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Итак:

XV. $$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \frac{1}{\cos^2 v}\frac{dv}{dx}.$$

График функции $y = \operatorname{tg} x$ представляет собой (рис. 113) бесконечный ряд ветвей, поднимающихся из глубины $-\infty$ и уходящих ввысь $+\infty$, и тождественных друг другу. При возрастании абсциссы x, ордината y точки M, описывающей ветвь, безгранично непрерывно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. И когда рассматриваемая ветвь будет вся описана, движущаяся точка M, поднявшаяся ввысь $+\infty$, скачком уходит вниз $-\infty$, затем, чтобы, снова поднимаясь, точно так же описать следующую ветвь. И так далее до бесконечности, пока весь ряд ветвей, одна за другой, не будет описан. Мы замечаем, что величина функции $y = \operatorname{tg} x$, за исключением точек разрыва $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ..., всегда возрастает, когда увеличивается аргумент x. Поэтому-то производная $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ и оказывается всегда *положительной*. Наименьший наклон μ касательной к горизонту достигается в точках пересечения кривой

с осью OX, т. е. при $x=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, где $\cos^2 x$ равен $+1$ и где, следовательно, угол $\mu=45°$.

Кривая $y=\operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой.*

§ 98. Дифференцирование $\operatorname{ctg} v$. Пусть

$$y=\operatorname{ctg} v.$$

По определению котангенса, имеем $y=\frac{\cos v}{\sin v}$. Дифференцируя как частное, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin v\frac{d}{dx}(\cos v)-(\cos v)\frac{d}{dx}\sin v}{\sin^2 v}=\frac{-\sin^2 v\frac{dv}{dx}-\cos^2 v\frac{dv}{dx}}{\sin^2 v}=-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sin^2 v}.$$

Итак:

XVI. $$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} v)=\frac{1}{\sin^2 v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

График функции $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 114) получается прямо из тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ следующим образом: если мы возьмем тан-

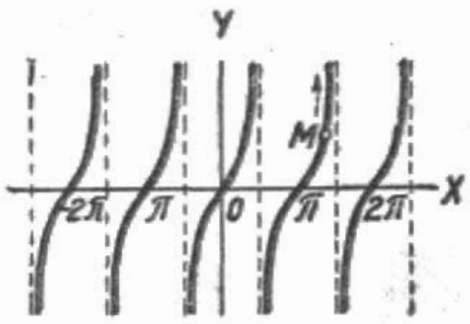


Рис. 113

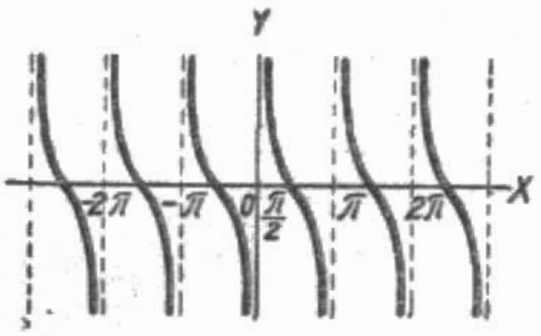


Рис. 114

генсоиду в прежней системе координат (рис. 113), $y=\operatorname{tg} x'$, и если мы передвинем вправо прежнюю ось OY' ординат на $\frac{\pi}{2}$, мы будем иметь преобразование $x'=\frac{\pi}{2}+x$, где x' старая абсцисса и x новая абсцисса точки M тангенсоиды. Подстановка же преобразования нам дает $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{ctg} x$. Мы получили уже котангенс, но только с отрицательным знаком. Но если мы теперь переменим знак, то это означает, что мы повернули кривую около оси абсцисс OX как около оси вращения на 180°. Это и будет искомая котангенсоида $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 114). Вместо вращения около оси абсцисс OX, можно тангенсоиду *отразить в ней как в зеркале:* это и даст нужную нам перемену знака. Мы видим, что котангенсоида $y=\operatorname{ctg} x$ состоит из ряда нисходя-

щих от $+\infty$ до $-\infty$ ветвей, и, значит, эта функция есть везде *убывающая*. Поэтому-то знак у ее производной $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ всегда отрицательный.

§ 99. Пояснение. При выводе наших формул применение *общего* правила (т. е. четырех шагов, см. § 55) было необходимо только в следующих случаях:

III. $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$. Алгебраическая сумма.

V. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$. Произведение.

VII. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$. Частное.

VIII. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$. Функция от функции.

IX. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Обратная функция.

X. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$. Логарифм.

XIII. $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \cdot \frac{dv}{dx}$. Синус.

Не только все остальные формулы были выведены из основных *семи* формул, но от этих формул зависят и все формулы, которые будут выведены далее. А отсюда следует, что вывод фундаментальных формул дифференцирования включает вычисление только д в у х пределов, представляющих некоторые затруднения, а именно:

$$\lim_{v \to 0}\left(\frac{\sin v}{v}\right) = 1, \qquad \lim_{v \to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}} = e \ (\S\ 47,\ 48).$$

ЗАДАЧИ

Дифференцировать функции:

1. $y = \sin ax^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax^2 \frac{d}{dx}(ax)^2 = 2ax\cos ax^2. \qquad \text{по XIII}$$
$$[v = ax^2]$$

2. $y = \operatorname{tg}\sqrt{1-x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\sqrt{1-x} \cdot \frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}} = \qquad \text{по XV}$$
$$[v = \sqrt{1-x}]$$
$$= \sec^2\sqrt{1-x}\,\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) =$$
$$= -\frac{\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\cos^2\sqrt{1-x}}.$$

3. $y = \cos^3 x$, что можно написать так: $y = (\cos x)^3$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos x)^2 \frac{d}{dx}(\cos x) = \quad \text{по VI}$$

[$v = \cos x$ и $n = 3$]

$$= 3\cos^2 x(-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x. \quad \text{по XIV}$$

4. $y = \sin nx \sin^n x$.

$$\frac{dy}{dx} = \sin nx \frac{d}{dx}(\sin x)^n + \sin^n x \frac{d}{dx}(\sin nx) = \quad \text{по V}$$

[$u = \sin nx$ и $v = \sin^n x$]

$$= \sin nx \cdot n(\sin x)^{n-1} \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx) = \quad \text{по VI и XIII}$$

$$= n \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x + n \sin^n x \cos nx =$$
$$= n \sin^{n-1} x (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) =$$
$$= n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x.$$

5. $y = \sin 2x$.
6. $s = \cos 3t$.
7. $u = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$.
8. $y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x$.
9. $\rho = \sec 5\theta$.
10. $y = 4 \csc \frac{x}{2}$.
11. $y = \sqrt{\sin x}$.
12. $\rho = \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
13. $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.
14. $s = \sqrt{\sec 2t}$.
15. $y = x \sin x$.
16. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta$.
17. $\rho = \frac{\cos \theta}{\theta}$.
18. $y = \sin x \sin 2x$.
19. $y = \ln \cos x$.
20. $y = \ln \sqrt{\sin 2x}$.
21. $y = e^{ax} \sin \pi x$.
22. $y = e^{-x} \cos \frac{x}{2}$.
23. $\rho = \ln \operatorname{tg} \theta$.
24. $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{2-\sin x}}$.
25. $f(x) = \sin(x+a)\cos(x-a)$.
26. $f(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

Отв. $y' = 2\cos 2x$.
$s' = -3\sin 3t$.
$u' = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{v}{2}$.
$y' = -\csc^2 3x$.
$\rho' = 5 \sec 5\theta \operatorname{tg} 5\theta$.
$y' = -2 \csc \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.
$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.
$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{2}\sin\theta$.
$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sec^2 x}{2(\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}}}$.
$\frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} 2t \sqrt{\sec 2t}$.
$y' = x\cos x + \sin x$.
$f'(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta$.
$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\theta \sin\theta + \cos\theta}{\theta^2}$.
$y' = 2\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$.
$y' = -\operatorname{tg} x$.
$y' = \operatorname{ctg} 2x$.
$y' = e^{ax}(a \sin \pi x + \pi \cos \pi x)$.
$y' = -e^{-x}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$.
$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$.
$\frac{dy}{dx} = \sec x$.
$f'(x) = \cos 2x$.
$f'(\theta) = -\frac{2\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$.

27. $\rho = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}\theta + \theta$. Отв. $\rho' = \operatorname{tg}^4\theta$.

28. $y = x^{\sin x}$. $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$.

29. $y = (\sin x)^x$. $y' = (\sin x)^x [\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x]$.

30. $y = \sin 2x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin 2x$.

31. $\rho = \cos a\theta$. $\frac{d^2\rho}{a\theta^2} = -a^2 \cos a\theta$.

32. $u = \operatorname{tg} v$. $\frac{d^2u}{dv^2} = 2\sec^2 v \operatorname{tg} v$.

33. $y = x \sin x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x - x \sin x$.

34. $y = \frac{\cos x}{x}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x}{x^3}$.

35. $y = e^x \sin x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x$.

36. $y = e^{-x} \cos 2x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}(4 \sin 2x - 3 \cos 2x)$.

37. $y = e^{ax} \sin bx$. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(a^2 - b^2)\sin bx + 2ab \cos dx]$.

38. $y = \sin(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$.

39. $e^y = \cos(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x + y)}{e^y + \sin(x + y)}$.

40. $\sin y = \ln(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)\cos y - 1}$.

В задачах 41 — 50 найти величину $\frac{dy}{dx}$ для данного численного значения аргумента x (в радианах).

41. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; $x = 1$. Отв. $y' = 0{,}878$.

42. $y = x \cos x$; $x = 2$. $y' = -2{,}234$.

43. $y = \ln \sin x$; $x = 1{,}8$. $y' = -0{,}233$.

44. $y = \frac{\sin x}{x}$; $x = 1$. $y' = -0{,}301$.

45. $y = \sin 2x \cos x$; $x = \frac{1}{2}$. $y' = 0{,}545$.

46. $y = x \sin x + \cos x$; $x = 3$. $y' = -2{,}97$.

47. $y = e^{-x} \sin x$; $x = 1$. $y' = -0{,}111$.

48. $y = 10e^x \cos \pi x$; $x = \frac{1}{2}$. $y' = -51{,}78$.

49. $y = 5e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{x\pi}{2}$; $x = 1$. $y' = 4{,}12$.

50. $y = 10e^{-\frac{x}{10}} \cos 2x$; $x = 1$. $y' = -16{,}07$.

Продифференцировать каждую из следующих функций:

51. $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 52. $\frac{1}{2}\cos x^2$.

53. $\operatorname{tg}\frac{ax}{b}$.
54. $x \operatorname{ctg} x$.
55. $\frac{\sec 2x}{x}$.
56. $\sec^2\frac{x}{2}$.
57. $\ln\cos\frac{2}{x}$.
58. $x \ln \operatorname{tg} x$.
59. $e^{\sin x}$.
60. $\cos e^{2x}$.

§ 100. Обратные тригонометрические функции. Из § 69 мы уже знаем, что когда равенство

$$y = f(x) \tag{I}$$

дает y как *прямую* функцию f от x, то уравнение с переставленными буквами x и y

$$x = f(y) \tag{II}$$

после математического решения относительно буквы y дает y как *обратную* функцию φ от x

$$y = \varphi(x). \tag{III}$$

Здесь f и φ суть характеристики двух взаимно обратных функций.

Применим сказанное к тригонометрическим функциям.

Первой прямой тригонометрической функцией является

$$y = \sin x. \tag{I$_1$}$$

Здесь знак sin есть *характеристика* этой прямой функции, строго говоря, нам не известная в смысле указания тех алгебраических действий, которые надо проделать с аргументом x, чтобы получить y. Мы знаем только, что x есть дуга окружности радиуса 1, стягивающая заданный угол, а y есть синус этого угла.

Когда мы переставляем буквы y и x, мы получаем:

$$x = \sin y, \tag{II$_1$}$$

причем с переменой мест этими буквами изменяется и самый смысл их: теперь y является дугой, стягивающей угол, а x синусом этого угла.

Математически невозможно решить уравнение (II$_1$) относительно буквы y, поэтому, вместо истинного решения, дают только *смысловую его запись*, сказав, что

«*y равен той дуге, синусом которой служит x*».

По-латыни «дуга» есть «arcus», а «синус» есть «sinus». Поэтому указанную смысловую запись решения уравнения (II$_1$) сокращенно пишут в виде:

$$y = \operatorname{arc}\sin x. \tag{III$_1$}$$

Здесь знак arc sin есть знак единый и цельный; его нельзя разбивать на части, ибо он тогда утрачивает математический смысл [1]. Этот знак arc sin может служить характеристикой, обратной характеристике sin прямой функции $\sin x$.

График этой обратной функции $y = \arcsin x$ (рис. 115) мы получим, когда возьмем график (рис. 111) прямой функции $y = \sin x$, переставим буквы X и Y у осей координат и расположим новую ось абсцисс горизонтально. Мы видим прежде всего, что обратная функция $y = \arcsin x$ есть функция многозначная, ибо всякому значению аргумента x, лежащему на отрезке $[-1, +1]$, отвечает *бесконечно много численных* значений переменного y. Чтобы не потеряться в этом бесконечном множестве значений многозначной функции $y = \arcsin x$, мы выделяем из них ряд *основных значений* за таковые мы принимаем ординаты дуги AB, имеющей начало координат O своей серединой. Эта дуга, как показывает рисунок 115, непрерывна, проходит через начало O и имеет своими концами точки $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ и $B\left(+1, +\frac{\pi}{2}\right)$. Ординаты точек этой *основной* дуги AB возрастают от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, когда аргумент x движется в отрезке $[-1, +1]$, непрерывно возрастая. Эту основную дугу AB мы принимаем *как график* (геометрическое изображение) основной ветви многозначной функции $y = \arcsin x$. Принято обозначать через $[\arcsin x]$ ординаты основной дуги.

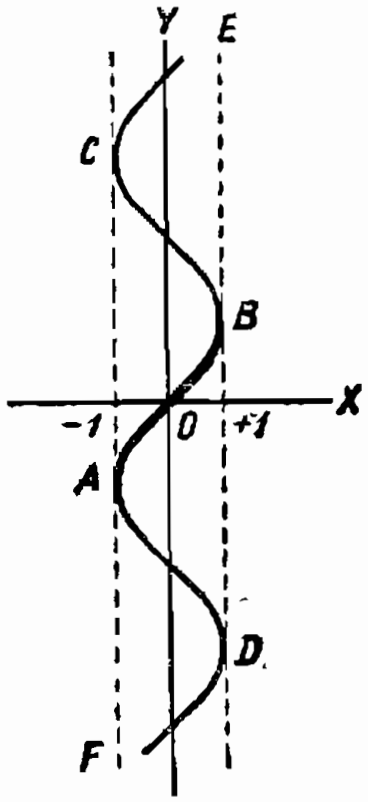


Рис. 115

Все остальные значения многозначной функции $y = \arcsin x$ очень просто выражаются через значения однозначной функции $[\arcsin x]$. Действительно, одинаково направленные дуги CE, FD и т. д. представляют собой дугу AB, поднятую над осью абсцисс OX на расстоянии 2π, 4π, 6π, ..., или опущенную под нее на -2π, -4π, -6π, ... Значит, для этих дуг мы имеем формулу:

$$[\arcsin x] + 2\pi \cdot n,$$

где n целое число.

Но имеются еще дуги (рис. 115), каковы CB, AD, ... и т. д., обратного направления: они все одинаковы между собой и все

[1] Как нельзя, например, знак натурального логарифма ln разбивать на части l и n.

их мы получим, сначала повернув основную дугу AB около оси абсцисс, как около оси вращения, на 180°, что дает нам убывающую функцию:

$$-[\arcsin x],$$

затем подняв ее вверх на π, что дает нам функцию:

$$\pi-[\arcsin x],$$

изображающую дугу CB, и, наконец, перемещая эту дугу CB вверх и вниз на расстоянии $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$, что дает нам общую формулу для всех дуг $\overline{CB}$, $\overline{AD}$,... обратного направления:

$$-[\arcsin x]+\pi+2\pi n,$$

где n целое число.

Таким образом, *мы охватываем* все *значения многозначной функции* $y=\arcsin x$ *посредством двух формул:* $y=[\arcsin x]+2\pi n$ и $y=\pi-[\arcsin x]+2\pi n$, *где* n *произвольное целое число, положительное или отрицательное, или равное нулю. Функция же* $[\arcsin x]$ *называется* основной ветвью и *является* однозначной *непрерывной и возрастающей на отрезке* $[-1, +1]$. *Вне этого отрезка функция* $\arcsin x$ *не существует, ибо синус не может превосходить* $+1$, *ни быть алгебраически меньше, чем* -1.

По этому же способу изучаются и остальные три обратные тригонометрические функции: $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,ctg} x$.

Второй прямой тригонометрической функцией является

$$y=\cos x. \qquad (I_2)$$

Ее обратная функция получается перестановкой букв y и x, что дает

$$x=\cos y. \qquad (II_2)$$

Это уравнение читают:

«*y равен той дуге, косинусом которой служит x*». Это чтение записывают более коротко в виде:

$$y=\arccos x. \qquad (III_2)$$

График этой функции получаем из рисунка 112, в котором переставляем буквы X и Y у осей координат, причем мы располагаем новую ось абсцисс горизонтально. Это дает график 116.

Так как кривая этого чертежа есть не что иное, как кривая предыдущего рисунка 115, только опущенная вниз на $\frac{\pi}{2}$, то все свойства этого графика остаются прежними. Значит, функция $\arccos x$ тоже многозначная и из бесконечно многих ее значений

выбирают *как основные* те, которые изображаются непрерывной нисходящей веткой CB. Она изображает однозначную непрерывную функцию, убывающую от π до 0, когда x описывает отрезок $[-1,+1]$ в положительном направлении. Эту основную функцию обозначают знаком $[\arccos x]$. Из рисунка 116 ясно, что все остальные ветви многозначной функции $y=\arccos x$ охватываются двумя формулами:

$$y=[\arccos x]+2\pi n$$

и

$$y=-[\arccos x]+2\pi n,$$

где n любое целое число.

Важно заметить взаимную связь двух основных однозначных непрерывных функций: $[\arcsin x]$ и $[\arccos x]$. Именно, из сравнения веток BC на обоих чертежах, мы видим, что $[\arccos x]=-[\arcsin x]+\frac{\pi}{2}$. Значит, имеем тождество:

$$[\arcsin x]+[\arccos x]=\frac{\pi}{2}. \qquad (I)$$

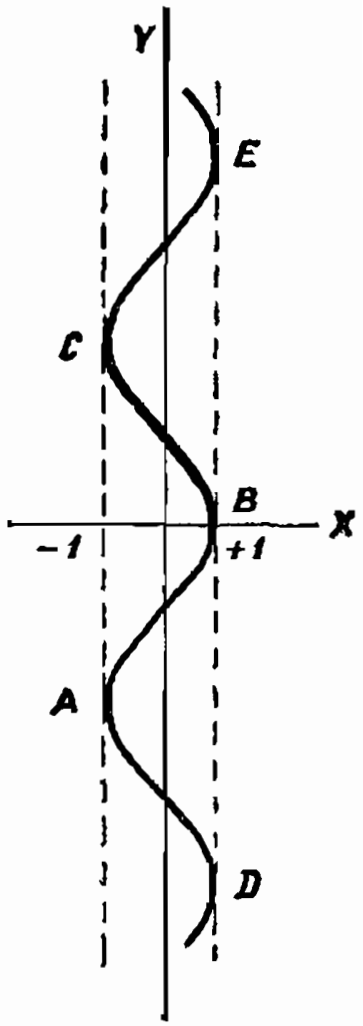


Рис. 116

Третьей прямой тригонометрической функцией является:

$$y=\operatorname{tg} x. \qquad (I_2)$$

Переставляя буквы y и x, имеем обратную для нее функцию:

$$x=\operatorname{tg} y. \qquad (II_2)$$

Это уравнение читается так: «*y равен той дуге, тангенсом которой служит x*», и прочитанное записывается в виде:

$$y=\operatorname{arc\,tg} x. \qquad (III_2)$$

График этой функции получается из рисунка 113 обменом между собой букв X и Y у осей координат, причем новую ось абсцисс располагаем горизонтально. Это дает график 117. Мы видим, что функция $y=\operatorname{arc\,tg} x$ есть *многозначная*, состоящая из бесконечного ряда тождественных между собой кривых. Каждая из этих кривых простирается бесконечно в обе стороны и представляет собой непрерывную кривую линию, ординаты которой возрастают с возрастанием аргумента x. За основную кривую принимают ту, которая проходит через начало координат O. На рисунке это есть ветвь AB. Изображаемую ею функцию называем *основным*

значением многозначной функции $y=\operatorname{arc\,tg} x$ и обозначаем через $y=[\operatorname{arc\,tg} x]$. Ясно, что пределом этого основного значения при $x\to-\infty$ является $-\frac{\pi}{2}$, и пределом при $x\to+\infty$ служит $+\frac{\pi}{2}$. Значит, можно писать:

$$[\operatorname{arc\,tg}(-\infty)]=-\frac{\pi}{2} \text{ и } [\operatorname{arc\,tg}(+\infty)]=+\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому основная ветвь $y=[\operatorname{arc\,tg} x]$ протекает вся в горизонтальной полосе ширины π, имеющей средней линией ось абсцисс.

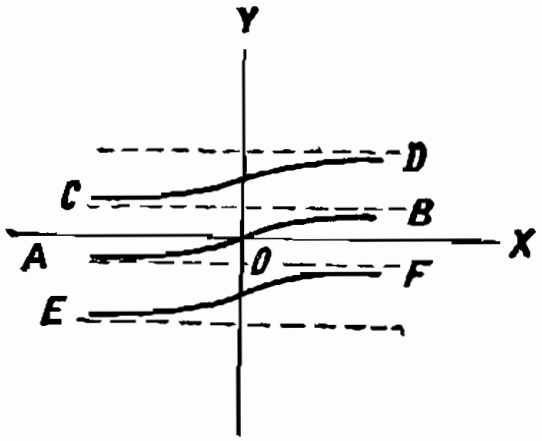


Рис. 117

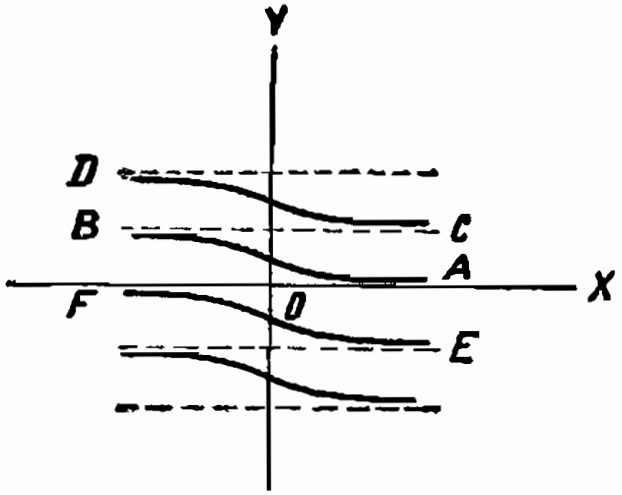


Рис. 118

Остальные ветви многозначной функции $y=\operatorname{arc\,tg} x$ получаются сдвигом основной ветви $y=[\operatorname{arc\,tg} x]$ на $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ вверх и вниз. Таким образом, *все* остальные ветви многозначной функции $y=\operatorname{arc\,tg} x$ охватываются *одной* формулой:

$$y=[\operatorname{arc\,tg} x]+n\pi,$$

где n число *целое,* любое по величине.

Четвертой прямой тригонометрической функцией является

$$y=\operatorname{ctg} x. \qquad (I_4)$$

Переставляя буквы y и x, имеем обратную для нее функцию

$$x=\operatorname{ctg} y. \qquad (II_4)$$

Это уравнение читается так:
«*y равен той дуге, котангенсом которой служит x*», и прочитанное записывается в виде:

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x. \qquad (III_4)$$

Ввиду того что график 114 прямой функции $y=\operatorname{ctg} x$ есть не что иное, как график 113 прямой функции $y=\operatorname{tg} x$, перевернутый около оси OX и сдвинутый вправо на $\frac{\pi}{2}$, мы сразу получим график обратной функции $y=\operatorname{arc ctg} x$, взяв график предыдущей обратной функции $y=\operatorname{arc tg} x$, перевернув его около оси OY и сдвинув его вверх на $\frac{\pi}{2}$. Это нам дает график 118. Мы видим, что $y=\operatorname{arc ctg} x$ есть функция многозначная, что она состоит из ряда тождественных между собой ветвей. За основную ветвь берут BA, имеющую наименьшие положительные ординаты. Функцию, изображаемую ею, обозначают через $y=[\operatorname{arc ctg} x]$ и называют *основным значением* многозначной функции $y=\operatorname{arc ctg} x$. Это есть однозначная убывающая непрерывная функция, имеющая предел при $x\to-\infty$, равный π, и предел при $x\to+\infty$, равный 0. Все остальные ветви многозначной функции $y=\operatorname{arc ctg} x$ охватываются формулой:

$$y=[\operatorname{arc ctg} x]+n\pi,$$

где n любое *целое* число.

Важно указать на взаимную связь двух основных однозначных непрерывных функций: $[\operatorname{arc tg} x]$ и $[\operatorname{arc ctg} x]$. Из сравнения веток AB на обоих чертежах мы замечаем, что $[\operatorname{arc ctg} x]=\frac{\pi}{2}-[\operatorname{arc tg} x]$. Значит, имеем тождество:

$$[\operatorname{arc tg} x]+[\operatorname{arc ctg} x]=\frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

§ 101. Дифференцирование arc sin v.

Пусть

$y=[\operatorname{arc sin} v]$, где имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant+\frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$v=\sin y.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin y)=\frac{d(\sin y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}\frac{dv}{dx}.$$

Так как y есть *основное значение* многозначной функции $\operatorname{arc sin} v$, то имеем неравенство $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant+\frac{\pi}{2}$, при котором

$\cos y$ является неотрицательной величиной. Поэтому, выражая $\cos y$ через $\sin y$ по формуле:

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - v^2},$$

необходимо брать квадратный корень в *арифметическом* (а не в алгебраическом) смысле, т. е. надо брать этот квадратный радикал *существенно положительным*, т. е. только со знаком $+$. Поэтому, заменяя в написанном выше дифференциальном равенстве y через $[\arcsin v]$ и $\cos y$ через $+\sqrt{1 - v^2}$, мы получаем окончательно:

XVII. $$\frac{d}{dx}[(\arcsin v)] = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}},$$

где квадратный радикал, сам по себе, нужно брать в арифметическом смысле, т. е. только со знаком $+$. Этот положительный знак всего результата понятен, ибо *основная ветвь* $[\arcsin v]$ многозначной функции $\arcsin v$ есть функция однозначная, *возрастающая* при возрастании v и, значит, имеющая *положительную* производную.

Примечание. Если бы мы взяли не основное значение $[\arcsin v]$ многозначной функции $y = \arcsin v$, то такое, которое выражается через основное по формуле:

$$y = \pi - [\arcsin v] + 2\pi n,$$

где n есть *целое* число (§ 100), то, разумеется, мы получили бы:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{d}{dx}(\pi) - \frac{d}{dx}[(\arcsin v)] + \frac{d}{dx}(2\pi n) =$$

$$= 0 - \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}} + 0 = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

и, значит, тогда пришлось бы брать квадратный радикал уже не в арифметическом, но в *алгебраическом* смысле, т. е. со знаком минус. Этот отрицательный знак у всего результата тоже вполне понятен, ибо рассматриваемая ветвь многозначной функции $\arcsin v$ является однозначной *убывающей* функцией аргумента v и, значит, имеющей *отрицательную* производную.

§ 102. Дифференцирование arc cos v.

Пусть:

$$y = [\arccos v], \qquad \text{где имеем } 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Так как основные ветви $[\arcsin v]$ и $[\arccos v]$ обеих многозначных функций $\arcsin v$ и $\arccos v$ связаны между собой тождеством:

$$[\arcsin v] + [\arccos v] = \frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

то, дифференцируя его по x, имеем:

$$\frac{d}{dx}([\arcsin v)]+\frac{d}{dx}([\arccos v])=0.$$

Откуда, приняв во внимание только что выведенную формулу XVII, мы получаем:

XVIII. $$\frac{d}{dx}([\arccos v)]=-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}},$$

где квадратный радикал, сам по себе, надо брать в арифметическом смысле, т. е. со знаком $+$, ибо знак $-$ уже вынесен вперед и поставлен перед всей дробью. Этот отрицательный знак всего результата также понятен, потому что *основная ветвь* $[\arccos v]$ многозначной функции $\arccos v$ есть функция *убывающая* и, значит, имеющая *отрицательную* производную.

Примечание. Если бы мы дифференцировали не основную ветвь $[\arccos v]$ многозначной функции $y=\arccos v$, а другую, даваемую формулой:

$$y=-[\arccos v]+2\pi n,$$

где n целое число (§ 100), то тогда y был бы уже *возрастающей* функцией аргумента, v и, значит, тогда мы должны были бы писать:

$$\frac{d}{dx}(\arccos v)=-\frac{d}{dx}([\arccos v])=-\left(-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\frac{\frac{dv}{dx}}{+\sqrt{1-v^2}}.$$

Появление арифметического радикала вполне понятно, ибо производная *возрастающей* функции должна быть неотрицательной, и, следовательно, окончательный результат должен иметь знак $+$.

103. Дифференцирование arc tg v.

Пусть:

$$y=[\operatorname{arc tg} v],\text{ где имеем }-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}.$$

Тогда:

$$v=\operatorname{tg} y.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} y)=\frac{d(\operatorname{tg} y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Но из тригонометрии известно, что $1+\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$.

Поэтому имеем:

$$\frac{dv}{dx}=(1+\operatorname{tg}^2 y)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Заменяя здесь $\operatorname{tg} y$ через v, мы получаем окончательно:

XIX. $$\frac{d}{dx}([\operatorname{arc\,tg} v]) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

Результат получился *положительным*. Это понятно, ибо и основная ветвь $[\operatorname{arc\,tg} v]$, как и все без исключения другие ветви многозначной функции $\operatorname{arc\,tg} v$, суть функции *возрастающие* и, значит, имеющие *положительную* производную.

§ 104. Дифференцирование $\operatorname{arc\,ctg} v$.

Пусть:

$$y = [\operatorname{arc\,ctg} v], \text{ где имеем } 0 < y < \pi.$$

Так как основные ветви $[\operatorname{arc\,tg} v]$ и $[\operatorname{arc\,ctg} v]$ обеих многозначных функций $\operatorname{arc\,tg} v$ и $\operatorname{arc\,ctg} v$ связаны между собой тождеством:

$$[\operatorname{arc\,tg} v] + [\operatorname{arc\,ctg} v] = \frac{\pi}{2}, \qquad (2)$$

то, дифференцируя его по x, имеем:

$$\frac{d}{dx}([\operatorname{arc\,tg} v]) + \frac{d}{dx}([\operatorname{arc\,ctg} v]) = 0.$$

Отсюда, в силу только что выведенной формулы XIX, получаем окончательно:

XX. $$\frac{d}{dx}([\operatorname{arc\,ctg} v]) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

Отрицательный знак результата понятен, ибо основная ветвь $[\operatorname{arc\,ctg} v]$, как и все без исключения другие ветви многозначной функции $\operatorname{arc\,ctg} v$, суть функции *убывающие* и, значит, имеющие *отрицательную* производную.

ЗАДАЧИ

В нижеследующих задачах выполнить дифференцирование, причем всюду предполагается заранее, что обратные тригонометрические функции arc sin, arc cos, arc tg и arc ctg *даны всегда только основными своими ветвями*, хотя указывающие на это обстоятельство квадратные скобки [ ] опущены.

1. $y = \operatorname{arc\,tg} ax^2$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(ax^2)}{1+(ax^2)^2} = \frac{2ax}{1+a^2x^4}.$$

[ибо $v = ax^2$]

2. $y = \arcsin(3x - 4x^3)$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x - 4x^3)}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}} = \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

[ибо $v = 3x - 4x^3$]

3. $y = \arccos \frac{x}{a}$.

4. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

5. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

6. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

7. $y = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

8. $y = x \arcsin x$.

9. $y = x \arccos 2x$.

10. $y = x^2 \operatorname{arctg} x$.

11. $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

12. $f(u) = u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsin \frac{u}{a}$.

13. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$.

14. $f(x) = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$.

15. $F(t) = 3 \ln \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2}$.

16. $\Phi = \operatorname{arctg} \frac{a + r}{1 - ar}$.

17. $y = \frac{8x}{x^2 + 4} - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + x$.

18. $x = 2\sqrt{s - 4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s - 4}}{2}$.

19. $y = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1)$.

Отв. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

$\frac{dy}{dx} = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$\frac{dy}{dx} = \arccos 2x - \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

$\frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1 + x^2}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(4 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}$.

$f'(u) = 2\sqrt{a^2 - u^2}$.

$f'(x) = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$.

$f'(x) = \arcsin \frac{x}{2}$.

$F'(t) = \frac{5t + 12}{t^3 + 4t}$.

$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{1 + r^2}$.

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}\right)^2$.

$\frac{dx}{ds} = \frac{s + 2}{s\sqrt{s - 4}}$.

$\frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{arctg} x$.

Продифференцировать каждую из следующих функций:

20. $\arcsin x^2$.
21. $\arccos 4x$.
22. $\operatorname{arctg}(x-2)$.
23. $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.
24. $e^x \arcsin x$.
25. $e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} 2x$.
26. $\arccos e^x$.
27. $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}$.
28. $3\arcsin\sqrt{\frac{x+2}{3}}+\sqrt{2-x-x^2}$.
29. $y=\arcsin(\sin x)$.
30. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

ГЛАВА XI

ПРИЛОЖЕНИЯ К ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ, ПОЛЯРНЫМ УРАВНЕНИЯМ И К КОРНЯМ

§ 105. Параметрические уравнения кривой. Наклон. Координаты x и y точки кривой часто бывают выражены как функции третьего переменного, называемого *параметром* t, в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Каждое численное значение параметра t дает численные значения буквам x и y и, значит, определяет точку на кривой. Если мы исключаем t из уравнений (1), мы получаем уравнение кривой в *прямоугольных координатах*.

Например:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

суть параметрические уравнения *окружности*, указанной на чертеже; здесь t есть параметр. Если мы исключим t, возводя в квадрат и складывая результаты, мы имеем:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

уравнение окружности в прямоугольных координатах. Ясно, что, когда t изменяется от 0 до 2π, точка $M(x, y)$ описывает всю окружность.

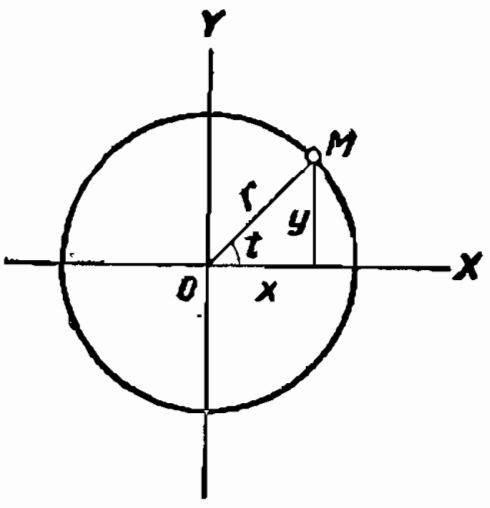


Рис. 119

Так как из уравнений (1) следует, что y есть функция от t, а t есть функция (обратная) от x, то мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \qquad \text{по VIII}$$

$$= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}. \qquad \text{по IX}$$

Значит,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\text{тангенсу наклона в точке } M(x, y). \qquad (3)$$

По этой формуле отыскивают наклон кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Пример 1. Найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали для *эллипса*

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi \\ y&=b\sin\varphi \end{aligned}\right\}^{1} \qquad (A)$$

в точке, для которой $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как параметром служит φ, то

$$\frac{dx}{d\varphi}=-a\sin\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi}=b\cos\varphi.$$

Подстановка в (3) дает:

$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}=$ угловому коэффициенту в любой точке.

Подставляя $\varphi=\frac{\pi}{4}$ в данные уравнения (A), находим точку касания:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

---

[1] Чтобы вывести параметрические уравнения эллипса, проведем большой и малый вспомогательные круги эллипса (рис. 120). Через точки B и C, взятые на одном и том же радиусе, проведем параллели к осям координат. Эти две линии пересекутся в точке $M(x, y)$ на эллипсе, ибо:

$x=OA=OB\cos\varphi=a\cos\varphi,$
$y=AM=OD=OC\sin\varphi=$
$=b\sin\varphi,$

или

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\sin\varphi.$$

Возвышая в квадрат и складывая, находим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$$
$$=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,$$

т. е. уравнение эллипса в прямоугольных координатах. Иногда φ называют *эксцентрическим углом* эллипса.

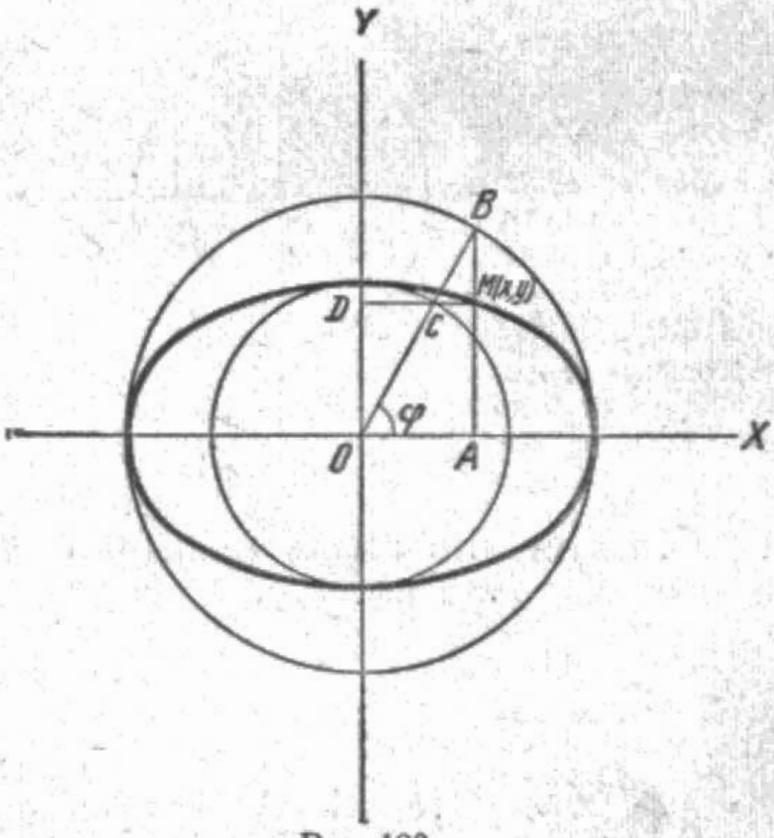


Рис. 120

Следовательно,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b}{a}.$$

Подстановка в формулу (1) § 72 дает уравнение касательной:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

или

$$bx + ay = ab\sqrt{2}.$$

Подстановка в формулу (2) § 72 дает уравнение нормали

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

или

$$(ax - by)\sqrt{2} = a^2 - b^2.$$

Подстановка в формулы (4) и (3) § 72 дает:

$$\text{длина поднормали} = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a\sqrt{2}},$$

$$\text{длина подкасательной} = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Пример 2. Даны уравнения *циклоиды* [1] в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\}, \qquad (B)$$

[1] Кривая, которую описывает точка окружности круга, катящегося без скольжения по неподвижной прямой, называется *циклоидой* (рис. 121).

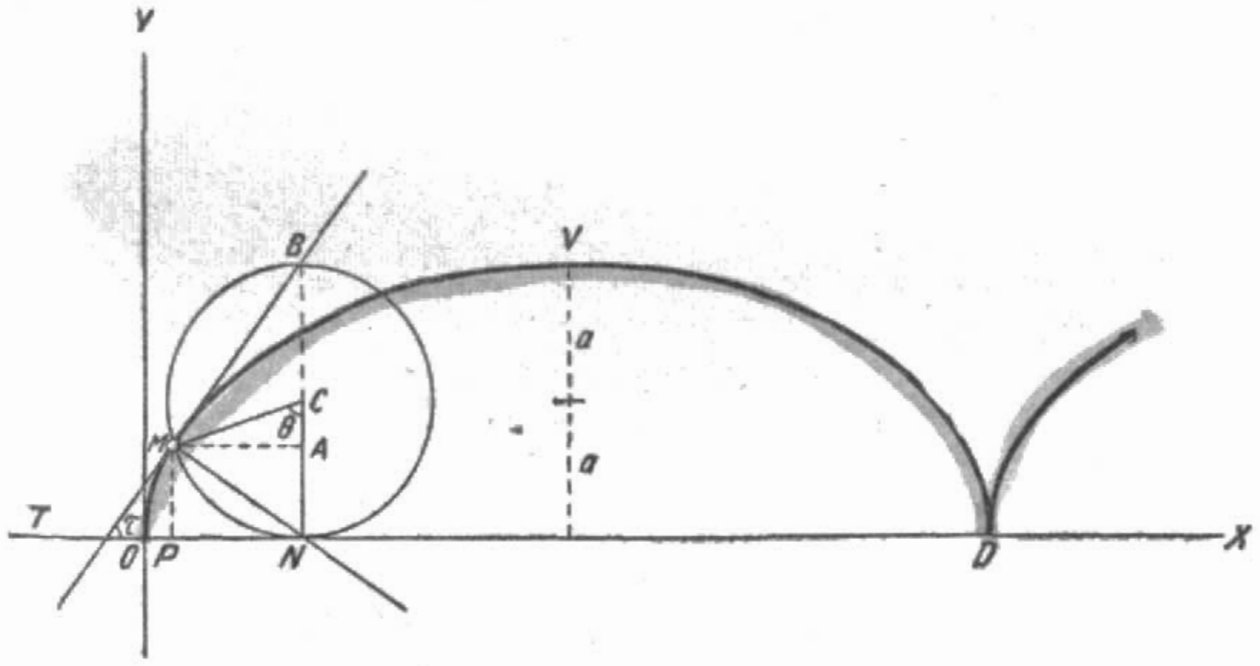


Рис. 121

Пусть радиус катящегося круга равен a, M — производящая кривую точка, а N — точка касания круга с неподвижной прямой OX. Если длина дуги MN

где θ — переменный параметр. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали в точке, для которой $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta); \qquad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta.$$

Подставляя в (3), имеем:

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$ угловому коэффициенту касательной в любой точке.

Так как $\theta=\frac{\pi}{2}$, точка касания будет $\left(\frac{\pi a}{2}-a,\ a\right)$ и $\frac{dy_1}{dx_1}=1$.

Подставляя в формулу (3), (4) § 72, имеем:

длина подкасательной $=a$, длина касательной $=a\sqrt{2}$,

длина поднормали $=a$, длина нормали $=a\sqrt{2}$.

Примечание. Проводим (рис. 121) касательную MT, вертикальный диаметр NB и соединяем M с B. Имеем:

$$\operatorname{tg} NTM=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда:

$$\tau=\angle NTM=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}.$$

С другой стороны:

$$\angle MBN=\frac{\theta}{2},$$

так как измеряется половиной дуги NM, измеряющей центральный угол θ, и

$$\angle AMB=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}.$$

Сравнивая, находим:

$$\angle NTM=\angle AMB.$$

Следовательно,

касательная к циклоиде всегда проходит через высшую точку производящего круга.

Горизонтальная и вертикальная касательные. Из формулы (3) и из § 71 мы видим, что численные значения параметра t

---

равна ON, то точка M коснется базы в O, полагая, что круг катится влево. Принимая угол $MCN=\theta$ за параметр, имеем:

$$x=ON-PN=a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta),$$
$$y=PM=NC-AC=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta).$$

Исключив θ, найдем уравнение циклоиды в прямоугольных декартовых координатах:

$$x=a\cdot\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2}.$$

для точек прикосновения таких касательных даются уравнениями:

Горизонтальные касательные: решить уравнение $\frac{dy}{dt}=0$ относительно t.

Вертикальные касательные: решить уравнение $\frac{dx}{dt}=0$ относительно t.

Пример 3. Найти точки прикосновения горизонтальных и вертикальных касательных к *кардиоиде* (рис. 122)

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta-\frac{a}{2}\cos 2\theta-\frac{a}{2},\\ y &= a\sin\theta-\frac{a}{2}\sin 2\theta. \end{aligned}\right\}$$

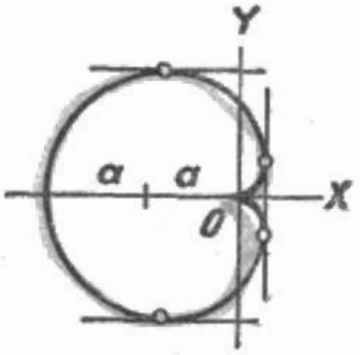


Рис. 122

Решение.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a(-\sin\theta+\sin 2\theta);\\ \frac{dy}{d\theta} &= a(\cos\theta-\cos 2\theta). \end{aligned}\right\}$$

Горизонтальные касательные. Для них $\cos\theta-\cos 2\theta=0$. Вспоминая, что $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, подставляя в это уравнение и решая его, мы получаем $\theta_1=0$, $\theta_2=120°$, $\theta_3=240°$.

Вертикальные касательные. Для них $-\sin\theta+\sin 2\theta=0$. Вспомнив, что $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, подставив в это уравнение и решив его, мы имеем: $\theta_1=0$, $\theta_4=60°$, $\theta_5=180°$, $\theta_6=300°$.

Общий корень θ_1 должен быть отброшен, ибо при нем и числитель и знаменатель в формуле (3) становятся нулями, и, следовательно, наклон кривой в точке $\theta=0$ дается невычислимой формулой. Ясно, что для $\theta=0$ имеем: $x=0$ и $y=0$.

Эта точка кардиоиды называется *острием*.

Подстановка же θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 и θ_6 в уравнения кардиоиды дает:

горизонтальные касательные: точки прикосновения $\left(-\frac{3}{4}a,\pm\frac{3}{4}a\sqrt{3}\right)$;

вертикальные касательные: точки прикосновения $(-2a,0)$ и $\left(\frac{3}{4}a,\pm\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)$.

Заметим, что две вертикальные касательные, лежащие направо от оси OY, совпадают, образуя *«двойную касательную»*.

ЗАДАЧИ

Найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали к каждой из следующих кривых в указанных точках:

	Касательная	*Нормаль*	*Подкасательная*	*Поднормаль*
1. $x=t^2$, $2y=t$; $t=1$.	$x-4y+1=0$,	$8x+2y-9=0$,	2,	$\frac{1}{8}$.
2. $x=t$, $y=t^3$; $t=2$.	$12x-y-16=0$,	$x+12y-98=0$,	$\frac{2}{3}$,	96.

	Касательная	*Нормаль*	*Подкасательная*	*Поднормаль*
3. $x=t^2,\ y=t^3,\ t=1.$	$3x-2y-1=0$,	$2x+3y-5=0$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{2}$.
4. $x=2e^t, y=e^{-t};\ t=0.$	$x+2y-4=0$,	$2x-y-3=0$,	-2,	$-\frac{1}{2}$.
5. $x=\sin t,\ y=\cos 2t;\ t=\frac{\pi}{6}.$	$2y+4x-3=0$,	$4y-2x-1=0$,	$-\frac{1}{4}$,	-1.

Для нижеследующих кривых найти длины: a) подкасательной, b) поднормали, c) касательной, d) нормали в любой точке.

6. *Кардиоида* [1]

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t),\\ y &= a(2\sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

[1] *Кардиоида* представляет собой частный вид кривой, называемой *эпициклоидой*.

Эпициклоидой называется кривая, которую описывает точка окружности, катящейся *извне* по другой окружности.

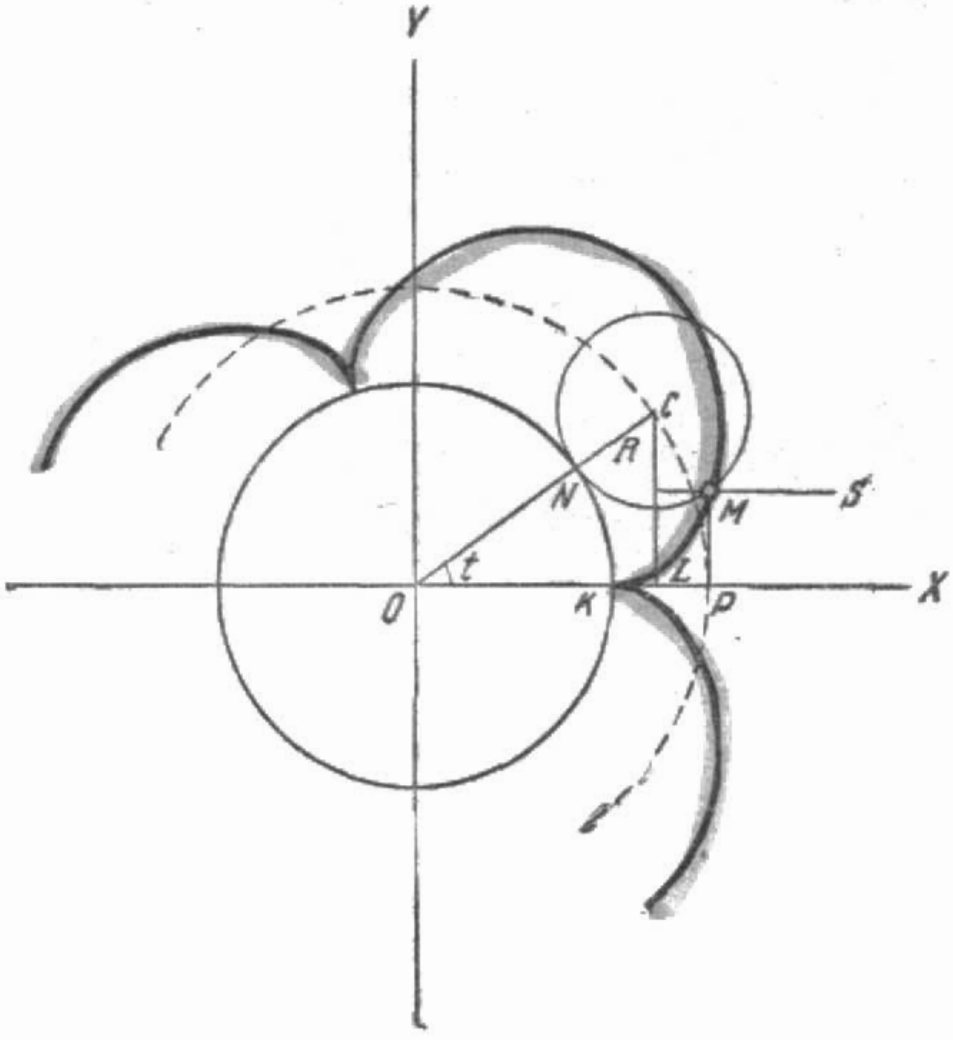


Рис. 123

Пусть O — центр неподвижной окружности, C — центр катящегося круга, N — точка соприкосновения обеих окружностей и $M(x, y)$ — точка, описывающая эпициклоиду (рис. 123). Предположим, что точка K представляет собою положение точки M, при котором последняя находилась на неподвижной окружности. Следовательно, $\overset{\frown}{KN}=\overset{\frown}{NM}$ (продолж. сноски см. на стр. 243).

Отв. a) $y \operatorname{ctg} \frac{3}{2}$; b) $y \operatorname{tg} \frac{3}{2} t$; c) $\frac{y}{\sin \frac{3}{2} t}$; d) $\frac{y}{\cos \frac{3}{2} t}$.

7. *Гипоциклоида* (астроида)[1]

$$\left.\begin{aligned} x &= 4a \cos^3 t, \\ y &= 4a \sin^3 t. \end{aligned}\right\}$$

Отв. a) $-y \operatorname{ctg} t$; b) $-y \operatorname{tg} t$; c) $\frac{y}{\sin t}$; d) $\frac{y}{\cos t}$.

Примем O за начало координат и OK — за ось OX. Опустим на ось OX перпендикуляры CL и MP, проведем прямую MS параллельно OX и пусть R — точка пересечения этой прямой с перпендикуляром CL. Пусть a — радиус катящейся окружности и b — радиус неподвижного круга, θ — угол OCM и t — угол KOC. Будем иметь:

$$\overset{\smile}{KN} = bt, \quad \overset{\smile}{NM} = a\theta.$$

Таким образом:

$$bt = a\theta.$$

Далее имеем:

$$x = OP = OL + LP = OC \cos KOC - CM \cos SMC =$$
$$= (a+b) \cos t - a \cos (t+\theta) = (a+b) \cos t - a \cos \frac{a+b}{a} t,$$
$$y = PM = LC - RC = OC \sin KOC - CM \sin SMC =$$
$$= (a+b) \sin t - a \sin (t+\theta) = (a+b) \sin t - a \sin \frac{a+b}{a} t.$$

В частном случае, когда $a = b$, кривая носит наименование «кардиоида». Как легко видеть, уравнения кардиоиды имеют вид, данный в примере.

[1] *Гипоциклоидой* называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности, соприкасаясь с ней внутрен-

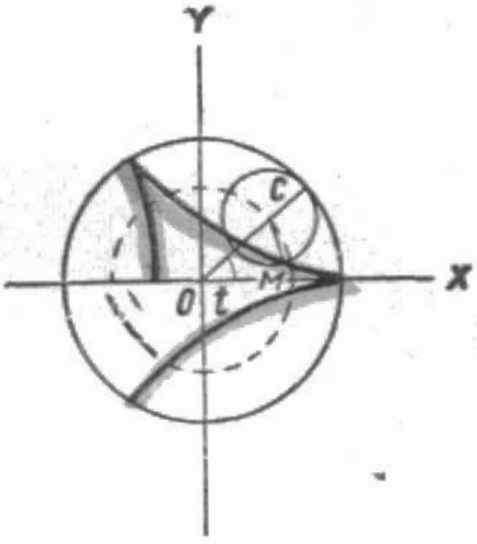


Рис. 124

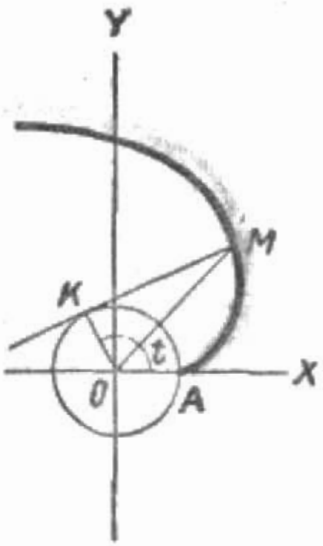


Рис. 125

ним образом (рис. 124). Следуя методу, данному в предыдущей сноске, легко получим уравнения этой кривой:

$$x = (b-a) \cos t + a \cos \frac{b-a}{a} t,$$

$$y = (b-a) \sin t - a \sin \frac{b-a}{a} t$$ (прод. сноски см. на стр. 244).

8. *Эвольвента круга*[1]

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t), \\ y &= a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}\right\}$$

Отв. a) $y \operatorname{ctg} t$; b) $y \operatorname{tg} t$; c) $\frac{y}{\sin t}$; d) $\frac{y}{\cos t}$.

9. Показать, что у кривой:

$$x = \sqrt{c^2 - y^2} + \frac{c}{2} \ln \frac{c - \sqrt{c^2 - y^2}}{c + \sqrt{c^2 - y^2}}$$

касательная имеет постоянную длину. Вследствие этого эта кривая называется *кривой равных касательных* или *трактриссой*.

Параметрические уравнения *трактриссы* имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= c\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right), \\ y &= c \sin u. \end{aligned}\right\}$$

Показать, что касательная к трактриссе в любой точке имеет постоянную длину.

В частном случае при $b = 4a$ после элементарных преобразований получим уравнения:

$$\begin{aligned} x &= a(3\cos t + \cos 3t) = 4a \cos^3 t, \\ y &= a(3 \sin t - \sin 3t) = 4a \sin^3 t, \end{aligned}$$

В этом случае гипоциклоиду называют *астроидой*.

[1] Предположим, что на окружность круга навернута нить. Если возьмем конец этой нити и будем ее развертывать, сохраняя ее все время в натянутом положении, то конец нити опишет при этом кривую, называемую *эвольвентой круга* (рис. 125). Пусть O — центр круга, a — радиус и A — конец нити в навернутом на окружность положении. Примем O за начало координат и OA за ось OX. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эвольвенты, MK — касательная к кругу и t — угол XOK. Из процесса построения кривой следует, что

$$KM = \overset{\smile}{AK} = at.$$

Проекция радиуса OK на ось OX будет равна:

$$OK \cos t = a \cos t$$

и на ось OY

$$OK \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin t.$$

Касательная KM образует с осью OX угол $t - \frac{\pi}{2}$ и с осью OY угол $\pi - t$. Поэтому проекции KM на оси координат соответственно будут равны:

$$KM \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = at \sin t,$$

$$KM \cos(\pi - t) = -at \cos t.$$

Координаты точки M являются проекциями отрезка OM на оси координат. OM является замыкающей ломаной OKM. Поэтому будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t + at \sin t = a(\cos t + t \sin t), \\ y &= a \sin t - at \cos t = a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

§ 106. Параметрические уравнения. Вторая производная. Употребляя y' как символ первой производной от y по x, мы можем написать уравнение (3) предыдущего § 105 в виде:

$$y' = h(t), \qquad (3^*)$$

ибо это уравнение явственно показывает, что y' есть функция параметра t.

Чтобы найти вторую производную y'', мы снова прибегаем к формуле (3) предыдущего параграфа, в которой только заменяем букву y символом y'. Это нам дает равенство:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{f'(t)}, \qquad (4)$$

ибо, согласно равенствам (1) предыдущего параграфа, мы имеем $x = f(t)$.

Пример. Найти y'' для *циклоиды*

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}. \qquad \text{§ 110}$$

Решение. Мы нашли в предыдущем параграфе, что

$$y' = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \text{ и } \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta).$$

Дифференцируя, имеем:

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{(1 - \cos\theta)\cos\theta - \sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta - 1}{(1 - \cos\theta)^2} = -\frac{1}{1 - \cos\theta}.$$

Подставляя в (4), получаем;

$$y'' = -\frac{1}{a(1 - \cos\theta)^2}.$$

Заметим, что y'' отрицательна. Значит, кривая *всюду вогнута книзу.*

ЗАДАЧИ

1. В каждом из следующих примеров найти выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ через t:

(a) $x = t - 1$, $y = t^2 + 1$. **Отв.** $\frac{dy}{dx} = 2t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$.

(b) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = 1 - t$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t^2}$.

(c) $x = 2t$, $y = \frac{t^3}{3}$.

(d) $x = \frac{t^3}{6}$, $y = \frac{t^2}{2}$.

(e) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

(f) $x = 2(1 - \sin t)$, $y = 4\cos t$.

(g) $x = \sin t$, $y = \sin 2t$.

(h) $x = \cos 2t$, $y = \sin t$.

2. Показать, что кривая $x = \sec\theta$, $y = \operatorname{tg}\theta$ не имеет точек перегиба.

3. В каждом из следующих примеров вычертить кривую и найти ее максимум, минимум и точки перегиба:

(a) $x=2a\operatorname{ctg}\theta$, $y=2a\sin^2\theta$.

Отв. max $(0,\ 2a)$; точки перегиба $\left(\pm\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{3a}{2}\right)$.

(b) $x=\operatorname{tg}t$, $y=\sin t\cos t$.

Отв. max $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$; min $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$;

точки перегиба $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $(0,,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

§ 107. Криволинейное движение. Скорость. Если параметр t в параметрических уравнениях $x=f(t)$, $y=g(t)$ обозначает *время*, и если функции $f(t)$ и $g(t)$ суть непрерывные, то при непрерывном изменении времени t точка $M(x, y)$ движется по плоскости, вычерчивая кривую, или траекторию. В этом случае мы имеем *криволинейное движение*, и тогда уравнения

$$x=f(t),\quad y=g(t) \qquad (1)$$

называются **уравнениями движения.**

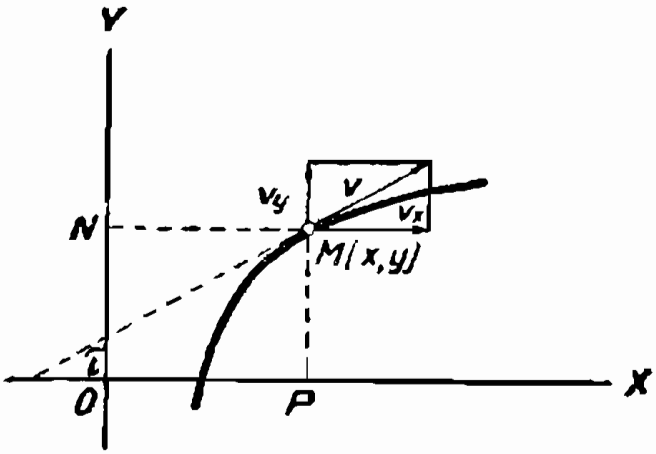


Рис. 126

Скорость v движущейся точки $M(x, y)$ в какой-либо момент времени определяется ее компонентами: горизонтальной и вертикальной.

Горизонтальная компонента v_x равна скорости вдоль оси абсцисс OX (рис. 126) проекции P точки M и, значит, есть быстрота изменения во времени абсциссы x. Поэтому, в силу § 80, где надо букву s заменить теперь буквой x, мы имеем:

$$v_x=\frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Аналогично вертикальная компонента v_y, т. е. быстрота изменения во времени ординаты y, есть

$$v_y=\frac{dy}{dt}. \qquad (3)$$

Приставив векторы v_x и v_y к точке M, как указано на рисунке, мы выполняем четырехугольник и проводим диагональ из

точки M. Это и будет искомым вектором скорости v. Ясно из рисунка, что ее величина и ее направление даны формулами:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4}$$

Сравнивая с формулой (3) § 105, мы видим, что $\operatorname{tg}\tau$ равен наклону траектории в точке M. Следовательно, *скорость направлена по касательной прямой* в точке M к траектории.

§ 108. Криволинейное движение. Компоненты ускорения. В курсах механики доказывается, что в криволинейном движении вектор ускорения j не направлен, подобно вектору скорости, по касательной, но направлен в *сторону вогнутости траектории*. Ускорение j может быть разложенным на тангенциальную компоненту j_t и на нормальную компоненту j_n, где:

$$j_t = \frac{dv}{dt}; \quad j_n = \frac{v^2}{R},$$

где R есть радиус кривизны (см. § 133).

Но ускорение также может быть разложено и на компоненты, параллельные осям координат. Сообразно тому, что было сделано в предыдущем параграфе для компоненты скорости, мы определяем компоненты ускорения, параллельные осям координат OX и OY, формулами:

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}, \tag{5}$$

Таким образом, когда построен четырехугольник с вершиной M и сторонами j_x и j_y, тогда вектор j есть диагональ из точки M. Отсюда формула:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2}, \tag{6}$$

дающая величину (всегда оцениваемую положительно) вектора ускорения в какой-нибудь момент времени.

В первой задаче мы применяем уравнения движения к снаряду; эта задача хорошо поясняет настоящий параграф и предыдущий.

ЗАДАЧИ

1. Пренебрегая сопротивлением воздуха, мы имеем уравнения движения снаряда, написанными в виде:

$$x = v_1 \cos\Phi \cdot t, \quad y = v_1 \sin\Phi \cdot t - 16{,}1\, t^2;$$

здесь v_1 — начальная скорость, Φ — угол выстрела с горизонтом и t — время полета в секундах; x и y измеряются в футах. Найти компоненты скорости, компоненты ускорения, скорость и ускорение: (a) в какой-нибудь момент времени; (b) в конце первой секунды, предполагая данными: $v_1 = 100$ футов в секунду, $\Phi = 30°$; (c) найти направление движения в конце первой секунды; (d) уравнение траектории в прямоугольных координатах.

Решение. Из формул (2) и (3):

(a) $$v_x = v_1 \cos\Phi; \quad v_y = v_1 \sin\Phi - 32{,}2t.$$

Поэтому из (4): $v = \sqrt{v_1^2 - 64{,}4 t v_1 \sin\Phi + 1036{,}8 t^2}$.

Из (5) и (6): $j_x = 0$; $j_y - 32{,}2$; $j = 32{,}2$ (направлено вниз).

(b) Подставляя $t=1$, $v_1=100$, $\Phi=30°$ в эти результаты, мы имеем:

$v_x=86{,}6$ фут. в сек., $J_x=0$,
$v_y=17{,}8$ фут. в сек., $j_y=-32{,}2$ в сек.^{2},
v (скорость) $=88{,}4$ фут. в сек., $j=32{,}2$ фут. в сек.^{2}

(c) $\tau=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{v_y}{v_x}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{17{,}8}{86{,}6}=11°37'=$ углу направления движения с горизонтом.

(d) Когда $v_1=100$, $\Phi=30°$; тогда уравнения движения будут:

$$x=50t\sqrt{3},\quad y=50t-16{,}1t^2.$$

Исключая t, имеем в результате: $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{0{,}161}{75}x^2$. Это есть парабола.

2. Снаряду дана начальная скорость в 200 фут. в сек. в направлении под 45° к горизонту, найти: (a) компоненты скорости в конце третьей и шестой секунды; (b) скорость и направление движения в те же самые моменты.

Условия те же самые, как в задаче 1.

Отв. (a) Когда $t=3$, $v_x=141{,}4$ фут. в сек., $v_y=44{,}8$ фут. в сек.,
когда $t=6$, $v_x=141{,}4$ фут. в сек., $v_y=51{,}8$ фут. в сек.
(b) Когда $t=3$, $v=148{,}3$ фут. в сек., $\tau=17°35'$,
когда $t=6$, $v=150{,}5$ фут. в сек., $\tau=159°53'$.

3. Точка, отнесенная к прямоугольным координатам, движется так, что

$$x=a\cos t+b \quad \text{и} \quad y=a\sin t+c,$$

показать, что ее скорость есть величина постоянная.

4. Пусть траектория движущейся точки есть синусоида

$$\left.\begin{aligned} x&=at\\ y&=b\sin at\end{aligned}\right\};$$

показать: (a) что компонента скорости v_x есть величина постоянная; (b) что ускорение точки во всякий момент пропорционально ее расстоянию от оси OX.

5. С данными задачи 2 найти самую большую высоту, достигнутую снарядом. Если снаряд поражает почву на том же самом горизонтальном уровне, на котором был произведен выстрел, найти время полета и угол удара снаряда.

6. Точка движения против стрелки часов по окружности $x^2+y^2=100$ (единица расстояния 1 фут) с постоянной скоростью 6 футов в секунду. Найти компоненты скорости в точке (6, 8).

Отв. $v_x=-4{,}8$ фут. в сек.; $v_y=3{,}6$ фут. в сек.

7. Даны уравнения движения $x=t^2$, $y=(t-1)^2$.

(a) Найти уравнение траектории в прямоугольных декартовых координатах.

(b) Вычертить траекторию с векторами скорости и ускорения для $t=\dfrac{1}{2}$, $t=1$, $t=2$.

(c) В какой момент времени скорость имеет минимальную величину?

(d) Где находится точка, в которой скорость равна 10 фут. в сек.?

Отв. (a) *Парабола*; (b) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$; (c) $t=\dfrac{1}{2}$; (d) (16, 9).

8. Даны уравнения движения $x=t^2$, $y=\dfrac{4}{t^2}$.

(a) Найти уравнение траектории в прямоугольных координатах.
(b) Вычертить траекторию с векторами скорости и ускорения для $t=1$, $t=\sqrt{2}$, $t=2$.
(c) В какой момент времени векторы скорости и ускорения перпендикулярны?

Отв. *Равносторонняя гипербола*; $xy=4$; (c) $t=\sqrt[8]{48}$.

9. Даны уравнения движения $x=t^2$, $y=4t-t^3$.
(a) Найти уравнения траектории в прямоугольных декартовых координатах.
(b) Вычертить траекторию с векторами скорости и ускорения для $t=0$, $t=1$, $t=\sqrt{3}$.
(c) Для таких моментов времени скорость имеет минимум и максимум?
(d) В какой точке кривой ускорение наименьшее?

Отв. (a) $y^2=x(4-x)^2$; (c) $t=0$, $\frac{\pm\sqrt{10}}{3}$; (d) (0, 0).

10. Даны уравнения движения $x=t^2$, $y=t^2-\frac{t^4}{4}$.
(a) Найти уравнение траектории в прямоугольных координатах.
(b) Вычертить траекторию с векторами скорости и ускорения для $t=0$, $t=1$ и $t=2$.
(c) Где находится точка, когда она движется параллельно оси OX?
(d) В какой точке ускорение имеет минимум?

Отв. *Парабола*; $y=x-\frac{x^2}{4}$; (c) (2, 1).

11. Даны следующие уравнения криволинейного движения; требуется найти в указанные моменты времени: v_x, v_y, v, j_x, j_y, j; положение точки (ее координаты); направление движения. Также найти уравнение траектории в прямоугольных координатах.

(a) $x=t^2$; $y=t$; $t=2$.
(b) $x=t$; $y=t^3$; $t=1$.
(c) $x=t^2$; $y=t^3$; $t=3$.
(d) $x=2t$; $y=t^2+3$; $t=0$.
(e) $x=1-t^2$; $y=2t$; $t=2$.
(f) $x=a\sin t$; $y=a\cos t$; $t=\frac{3\pi}{4}$.
(g) $x=2\sin t$; $y=3\cos t$; $t=\pi$.
(h) $x=\sin t$; $y=\cos 2t$; $t=\frac{\pi}{4}$.
(i) $x=2t$; $y=3e^t$; $t=0$.
(j) $x=3t$; $y=\ln t$; $t=1$.
(k) $x=t$; $y=\frac{12}{t}$; $t=3$.

§ 109. Полярные координаты. Угол между радиусом-вектором и касательной.

Пусть уравнение кривой в полярных координатах ρ, θ будет

$$\rho=f(\theta). \tag{1}$$

Докажем предложение:

Теорема. *Если ψ — угол между радиусом-вектором OM и касательной в точке M, тогда*

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'}, \tag{2}$$

где $\rho'=\frac{d\rho}{d\theta}$.

Доказательство. Через M и через близкую точку $M'(\rho+\Delta\rho,\ \theta+\Delta\theta)$ кривой проводим секущую AB. Далее, проводим MR перпендикулярно к OM'.

Тогда (рис. 127) $OM'=\rho+\Delta\rho$, угол $MOM'=\Delta\theta$, $MR=\rho\sin\Delta\theta$ и $OR=\rho\cos\Delta\theta$.

Значит,

$$\operatorname{tg} MM'R=\frac{MR}{RM'}=\frac{MR}{OM'-OR}=\frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}.$$

Обозначим через ψ угол между радиусом-вектором OM и касательной MT. Если мы теперь заставим $\Delta\theta$ приближаться к нулю, как к пределу, тогда

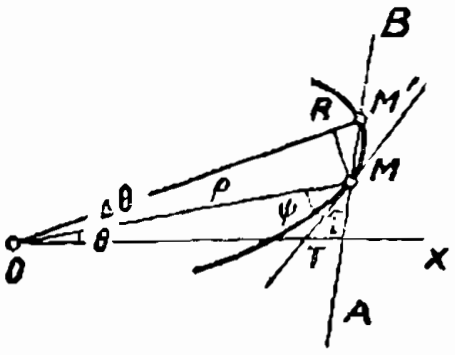


Рис. 127

(a) точка M' стремится к M как к пределу;

(b) секущая AB поворачивается около M и приближается к касательной MT как к предельному положению;

(c) угол $MM'R$ приближается к ψ как к пределу.

Поэтому

$$\operatorname{tg}\psi=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\cos\Delta\theta}.$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела так, чтобы было можно применить основные теоремы теории пределов:

$$\frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}=\frac{\rho\sin\Delta\theta}{2\rho\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}+\Delta\rho}=$$

$$\left[\text{ибо } \rho-\rho\cos\Delta\theta=\rho(1-\cos\Delta\theta)=\rho\cdot 2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}\right]$$

$$=\frac{\rho\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

[разделив числитель и знаменатель на $\Delta\theta$ и переставляя множители].

Когда $\Delta\theta\to 0$, тогда

$$\lim\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1 \quad \text{и} \quad \lim\frac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}=1$$

и далее

$$\lim\sin\frac{\Delta\theta}{2}=0, \quad \lim\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}=\rho'.$$

Отсюда пределы числителя и знаменателя соответственно равны ρ и ρ'. Это и доказывает формулу (2), ч. т. д.

Из треугольника OMT мы имеем:

$$\tau = \theta + \phi. \qquad (3)$$

Таким образом, мы нашли τ; поэтому мы можем рассматривать как найденную величину также и $\operatorname{tg}\tau$. А это есть угловой коэффициент касательной в точке M. Имеем для вычисления $\operatorname{tg}\tau$ формулу:

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}(\theta + \phi) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\phi}.$$

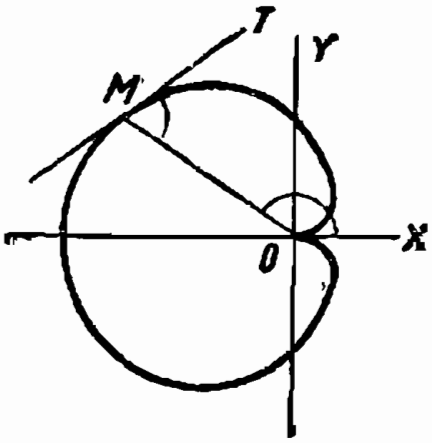


Рис. 128

Пользуясь формулой (2) и подставляя сюда $\operatorname{tg}\phi$, находим *наклон касательной* $= \operatorname{tg}\tau = \dfrac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\phi}$.

Пример 1. Найти ϕ и τ для *кардиоиды*[1] (рис. 128)

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$

Решение.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \sin\theta.$$

---

[1] Уравнение *кардиоиды* в полярных координатах может быть получено из уравнений ее в параметрическом виде

$$x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

(см. задачу 6, стр. 242) следующим образом. Воспользуемся рисунком 123.

Перенесем начало координат в точку K. Формулы преобразования будут:

$$x = x' + a, \quad y = y'.$$

Параметрические уравнения примут тогда вид:

$$x' = a(2\cos t - \cos 2t - 1) = a(2\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t) = 2a\cos t(1 - \cos t),$$

$$y' = a(2\sin t - \sin 2t) = a(2\sin t - 2\sin t\cos t) = 2a\sin t(1 - \cos t).$$

Разделив теперь второе уравнение на первое, будем иметь:

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} t,$$

откуда найдем:

$$\cos t = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Подставив найденное значение для $\cos t$ в уравнение, определяющее x', получим:

$$x' = 2a\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(1 - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right),$$

или

$$x'^2 + y'^2 = 2a\sqrt{x'^2 + y'^2} - 2ax'.$$

Подстановка в (2) даст:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Так как

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

то

$$\psi=\frac{\theta}{2}.$$

Подставляя в (3), находим:

$$\tau=\theta+\frac{\theta}{2}=\frac{3}{2}\theta.$$

Примечание. Формулы (2) и (3) выведены из рисунка 127. Но расположение линий на этой фигуре есть расположение *частное*. Поэтому в каждой задаче является та опасность, что можно смешать, какие углы надо считать за основные и какие из них дополнительные. Отсюда, в каждой задаче надо определять соотношения между углами ψ, τ и θ путем *исследования знаков* их тригонометрических функций, а также из рисунка.

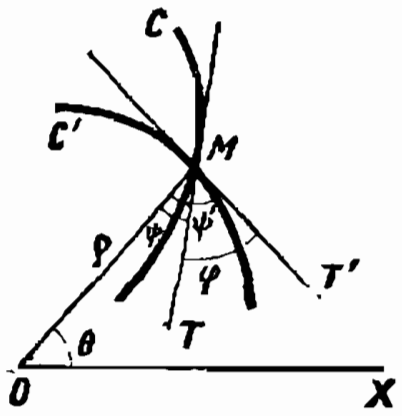


Рис. 129

Чтобы найти угол пересечения φ двух кривых C и C', заданных уравнениями в полярных координатах, мы поступаем так (рис. 129):

Угол TMT' = угол OMT' — угол OMT, или

$$\varphi=\psi'-\psi.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\psi'-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi'\operatorname{tg}\psi}, \qquad (4)$$

где $\operatorname{tg}\psi'$ и $\operatorname{tg}\psi$ вычисляются по формуле (2) из уравнений кривых и из определения их точки пересечения M.

Пример 2. Найти угол пересечения кривых $\rho=a\sin 2\theta$ и $\rho=a\cos 2\theta$.

Решение. Решая оба эти уравнения *одновременно*, мы получаем для точки пересечения этих кривых равенство:

$$\operatorname{tg}2\theta=1,\quad 2\theta=45^\circ,\quad \theta=22\frac{1^\circ}{2}.$$

Воспользовавшись теперь формулами перевода от прямоугольных координат к полярным, будем иметь:

$$\rho^2=2a\rho-2a\rho\cos\theta,$$

или

$$\rho=2a(1-\cos\theta).$$

Полученное уравнение отличается от уравнения в рассматриваемом примере тем, что в последнем a обозначает не радиус круга, а диаметр, чему и соответствует коэффициент $2a$ найденного нами уравнения.

Для первой кривой, на основании формулы (2), находим:

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{ибо } \theta = 22\frac{1^\circ}{2}.$$

Для второй кривой

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\theta = -\frac{1}{2}, \quad \text{ибо } \theta = 22\frac{1^\circ}{2}.$$

Подставляя в формулу (4), получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Отв. $\varphi = \operatorname{arc tg}\frac{4}{3}$.

§ 110. Длины полярной подкасательной и полярной поднормали. Проведем прямую NT (рис. 130) через начало координат перпендикулярно к радиусу-вектору точки M кривой. Если MT есть касательная, а MN — нормаль к кривой в M, тогда по определению:

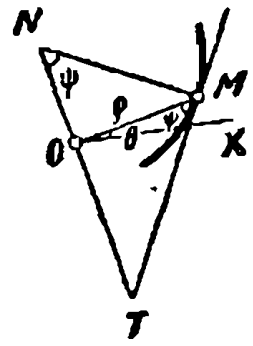


Рис. 130

OT = длине полярной подкасательной

и

ON = длине полярной поднормали кривой в точке M.

Из треугольника OMT имеем:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{OT}{\rho}.$$

Следовательно,

$$OT = \rho\operatorname{tg}\psi = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho} = \textit{длине полярной подкасательной}. \quad (5)$$

Если θ возрастает с возрастанием ρ, $\frac{d\theta}{d\rho}$ будет положительно, и ψ есть острый угол, как на рисунке. Следовательно, и подкасательная OT будет положительна и расположится вправо от наблюдателя, находящегося в O и смотрящего по OM. Если $\frac{d\theta}{d\rho}$ отрицательно, подкасательная будет отрицательна и расположится влево от этого наблюдателя.

Из треугольника OMN имеем:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{ON}.$$

Поэтому

$$ON = \frac{\rho}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{d\theta}{d\rho} = \textit{длине полярной поднормали}. \quad (6)$$

Длину полярной касательной MT и длину полярной нормали MN можно найти из рисунка: каждая есть гипотенуза соответствующего прямоугольного треугольника.

Пример. Найти длину полярной подкасательной и полярной поднормали для *лемнискаты*[1] (рис. 131):

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

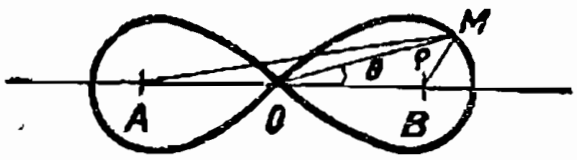


Рис. 131

Решение. Дифференцируя ρ по θ как неявную функцию, находим:

$$2\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -2a^2 \sin 2\theta,$$

или

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

Подставляя в (5) и (6), имеем:

$$\text{длина подкасательной} = -\frac{\rho^3}{a^2 \sin 2\theta}, \quad \text{длина поднормали} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

Если желательно выразить результаты в функции одного θ, находим из данного уравнения ρ в функции θ и подставляем. Таким образом в данном примере найдем:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

и, следовательно,

$$\text{длина подкасательной} = -a \operatorname{ctg} 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}.$$

ЗАДАЧИ

1. В круге $\rho = 2r \sin\theta$ выразить ψ и τ через θ.

Отв. $\psi = \theta$, $\tau = 2\theta$.

2. *Для параболы* $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ показать, что $\tau + \psi = \pi$.

3. Показать, что для *лемнискаты* $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$2\psi = \pi + 4\theta.$$

---

[1] *Лемнискатой* называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек A и B ($AB = 2m$) есть величина постоянная, равная m^2.

Для вывода уравнения лемнискаты расположим полюс O посредине расстояния между точками A и B (рис. 131). Тогда будем иметь:

$$MA \cdot MB = m^2.$$

Выражая MA и MB по известной формуле тригонометрии, приходим к уравнению

$$\sqrt{\rho^2 + m^2 + 2m\rho\cos\theta} \cdot \sqrt{\rho^2 + m^2 - 2m\rho\cos\theta} = m^2,$$

откуда получаем:

$$(\rho^2 + m^2)^2 - 4m^2\rho^2\cos^2\theta = m^4, \quad \rho^4 = 4m^2\rho^2\cos^2\theta - 2m^2\rho^2,$$
$$\rho^2 = 2m^2(2\cos^2\theta - 1) = 2m^2\cos 2\theta.$$

Полагая $2m^2 = a^2$, окончательно находим:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

4. Показать, что для *логарифмической спирали* $\rho = ae^{\theta}$ угол ϕ имеет постоянную величину. Так как касательная образует с радиусом-вектором постоянный угол, эта кривая называется также равноугольной спиралью.

5. Дана *конхоида* $\rho = a\sin^2\frac{\theta}{3}$; показать, что $\tau = 4\phi$.

6. Показать, что для *архимедовой спирали* $\rho = a\theta$ имеем: $\operatorname{tg}\phi = \theta$. Вычислить ϕ для $\theta = 2\pi$ и $\theta = 4\pi$.

Отв. $\phi = 80°57'$ и $\phi = 85°17'$.

7. Показать, что *прямая* $\rho\cos\theta = 2a$ пересекается с *окружностью* $\rho = 5a\sin\theta$ под углом $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

8. Показать, что *параболы* $\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ и $\rho = b\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}$ пересекаются под прямыми углами.

9. Найти углы пересечения линий $\rho = a\sin\theta$, $\rho = a\sin 2\theta$.

Отв. В начале 0; в двух других точках $\operatorname{arc\,tg} 3\sqrt{3}$.

10. Найти наклоны нижеперечисленных кривых в указанных точках:

a) $\rho = a(1-\cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Отв. -1.

b) $\rho = a\sec^2\theta$, $\rho = 2a$. ± 3.

c) $\rho = a\sin 4\theta$, в начале. $0, 1, \infty, -1$.

d) $\rho^2 = a^2\sin 4\theta$, в начале. $0, 1, \infty, -1$.

e) $\rho = a\sin 3\theta$, в начале. $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

11. Показать, что *спираль Архимеда* $\rho = a\theta$ и гиперболическая спираль $\rho = \frac{a}{\theta}$ пересекаются под прямыми углами.

12. Найти угол, под которым пересекаются *парабола* $\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ *и прямая* $\rho\sin\theta = 2a$.

Отв. 45°.

13. Показать, что две *кардиоиды* $\rho = a(1+\cos\theta)$ и $\rho = a(1-\cos\theta)$ пересекаются под прямыми углами.

14. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали в произвольной точке *спирали Архимеда* $\rho = a\theta$.

Отв. $\frac{\rho^2}{a}$; $a = \text{const}$; $\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2+\rho^2}$; $\sqrt{a^2+\rho^2}$.

15. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали логарифмической спирали $\rho = a^{\theta}$.

Отв. $\frac{\rho}{\ln a}$; $\rho\ln a$; $\rho\sqrt{1+\frac{1}{\ln^2 a}}$; $\rho\sqrt{1+\ln^2 a}$.

Заметим, что при $a = e$ подкасательная равна поднормали и касательная равна нормали.

16. Найти углы, образуемые пересечением кривых

$$\rho = a(1+\cos\theta),\ \rho = b(1-\cos\theta).$$

Отв. $0, \frac{\pi}{2}$.

17. Показать, что длина подкасательной *гиперболической спирали* $\rho = \frac{a}{\theta}$ постоянна.

18. Показать, что *равносторонние гиперболы* $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$, $\rho^2 \cos 2\theta = b^2$ пересекаются под прямыми углами.

§ 111. Отделение кратных корней у многочленов. Рассмотрим многочлен n-ой степени

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q,$$

расположенный по нисходящим степеням буквы x. Эту букву x мы будем считать независимым переменным, коэффициенты многочлена, т. е. буквы a, b, c, ..., p и q, будем считать данными *постоянными числами*, причем первое из них, число a, будем считать отличным от нуля, $a \neq 0$, потому что иначе данный многочлен был бы не степени n, а ниже.

Известно уже из элементов алгебры, что число α называется *корнем* данного многочлена, если этот многочлен делается равным нулю, когда подставляют в него вместо буквы x рассматриваемое число α, т. е. когда справедливо равенство

$$a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \ldots + p\alpha + q = 0.$$

Относительно корней, их существования и их свойств в высшей алгебре доказываются следующие два основные предложения, на справедливости которых мы не будем останавливаться и которые мы просто примем без доказательства.

Теорема I. *Всякий многочлен n-й степени*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q$$

имеет в точности n корней α, β, γ, ..., μ, ν, не более и не менее. Эти корни могут быть какими угодно, т. е. различными друг от друга или совпадающими друг с другом, действительными или мнимыми, положительными или отрицательными, рациональными или иррациональными, дробными или целыми.

Теорема II. *Если α, β, γ, ..., μ, ν суть все n корней данного многочлена n-й степени*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q,$$

то данный многочлен может быть представлен как произведение n разностей:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\mu)(x-\nu)$$

буквы x следовательно со всеми корнями, т. е. имеем тождество:

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px + q = a(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\mu)(x-\nu),$$

справедливое для всякого значения буквы x.

Если среди всех n корней

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$$

данного уравнения n-й степени

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0 \qquad (1)$$

имеются корни, равные между собой, то тогда мы говорим, что данное уравнение (1) имеет *кратные* корни. Смотря по тому, сколько именно раз встречается рассматриваемый корень среди всех корней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$ мы говорим, что рассматриваемый корень обладает такой-то кратностью: так, если рассматриваемый корень встречается среди $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$ лишь *два* раза, мы называем его в этом случае *двукратным*, если он встречается *три* раза, мы называем его *трехкратным* и т. д.

Корни, встречающиеся среди $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$ лишь по одному разу, мы называем *простыми* или *однократными корнями*.

Например, уравнение

$$x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$$

имеет корни:

$$3, 3, 3, -2.$$

Следовательно, 3 есть трехкратный корень, а -2 — простой. В *силу теоремы II* это уравнение может быть написано в виде

$$(x-3)^3(x+2) = 0.$$

На первый взгляд кажется, что для того, чтобы узнать, имеет ли *данное* уравнение кратные корни, единственное средство — это решить уравнение и затем посмотреть, имеются ли среди его корней равные или же таковых совсем нет. Но решение алгебраического уравнения есть вообще операция крайне тягостная, причем трудности этой операции быстро возрастают с повышением степени уравнения. Поэтому является вполне целесообразным изобретение такого приема, который еще до решения данного уравнения обнаружил бы существование или несуществование у предложенного *уравнения кратных корней*. Мы сейчас увидим, что дифференциальное исчисление дает такой прием, причем можно, не решая уравнения, не только убедиться в существовании кратных корней (когда они есть), но еще, кроме того, *можно и отобрать* все кратные корни, отделив их от простых корней, притом все это можно сделать, *не решая данного уравнения*.

В самом деле, пусть $f(x)$ есть многочлен, имеющий число a своим *кратным корнем*, и притом именно *кратности* m. Ясно, что в силу теоремы II многочлен $f(x)$ напишется в виде произведения, в котором будет содержаться в точности m множите-

лей, равных разности $x-\alpha$, остальные же множители будут существенно отличны от $x-\alpha$, т. е.

$$f(x)=(x-\alpha)^m\cdot\varphi(x), \tag{2}$$

где через $\varphi(x)$ мы обозначаем произведение всех остальных множителей, существенно отличных от разности $x-\alpha$.

Ясно, что $\varphi(x)$ есть многочлен, уже *не имеющий числа α своим корнем,* так как в противном случае многочлен $\varphi(x)$ содержал бы в своем составе (в виде множителя наряду с другими множителями) хотя бы один множитель, равный $x-\alpha$; но тогда это значило бы, что число α есть не m-кратный корень многочлена $f(x)$, а кратности более высокой. Итак,

$$\varphi(\alpha)\neq 0.$$

Дифференцируя (2), находим:

$$f'(x)=(x-\alpha)^m\varphi'(x)+m(x-\alpha)^{m-1}\varphi(x),$$

или

$$f'(x)=(x-\alpha)^{m-1}[m\varphi(x)+(x-\alpha)\varphi'(x)]. \tag{3}$$

Выражение в квадратных скобках в правой части равенства (3) есть многочлен. Легко видеть, что число α не будет корнем этого многочлена. Действительно, заменяя в этом многочлене переменное x на α, мы его обращаем в

$$m\varphi(\alpha)+(\alpha-\alpha)\varphi'(\alpha)=m\varphi(\alpha)\neq 0$$

— число, отличное от нуля, ибо

$$m\neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha)\neq 0.$$

Равенство (3) поэтому нас учит тому, что число α *есть в точности $(m-1)$-кратный корень производной $f(x)$. В частности, когда $m=1$, мы видим, что простой корень данного уравнения $f(x)=0$ ни в каком случае не может оказаться корнем производного уравнения $f'(x)=0$,* потому что для последнего необходимо, чтобы $m>1$.

Итак, если в многочлене $f(x)$ множитель $x-\alpha$ содержится в точности m раз, то в $f'(x)$ этот самый множитель встречается в точности $m-1$ раз.

Составим теперь общий *наибольший делитель многочленов*

$$f(x) \text{ и } f'(x).$$

Из элементов алгебры мы знаем, что составление общего наибольшего делителя двух данных многочленов есть действие, совершенно аналогичное отысканию общего наибольшего делителя двух данных натуральных чисел: и в том и в другом слу-

чае он отыскивается путем последовательного деления одного многочлена на другой, затем делителя на первый остаток, первого остатка на второй остаток и т. д. до тех пор, пока не получим остатка, равного нулю, т. е. до тех пор, пока деление не завершится нацело. Тогда последний остаток, не равный нулю, и будет *общим наибольшим делителем*.

Из сказанного ясно, что общий наибольший делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ будет содержать множитель $x-\alpha$ в точности $m-1$ раз, т. е. α есть его $(m-1)$-кратный корень.

Если $f(x)$ имеет еще некоторый другой кратный корень β кратности r, то в силу предшествовавшего это число β есть $(r-1)$-кратный корень общего наибольшего делителя.

Итак, общий наибольший делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ имеет своими корнями лишь кратные корни данного многочлена $f(x)$, причем каждый из этих кратных корней данного многочлена $f(x)$ является корнем общего наибольшего делителя кратности на единицу ниже; простые корни данного многочлена $f(x)$ совсем не являются корнями общего наибольшего делителя.

Можно, таким образом, высказать следующее правило для нахождения кратных корней уравнения $f(x)=0$.

Первый шаг. *Находим $f'(x)$.*

Второй шаг. *Находим общий наибольший делитель для $f(x)$ и $f'(x)$.*

Третий шаг. *Находим корни общего наибольшего делителя. Всякий из различных корней общего наибольшего делителя встречается в $f(x)$ одним разом больше, чем в общем наибольшем делителе.*

Если случится так, что общий наибольший делитель совсем не содержит x, то $f(x)$ не имеет кратных корней, и описанный выше процесс отделения кратных корней делу решения уравнения ничем не поможет, а только обнаружит, что данное уравнение $f(x)=0$ лишено кратных корней.

Пример. Решить уравнение

$$x^3-8x^2+13x-6=0.$$

Решение. Пусть

$$f(x)=x^3-8x^2+13x-6.$$

Первый шаг.

$$f'(x)=3x^2-16x+13.$$

Второй шаг. Заметим, что при нахождении общего наибольшего делителя для удобства вычислений мы можем делимое, делитель и промежуточные остатки при последовательном делении умножить на постоянный множитель: то обстоятельство, что *общий наибольший делитель* (О. Н. Д.) функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ будет отличаться от О. Н. Д., который находится обычным образом, т. е. без указанных упрощений, на постоянный множитель, не окажет влияния на разыскание корней, так как уравнение, получающееся путем приравнивания нулю О. Н. Д., все равно можно сокращать или умно-

жать на постоянный множитель. Поэтому при делении $f(x)$ на $f'(x)$, чтобы не иметь первый член дробным, умножим предварительно $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-24x^2+39x-18 & 3x^2-16x+13 \\ \underline{3x^3-16x^2+13x} & \overline{x+8} \\ -8x^2+26x-18 & \\ \hline -24x^2+78x+54 & \\ \underline{-24x^2+128x+104} & \\ 50x-50 & \\ \hline -3x^2-16x+13 & x-1 \\ \underline{-3x^2+3x} & \overline{3x-13} \\ -13x+13 & \\ \underline{-13x+13} & \\ 0 & \end{array}$$

(умножим остаток на -3)

(остаток умножили на $\frac{1}{50}$).

О. Н. Д. $=x-1$.

Третий шаг.

$$x-1=0, \text{ откуда } x=1.$$

Так как 1 является простым корнем уравнения $x-1=0$, то он будет двукратным корнем данного первоначально уравнения, т. е. левая его (уравнения) часть содержит множителем $(x-1)^2$. Разделив $x^3-8x^2+12x-6$ на $(x-1)^2$, находим второй множитель $x-6$, который дает корень 6. Следовательно, корни нашего уравнения суть 1, 1, 6. Начертив график функции (рис. 132), мы видим, что при $x=1$, т. е. при x, равном двукратному корню, кривая касается оси OX, но не пересекает ее [1].

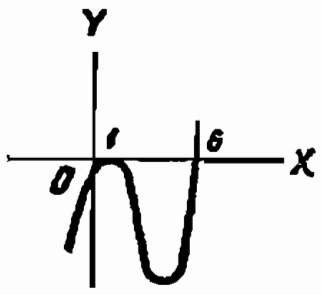


Рис. 132

УПРАЖНЕНИЯ

По способу § 111 решить следующие 10 уравнений.

1. $x^3-7x^2+16x-12=0$. Отв. 2, 2, 3.
2. $x^4-6x^2-8x-3=0$. $-1, -1, -1, 3$.
3. $x^4-7x^3+9x^2+27x-54=0$. $3, 3, 3, -2$.
4. $x^4-5x^3-9x^2+81x-108=0$. $3, 3, 3, -4$.
5. $x^4+6x^3+x^2-24x+16=0$. $1, 1, -4, -4$.
6. $x^4-9x^3+23x^2-3x-36=0$. $3, 3, -1, 4$.
7. $x^4-6x^3+10x^2-8=0$. $2, 2, 1\pm\sqrt{3}$.
8. $x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$. $-1, -1, -1, 2, 2$.
9. $x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$. $2, 2, 2, -3, -3$.
10. $x^5-3x^4-5x^3+13x^2+24x+10=0$. $-1, -1, -1, 3\pm\sqrt{-1}$.

Показать, что следующие четыре уравнения не имеют кратных (равных) корней.

11. $x^3+9x^2+2x-48=0$.

---

[1] Так как первая производная для каждого кратного корня обращается в нуль, *то ось X касательна к кривой во всех точках, соответствующих кратным корням*. Если кратный корень встречается четное число раз, то в такой точке кривая функции *не пересекает* оси X (рис. 132); если же он встречается нечетное число раз, то кривая *пересекает* ось OX, в то же самое время касаясь ее.

12. $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.
13. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 14x + 12 = 0$.
14. $x^n - a^n = 0$.
15. Показать, что условие, чтобы уравнение $x^3 + 3qx + r = 0$ имело двукратный корень, есть $4q^3 + r^2 = 0$.
16. Показать, что условие, чтобы уравнение $x^3 + 3px^2 + r = 0$ имело двукратный корень, есть $r(4p^3 + r^2) = 0$.

§ 112. Действительные корни уравнений. Графические методы. В прикладной математике часто только действительные (т. е. вещественные) корни принимаются во внимание. Методы приближенного определения этих корней, излагаемые здесь, таковы:

Отделение и число корней.

Первый метод. Если график функции $f(x)$, т. е. геометрическое место точек $M(x, y)$, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$y = f(x), \tag{1}$$

построен (следуя правилу § 88), то тогда абсциссы точек *пересечения его с осью OX являются корнями уравнения* $f(x) = 0$.

Следовательно, из рисунка, когда он хорошо выполнен, мы сразу видим, каково число корней и каковы их приближенные величины.

Пример. Отделить все действительные корни уравнения $x^3 - 9x^2 + 24x - 7 = 0$.

Решение. График левой части уравнения был построен в § 88, задаче 1. Он пересекает ось OX между 0 и 1. Поэтому между этими числами заведомо имеется один действительный корень. Других действительных корней нет.

Таблица дает величины $f(0)$ и $f(1)$, обнаруживая перемену знака в концах отрезка [0, 1].

x	$f(x)$
0	−7
1	9

Иногда таблица численных значений x и y, употребленная при вычерчивании графика, может в точности дать нам корень; это будет, когда $y = 0$ прямо при некотором численном значении аргумента x. Если этого нет, часто случается, что величины переменного y имеют противоположные знаки для двух последовательных величин $x = a$ и $x = b$. В этом случае точки $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$ лежат по разные стороны оси OX, и график функции $y = f(x)$, соединяющий две эти точки, должен пересечь эту ось.

А это означает, что имеется некоторый корень x_0, лежащий между a и b.

x	y
a	$f(a)$
x_0	$f(x_0)=0$
b	$f(b)$

Точная формулировка употребляемого здесь принципа такова: *если непрерывная функция $f(x)$ изменяет знак на отрезке $[a, b]$, а ее производная знака на нем не меняет, тогда уравнение $f(x)=0$ имеет один и только один корень на отрезке $[a, b]$.*

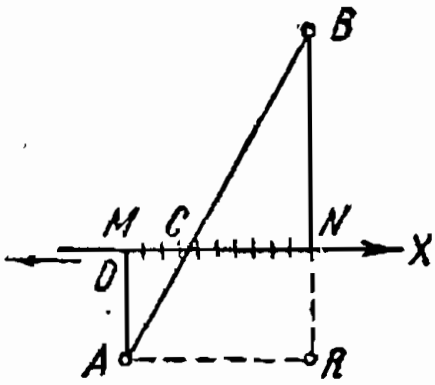


Рис. 133

Отделение корня посредством испытания как раз зависит от этого принципа. Если a и b не пригодны в качестве приближенных величин корня, тогда дальнейшее приближение находится *интерполяцией. Таковая состоит в определении пересечения оси OX хордой AB.* Это означает, что часть графика, соединяющая A и B, заменяется в качестве приближения хордой.

Пример (продолжение). Корень, лежащий между 0 и 1, можно заменить более точной выкладкой, как находящийся между 0,3 и 0,4. Это видно из таблицы. Пусть $0{,}3+z$ будет этот корень.

x	$f(x)=y$
0,4	1,224
$0{,}3+z$ (корень)	0
0,3	— 0,583
Разность 0,1	1,807

Тогда интерполяция (т. е., собственно говоря, пропорция) дает нам:

$$\frac{z}{0{,}1}=\frac{0{,}583}{1{,}807},\quad z\approx 0{,}032.$$

Отсюда $x\approx 0{,}332$ является вторым приближением. Это есть не что иное, как пересечение оси OX хордой, соединяющей точки $A(0{,}3 - 0{,}583)$ и $B(0{,}4,\ 1{,}224)$, лежащие на графике функции $x^3-9x^2+24x-7$. На рисунке 133 $MA=-0{,}583$, $NB=1{,}224$. Шкала начерчена. Абсциссы точек M и N суть 0,3 и 0,4 соответственно. Таким образом, $MC=z$, и соответственные стороны подобных треугольников MCA и ABR дают указанную пропорцию.

Для *алгебраического* уравнения, примером которого служит только что рассмотренное уравнение, наилучшими являются ме-

тоды, гарантирующие желаемую точность при определении численного значения корня; эти методы разъясняются в курсах алгебры.

§ 113. Второй метод отделения действительных корней. Способ, изложенный в § 88, хорошо приспособлен для скорого построения графика функции $f(x)$. Этот график отделяет корни и определяет их число. Однако во многих случаях тот же самый результат достигается быстрее вычерчиванием известных пересекающих кривых. Следующий пример разъяснит сущность дела.

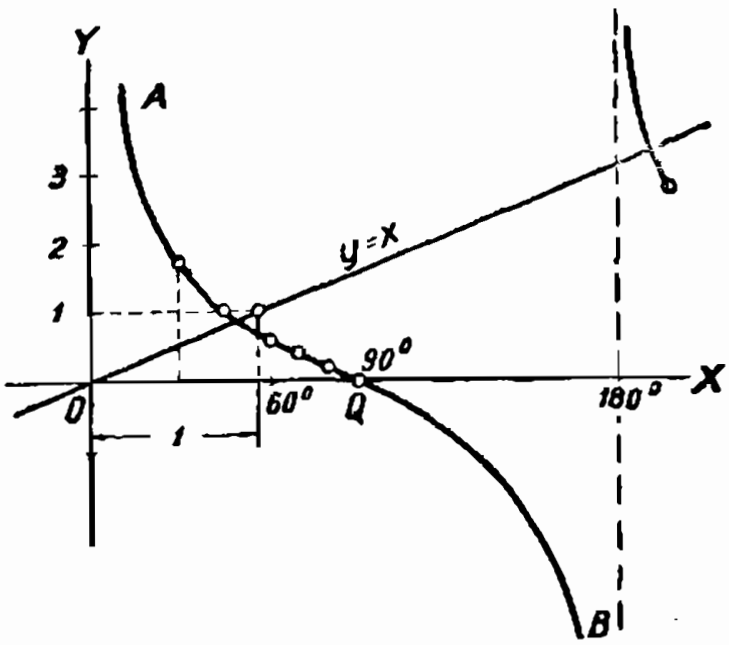


Рис. 134

Пример. Определить число действительных корней x (в радианах) уравнения

$$\operatorname{ctg} x - x = 0 \qquad (1)$$

и отделить наименьший корень.

Решение. Переписываем уравнение (1) в виде

$$\operatorname{ctg} x = x. \qquad (2)$$

Если мы вычертим кривые (рис. 134)

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \text{и} \quad y = x \qquad (3)$$

при тех же самых осях, то *абсциссы x точек пересечения и будут корнями уравнения* (1). Ибо ясно, что исключив y из (3), получаем уравнение (1), дающее нам абсциссы точек пересечения.

Чертя фигуру, нужно старательно нанести на оси OX обе шкалы (градусы и радианы).

Число решений. Кривая $y = \operatorname{ctg} x$ состоит из бесконечного числа ветвей, тождественных ветви AQB (рис. 134). Прямая $y = x$ пересекает каждую ветвь. Поэтому уравнение (1) имеет бесконечное число корней.

x (градусы)	x (радианы)	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x - x$
50	0,873	0,839	− 0,034
	корень		
49	0,855	0,869	+ 0,014
Разность	0,018		− 0,048

Пользуясь таблицами натуральных котангенсов и радианов, эквивалентных градусам, мы можем локализировать наименьший корень более тесно, чем это показано в таблице. Интерполяция нам дает $x \approx 0{,}860$.

Второй метод можно описать следующим образом.
Перенести некоторые избранные члены уравнения

$$f(x)=0$$

в правую часть так, что уравнение напишется в виде:

$$f_1(x)=f_2(x). \tag{4}$$

Начертить кривые:

$$y=f_1(x), \quad y=f_2(x) \tag{5}$$

в тех же самых осях, выбрав надлежащие единицы масштаба (не обязательно одинаковые на обеих осях).

Число точек пересечения этих кривых равно числу действительных корней уравнения $f(x)=0$, а абсциссы этих точек и суть эти корни.

Избранные члены, образующие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в уравнении (4), часто можно выбрать так, чтобы одни из кривых (5), или даже обе эти кривые, оказались хорошо известными классическими кривыми.

Например, чтобы отделить действительные корни уравнения $x^3+4x-5=0$, мы пишем $x^3=5-4x$. Теперь линии (5) суть линии: $y=x^3$ и $y=5-4x$. Это *кубическая парабола* и *прямая*.

Второй пример. Рассмотрим уравнение $2\sin 2x+1-x^2=0$.

Его пишем в виде $\sin 2x=\frac{1}{2}(x^2-1)$. Обе кривые (5) здесь суть $y=\sin 2x$ и $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. Это *синусоида* и *парабола*.

§ 114. Метод Ньютона. Когда корень отделен, метод Ньютона дает возможность вычислять его с замечательной степенью точности.

Рисунок 135а показывает, что две точки $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$ графика $f(x)$ лежат по разные стороны оси OX. Пусть AT касательная в точке A (рис. 135а). Пересечение a' этой прямой с осью OX очевидно является высоким приближением пересечения графика и, значит, соответствующего корня уравнения $f(x)=0$. Метод Ньютона и определяет это пересечение a' касательной AT с осью OX.

Пусть координаты точки A суть $x_1=a$ и $y_1=f(a)$. Угловой коэффициент касательной AT есть $m_1=f'(a)$. Поэтому уравнение касательной AT есть

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a).$$

Делая $y=0$ и решая относительно x, мы получаем данную Ньютоном формулу приближения:

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{6}$$

Найдя отсюда a', мы подставляем a' в правую часть на место буквы a. Получаем:

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}.$$

Это есть *второе приближение*. Ясно, что процесс может продолжаться безгранично далеко и что он дает нам последовательность величин

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots$$

являющихся приближениями истинного корня.

Рисунок 135a показывает, что касательную надо выбирать в точке A, но не в точке B, ибо только в этом случае касатель-

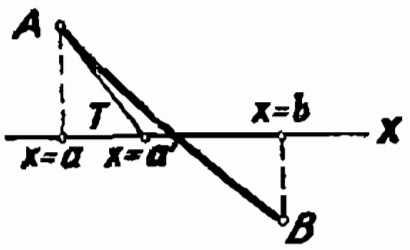


Рис. 135a

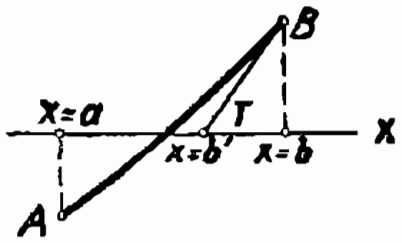


Рис. 135b

ная *наверное* пересечет ось OX *ближе к корню, а не дальше от него*. Это последнее могло бы случиться, если бы мы пользовались на рисунке 135a касательной в точке B.

Наоборот, на рисунке 135b надо пользоваться не касательной в A, а касательной в B, в целях той же самой гарантии. В этом случае, заменяя в формуле Ньютона (6) букву a буквой b, мы получаем b', из b' получаем b'' и т. д. Это дает приближения

$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ \ldots$$

к истинному корню.

Пример. Найти наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg} x = x$$

методом Ньютона.

Решение. Здесь $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = -2 - \operatorname{ctg}^2 x.$$

Мы берем $a = 0{,}855$, как это показано в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе. Тогда, на основании таблицы в этом параграфе, имеем $f(a) = 0{,}014$. Далее имеем $f'(a) = -2 - (0{,}869)^2 = -2{,}76$.

Поэтому, по формуле Ньютона (6), получаем:

$$a' = 0{,}855 + \frac{0{,}014}{2{,}76} = 0{,}860.$$

Интерполяцией мы находим $x \approx 0{,}860$.

Из рисунков 135a и 135b мы видим, что график пересекает ось OX между касательной AT и *хордой* AB в первом случае и между касательной BT и *хордой* AB во втором случае. *Поэтому истинный корень лежит между величиной, находимой методом Ньютона, и величиной, находимой интерполяцией.*

Из этого замечания сразу следует, что найденная нами величина корня $x = 0{,}860$ является верной до четвертого десятичного знака.

Однако следует указать, что для применения метода Ньютона необходимо, чтобы график не изменял на дуге AB выпуклость на вогнутость (оцениваемые по направлению вверх), т. е. чтобы *на дуге AB не было точек перегиба,* т. е. *корней уравнения* $f''(x) = 0$ *на отрезке* $[a, b]$.

ЗАДАЧИ

1. Определить графически число действительных корней и их приблизительное расположение для каждого из следующих уравнений. Вычислить каждый корень с двумя десятичными знаками.

(a) $x^3 - 4x - 8 = 0$.	**Отв.** 2,65.
(b) $x^3 - 9x - 5 = 0$.	$-2{,}67$; $-0{,}58$; 3,25.
(c) $x^3 + 3x - 5 = 0$.	1,15.
(d) $x^3 - 6x - 12 = 0$.	3,13.
(e) $x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$.	$-0{,}67$; 1,42; 5,25.
(f) $x^3 + 9x^2 + 24x + 17 = 0$.	$-4{,}53$; $-3{,}35$; $-1{,}12$.
(g) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$.	
(h) $x^3 + 6x^2 + 7x - 1 = 0$.	
(i) $x^4 + 10x - 100 = 0$.	$-3{,}40$; 2,90.
(j) $x^4 - 4x^3 - 4x + 12 = 0$.	1,35; 4,06.
(k) $x^4 + x^2 + 3x - 4 = 0$.	$-1{,}58$; 0,88.
(l) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$.	

2. Определить графически число действительных корней для каждого из следующих уравнений. Вычислить наименьший по абсолютной величине корень (отличный от нуля), пользуясь и интерполяцией и методом Ньютона.

(a) $\cos x - x = 0$.	**Отв.** Один корень; $x \approx 0{,}739$.
(b) $\sin 2x - x = 0$.	Три корня; $x \approx 0{,}947$.
(c) $\operatorname{tg} x - x = 0$.	Бесконечность корней.
(d) $2 \sin x - x = 0$.	Три корня; $x \approx 1{,}895$.
(e) $\sin x - x^2 = 0$.	Два корня.
(f) $\cos x - x^2 = 0$.	Два корня.
(g) $\operatorname{tg} x - x^2 = 0$.	Бесконечность корней.
(h) $\operatorname{ctg} x - x^2 = 0$.	Бесконечность корней.
(i) $3 \cos x - x = 0$.	
(j) $5 \sin x - x = 0$.	
(k) $3 \sin x - 2 \cos 4x = 0$.	
(l) $e^x - \operatorname{tg} x = 0$.	Бесконечность корней; $x \approx 1{,}30$.
(m) $\sin x - \log_{10} x = 0$.	
(n) $\cos x - \log_{10} x = 0$.	

(o) $e^x + x - 2 = 0$. **Отв.** Один корень; $x \approx 0{,}444$.

(p) $e^x - \sin x = 0$. Бесконечность корней; $x \approx -3{,}183$.

(q) $\operatorname{tg} x + x - 1 = 0$. Бесконечность корней; $x \approx 0{,}480$.

3. Показать, что уравнение $2 \sin x - (x-1)^2 = 0$ имеет два действительные корня, и вычислить каждый из них с двумя десятичными знаками.

Отв. 0,27 и 2,25.

ГЛАВА XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 115. Введение. До сих пор мы рассматривали производные, употребляя для обозначения производной от $y=f(x)$ символ

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Особенно же мы всюду старались дать понять учащемуся, что выражение $\frac{dy}{dx}$ рассматривается не как дробь, в обычном смысле, с числителем dy и знаменателем dx, а как особый символ для обозначения *предела* частного $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ по мере приближения Δx к нулю.

Однако встречаются задачи, в которых весьма выгодно рассматривать dx и dy как количества *отдельные*, и особенно это полезно в приложениях интегрального исчисления. Объясним, как этого достичь.

§ 116. Определения. Если $f'(x)$ есть производная от $f(x)$ для некоторого частного значения x независимого переменного, а Δx — *произвольно выбранное* приращение переменного x, то *дифференциал* от $f(x)$, обозначаемый символом $df(x)$, определяется равенством:

$$df(x)=f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (1)$$

Итак,

дифференциал функции, в силу самого его определения, есть произведение производной $f'(x)$ от этой функции на произвольное число Δx, которое рассматривается как приращение независимого переменного x.

Учащийся должен отдать себе ясный отчет в том, что написанное приращение Δx независимого переменного x, входящее как множитель в дифференциал, не имеет ничего общего с тем приращением Δx независимого переменного, которое ранее употреблялось нами при вычислении производной $f'(x)$.

В самом деле, хотя при вычислении производной $f'(x)$ как предела отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

нам и приходилось говорить о приращении Δx независимого переменного, тем не менее совершенно ясно, что это приращение Δx употреблялось лишь как средство определить или вычислить производную, т. е. имело лишь преходящее значение: действительно, вся роль этого приращения Δx сводилась лишь к тому, что оно должно было стремиться к нулю, и раз рассматриваемая нами производная уже вычислена или определена, то это значит, что процесс стремления Δx к нулю уже завершился, и, следовательно, это приращение Δx уже перестало возбуждать интерес, существуя скорее в прошлом, чем в настоящем.

Что же касается приращения Δx, которое фигурирует как множитель в выражении дифференциала, то это есть приращение x, которое мы снова даем уже *после того*, как вычислен первый множитель дифференциала, т. е. $f'(x)$. Поэтому это приращение Δx есть величина произвольная, ничем не обусловленная, могущая быть и большой и малой — смотря по желанию. Таким образом, дифференциал функции есть выражение, содержащее два независимые переменные: x и Δx. Оба эти переменные суть независимые друг от друга, и Δx вовсе не обязано стремиться к нулю: как независимое переменное, оно находится всецело в нашем распоряжении.

Если теперь положить $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$ и (1) приводится к равенству:

$$dx = \Delta x,$$

откуда видно, что если x есть независимое переменное, то *дифференциал* $x\,(=dx)$ тождествен с Δx. Отсюда, если $y = f(x)$, то дифференциал можно вообще написать в форме:

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (2)$$

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал независимого переменного[1].

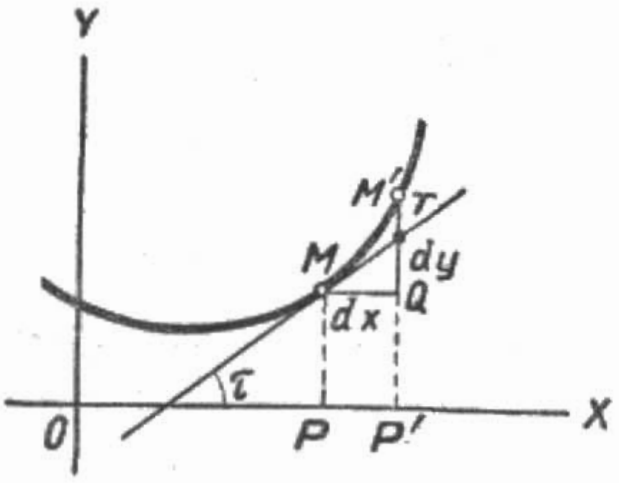


Рис. 136

§ 117. Геометрическое изображение дифференциала. Пусть кривая, представленная на рисунке 136, изображает функцию $y = f(x)$. Пусть точка M этой кривой имеет своими координатами x и y. Пусть точка M', лежащая также на этой кривой, имеет своей абсциссой

$$x + dx.$$

[1] Принимая во внимание положение, которое здесь занимает $f'(x)$, производную называют иногда *дифференциальным коэффициентом*.

Учащийся должен обратить внимание на важный факт, что так как dx можно приписать какое угодно произвольное значение, то dx не зависит от x. Следовательно, dy есть *функция двух независимых переменных* x и dx.

Ясно, что отрезок MQ, параллельный оси OX, равен dx. Ясно также, что отрезок QM' равен приращению Δy функции, ибо

$$QM' = f(x+dx) - f(x) = \Delta y.$$

Если точка T обозначает пересечение касательной, проведенной к кривой в M, с ординатой точки M', то из прямоугольного треугольника MQT находим:

$$QT = MQ \cdot \operatorname{tg} QMT.$$

А так как тангенс наклона касательной есть производная, то

$$QT = f'(x) \cdot dx = dy.$$

Поэтому *отрезок QT есть дифференциал dy функции $y = f(x)$.*

§ 118. Приращение функции и дифференциал функции. Непосредственно из рисунка учащийся видит, что приращение функции $\Delta y = QM'$ и дифференциал функции $dy = QT$ отнюдь не равны друг другу. Их разность TM' есть отрезок между касательной и самой кривой.

Рассмотрим этот вопрос с аналитической точки зрения. Пусть независимое переменное x получает приращение Δx. Вычислим соответствующее приращение функции, а также ее дифференциал.

Для приращения Δy мы находим равенство:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Если теперь мы станем приращение Δx независимого переменного приближать к нулю, то, как известно,

$$\lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

и, значит, разность

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

есть величина *бесконечно малая*; обозначим ее через ε:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon.$$

Из этого равенства мы заключаем, что

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

или, приняв во внимание, что левая часть этого равенства есть *приращение* функции Δy, а первое слагаемое правой части есть дифференциал dy этой функции, мы заключаем, что

$$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x.$$

Это основное равенство (3) говорит нам о том, что *приращение Δy функции, вызванное получением независимым переменным бесконечно малого приращения Δx, и соответствующий диффе-*

ренциал dy функции отличаются друг от друга на бесконечно малую часть бесконечно малого Δx.

В самом деле, если рассматривать бесконечно малое Δx как единицу, то произведение $\varepsilon\Delta x$ является бесконечно малой долей этой единицы.

§ 119. О сравнении бесконечно малых друг с другом. Когда имеют несколько положительных бесконечно малых $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, *одновременно* стремящихся к нулю, очень полезно выбрать среди них одно за *основное бесконечно малое,* как бы за *единицу масштаба,* и сравнивать с ним все другие.

С этой целью, выбрав за основное, например, бесконечно малое α, составляют отношения $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \ldots, \frac{\lambda}{\alpha}$ и смотрят, как они изменяются с течением времени.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к нулю, бесконечно малое β называется бесконечно малым высшего порядка (т. е. высшей малости), чем α. В этом случае бесконечно малое β является исчезающе малой долей бесконечно малого α, ибо когда отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ станет, например, меньше $\frac{1}{1\,000\,000}$, тогда β явится меньше одной миллионной доли бесконечно малого α. Можно поэтому сказать, что β *быстрее* стремится к нулю, чем α, или что β является *более мелким, чем* α. Наоборот, про бесконечно малое α можно сказать, что оно *медленнее* стремится к нулю, чем β, или что оно *крупнее по своей величине,* чем β. Поэтому α называется *бесконечно малым низшего порядка (т. е. низшей малости) сравнительно с* β.

Пример. Доказать, что бесконечно малое $\beta = 3\alpha^2 - \alpha^3$ есть высшего порядка, чем α.

Решение. Имеем $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3\alpha^2 - \alpha^3}{\alpha} = 3\alpha - \alpha^2$. Значит, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, так как $\lim \alpha = 0$.

Если же отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к пределу, отличному от нуля (и от бесконечности), *тогда α и β называются бесконечно малыми одинакового порядка.* В этом случае можно сказать, что α и β стремятся к нулю *с одинаковой скоростью,* или что у них одинаковая *степень малости.* В частном случае, когда этот предел оказывается равным единице, тогда α и β называются *равносильными бесконечно малыми;* в этом случае пишут $\alpha \sim \beta$.

Равносильные бесконечно малые очень важны, ибо для них имеется предложение:

при отыскании предела отношения $\frac{\gamma}{\delta}$ двух каких-нибудь бесконечно малых γ и δ, их можно заменить им равносильными.

Это означает, что если $\gamma^* \sim \gamma$ и $\delta^* \sim \delta$, то $\lim \frac{\gamma}{\delta} = \lim \frac{\gamma^*}{\delta^*}$. Это предложение вполне очевидно, ибо мы имеем тождество, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\gamma^*} \cdot \frac{\gamma^*}{\delta^*} \cdot \frac{\delta^*}{\delta}$, откуда и следует, что

$$\lim \frac{\gamma}{\delta} = \lim \frac{\gamma}{\gamma^*} \cdot \lim \frac{\gamma^*}{\delta^*} \cdot \lim \frac{\delta^*}{\delta} = 1 \cdot \lim \frac{\gamma^*}{\delta^*} \cdot 1 = \lim \frac{\gamma^*}{\delta^*}.$$

Следовательно, оказывается важным уметь отыскивать для данного бесконечно малого α ему равносильное α^*. Для этой цели служат два предложения.

Лемма 1. *Два бесконечно малые α и β одинакового порядка равносильны одно другому тогда и только тогда, когда их разность $\beta - \alpha$ есть бесконечно малое высшего порядка, чем они сами.*

В самом деле, обозначая через γ разность $\beta - \alpha$, мы имеем $\beta = \alpha + \gamma$. Отсюда $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma}{\alpha}$. Поэтому мы имеем $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ тогда и только тогда, когда имеем $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, т. е. когда γ есть бесконечно малое высшего порядка, чем α.

Лемма 2. *Сумма $\beta + \gamma + \ldots + \lambda$ неизменяющегося числа бесконечно малых $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ высшего порядка, чем α, есть бесконечно малое опять более высокого порядка, чем α.*

В самом деле, раз мы имеем $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \ldots, \lim \frac{\lambda}{\alpha} = 0$, то должны иметь и

$$\lim \frac{\beta + \gamma + \ldots + \lambda}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} + \lim \frac{\gamma}{\alpha} + \ldots + \lim \frac{\lambda}{\alpha} = 0.$$

Из этих предложений вытекает следующее:

Практическое правило *(упрощения бесконечно малых): если имеется сумма $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$ ограниченного числа бесконечно малых и если среди членов этой суммы имеется лишь один член наиболее низкого порядка, то можно зачеркнуть все остальные члены, так как вся сумма равносильна этому члену.*

Чтобы оправдать это правило, возьмем сумму

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \lambda$$

ограниченного числа каких-нибудь бесконечно малых

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$$

и допустим, что среди них только одно имеет самый низкий порядок; пусть это бесконечно малое наинизшего порядка будет α. Тогда бесконечно малые $\beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$ будут более высокого порядка, чем α. Значит, по предыдущей лемме, их сумма

$$\beta+\gamma+\delta+\ldots+\lambda$$

будет также бесконечно малое более высокого порядка, чем α.

Написав теперь всю данную нам сумму σ бесконечно малых в виде:

$$\sigma=\alpha+(\beta+\gamma+\delta+\ldots+\lambda),$$

мы видим, что сумма в скобках представляет собой бесконечно малое высшего порядка, чем первое слагаемое α. Значит, согласно изложенному выше, вся сумма σ равносильна α:

$$\sigma\sim\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Правило это формулируют иногда не совсем верно, говоря, что *при отыскании равносильных бесконечно малых можно пренебречь бесконечно малыми высших порядков*. Дело в следующем: фраза эта совершенно верна, *если член наинизшего порядка имеется в сумме только один*; мы доказали выше законность именно такого пренебрежения. Но если членов наинизшего порядка будет несколько, то они могут взаимно уничтожиться, и тогда правило пренебрежения свелось бы к тому, что и вообще все члены можно вычеркнуть.

Точная оценка *различных порядков* бесконечно малых достигается благодаря следующей *шкале бесконечно малых*:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^n,\ \ldots,$$

где α есть основное бесконечно малое, принимаемое нами за бесконечно малое *первого порядка*. Чем дальше мы движемся по этой шкале, тем встречаем бесконечно малые все более и более *высших порядков*, ибо, например, бесконечно малое α^{17} есть высшего порядка, чем, например, α^9, потому что имеем

$$\lim\frac{\alpha^{17}}{\alpha^9}=\lim\alpha^8=0.$$

Это обстоятельство позволяет нам назвать α^2 бесконечно малым *второго* порядка, α^3 — *третьего* порядка и, вообще, α^n — *бесконечно малым n-го порядка*.

Чтобы измерить точный порядок какого-нибудь бесконечно малого β по отношению к основному бесконечно малому α, нужно постараться определить такое положительное число n, чтобы оба бесконечно малые

$$\beta \text{ и } \alpha^n$$

оказались бы одинакового порядка. Это означает, что предел

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n}$$

должен существовать и быть отличным от нуля (и от бесконечности). Если нам удалось отыскать такое n, тогда мы, по определению, называем β бесконечно малым n-го порядка.

Это определение, притом, имеет силу и для всяких положительных чисел n, не обязательно именно целых (т. е. относится ко всяким положительным n, *дробным* или, даже, *иррациональным*).

Отметим, наконец, что если при отыскании порядка бесконечно малого β мы нашли, что этот порядок равен n, $n>0$, ввиду того, что получили:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = C,$$

где C есть число, отличное от нуля и от бесконечности, то *бесконечно малое* β *равносильно бесконечно малому* $C\alpha^n$. Действительно, составляя отношение $\frac{\beta}{C\alpha^n}$, видим, что оно имеет своим пределом единицу:

$$\lim \frac{\beta}{C\alpha^n} = \frac{1}{C} \lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \frac{C}{C} = 1.$$

Пример 1. Найти порядок бесконечно малого

$$\beta = 4\alpha^3 + 7\alpha^2 - 5\alpha^6.$$

Решение. Так как чем выше порядок бесконечно малого, тем оно мельче, то среди членов, составляющих β, следует остановить внимание на самом крупном бесконечно малом, т. е. на члене $7\alpha^2$. Поэтому естественно попробовать, не будет ли β вторичного порядка.

Делаем вычисление:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^2} = \lim \left(\frac{4\alpha^3 + 7\alpha^2 - 5\alpha^6}{\alpha^2} \right) = \lim (4\alpha + 7 - 5\alpha^6) =$$
$$= \lim 4\alpha + 7 + \lim (-5\alpha^6) = 0 + 7 + 0 = 7.$$

Значит, β в самом деле — бесконечно малое *второго* порядка.

Пример 2. Из сложного бесконечно малого

$$3 \sin \alpha - 5\alpha^3$$

получить более простое, равносильное ему.

Решение. Так как $\sin \alpha$ есть бесконечно малое *первого* порядка, а член $5\alpha^3$ *третьего* порядка, то мы просто зачеркиваем его и таким образом получаем более простое бесконечно малое $3 \sin \alpha$, равносильное данному первоначально

$$3 \sin \alpha - 5\alpha^3,$$

т. е.

$$3 \sin \alpha - 5\alpha^3 \sim 3 \sin \alpha \sim 3\alpha, \quad \text{ибо} \quad \sin \alpha \sim \alpha.$$

Пример 3. Упростить бесконечно малое

$$\beta = (1 - \cos\alpha) + 16\alpha^3 - 8\alpha^5 + 3\alpha - 42\alpha^4.$$

Решение. Так как

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

то $1 - \cos\alpha$ есть величина бесконечно малая и притом *второго* порядка. В самом деле,

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sim \frac{\alpha}{2},$$

и, значит, $\sin\frac{\alpha}{2}$ есть бесконечно малое первого порядка, а его квадрат, $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, имеет второй порядок. Так как среди всех членов, образующих бесконечно малое β, член 3α наинизшего порядка, и притом только один, то, зачеркивая все остальные члены, мы получаем $\beta \sim 3\alpha$.

Пример 4. Упростить бесконечно малое

$$\beta = (1 - \cos\alpha)^2 + 3\alpha + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 - 3\alpha + 6\alpha^5.$$

Решение. Член $(1 - \cos\alpha)^2$ четвертого порядка, ибо $1 - \cos\alpha$ второго порядка. Так как наинизших членов 3α и -3α два и они взаимно уничтожаются, то после приведения получим:

$$\beta = (1 - \cos\alpha)^2 + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 + 6\alpha^5.$$

Теперь наинизший член $16\alpha^3$ только один. Отсюда

$$\beta \sim 16\alpha^3.$$

Пример 5. Найти предел отношения двух бесконечно малых

$$\lim\frac{8\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\sin\alpha - 6\alpha^7 + 18(1 - \cos\alpha)}{4\alpha^7 + (1 - \cos\alpha)^2 + 2\alpha - 17\alpha^5 + 6\alpha^3}.$$

Решение. Заменим числитель и знаменатель этого отношения равносильными бесконечно малыми, для чего, как мы знаем, достаточно просто зачеркнуть члены высших порядков (если член низшего порядка один в числителе и соответственно один в знаменателе).

Так как $1 - \cos\alpha$ есть бесконечно малое *второго* порядка, то наинизший член в числителе только один: $3\sin\alpha$, и наинизший член в знаменателе тоже только один: 2α.

Значит, в силу указанного выше практического правила, искомый предел равен просто

$$\lim\frac{3\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1. *Показать, что* $\cos x$ *при* $x \to \frac{\pi}{2}$ есть величина того же порядка малости, что и $\operatorname{ctg} x$.

2. Если порядок величины α ($\lim\alpha = 0$) принять за единицу, то какими числами выразятся порядки бесконечно малых

$$\sqrt[3]{\sin\alpha}, \quad 1 - \cos\alpha?$$ Отв. $\frac{1}{3}$; 2.

Решение.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(\sin \alpha)^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = 1;$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Бесконечно малые β и γ имеют относительно бесконечно малой α соответственно порядки 2 и 4. Определить порядки бесконечно малых

$$\beta \pm \gamma, \quad \beta\gamma, \quad \frac{\gamma}{\beta}.$$ Отв. 2, 6, 2.

4. Показать, что если дуга окружности данного радиуса R стремится к нулю, то хорда, стягивающая эту дугу, есть бесконечно малая того же порядка, что и рассматриваемая дуга, а стрела (отрезок радиуса, перпендикулярного к хорде, заключенный между хордой и дугой) — высшего порядка. Определить порядок малости стрелы относительно хорды.

Решение. Обозначим радианную меру угла AOB через α (см. рис. 67). Тогда дуга $\overset{\smile}{AB} = R\alpha$, а хорда $AB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$; откуда

$$\frac{AB}{\overset{\smile}{AB}} = \frac{2R \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{R\alpha}{2}} \to 1, \text{ когда } \alpha \to 0.$$

Далее,

$$CM = R - OC = R - R \cos \frac{\alpha}{2} = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{CM}{\overset{\smile}{AB}} = \frac{2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{R\alpha},$$

откуда видно, что стрела CM — бесконечно малая второго порядка малости относительно дуги $\overset{\smile}{AB}$, а следовательно, и относительно хорды AB.

5. Показать, что при $x \to 0$ бесконечно малые величины $2(\operatorname{tg} x - \sin x)$ и x^3 равносильны.

6. Показать, что при $x \to 0$ бесконечно малые величины $\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3}}$ и $\operatorname{tg} \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ равносильны.

Решение.

$\operatorname{tg} \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \sim \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$, ибо $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$. Далее,

$$\frac{\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} \to 1 \text{ при } x \to 0.$$

А так как две бесконечно малые, равносильные порознь третьей, равносильны между собой, то

$$\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3}} \sim \operatorname{tg} \sqrt[3]{x\sqrt{x}}.$$

7. Найти пределы при $x \to 0$ следующих выражений:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x};\quad \frac{\sin\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} 2x};\quad \frac{\arcsin x}{\sin 4x};\quad \frac{\operatorname{arc\,tg} 3x}{\arcsin 2x}.$$

Отв. $\frac{3}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{2}$.

Указание. Воспользоваться следующими соотношениями:

$$\sin x \sim x;\quad \operatorname{tg} x \sim x;\quad \arcsin x \sim x;\quad \operatorname{arc\,tg} x \sim x.$$

Доказать, что если $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$, то $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$.

Найти

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{x}\cdot\arcsin\frac{3}{x^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{x}}}{\sin\frac{1}{x}\cdot\operatorname{tg}\frac{5}{x\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{\sqrt{x}}}.$$ Отв. 2.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$. Отв. -2.

Решение. Покажем прежде всего, что

$$\ln(1+\alpha)\sim\alpha \quad \text{при} \quad \alpha\to 0:$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left[\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\ln e=1.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2+4x^3}{-x+2x^2-7x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-x}=-2.$$

9. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\sin\dfrac{x-7}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{14}\right)$. Отв. $-\frac{7}{\pi}$.

Решение. Положим

$$\frac{x-7}{2}=y.$$

Тогда будем иметь:

$$\lim_{x\to 7}\left(\sin\frac{x-7}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{14}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cdot\sin\left[\frac{\pi}{14}(2y+7)\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{14}(2y+7)\right]}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\sin\left[\frac{\pi}{14}(2y+7)\right]\right\}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi y}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\right]}=$$

$$=1\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{-\frac{\pi y}{7}}=-\frac{7}{\pi}.$$

§ 120. Приближенное вычисление приращения функции при помощи дифференциала. Мы доказали выше, что приращение Δy и дифференциал dy связаны друг с другом соотношением:

$$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x, \tag{3}$$

где ε есть величина *бесконечно малая*, когда Δx стремится к нулю.

Это основное равенство (3) говорит нам, что приращение Δy *функции и дифференциал* dy *функции отличаются друг от друга на бесконечно малое высшего порядка, чем* $\Delta x = dx$.

В общем случае производная $f'(x)$ *не равна нулю*, и, значит, дифференциал функции $dy = f'(x)\,\Delta x$ есть бесконечно малое первого порядка относительно приращения независимого переменного Δx. Но тогда $\varepsilon \cdot \Delta x$ есть бесконечно малое порядка выше первого, и, значит, бесконечно малое приращение Δy функции и дифференциал dy этой функции суть *равносильные друг другу* бесконечно малые, т. е. $\Delta y \sim dy$, и, следовательно,

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

По этой причине *на практике часто очень сложное по своей природе приращение* Δy *функции заменяют более простым ее дифференциалом* dy.

Пример 1. Возьмем функцию $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 6$.

Если независимое переменное x получит приращение Δx, то приращение Δy функции будет:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 6 - x^3 - 5x^2 + 4x - 6.$$

Приведение подобных членов дает:

$$\Delta y = (3x^2 + 10x - 4) \cdot \Delta x + (3x + 5) \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Но, пренебрегая членами высших порядков, мы получим

$$(3x^2 + 10x - 4) \cdot \Delta x,$$

а это и есть дифференциал dy нашей функции, как легко убедиться, вычислив

$$y' = 3x^2 + 10x - 4.$$

Дифференциал функции есть главная часть приращения функции, получающаяся зачеркиванием членов высшей малости.

Пример 2. В технике часто применяется приближенная формула

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

где b есть число малое сравнительно с a. Пояснить происхождение этой формулы.

Решение. Положим $f(x) = \sqrt{1 + x}$; имеем вообще

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \sim df(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

Значит,

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x)\approx f(x)+df(x)=f(x)+f'(x)\,\Delta x.$$

В частности, для $x=0$, находим

$$f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\cdot\Delta x.$$

Но имеем

$$\sqrt{a^2+b}=a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}}=af\left(\frac{b}{a^2}\right).$$

Полагая $\frac{b}{a^2}=\Delta x$, получаем:

$$\sqrt{a^2+b}=af(\Delta x)\approx a[f(0)+f'(0)\cdot\Delta x].$$

Так как $f(0)=1$ и $f'(0)=\frac{1}{2}$, то выводим окончательно:

$$\sqrt{a^2+b}\approx a\left(1+\frac{1}{2}\Delta x\right)=a\left(1+\frac{b}{2a^2}\right)=a+\frac{b}{2a}.$$

Пример 3. Найти приближенно объем сферического слоя, имеющего внешний диаметр 10 *см*, а толщину $\frac{1}{8}$ *см*.

Решение. Объем V шара диаметра x есть $V=\frac{1}{6}\pi x^3$. Ясно, что *точный* объем сферического слоя есть разность ΔV между объемами двух шаров с диаметрами 10 *см* и $9\frac{7}{8}$ *см* соответственно. В целях получения лишь приближенного значения ΔV мы ограничимся вычислением ΔV. Имеем:

$$dV=\frac{1}{2}\pi x^2\,dx,\ \text{ибо}\ \frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\pi x^2.$$

Подставляя $x=10$ и $dx=-\frac{1}{8}$, мы получаем $dV=19{,}63$ *см*^{3}, пренебрегая знаком, обозначающим только то, что V убывает при убывании x. Точная же величина есть $\Delta V=19{,}4$ *см*^{3}. Заметить, что приближение является очень хорошим, когда dx есть *относительно малое*, т. е. малое по отношению к x $(=10)$.

Пример 4. Вычислить $\operatorname{tg}46°$ приближенно, пользуясь дифференциалом; при этом дается, что $\operatorname{tg}45°=1$, $\sec 45°=\sqrt{2}$ и $1°=0{,}01745$ радиана.

Решение. Пусть $y=\operatorname{tg}x$. Имеем $dy=\sec^2 x\cdot dx$. Когда x переходит в $x+dx$, y переходит приблизительно в $y+dy$. Подставляя в выражение:

$$dy=\sec^2 x\cdot dx$$

численные значения $x=\frac{1}{4}\pi$ (соответственно 45°) и $dx=0{,}0175$, находим $dy=0{,}0350$. И так как $y=\operatorname{tg}45°=1$, то $y+dy=1{,}0350=\operatorname{tg}46°$ приблизительно. **Отв.** Четырехзначные таблицы дают: $\operatorname{tg}46°=1{,}0355$.

§ 121. Малые ошибки. Второе применение дифференциалов происходит тогда, когда устанавливают в вычислениях наличие малых ошибок.

Пример 1. Диаметр круга найден прямым измерением, равным 5,2 *см*, причем максимальная ошибка не достигает 0,05 *см*. Найти приблизительно максимальную ошибку в оценке площади, вычисляемой по формуле

$$A=\frac{1}{4}\pi x^2. \qquad (x \text{ — диаметр})$$

Решение. Ясно, что *точная* величина максимальной ошибки есть ΔA, когда x переходит от 5,2 *см* к 5,25 *см*. Приближенная же величина максимальной ошибки есть соответствующая величина дифференциала dA.

Отсюда

$$dA=\frac{1}{2}\pi x\,dx=\frac{1}{2}\pi\times 5{,}2\times 0{,}05=0{,}41\ см^2.$$

Относительная и процентная ошибки. Если du есть ошибка в оценке u, тогда отношения:

$$\frac{du}{u}=\textit{относительная ошибка},$$

$$100\cdot\frac{du}{u}=\textit{процентная ошибка}.$$

Относительная ошибка может быть найдена прямо логарифмическим дифференцированием.

Пример 2. Найти относительную и процентную ошибки в предыдущем примере.

Решение. Взяв натуральный логарифм от обеих частей равенства

$$A=\frac{1}{4}\pi x^2,$$

имеем:

$$\ln A=\ln\frac{\pi}{4}+2\ln x.$$

Дифференцируя, имеем:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}=\frac{2}{x} \quad \text{и} \quad \frac{dA}{A}=\frac{2dx}{x}.$$

Подставляя $x=5{,}2$, $dx=0{,}05$, мы находим:

относительная ошибка в оценке $A=0{,}0192$;

процентная ошибка в оценке $A=1\frac{92}{100}\%$.

Ошибки в вычислении здесь рассматриваются, как происходящие от малых ошибок в *данных*, на которых основано вычисление. Таковые же могут случиться от недостаточной точности измерения или от других причин.

§ 122. Формулы для нахождения дифференциалов функций. Так как дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал независимого переменного, то отсюда прямо следует, что формулы для нахождения дифференциалов будут те же, что и формулы, служащие для нахождения производных,

данные в § 57 и 90, если каждую из них умножить на dx. Таким образом имеем:

I $d(c)=0.$

II $d(x)=dx.$

III $d(u+v-w)=du+dv-dw.$

IV $d(cv)=cdv.$

V $d(uv)=udv+vdu.$

VI $d(v^n)=nv^{n-1}\,dv.$

VI* $d(x^n)=nx^{n-1}\,dx.$

VII $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$

VII* $d\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{du}{c}.$

X $d(\ln v)=\frac{dv}{v}.$

XI* $d(a^v)=a^v \ln a\,dv.$

XI* $d(e^v)=e^v\,dv.$

XII $d(u^v)=vu^{v-1}\,du+\ln u\cdot u^v\cdot dv.$

XIII $d(\sin v)=\cos v\cdot dv.$

XIV $d(\cos v)=-\sin v\cdot dv.$

XV $d(\operatorname{tg} v)=\sec^2 v\cdot dv$ и т. д.

XVII $d(\arcsin v)=\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$ и т. д.

Термин «дифференцирование», таким образом, включает в себя отыскание дифференциалов.

Однако при отыскивании дифференциалов проще всего находить производную обычным способом и затем получившийся результат умножить на dx.

Пример 1. Найти дифференциал от

$$y=\frac{x+3}{x^2+3}.$$

Решение.

$$dy=d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right)=\frac{(x^2+3)\,d(x+3)-(x+3)\,d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+3)\,dx-(x+3)\cdot 2xdx}{(x^2+3)^2}=\frac{(3-6x-x^2)\,dx}{(x^2+3)^2}.$$

Пример 2. Найти dy из

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Решение.

$$2b^2xdx-2a^2ydy=0,$$

откуда

$$dy=\frac{b^2x}{a^2y}\,dx.$$

Пример 3. Найти $d\rho$ из

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta.$$

Решение.

$$2\rho d\rho=-a^2\sin 2\theta\cdot 2d\theta,$$

откуда

$$d\rho=-\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho}\,d\theta.$$

Пример 4. Найти $d\arcsin(3t-4t^3)$.

Решение.

$$d\arcsin(3t-4t^3)=\frac{d(3t-4t^3)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}=\frac{3(1-4t^2)\,dt}{\sqrt{1-t^2(3-4t^2)^2}}.$$

§ 123. Дифференциал дуги в прямоугольных декартовых координатах. Пусть s длина дуги AM, измеренная от неподвижной

точки A на кривой. Обозначим приращение дуги s, т. е. дугу MM' через Δs. Нижеследующее доказательство основывается на утверждении, что, когда M' приближается к M,

$$\lim\left(\frac{\text{хорда } MM'}{\text{дуга } MM'}\right)=1.$$

Из рисунка 137 ясно, что

$$(\text{хорда } MM')^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Умножив и разделив на $(\Delta s)^2$ левую часть и деля обе части на $(\Delta x)^2$, мы получаем:

$$\left(\frac{\text{хорда } MM'}{\Delta s}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

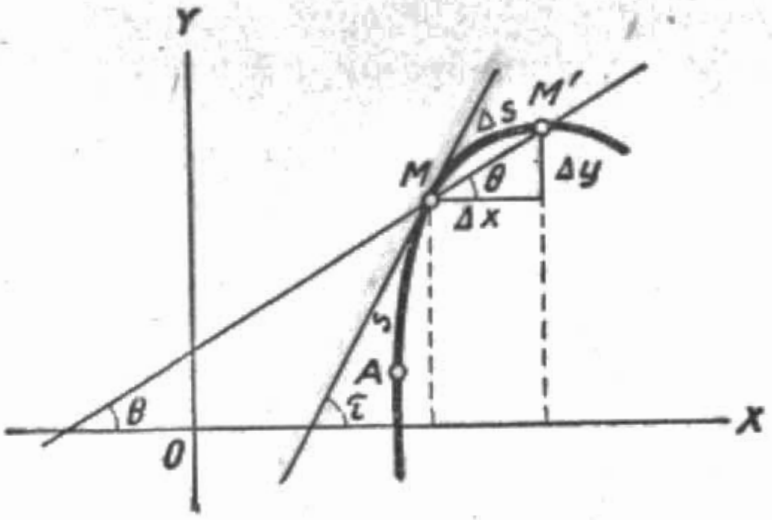


Рис. 137

Пусть теперь M' приближается к M как к пределу; тогда $\Delta x\to 0$, и мы имеем

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Умножая обе части на dx^2, мы находим

$$ds^2=dx^2+dy^2. \quad (1)$$

Если мы теперь извлечем квадратный корень из обеих частей этого равенства и умножим и разделим правую часть на dx, то получим:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx. \quad (2)$$

Аналогичным преобразованием равенства (1) мы имеем:

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\cdot dy. \quad (3)$$

Все эти формулы (1), (2) и (3) очень полезны.

Далее, так как $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\tau$, то

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\operatorname{tg}^2\tau=\sec^2\tau.$$

Поэтому формула (2) нам дает, при положительном знаке квадратного корня, равенство $ds=\sec\tau\cdot dx$. Отсюда мы легко выводим важные формулы:

$$\frac{dx}{ds}=\cos\tau,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\tau \quad (4)$$

$$\left[\text{ибо } \frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=\operatorname{tg}\tau\cdot\cos\tau=\sin\tau\right].$$

Группу формул (1), (2), (3) и (4) легко запомнить, ибо они представляют собой не что иное, как соотношения в фиктивном прямоугольном треугольнике[1] (рис. 138) с гипотенузой ds, катетами dx и dy и углом τ, противолежащим катету dy. Для этого прямоугольного треугольника имеем $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и соотношения $\cos\tau = \frac{dx}{ds}$ и $\sin\tau = \frac{dy}{ds}$.

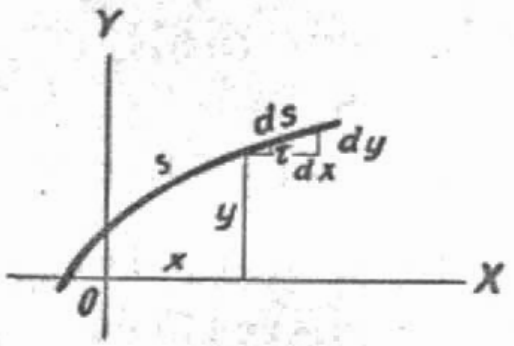


Рис. 138

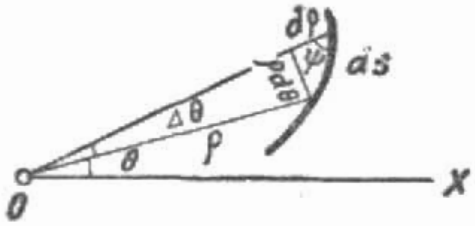


Рис. 139

§ 124. Дифференциал дуги в полярных координатах. Из соотношений $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$ между прямоугольными и полярными координатами точки, мы получаем:

$$dx = \cos\theta\cdot d\rho - \rho\sin\theta\cdot d\theta \text{ и } dy = \sin\theta\cdot d\rho + \rho\cos\theta\cdot d\theta.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и извлекая квадратный корень, мы получаем результат:

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}. \tag{5}$$

Это можно написать также в виде

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta. \tag{6}$$

Для памяти: в фиктивном прямоугольном треугольнике (рис. 139) с гипотенузой ds, катетами $d\rho$ и $\rho d\theta$, а также углом ψ между катетом $d\rho$ и гипотенузой ds, мы имеем очевидные соотношения:

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} \text{ и } \operatorname{tg}\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}, \text{ где } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

Пример 1. Найти дифференциал дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Дифференцируем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

---

[1] Мы называем этот треугольник «фиктивным» потому, что то, что дано на рисунке 138, в сущности, не является этим прямоугольным треугольником: вертикальный катет, собственно, равен Δy, а не dy, а гипотенуза криволинейна. Однако, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, мы можем криволинейный прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке, считать за прямоугольный. А тогда его элементы, т. е. стороны и углы, тождественны с элементами фиктивного треугольника.

Чтобы найти ds выраженным через dx, мы пользуемся формулой (2), дающей:

$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot dx = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\cdot dx = \sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\cdot dx = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Пример 2. Найти дифференциал дуги циклоиды $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, выраженный через θ и $d\theta$.

Решение. Дифференцируем: $dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta$, $dy = a\sin\theta\,d\theta$. Подставляя в (1), находим:

$$ds^2 = a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,d\theta^2 = 2a^2(1-\cos\theta)\,d\theta^2.$$

Так как $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, то $ds = 3a\sin\frac{\theta}{2}\cdot d\theta$.

Пример 3. Найти дифференциал дуги кардиоиды $\rho = a(1-\cos\theta)$, выраженный через θ.

Решение. Дифференцируем: $\frac{d\rho}{d\theta} = a\sin\theta$. Подстановка в (6) дает:

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\cdot d\theta = a\sqrt{2-2\cos\theta}\cdot d\theta =$$
$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

§ 125. Скорость криволинейного движения как быстрота изменения дуги. Изучая криволинейное движение в § 107, мы нашли, что его скорость v дается уравнением $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, где $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $v_y = \frac{dy}{dt}$. Подставляя в него эти выражения для v_x и v_y, мы находим:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2} = \frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dt)^2} = \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень с положительным знаком, имеем:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Словесно:

в криволинейном движении скорость движения точки есть быстрота изменения во времени длины дуги траектории.

Это предложение вполне согласуется с определением скорости прямолинейного движения как быстроты изменения расстояния во времени (см. § 80).

§ 126. Неизменность формулы для дифференциала функции. *Вид формулы, дающий дифференциал функции, не изменяется при выборе нового независимого переменного.*

Пусть нам дана функция y от независимого переменного x

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Тогда формула дифференциала dy этой функции есть

$$dy = f'(x)\cdot dx, \qquad (2)$$

где dx есть дифференциал независимого переменного, т. е. произвольная величина.

Пусть теперь мы начали считать за истинное независимое переменное не букву x, а букву t, так что x, перестав быть независимым переменным, превратилась в функцию переменного t:

$$x=\varphi(t). \tag{3}$$

В этих условиях y также станет функцией нового независимого переменного t по закону «функция от функции»:

$$y=f(x),\ x=\varphi(t),\ \text{т. е. } y=f[\varphi(t)]. \tag{4}$$

Дифференциал dy функции y, *вычисленный при новом независимом переменном* t, дается, очевидно, формулой

$$dy=\{f[\varphi(t)]\}'\,dt. \tag{5}$$

Можно подумать, что мы получили совсем другое выражение для дифференциала dy. Но на самом деле, на основании теоремы о производной функции от функции, мы имеем:

$$\{f[\varphi(t)]\}'=f'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f'(x)\cdot\varphi'(t). \tag{6}$$

Значит, равенство (5) перепишется в виде:

$$dy=f'(x)\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{5*}$$

Но так как выражение $\varphi'(t)\,dt$ есть не что иное, как дифференциал *функции* x, $x=\varphi(t)$, ибо $dx=\varphi'(t)\,dt$, то равенство (5*) перепишется, в свою очередь, в виде:

$$dy=f'(x)\,dx, \tag{5**}$$

и таким образом мы снова возвратились к тому виду (2) дифференциала, который был нами написан в предположении, что переменное x является истинным независимым переменным.

Таким образом мы приходим к чрезвычайно важному свойству дифференциала, выражающемуся словесно следующим образом:

формула дифференциала

$$dy=f'(u)\cdot du$$

справедлива во всех случаях: как в том случае, *когда* u *есть независимое переменное*, так и в том случае, *когда* u *есть функция другого независимого переменного; в этом последнем случае под множителем* du *надо понимать дифференциал функции* u.

В этом смысле часто называют дифференциал $dy=f'(x)\,dx$ функции y *инвариантом* преобразования независимого переменного, ибо выражение $f'(x)\,dx$ всегда является дифференциалом функции

$f(x)$ при любых условиях x, т. е. будет ли x переменным независимым или переменным зависимым от какого-нибудь другого, уже истинного, независимого переменного.

Совсем иное дело представляет собой не дифференциал dy функции, а *производная* y' функции. Ибо, когда x служит независимым переменным, тогда производная функция $y(x)$ равна $y'(x)$. Но когда x перестает уже служить независимым переменным, а является само функцией какого-нибудь независимого переменного t, то тогда производная от $y(x)$ уже становится равной произведению $y'(x)\cdot x'$. Поэтому, говоря о производной, никогда не лишне указывать, по какому именно независимому переменному берут производную. Для дифференциала же такое указание не нужно, ибо оно излишне.

Сделаем применение этого ценного для анализа свойства дифференциалов.

Пусть y есть функция независимого переменного x

$$y=f(x).$$

Тогда производная от y по x напишется в виде отношения:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Пусть в некоторый момент рассуждения мы увидели, что и буква y и буква x зависят обе от некоторого истинного независимого переменного t, так что имеем $y=\psi(t)$ и $x=\varphi(t)$, *при сохранении, однако, прежнего соотношения* $y=f(x)$ *между буквами* x *и* y. Значит, имеем тождество $\psi(t)=f[\varphi(t)]$.

В этом случае, когда переходят от старого независимого переменного x к новому независимому переменному t, отношение $\frac{dy}{dx}$, *выражавшее при старом независимом переменном* x *производную от* y *по* x, теперь приобретает вид:

$$\frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}=\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Но, в силу теоремы о дифференцировании функции от функции, мы имеем: $\psi'(t)=\{f[\varphi(t)]\}'=f'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f'(x)\cdot\varphi'(t)$.

Значит, предыдущее отношение равно

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{f'(x)\cdot\varphi'(t)}{\varphi'(t)}=f'(x).$$

Таким образом, *отношение дифференциалов* $\frac{dy}{dx}$, *выражавшее при старом независимом переменном* x *производную* $f'(x)$ *от* y *по* x, *продолжает быть равным этой производной при всяком другом независимом переменном.*

В частности, $\frac{dx}{dy}$ обозначает производную обратной функции для $f(x)$, т. е. производную относительно y функции $x=F(y)$, которую мы получим, решив относительно переменной x уравнение

$$y=f(x).$$

§ 127. Дифференциалы высших порядков. Так как дифференциал функции вообще есть также функция независимого переменного, мы можем *дифференцировать ее дифференциал.* Рассмотрим функцию

$$y=f(x);$$

$d(dy)$ называется *вторым дифференциалом* от y (или от функции) и обозначается символом d^2y.

Подобным же образом *третий дифференциал* от y, $d[d(dy)]$ пишется так: d^3y и т. д. до n-го дифференциала от y:

$$d^ny.$$

Так как dx, т. е. дифференциал независимого переменного, *не зависит* от x, то, дифференцируя dx по x, нужно рассматривать dx как количество *постоянное*[1]. Зная это, мы придем к весьма простым соотношениям между *последовательными дифференциалами и последовательными производными.* Таким образом,

$$dy=f'(x)\,dx$$

и

$$d^2y=f''(x)\,dx^2, \tag{1}$$

ибо dx рассматривается как постоянное[2].

Так же

$$d^3y=f'''(x)\,dx^3 \tag{2}$$

и вообще

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{3}$$

Разделяя обе части каждого выражения на степень dx, стоящую во второй части, получаем обыкновенное обозначение производных:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),\quad \ldots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

Заметим, что, в отличие от формулы для первого дифференциала dy, *эти формулы не сохраняют*

[1] Ибо, как было сказано выше, dx не зависит от x, и, значит, относительно x это есть величина *постоянная.*

[2] Здесь dx^2, как и ниже dx^3, ..., dx^n, обозначает соответствующую степень dx, т. е. $(dx)^2$, $(dx)^3$, ..., $(dx)^n$, а не дифференциал степени x, т. е. не $d(x^2)$ и, соответственно, не $d(x^3)$, ..., $d(x^n)$.

своего вида, если в них вместо x *ввести* некоторую функцию от t:

$$x=\varphi(t).$$

В самом деле, если $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, т. е. теперь истинным независимым переменным является t, то dx в формуле $dy=f'(x)\,dx$ уже не будет постоянным, а будет зависеть от t по формуле:

$$dx=\varphi'(t)\,dt.$$

Поэтому при нахождении дифференциала от dy, т. е. d^2y, мы должны воспользоваться формулой для дифференциала произведения двух функций $f'(x)$ и dx. Таким образом получим:

$$\begin{aligned} d^2y&=d[f'(x)\cdot dx]=d[f'(x)]\cdot dx+f'(x)\cdot d(dx)=\\ &=f''(x)\,dx\cdot dx+f'(x)\cdot d^2x=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x. \end{aligned}\quad (4)$$

Дифференцируя еще раз и замечая, что не только dx, но и $d^2x=\varphi''(t)\,dt^2$ является функцией t, найдем:

$$\begin{aligned} d^3y&=d[f''(x)\,dx^2+f'(x)\,dx^2]=d[f''(x)\,dx^2]+d[f'(x)\,d^2x]=\\ &=d[f''(x)]\cdot dx^2+f''(x)\cdot d(dx^2)+d[f'(x)]\cdot d^2x+f'(x)\cdot d(d^2x)=\\ &=f'''(x)dx\cdot dx^2+f''(x)\cdot 2dx\cdot d^2x+f''(x)\,dx\cdot d^2x+f'(x)\cdot d^3x=\\ &=f'''(x)\,dx^3+3f''(x)\,dx\cdot d^2x+f'(x)\,d^3x. \end{aligned}\quad (5)$$

Аналогично можно получить формулы и для дифференциалов четвертого, пятого и т. д. порядков сложных функций.

Формула (4) показывает, что между выражением dy первого дифференциала и выражением второго дифференциала d^2y есть *огромная разница*:

первый дифференциал dy пишется всегда одинаково в виде:

$$dy=f'(x)\,dx,$$

безразлично от того, будет ли буква x истинным независимым переменным, или окажется функцией какого-либо другого истинного независимого переменного t;

второй же дифференциал d^2y пишется неодинаково в указанных обоих случаях.

Когда x *есть истинное независимое переменное,* тогда

$$d^2y=f''(x)\cdot(dx)^2;$$

но *когда* x *есть функция от некоторого другого, уже истинного, независимого переменного* t, тогда по (4):

$$d^2y=f''(x)\,(dx)^2+f'(x)\cdot d^2x.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найти третий дифференциал от $y = x^5 - 2x^3 + 3x - 5$.
Решение.

$$dy = (5x^4 - 6x^2 + 3)\,dx,$$
$$d^2y = (20x^3 - 12x)\,dx^2,$$
$$d^3y = (60x^2 - 12)\,dx^3.$$

Примечание. Очевидно, это — третья производная функции, умноженная на куб дифференциала независимого переменного. Разделяя на $(dx)^3$, получаем третью производную:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 12.$$

2. Найти дифференциал второго порядка от $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$.
Решение.

$$dy = \cos u\,du,$$
$$d^2y = -\sin u\,du^2 + \cos u\,d^2u,$$

где $u = \sqrt{x}$, поэтому, если нужно получить результат в виде непосредственной функции x, надлежит положить:

$$u = \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx,\ d^2u = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,dx^2,$$

после чего получим:

$$d^2y = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right)dx^2.$$

ЗАДАЧИ

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $y = ax^3 - bx^2 + cx + d$. Отв. $dy = (3ax^2 - 2bx + c)\,dx$.
2. $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-1} + 5$. $dy = (5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-2})\,dx$.
3. $y = (a^2 - x^2)^5$. $dy = -10x\,(a^2 - x^2)^4\,dx$.
4. $y = \sqrt{1 + x^2}$. $dy = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$.
5. $y = \dfrac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n}$. $dy = \dfrac{2nx^{2n-1}}{(1 + x^2)^{n+1}}\,dx$.
6. $y = \ln\sqrt{1 - x^2}$. $dy = \dfrac{x\,dx}{x^2 - 1}$.
7. $y = (e^x + e^{-x})^2$. $dy = 2\,(e^{2x} - e^{-2x})\,dx$.
8. $y = e^x \ln x$. $dy = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)dx$.
9. $s = t - \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. $ds = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)^2 dt$.
10. $\rho = \operatorname{tg}\varphi + \sec\varphi$. $d\rho = \dfrac{1 + \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$.
11. $r = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta + \operatorname{tg}\theta$. $dr = \sec^4\theta\,d\theta$.

12. $f(x) = (\ln x)^3$. $f'(x)\,dx = \dfrac{3(\ln x)^2\,dx}{x}$.

13. $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\varphi'(t)\,dt = \dfrac{3t^2\,dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$.

14. $d\left[\dfrac{x\ln x}{1-x} + \ln(1-x)\right] = \dfrac{\ln x\,dx}{(1-x)^2}$.

15. $d[\operatorname{arctg} \ln y] = \dfrac{dy}{y[1+(\ln y)^2]}$.

16. $d\left[\dfrac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} - \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right] = -\dfrac{d\varphi}{\sin^3\varphi}$.

Для каждой из следующих кривых найти дифференциал дуги, а также косинус и синус угла касательной с осью OX.

17. $y^2 = 2px$ (парабола).

Отв. $ds = \dfrac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,dx$;

$$\cos\tau = \frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}};\quad \sin\tau = \frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}.$$

18. $x^2 + y^2 = 25$ (окружность).

Отв. $ds = \dfrac{5dx}{y}$; $\cos\tau = \dfrac{y}{5}$, $\sin\tau = -\dfrac{x}{5}$.

19. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Отв. $ds = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$, $\cos\tau = a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, $\sin\tau = -a^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

20. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (эллипс).

Отв. $ds = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{a^4-m^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$, где $m = \sqrt{a^2-b^2}$;

$$\cos\tau = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-m^2x^2}};\quad \sin\tau = -\frac{bx}{\sqrt{a^4-m^2x^2}}.$$

21. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола).

Отв. $ds = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{m^2x^2-a^4}{x^2-a^2}}\,dx$, где $m = \sqrt{a^2+b^2}$.

$$\cos\tau = \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{m^2x^2-a^4}};\quad \sin\tau = \frac{bx}{\sqrt{m^2x^2-a^4}}.$$

22. $y = ax^3$ (кубическая парабола).

Отв. $ds = \sqrt{1+9a^2x^4}\,dx$; $\cos\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+9a^2x^4}}$;

$$\sin\tau = \frac{3ax^2}{\sqrt{1+9a^2x^4}}.$$

23. $y^2 = ax^3$ (полукубическая парабола).

Отв. $ds = \dfrac{\sqrt{4+9ax}}{2}\,dx$; $\cos\tau = \dfrac{2}{\sqrt{4+9ax}}$;

$$\sin\tau = \frac{3ax^2}{y\sqrt{4+9ax}}.$$

24. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (циклоида).

Отв. $ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$; $\cos \tau = \sin \frac{t}{2}$; $\sin \tau = \cos \frac{t}{2}$.

25. $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ (гипоциклоида).

Отв. $ds = 3a \sin \theta \cos \theta\, d\theta$; $\cos \tau = -\cos \theta$, $\sin \tau = \sin \theta$.

26. $x = a(k \cos t - \cos kt)$, $y = a(k \sin t - \sin kt)$ (эпициклоида).

Отв. $ds = 2ka \sin \frac{(k-1)t}{2}\, dt$; $\cos \tau = \cos \frac{k+1}{2} t$; $\sin \tau = \sin \frac{k+1}{2} t$.

Для каждой из следующих кривых, заданных в полярных координатах ρ и φ, найти дифференциал дуги.

27. $\rho = a\varphi$ (архимедова спираль). **Отв.** $ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi$.

28. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль). $ds = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi$.

29. $\rho = a^{\varphi}$ (логарифмическая спираль). $ds = \rho \sqrt{1 + (\ln a)^2}\, d\varphi$.

30. $\rho = a \sin \varphi$ (окружность). $ds = a\, d\varphi$.

31. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида). $ds = 2a \sin \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$.

32. $\rho = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (парабола). $ds = \frac{a\, d\varphi}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}$.

33. Вычислить приближенно приращение функции

$$y = x^3 - 5x + 80$$

при переходе переменного x от значения $x = 4$ к значению $x = 4{,}001$. Сравнить приближенный результат с точным.

Отв. $\Delta y \approx 0{,}043$. Точное значение отличается от приближенного в пятом десятичном знаке.

34. Зная, что $\lg_{10} 200 = 2{,}30103$, найти $\lg_{10} 200{,}4$. Сравнить полученный результат с данными таблицы.

35. Объяснить происхождение часто применяющейся в технике приближенной формулы

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2},$$

где $|b|$ есть число малое сравнительно с $|a|$.

ГЛАВА XIII

КРИВИЗНА, РАДИУС И КРУГ КРИВИЗНЫ

§ 128. Кривизна. В § 85 рассматривалось направление изгиба кривой. Форма же кривой в точке (ее «вялость» или ее «искривленность») зависит от *быстроты изменения направления.* Эта быстрота называется *кривизной в точке* и обозначается буквой K. Нам нужно найти математическое выражение для K.

На рисунке 140 M' есть вторая точка на кривой, близкая к M. Когда точка прикосновения касательной описывает дугу MM' ($=\Delta s$), касательная поворачивается на угол $\Delta\tau$ радианов. Это означает, что $\Delta\tau$ есть изменение направления касательной. Естественно дать следующие определения:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \textit{средняя кривизна дуги } MM$$

Кривизна ($=K$) в точке M есть предел средней кривизны, когда M' безгранично приближается к M, т. е.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{d\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} = \text{кривизна в } M.$$

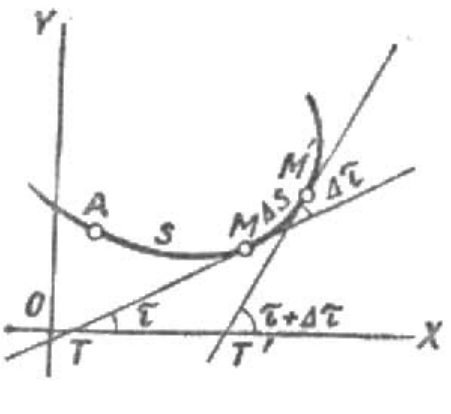


Рис. 140

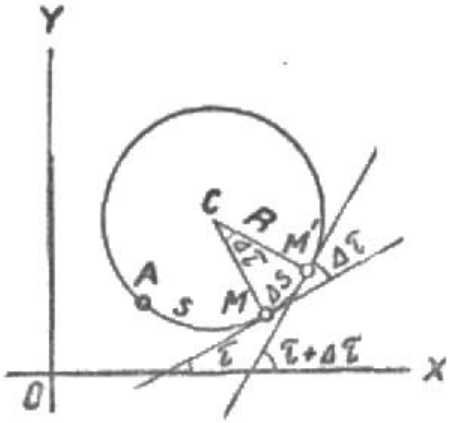


Рис. 141

Иными словами, кривизна есть *быстрота изменения наклона кривой относительно ее дуги* (см. § 79).

§ 129. Кривизна окружности. *Теорема. Кривизна окружности в какой-нибудь ее точке равна обратной величине ее радиуса и, значит, есть одна и та же во всех ее точках.*

Доказательство. На рисунке 141 угол $\Delta\tau$ между касательными в точках M и M' равен центральному углу MCM' между радиусами CM и CM'.

Поэтому:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{\text{угол } MCM'}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R},$$

$K_{\text{окружн}}=\frac{1}{R}$

ибо угол MCM' *измеряется в радианах.*

Значит, средняя кривизна дуги MM' окружности есть величина постоянная. Полагая $\Delta s\longrightarrow 0$, мы имеем теорему доказанной.

С точки зрения кривизны, окружность есть простейшая из всех кривых, ибо она изгибается равномерно. Ясно, что кривизна прямой линии везде равна нулю.

§ 130. Кривизна в прямоугольных координатах

Если кривая дана уравнением в прямоугольных координатах, то

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (1)$$

где y' и y'' суть первая и вторая производные ординаты y кривой по абсциссе x.

Доказательство. Так как $\tau=\operatorname{arc tg} y'$, где $y'=\frac{dy}{dx}$, то, дифференцируя, имеем:

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}. \qquad (2)\ (\text{по XIX})$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{ds}{dx}=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Деля (2) на (3), получаем искомую формулу (1).

Упражнение. Если y есть независимое переменное, доказать, что

$$K=\frac{-x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (4)$$

где x' и x'' суть первая и вторая производные абсциссы x кривой по ординате y.

Формула (4) полезна, как дополнительная формула, в тех случаях, когда дифференцирование по y проще. К тому же, формула (3) перестает

служить, когда y' становится бесконечностью, т. е. тогда, когда касательная в точке P вертикальна. Тогда надо пользоваться формулой (4), где теперь $x'=0$ и где поэтому $K=-x''$.

Знак кривизны K. Выбрав положительный знак для знаменателя формулы (3), мы видим, что K и y'' имеют одинаковый знак. Это означает, что кривизна K положительна или отрицательна в зависимости от того, направлена ли кривая своею вогнутостью вверх или вниз.

Пример. Найти кривизну параболы

$$y^2=4px$$

в точке $(p,\ 2p)$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2p}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{4p^2}{y^3}.$$

Подставив в (3), имеем:

$$K=-\frac{4p^2}{(y^2+4p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

это дает кривизну в *любой точке*. В точке $(p,\ 2p)$

$$K=-\frac{4p^2}{(4p^2+4p^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4p^2}{16\sqrt{2}\cdot p^3}=-\frac{1}{4\sqrt{2}\cdot p}.$$

§ 131. Кривизна в параметрической форме. Если кривая задана в параметрическом виде, то имеем:

$$x=\varphi(t)\ \text{и}\ y=\psi(t),$$

где φ и ψ суть *данные* нам функции параметра t. Сообразно с этим мы теперь обозначаем штрихом $'$ взятие производной *по параметру* t, так что x', y', x'', y'' обозначают первые и вторые производные от координаты x и y по параметру t.

$$x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dt},\quad x''=\frac{d^2x}{dt^2},\quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Теперь формулу кривизны K в прямоугольных координатах уже нельзя писать в виде формулы (1), ибо в ней штрихом тогда обозначалось взятие производной *по абсциссе* x, а не по параметру t, которого тогда еще не было. Поэтому кривизну эту сейчас надо написать так, чтобы было *явно* указано, что дифференцирование производится все время *по абсциссе* x. Итак, мы переписываем теперь формулу кривизны K в виде:

$$K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.\qquad (1^*)$$

Выразим обе производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ через четыре количества: x', y', x'' и y''.

Прежде всего имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}.$$

Затем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{y''x' - y'x''}{x'^2}}{x'} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3}.$$

Подставляя найденные выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy^2}{dx^2}$ в формулу (1*), окончательно получаем:

$$K = \frac{y''x' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

Эта формула удобна, но лучше сначала вычислить $\frac{dy}{dx}$ из равенства: $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = h(t)$, потом вычислить $\frac{d^2y}{dx^2}$ из равенства: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dh(t)}{dx} = \frac{h'(t)}{\varphi'(t)}$ и, наконец, подставить найденное в формулу кривизны (1*).

Пример. Найти кривизну циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \qquad \frac{dy}{dt} = a \sin t;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Подставляя в формулу (5), найдем:

$$K = \frac{a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos t - 1}{2^{\frac{3}{2}} a \cdot (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}.$$

132. Кривизна в полярных координатах. *Теорема. Если кривая дана уравнением в полярных координатах, то*

$$K=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{6}$$

где ρ' и ρ'' обозначают, соответственно, первую и вторую производные от ρ по θ.

Доказательство. Отнесясь к § 109 и к рисунку 127, мы видим, что $\tau=\theta+\phi$, где θ есть полярный угол точки $M(\rho, \theta)$ кривой, а ϕ есть угол между радиусом-вектором OP и касательной в точке M. При этом мы знаем из § 109, что $\operatorname{tg}\phi=\frac{\rho}{\rho'}$ и, значит, $\phi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{\rho'}$. Из первого равенства следует, что $\frac{d\tau}{d\theta}=1+\frac{d\phi}{d\theta}$, а из второго

$$\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2+\rho^2}.$$

Значит,

$$\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}. \tag{1}$$

С другой стороны, из § 124 мы имеем:

$$\frac{ds}{d\theta}=(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Деля равенство (1) на (2), имеем окончательно нужную нам формулу (6) кривизны.

Пример. Найти кривизну логарифмической спирали $\rho=ae^{\alpha\theta}$ в любой точке.

Решение.

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\alpha ae^{\alpha\theta}=\alpha\rho,\quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\alpha^2 ae^{\alpha\theta}=\alpha^2\rho.$$

Подписав в формулу (6), найдем:

$$K=\frac{1}{\rho\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

§ 133. Радиус кривизны. По аналогии с окружностью *радиус кривизны R в какой-либо точке кривой равен обратной величине кривизны K в этой точке, т. е. $R=\frac{1}{K}$.* Поэтому из формулы (1) кривизны в прямоугольных координатах находим:

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{7}$$

Пример. Найти радиус кривизны в любой точке цепной линии

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right);\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Подставляя в (7), имеем:

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a}}=\frac{\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^3}{\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a}}=\frac{a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}=\frac{y^2}{a}.$$

§ 134. Рельсовый путь или переходные кривые. При прокладке рельсового пути не дозволяется, вследствие высокой скорости поездов, резко переходить от прямолинейно протянутой колеи к дуге круга. Для того чтобы сделать изменение кривизны постепенным, инженеры употребляют переходные кривые, связывающие прямолинейную часть колеи с круговой колеей. Эти кривые имеют нулевую кривизну в точке стыка с прямолинейной колеей и кривизну кривой колеи в точке соединения с этой последней. Как переходные кривые вообще употребляют дуги кубических парабол.

Пример. Переходная кривая на рельсовом пути имеет форму дуги кубической параболы $y=\frac{1}{3}x^3$. С какою скоростью вагон на этом пути изменяет свое направление (за единицу длины принята миля), когда он проходит через: (a) точку (3, 9)? (b) точку $\left(2, \frac{8}{3}\right)$? (c) точку $\left(1, \frac{1}{3}\right)$?

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=x^2,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2x.$$

Подставляя в формулу кривизны (1), имеем: $K=\frac{2x}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$:

(a) в (3, 9), $K=\frac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}}$ радиан на милю $\approx 28'$ на милю;

(b) в $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $K=\frac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}}$ радиан на милю $\approx 3°16'$ на милю;

(c) в $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, $K=\frac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}}$ радиан на милю $\approx 40°31'$ на милю.

§ 135. Круг кривизны. Рассмотрим на кривой какую-нибудь точку M (рис. 142). Мы можем построить в каждой точке

кривой круг, имеющий ту же кривизну, что и кривая в этой точке.

Этот круг строится следующим образом: проводим нормаль к кривой в точке M в направлении вогнутости кривой. Берем на нормали расстояние MO, равное радиусу кривизны R кривой в точке M. Из точки O как из центра описываем круг радиусом R. Следовательно, кривизна круга

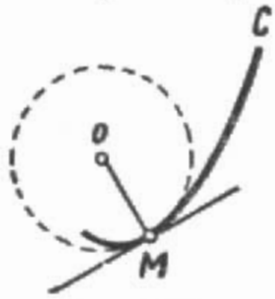


Рис. 142

$$K=\frac{1}{R},$$

т. е. совпадает с кривизной кривой в точке M. Круг, построенный таким образом, называется *кругом кривизны* кривой в точке M.

В общем случае круг кривизны кривой в точке пересекает кривую в этой точке, как это наглядно показывает рисунок 142 (сравните это явление с поведением касательной прямой в точке перегиба).

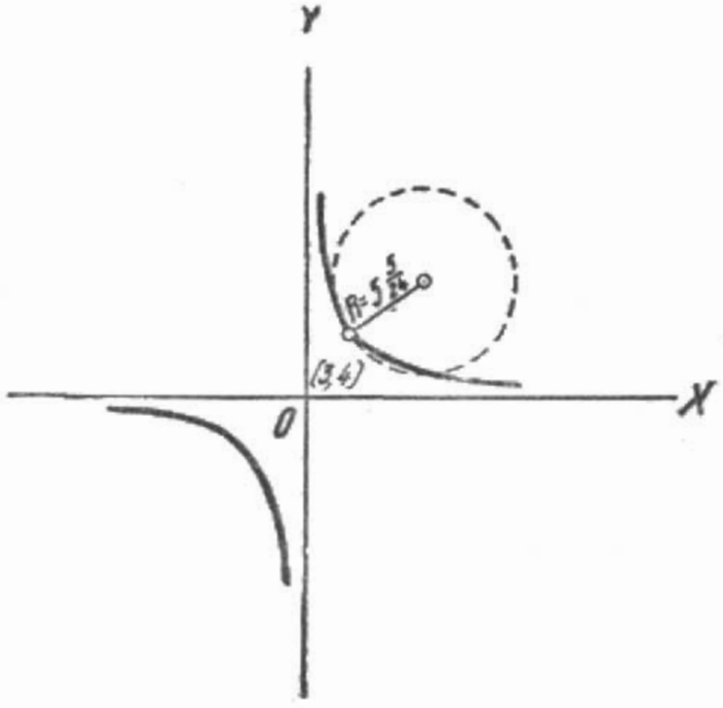


Рис. 143.

Подобно тому как касательная к кривой, характеризуя направление кривой в точке, помогает лучше представить себе течение кривой в точке, круг кривизны способствует лучшему представлению о кривизне кривой в точке, ибо скорость изменения направления у кривой и у круга кривизны одна и та же в *точке* M.

В § 142 круг кривизны будет определен иначе: методом, аналогичным методу определения касательной (см. § 56).

Пример. Найти радиус кривизны равносторонней гиперболы $xy=12$ в точке (3, 4) и построить круг кривизны в этой точке (рис. 143).

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

В точке (3, 4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{9},$$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24}.$$

Круг кривизны пересекает гиперболу в двух точках.

ЗАДАЧИ[1]

1. Найти радиус кривизны нижеследующих кривых в указанных точках; вычертить каждую кривую и построить соответствующий круг кривизны.

a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(a, 0)$. **Отв.** $R = \frac{b^2}{a}$.

b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(0, b)$. $R = \frac{a^2}{b}$.

c) $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$, $(0, 0)$. $R = \frac{1}{36}$.

d) $16y^2 = 4x^4 - x^6$, $(2, 0)$. $R = 2$.

e) $y = x^3$, (x_1, y_1). $R = \frac{(1 + 9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}{6x_1}$

f) $y^2 = x^3$, $(4, 8)$. $R = \frac{1}{3}\,40^{\frac{3}{2}}$.

g) $y^2 = 8x$, $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$. $R = 7\frac{13}{16}$.

h) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $(0, b)$. $R = \frac{a^2}{3b}$.

i) $x^2 = 4ay$, $(0, 0)$. $R = 2a$.

j) $(y - x^2)^2 = x^5$, $(0, 0)$. $R = \frac{1}{2}$.

k) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (x_1, y_1). $R = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.

2. Найти радиус кривизны кривой $a^2y = bx^2 + cx^2y$ в начале.

Отв. $R = \frac{a^2}{2b}$.

3. Показать, что радиус кривизны кривой $y^2 = \frac{a^2(a - x)}{x}$ в вершине равен $\frac{a}{2}$.

---

[1] Во всех случаях вычисляется абсолютная величина кривизны и радиуса кривизны. Постоянные величины всюду предполагаются положительными.

4. Найти радиус кривизны кривой $y = \ln \sec x$ в точке (x_1, y_1).

Отв. $R = \sec x_1$.

5. Найти K в любой точке параболы $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Отв. $P = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Найти R в произвольной точке гипоциклоиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Отв. $R = 3(axy)^{\frac{1}{2}}$.

7. В какой точке кривая $y = e^x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Отв. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. Показать, что в точке перегиба любой кривой радиус кривизны принимает бесконечно большое значение.

Найти радиус кривизны следующих кривых в любой или в указанной точке:

9. Кривая $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ $t = 1$. Отв. $R = 6$.

10. Гипоциклоида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t = t_1$. $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

11. Кривая $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{2}$. $R = \dfrac{\pi a}{2}$.

12. Кривая $\begin{cases} x = a(m\cos t + \cos mt), \\ y = a(m\sin t - \sin mt), \end{cases}$ $t = t_0$. $R = \dfrac{4ma}{m-1}\sin\dfrac{m+1}{2}t_0$.

13. Окружность $\rho = a\sin\theta$. $R = \dfrac{a}{2}$.

14. Спираль Архимеда $\rho = a\theta$. $R = \dfrac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2}$.

15. Кардиоида $\rho = a(1 - \cos\theta)$. $R = \dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$.

16. Лемниската $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$. $R = \dfrac{a^2}{3\rho}$.

17. Парабола $\rho = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$. $R = 2a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$.

18. Кривая $\rho = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$. $R = \dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta}{3}$.

19. Трисектриса $\rho = 2a\cos\theta - a$ $R = \dfrac{a(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6\cos\theta}$.

20. Равносторонняя гипербола $\rho^2 \cos\theta = a^2$. $R = \frac{\rho^3}{a^2}$.

21. Коническое сечение $\rho = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$.

Отв. $\frac{a(1-e^2)(1-2e\cos\theta-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos\theta)^3}$.

22. Путь, по которому идет автомобиль, представляет собой эллипс $x^2+16y^2=16$. С какой скоростью автомобиль меняет направление:
a) когда он проходит через конец большой оси,
b) когда он проходит через конец малой оси,
c) когда он находится на расстоянии двух километров от малой оси? (За единицу длины принят километр.)

Отв. a) 4 радиана на километр,
b) $\frac{1}{16}$ радиана на километр,
c) $\frac{32}{343}$ радиана на километр.

23. Пароход движется по дуге полукубической параболы $4y^2=x^3$. Если предположим, что линия берега совпадает с осью OY и что за единицу длины принят километр, то с какой скоростью изменяет пароход свое направление, когда он находится на расстоянии одного километра от берега?

Отв. $\frac{21}{125}$ радиана на километр.

24. С какой скоростью меняет свое направление мотоциклетка, перемещаясь по кругу, имеющему 0,5 *км* в диаметре?

Отв. 4 радиана на километр.

25. Железнодорожное полотно имеет форму кривых, приближающихся к виду дуг нижеперечисленных кривых. С какой скоростью меняет направление движения паровоз в указанных точках? (Единица длины — километр.)

a) $y=x^3$, (2, 8).
b) $y=x^2$, (3, 9).
c) $x^2-y^2=8$, (3, 1).
d) $y=e^x$, $x=0$.
e) $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{4}$.
f) $\rho\theta=4$, $\theta=1$.

При укладке железнодорожных рельсов, вследствие большой скорости движения поездов, нельзя резко переходить от прямолинейного участка к кривой части пути. Для постепенного изменения направления при соединении прямолинейных участков с кривыми вводятся поэтому *переходные кривые*. В качестве переходных кривых употребляются обыкновенно дуги кубической параболы.

26. Найти радиус кривизны в каждой максимальной и минимальной точке кривой $y=x^4-2x^2$. Вычертить кривую и круг кривизны. Найти точки на кривой, где радиус кривизны имеет минимум.

27. Показать, что в точке с минимальным радиусом кривизны на кривой $y=f(x)$ имеем соотношение

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

§ 136. Центр кривизны. Касательная к кривой, проведенная в точке $M(x, y)$, обладает тем свойством, что x, y и y' имеют те же самые численные значения в точке M для касательной прямой и для самой кривой. Круг кривизны имеет аналогичное свойство, а именно x, y, y' и y'' имеют те же самые численные значения в точке M *для круга кривизны и для самой кривой.*

Определение. *Центром кривизны* (α, β) *в точке* $M(x, y)$ *кривой называется центр круга кривизны в этой точке.*

Теорема. *Координаты* (α, β) *центра кривизны в точке* $M(x, y)$ *суть:*

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}. \tag{8}$$

Доказательство. Уравнение круга кривизны есть

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2, \tag{1}$$

где R дается формулой (7).

Дифференцируя (1), имеем:

$$y' = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}, \quad y'' = -\frac{R^2}{(y-\beta)^3}. \tag{2}$$

Из правого равенства (2), после подстановки R из уравнения (7) § 133, мы получаем:

$$(y-\beta)^2 = -\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}, \text{ значит: } y-\beta = -\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3}$$

Из левого равенства (2) мы выводим, пользуясь соотношением (3):

$$x-\alpha = -y'(y-\beta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}. \tag{4}$$

Решая уравнение (3) относительно β, а уравнение (4) относительно α, мы получаем искомые формулы (8).

Упражнение 1. Вывести (8) прямо из рисунка, употребив формулы (4) § 123 ($\alpha = x - R\sin\tau$, $\beta = y + R\cos\tau$ и т. д.) (рис. 144).

Упражнение 2. Если x' и x'' суть первая и вторая производные от x по y, требуется вывести формулы для α и β в виде:

$$\alpha = x + \frac{1+x'^2}{x''} \text{ и } \beta = y - \frac{x'(1+x'^2)}{x'}. \tag{8*}$$

Примечание. Формулами (8*) пользуются: либо тогда, когда y' становится бесконечностью, либо когда дифференцирование по y проще.

Пример. Найти координаты центра кривизны параболы $y^2 = 4px$ соответствующие: a) любой точке кривой; b) ее вершине (рис. 145).

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4p^2}{y^3}.$$

a) Подставляя в (8), имеем:

$$\alpha = x + \frac{y^2+4p^2}{y^2} \cdot \frac{2p}{y} \cdot \frac{y^3}{4y^2} = 3x + 2p,$$

$$\beta = y - \frac{y^2+4p^2}{y^2} \cdot \frac{y^3}{4p^2} = -\frac{y^3}{4p^2}.$$

Следовательно, центр кривизны, соответствующий любой точке кривой, есть

$$\left(3x+2p, -\frac{y^3}{4p^2}\right).$$

b) Центр кривизны, соответствующий вершине (0, 0), есть $(2p, 0)$.

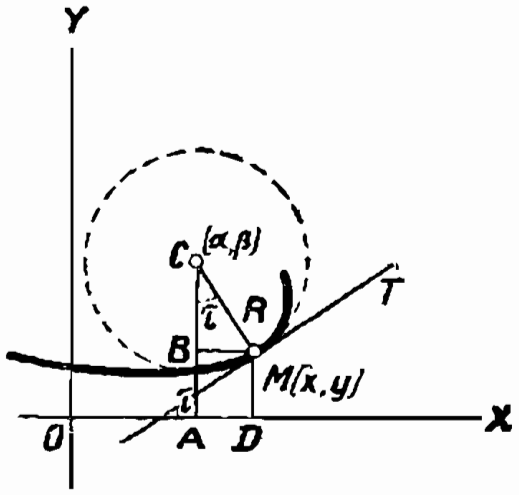


Рис. 144

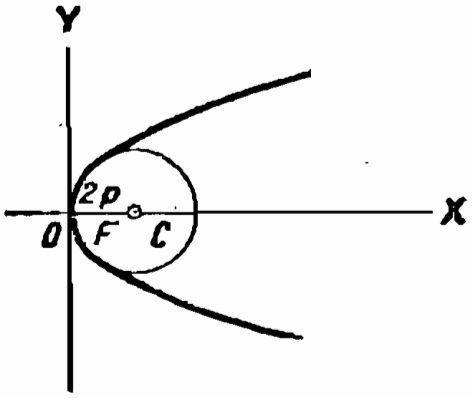


Рис. 145

Из предыдущего мы знаем, что в точке перегиба (какова точка P на рисунке 146) мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Отсюда формула для кривизны K показывает, что в точке перегиба $K=0$. Далее, из формулы для α, β и R мы заключаем, что, вообще, эти величины безгранично увеличиваются по мере приближения точки $M(x, y)$, движущейся по кривой, к ее точке перегиба, если, разумеется, касательная в таковой не имеет вертикального положения. Это же означает, что если мы предположим точку $M(x, y)$ вместе с ее касательной, движущейся по кривой к точке M', то в точке перегиба P кривизна делается равной нулю, вращение касательной на мгновение приостанавливается, причем после этого направление вращения изменяется, центр движущегося круга кривизны уходит в бесконечность, и радиус кривизны становится также бесконечным.

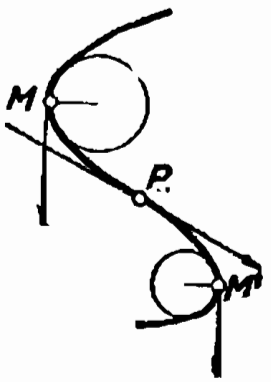


Рис. 146

§ 137. Эволюты. *Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется* эволютой *этой кривой.*

Рассмотрим круг кривизны соответствующей точки M кривой. Если точка M будет двигаться по данной кривой (рис. 147), то можно предположить, что вместе с ней катится по кривой и соответствующий круг кривизны, причем его радиус изменяется, будучи всегда равен радиусу кривизны кривой в точке M. Кривая, описанная центром круга, и будет эволютой кривой MM_1.

Формула (8) § 136 дает координаты (α, β) любой точки эволюты, выраженные в функции координат соответствующей точки (x, y) данной кривой. Но y есть функция x, следовательно,

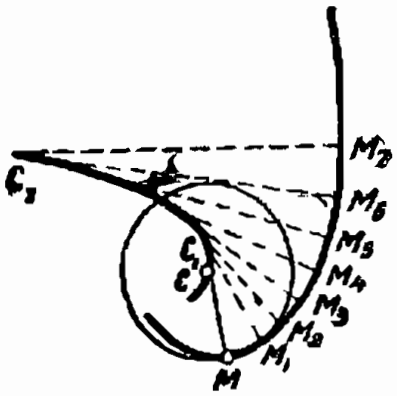


Рис. 147

$$\alpha = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

тотчас дают нам *параметрические уравнения эволюты в функции параметра x.*

Чтобы найти обыкновенное уравнение эволюты в прямоугольных координатах, исключим из этих двух выражений x. Нельзя дать общего способа исключения, который был бы приложим во всех случаях, ибо удобоприменимый метод зависит каждый раз от форм данного уравнения. Тем не менее, в большинстве случаев можно находить уравнения эволюты в прямоугольных координатах, поступая следующим образом.

Общие указания для нахождения эволюты

Первый шаг. *Ищем координаты центра кривизны* α *и* β *из* (8) § 136.

Второй шаг. *Решаем два полученные уравнения относительно* x *и* y, *выражая их в функции* α *и* β.

Третий шаг. *Эти значения* x *и* y *подставляем в данное уравнение. Это и дает нам соотношение между переменными* α *и* β, *представляющее уравнение эволюты.*

Пример 1. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 4px$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4p^2}{y^3}.$$

Первый шаг.

$$\alpha = 3x + 2p, \quad \beta = -\frac{y^3}{4p^2}.$$

Второй шаг.

$$x = \frac{\alpha - 2p}{3}, \quad y = -(4p^2\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

Третий шаг.

$$(4p^2\beta)^{\frac{2}{3}} = 4p\,\frac{\alpha - 2p}{2}$$

или

$$p\beta^2 = -\frac{4}{27}(\alpha - 2p)^3.$$

Припоминая, что α обозначает абсциссу, а β — ординату прямоугольной системы координат, мы видим, что эволютой параболы AOB служит полукубическая парабола $DC'E$, причем центры кривизны находятся соответственно в C, C_1, C_2 и т. д. (рис. 148).

Пример 2. Найти уравнение эволюты эллипса

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

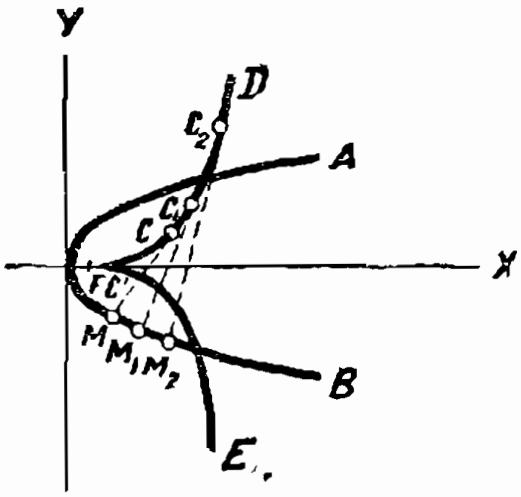


Рис. 148

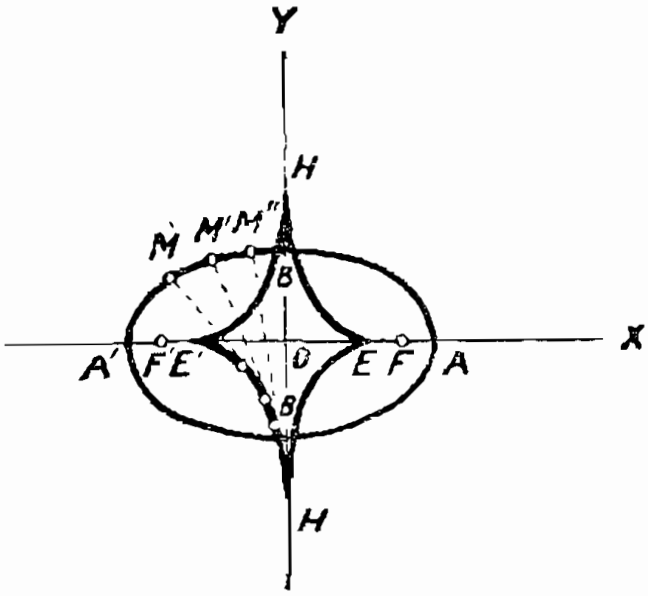


Рис. 149

Первый шаг.

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)\,x^3}{a^4},$$

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)\,y^3}{b^4}.$$

Второй шаг.

$$x = \left(\frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = -\left(\frac{b^4\beta}{a^2 - b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Третий шаг.

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

и будет уравнение эволюты $EHE'H'$ эллипса $ABA'B'$. Точки E, E', H', H суть центры кривизны, соответствующие точкам A, A', B, B' кривой, а C, C', C'' соответствуют точкам M, M', M'' (рис. 149).

Если уравнения кривой даны в параметрической форме, то начинаем с отыскания

$$\frac{dy}{dx} \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2},$$

как в § 131, именно:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \tag{A}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \tag{B}$$

а затем подставляем результаты в формулы (8) § 136. Это и даст параметрические уравнения эволюты в функции того самого параметра, который фигурирует в данных уравнениях.

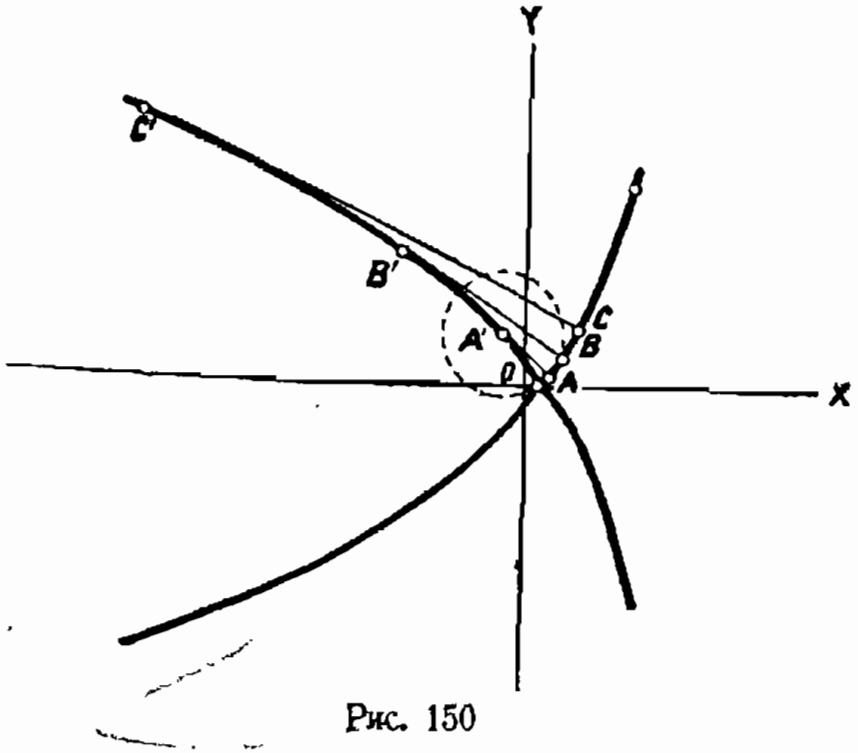


Рис. 150

Пример 3. Параметрические уравнения кривой суть:

$$x=\frac{t^2+1}{4}, \quad y=\frac{t^3}{6}. \tag{C}$$

Найти уравнения эволюты этой кривой в параметрической форме, построить кривую и эволюту, найти радиус кривизны в точке $t=1$ и построить в этой точке круг кривизны.

Решение.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2}{2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=t.$$

Подстановка в формулы (A) и (B) и затем в (8) § 136 дает:

$$\alpha=\frac{1-t^2-2t^4}{4}, \quad \beta=\frac{4t^3+3t}{6}. \tag{D}$$

Эти соотношения и являются уравнениями эволюты в параметрической форме.

Построим теперь кривую и ее эволюту (рис. 150).

Точка $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ — общая для данной кривой и ее эволюты. Данная кривая (полукубическая парабола) расположена вправо, и ее эволюта влево от прямой $x=\frac{1}{4}$. Круг кривизны в точке $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, для которой $t=1$, имеет центр в точке $A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$, лежащей на эволюте, и радиус его равен AA'. Чтобы проверить эти результаты, найдем радиус кривизны в точке $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$. Согласно формуле (5) § 131, будем иметь:

$$\frac{1}{K}=R=\frac{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2}$$

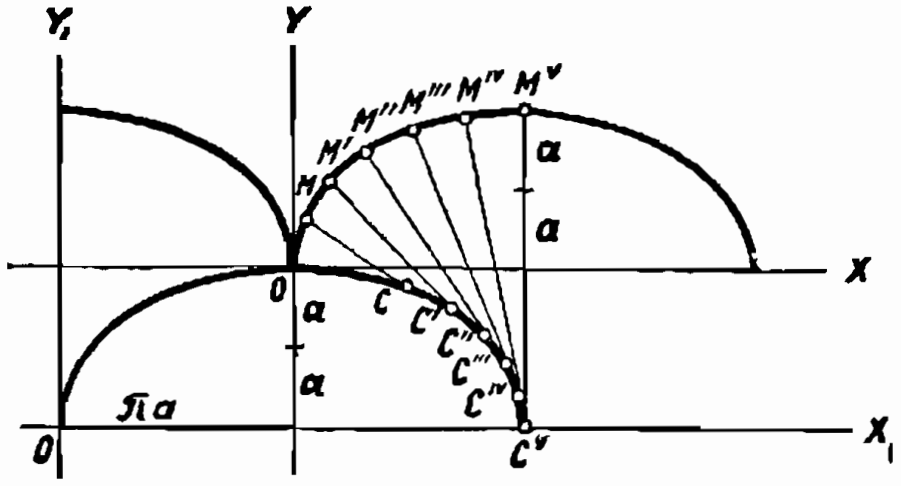


Рис. 151

(при $t=1$), и это значение совпадает со значением длины отрезка AA':

$$AA'=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{7}{6}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

Пример 4. Найти параметрические уравнения эволюты циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t),\\ y&=a(1-\cos t).\end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Решение. Действуя, как в примере § 136, найдем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Подставляя эти результаты в формулы (8) § 136, получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=a(t+\sin t),\\ \beta&=-a(1-\cos t).\end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

Примечание. Если исключить t из уравнения (F), то получится уравнение эволюты данной циклоиды $OMMY$ (рис. 151), отнесенное к осям OX

и OY. Преобразуем уравнения (F), отнеся их к новым осям OX_1 и OY_1 посредством формул

$$\alpha = x_1 - \pi a, \quad \beta = y_1 - 2a, \quad t = t_1 - \pi.$$

По подстановке в (F) и по упрощении уравнения эволюты примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a(t_1 - \sin t_1), \\ y_1 &= a(1 - \cos t_1). \end{aligned}\right\} \tag{G}$$

Так как (G) и (E) тождественны по форме, то заключаем, *что эволюта циклоиды сама есть циклоида, производящий круг которой равен производящему кругу данной циклоиды.*

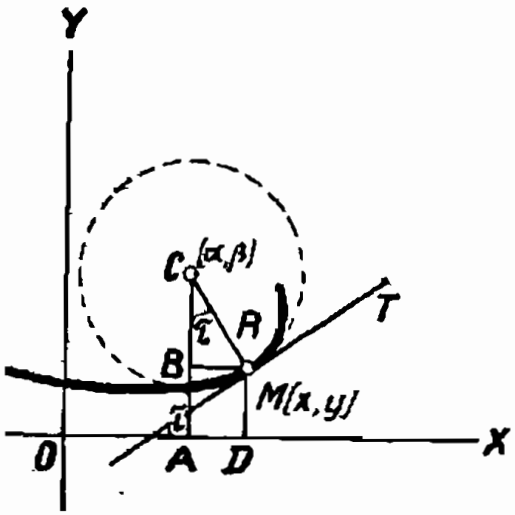


Рис. 152

§ 138. Свойства эволюты. Эволюта имеет два интересные свойства.

Теорема 1. *Нормаль в точке $M(x, y)$ к данной кривой есть касательная к эволюте, причем точкой прикосновения ее к эволюте служит центр кривизны $C(\alpha, \beta)$ для точки M.*

Доказательство. Из рисунка 152 мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - R\sin\tau, \\ \beta &= y + R\cos\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Отрезок MC лежит на нормали к кривой в точке M, и мы имеем:

$$\operatorname{tg} \textit{наклона } MC = \frac{y-\beta}{x-\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} =$$
$$= \operatorname{tg} \textit{наклона нормали в точке } M.$$

Мы теперь должны показать, что tg наклона эволюты в точке $C(\alpha, \beta)$ равен tg наклона MC. Заметим, что

$$\operatorname{tg} \textit{наклона эволюты} = \frac{d\beta}{d\alpha}, \tag{2}$$

ибо α и β суть прямоугольные координаты какой-нибудь точки эволюты.

Выберем за независимое переменное длину дуги s данной кривой. Тогда x, y, R, τ, α, β суть функции буквы s. Дифференцируя (1) по s, получаем:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - R\cos\tau\frac{d\tau}{ds} - \sin\tau\frac{dR}{ds}, \tag{3}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\sin\tau\frac{d\tau}{ds} + \cos\tau\frac{dR}{ds}. \tag{4}$$

Но $\frac{dx}{ds}=\cos\tau$ и $\frac{dy}{ds}=\sin\tau$ [формулы (4) § 123], и также $\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{R}$. Подставляя это в (3) и в (4) и произведя приведение, мы получаем:

$$\frac{d\alpha}{ds}=-\sin\tau\cdot\frac{dR}{ds}\quad\text{и}\quad\frac{d\beta}{ds}=\cos\tau\cdot\frac{dR}{ds}. \tag{5}$$

Наконец, деля второе равенство (5) на первое, мы имеем окончательно:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\operatorname{ctg}\tau=-\frac{1}{\operatorname{tg}\tau}=\text{наклону } MC, \text{ ч. т. д.} \tag{6}$$

Теорема 2. *Длина дуги σ эволюты всегда равна разности радиусов кривизны R_1 и R_2 данной кривой, прикасающихся к σ в ее концах, лишь бы вдоль соответствующей дуги s данной кривой R изменялся монотонно* (т. е. все время либо возрастая, либо убывая).

Доказательство. Возвышая в квадрат равенства (5) и складывая их, мы получаем:

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2=\left(\frac{dR}{ds}\right)^2. \tag{7}$$

Далее, обозначая через σ длину дуги эволюты, имеем, очевидно,

$$d\sigma^2=(d\alpha)^2+(d\beta)^2$$

по формуле (1) дифференциала дуги (см. § 123).

Отсюда равенство (7) утверждает, что

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=\left(\frac{dR}{ds}\right)^2,\ \text{или}\ \frac{d\sigma}{ds}=\pm\frac{dR}{ds}. \tag{8}$$

Но так как вдоль дуги s данной кривой радиус кривизны R изменяется *монотонно* (согласно нашему предположению, заранее оговоренному в теореме), то мы все время имеем:

$$\textit{либо}\ \frac{d\sigma}{dR}=+1,\quad\textit{либо}\ \frac{d\sigma}{dR}=-1. \tag{9}$$

Это же означает, что *быстрота изменения дуги σ эволюты по отношению к радиусу кривизны R есть величина постоянная, равная:* либо $+1$, либо -1.

В § 79 было указано, что когда какая-нибудь величина y изменяется с постоянной быстротой a относительно переменной x, то тогда изменение Δy, вызванное переходом x от прежнего численного значения x к новому численному значению $x+\Delta x$, строго равно быстроте изменения a, умноженной на Δx, т. е. $\Delta y=a\Delta x$.

Отсюда мы выводим[1], что в рассматриваемом случае соответствующие приращения дуги эволюты σ и радиуса кривизны R должны быть *численно равными*. Это означает, что

$$\sigma - \sigma_0 = \pm (R - R_0)$$

или, на рисунке 147, дуга

$$CC_1 = \pm (M_1C_1 - MC), \text{ ч. т. д.}$$

Этим теорема доказана.

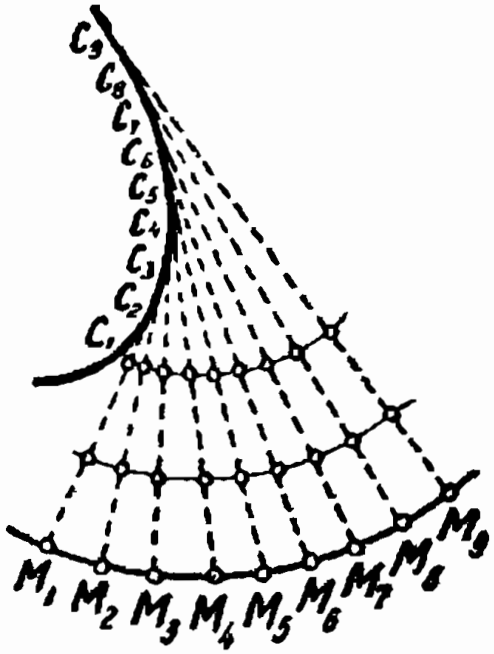


Рис. 153

В примере § 131 мы имеем:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

Это выражение мы получаем, подставляя найденные там производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, выраженные через параметр t, в написанную здесь формулу радиуса кривизны R. Из этого выражения мы видим, что имеем для $t = 0$ также и $R = 0$, и что имеем для $t = \pi$ величину $R = -4a$. Отсюда мы заключаем, что в точке O радиус кривизны нулевой, а в точке MV — равный $4a$. Поэтому дуга $OCCV$ нижней циклоиды равна $4a$ (рис. 151).

Длина дуги циклоиды равна восьми радиусам производящего круга.

§ 139. Эвольвенты и их механическое построение. Представим себе, что некоторая гибкая линейка согнута в форме кривой C_1C_9 (рис. 153), т. е. в форме эволюты кривой M_1M_9, и предположим, что нить длины R_9, одним концом укрепленная в точке C_9, огибает эту линейку (или кривую). Из результатов последнего параграфа ясно, что если эту нить развернуть и натянуть, то свободный конец ее опишет кривую M_1M_9.

[1] Мы должны здесь подчеркнуть, что этот вывод, безусловно, верный сам по себе во всех случаях, не является, однако, здесь вполне оправданным, ибо в сказанном параграфе речь идет о постоянстве *средней* быстроты, здесь же мы имеем дело лишь с постоянством *мгновенной* быстроты. Ясно, что если средняя быстрота постоянна и равна, например a, то мгновенная быстрота также постоянна и равна той же величине a. Но обратное заключение о постоянстве средней быстроты при постоянстве быстроты мгновенной не является очевидным и есть, собственно, дело *интегрального исчисления*. А в нашем случае мы как раз и сделали это обратное заключение о необходимости л и б о равенства $\sigma = R +$ постоянное, л и б о равенства $\sigma = -R +$ постоянное, исходя из равенства (9), т. е. исходя из постоянства лишь *мгновенной* быстроты, а не с р е д н е й. Из доказанных равенств (9) следует только то, что: л и б о имеем для всякого R равенство $\frac{d(\sigma - R)}{dR} = 0$, либо $\frac{d(\sigma + R)}{dR} = 0$. Но что функция, имеющая производную тождественной нулю, есть величина постоянная, т. е. что имеем л и б о $\sigma - R =$ постоянной, либо $\sigma + R =$ постоянной, это дело уже интегрального исчисления.

Кривая M_1M_9 называется «*эвольвентой*» *кривой* C_1C_9. Очевидно, любая точка нити опишет эвольвенту, так что данная кривая имеет бесчисленное множество эвольвент, но только одну эволюту.

Эвольвенты M_1M_9, $M_1'M_9'$, $M_1''M_9''$ называются *параллельными кривыми*, ибо расстояние между любыми двумя из них, измеряемое по их общим нормалям, постоянно.

Рекомендуем учащемуся ради упражнения построить параболу и эллипс (§ 137) по их эволютам.

ЗАДАЧИ

Найти координаты центра кривизны и уравнение эволюты для каждой из следующих кривых:

1. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Отв. $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$, $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$;

уравнение эволюты: $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

2. Гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Отв. $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;

уравнение эволюты: $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

3. Найти координаты центра кривизны кубической параболы $y^3=a^2x$.

Отв. $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$, $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$.

4. Показать, что для параболы $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ имеет место соотношение $\alpha+\beta=3(x+y)$.

5. Дано уравнение равнобочной гиперболы $2xy=a^2$, показать, что

$$\alpha+\beta=\frac{(y+x)^3}{a^2},\quad \alpha-\beta=\frac{(y-x)^3}{a^2}.$$

Отсюда уравнение эволюты $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}-(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

Найти параметрические уравнения эволют следующих кривых в функции параметра t.

6. Гипоциклоиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$ Отв. $\begin{cases} \alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\cdot\sin^2 t. \\ \beta=a\sin^3 t+3a\cos^2 t\cdot\sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=\frac{3}{2}(1+2t^2-t^4), \\ \beta=-4t^3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=a\cos t, \\ \beta=a\sin t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-6. \end{cases}$ Отв. $\begin{cases} \alpha=-\frac{4}{3}t^3, \\ \beta=3t^2-\frac{3}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=6-t^2, \\ y=2t. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=4-3t^2, \\ \beta=-2t^3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2-2. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=-2t^3, \\ \beta=3t^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=4t, \\ y=3+t^2. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=-t^3, \\ \beta=11+3t^2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=9-t^2, \\ y=2t. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=7-3t^2, \\ \beta=-2t^3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=2t, \\ y=\frac{1}{3}t^3. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=\frac{4t-t^5}{4}, \\ \beta=\frac{12+5t^4}{6t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3, \\ y=t^2. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=\frac{4t^2+12t}{3}, \\ \beta=-\frac{2t^2+t^4}{2}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=2t, \\ y=\frac{3}{t}. \end{cases}$ Отв. $\begin{cases} \alpha=\frac{12t^4+9}{4t^3}, \\ \beta=\frac{27+4t^4}{6t}. \end{cases}$

17. Полукубической параболы $x^3=ay^2$.

Отв. $\alpha=-x-\frac{9x^2}{2a}$, $\beta=4\left(x+\frac{a}{3}\right)\sqrt{\frac{x}{a}}$;

уравнение эволюты: $729a\beta^2=16\left[2a+\sqrt{a^2-18a\alpha}\right]^2\left[\sqrt{a^2-18a\alpha}-a\right]$.

18. Трактрисы $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$.

Отв. $\alpha=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\beta=\frac{a^2}{y}$; уравнение эволюты: $\beta=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}}+e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)$.

§ 140. Преобразование производных. Некоторые формулы, выводимые выше самостоятельно, т. е. каждый раз отдельным образом и, преимущественно, на основе геометрических соображений могут быть получены сразу из других формул, устанавливающих соотношения между производными. Здесь представлены два случая.

Обмен ролей функции и аргумента.

Обозначение. Пусть $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

$$x'=\frac{dx}{dy},\quad x''=\frac{dx'}{dy}=\frac{d^2x}{dy^2}$$ и т. д.

Тогда, *по формуле* IX § 57, имеем:

$$y' = \frac{1}{x'}. \tag{1}$$

Прежде всего, *по самому смыслу обозначения* y'', имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\frac{dy'}{dy}}{x'}.$$

С другой стороны, ищем $\frac{dy'}{dy}$. Имеем:

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{x'}\right)}{dy} \text{ [по формуле (1)]} = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Значит:

$$y'' = -\frac{x''}{x'^3}. \tag{2}$$

Далее, *по самому смыслу обозначения* y''', имеем:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\frac{dy''}{dy}}{x'}.$$

С другой стороны, ищем $\frac{dy''}{dy}$. Имеем:

$$\frac{dy''}{dy} = \frac{d\left(-\frac{x''}{x'^3}\right)}{dy} \text{ [по формуле (2)]} = -\frac{x'x''' - 3x''^2}{x'^4}.$$

Значит:

$$y''' = \frac{x'x''' - 3x''^2}{x'^5}. \tag{3}$$

И так далее для высших производных. Этими формулами выражения, составленные из y', y'', y''' и т. д., преобразуются в выражения, состоящие из x', x'', x''' и т. д.

Пример. Преобразовать выражение кривизны K, полученное в предположении x независимым переменным, в выражение, где за независимое переменное принято y.

Решение. В § 136 мы получили $K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, считая за независимое переменное x. Пользуясь формулами (1) и (2), мы теперь имеем:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{x''}{x'^3}}{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x''}{(x'^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Переход от прямоугольных координат к полярным. Преобразование прямоугольных координат в полярные дается формулами аналитической геометрии

$$x=\rho\cos\theta \quad \text{и} \quad y=\rho\sin\theta. \tag{1}$$

Если полярное уравнение кривой есть $\rho=f(\theta)$, тогда уравнения (1) являются параметрическими уравнениями для этой кривой, ибо θ есть параметр, раз ρ выражен тоже через θ.

Обозначение. Независимое переменное есть θ, и x', x'', y', y'', ρ', ρ'' обозначают последовательные производные этих переменных по θ.

Дифференцируя соотношения (1), имеем:

$$x'=-\rho\sin\theta+\rho'\cos\theta, \quad y'=\rho\cos\theta+\rho'\sin\theta;$$
$$x''=-2\rho'\sin\theta+(\rho''-\rho)\cos\theta, \quad y''=2\rho'\cos\theta+(\rho''-\rho)\sin\theta.$$

Формулами (1), (2) и (3) выражение, составленное из x, y, x', y', x'', y'', преобразуется в выражение, состоящее из ρ, θ, ρ', ρ''.

Пример. Вывести кривизну K в полярных координатах прямо из ее выражения в параметрическом виде.

Решение. В § 131 мы имеем $K=\dfrac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Беря числитель и знаменатель отдельно, мы подставляем выражения (2) и (3) и делаем приведение. Это нам дает:

$$x'y''-y'x''=\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''; \quad x'^2+y'^2=\rho^2+\rho'^2.$$

Отсюда мы прямо получаем выражение кривизны в полярных координатах, данное в § 132 *на основе геометрических соображений.*

ЗАДАЧИ

В задачах 1—5 переменить роли независимого и зависимого переменного.

1. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+y\dfrac{dy}{dx}=0.$ Отв. $x\dfrac{d^2x}{dy^2}-y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0.$

2. $\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+(y-2)\dfrac{d^2y}{dx^2}=0.$ $1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2-(y-2)\dfrac{d^2x}{dy^2}=0.$

3. $(y-4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d^2y}{dx^2}=0.$ $\dfrac{d^2x}{dy^2}+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2+y-4=0.$

4. $xy\dfrac{d^3y}{dx^3}+y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4.$

5. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)=y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4.$

6. Преобразовать

$$\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},$$

принимая $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

Отв. $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$.

7. Пусть $f(x, y) = 0$ уравнение кривой. Найти выражение для ее наклона $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ в полярных координатах.

Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\rho \cos \theta + \sin \theta \cdot \dfrac{d\rho}{d\theta}}{-\rho \sin \theta + \cos \theta \cdot \dfrac{d\rho}{d\theta}}$.

8. Преобразовать уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{x}{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{1-x^2} = 0$ в предположении $x = \cos t$.

Отв. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

9. Преобразовать уравнение $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{a^2}{x^2}y = 0$, предполагая $x = \dfrac{1}{t}$.

Отв. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$.

ГЛАВА XIV

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 141. Теорема Ролля. Эта теорема лежит в основании теоретического развития дифференциального и интегрального исчислений.

Читается эта теорема так.

Если, во-первых, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *обращается в нуль в его концах,* $f(a)=0$ *и* $f(b)=0$, *и если,* во-вторых, *она имеет во всякой внутренней его точке производную* $f'(x)$, *то тогда эта производная должна быть* равной нулю *в некоторой внутренней точке* ξ *этого отрезка, т. е. мы должны иметь* $f'(\xi)=0$, *где* $a<\xi<b$.

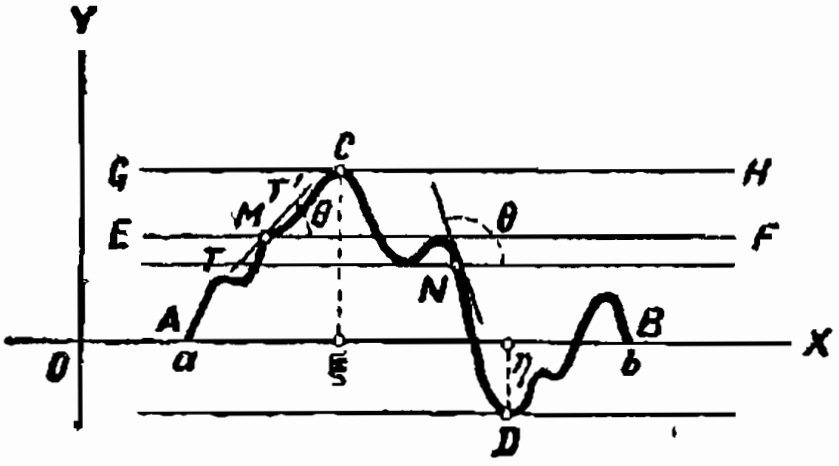


Рис. 154

Доказательство этой сильной теоремы совпадает с ее геометрическим истолкованием. В самом деле, раз функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то уравнение

$$y=f(x)$$

изображает некоторую *непрерывную кривую дугу ACDB* (рис. 154). Далее, раз мы имеем $f(a)=0$ и $f(b)=0$, эта кривая дуга своими концами A и B должна *опираться на ось абсцисс.* Наконец, раз

имеется производная $f'(x)$ в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$, то рассматриваемая дуга $ACDB$ в каждой своей промежуточной точке M, лежащей между ее концами A и B, имеет *касательную* TT', т. е. вполне определенное *направление* и, значит, вполне определенный *наклон* к горизонту (т. е. к оси абсцисс OX).

Если в какой-нибудь точке M касательная TT' к дуге не параллельна горизонту, образуя с осью абсцисс некоторый *ненулевой* угол θ (*либо острый* как в M, *либо тупой* как в N), тогда горизонтальная прямая EF, проведенная через M, *разрежет дугу $ACDB$ на две части так, что ее точки будут лежать по разные стороны от EF* (рис. 155).

Действительно, раз касательная TT' не параллельна оси OX, то прямая EF разрезает ее на две части TM и MT', лежащие по разные стороны. А так как всякая кривая линия имеет в точке M *то же самое направление*, какое имеет касательная прямая TT', проведенная к ней в точке M, то прямая EF должна разрезать и кривую дугу $ACDB$ таким же образом, каким она разрезает TT', т. е. на две части, лежащие по разные стороны.

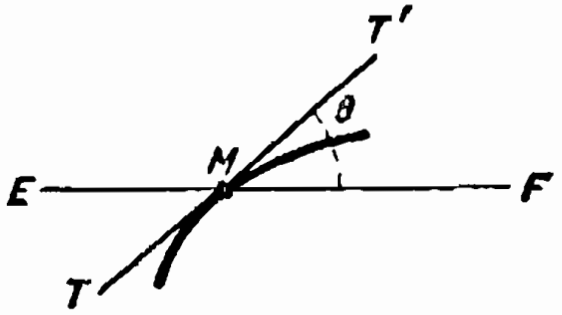


Рис. 155

Заметив это, возьмем наивысшую точку C и наинизшую точку D рассматриваемой дуги. Если наивысших точек имеется несколько, мы за точку C берем одну какую-нибудь из них. Также за D берем одну какую-нибудь из наинизших точек, если их имеется несколько. Обозначаем через ξ абсциссу точки C и через η абсциссу точки D. Ясно, что $f(\xi)$ есть наибольшее из численных значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а $f(\eta)$ наименьшее из них. Заметим, что *одна* из точек ξ и η легко может явиться концом отрезка $[a, b]$, *но обе они* будут тогда, когда $f(\xi) = f(\eta) = 0$ и, значит, когда функция $f(x)$ *тождественно равна нулю на отрезке* $[a, b]$. Предположим же, что имеем $a < \xi < b$, т. е. что точка ξ есть промежуточная между концами a и b отрезка $[a, b]$ и, значит, что соответствующая точка C есть промежуточная точка на кривой дуге $ACDB$ между ее концами A и B.

Проведя горизонтальную прямую GH через точку C, мы сразу замечаем, что она *должна явиться касательной к рассматриваемой дуге в точке C*. Ибо, если касательная к дуге в точке C не горизонтальна, то тогда она должна делать ненулевой угол с GH. А тогда прямая GH должна разрезать дугу $ACDB$ на две части, лежащие по разные стороны от GH. Но это невозможно, ибо точка C есть наивысшая, и поэтому кривая дуги дол-

на вся лежать под прямой GH, т. е. лишь по одну ее сторону.

Таким образом, касательная в точке C должна быть горизонтальной и, значит, мы обязаны иметь:

$$f'(\xi)=0 \text{ и } a<\xi<b.$$

А это и доказывает полностью теорему Ролля.

Замечание 1. Теорема Ролля устанавливает только существование промежуточной точки ξ, в которой $f'(\xi)=0$, но отнюдь не указывает, где именно она находится на отрезке $[a, b]$. Таким образом,

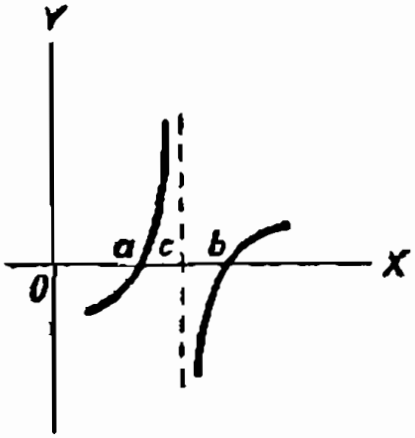


Рис. 156a

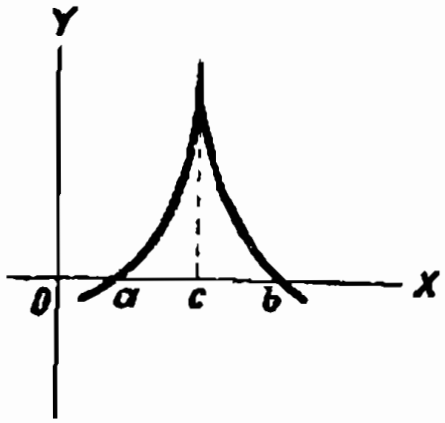


Рис. 156b

место точки ξ остается для нас неизвестным и у нас нет никаких средств отыскать ξ. Это необходимо помнить, когда применяем теоремы о среднем, о чем речь будет дальше.

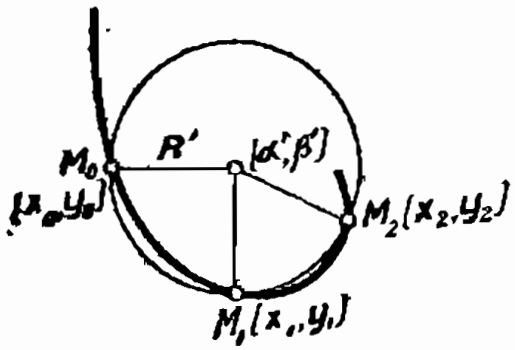


Рис. 157

Замечание 2. Непрерывность функции $f(x)$ и наличие производной (конечной или бесконечной) $f'(x)$ очень важны для верности теоремы Ролля, ибо когда их нет, теорема Ролля легко делается неверной. Так, рисунок 156a показывает, что при разрывности $f(x)$ (в точке c) теорема Ролля может оказаться неверной. Далее, рисунок 156b показывает, что при непрерывности функции $f(x)$ и при отсутствии производной $f'(x)$ в одной только точке (в точке c нет никакой производной, даже бесконечной, ибо $f'(x)\longrightarrow+\infty$, когда $x\longrightarrow c$ слева, и $f'(x)\longrightarrow-\infty$, когда $x\longrightarrow c$ справа), теорема Ролля также может быть неверной.

Мы дадим сперва два приложения теоремы Ролля к геометрии.

§ 142. Соприкасающийся круг. Если через три точки (рис. 157) M_0, M_1, M_2 плоской кривой провести круг, и если точки M_1 и M_2 приближать к M_0, двигая их по кривой к M_0 как к их предельному положению, то круг, вообще говоря, и по величине и по положению будет приближаться к некоторому предельному

кругу, называемому *соприкасающимся*[1] *кругом кривой в точке* M_0.

Теорема. *Соприкасающийся круг тождествен кругу кривизны.*

Доказательство. Пусть уравнение кривой (рис. 157) будет:

$$y=f(x), \tag{1}$$

и пусть x_0, x_1, x_2 будут абсциссы, а y_0, y_1, y_2 ординаты точек M_0, M_1, M_2, соответственно (α', β') — координаты центра, а R' — радиус круга, проходящего через эти три точки. Уравнение этого круга будет:

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=R'^2;$$

так как координаты точек M_0, M_1, M_2 должны удовлетворять этому уравнению, то мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}(x_0-\alpha')^2+(y_0-\beta')^2-R'^2=0,\\(x_1-\alpha')^2+(y_1-\beta')^2-R'^2=0,\\(x_2-\alpha')^2+(y_2-\beta')^2-R'^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь *функцию* x, определяемую уравнением

$$F(x)=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2,$$

где y заранее нужно заменить функцией $f(x)$ из (1).

Из уравнения (2) находим:

$$F(x_0)=0,\quad F(x_1)=0,\quad F(x_2)=0.$$

По теореме Ролля $F'(x)$ должна обращаться в нуль, по крайней мере, при двух значениях x: одном, лежащем между x_0 и x_1, например x', и другом, лежащем между x_1 и x_2, например x'', т. е.

$$F'(x')=0,\quad F(x'')=0.$$

По той же самой причине $F''(x)$ должна обращаться в нуль при некотором значении x, лежащем между x' и x'', например при x_3, т. е.

$$F''(x_3)=0.$$

Следовательно, элементы[2] α', β' и R' круга, проходящего через M_0, M_1 и M_2, должны удовлетворять трем уравнениям:

$$F(x_0)=0,\quad F'(x')=0,\quad F''(x_3)=0.$$

---

[1] Этот круг нельзя называть «касающимся», потому что касающихся кругов к данной кривой в точке M_0 *бесконечно много* (все они имеют общую касательную, служащую касательной и для данной кривой в точке M_0), а соприкасающийся круг *только один*. Следует делать различие между *соприкосновением* и простым *касанием*: соприкосновение есть частный случай касания, именно это есть касание весьма сильное, очень тесное, т. е. касание высшего порядка.

[2] То есть координаты центра круга (α', β') и величина его радиуса R'.

Пусть теперь точки M_1 и M_2 приближаются к M_0 как к предельному положению (рис. 158); тогда x_1, x_2, x', x'' и x_3 все будут приближаться к x_0 как к пределу, и, следовательно, элементы α, β, R соприкасающегося круга определятся из трех уравнений:

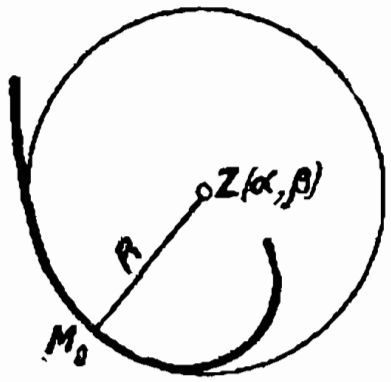


Рис. 158

$$F(x_0)=0, \quad F'(x_0)=0, \quad F''(x_0)=0,$$

или, опуская значки:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2; \tag{A}$$

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0, \tag{B}$$

продифференцировав (A); и

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{C}$$

продифференцировав (B).

Решая (B) и (C) относительно $x-\alpha$ и $y-\beta$, находим (предполагая, что $\frac{d^2y}{dx^2}\neq 0$):

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha&=\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},\\ y-\beta&=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Отсюда координаты α и β центра соприкасающегося круга суть:

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=x-\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},\\ \beta&=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь предполагается, что $\frac{d^2y}{dx^2}\neq 0$.

Подставляя значения $x-\alpha$ и $y-\beta$ из (D) в (A) и решая относительно R, находим:

$$R=\pm\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{4}$$

Формулы (3) тождественны с формулами (8) § 136, дающими координаты α и β *центра кривизны*; значит, круг кривизны и соприкасающийся круг имеют один и тот же центр. А так как выражение радиуса соприкасающегося круга, даваемое формулой (4), совпадает с выражением радиуса кривизны, найденным в § 133, формула (7), то отсюда следует, что *соприкасающийся круг и круг кривизны есть тот же самый круг*, ч. т. д.

Выше касательная прямая была определена как предельное положение секущей, проведенной через точку M и близкую к ней точку M' на кривой. Мы видим теперь, что круг кривизны в точке M может быть определен, как предельное положение круга, проведенного через точку M и через две другие точки M' и M'' на кривой, близкие к M.

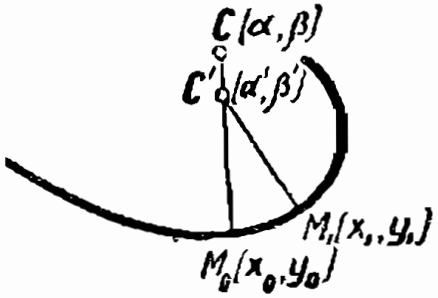


Рис. 159

§ 143. Предельная точка пересечения двух близких нормалей. *Теорема. Центр кривизны C для точки M кривой есть предельное положение пересечения нормали к кривой в точке M с близкой к ней нормалью.*

Доказательство. Пусть уравнение кривой будет

$$y=f(x). \tag{A}$$

Уравнение нормалей к кривой в двух близких точках M_0 и M_1 будут [1]:

$$(x_0-X)+(y_0-Y)\frac{dy_0}{dx_0}=0,$$
$$(x_1-X)+(y_1-Y)\frac{dy_1}{dx_1}=0.$$

Если нормали пересекаются в точке C' (α', β') (рис. 159), то координаты этой точки (α', β') должны удовлетворять обоим уравнениям, что дает:

$$\left.\begin{aligned}(x_0-\alpha')+(y_0-\beta')\frac{dy_0}{dx_0}=0,\\ (x_1-\alpha')+(y_1-\beta')\frac{dy_1}{dx_1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Рассмотрим теперь *функцию* от x, определяемую уравнением

$$\varphi(x)=(x-\alpha')+(y-\beta')\frac{dy}{dx},$$

где y заранее нужно заменить через $f(x)$ из (A).

[1] На основании (2) § 72, причем X и Y суть *текущие координаты*.

Уравнения (B) показывают, что

$$\varphi(x_0)=0, \quad \varphi(x_1)=0.$$

Но по теореме Ролля, § 141, $\varphi'(x)$ при некоторых значениях x, лежащих между x_0 и x_1, например при $x=x'$, должна обращаться в нуль. Следовательно, α' и β' удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi(x_0)=0, \quad \varphi'(x')=0.$$

Если теперь M_1 будет приближаться к M_0 как к предельному положению, то x' будет приближаться к x_0, и в пределе получим:

$$\varphi(x_0)=0, \quad \varphi'(x_0)=0;$$

значит, $C'(\alpha', \beta')$ будет приближаться к некоторому предельному положению, а именно к центру кривизны $C(\alpha, \beta)$, соответствующему точке M_0 на кривой. Для доказательства, опустив указатели и написав два последние уравнения в виде:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

усматриваем, что, решая их относительно α и β, получим те же результаты, что и решая (B) и (C) предыдущего параграфа относительно α и β, ч. т. д.

§ 144. Теоремы о среднем (законы среднего). Мы начинаем излагать ряд теорем о среднем с предложения.

Теорема о среднем Коши. Если, во-первых, *функции* $f(x)$ и $F(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и имеют во всякой внутренней его точке производные* $f'(x)$ и $F'(x)$; если, во-вторых, *производная* $F'(x)$ *не обращается в нуль ни в какой внутренней точке отрезка* $[a, b]$, *то* тогда *имеем равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \text{где } a<\xi<b. \tag{A}$$

Доказательство. Возьмем вспомогательную функцию $\Phi(x)$, тождественную правой части равенства:

$$\Phi(x)\equiv\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot[F(x)-F(a)]-[f(x)-f(a)]. \tag{1}$$

Ясно, что $\Phi(a)=0$ и $\Phi(b)=0$. Поэтому можно применить теорему Ролля. Дифференцируя, имеем:

$$\Phi'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(x)-f'(x). \tag{2}$$

По теореме Ролля эта производная должна уничтожаться для некоторого *среднего* числа ξ, т. е. промежуточного между a и b. Это дает:

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)-f'(\xi)=0. \tag{3}$$

Разделив на $F'(\xi)$ (что законно, ибо $F'(x)$ нигде в нуль не обращается внутри отрезка $[a, b]$) и перенося член, зависящий от среднего ξ, вправо, мы получаем равенство (A), выражающее теорему о среднем Коши, ч. т. д.

Следствие теоремы о среднем. Если, во-первых, *функции* $f(x)$ и $F(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *так же, как их первые* $n-1$ *производные, а обе* n*-е производные* $f^{(n)}(x)$ *и* $F^{(n)}(x)$ *просто только существуют во всякой внутренней его точке;* если, во-вторых, *функции* $f(x)$ *и* $F(x)$ *так же, как их первые* $n-1$ *производные уничтожаются в точке* $x=a$, *а производная* $F^{(n)}(x)$ *не уничтожается ни в какой внутренней точке отрезка* $[a, b]$, *то* тогда *имеем равенство:*

$$\frac{f(b)}{F(b)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{F^{(n)}(\xi)}, \quad \text{где } a<\xi<b. \tag{B}$$

Доказательство. Это следствие доказывается *шаг за шагом.* Прежде всего заметим, что ни сама функция $F(x)$ и ни одна из ее первых n производных не уничтожаются ни в какой внутренней точке отрезка $[a, b]$. Ибо, если бы случилось, что $F^{(k)}(x^*)=0$, где $a<x^*<b$, то, приняв во внимание, что $F^{(k)}(a)=0$, мы по теореме Ролля должны иметь $F^{(k+1)}(x^{**})=0$, где $a<x^{**}<x^*$. Значит, если бы уничтожалась k-я производная внутри отрезка $[a, b]$, то то же самое произошло бы и с $k+1$-й производной. Таким образом, мы бы дошли до уничтожения и последней n-й производной $F^{(n)}(x)$, а она, по условию, нигде внутри отрезка $[a, b]$ не равна нулю. Значит, *все функции* $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(n)}(x)$ *отличны от нуля внутри отрезка* $[a, b]$.

Теперь по теореме о среднем Коши мы имеем:

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(b_1)}{F'(b_1)}, \quad \text{где } a<b_1<b.$$

Так как $f(a)=0$ и $F(a)=0$, то имеем просто:

$$\frac{f(b)}{F(b)}=\frac{f'(b_1)}{F'(b_1)}, \quad a<b_1<b. \tag{4}$$

Мы должны заметить, что равенство (4) выражает переход от отношения $\frac{f(b)}{F(b)}$ к равному ему следующему за ним отношению $\frac{f'(b_1)}{F'(b_1)}$. Но так как функции $f'(x)$ и $F'(x)$ имеют буквально те же самые свойства, как и первоначальные функции $f(x)$ и $F(x)$, то мы можем спуститься от отношения $\frac{f'(b_1)}{F'(b_1)}$ к следующему за ним равному ему отношению и написать равенство:

$$\frac{f'(b_1)}{F'(b_1)}=\frac{f''(b_2)}{F''(b_2)}, \quad a<b_2<b_1. \tag{5}$$

А от него мы можем спуститься к дальнейшему ближайшему равенству:

$$\frac{f''(b_2)}{F''(b_2)} = \frac{f''(b_3)}{F''(b_3)}, \quad a < b_3 < b_2 \tag{6}$$

и так далее, пока не напишем последнее равенство:

$$\frac{f^{(n-1)}(b_{n-1})}{F^{(n-1)}(b_{n-1})} = \frac{f^{(n)}(b_n)}{F^{(n)}(b_n)}, \quad a < b_n < b_{n-1}. \tag{7}$$

Сопоставляя все написанные равенства, начиная с (4), до самого последнего (7), и обозначая b_n буквой ξ, мы получаем окончательно равенство (B):

$$\frac{f(b)}{F(b)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{F^{(n)}(\xi)}, \quad \text{где } a < \xi < b, \quad \text{ч. т. д.}$$

Теорема о среднем Лагранжа. *Если $f(x)$ есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая во всякой внутренней его точке производную $f'(x)$, то имеется такое число ξ, промежуточное между a и b, что*

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi), \quad a < \xi < b. \tag{C}$$

Доказательство. В теореме о среднем Коши, выражаемой формулой (A), мы полагаем $F(x) = x$. Тогда $F(b) - F(a) = b - a$ и $F'(x) = 1$. Значит, $F'(\xi) = 1$. Итак, в этом частном случае формула (A) дает:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{где } a < \xi < b. \tag{D}$$

Отсюда, умножая на $b - a$ полученное равенство, мы приходим к формуле Лагранжа (C), ч. т. д.

Теореме о среднем Лагранжа легко можно придать еще и другой смысл. С этой целью мы, вместо буквы a, будем писать букву x, и вместо буквы b будем писать сумму $x + \Delta x$. Итак, полагаем $a = x$, $b = x + \Delta x$. Тогда $b - a = \Delta x$. Что же касается до *среднего числа* ξ, являющегося промежутком между a и b: т. е. между x и $x + \Delta x$, то его теперь придется писать в виде

$$\xi = x + \theta \cdot \Delta x,$$

где θ есть положительное число *промежуточное между* 0 *и* 1; его иногда (не совсем верно) называют «*правильной дробью*», хотя θ может оказаться и иррациональным числом. Подставляя указанные обозначения в формулу Лагранжа (D), мы получаем замечательное равенство:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x) \tag{E}$$

или, обозначая функцию $f(x)$ буквой y, т. е. полагая $y = f(x)$,

мы можем переписать полученную формулу (E) в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + 0\Delta x). \qquad (E^*)$$

Смысл обеих формул (E) и (E*) тот, что *когда независимое переменное x получает произвольное конечное приращение* Δx, *а функция y получает вследствие этого соответствующее* конечное *приращение* Δy, *то отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *двух сказанных конечных приращений* Δy *и* Δx *не нуждается в стремлении* Δx *к нулю, чтобы стать производной, ибо оно, еще до какого-либо стремления* Δx *к нулю, при всяком конечном* Δx уже есть

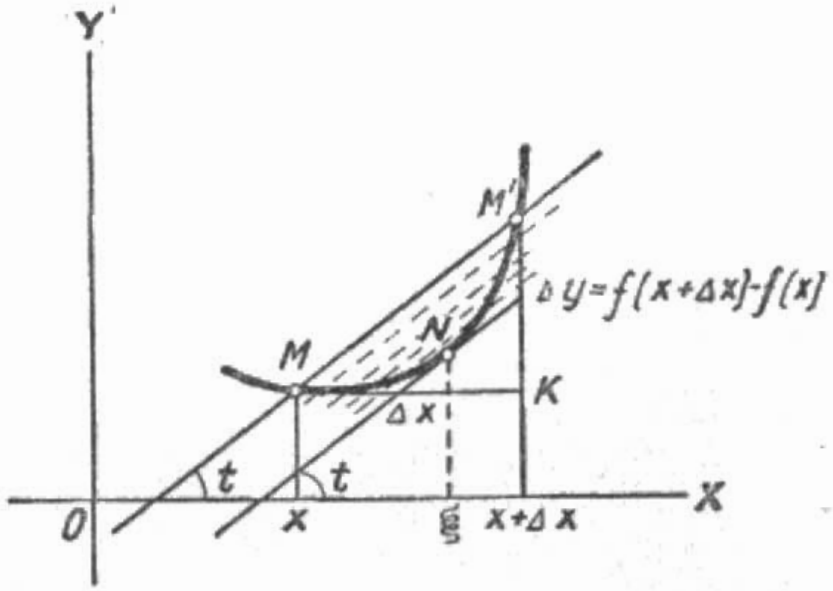


Рис. 160

производная, *но только не в точке x, а в близкой точке* $x + 0\Delta x$.

По этой причине теорема о среднем Лагранжа, записанная в виде формулы (E) и (E*), получила имя теоремы о конечном приращении.

В этом виде теорема Лагранжа имеет простое геометрическое истолкование.

На рисунке 160 проведен график функции $y = f(x)$. Точки: $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ лежат по кривой. Отрезки $MK = \Delta x$ и $KM' = \Delta y$. Поэтому:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} t, \qquad (1)$$

где t угол наклона хорды MM' к горизонту (т. е. к оси OX).

Если мы станем двигать вниз прямую MM', заставляя ее сохранять прежний угол t с осью OX, т. е. перемещая ее параллельно самой себе, то она сперва будет *разрезать* нашу кривую в точном смысле этого слова, т. е. иметь ее точки по обе свои стороны. Но затем она будет все более и более приближаться к

такому предельному положению, при котором на ней окажутся уже *последние* точки кривой дуги так, что по одну сторону этой предельной параллели совсем не окажется уже никакой точки дуги, и, значит, вся дуга будет находиться по другую сторону этой параллели. На рисунке проведена эта предельная параллель с последней на ней точкой N кривой дуги. Ясно, что *касательная прямая в такой точке N должна совпасть с этой предельной параллелью.* Ясно, наконец, что точка N лежит между концами M и M' кривой дуги так, что абсцисса ξ точки N лежит между абсциссами x и $x+\Delta x$ концов M и M', т. е имеем неравенство $x<\xi<x+\Delta x$. Отсюда мы должны иметь равенство:

$$\xi=x+\theta\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Из того обстоятельства, что касательная к дуге MM' в точке N параллельна хорде MM', следует равенство:

$$f'(\xi)=f'(x+\theta\Delta x)=\operatorname{tg} t. \tag{2}$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), мы видим, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x+\theta\Delta x).$$

А это и есть формула Лагранжа (E*).

Таким образом, теорема о конечном приращении выражает тот геометрический факт, что на всякой дуге MNM', стягиваемой хордой MM', имеется такая промежуточная точка N, касательная в которой параллельна хорде MM'. Ясно, что это предложение для наблюдателя, идущего по хорде MM', является аналогом теоремы Ролля.

Заметим, что, умножив равенство (E*) на Δx, мы имеем:

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x. \tag{3}$$

С другой стороны, дифференциал dy функции определяется равенством

$$dy=f'(x)\,\Delta x. \tag{4}$$

Сравнивая правые части равенств (3) и (4), мы видим, что приращение Δy функции есть не что иное, как дифференциал, вычисленный для некоторой промежуточной точки, лежащей между x и $x+\Delta x$.

Наконец, освобождаясь от знаменателя в формуле Коши (D), мы имеем равенство:

$$f(b)=f(a)+(b-a)\,f'(\xi), \tag{F}$$

где ξ есть промежуточное («среднее») число между a и b, т. е.

$$a<\xi<b.$$

Это равенство F, являющееся по существу лишь другой формой теоремы о среднем Лагранжа, будет сейчас обобщено.

§ 145. Теорема о среднем Тейлора. Возьмем n произвольных чисел $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ и составим при помощи их выражение

$$T(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-a)+\frac{c_2}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{c_k}{k!}(x-a)^k+\ldots+$$
$$+\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}. \qquad (1)$$

Ясно, что $T(x)$ есть многочлен степени $n-1$ от переменного x. Поэтому n-я производная и все дальнейшие производные от T по x *тождественно равны нулю.*

Многочлен $T(x)$ имеет то замечательное свойство, что он сам и все его производные, до $n-1$-й включительно, при $x=a$ становятся равными числами $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Этим мы хотим сказать, что имеем равенства:

$$T(a)=c_0, \quad T'(a)=c_1, \quad T''(a)=c_2, \ldots, \quad T^{(n-1)}(a)=c_{n-1}. \qquad (2)$$

Чтобы доказать это, достаточно один только раз продифференцировать выражение $T(x)$. Имеем:

$$T'(x)=c_1+\frac{c_2}{1!}(x-a)+\frac{c_3}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{c_{n-1}}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}. \qquad (3)$$

Мы видим, что производная $T'(x)$ имеет в точности тот же самый вид, как и сам многочлен $T(x)$, только она степени на единицу ниже и составлена из чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

Отсюда прямо следует, что мы имеем $T(a)=c_0$, $T'(a)=c_1$, и что для дальнейших производных до $n-1$-й включительно будем иметь точно так же $T''(a)=c_2$, $T'''(a)=c_3$, $\ldots$, $T^{(n-1)}(a)=c_{n-1}$. А это и суть равенства (2).

Заметив это, возьмем какую-нибудь функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ вместе со своими $n-1$ производными $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$ и имеющую n-ю производную $f^{(n)}(x)$ во всякой внутренней точке этого отрезка. Эта последняя производная, вообще говоря, уже разрывная функция.

Если мы теперь выберем числа $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ соответственно равными $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(a)$, т. е. если мы положим

$$c_0=f(a), \; c_1=f'(a), \; c_2=f''(a), \ldots, \; c_{n-1}=f^{(n-1)}(a), \qquad (4)$$

то тогда разность

$$\Phi(x)=f(x)-T(x) \qquad (5)$$

есть непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, имеющая непрерывными на ней все производные до порядка $n-1$ включительно, причем, очевидно, имеем:

$$\Phi(a)=0, \quad \Phi'(a)=0, \quad \Phi''(a)=0, \ldots, \quad \Phi^{(n-1)}(a)=0, \qquad (6)$$

Установив это, обратимся к следствию теоремы о среднем Коши, где вместо функции $f(x)$ возьмем $\Phi(x)$, а вместо $F(x)$ возьмем $(x-a)^n$. Так как для обеих наших функций: $\Phi(x)$ и $(x-a)^n$ соблюдены все условия этого следствия, то можем прямо писать:

$$\frac{\Phi(b)}{(b-a)^n}=\frac{\Phi^{(n)}(\xi)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \text{где } a<\xi<b, \tag{7}$$

ибо имеем $\Phi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$, а n-я производная от $(x-a)^n$ равна постоянной $n!$ Так как $\Phi(b)=f(b)-T(b)$, то равенство (7) дает

$$f(b)=T(b)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad a<\xi<b.$$

Наконец, вспоминая, что многочлен $T(x)$ дается формулой (1), а коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ определяются равенствами (4), мы находим окончательно:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \tag{G}$$

где

$$a<\xi<b.$$

Формула (G) называется *теоремой о среднем Тейлора* или *расширенной теоремой о среднем* (также *расширенным законом среднего*). Последнее название равенство (G) получило потому, что, полагая в нем $n=1$, мы получаем, *как частный случай,* теорему о среднем Лагранжа (F).

§ 146. Максимум и минимум, исследуемые аналитически. В § 86 мы дали весьма ценный в практическом отношении способ распознавания максимума и минимума. Именно, мы там имели следующие **достаточные** условия:

$f(x)$ *имеет в точке* a максимальное *значение, если* $f'(a)=0$ и $f''(a)$ *отрицательна*;

$f(x)$ *имеет в точке* a минимальное *значение, если* $f'(a)=0$ и $f''(a)$ *положительна.*

При этом мы видели, что равенство нулю первой производной

$$f'(a)=0$$

является **необходимым** условием для наличия в точке a либо максимума, либо минимума. Но одно только это условие еще *не гарантирует нам ничего,* ибо при $f'(a)=0$ в точке a может быть: и максимум и минимум, и может не иметься ни того, ни другого.

Формула Тейлора (G) является прекрасным средством исследования.

Пусть мы хотим исследовать на максимум или на минимум какое-нибудь численное значение a аргумента x. Мы предполагаем исследуемую функцию $f(x)$ непрерывной на отрезке $[A, B]$, так же как и все ее n первые производные включительно. Точку a предполагаем лежащей *внутри* отрезка $[A, B]$.

Пусть в точке a обращаются в нуль $n-1$ первые производные, но n-я производная в нуль в точке a не обращается. Итак, пусть имеем

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad \text{но} \quad f^{(n)}(a)\neq 0. \tag{1}$$

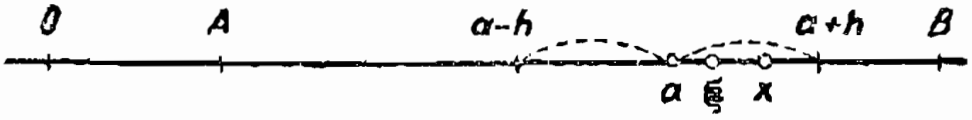


Рис. 161

Применяя к функции $f(x)$ формулу Тейлора (G) и учитывая равенства (1), мы находим:

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad a<\xi<b. \tag{2}$$

Заменяя, для удобства, букву b буквой x, мы имеем:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad \text{где } a<\xi<x. \tag{3}$$

Так как производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[A, B]$ и в его точке a не уничтожается, то всегда можно окружить точку a столь малым отрезком $[a-h, a+h]$, чтобы производная $f^{(n)}(x)$ не изменяла своего знака на $[a-h, a+h]$ (рис. 161). Поэтому, если $f^{(n)}(a)$ положительное число, то на отрезке $[a-h, a+h]$ и $f^{(n)}(x)$ везде будет положительной, значит, будем иметь $f^{(n)}(\xi)>0$. Точно так же, если $f^{(n)}(a)$ есть отрицательное число, то будем иметь $f^{(n)}(\xi)<0$ при всяком положении точки x на отрезке $[a-h, a+h]$.

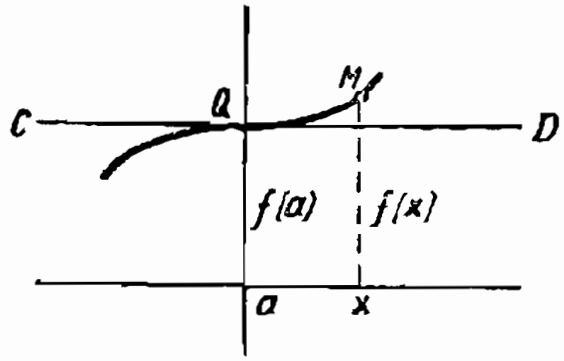


Рис. 162а

Из сказанного ясно, что если n есть число *нечетное*, то в точке a нет ни максимума, ни минимума, ибо скобка $(x-a)^n$ при переходе точки x с одной стороны от точки a на другую сторону *изменяет знак*. Значит, по одну сторону будет $f(x)>f(a)$, а по другую сторону будет $f(x)<f(a)$. Мы видим, таким образом, переход кривой с одной стороны горизонтали

CD на другую сторону (рис. 162a). Здесь, следовательно, *нет ни максимума, ни минимума.*

Если же n есть число *четное,* то скобка $(x-a)^n$ всегда положительна, и тогда, если $f^{(n)}(a)<0$, имеем $f(x)-f(a)<0$. Поэтому $f(x)<f(a)$ и имеем *максимум* (рис. 162b) в точке a. Если же $f^{(n)}(a)>0$, то имеем $f(x)-f(a)>0$, т. е. $f(x)>f(a)$. Значит, имеем *минимум* (рис. 162c) в точке a.

Таким образом мы получили признак:

чтобы имелся максимум или минимум, необходимо, *чтобы первая необращающаяся в нуль в точке* $x=a$[1] *производная* $f^{(n)}(x)$ *имела* четный *порядок. И тогда, если* $f^{(n)}(a)<0$, *имеем* максимум; *если же* $f^{(n)}(a)>0$, *имеем* минимум.

Пример 1. Исследовать функцию $x^3-9x^2+24x-7$ на максимальные и минимальные значения.

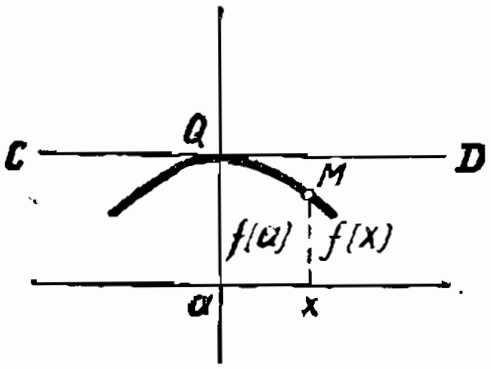


Рис. 162b

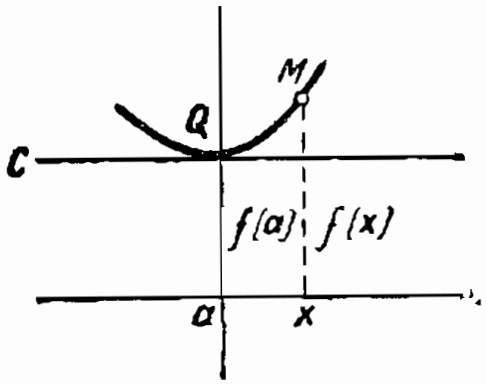


Рис. 162c

Решение. $f'(x)=3x^2-18x+24.$

Решая уравнение

$$3x^2-18x+24=0,$$

находим критические значения $x=2$ и $x=4$. Таким образом $f'(2)=0$ и $f'(4)=0$.

Дифференцируем вторично: $f''(x)=6x-18$.

Так как $f''(2)=-6$, то заключаем, что $f(2)=13$ есть максимум.

Так как $f''(4)=+6$, то заключаем, что $f(4)=9$ есть минимум.

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию $e^x+2\cos x+e^{-x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x},\\
&f'(x)=e^x-2\sin x-e^{-x}=0 \text{ при } x=0,^2\\
&f''(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}=0 \text{ при } x=0,\\
&f'''(x)=e^x+2\sin x-e^{-x}=0 \text{ при } x=0,\\
&f^{IV}(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}=4 \text{ при } x=0.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу признака, $f(0)=4$ есть минимум.

---

[1] Как и в § 75, критическое значение $x=a$ найдем, приравняв нулю первую производную и определяя действительные корни полученного уравнения.

[2] $x=0$ есть единственный корень уравнения

$$e^x-2\sin x-e^{-x}=0.$$

ЗАДАЧИ

Исследовать на максимумы и минимумы следующие функции, пользуясь методом последнего параграфа.

1. $3x^4 - 4x^3 + 1$.

Отв. $x = 1$ дает $\min = 0$;
$x = 0$ не дает ни max, ни min.

2. $x^3 - 6x^2 + 12x + 48$.

$x = 2$ не дает ни max, ни min.

3. $(x-1)^2(x+1)^3$.

$x = 1$ дает $\min = 0$;
$x = \frac{1}{5}$ дает $\max = \frac{3456}{3125}$;
$x = -1$ не дает ни max, ни min.

4. Исследовать $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ при $x = 1$ и $x = 3$.

Отв. $x = 1$ дает max; $x = 3$ дает min.

5. Исследовать $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ при $x = 1$.

Отв. $x = 1$ не дает ни max, ни min.

6. Показать, что если первая производная, не обращающаяся в нуль при $x = a$, будет нечетного ($= n$) порядка, то $f(x)$ при $x = a$ будет возрастающей, либо убывающей функцией, смотря по тому, будет ли $f^{(n)}(a) > 0$ или < 0.

§ 147. Неопределенные формы. Когда при некотором частном значении независимого переменного *формула*, дающая функцию, принимает одну из семи форм:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

то говорят, что функция *неопределенна*, и для этого значения независимого переменного функция данным аналитическим выражением (формулой) не определяется. Пусть, например, имеем:

$$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

и пусть для некоторого значения переменного, например для $x = a$, будет

$$f(a) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Для этого значения переменного x наша функция не определена, потому что деление на нуль невозможно, и потому мы можем приписать ей какое угодно значение.

Как было указано в § 47, желательно приписать функции такое значение, которое делало бы ее непрерывной при $x = a$, *если это только возможно*.

§ 148. Оценка элементарными приемами функции, принимающей неопределенную форму. Если функция $f(x)$ получает неопределенную форму, когда $x = a$, тогда, *если*

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

существует и *является конечной величиной*, мы рассматриваем эту величину как численное значение функции для $x = a$ [1].

[1] Вычисление этого предельного значения называется *раскрытием* неопределенности.

Принятие этого предела как численного значения самой функции $f(x)$ в точке a, т. е. допущение

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

делает $f(x)$ непрерывной при $x=a$. Это согласуется с изложенным в § 47, а также и с практическими примерами гл. VI, где вычислены пределы нескольких функций, принимающих неопределенную форму $\frac{0}{0}$.

Эта предельная величина *иногда* может быть найдена с помощью простых алгебраических или тригонометрических преобразований, как показывают следующие примеры:

Пример 1. Дано $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. Найти $f(2)$.

Решение. $f(2)$ есть неопределенность. Но, предполагая, что x еще отлично от 2, мы имеем право «сократить дробь», т. е. фактически разделить числитель на знаменатель. Тогда мы имеем $f(x)=x+2$. Значит, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

Пример 2. Дано $f(x)=\sec x-\operatorname{tg} x$. Найти $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ есть неопределенность типа $\infty-\infty$. Преобразуем следующим образом:

$$\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=$$

$$=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{0}{1+1}=0.$

Подобно этому многие примеры гл. VI поясняют, каким образом можно находить предельные значения некоторых функций, принимающих неопределенные формы, употребляя соответствующие алгебраические или тригонометрические преобразования, и каким образом, вообще, эти предельные значения делают соответствующие функции непрерывными в рассматриваемых точках. Но более общие способы раскрытия неопределенностей основаны на методах дифференциального исчисления.

§ 149. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$. Дана функция формулой $\frac{f(x)}{F(x)}$ такой, что $f(a)=0$ и $F(a)=0$. Функция становится неопределенной при $x=a$. Требуется найти

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Для отыскания этого предела мы прибегаем к следствию теоремы о среднем Коши (§ 144). Для этого мы предполагаем, что,

во-первых, функции $f(x)$ и $F(x)$ так же как и их первые $n-1$ производные *непрерывны* на отрезке $[A, B]$, содержащем внутри точку a; производные же n-го порядка $f^{(n)}(x)$ и $F^{(n)}(x)$ просто только существуют на отрезке $[A, B]$, кроме, может быть, *самой точки* a, но, вообще, уже *разрывны;*

во-вторых, функции $f(x)$ и $F(x)$ так же как и их первые $n-1$ производные *уничтожаются* в точке a, но производная $F^{(n)}(x)$ *не уничтожается* нигде в отрезке $[A, B]$ вне точки a.

В этих условиях мы имеем формулу (B), выражающую указанное следствие теоремы о среднем Коши:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{F^{(n)}(\xi)}, \qquad (B)$$

где ξ *лежит внутри отрезка* $[a, x]$.

Поэтому, когда $x \to a$, тогда ξ автоматически стремится к точке a, как к пределу, и мы имеем равенство:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}, \qquad (H)$$

где *заранее предполагается, что предел правой части существует.*

Эта последняя оговорка очень важна, ибо если предел правой части равенства (H) не существует, то тогда само это равенство (H) уже не служит ни к чему, и тогда его нужно совсем оставить.

Правило, вытекающее из равенства (H), называется *правилом Лопиталя.* Несколько грубовато оно словесно выражается вкратце так.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$. *Имея дробь* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *где* $f(a) = F(a) = 0$, *нужно продифференцировать:* отдельно *числитель,* отдельно *знаменатель и составить новую дробь* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$. *Ее величина* $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ *и явится пределом старой дроби, когда* $x \to a$.

Если окажется, что новая дробь нисколько не лучше старой по той причине, что опять $f'(a) = F'(a) = 0$, тогда нужно повторить применение правила Лопиталя и составить дробь $\frac{f''(x)}{F''(x)}$, величина которой $\frac{f''(a)}{F''(a)}$ явится пределом обеих предшествующих дробей, когда $x \to a$.

Если опять окажется, что $f''(a)=F''(a)=0$, тогда надо спуститься к следующей дроби $\frac{f'''(x)}{F'''(x)}$, и т. д.[1]

Иногда приходится повторять применение правила Лопиталя много раз, чтобы спуститься к такой дроби $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$, *у которой числитель и знаменатель непрерывны в точке* a *и не уничтожаются одновременно.*

Если нам удалось добиться получения такой дроби $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$, тогда следствие теоремы о среднем Коши действует безукоризненно, и мы имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}. \qquad (\text{H}^*)$$

В этом случае правило Лопиталя оказывается достаточным для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$.

Правило Лопиталя есть правило *практическое* и его бывает достаточно во многих случаях.

Но иногда случается, что при первом его применении мы попадаем на дробь $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, у которой *либо* числитель, *либо* знаменатель теряют непрерывность в точке $x=a$. Тогда правило Лопиталя приходится оставлять, ибо применение его не только ничего не дает, но может ввести в прямое заблуждение. *В этом случае новая дробь* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ *хуже старой дроби* $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Пример 1. Раскрыть неопределенность $\frac{f(x)}{F(x)}$, где $f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ и $F(x)=x$ при $x=0$.

Решение. Числитель $f(x)$ и знаменатель $F(x)$ в точке $x=0$ непрерывны и равны нулю: $f(0)=0$ и $F(0)=0$. Значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применение правила Лопиталя ничего не дает, ибо имеем $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ и $F'(x)=1$; поэтому новая дробь $\frac{f'(x)}{F'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ просто не имеет никакого предела, когда $x\to 0$, так как первый член $2x\sin\frac{1}{x}$ стремится к нулю, а второй член $\cos\frac{1}{x}$ колеблется, совершая бесчисленное множество размахов от -1 до $+1$, когда $x\to 0$. Таким образом, правило Лопиталя здесь по самому существу дела *неприменимо.*

---

[1] Предостерегаем учащегося от весьма неосмотрительной, но довольно обычной ошибки дифференцирования всего выражения по правилу дифференцирования дроби.

Однако предел дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ имеется, когда $x \longrightarrow 0$. В самом деле, *прямым делением* $f(x)$ на $F(x)$ мы находим: $\frac{f(x)}{F(x)} = x \sin \frac{1}{x}$ и, значит, имеем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 0$.

Здесь не должна казаться удивительной верность теоремы о среднем Коши, ибо, хотя мы имеем верным равенство:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \text{где} \quad 0 < \xi < x,$$

т. е.

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi},$$

однако, *когда* $x \longrightarrow 0$, *двигаясь к нулю непрерывно, среднее* ξ *движется к нулю скачками, так что* $\cos \frac{1}{\xi}$ *не испытывает никаких колебаний, но стремится к нулю.*

Иногда правило Лопиталя не приводит к цели совсем по другой причине, именно когда мы получаем все время дроби $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$ с уничтожающимися числителями и знаменателями при $x = a$. *В этом случае новые дроби не лучше старых.*

Пример 2. Раскрыть неопределенность $\frac{f(x)}{F(x)}$, где $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ и $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x = 0$.

Решение. Числитель $f(x)$ и знаменатель $F(x)$ в точке $x = 0$ непрерывны и равны нулю: $f(0) = 0$ и $F(0) = 0$. Значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применение правила Лопиталя здесь *бесполезно*, ибо и производные *всех* порядков функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ непрерывны в точке $x = 0$ и равны нулю, так что $0 = f(0) = f'(0) = f''(0) \ldots$ и $0 = F(0) = F'(0) = F''(0) = F'''(0) \ldots$

Однако предел дробей $\frac{f(x)}{F(x)}$ при $x \longrightarrow 0$ имеется, ибо имеем $f(x) = F(x)$ и, значит, эта дробь всегда равна 1, и ее предел тоже равен 1 [1].

---

[1] Замечание для преподавателей. Опыт показывает, что учащиеся, при первом знакомстве с правилом Лопиталя, склонны представлять его более простым, чем оно есть в действительности, а при дальнейших размышлениях, когда они замечают, что вещи являются более сложными, чем они сначала думали, тогда они легко запутываются, и, чтобы вывести их из затруднения, требуется помощь преподавателя.

В этом случае полезно им указать, что при однократном применении правила Лопиталя возникают *четыре* логически возможные случая, из которых один нересален. Именно;

(I) $\lim \frac{f}{F}$ существует, $\lim \frac{f'}{F'}$ существует;

(II) $\lim \frac{f}{F}$ не существует, $\lim \frac{f'}{F'}$ существует;

(III) $\lim \frac{f}{F}$ существует, $\lim \frac{f'}{F'}$ не существует;

(IV) $\lim \frac{f}{F}$ не существует, $\lim \frac{f'}{F'}$ не существует.

Примечание. Прежде чем перейти к примерам и задачам на правило Лопиталя, заметим, что если $a=\infty$, подстановка $x=\frac{1}{z}$ приводит задачу к вычислению предела для $z=0$; таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-F'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Следовательно, правило имеет силу и в этом случае.

Пример 1. Вычислить

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\quad\text{при}\quad x=1.$$

Случай (I) есть случай, который имеет в виду правило Лопиталя, ибо обязательно имеем равенство: $\lim\frac{f}{F}=\lim\frac{f'}{F'}$.

Случай (II) в действительности невозможен, ибо из существования $\lim\frac{f'}{F'}$ следует обязательно существование $\lim\frac{f}{F}$.

Случай (III) наблюдается в действительности, как это показывает пример 1, где $f=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ и $F=x$.

Случай (IV) встречается в действительности. Например $f=x\sin\frac{1}{x}$ и $F=x$.

В случае (III) новая дробь $\frac{f'}{F'}$ *хуже старой дроби* $\frac{f}{F}$; здесь применение правила Лопиталя невозможно и может повести к опасным заключениям и недоразумениям.

Но и *в случае* (I) иногда оказывается, что *новая дробь* $\frac{f'}{F'}$ *нисколько не лучше старой дроби* $\frac{f}{F}$, как это показывает пример 2, где $f=F=e^{-\frac{1}{x^2}}$. Здесь применение правила Лопиталя бесполезно, хотя и не опасно. Это есть случай реального бессилия правила Лопиталя.

Рассмотрим интересный случай формального бессилия правила Лопиталя, а именно: $f=\sqrt{x^2}$ и $F=x$. Значит, старая дробь есть $\frac{f}{F}=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$. Радикал принимается в арифметическом смысле, и правило Лопиталя применяется на отрезке $[0,1]$ для $x\to 0$. Имеем: $f'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ и $F'=1$. Поэтому новая дробь есть $\frac{f'}{F'}=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$, т. е. равна перевернутой старой. Последовательное применение правила Лопиталя лишь перевертывает один раз за другим первоначальную дробь: $\frac{\sqrt{x^2}}{x}, \frac{x}{\sqrt{x^2}}, \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \ldots$

Решение.

$$\frac{f(1)}{F(1)} = \left[\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\right]_{x=1} = \frac{1-3+2}{1-1-1+1} = \frac{0}{0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f'(1)}{F'(1)} = \left[\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\right]_{x=1} = \frac{3-3}{3-2-1} = \frac{0}{0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f''(1)}{F''(1)} = \left[\frac{6x}{6x-2}\right]_{x=1} = \frac{6}{6-2} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Решение.

$$\frac{f(0)}{F(0)} = \left[\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\right]_{x=0} = \frac{1-1-0}{0-0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f'(0)}{F'(0)} = \left[\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\right]_{x=0} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f''(0)}{F''(0)} = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\right]_{x=0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f'''(0)}{F'''(0)} = \left[\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}\right]_{x=0} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить при помощи правила Лопиталя нижеследующие выражения [1].

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$. **Отв.** $\dfrac{8}{9}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$. $\dfrac{1}{n}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. 1.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. 2.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. 2.
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$. $-\dfrac{1}{8}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$. $\ln\dfrac{a}{b}$.
8. $\lim\limits_{r\to a}\dfrac{r^3-ar^2-a^2r+a^3}{r^2-a^2}$. 0.
9. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta-\arcsin\theta}{\sin^3\theta}$. $\dfrac{1}{6}$.
10. $\lim\limits_{x\to\varphi}\dfrac{\sin x-\sin\varphi}{x-\varphi}$. $\cos\varphi$.
11. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y+\sin y-1}{\ln(1+y)}$. 2.
12. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\theta+\sec\theta-1}{\operatorname{tg}\theta-\sec\theta+1}$. **Отв.** 1.
13. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2\varphi-2\operatorname{tg}\varphi}{1+\cos 4\varphi}$. $\dfrac{1}{2}$.
14. $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{az-z^2}{a^4-2a^3z+2az^3-z^4}$. ∞.
15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(e^x-e^2)^3}{(x-4)e^x+e^2x}$. $6e^4$.
16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$. $\dfrac{3}{2}$.
17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^5+32}$. $\dfrac{3}{20}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$. 2.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. $\dfrac{1}{6}$.
20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$. $-\dfrac{4}{\pi^2}$.
21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. $\dfrac{1}{2}$.

[1] Продифференцировав, учащийся должен в каждом случае сперва привести результат к простейшему виду и только после этого подставлять значение неизвестного.

§ 150. Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Чтобы найти

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)},$$

когда обе функции $f(x)$ и $F(x)$ становятся бесконечными при $x \longrightarrow a$, мы по-прежнему следуем *правилу Лопиталя.*

Правило раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. *Имея дробь* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *где* $f(a) = \infty$ и $F(a) = \infty$, *нужно продифференцировать:* отдельно *числитель,* отдельно *знаменатель и составить новую дробь* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$. *Ее величина* $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ *и явится пределом старой дроби, когда* $x \longrightarrow a$ [1].

В случае, если новая дробь окажется неопределенной для данного значения переменного, повторяем тот же процесс.

Доказательство правила. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ мы приводим к изученной нами неопределенности $\frac{0}{0}$ следующим образом. Сначала мы пишем данную нам дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ в виде отношения $\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$. Потом, заметив, что оно представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применим к нему доказанное выше правило Лопиталя. Это нам дает:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \left\{ \left[-\frac{1}{F^2(x)} F'(x) \right] : \left[-\frac{1}{f^2(x)} f'(x) \right] \right\},$$

т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \left\{ \left[\frac{f(x)}{F(x)} \right]^2 \cdot \frac{F'(x)}{f'(x)} \right\}.$$

Предполагая сначала предел дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ *конечным* и *отличным от нуля,* мы находим

$$1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

откуда получаем искомое правило:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Если же предел $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ равен нулю, тогда мы *обходим трудность,* ища только что доказанным правилом предел дроби

[1] $f'(x)$ и $F'(x)$, по предположению, — функции непрерывные.

$\frac{f(x)+k\cdot F(x)}{F(x)}$, где k постоянное, отличное от нуля. Предел этой дроби равен, очевидно, k, и потому мы имеем право применить это правило. Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}+k.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{F(x)}+k\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}+k=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}+k$$

и, вычитая по k из обеих частей, находим окончательно:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Значит, правило доказано во всех случаях.

Можно показать, что правило остается верным, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\infty.$$

Пример 1. Вычислить:

$$\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}\quad\text{при}\quad x=0.$$

Решение.

$$\frac{f(0)}{F(0)}=\left[\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}\right]_{x=0}=\frac{-\infty}{\infty}:\ \text{неопределенность.}$$

$$\frac{f'(0)}{F'(0)}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x\cdot\operatorname{ctg} x}\right]_{x=0}=\left[-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}:\ \text{неопределенность,}$$

$$\frac{f''(0)}{F''(0)}=\left[-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=-\frac{0}{1}=0.$$

Правило Лопиталя для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ допускает те же самые оговорки в отношении случаев его неприменимости, реального и формального бессилия, какие были сделаны выше для неопределенности $\frac{0}{0}$.

Пример 2. Найти предел $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ для $x\to+\infty$.

Решение. Подводя знаменатель x под корень, имеем:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\to 1,$$

когда $x\to+\infty$. Радикал берется только в арифметическом смысле (положительным).

Правило же Лопиталя являет здесь случай формального бесси-лия, ибо, полагая $f=\sqrt{1+x^2}$ и $F=x$, имеем: $f'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ и $F'=x$. Значит: $\frac{f}{F}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ и $\frac{f'}{F'}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Повторные применения правила Лопиталя лишь последовательно перевертывают, раз за разом, первоначальную дробь:

$$\frac{f}{F}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},\quad \frac{f'}{F'}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{f''}{F''}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\quad \text{и т. д.}$$

§ 151. Раскрытие неопределенности $0\cdot\infty$. Если функция $f(x)\varphi\cdot(x)$ принимает неопределенную форму $0\cdot\infty$ при $x=a$, мы переписываем данную функцию в виде

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\quad\left(\text{или}=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right)$$

так, чтобы она могла принять вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, приводя, таким образом, вопрос к рассмотренному в § 149 или § 150.

Пример. Раскрыть неопределенность $\sec 3x\cdot\cos 5x$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$[\sec 3x\cdot\cos 5x]_{x=\frac{\pi}{2}}=\infty\cdot 0\text{: неопределенность.}$$

Подставляем $\frac{1}{\cos 3x}$ вместо $\sec 3x$, что дает функции вид:

$$\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Имеем:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}\text{: неопределенность.}$$

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{5}{3}.$$

§ 152. Раскрытие неопределенности $\infty-\infty$. Вообще возможно преобразовать такое выражение в дробь, которая примет один из видов: $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. Раскрыть неопределенность $\sec x-\operatorname{tg} x$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$[\sec x-\operatorname{tg} x]_{x=\frac{\pi}{2}}=\infty-\infty\text{: неопределенность.}$$

По правилам тригонометрии:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{F(x)}.$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\frac{1-\sin x}{\cos x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}: \text{ неопределенность.}$$

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\frac{-\cos x}{-\sin x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0.$$

ЗАДАЧИ

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2+d}$. Отв. $\frac{a}{c}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$. $-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$. 0.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$. 0.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln x}$. ∞.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$. 1.

7. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} 3\theta}$. $\frac{1}{3}$.

8. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\varphi}$. 0.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. 0.

10. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln \sin x$. 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. $\frac{1}{\pi}$.

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$. Отв. 2.

13. $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^{ay}}$ $(a>0)$. 0.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{a}{x}$. a.

15. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$ $(n>0)$. 0.

16. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg}\theta)\sec 2\theta$. 1.

17. $\lim\limits_{\varphi\to a} (a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$. $\frac{4a^2}{\pi}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right]$. $-\frac{1}{2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right]$. -1.

20. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} (\sec\theta - \operatorname{tg}\theta)$. 0.

21. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left\{\frac{2}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{1-\cos\varphi}\right]$. $\frac{1}{2}$.

22. $\lim\limits_{y\to 1}\left[\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y}\right]$. $\frac{1}{2}$.

23. $\lim\limits_{z\to 0}\left[\frac{\pi}{4z} - \frac{\pi}{2z(e^{\pi z}+1)}\right]$. $\frac{\pi^2}{8}$.

24. Показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ существует, но не может быть вычислен по правилу дифференцирования числителя и знаменателя.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$ $(|\sin x|\leqslant 1),$

Однако отношение производных числителя и знаменателя, равное

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\frac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2},$$

не стремится ни к какому пределу при $x\to\infty$, откуда и следует, что правило дифференцирования числителя и знаменателя неприменимо.

§ 153. Раскрытие неопределенностей 0^0, 1^∞, ∞^0. Дана функция вида:

$$f(x)^{\varphi(x)}.$$

Чтобы функция могла принять одну из трех указанных форм, для известного значения x должно быть:

$f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, что дает 0^0;

или

$f(x)=1$, $\varphi(x)=\infty$, что дает 1^∞;

или

$f(x)=\infty$, $\varphi(x)=0$, что дает ∞^0.

Пусть

$$y=f(x)^{\varphi(x)};$$

взяв от одних частей логарифм, имеем:

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x).$$

В каждом из приведенных выше случаев логарифм от y (функции) принимает неопределенный вид

$$0\cdot\infty.$$

Раскрытие этой неопределенности способом, указанным в § 151, даст предел логарифма функции. Но последний равен логарифму предела функции; таким образом, предел функции известен [1].

Пример 1. Вычислить x^x, если $x=0$.

Решение. Функция при $x=0$ принимает неопределенный вид 0^0. Пусть

$$y=x^x,$$

отсюда

$$\ln y=x\ln x=0\cdot(-\infty),\quad \text{если } x=0.$$

По § 151

$$\ln y=\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty},\qquad \text{если } x=0.$$

[1] То есть, если $\lim\ln y=a$, то имеем $\ln\lim y=a$ и, значит, $\lim y=e^a$.

По § 150

$$\ln y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

и, следовательно,

$$[x^x]_{x=0} = 1.$$

Пример 2. Вычислить $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, если $x = 0$.
Решение. При $x = 0$ эта функция принимает неопределенный вид 1^∞.
Пусть

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

следовательно,

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \infty \cdot 0, \quad \text{если } x = 0.$$

По § 151

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{при } x = 0.$$

По § 149

$$\ln y = \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1+x} = 1, \quad \text{если } x = 0.$$

Следовательно,

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0} = e.$$

Пример 3. Вычислить $(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ при $x = 0$.
Решение. При $x = 0$ эта функция принимает неопределенный вид ∞^0.
Пусть

$$y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

тогда

$$\ln y = \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x = 0 \cdot \infty, \quad \text{если } x = 0.$$

По § 151

$$\ln y = \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\infty}{\infty}, \quad \text{если } x = 0.$$

По § 150

$$\ln y = \frac{-\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0, \quad \text{если } x = 0.$$

Следовательно,

$$[(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}]_{x=0} = 1.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить при помощи правила Лопиталя следующие выражения:

1. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Отв. $\frac{1}{e}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. 1.

3. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{\operatorname{tg}\theta}$. Отв. 1.

4. $\lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y$. e^a.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. Отв. e^2.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. $\frac{1}{e}$.

7. $\lim\limits_{z\to 0}(1+nz)^{\frac{1}{z}}$. e^n.

8. $\lim\limits_{\varphi\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2}}$. $\frac{1}{e}$.

9. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos m\theta)^{\frac{n}{\theta^2}}$. Отв. $e^{-\frac{1}{2}m^2n}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$. e.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x$. e^2.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x$. 1.

13. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

§ 154. Асимптоты. Кривая может иногда обладать таким свойством, что точка M, неограниченно удаляясь по этой кривой, вместе с тем все ближе подходит к некоторой прямой так, что расстояние δ подвижной точки от прямой стремится к нулю[1]. Тогда говорят, что кривая «асимптотически» приближается к прямой, а самую прямую называют асимптотой данной кривой.

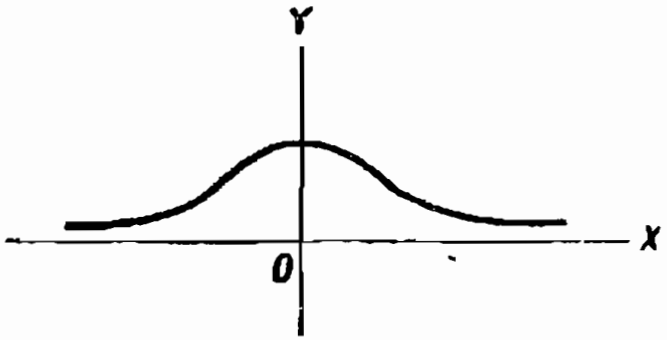


Рис. 163

Так, например, в уравнении

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

области значений переменных следующие:

$$-\infty<x<+\infty \text{ и } 0<y\leqslant 1,$$

причем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=0$$

и соответствующая кривая (рис. 163) имеет асимптотой ось x.

В уравнении равносторонней гиперболы

$$xy=1$$

имеем:

$$0<|x|<+\infty,$$
$$0<|y|<+\infty.$$

И так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=0 \text{ и } \lim_{y\to\pm\infty} x=0,$$

то рассматриваемая гипербола имеет две асимптоты — одна ось x, а другая ось y (рис. 164).

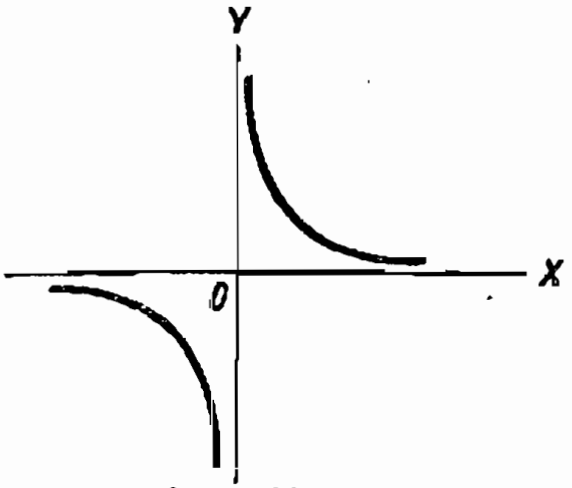


Рис. 164

Эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

[1] Предполагается, что область значений хотя бы одной текущей координаты не ограничена.

не имеет асимптот, так как областями обеих переменных координат служат ограниченные отрезки:

$$-a \leqslant x \leqslant +a$$

и

$$-b \leqslant y \leqslant +b.$$

§ 155. Нахождение асимптот кривой, отнесенной к прямоугольной системе координат.

Пусть кривая дана своим уравнением:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Надо найти ее асимптоты.

Предположим сначала, что существует асимптота, не параллельная оси координат; тогда она может быть представлена уравнением:

$$Y = kX + b, \tag{2}$$

и задача сводится к вычислению значений параметров k и b.

Чтобы вычислить расстояние δ точки $M(x, y)$ кривой (1) от прямой (2), надо привести уравнение прямой к нормальному виду и в левую часть преобразованного уравнения подставить вместо текущих координат X и Y координаты данной точки $M(x, y)$, т. е.

$$\delta = \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

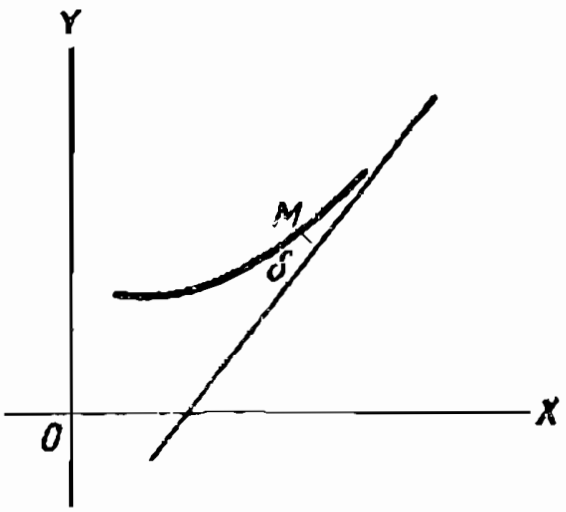


Рис. 165

Согласно определению асимптоты, по мере того как точка M неограниченно удаляется от кривой (рис. 165), что в данном случае соответствует неограниченному возрастанию абсциссы x, ее расстояние δ от асимптоты стремится к нулю

$$\lim_{x \to \infty} \delta = \lim_{x \to \infty} \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0;$$

отсюда следует, что

$$\lim_{x \to \infty} (kx - y + b) = 0$$

или

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx). \tag{3}$$

Последнее равенство можно преобразовать еще иначе:

$$b = \lim_{x \to \infty} x \cdot \left(\frac{y}{x} - k \right).$$

Но произведение двух множителей, при неограниченном возрастании одного из них, может иметь предел только в том случае, когда другой множитель стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}-k\right)=0$$

или

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}. \tag{4}$$

Таким образом, правило для нахождения асимптот, не параллельных оси ординат, сводится к следующему.

Первый шаг. Из уравнения кривой определяется отношение текущих координат $\frac{y}{x}$ и вычисляется его предел:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}.$$

Второй шаг. Полученное значение k надо подставить в разность $(y-kx)$ и вычислить ее предел:

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx).$$

Третий шаг. Если оба предела k и b существуют, то они являются параметрами асимптоты и их нужно подставить в ее уравнение:

$$Y=kX+b.$$

Примечание. Если исследуемая кривая имеет несколько ветвей, двигаясь по которым точка $M(x, y)$ может неограниченно удаляться, то вышеприведенное правило применяется для нахождения асимптоты каждой из этих ветвей в отдельности.

Пример 1. Найти асимптоты гиперболы:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Решение. Решаем уравнение относительно ординаты:

$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$$

и определяем отношение координат:

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.$$

$$k_1=+\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=+\frac{2}{3}\text{ и }k_2=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=-\frac{2}{3}.$$

$$b_1=\lim_{x\to\infty}(y-k_1x)=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-9}-x\right]=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0.$$

$$b_2=\lim_{x\to\infty}(y-k_2x)=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2-9}-x\right]=0.$$

Гипербола имеет две асимптоты:

$$y=\frac{2}{3}x \text{ и } y=-\frac{2}{3}x.$$

Пример 2. Найти асимптоту кривой

$$y=\frac{\sin(x^2)}{x}.$$

Решение.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}y-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}=0.$$

Асимптота данной кривой совпадает с осью x:

$$x=0.$$

Если данная кривая

$$F(x, y)=0 \qquad (1)$$

имеет асимптоту, параллельную оси ординат, то уравнение этой асимптоты можно привести к виду:

$$x=a. \qquad (5)$$

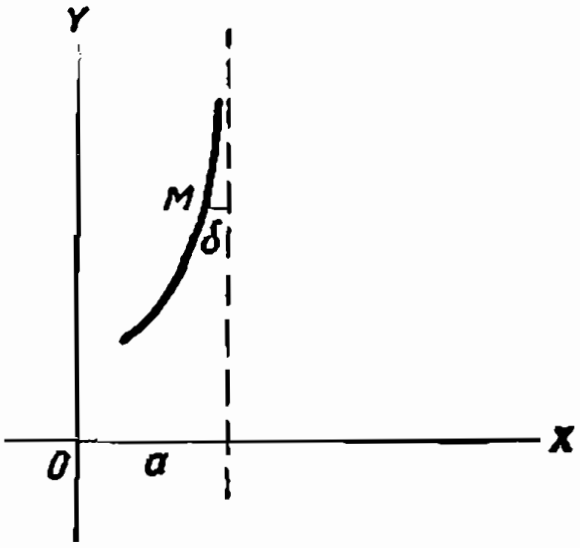


Рис. 166

Значение параметра a также определяется из условия, что по мере удаления точки $M(x, y)$ по кривой, ее расстояние δ от асимптоты должно стремиться к нулю. Но в данном случае (рис. 166):

$$\delta=|x-a|$$

и, следовательно,

$$\lim_{y\to\infty}|x-a|=0$$

или

$$a=\lim_{y\to\infty}x. \qquad (6)$$

Таким образом, для определения параметра a надо из уравнения кривой найти предельное значение абсциссы при неограниченном возрастании ординаты. Иногда удобнее найти те значения абсциссы, при которых ордината неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Пример 1. Найти асимптоту, параллельную оси y, для кривой:

$$xy^2-5y^2-x-2=0.$$

Решение. Решаем уравнение кривой относительно абсциссы:

$$x=\frac{5y^2+2}{y^2-1},$$

тогда

$$\lim_{y\to\infty} x=\lim_{y\to\infty}\frac{5y^2+2}{y^2-1}=5,$$

и уравнение искомой асимптоты будет:

$$x=5.$$

Пример 2. Найти те асимптоты кривой

$$x^2y-4y-2x=0,$$

которые параллельны оси y.

Решение. Уравнение данной кривой может быть легко решено относительно ординаты:

$$y=\frac{2x}{x^2-4}.$$

Теперь очевидно, что y неограниченно возрастает, когда $x\to\pm 2$, а потому кривая имеет две асимптоты, параллельные оси ординат:

$$x=2 \text{ и } x=-2.$$

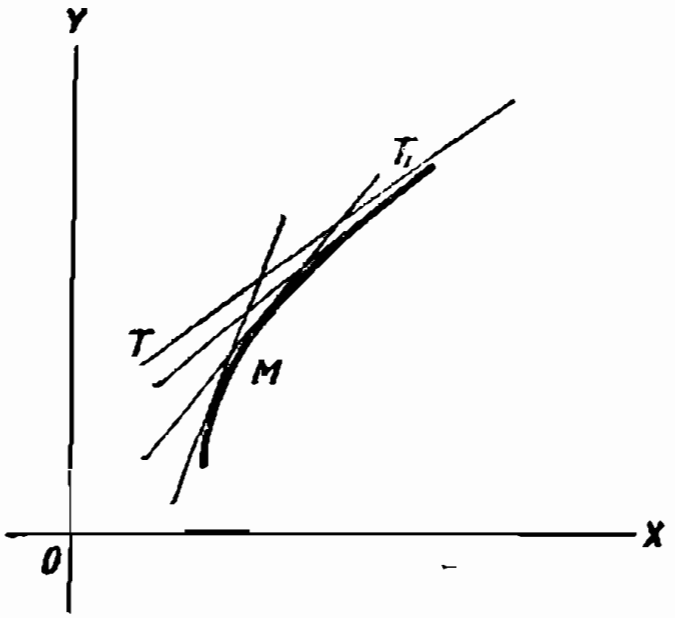


Рис. 167

§ 156. Предельное положение касательной. Проведем в точке $M(x, y)$ касательную к данной кривой:

$$F(x, y)=0. \qquad (1)$$

Если теперь точка M будет неограниченно удаляться по кривой, то касательная в ней тоже будет перемещаться; и может случиться, что эта касательная, оставаясь на конечном расстоянии от начала координат, стремится к некоторому определенному предельному положению TT_1 (рис. 167).

Докажем, что если такое предельное положение касательной существует, то оно служит асимптотой кривой.

Воспользуемся тем, что касательная к кривой в точке $M(x, y)$ изображается уравнением:

$$Y-y=y'(X-x)$$

или

$$Y=y'X+(y-y'x). \qquad (7)$$

Для существования предельного положения касательной нужно, чтобы коэффициенты уравнения (7) стремились к определенным пределам, т. е. должны иметь место условия:

$$\lim_{x\to\infty} y'=K \qquad (8)$$

и

$$\lim_{x\to\infty}(y-y'x)=B. \tag{9}$$

В таком случае уравнение предельной касательной будет:

$$Y=KX+B. \tag{10}$$

Осталось показать, что полученная прямая (10) является вместе с тем асимптотой кривой.

В самом деле, если существуют пределы (8) и (9), то при вычислении параметров k и b асимптоты (см. § 155) можно применить правило Лопиталя:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{y'}{1}=K$$

и

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{y}{x}-k}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}(y-y'x)=B,$$

т. е. асимптота действительно совпадает с предельным положением касательной, когда это последнее существует.

Но нельзя отождествлять эти два понятия: если не существует одного из пределов (8) или (9), соответствующая бесконечная ветвь кривой не имеет предельной касательной и тем не менее она может асимптотически приближаться к некоторой прямой.

В § 155 было показано, что ось x служит асимптотой кривой:

$$y=\frac{\sin(x^2)}{x}.$$

Но когда точка неограниченно удаляется по этой кривой, касательная в ней не стремится ни к какому предельному положению, так как не существует

$$\lim_{x\to\infty}y'=\lim_{x\to\infty}\left[2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right],$$

ибо $\cos(x^2)$ при $x\to\infty$ колеблется между $+1$ и -1 и предела не имеет.

§ 157. Нахождение асимптот алгебраических кривых. Случай, рассмотренный в предшествующем § 156, когда асимптота не является предельным положением касательной, возможен только у трансцендентных кривых. Это замечание, доказательство ко-

торого здесь опускается, дает упрощенный метод нахождения асимптот алгебраической кривой.

Пусть дана алгебраическая кривая своим уравнением:

$$f(x, y) = 0. \tag{11}$$

Левую часть этого уравнения, не вводя никаких ограничений, можно считать целой алгебраической функцией n-й степени относительно двух аргументов x и y, что всегда может быть достигнуто соответствующими преобразованиями.

Если прямая

$$y = kx + b \tag{12}$$

служит асимптотой кривой (11), то она же является предельным положением касательной при неограниченном удалении точки касания, и так как две точки пересечения кривой (11) с прямой (12) сливаются в точке касания, то конечных точек пересечения остается лишь $n - 2$, а потому при исключении y из уравнений (11) и (12) получается уравнение $n - 2$-й степени относительно x.

Другими словами, в уравнении:

$$f(x, kx + b) = 0 \tag{13}$$

коэффициенты при x^n и x^{n-1} должны равняться нулю. Но коэффициенты эти, вообще говоря, содержат k и b, и требование, чтобы они равнялись нулю, выразится двумя уравнениями, из которых и определятся параметры асимптоты [1].

Если кривая (11) имеет асимптоту, параллельную оси y, уравнение этой асимптоты будет

$$x = a \tag{14}$$

и прямая (14) может иметь на конечном расстоянии лишь $n - 2$ точки пересечения с кривой (11); поэтому, исключив x из уравнений этих двух линий, мы должны получить уравнение $n - 2$-й степени относительно y, т. е. уравнение:

$$f(a, y) = 0 \tag{15}$$

не должно содержать членов с y^n и y^{n-1}.

Может показаться, что для определения значений только одного параметра a имеются два условия. Однако это не совсем

[1] Если, приравняв нулю коэффициенты при x^n и x^{n-1}, окажется, что второе из этих уравнений есть следствие первого, надо приравнять нулю коэффициент при x^{n-2}. Если в уравнение (13) вовсе не входят члены с x^{n-1}, x^{n-2}, . . , x^{n-p}, то для получения второго уравнения надо приравнять нулю коэффициент при x^{n-p-1}.

так: если уравнение (1) кривой n-го порядка содержит член с y^n, то коэффициент в этом члене может быть только постоянным и не обратится в нуль ни при каком значении параметра a; в этом случае кривая заведомо не имеет асимптот параллельных оси y. Если член с y^n отсутствует в уравнении (11), он не войдет и в уравнение (15) и для определения параметра a имеем одно уравнение, которое получим, приравняв нулю коэффициент при y^{n-1}*.

Пример. Найти асимптоты кривой:

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 + y = 0.$$

Решение. Уравнение третьей степени, но член с y^3 отсутствует; следовательно, кривая может иметь асимптоту, параллельную оси ординат. Пусть ее уравнение будет:

$$x = a.$$

Исключив из обоих уравнений x, располагаем члены по убывающим степеням y:

$$-2ay^2 + y(a^2 + 1) + a^3 = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при y^2:

$$-2a = 0,$$

откуда $a = 0$.

Асимптотой служит ось y: $x = 0$.

Переходим к отысканию асимптот, не параллельных оси ординат, т. е. изображаемых уравнением:

$$y = kx + b.$$

Результат исключения y из этого уравнения и уравнения данной кривой запишется так:

$$x^3 + x^2(kx + b) - 2x(k^2x^2 + 2bkx + b^2) + (kx + b) = 0$$

или

$$x^3(1 + k - 2k^2) + x^2(b - 4bx) + x(k - 2b^2) + b = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициенты при x^3 и x^2:

$$1 + k - 2k^2 = 0 \quad \text{и} \quad b(1 - 4k) = 0.$$

Из первого условия получим: $k_1 = 1$; $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Вставляя оба эти значения последовательно во второе условие, получим:

$$b_1 = b_2 = 0.$$

Таким образом кривая имеет еще две асимптоты:

$$y = x \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

* Если уравнение (15) не содержит члена с y^{n-1}, надо приравнять нулю коэффициент при y^{n-2} или, общее, коэффициент при старшей степени y.

ЗАДАЧИ

Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = e^x$. Отв. $y = 0$.
2. $y = e^{-x^2}$. $y = 0$.
3. $y = \ln x$. $x = 0$.
4. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. $x = 0$; $y = 1$.
5. $y = e^{-x} \sin x$. $y = 0$.
6. $y = \operatorname{tg} x$. $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.
7. $y^3 = 6x^2 + x^3$. $y = x + 2$.
8. $y^2 = 2px$. Асимптоты нет.
9. $y^3 = a^3 - x^3$. $y + x = 0$.
10. $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$ (циссоида). $x = 2r$.
11. $ay^2 = y^2x + x^3$. $x = a$.
12. $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$. $y = \pm x$.
13. $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. $x = 2a$; $y = \pm(x + a)$.
14. $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$. $x = \pm a$; $y = \pm a$.
15. $y(x^2 - 3bx + 2b^2) = x^3 - 3ax^2 + a^3$. $x = b$; $x = 2b$; $y = x + 3(b - a)$.
16. $(y - c)(x - b)^2 = a^3$. $y = c$; $x = b$.
17. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Декартов лист). $y + x + a = 0$.
18. $x^2y = 4a^2(2a - y)$ (Локон Аньези). $y = 0$.
19. $xy^2 + x^2y = a^3$. $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 0$.
20. $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y = 1$. $x + 2y = 0$; $x + y = 1$; $y = x + 1$.

§ 158. Асимптоты кривой, отнесенной к полярной системе координат. Пусть кривая дана уравнением:

$$F(\rho, \theta) = 0. \qquad (16)$$

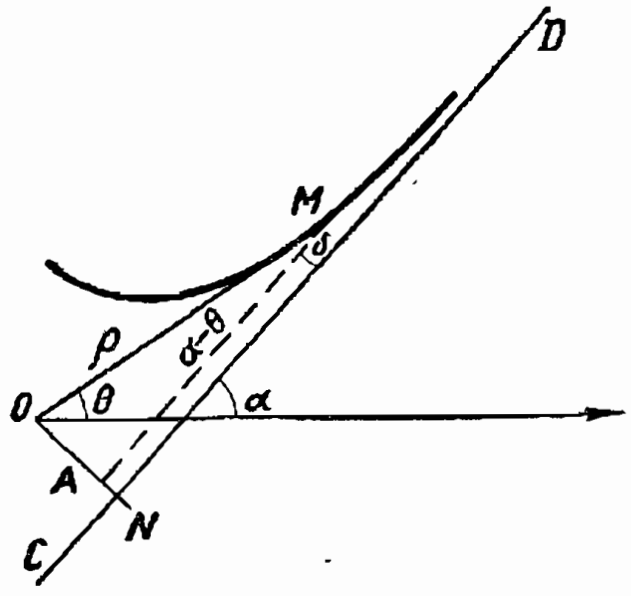


Рис. 168

Если прямая CD служит асимптотой этой кривой (рис. 168), то расстояние δ точки $M(\rho, \theta)$ от асимптоты стремится к нулю, когда точка неограниченно удаляется по кривой.

За параметры, определяющие положение асимптоты, можно принять расстояние $p = ON$ асимптоты от полюса и угол α наклона асимптоты к полярной оси.

Тогда угол между радиусом-вектором точки $M(\rho, \theta)$ и асимптотой будет $(\alpha - \theta)$ и не трудно выразить расстояние δ через координаты точки M и параметры асимптоты:

$$\delta = ON - OA = p - \rho \cdot \sin(\alpha - \theta).$$

А так как, согласно определению асимптоты:

$$\lim_{\rho\to\infty}\delta=0,$$

то

$$\lim_{\rho\to\infty}[p-\rho\cdot\sin(\alpha-\theta)]=0$$

или

$$p=\lim_{\rho\to\infty}\rho\cdot\sin(\alpha-\theta)^{1}. \tag{17}$$

Для существования этого предела необходимо, чтобы

$$\lim_{\rho\to\infty}\sin(\alpha-\theta)=0;$$

откуда

$$\alpha=\lim_{\rho\to\infty}\theta. \tag{18}$$

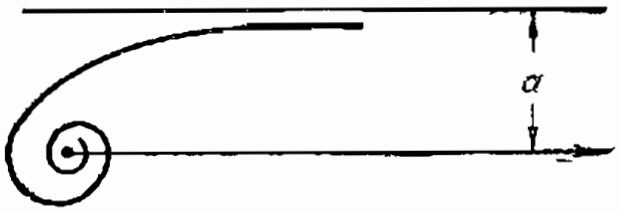


Рис. 169

Вычислив угол α по формуле (18), подставим его значение в формулу (17) и определим второй параметр асимптоты p. При вычислении предела формулы (17) можно заменить условие $\rho\to\infty$ более удобным: $\theta\to\alpha$.

Пример. Найти асимптоту гиперболической спирали:

$$\rho=\frac{a}{\theta}.$$

Решение.

$$\alpha=\lim_{\rho\to\infty}\theta=\lim_{\rho\to\infty}\frac{a}{\rho}=0,$$

$$p=\lim_{\rho\to\infty}\rho\cdot\sin(\alpha-\theta)=\lim_{\theta\to 0}\frac{a\cdot\sin(-\theta)}{\theta}=-a.$$

Асимптота параллельна полярной оси и проходит над ней на расстоянии, равном a (рис. 169).

---

[1] Пользуясь формулой (17), можно получить как положительные, так и отрицательные значения для расстояния p в зависимости от того, проходит ли асимптота справа или слева от полюса, если смотреть по направлению радиуса-вектора удаляющейся точки M.

Примечание. Если асимптота кривой является вместе с тем и предельным положением касательной (см. § 156), то параметр p представляет собою предельную величину подкасательной (см. § 110), а потому может быть вычислен по формуле:

$$p = \lim_{\rho \to \infty} \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}. \tag{19}$$

Эта же формула получается, если пользоваться правилом Лопиталя при вычислении предела в формуле (17).

ЗАДАЧИ

Исследовать на асимптоты следующие кривые:

1. $\rho \cos \theta = a \cos 2\theta$.

Отв. Асимптота перпендикулярна к полярной оси и лежит слева от полюса на расстоянии a.

2. $\rho = a \operatorname{tg} \theta$.

Отв. Кривая имеет две асимптоты, перпендикулярные к полярной оси и в расстоянии a от полюса, по обе стороны от него.

3. $\rho \theta^{\frac{1}{2}} = a$ (жезл).

Отв. Полярная ось.

4. $\rho = a \sec 2\theta$.

Отв. Четыре асимптоты, для которых $p = \frac{a}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

5. $(\rho - a) \sin \theta = b$.

Отв. Одна асимптота, параллельная полярной оси и расположенная над ней на расстоянии b.

6. $\rho = a (\sec 2\theta + \operatorname{tg} 2\theta)$.

Отв. Две асимптоты, параллельные прямой $\theta = \frac{\pi}{4}$, по обе стороны от полюса на расстоянии a от него.

7. Показать, что полярная ось служит асимптотой к обеим ветвям кривой $\rho^2 \sin \theta = a^2 \cos 2\theta$.

8. $\rho = \frac{a}{1 - \cos \theta}$.

Отв. Асимптот нет.

ГЛАВА XV

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

159. Непрерывные функции двух и более независимых переменных. Функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y *непрерывна* для значений (a, b) переменных x, y, если имеем:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b),$$

каким бы способом x и y ни приближались к своим пределам a и b. Иногда это определение кратко выражают, говоря, что *весьма малое изменение одного или обоих независимых переменных одновременно производит весьма малое изменение значения функции*[1].

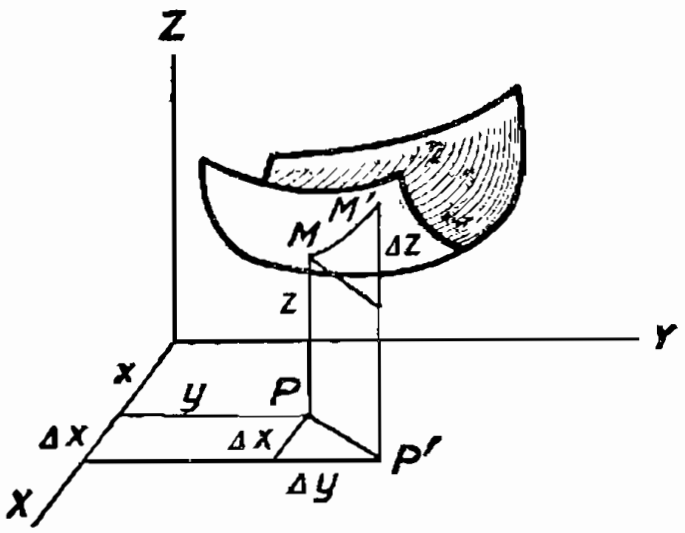


Рис. 170

Поясним это геометрически: рассмотрим поверхность, представляемую уравнением:

$$z = f(x, y).$$

Рассмотрим, далее, на поверхности постоянную точку M, для которой:

$$x = a \text{ и } y = b.$$

Приращения независимых переменных x и y назовем Δx и Δy, а соответствующее приращение независимого переменного z назовем Δz, и пусть:

$$x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z$$

будут координаты точки M' (рис. 170).

Значение функции в точке (a, b) будет:

$$z = f(a, b) = PM.$$

---

[1] Это будет понятнее, если учащийся просмотрит § 46 о непрерывных функциях одного переменного.

Если в точке M функция непрерывна, то, каким бы образом Δx и Δy ни приближались к пределу, равному нулю, Δz будет также приближаться к пределу нуль, т. е. откуда бы точка M' ни приближалась по поверхности к точке M, $P'M'$ будет всегда приближаться к совпадению с PM.

Подобное же определение удерживается и для непрерывной функции более чем двух независимых переменных.

Во всем нижеследующем рассматриваются только такие значения независимых переменных, для которых функция непрерывна.

§ 160. Частные производные. Так как в функции:

$$z=f(x, y),$$

x и y независимы, то можно предположить, что x изменяется в то время как y остается постоянным, или наоборот.

Производная от z по x, когда изменяется x, а y остается постоянным, называется *частной производной от* z по x, обозначается символом $\frac{\partial z}{\partial x}$. Можно, следовательно, написать:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}\right]. \qquad (A)$$

Подобно этому, когда x остается постоянным, а y изменяется, *частная производная от* z *по* y будет:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\right]. \qquad (B)$$

Вместо $\frac{\partial z}{\partial x}$ пишут также $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ или $\frac{\partial f}{\partial x}$; подобным же образом вместо $\frac{\partial z}{\partial y}$ пишут $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Во избежание всяких недоразумений для обозначения частного дифференцирования всюду принято *д круглое*. Впрочем, употребительны и другие обозначения, как например:

$$f'_x(x, y),\ f'_y(x, y);\ D_x f,\ D_y f.$$

Наше обозначение можно распространить и на функцию какого угодно числа независимых переменных. Так, для функции:

$$u=F(x, y, z)$$

имеем три частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Пример 1. Найти частные производные от

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by,$$

рассматривая y как постоянное;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy,$$

рассматривая x как постоянное.

Пример 2. Найти частные производные от

$$u = \sin(ax + by + cz).$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\cos(ax + by + cz),$$

рассматривая y и z как постоянные;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b\cos(ax + by + cz),$$

рассматривая x и z как постоянные;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = c\cos(ax + by + cz),$$

рассматривая x и y как постоянные.

Обращаясь снова к функции

$$z = f(x, y),$$

мы имеем в обозначениях, повсюду принятых:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y) = f'_x = z'_x;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y) = f'_y = z'_y.$$

Такие же обозначения употребляются для функций какого угодно числа независимых переменных.

Обратившись к § 52, мы имеем:

$$f'_x(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x},$$
$$f'_y(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

§ 161. Геометрическая интерпретация частных производных. Пусть уравнение поверхности, представленной на прилагаемом рисунке (рис. 171), будет:

$$z = f(x, y).$$

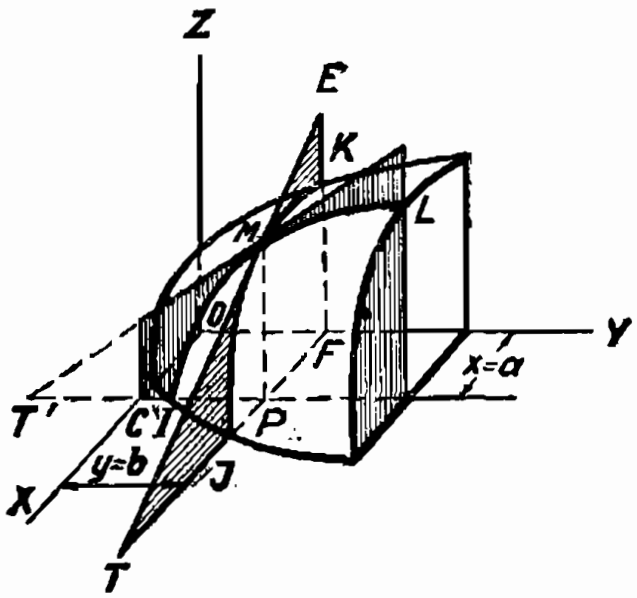


Рис. 171

Проведем плоскость $KEMTJ$ через точку $M(a, b)$ поверхности параллельно плоскости xOz. Так как уравнение этой плоскости есть:

$$y = b,$$

то уравнение сечения JMK, выделяемого ею на поверхности, будет:

$$z = f(x, b),$$

если EF рассматривать как ось Oz, а FT — как ось Ox. В этой плоскости $\frac{\partial f}{\partial x}$ означает то же самое, что $\frac{dz}{dx}$ и, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ равно *тангенсу угла наклона к оси Ox касательной к сечению JMK в точке M.*

Подобным же образом, если провести плоскость $BCDL$ через M параллельно плоскости yOz, ее уравнение будет:

$$x = a,$$

и в плоскости сечения LMI производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ означает то же, что $\frac{\partial z}{\partial y}$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} PT'M$ равно *тангенсу угла наклона к оси Oy касательной к сечению IML в точке M.*

Пример. Дан эллипсоид

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1;$$

найти тангенс угла наклона к осям OX и OY сечений эллипсоида, образуемых: a) плоскостью $y = 1$ в точке, где $x = 4$ и z положительно; b) плоскостью $x = 2$ в точке, где $y = 3$ и z положительно.

Решение. Рассматривая y как постоянное, имеем:

$$\frac{2x}{24} + \frac{2z}{6}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}.$$

Если же x постоянно, то

$$\frac{2y}{12} + \frac{2z}{6}\frac{dz}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{2z}.$$

a) Для $y=1$ и $x=4$

$$z=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=4\\y=1}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) Для $x=2$ и $y=3$

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=2\\y=3}}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

ЗАДАЧИ

Найти частные производные функций:

Отв.

1. $u=x^3+3x^2y-y^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

2. $u=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2Ax+By+D;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Bx+2Cy+E.$$

3. $u=(ax^2+by^2+cz^2)^n$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2anxu}{ax^2+by^2+cz^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2bnyu}{ax^2+by^2+cz^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2cnzu}{ax^2+by^2+cz^2}.$$

4. $u=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

5. $u=x^y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x.$$

6. $u=ax^3y^2z+bxy^3z^4+cy^6+dxz^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3ax^2y^2z+by^3z^4+dz^3;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2ax^3yz+3bxy^2z^4+6cy^5;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=ax^3y^2+4bxy^3z^3+3dxz^2.$$

7. $u = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$; показать, что

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 5u.$$

8. $u = \frac{xy}{x+y}$, показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

9. $u = (y-z)(z-x)(x-y)$; показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

10. $u = \ln(e^x + e^y)$; показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

11. $u = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$; показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y - 1)u.$$

12. $u = x^y y^x$; показать, что

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x + y + \ln u.$$

13. $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$; показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}.$$

14. $u = e^x \sin y + e^y \sin x$; показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{2x} + e^{2y} + 2e^{x+y}\sin(x+y).$$

15. $u = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$; показать, что

$$\sin 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 2.$$

16. Пусть высота прямого круглого конуса будет y, а радиус его основания x. Показать: a) что если основание остается без изменения, то объем изменяется в $\frac{1}{3}\pi x^2$ раз быстрее высоты; b) что если высота остается без изменения, то объем изменяется в $\frac{2}{3}\pi xy$ раз быстрее радиуса основания.

17. Точка движется по эллиптическому параболоиду $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ в плоскости, параллельной плоскости XOZ. Если $x = 3$ *м* и возрастает со скоростью 9 *м/сек*, то найти: a) скорость изменения z со временем; b) величину скорости точки; c) направление ее движения.

Отв. a) $v_z = 6$ *м/сек*; b) $v = 3\sqrt{13}$ *м/сек*; c) $\tau = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$ — угол, составляемый с плоскостью XOY.

18. Если на поверхности предыдущей задачи точка движется в плоскости, параллельной плоскости XOZ, то, полагая, что $y = 2$ и возрастает со скоростью 5 *м/сек*, найти a) скорость изменения z со временем; b) величину скорости точки; c) направление ее движения.

Отв. a) 5 *м/сек*; b) $5\sqrt{2}$ *м/сек*; c) $\tau = \frac{\pi}{4}$ — угол с плоскостью XOY.

§ 162. Полное приращение. Пусть дана непрерывная функция двух переменных $z=f(x, y)$. Если x и y получают *одновременно* приращения Δx и Δy, то функция z получает приращение, называемое *полным приращением* в отличие от приращений функции, образующихся от изменения только одного переменного, с чем мы встретились при рассмотрении понятия частной производной. Обозначая полное приращение функции через Δz, можно написать:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y). \qquad (A)$$

Когда Δx и Δy одновременно стремятся к нулю, точка $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ на плоскости XOY движется каким-нибудь образом к точке (x, y), а значение функции $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ стремится к значению $f(x, y)$. Заставим точку $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ приближаться к точке (x, y), следуя по определенному пути, именно *сперва* по прямой, параллельной оси OX, а *затем* по прямой, параллельной оси OY. Очевидно, при этом точка $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ переместится сперва в точку $(x,\ y+\Delta y)$, а затем из этой точки — в точку (x, y) (рис. 172).

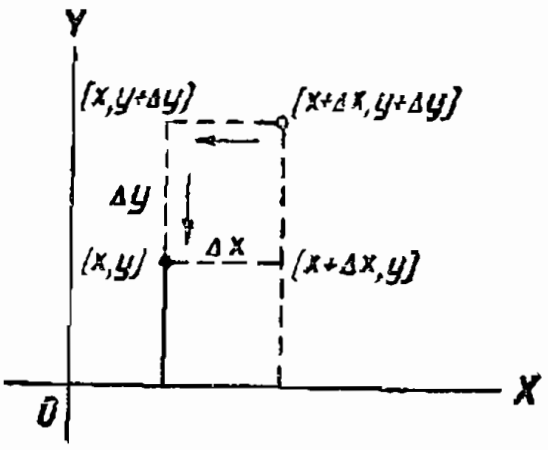


Рис. 172

Соответственно этому способу перемещения точки значения функции $z=f(x, y)$ будут тоже изменяться определенным образом: от значения $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ мы перейдем сперва к значению $f(x,\ y+\Delta y)$, а затем от этого значения к значению $f(x, y)$. Таким образом, полное приращение функции мы можем представить следующим образом:

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)]+[f(x,\ y+\Delta y)-f(x, y)].$$

Рассматривая первую квадратную скобку, мы видим, что переход от значения $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ к значению $f(x,\ y+\Delta y)$ происходит при п о с т о я н н о м значении переменного y, именно при значении $y+\Delta y$. Следовательно, приращение:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)$$

является результатом изменения только о д н о г о x, а поэтому к этой разности можно применить формулы, относящиеся к функции о д н о г о переменного; применим, в частности, формулу Лагранжа (§ 144). При этом заметим, что теперь в формуле Лагранжа нужно поставить не просто производную, а частную

производную по аргументу x, соответственно тому, что написанное приращение соответствует изменению x при постоянном $y+\Delta y$. Итак, можем написать:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)=f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x,$$

где θ_1 — правильная положительная дробь.

Этот результат очевиден и с геометрической точки зрения: при переходе от значения $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ к значению $f(x, y+\Delta y)$ точка M' перейдет в точку M'', следуя по поверхности $z=f(x, y)$ вдоль плоской кривой, лежащей в плоскости, параллельной плоскости XOZ, на расстоянии $y+\Delta y$ от нее (рис. 173). И чертеж показывает, что в некоторой точке Q между точками M' и M'' касательная будет параллельна секущей. А это свойство плоской кривой как раз и составляет геометрический смысл формулы Лагранжа (§ 144).

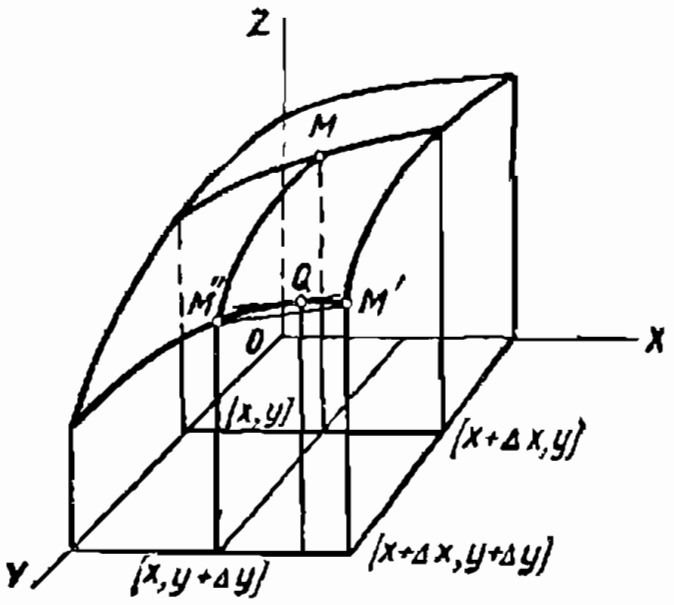


Рис. 173

Рассуждая совершенно аналогичным образом, мы применим формулу Лагранжа для разности, стоящей во второй квадратной скобке, и таким образом будем иметь:

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\,\Delta y.$$

Итак, полное приращение можно представить в следующем виде:

$$\Delta z=f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x+f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\,\Delta y. \qquad (B)$$

Допустим теперь, что частные производные нашей функции также непрерывны.

Это означает, что разности:

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)-f'_x(x, y)=\varepsilon_1,$$
$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)-f'_y(x, y)=\varepsilon_2$$

при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ будут стремиться к нулю, т. е. величины ε_1 и ε_2 будут бесконечно малыми.

Из последних равенств будем иметь:

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)=f'_x(x,y)+\varepsilon_1,$$
$$f'_y(x,\ y+\theta_2\Delta y)=f'_y(x,y)+\varepsilon_2,$$

и равенство (B) может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta z=f'_x(x,y)\,\Delta x+f'_y(x,y)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y. \qquad (C)$$

§ 163. Полный дифференциал. Напомним сперва, что приращение одного переменного $y=f(x)$ выражается соотношением

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\varepsilon\Delta x,$$

где $\varepsilon\to 0$, когда $\Delta x\to 0$. Первое слагаемое $f'(x)\,\Delta x$ было названо дифференциалом функции:

$$dy=f'(x)\,\Delta x.$$

Следовательно, приращение функции отличается от дифференциала на бесконечно малое высшего порядка сравнительно с Δx или дифференциал есть *главная часть приращения функции*, получающаяся зачеркиванием членов высшей малости.

В формуле (C) предыдущего параграфа слагаемые $\varepsilon_1\Delta x$ и $\varepsilon_2\Delta y$ также являются членами высшего порядка малости по отношению, соответственно, к Δx и к Δy. И по аналогии с понятием дифференциала функции одного переменного, *полным дифференциалом функции* $z=f(x,y)$ мы назовем *главную часть* полного приращения, т. е. сумму:

$$f'_x(x,y)\,\Delta x+f'_y(x,y)\,\Delta y.$$

Обозначая полный дифференциал функции символом dz, таким образом получим:

$$dz=f'_x(x,y)\,\Delta x+f'_y(x,y)\,\Delta y.$$

Правая часть этого равенства есть главная часть правой части равенства (C); это означает, что dz есть весьма точное приближение к величине Δz для малых величин приращений Δx и Δy (сравните § 120). Ясно, что если $z\equiv x$, то предыдущее равенство дает $dx=\Delta x$, ибо $\frac{\partial x}{\partial x}=1$ и $\frac{\partial x}{\partial y}=0$. Точно так же, если $z\equiv y$, то $dy=\Delta y$, ибо $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial y}{\partial y}=1$.

Поэтому для случая, когда x и y являются *независимыми* переменными, $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, и, значит, мы имеем:

$$dz=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (1)$$

Аналогично, полным дифференциалом функции трех независимых переменных $u=f(x, y, z)$ называется выражение:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (1')$$

В дальнейшем мы увидим, что формулы (1) и (1′) сохраняют свой вид в том случае, когда переменные x, y, z не являются независимыми.

В главе, излагающей учение о дифференциале функции одного переменного, было показано, что на практике часто вместо сложного по своей природе приращения функции берут более простой ее дифференциал. Получающаяся при этом ошибка не имеет существенного значения вследствие того, что приращение отличается от дифференциала на член высшей малости (см. § 120).

Совершенно аналогичную роль для практики играет и полный дифференциал функции нескольких переменных.

Рассмотрим пример на применение полного дифференциала для вычисления погрешностей.

Пример. Период качания простого маятника выражается формулой:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника и g — ускорение силы тяжести. Найти погрешность в определении T, обусловливаемую небольшими погрешностями при измерении l и g.

Решение. Обозначим погрешности, имеющиеся при изменении l и g, соответственно через dl и dg. Получающаяся благодаря этому погрешность при вычислении периода T является приращением ΔT. Заменяя ΔT через dT, получаем:

$$\Delta T\approx dT\approx\frac{\partial T}{\partial l}dl+\frac{\partial T}{\partial g}dg;$$

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{1}{g},$$

$$\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right);$$

$$dT=\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{dl}{g}-\frac{ldg}{g^2}\right)=\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{gdl-ldg}{g^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l}-\frac{dg}{g}\right).$$

Отсюда заключаем:

$$\left|\frac{dT}{T}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{dl}{l}\right|+\left|\frac{dg}{g}\right|\right),$$

т. е. абсолютная величина относительной погрешности, получающейся при вычислении T, не превышает полусуммы абсолютных величин относительных погрешностей, имеющих место при измерении l и g.

§ 164. Закон сохранения формулы полного дифференциала при преобразовании независимых переменных. Ранее, в § 126, мы доказали одно из важнейших свойств дифференциала функции **одного** независимого переменного, а именно *неизменность его формулы:*

$$dy = f'(u) \cdot du, \quad \text{где } y = f(u) \tag{1}$$

во всех случаях, когда буква *u обозначает независимое переменное,* или, когда *u есть промежуточная функция нового независимого переменного;* только в этом последнем случае под множителем du надо понимать уже дифференциал функции u по новому независимому переменному.

В предыдущем § 163 мы познакомились с понятием полного дифференциала функции **многих** независимых переменных. И здесь точно так же имеется *неизменность его формулы:*

$$dz = f'_u(u, v) \cdot du + f'_v(u, v) \cdot dv, \quad \text{где } z = f(u, v) \tag{2}$$

во всех случаях, когда u, v *обозначают независимые переменные,* или когда u, v *суть промежуточные функции новых независимых переменных,* в каком угодно числе, лишь бы под множителями du, dv понимались полные дифференциалы функций u, v по новым независимым переменным[1].

Чтобы доказать этот закон сохранения формулы полного дифференциала при *всяких* преобразованиях независимых переменных, мы докажем его сначала для того случая, когда x и y становятся функциями *одного* независимого переменного t.

Итак, пусть $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где φ и ψ непрерывные функции, имеющие производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Дадим t приращение Δt; тогда x и y получат соответственные приращения Δx и Δy, причем мы знаем, что когда $\Delta t \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ имеют пределами соответственные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Так как $z = f(x, y)$, то z также получит некоторое приращение Δz, где:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Значит, Δz есть не что иное, как *полное приращение* (см. § 162) и по его формуле (C) мы имеем:

$$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$, когда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ и, следовательно, когда $\Delta t \to 0$.

---

[1] А не приращение Δu, как в случае, когда буква u обозначает независимое переменное.

Деля это равенство на Δt, мы имеем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x, y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x, y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Делая $\Delta t\to 0$ и переходя к пределу, мы, очевидно, получим

$$z'_t=f'_x(x, y)\cdot\varphi'(t)+f'_y(x, y)\cdot\psi'(t).$$

Отсюда, умножив обе части этого равенства на дифференциал dt независимого переменного t, и вспомнив, что $dz=z'_t\cdot dt$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ и $dy=\psi'(t)\,dt$, мы получаем окончательно:

$$dz=f'_x(x, y)\,dx+f'_y(x, y)\,dy. \qquad (4)$$

А это равенство как раз и выражает *закон сохранения формулы полного дифференциала, когда буквы x и y перестают быть независимыми переменными, а становятся функциями одного независимого переменного t.*

В этой формуле dx, dy и dz суть обыкновенные дифференциалы от функции x, y и z по переменному t, причем мы должны помнить, что $z=f(x, y)$.

То, что мы, ясности ради, ограничились рассмотрением функции f только двух переменных x, y, а не трех, четырех, и т. д., это, очевидно, не имеет никакого значения. Таким образом мы имеем следующее общее предложение:

Если в функции $w=F(x, y, z)$ многих независимых переменных x, y, z, имеющей непрерывные частные производные, заменить аргументы x, y, z дифференцируемыми функциями одного и того же переменного t, тогда обыкновенный дифференциал dw количества w, ставшего функцией одного независимого переменного t, выражается через x, y, z и через обыкновенные дифференциалы dx, dy, dz по формуле полного дифференциала, как если бы переменные x, y, z продолжали еще оставаться независимыми:

$$dF(x, y, z)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz, \qquad (5)$$

где

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \text{и}\ z=\omega(t).$$

Разделив равенство (5) на дифференциал dt независимого переменного t, мы получим формулу:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dF(x, y, z)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}, \qquad (6)$$

которую словесно нужно читать так:

Правило дифференцирования сложных функций.

Если имеем сложную функцию независимого переменного t, образованную заменой аргументов $x, y, z, \ldots$, в выражении $F(x, y, z, \ldots)$ функциями от t, то, чтобы получить производную по t этой сложной функции, надо частную производную выражения F по каждому аргументу помножить на производную этого аргумента по t и все эти парные произведения сложить.

При этом, разумеется, предполагается, что выражение F имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, и что эти аргументы заменяются дифференцируемыми функциями от t.

Доказанное правило дифференцирования сложных функций от одного независимого переменного позволяет тотчас же доказать *закон сохранения формулы полного дифференциала* уже при *всяких* преобразованиях независимых переменных.

Пусть $\omega = F(u, v, w)$ есть функция трех аргументов u, v, w, которые сами, в свою очередь, суть функции каких-нибудь новых четырех независимых переменных x, y, z и t, т. е. $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$ и $w = w(x, y, z, t)$.

Мы хотим отыскать полный дифференциал $d\omega$ функции $\omega = F(u, v, w)$, где аргументы u, v, w уже заменены функциями $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ от x, y, z, t, следовательно, рассматривая ω как сложную функцию независимых переменных x, y, z, t.

Прежде всего, *по определению полного дифференциала,* имеем:

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt. \tag{7}$$

С другой стороны, рассматривая аргументы x, y, z и t по одиночке (т. е. каждый в отдельности) как *одно* независимое переменное и, следовательно, предполагая постоянными численные значения трех остальных букв, мы можем применить только что выведенное правило дифференцирования сложных функций одного независимого переменного и, значит, получить четыре частные производные $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Умножая эти равенства, соответственно, на дифференциалы dx, dy, dz и dt независимых переменных x, y, z, t и складывая по вертикальным колоннам, мы в левой части будем иметь:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}dx+\frac{\partial \omega}{\partial y}dy+\frac{\partial \omega}{\partial z}dz+\frac{\partial \omega}{\partial t}dt,$$

т. е. в силу равенства (7), в левой части мы получаем *полный дифференциал* $d\omega$ сложной функции ω по истинным независимым переменным x, y, z, t.

Что же касается правой части, то, складывая количества первой колонны, мы будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

или, вынося общий множитель $\frac{\partial F}{\partial u}$ за скобку, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right).$$

Так как x, y, z, t суть независимые переменные, то сумма, написанная в скобке, есть не что иное, как *полный дифференциал* du функции $u(x, y, z, t)$ по этим переменным. Поэтому, предыдущее выражение напишется просто в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot du.$$

Аналогично, сумма количеств второй колонны равна $\frac{\partial F}{\partial v}\cdot dv$, где dv есть полный дифференциал функции $v(x, y, z, t)$ по независимым переменным x, y, z, t. И, наконец, третья колонна дает $\frac{\partial F}{\partial w}\cdot dw$.

Таким образом, в левой части мы имеем $d\omega$, а в правой части сумму $\frac{\partial F}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot dv+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot dw$.

Следовательно,

$$d\omega=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot dv+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot dw, \tag{9}$$

где $d\omega$, du, dv, dw суть полные дифференциалы функций $\omega(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$ по истинным независимым переменным x, y, z, t. Но так как $\omega=F(u, v, w)$, то *формула* (9), *дающая в левой части полный дифференциал* $d\omega$ *функции* ω *по четырем независимым переменным* x, y, z, t,

имеет в правой своей части такой вид, как если бы промежуточные функции u, v, w были независимыми переменными.

А это и есть закон сохранения формулы полного дифференциала при преобразовании независимых переменных.

В этом и состоит выгода знака полного дифференциала, ибо *равенство* (9) *не зависит ни от числа независимых переменных, ни от их выбора.*

§ 165. Практическое вычисление полных дифференциалов. Доказанный закон сохранения формулы полного дифференциала говорит нам о том, что полные дифференциалы вычисляются по тем же самым формулам, по которым вычисляются дифференциалы функций одного независимого переменного.

Так, мы имеем:

$$d(u+v)=du+dv,$$
$$d(uv)=vdu+udv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

где u и v суть функции каких угодно зависимых переменных и в каком угодно числе.

Поэтому полные дифференциалы нужно вычислять прямо, т. е. непосредственно, по обычным табличным формулам дифференциального исчисления, *не прибегая к предварительному вычислению частных производных.* Предварительное вычисление частных производных было бы бесполезным осложнением работы вычисления, ибо многие выкладки повторяются беспрестанно без всякой пользы. Наоборот, когда полный дифференциал $df(x, y)$ получен, то тогда все частные производные сразу получаются простым отбором. Ибо, когда мы получили полный дифференциал $df(x, y)$, то частная производная по x будет просто коэффициентом при dx, и частная производная по y будет коэффициентом при dy в полученном выражении полного дифференциала.

Пример 1. Найти сразу обе частные производные функции $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

Решение. Находим сразу полный дифференциал:

$$d\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

значит, отбирая коэффициенты при dx и при dy, находим одновременно:

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пример 2. Найти обе частные производные от $\ln\sqrt{x^2+y^3}$.
Решение. Вычисляем непосредственно полный дифференциал:

$$d\ln\sqrt{x^2+y^3}=\frac{1}{2}\,d\ln(x^2+y^3)=\frac{2xdx+3y^2dy}{2(x^2+y^3)}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial\ln\sqrt{x^2+y^3}}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^3},\quad \frac{\partial\ln\sqrt{x^2+y^3}}{\partial y}=\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^3}.$$

§ 166. Частная производная и полная производная. Дифференцирование вдоль линии. Согласно правилу дифференцирования сложных функций одного переменного, мы имеем:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\ldots, \tag{6}$$

когда буквы x, y, z, ..., стоящие под знаком функции $F(x, y, z, \ldots)$, суть величины, зависящие от переменного t.

Если в этой формуле мы примем $t\equiv x$, т. е. предположим, что независимым переменным является буква x, а все другие буквы y, z, ... суть функции этого переменного x, то формула (6) примет, очевидно, вид:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\ldots \tag{6*}$$

В частности, для функции двух переменных $F(x, y)$ имеем:

$$\frac{dF(x, y)}{dx}=\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{6_1*}$$

и для функции трех переменных $F(x, y, z)$ имеем:

$$\frac{dF(x, y, z)}{dx}=\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}. \tag{6_2*}$$

Во всех этих формулах учащийся должен заметить, что $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{dF}{dx}$ имеют совершенно различный смысл.

Частная производная $\frac{\partial F}{\partial x}$ составляется в предположении, что *изменяется только одно переменное* x, тогда как:

$$\frac{dF}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x},$$

где ΔF есть *полное приращение* функции F, производимое изменениями *всех переменных*, причем эти изменения зависят только от изменения Δx независимого переменного x.

Можно сказать, что $\frac{\partial F}{\partial x}$ есть производная функции F по букве x, той самой, которая лишь *явным образом* фигурирует в формуле, изображающей эту функцию $F(x, y, z)$, тогда как $\frac{dF}{dx}$ есть производная функции F по букве x, содержащейся в $F(x, y, z)$ не только явно, но еще и неявно, так как предполагается, что буквы y и z тоже некоторые функции буквы x.

В отличие от частной производной $\frac{\partial F}{\partial x}$, производная $\frac{dF}{dx}$ называется ***полной производной*** по букве x.

Пример 1. Дано $F = \sin\frac{x}{y}$, $x = e^t$; $y = t^2$; найти $\frac{dF}{dt}$.

Решение.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y};\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y},\quad \frac{dx}{dt} = e^t,\quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Подставляя в (6), найдем:

$$\frac{dF}{dt} = (t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}.$$

Пример 2. Дано $F = e^{ax}(y - z)$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; найти $\frac{dF}{dx}$.

Решение.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ae^{ax}(y - z),\quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{ax},\quad \frac{\partial F}{\partial z} = -e^{ax};$$

$$\frac{dy}{dx} = a\cos x,\quad \frac{dz}{dx} = -\sin x.$$

Подставляя в (6*), имеем:

$$\frac{dF}{dx} = ae^{ax}(y - z) + ae^{ax}\cos x + e^{ax}\sin x = e^{ax}(a^2 + 1)\sin x.$$

Примечание. В примерах, подобных вышеприведенному, можно было бы посредством подстановки выразить F явно в функции независимого переменного и затем прямо дифференцировать, но вообще этот процесс был бы длиннее.

Можно и *геометрически* пояснить разный смысл частной производной $\frac{\partial F}{\partial x}$ и полной производной $\frac{dF}{dx}$. Предположим, что имеем функцию двух переменных x и y, а именно $z = F(x, y)$. Она определена в некотором куске плоскости XOY. Если в этом же куске плоскости начерчена некоторая кривая дуга AB (рис. 174), уравнение которой есть $y = f(x)$, то *вдоль*

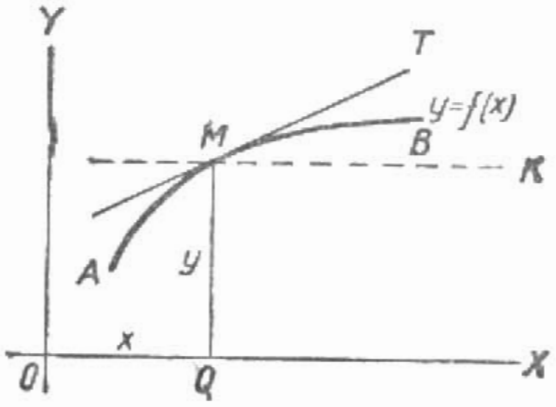


Рис. 174

этой дуги функция $z=F(x, y)$ очевидно равна $z=F[x, f(x)]$. Ее производная $\frac{dz}{dx}$, вычисленная для точки $M(x, y)$ дуги, есть, очевидно, *полная производная*; по формуле (6_1^*) имеем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot f'(x). \qquad (10)$$

Мы видим, что *полная производная* $\frac{dz}{dx}$, *вычисленная для точки* $M(x, y)$, *зависит от направления кривой* $y=f(x)$, *проходящей через эту точку* M.

Ибо, если через эту же самую точку M мы проведем какую-нибудь новую кривую $y=f_1(x)$ уже с *другим* направлением в точке M (т. е. с другой касательной в M), то мы будем иметь и *другую* величину полной производной $\frac{dz}{dx}$ в точке $M(x, y)$ вдоль этой новой кривой, ибо, по условию, $f'(x)\neq f_1'(x)$, в то время как частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ для обеих кривых в точке M, очевидно, равны.

Наоборот, если новая кривая $y=f_1(x)$ имеет ту же самую касательную в точке $M(x, y)$, то $f'(x)=f_1'x$ и ясно, что полная производная $\frac{dz}{dx}$ в точке M одна и та же вдоль обеих кривых.

Таким образом, *полная производная* $\frac{dz}{dx}$ *зависит не только от того, в какой точке* $M(x, y)$ *плоскости XOY ее вычисляют, но еще и от направления в этой точке. Частная же производная* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *зависит только от точки* $M(x, y)$, *в которой ее вычисляют, и больше ни от чего не зависит.*

Это обстоятельство становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что, когда направление, по которому вычисляют полную производную, делается параллельным оси абсцисс OX, тогда полная производная $\frac{dz}{dx}$ делается численно равной частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$. Действительно, если в равенстве (10) мы сделаем $f'(x)=0$, тогда получим $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}$.

Пример 3. Высота кругового конуса, равная 100 *м*, уменьшается со скоростью 10 *м/сек*; радиус основания равен 50 *м* и возрастает со скоростью 5 *м/сек*. Как изменяется объем конуса?

Решение. Пусть x — радиус основания и y — высота конуса. Тогда объем:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2}{3}\pi xy, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{3}\pi x^2.$$

Подставляем в формулу (6):

$$\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt}+\frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}.$$

Так как $x=50$, $y=100$, $\frac{dx}{dt}=5$, $\frac{dy}{dt}=-10$, то

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{\substack{x=50\\x=100}}=\frac{2}{3}\pi\cdot5000\cdot5-\frac{1}{3}\pi\cdot2500\cdot10=25\,000\frac{\pi}{3}\ м^3/сек.$$

§ 167. Дифференцирование неявных функций. Уравнение

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

определяет либо x, либо y как неявную функцию другого переменного. Любое уравнение, содержащее буквы x и y, все члены которого перенесены в левую часть, может быть написано в виде уравнения (1). Мы обозначаем буквой u функцию от букв x и y, стоящую в левой части:

$$u=f(x, y). \tag{2}$$

Если y есть произвольная дифференцируемая функция переменного x, мы имеем:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{3}$$

Но у нас буква y изображает не какую-нибудь произвольную функцию от x, а функцию *неявную*, делающую величину u тождественно равной нулю. Поэтому для неявной функции $y(x)$ мы имеем $u=0$ и $\frac{du}{dx}=0$.

Отсюда, уравнение (3) становится:

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Решая его, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},\ \text{где}\ \frac{\partial f}{\partial y}\neq0. \tag{5}$$

Это и есть формула дифференцирования неявной функции.

Геометрически она означает, что в то время, как точка $M(x, y)$ движется по плоскости XOY таким образом, чтобы функция $f(x, y)$ неизменно удерживалась на той же самой численной величине, т. е. чтобы $f(x, y)=$ постоянной и, следовательно,

чтобы $\frac{du}{dx}=0$, в это самое время *направление этого движения* дается всегда формулой (5).

Пример 1. Дано $x^2y^4+\sin y=0$; найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Пусть

$$f(x,\ y)=x^2y^4+\sin y.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^4,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x^2y^3+\cos y.$$

Из (5) находим:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^4}{4x^2y^3+\cos y}.$$

Пример 2. Если x, когда оно проходит через значение $x=3$ *дм*, возрастает со скоростью 2 *дм/сек*, то с какой скоростью должно изменяться y, когда $y=1$ *дм*, для того чтобы функция $2xy^2-3x^2y$ сохраняла постоянную величину?

Решение. Пусть

$$f(x,\ y)=2xy^2-3x^2y;$$

находим частные производные этой функции по x и по y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2-6xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4xy-3x^2.$$

Подставляя в (5), имеем:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y^2-6xy}{4xy-3x^2},$$

или

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{2y^2-6xy}{4xy-3x^2}.$$

Но $x=3$, $y=1$, $\frac{dx}{dt}=2$; отсюда

$$\frac{dy}{dt}=-2\frac{2}{15}\ \text{дм/сек}.$$

Рассмотрим поверхность, уравнение которой есть (рис. 175)

$$F(x,\ y,\ z)=0. \tag{6}$$

Пусть $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ три такие функции независимого переменного t, что уравнение поверхности (6), после подстановки, становится тождественно удовлетворенным. Это означает, что

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t) \tag{7}$$

суть параметрические уравнения кривой, лежащей на поверхности (6).

Введя обозначение:

$$U=F(x, y, z),$$

мы, после подстановки (7), будем иметь тождественно $U=0$ и, значит, $\frac{dU}{dt}=0$. Это нам дает:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0 \tag{8}$$

для всякой кривой (7), лежащей на поверхности (6).

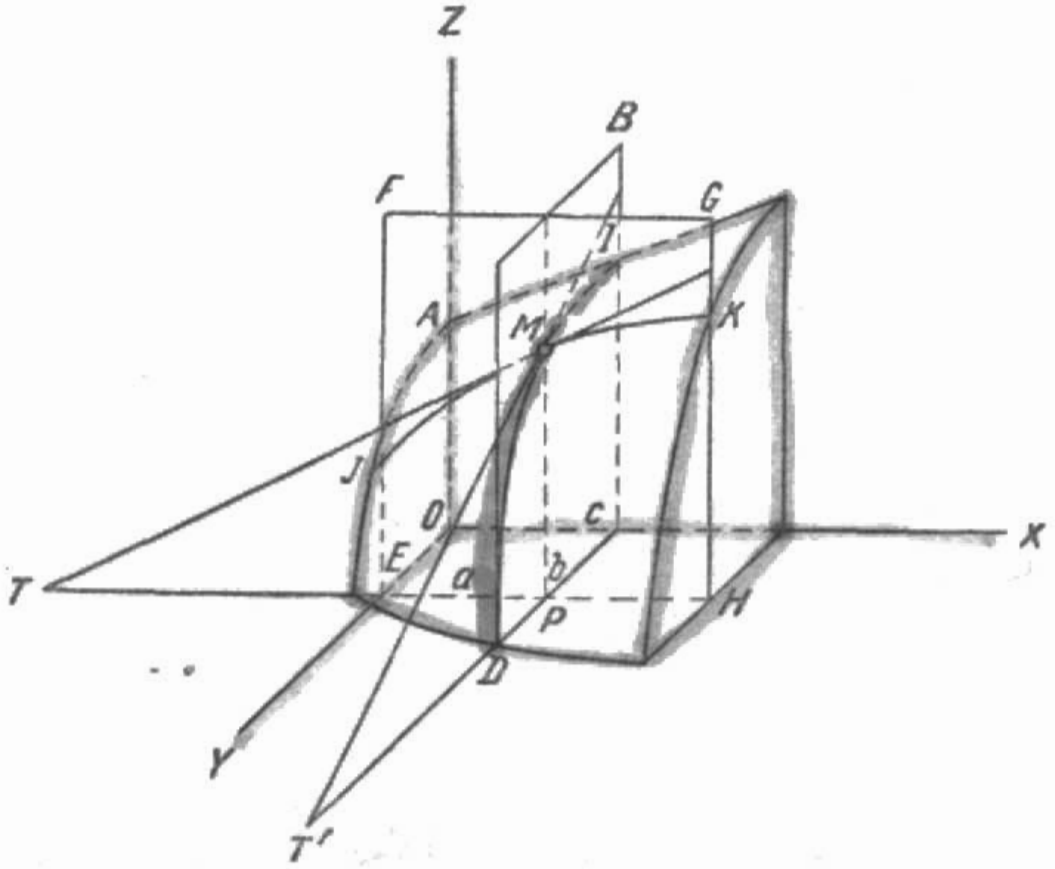


Рис. 175

Мы рассмотрим два специальные случая.

Во-первых, на рисунке кривая дуга *JMK* есть плоское сечение, сделанное плоскостью $y=\text{const}$. Поэтому в формуле (8) имеем $dy=0$ и мы получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0,$$

откуда:

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Но левая часть этого равенства есть, очевидно, тангенс наклона кривой JMK к оси OX. Отсюда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{9}$$

Во-вторых, совершенно аналогично мы получаем формулу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) говорят нам о следующем: когда имеем уравнение (6), определяющее нам букву z как неявную функцию двух независимых переменных x и y, тогда обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ этой неявной функции z даются формулами (9) и (10).

Пример. Уравнением $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{6}=1$ величина z определяется как неявная функция переменных x и y. Найти частные производные этой функции.

Решение. $F=\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{6}-1$.

Отсюда $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{12}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{6}$, $\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z}{3}$. По формулам (9) и (10) находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{4z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{2z}.$$

ЗАДАЧИ

В следующих шести примерах найти полные производные, употребляя формулы (6), (6_1^*), (6_2^*) (см. § 166).

1. $u=z^2+y^2+zy$, $z=\sin x$, $y=e^x$.

   Отв. $\frac{du}{dx}=2e^{2x}+e^x(\sin x+\cos x)+\sin 2x$.

2. $u=\operatorname{arc tg}(xy)$, $y=e^x$. Отв. $\frac{du}{dx}=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

3. $u=\ln(a^2-\rho^2)$, $\rho=a\sin\vartheta$. $\frac{du}{d\vartheta}=-2\operatorname{tg}\vartheta$.

4. $u=v^2+vy$, $v=\ln s$, $y=e^s$. $\frac{du}{ds}=\frac{2v+y}{s}+ve^s$.

5. $u = \arcsin(s-r)$, $r = 3t$, $s = 4t^3$. Отв. $\frac{du}{dt} = \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}$.

6. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$. $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.

В следующих примерах найти полные дифференциалы, пользуясь формулой (1, § 163).

Отв.

7. $u = by^2x + cx^2 + gy^3 + ex$. $du = (by^2 + 2cx + e)\,dx + (2byx + 3gy^2)\,dy$.

8. $u = \ln x^y$. $du = \frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy$.

9. $u = y^{\sin x}$. $du = y^{\sin x}\ln y\cos x\,dx + \sin x\,y^{\sin x - 1}dy$.

10. $u = x^{\ln y}$. $du = u\left(\frac{\ln y}{x}\,dx + \frac{\ln x}{y}\,dy\right)$.

11. $u = \frac{s+t}{s-t}$. $du = \frac{2(s\,dt - t\,ds)}{(s-t)^2}$.

12. $u = \sin(pq)$. $du = \cos(pq)\,[q\,dp + p\,dq]$.

13. $u = x^{yz}$. $du = x^{yz-1}(yz\,dx + zx\ln x\,dy + xy\ln x\,dz)$.

14. $u = \operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\phi$. $du = 4u\left(\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} + \frac{d\theta}{\sin 2\theta} + \frac{d\phi}{\sin 2\phi}\right)$.

15. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$. $du = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$.

16. $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. $du = 0$.

17. $u = \arcsin\frac{x}{y}$. $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$.

18. Принимая, что уравнение, характеризующее совершенный газ, есть

$$vp = RT,$$

где v — объем, p — давление, T — абсолютная температура, а R — постоянное, каково будет соотношение между дифференциалами dv, dp, dT?

Отв. $v\,dp + p\,dv = R\,dT$.

19. Сторона треугольника имеет длину 2,4 *м* и возрастает со скоростью 10 *см/сек*, вторая сторона длиной 1,5 *м* уменьшается со скоростью 5 *см/сек*. Угол, заключенный между этими сторонами, составляет 60° и возрастает со скоростью 2° в секунду. Как изменяется площадь треугольника?

Отв. Возрастает со скоростью 444 *см²/сек*.

20. Как изменяется третья сторона треугольника предыдущей задачи?

Отв. 12,32 *см/сек*.

21. Сторона прямоугольника имеет 25 *см* длины и увеличивается со скоростью 5 *см/сек*. Другая сторона длиной 37,5 *см* уменьшается со скоростью 2,5 *см/сек*. Как изменяется площадь прямоугольника в конце второй секунды?

Отв. Возрастает со скоростью 75 *см²/сек*.

22. Ребра прямоугольного параллелепипеда имеют длины 7,5 *см*, 10 *см* и 12,5 *см*, и каждое из них возрастает со скоростью 0,5 *см/сек*. Как изменяется объем параллелепипеда?

Отв. Возрастает со скоростью 146,88 *см³/сек*.

23. Человек, стоя на пристани, притягивает лодку за веревку, которую он тянет со скоростью 0,6 *м/сек*. Руки его находятся на высоте 1,8 *м* над носом лодки. С какой скоростью движется лодка в момент, когда она находится на расстоянии 2,4 *м* от пристани?

Отв. 0,75 *м/сек*.

24. Объем и радиус цилиндрического котла возрастают соответственно со скоростью 27 *дм*³/*мин* и 0,003 *дм*/*мин*. Как изменяется длина котла в момент, когда объем его становится равным 1,18 *м*³ и радиус 0,6 *м*?

Отв. 0,228 *дм*/*мин*.

25. Вода вытекает из конического фильтра высотой 20 *см* и имеющего диаметр основания длиной 15 *см* со скоростью 0,0125 *см*³/*час*. С какой скоростью уменьшается площадь поверхности воды, когда уровень воды опустится на 10 *см*?

Отв. 0,0025 *см*²/*час*.

26. Пусть x и y — координаты некоторой точки относительно прямоугольной системы координат, а r и θ — полярные координаты той же точки. Показать, что

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta, \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

27. Закрытый ящик, имеющий в длину 10 *см*, в ширину 8 *см* и в вышину 7 *см*, сделан из дощечек, имеющих $\frac{1}{2}$ *см* в толщину. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

Отв. 206 *см*³.

28. Ускорение g вычислено из формулы

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Найти допущенную при этом погрешность в зависимости от небольших погрешностей, допущенных при изменении s и t.

Отв. Абсолютная погрешность $dg = \dfrac{2ds - 2gt\,dt}{t^2}$.

Относительная погрешность $\dfrac{dg}{g} = \dfrac{ds}{s} - \dfrac{2dt}{t}$.

В остальных примерах найти $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулой (7).

29. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$. **Отв.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{2(x^2+y^2) - a^2}{2(x^2+y^2) + a^2}$.

30. $e^y - e^x + xy = 0$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{e^y + x}$.

31. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}$.

32. $\sin x \sin y + \cos x \cos y - y = 0$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x-y) - 1}$.

33. $y^x = x^y$. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.

34. $f(x, y) - f(y, x) = 0$. Показать, что производная может быть выражена при помощи дроби, числитель которой получается из знаменателя перестановкой букв x и y.

§ 168. Производные высшего порядка.

Если

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y) \tag{2}$$

сами являются функциями букв x и y и поэтому могут быть, в свою очередь, дифференцированы.

Так, беря первую функцию и дифференцируя ее, имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y). \tag{3}$$

Таким же точно образом, из второй функции (2) мы выводим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y). \tag{4}$$

В равенствах (3) и (4) на первый взгляд находятся **четыре** частные производные второго порядка. Но на самом деле их там только **три**, ибо дальше строго доказывается тождество:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \tag{A}$$

если только эти производные непрерывны.

Это означает, что

порядок последовательного дифференцирования по x и по y безразличен.

Поэтому-то в равенствах (3) и (4) имеется только **три** частные производные второго порядка, именно:

$$f''_{xx}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y) \equiv f''_{yx}(x, y), \quad f''_{yy}(x, y). \tag{5}$$

Это распространяется и на высшие производные. Например, в силу тождества (A), имеем:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2}.$$

То же самое имеет силу и для функций трех или более переменных.

Пример. Дано $u = x^3y - 3x^2y^3$; проверить $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 3x^2 - 18xy^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 9x^2y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 3x^2 - 18xy^2.$$

Этим проверено тождество (A).

Доказательство тождества (A). Рассмотрим выражение:

$$U = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y). \tag{6}$$

Введем вспомогательную функцию:

$$\varphi(x)=f(x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

считая (пока) y и Δy постоянными.

Выражение U есть приращение функции $\varphi(x)$, а именно:

$$U=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)]-$$
$$-[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)].$$

Применив теорему Лагранжа, получим:

$$U=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\Delta x\varphi'(x+\theta_1\Delta x),$$

где $0<\theta_1<1$.

Вычислим производную $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x)=f'_x(x, y+\Delta y)-f'_x(x, y).$$

Следовательно,

$$U=\Delta x[f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)-f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)].$$

Применим снова теорему Лагранжа, считая, что приращение получает аргумент y, тогда получим:

$$U=\Delta x\Delta y f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y), \qquad (7)$$

где $0<\theta_2<1$.

Выражение U можно преобразовать иначе, заметив симметрию, с которой входят в него аргументы x и y.

Для этой цели составим вспомогательную функцию:

$$\psi(y)=f(x+\Delta x, y)-f(x, y).$$

При помощи аналогичных рассуждений (изменив роли аргументов x и y) получим:

$$U=\Delta y\,\Delta x f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y), \qquad (8)$$

где $0<\theta_3<1$ и $0<\theta_4<1$.

Приравняв значения U, представленные формулами (7) и (8), и сократив на $\Delta x\Delta y$, получим:

$$f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y)=f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y).$$

Заставив $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ и вспоминая, что мы предположили вторые производные непрерывными, мы получаем окончательно тождество:

$$f''_{yx}(x, y)=f''_{xy}(x, y), \qquad (A)$$

выражающее *безразличие от порядка дифференцирования.*

ЗАДАЧИ

Найти вторые частные производные всякой из следующих функций:

1. $f(x, y)=x^2+3xy+6y^2$.

Отв. $f''_{x^2}(x, y)=2;\ f''_{xy}(x, y)=3;\ f''_{y^2}(x, y)=12$.

2. $f(x, y)=x^3+3x^2y+6xy^2-y^3$.

Отв. $f''_{x^2}(x, y)=6x+6y;\ f''_{xy}(x, y)=6x+12y;\ f''_{y^2}(x, y)=12x-6y$.

3. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Отв. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4y}{(x-y)^3};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4x}{(x-y)^3}$.

4. $f(x, y)=e^x\cos y-e^y\cos x$.

5. $z=e^{xy}+ye^x+xe^y$.

6. Если $f(x, y)=x^4-8x^2y^2+3y^4$, показать, что

$$f''_{x^2}(2, -1)=32;\quad f''_{xy}(2, -1)=64;\quad f''_{y^2}(2, -1)=-16.$$

7. Если $f(x, y)=\sin x\ln(y+1)+\cos y\ln(1-x)$, показать, что

$$f'_x(0, 0)=-1,\ f'_y(0, 0)=0,\ f''_{x^2}(0, 0)=-1,\ f''_{xy}(0, 0)=1,\ f''_{y^2}(0, 0)=0.$$

8. Если $f(x, y)=x^3-3x^2y+2y^2$, найти величины

$$f''_{x^2}(-1,2),\ f''_{xy}(-1,2),\ f''_{y^2}(-1,2).$$

9. Если $u=2x^3-4x^2y+5xy^2-8xy+7y^2$, проверить, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=12,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=-8,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=10,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0.$$

10. Если $v=(ax^2+by^2+cz^2)^3$, показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}.$$

11. Если $u=\dfrac{xy}{x+y}$, показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

12. Если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, показать, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

13. Если $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

§ 169. Теоремы о среднем для функций нескольких независимых переменных (законы среднего). *Теорема о среднем Лагранжа.* Пусть $u=f(x, y)$ непрерывная функция с непрерывными частными производными вблизи $x=a,\ y=b$.

Рассмотрим, как в § 144, приращение функции:

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)$$

и постараемся выразить его через «средние величины». Для этого введем обозначение:

$$\varphi(t)=f(a+ht,\ b+kt).$$

Ясно, что $\varphi(0)=f(a,\ b)$ и $\varphi(1)=f(a+h,\ b+k)$. Применяя к функции $\varphi(t)$ теорему о среднем Лагранжа на отрезке $[0,\ 1]$, мы имеем (см. § 144):

$$\varphi(1)-\varphi(0)=(1-0)\,\varphi'(\theta),\ \text{где}\ 0<\theta<1. \tag{1}$$

Так как:

$$\varphi'(t)=hf'_x(a+ht,\ b+kt)+kf'_y(a+ht,\ b+kt), \tag{2}$$

то равенство (1) переписывается в виде:

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=hf'_x(a+\theta h,\ b+\theta k)+kf'_y(a+\theta h,\ b+\theta k). \tag{3}$$

Это равенство и является *теоремой о среднем Лагранжа для функций двух переменных.*

Теорема о среднем Тейлора. По-прежнему полагая:

$$\varphi(t)=f(a+ht,\ b+kt),$$

мы пишем для $\varphi(t)$ теорему о среднем Тейлора для отрезка $[0,\ 1]$, причем мы останавливаемся на члене *второго* порядка (см. § 145):

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\frac{(1-0)}{1!}\varphi'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}\varphi''(\theta), \tag{4}$$

где $0<\theta<1$.

Найдем $\varphi''(t)$. Дифференцируя равенство (2), имеем:

$$\varphi''(t)=h[hf''_{x^2}(a+ht,\ b+kt)+kf''_{xy}(a+ht,\ b+kt)]+ +k[hf''_{xy}(a+ht,\ b+kt)+kf''_{y^2}(a+ht,\ b+kt)],$$

т. е.

$$\varphi''(t)=h^2f''_{x^2}(a+ht,\ b+kt)+2hkf''_{xy}(a+ht,\ b+kt)+ +k^2f''_{y^2}(a+ht,\ b+kt).$$

И так как, в силу формулы (2), $\varphi'(0)=hf'_x(a,\ b)+kf'_y(a,\ b)$, то равенство (4) перепишется в виде

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+[hf'_x(a,\ b)+kf'_y(a,\ b)]+ +\frac{1}{2!}[h^2f''_{x^2}(a+\theta h,\ b+\theta k)+2hkf''_{xy}(a+\theta h,\ b+\theta k)+ +k^2f''_{y^2}(a+\theta b,\ b+\theta k)]. \tag{5}$$

Это равенство и есть *теорема о среднем Тейлора для функций двух переменных,* остановленная на членах второго порядка.

Нетрудно распространить оба закона среднего на функции трех или более переменных, так же как и продолжить среднее Тейлора на члены третьего, четвертого и т. д. порядка.

§ 170. Необходимые условия максимума и минимума функций нескольких переменных.

Пусть $z=f(x, y)$. Мы говорим, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $M(a, b)$ *максимум*, если численное значение $f(a, b)$ больше, чем численное значение $f(x, y)$ во *всякой* точке $M'(x, y)$, находящейся вблизи M.

Аналогично, $f(a, b)$ есть *минимум*, если $f(a, b)$

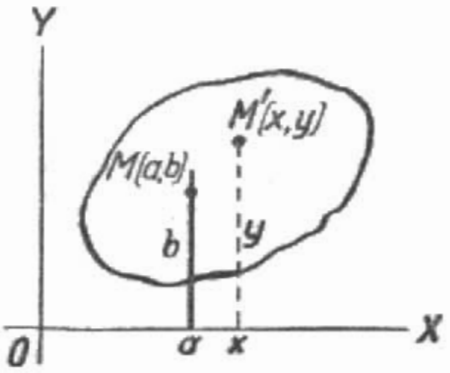


Рис. 176

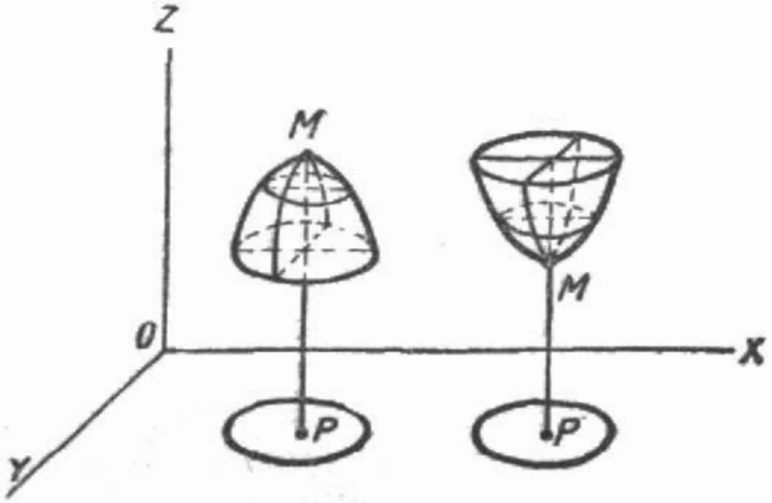


Рис. 177

меньше, чем $f(x, y)$, когда точка $M'(x, y)$ находится вблизи M (рис. 176).

Аналитически эти определения переводятся следующим образом:

если для всех h и k, меньших по абсолютной величине, чем некоторое ε, имеем:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\text{отрицательному числу}, \qquad (6)$$

тогда $f(a, b)$ есть *максимум* функции $f(x, y)$, если же

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\text{положительному числу}, \qquad (7)$$

тогда $f(a, b)$ есть *минимум*.

Геометрически эти определения переводятся следующим образом:

точка M на поверхности $z=f(x, y)$ есть точка максимума, когда она «выше», чем все другие точки этой поверхности, находящиеся вблизи M. При этом координатная плоскость XOY считается горизонтальной. Аналогично, точка M на поверхности есть точка минимума, когда она «ниже», чем все другие точки поверхности поблизости от нее (рис. 177).

Необходимые условия максимума и минимума получить чрезвычайно легко:

чтобы точка $M(a, b)$ была точкой максимума или минимума, необходимо соблюдение двух одновременных равенств:

$$f'_x(a,b)=0 \text{ и } f'_y(a,b)=0. \tag{8}$$

Доказательство. Если $M(a, b)$ есть точка максимума или минимума, тогда равенства (6) и (7) показывают, что разность $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ не может изменять знака при перемене знака числами h или k. Но если бы, например, величина $f'_x(a, b)$ была отличной от нуля, то тогда, полагая в формуле Лагранжа (3) $k=0$, мы имели бы:

$$f(a+h,b)-f(a,b)=hf'_x(a+\theta h, b). \tag{9}$$

Так как по условию $f'_x(a,b)\neq 0$, то в силу непрерывности функции $f'_x(x,y)$, мы будем иметь и $f'_y(a+\theta h,b)\neq 0$, когда h достаточно мало. А тогда первая часть равенства (9) должна переменить свой знак, когда число h переменяет свой знак. Это же невозможно, ибо левая часть равенства (9) не должна изменять свой знак в точке $M(a, b)$, если $f(a,b)$ есть максимум или минимум.

Итак, мы обязаны иметь равенство: $f'_x(a, b)=0$. Таким же образом доказывается, что мы обязаны иметь в точке $M(a,b)$ максимума или минимума еще и второе равенство: $f'_y(a,b)=0$, ч. т. д.

Из сказанного вытекает следующее правило для отыскания максимумов и минимумов функций $f(x, y)$ двух независимых переменных:

Первый шаг. *Найти две частные производные первого порядка $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$.*

Второй шаг. *Приравнять найденные производные нулю и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными:*

$$f'_x(x,y)=0, \quad f'_y(x,y)=0, \tag{10}$$

найдя все пары (a,b) действительных чисел, удовлетворяющих им. Это и будут так называемые критические точки $M(a, b)$ для функции $f(x, y)$.

Третий шаг. *Взять какую-нибудь критическую точку $M(a, b)$ и составить разность $f(a+h, b+k)-f(a,b)$. Если она отрицательна для всяких h, k, близких к нулю, имеем максимум $f(a,b)$. Если она положительна для всяких h, k, близких к нулю, имеем минимум $f(a, b)$. Если она изменяет знак при изменении численных значений h, k, тогда в точке $M(a, b)$ функция $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума.*

Этот способ распространяется без всяких изменений и на функции трех и более независимых переменных. Так, имея функцию $u=f(x, y, z)$ трех независимых переменных, мы находим все *критические ее точки* $M(a, b, c)$, написав систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0 \qquad (11)$$

и отыскивая все действительные тройки (a, b, c) чисел, удовлетворяющие этой системе. Для окончательного же исследования найденной критической точки $M(a, b, c)$ неизбежно определение знака разности:

$$f(a+h, b+k, c+l)-f(a, b, c)$$

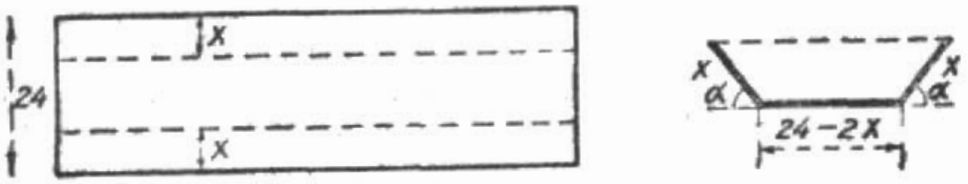


Рис. 178

при h, k, l весьма малых.

Пример. Железный лист имеет вид длинного прямоугольника шириной 24 *см*. Требуется его согнуть по пунктирным линиям и придать боковым сторонам такой наклон, чтобы получить призматический сосуд максимальной вместимости (рис. 178).

Решение. Задача требует иметь поперечное сечение максимальной площади. Это сечение есть трапеция, имеющая: нижнее основание $24-2x$, верхнее основание $24-2x+2x\cos\alpha$, высоту $x\sin\alpha$. Поэтому площадь A дается формулой:

$$A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Прилагая сюда найденное правило, имеем:

$$\frac{\partial A}{\partial x}=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

Приравнивая эти частные производные нулю, мы имеем два уравнения:

$$2\sin\alpha(12-2x+x\cos\alpha)=0,$$
$$x[24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]=0.$$

Одно из решений этой системы есть $\alpha=0$ и $x=0$, но оно не имеет смысла в поставленной реальной задаче. Полагая же $\alpha\neq 0$ и $x\neq 0$, мы находим $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $x=8$.

Физическая же задача ясно говорит нам о том, что максимум должен существовать. Значит, он должен получиться, когда $\alpha = 60°$ и $x = 8$ *см*.

§ 171. Достаточные условия максимума и минимума функций двух переменных. В предыдущем правиле *два первые шага*, в принципе, не представляют затруднений. Но исследование найденной критической точки $M(a, b)$ на максимум и минимум, составляющее сущность *третьего шага*, чрезвычайно трудно, и его обыкновенно обходят, ссылаясь на чисто физические соображения (как, например, в данном выше примере).

Однако в помощь этому исследованию имеется дополнительное правило, сильно облегчающее сказанное исследование.

Для вывода этого правила возьмем критическую точку $M(a, b)$ и применим к приращению $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ теорему о среднем Тейлора, остановленную на членах второго порядка (§ 169, формула (5)):

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=$$
$$=\frac{1}{2!}[h^2 f''_{x^2}(x, y)+2hkf''_{xy}(x, y)+k^2 f''_{y^2}(x, y)], \qquad (5^*)$$

где x и y, поставленные под знаками вторых производных f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}, суть *средние величины*, а именно: $x=a+\theta h$ и $y=b+\theta k$.

Мы полагаем:

$$A=f''_{x^2}(x, y), \quad B=f''_{xy}(x, y), \quad C=f''_{y^2}(x, y) \qquad (12)$$

и рассматриваем тождество:

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2]. \qquad (13)$$

Если имеем:

$$AC-B^2>0, \qquad (14)$$

тогда выражение, стоящее в квадратной скобке, положительно, и тогда левая часть тождества (13) должна иметь знак величины A (или величины C, ибо A и C, в силу формулы (14), должны иметь одинаковые знаки).

Поэтому, когда имеем строгое *неравенство* (14) удовлетворенным в самой точке $M(a, b)$, т. е. когда имеем строгое неравенство:

$$f''_{x^2}(a, b)\cdot f''_{y^2}(a, b)-f''^2_{xy}(a, b)>0, \qquad (15)$$

тогда, в силу непрерывности всех трех частных производных второго порядка (12), строгое неравенство (14) будет соблюдаться не только при $h=0$ и $k=0$, но и для *всех* h, k достаточно малых,

т. е. близких к нулю. И тогда знак A (или C) будет такой же для h и k, близких к нулю, как и знак $f''_{x^2}(a, b)$ [или $f''_{y^2}(a, b)$]. Значит, при соблюдении неравенства (15) левая часть тождества (13), а с ней и правая часть равенства (5*), не может изменять свой знак, какими бы ни были числа h и k, лишь бы они были достаточно малы, и этот знак будет таким же, как и знак величины $f''_{x^2}(a, b)$ [или знак величины $f''_{y^2}(a, b)$].

Это нас приводит к следующему практическому правилу для распознавания максимума или минимума функции $f(x, y)$:

Первый шаг. *Решить совместные уравнения:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Второй шаг. *Вычислить для этих пар величин x и y выражение:*

$$\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2.$$

Третий шаг. *Исследуемая функция $f(x, y)$ имеет:*

максимум, *если* $\Delta>0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\text{или } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)<0$,

минимум, *если* $\Delta>0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\text{или } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)>0$.

Если же Δ *отрицательно,* то в критической точке $M(a, b)$ функция $f(x, y)$ *наверное не имеет ни максимума, ни минимума*[1].

Наконец, если $\Delta=0$, тогда вопрос совершенно не решен ни в ту, ни в другую сторону и требует других приемов и методов распознавания.

Распознавание максимумов и минимумов функций трех переменных, $f(x, y, z)$, излагается в более полных учебниках.

Пример 1. Исследовать функцию:

$$3axy-x^3-y^3$$

на максимумы и минимумы, предполагая $a>0$.

Решение.

$$f(x, y)=3axy-x^3-y^3.$$

[1] Ибо, если $AC-B^2<0$, то *квадратная скобка в тождестве* (13) *изменяет свой знак при надлежащем подборе h и k.* В самом деле, если $k=0$, эта скобка *положительна;* если же $k\neq 0$, то, выбирая h так, чтобы $Ah+Bk=0$, мы имеем эту скобку уже *отрицательной.*

Первый шаг.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2 = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$x = 0, \quad y = 0; \quad x = a, \quad y = a.$$

Второй шаг.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y;$$
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 36xy - 9a^2$$

Третий шаг. При $x = 0$, $y = 0$ имеем $\Delta = -9a^2$, т. е. $\Delta < 0$, и следовательно, при (0, 0) нет ни максимума, ни минимума.

При $x = a$, $y = a$ имеем $\Delta = 27a^2$, $\Delta > 0$, а так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6a,$$

то при

$$x = a, \quad y = a$$

имеем максимум.

Подставляя в данную функцию

$$x = a, \quad y = a,$$

находим, что ее величина в точке максимума равна a^3.

Пример 2. Разделить a на такие три части, чтобы их произведение было максимумом.

Решение. Пусть первая часть будет x, вторая y; тогда третья часть будет

$$a - (x + y) = a - x - y,$$

и исследуемая функция будет

$$f(x, y) = (a - x - y)\, xy.$$

Первый шаг.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax - 2xy - x^2 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, находим: [1]

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}$$

(т. е. деление производится на три равные части).

Второй шаг.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = a - 2x - 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x;$$

[1] Мы не исследуем случая, когда $x = y = 0$, или $x = 0$, $y = a$, или $x = a$, $y = 0$, так как во всех этих трех случаях произведение $xy = 0$ и поэтому ясно, что получается минимум.

$$\Delta = 4xy - (a - 2x - 2y)^2.$$

Третий шаг. Если

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3},$$

то

$$\Delta = \frac{a^2}{3} > 0,$$

а так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}a,$$

то, очевидно, при

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}$$

наше произведение имеет максимум; величина его равна $\frac{a^3}{27}$.

ЗАДАЧИ

1. Найти минимум функции $x^2 + xy + y^2 - ax - by$.

Отв. $\frac{1}{3}(ab - a^2 - b^2)$.

2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$\sin x + \sin y + \cos(x + y); \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}; \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}\right).$$

Отв. При $x = y = \frac{\pi}{6}$ имеем $\max = 1{,}5$,

при $x = y = \frac{3\pi}{2}$ имеем $\min = -3$.

3. Показать, что функция $xe^{y + x\sin y}$ не имеет ни max, ни min.

4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2.$$

Отв. При $x = 0$, $y = 0$ имеем max,

при $x = y = \pm\frac{1}{2}$ и

при $x = -y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ имеем min.

5. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$u = xy(x + y - 1).$$

Отв. При $x = y = \frac{1}{3}$ имеем $\min = -\frac{1}{27}$.

6. Показать, что поверхность прямоугольного параллелепипеда данного объема имеет минимум, когда тело есть куб.

7. Показать, что наиболее экономичные размеры для прямоугольного бассейна данного объема суть: квадратное основание и глубина, равная половине стороны основания.

8. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких размерах на изготовление такой палатки данного объема v потребуется наименьшее количество материи?

Отв. Если x — радиус основания палатки, y — высота цилиндрической части, z — высота конической верхушки, то пропорции размеров определяются соотношением:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{2}{3};\quad 2y=z.$$

9. Показать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

10. Найти наибольший прямоугольный параллелепипед, какой можно вписать в эллипсоид.

Отв. Размеры параллелепипеда: $2\frac{a}{\sqrt{3}}$, $2\frac{b}{\sqrt{3}}$, $2\frac{c}{\sqrt{3}}$. Объем: $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

Указание. Положить $v=xyz$ и поставить значение z, определенное из уравнения эллипсоида. Получим функцию

$$v^2=x^2y^2c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

только двух переменных.

ГЛАВА XVI

ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 172. Особые точки. Пусть кривая дана уравнением:

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

тогда угловой коэффициент ее касательной определится по формуле (см. § 167):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{2}$$

при условии, что в точке касания по крайней мере одна из производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ или $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля. Кривая в такой точке имеет вполне определенное направление, и до сих пор мы ограничивались рассмотрением именно таких обыкновенных точек кривой.

Если же окажется, что для некоторой точки $M(x_0, y_0)$ кривой:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0 \text{ и } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$$

направление касательной становится неопределенным, кривая обладает здесь какой-то существенной особенностью, поэтому такая точка называется особой точкой кривой.

Итак, координаты особой точки кривой (1) должны удовлетворять системе трех уравнений:

$$F(x, y)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Но три уравнения с двумя неизвестными не всегда совместны, а отсюда следует, что не на каждой кривой существуют особые точки.

§ 173. Определение касательных в особых точках алгебраической кривой. При исследовании характера кривой в окрестности

какой-нибудь ее точки удобно предварительно перенести начало координат в рассматриваемую точку; тогда уравнение алгебраической кривой не будет содержать свободного члена и, сгруппировав члены одинаковой степени, его можно привести к виду:

$$f(x, y) = (ax + by) + (cx^2 + dxy + ey^2) + (fx^3 + \ldots) + \ldots = 0. \quad (3)$$

Нас интересует нахождение касательной к кривой (3) в начале координат.

Рассмотрим пучок прямых, проходящих через начало координат

$$y = kx \quad (4)$$

и по характеру пересечения этих прямых с кривой выделим среди них касательную.

Исключив y из (3) и (4), получим уравнение, определяющее абсциссы точек пересечения:

$$f(x, kx) = x(a + bk) + x^2(c + dk + ek^2) + x^3(f + \ldots) + \ldots = 0. \quad (5)$$

Один из корней этого уравнения равен нулю при любом значении k, т. е. одна из точек пересечения каждой прямой пучка и кривой совпадает с началом координат, а остальные точки пересечения имеют абсциссы, отличные от нуля.

Если же значение k выбрано так, чтобы

$$a + bk = 0,$$

т. е.

$$k = -\frac{a}{b}, \quad (6)$$

то два корня уравнения (5) равны нулю и соответствующая прямая

$$y = -\frac{a}{b}x,$$

или

$$ax + by = 0, \quad (7)$$

имеет в начале координат две слившиеся общие точки с кривой.

Прямая (7) и будет единственной касательной к кривой в начале координат. Точка, в которую перенесено начало координат, является обыкновенной точкой кривой.

Отметим, что уравнение касательной (7) можно получить, приравняв нулю группу членов первой степени из уравнения кри-

вой (3). Очевидно, что это заключение справедливо, если $b \neq 0$ или $a \neq 0$.

Переходим к рассмотрению случая, когда

$$a = 0 \text{ и } b = 0,$$

но по крайней мере один из коэффициентов c, d или e отличен от нуля.

В уравнении кривой:

$$f(x, y) = (cx^2 + dxy + ey^2) + (fx^3 + \ldots) + \ldots = 0 \qquad (3')$$

отсутствует не только свободный член, но и все члены первой степени; угловой коэффициент касательной (6) в начале координат становится неопределенным.

Легко проверить, дифференцируя уравнение кривой (3), что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = a = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = b = 0,$$

т. е. точка, в которую перенесено начало координат, в этом случае является особой точкой кривой (§ 172).

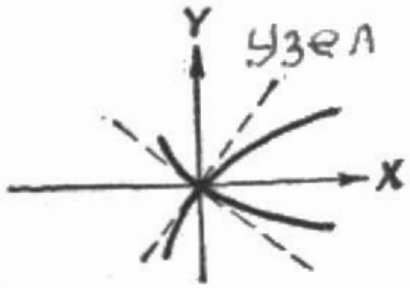


Рис. 179

Для исследования пересечения кривой (3') с прямыми пучка (4) получим:

$$f(x, kx) = x^2(c + dk + ek^2) + x^3(f + \ldots) + \ldots = 0. \qquad (5')$$

Уравнение (5') имеет при любом значении k два корня, равные нулю, откуда следует, что каждая прямая пучка пересекает в начале координат кривую в двух слившихся точках, т. е. сама кривая имеет в начале координат как бы двойную точку, что, например, может иметь место, если в ней пересекаются две ветви кривой (рис. 179).

Точка кривой, обладающая тем свойством, что всякая прямая, через нее проходящая, имеет в ней две слившиеся общие точки с кривой, называется двукратной *или* двойной *точкой.*

Посмотрим, нет ли среди прямых пучка (4) таких, которые еще теснее примыкают к кривой и имеют с ней не две, а три слившиеся точки пересечения в начале координат.

Очевидно этому условию удовлетворяют прямые, угловые коэффициенты которых обращают в нуль коэффициент при x^2 в уравнении (5'), т. е.

$$c + dk + ek^2 = 0; \qquad (8)$$

так как уравнение квадратное, то существуют две прямые, обладающие вышеуказанным свойством. Эти прямые называются касательными в двукратной точке кривой.

Исключив k из (8) и (4), получим уравнение пары искомых касательных:

$$cx^2 + dxy + ey^2 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, если начало координат перенесено в двукратную точку кривой и потому уравнение кривой не содержит членов нулевой и первой степени, то, приравняв нулю группу членов второй степени, получим уравнение пары касательных в этой двойной точке.

Подобным же образом, если

$$a = b = c = d = e = 0,$$

то по крайней мере один из членов третьей степени входит в уравнение (3), кривая имеет в начале координат трехкратную точку и уравнение касательных в ней получим, приравняв к нулю группу членов третьей степени из уравнения кривой и т. д.

§ 174. Различные типы двукратных точек алгебраической кривой. Характер кривой в двукратной точке зависит от корней уравнения (8), т. е. от того, имеет ли она в этой точке две действительные и различные касательные, две совпадающие касательные или, наконец, две мнимые касательные.

Введем более удобные обозначения.

Вычислив частные производные второго порядка от левой части уравнения кривой (3), легко проверить, что

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}; \quad d = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}; \quad e = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}},$$

а потому уравнение (8) приводится к виду [1]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \tag{8'}$$

I случай:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

Кривая имеет в двойной точке две различные касательные. Перемещаясь по кривой, подвижная точка может пройти через двойную точку в двух разных направлениях, т. е. кривая в ней

[1] Для упрощения записи мы будем писать $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ вместо $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$ и т. д.

сама себя пересекает или пересекаются две ветви кривой. Такая двойная точка называется *узлом* (рис. 179).

II случай: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Обе касательные в данной точке сливаются, т. е. обе ветви кривой, проходя через двойную точку, касаются друг друга.

Если при этом ветви кривой имеют точки в непосредственной близости от точки касания по обе стороны от нее, точка называется *точкой самоприкосновения* (рис. 180).

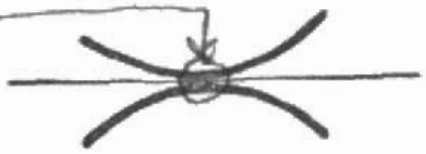


Рис. 180

Если же обе ветви кривой простираются по одну сторону от точки касания, эта точка называется *точкой возврата или заострения*.

В зависимости от того, расположены ли обе ветви вблизи точки касания по разные стороны от общей касательной или по одну сторону от нее, различаются точки возврата I рода (рис. 181) и точки возврата II рода (рис. 182).

III случай: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$

Кривая действительных касательных в двойной точке не имеет. Двойная точка является действительной точкой пересечения двух мнимых ветвей, и в непосредственной близости от нее нет других действительных точек кривой. Такая особая точка называется *изолированной точкой*.

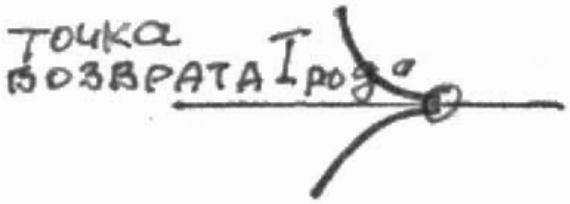


Рис. 181

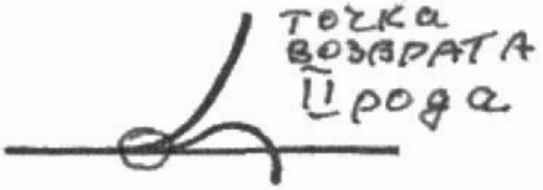


Рис. 182

Напомним еще раз все этапы, по которым ведется исследование алгебраической кривой на особые точки.

Если алгебраическая кривая дана своим уравнением

$$F(X, Y) = 0,$$

то вопрос о существовании на ней особых точек связан с рассмотрением системы уравнений:

$$F(X, Y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial X} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial Y} = 0.$$

Если эти уравнения окажутся несовместимыми, кривая особых точек не имеет.

Если вышеприведенные уравнения имеют общие решения, то каждая пара (x_0, y_0) таких решений дает координаты особой точки. Переносим начало координат в точки $M(x_0, y_0)$, не меняя направления осей и, следовательно, пользуясь формулами:

$$X = x + x_0, \quad Y = y + y_0. \tag{10}$$

Преобразованное уравнение кривой будет:

$$F(x + x_0, y + y_0) = f(x, y) = 0. \tag{11}$$

Вычисляем значения частных производных:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}};$$

и если по крайней мере одна из них отлична от нуля, точка $M(x_0, y_0)$ является двукратной точкой, тип которой определяется исследованием разности:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

Примечание 1. Применяя к равенству (11) правило дифференцирования сложных функций и учитывая соотношения (10), имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{\substack{X=x_0\\Y=y_0}}; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)_{\substack{X=x_0\\Y=y_0}} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right]_{\substack{X=x_0\\Y=y_0}}. \tag{12}$$

Таким образом для определения характера двойной точки $M(x_0, y_0)$ нет надобности переносить начало координат в эту точку, а можно вычислить частные производные второго порядка от левой части не преобразованного уравнения и исследовать разность, стоящую в правой части равенства (12).

Примечание 2. Метод, указанный для исследования алгебраических кривых, остается в силе для любой кривой

$$\Phi(X, Y) = 0,$$

если только к функции $\Phi(X, Y)$ может быть применена формула Тейлора в области особой точки $M(x_0, y_0)$, т. е.

$$\Phi(X, Y) = \Phi(x_0, y_0) + \Phi'_x(x_0, y_0)\,x + \Phi'_y(x_0, y_0)\,y +$$

$$+ \frac{1}{2!}[\Phi''_{x^2}(x_0, y_0)\,x^2 + 2\Phi''_{xy}(x_0, y_0)\,xy + \Phi''_{y^2}(x_0, y_0)\,y^2] + \dots,$$

где $x = X - x_0$ и $y = Y - y_0$.

Пример 1. Исследовать на особые точки кривую:

$$Y^2 = X(X-1)^2.$$

Решение.

$$F(X, Y) = Y^2 - X(X-1)^2,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial X} = -(X-1)(3X-1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y.$$

Решая совместно уравнения:

$$Y^2 - X(X-1)^2 = 0, \quad (X-1)(3X-1) = 0, \quad 2Y = 0,$$

получим единственное решение: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

Кривая имеет особую точку $M(1, 0)$. Переносим начало координат в эту точку

$$X = x + 1, \quad Y = y.$$

Преобразованное уравнение кривой будет:

$$f(x, y) = y^2 - x^2(x+1) = 0$$

или

$$y^2 - x^2 - x^3 = 0.$$

Начало координат является двойной точкой кривой; уравнение касательных получим:

$$y^2 - x^2 = 0 \text{ или } y - x = 0 \text{ и } y + x = 0.$$

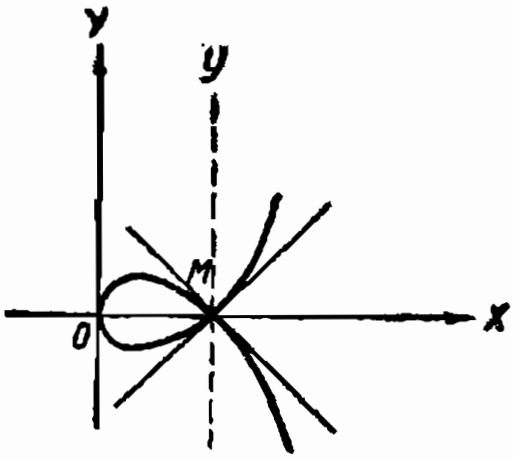


Рис. 183

Кривая имеет узловую точку (рис. 183).

Тот же результат мог быть получен иначе:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = -6X + 4; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 2,$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right]_{\substack{X=1 \\ Y=0}} = +4 > 0.$$

Пример 2. Исследовать на особые точки кривую:

$$y^2 = x^2(x-1).$$

Решение.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3.$$

Уравнение кривой не содержит членов нулевой и первой степени, следовательно, кривая имеет в начале координат двукратную точку.

Уравнение касательных в особой точке:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Касательные мнимые, начало координат является изолированной точкой кривой. В самом деле, координаты (0, 0) удовлетворяют уравнению кривой, но на ней нет ни одной точки вблизи начала координат, так как действительные значения для y получаются лишь при $x = 0$ и $x \geqslant 1$ (рис. 184).

Пример 3. Исследовать на особые точки полукубическую параболу:

$$y^3 = x^2.$$

Решение. Кривая имеет двойную точку в начале координат; касательные в ней определяются уравнением $y^2=0$, т. е. обе касательные сливаются с осью x.

Кривая имеет действительные точки только при $x\geqslant 0$, вся она расположена по одну сторону от двойной точки и тем самым отпадает возможность самоприкосновения и мы можем утверждать, что имеется точка возврата.

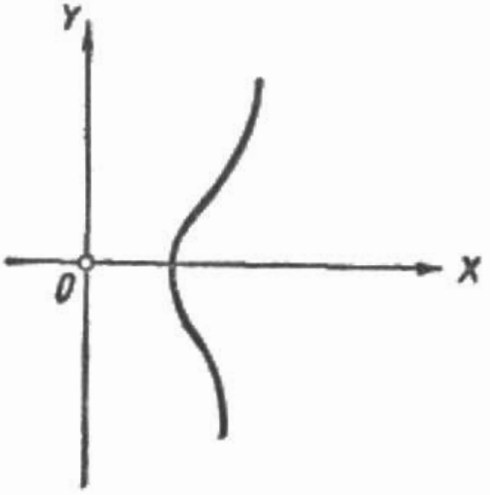


Рис. 184

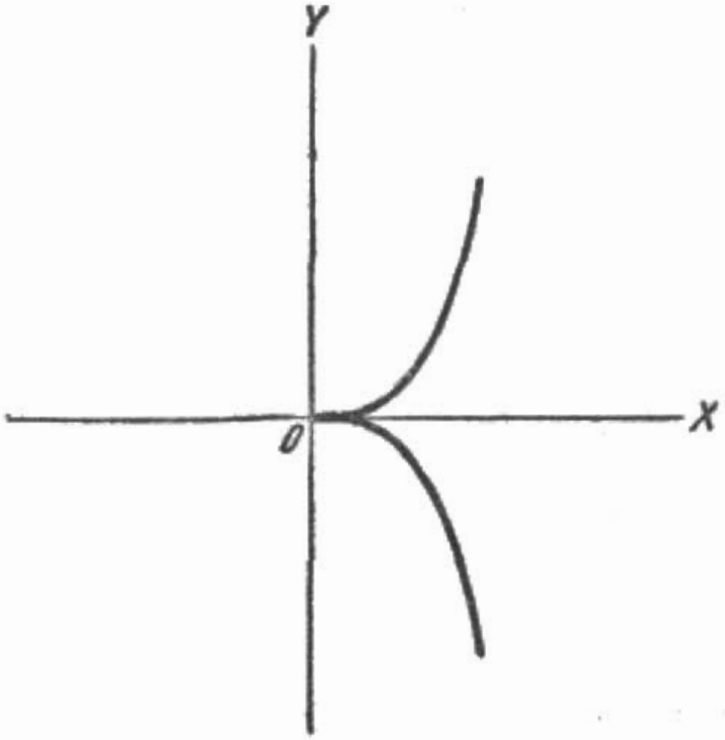


Рис. 185

Кроме того, кривая симметрична относительно оси x, обе ветви расположены по разные стороны от общей касательной.

Поэтому начало координат является точкой возврата I рода (рис. 185).

§ 175. Особые точки трансцендентных кривых. До сих пор при определении и отыскании особых точек кривой:

$$F(x, y)=0$$

предполагалось, что функция $F(x, y)$, стоящая в левой части уравнения кривой, непрерывна и имеет непрерывные частные производные. При соблюдении этих условий, как, например, в случае алгебраических кривых, все особые точки носили характер кратных точек: двукратных, трехкратных и т. д.

Если же мы откажемся от этих ограничений и будем рассматривать любые трансцендентные кривые, то могут встретиться особые точки совершенно иного типа, существование которых обусловлено разрывами непрерывности или самих функций, входящих в уравнение кривой, или их производных.

В качестве примеров таких особых точек приведем *концевую точку*, в которой кривая внезапно обрывается, и *угловую точку*, обладающую тем свойством, что по мере того, как подвижная точка кривой к ней приближается, касательная стремится к двум разным предельным положениям в зависимости от того, с какой стороны приближается точка.

Пример 1. Проверить, что кривая

$$y=\cos\sqrt{x}$$

имеет концевую точку.

Решение. Действительные точки кривой существуют лишь при $x\geqslant 0$; поэтому слева от оси y кривая продолжена быть не может; с осью y она имеет только одну общую точку M $(0, 1)$.

Справа от оси y кривая состоит из однозначной ветви, которая простирается в бесконечность. Таким образом, кривая обрывается в точке $M(0, 1)$, которая и является ее концевой точкой (рис. 186).



Рис. 186

Примечание. Мы продолжаем называть точку M концевой точкой кривой, когда сама она и не принадлежит кривой, но служит предельным положением точки, движущейся по кривой, если это движение не может быть продолжено за точку M.

Пример 2. Показать, что кривая

$$y=x\cdot\ln x$$

имеет концевую точку в начале координат.

Решение. При $x=0$ определить значение y из уравнения кривой нельзя. Но

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0} x=0.$$

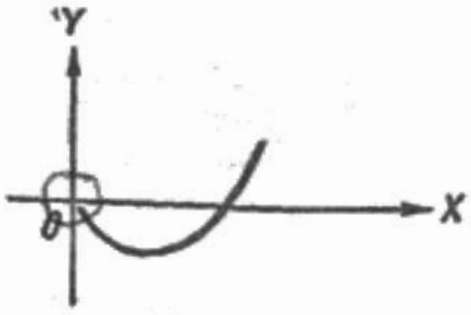


Рис. 187

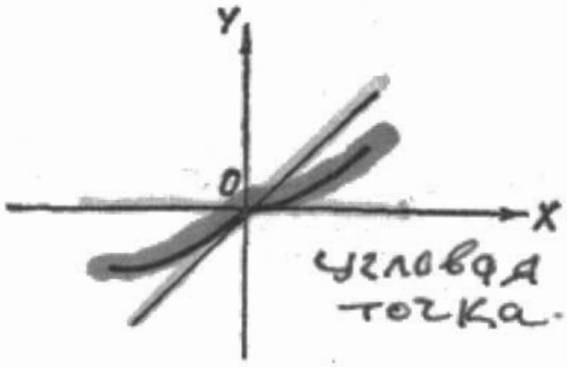


Рис. 188

Начало координат является предельным положением точки, движущейся по единственной ветви кривой в области положительных абсцисс. При $x<0$ точек кривой не существует. Согласно сделанному примечанию, можно считать начало координат концевой точкой кривой (рис. 187).

Пример 3. Проверить, что кривая

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

имеет угловую точку в начале координат.

Решение. При $x=0$ имеется кажущийся разрыв непрерывности функции y. Но так как

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to-0} y=0,$$

то можно считать, что $y=0$ при $x=0$, и тогда ордината будет непрерывной и однозначной функцией при любых значениях x, т. е. кривая состоит из одной непрерывной, однозначной ветви.

Переходим к нахождению касательной в начале координат:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Вычислить значение производной для $x=0$ нельзя, но

$$\lim_{x\to+0}\frac{dy}{dx}=0 \text{ и } \lim_{x\to-0}\frac{dy}{dx}=1.$$

Кривая имеет в начале координат две касательные: касательная дуги, расположенной справа от оси y, с приближением точки касания к началу координат стремится совпасть с осью x, а касательная дуги, расположенной слева от оси y, имеет своим предельным положением прямую $y=x$.

Начало координат является угловой точкой кривой (рис. 188).

ЗАДАЧИ

1. Для следующих кривых найти особые точки, исследовать их характер и составить уравнения касательных в них.

а) $x^3+y^3-3axy=0$. **Отв.** Узел (0; 0); $x=0$, $y=0$.

в) $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$. Точка самоприкосновения (0; 0); $y^2=0$.

с) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$. Точка возврата I рода (0; 0); $y^2=0$.

d) $y^2=x^2(9-x^2)$. Узел (0; 0); $y=\pm 3x$.

e) $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$. Изолированная точка (0; 0).

f) $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$. Точка возврата II рода (0; 0); $y^2=0$.

g) $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. Узел (0; 0); $y=\pm x$.

h) $a^2y^2-2abx^2y-x^5=0$. Точка самоприкосновения (0; 0); $y^2=0$.

i) $x^4+2ax^2y-ay^3=0$. Тройная точка (0; 0); $y=0$; $y=\pm\sqrt{2}\cdot x$.

2. Показать, что кривая $y^2=x(a+x)^2$ имеет изолированную точку $(-a;\ 0)$, если $a>0$.

3. Проверить, что начало координат будет изолированной точкой кривой $ay^2-x^3+bx^2=0$, когда a и b имеют одинаковый знак, и будет узловой точкой, когда a и b имеют противоположные знаки.

4. Показать, что начало координат является для кривой $(y-x^2)^2=x^n$ угловой точкой при $n=2$, точкой возврата I рода при $n=3$, точкой самоприкосновения при $n=4$ (кривая распадается) и точкой возврата II рода при $n>4$.

5. Доказать, что точки пересечения кривой $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ с осями координат суть точки возврата I рода.

6. Исследовать на особые точки кривую:

$$y^2=(x-p)(x-q)(x-r)$$

в предположении, что

a) $p<q<r$, c) $p=q<r$;
b) $p<q=r$, d) $p=q=r$.

Отв. a) Особой точки нет. b) Узел $(q; 0)$. c) Изолированная точка $(p; 0)$. d) Точка возврата I рода $(p; 0)$.

7. Показать, что начало координат служит концевой точкой для кривых

$$\text{a) } y=e^{\frac{1}{x}}; \quad \text{b) } y\cdot\ln x=1.$$

8. Проверить, что кривая $y=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ имеет угловую точку в начале координат и касается в ней прямых $y=\pm\frac{\pi}{2}x$.

§ 176. Семейство кривых и их огибающая. Положение кривой относительно выбранной системы координат, ее форма и размеры определяются некоторыми постоянными величинами, — параметрами кривой, — входящими в ее уравнение.

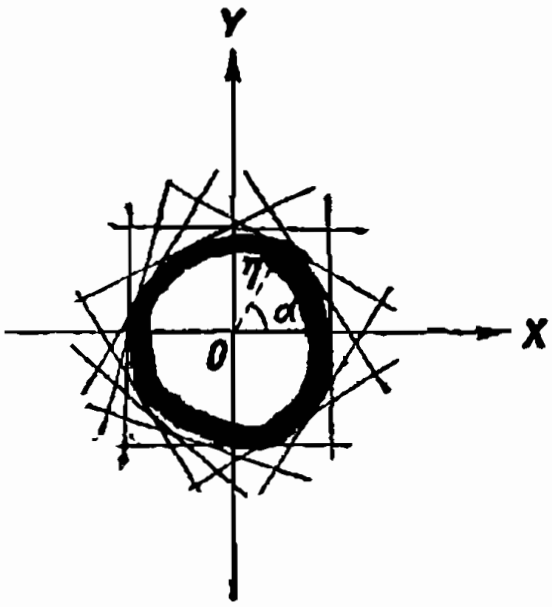


Рис. 189

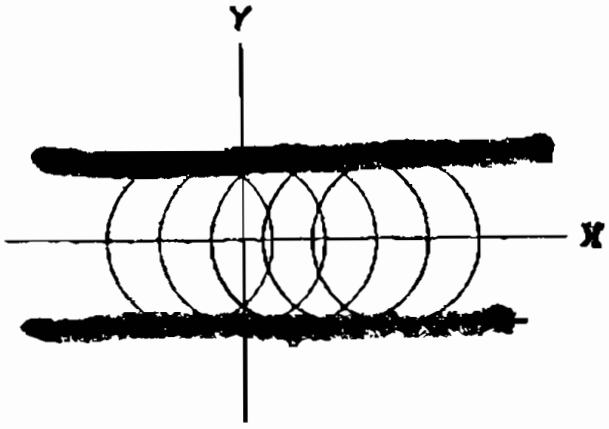


Рис. 190

Если уравнение, кроме переменных координат, содержит параметр, который также может принимать различные числовые значения, то уравнение изображает не одну, а бесчисленное множество линий, уравнение каждой из которых получается из данного уравнения при определенном числовом значении переменного параметра. Такая совокупность кривых называется семейством кривых, зависящих от одного переменного параметра.

Так, например, уравнение $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-4=0$ при переменном параметре α изображает совокупность прямых различного направления, но все они проходят на расстоянии четырех единиц от начала координат (рис. 189).

Уравнение $(x-\alpha)^2+y^2=1$ определяет семейство одинаковых окружностей, центры которых расположены на оси x, но на разном расстоянии α от начала координат (рис. 190).

Уравнение $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(5-\alpha)^2}=1$ изображает семейство эллипсов, отличающихся друг от друга формой и размерами, но все они симметричны относительно осей координат и обладают тем свойством, что сумма их полуосей сохраняет постоянную величину: $a+b=\alpha+(5-\alpha)=5$ (рис. 191).

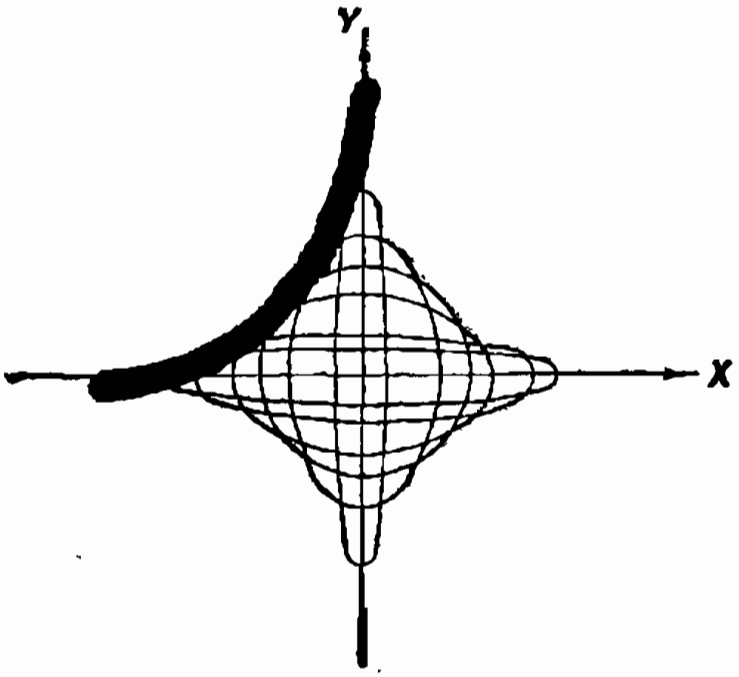


Рис. 191

В общем виде семейство кривых, зависящих от одного переменного параметра α, изображается уравнением:

$$F(x, y, \alpha)=0,$$

где под символ функции F наряду с переменными координатами введен и переменный параметр α.

Иногда кривые семейства расположены так, что *все они касаются одной и той же линии,* причем точки, в которых разные кривые семейства касаются этой линии, не совпадают (вообще говоря). *Линия, обладающая этим свойством, называется огибающей данного семейства, а кривые семейства по отношению к ней называются огибаемыми.*

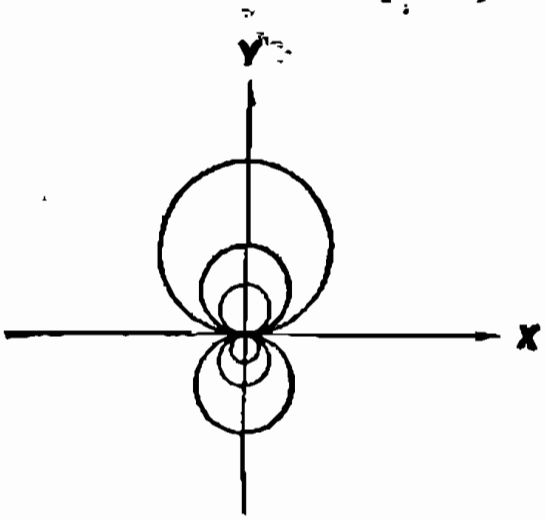


Рис. 192

Существенно, что каждая точка огибающей есть точка прикосновения с одной из кривых семейства. Например, для семейства прямых $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-4=0$ (рис. 189) огибающей служит окружность $x^2+y^2=16$, так как все прямые семейства касаются этой окружности и каждая точка окружности принадлежит одной из прямых семейства, а именно той, которая касается окружности в этой точке.

Если же мы возьмем семейство окружностей $x^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$, то ось x, хотя и касается всех этих окружностей в начале координат, но не является их огибающей (рис. 192). Точно так

же общие асимптоты гипербол семейства $\frac{x^2}{(\alpha a)^2}-\frac{y^2}{(\alpha b)^2}=1$, хотя и являются общими предельными касательными всех этих гипербол, но не служат огибающей рассматриваемого семейства гипербол (рис. 193).

Может случиться, что огибающая касается каждой огибаемой не в одной, а в нескольких точках. Например, семейство эллипсов $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(5-\alpha)^2}=1$ (рис. 191) имеет своею огибающей астроиду, которая касается каждого эллипса в четырех точках, симметрично расположенных относительно осей координат (на рисунке изображена только четверть астроиды, касающаяся каждого эллипса в одной точке).

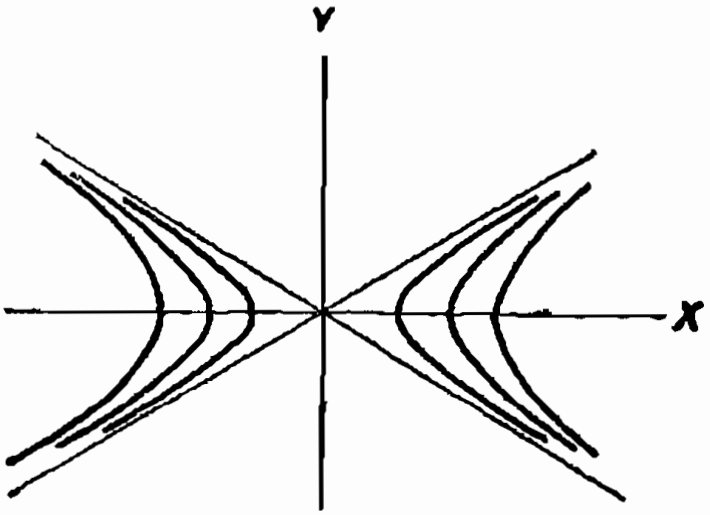


Рис. 193

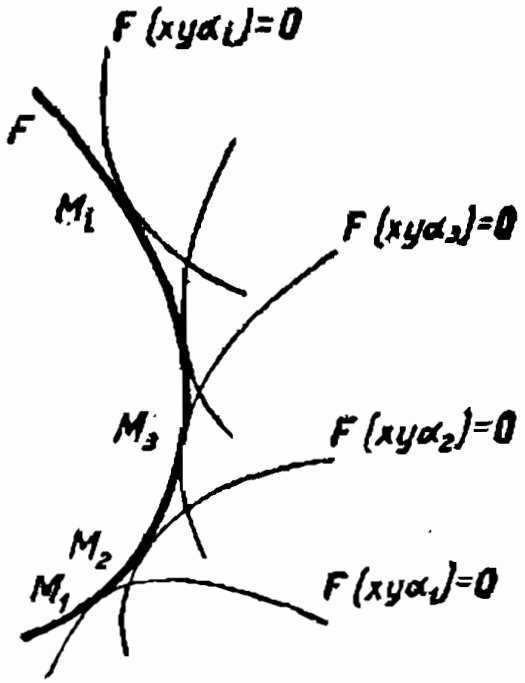


Рис. 194

Заметим еще, что огибающая может состоять из нескольких линий. Например, огибающей семейства окружностей $(x-\alpha)^2+y^2=1$ служит совокупность двух прямых: $y=1$ и $y=-1$ (рис. 190).

§ 177. Нахождение огибающей семейства кривых, зависящих от одного параметра. Пусть дано семейство кривых:

$$F(x, y, \alpha)=0^1 \qquad (1)$$

и предположим, что оно имеет некоторую огибающую линию E (рис. 194).

Давая переменному параметру α различные числовые значения

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots,$$

[1] Левая часть уравнения (1) есть непрерывная функция всех трех аргументов, имеющая частные производные.

мы будем получать отдельные кривые семейства:

$$F(x, y, \alpha_1)=0,\ F(x, y, \alpha_2)=0,\ \ldots,\ F(x, y, \alpha_i)=0\ldots$$

Все эти кривые касаются огибающей в соответствующих точках

$$M_1(X_1, Y_1),\ M_2(X_2, Y_2),\ \ldots,\ M_i(X_i, Y_i),\ \ldots,$$

и так как каждая точка огибающей есть точка прикосновения огибающей с одной из огибаемых, то можно установить соответствие между точками огибающей и значениями параметра α; каждой точке $M_i(X_i, Y_i)$ будет соответствовать то значение параметра α_i, которое определяет кривую семейства, касающуюся огибающей в этой точке. При непрерывном изменении параметра α соответствующая точка $M(X, Y)$ будет двигаться, описывая огибающую E. Другими словами, текущие координаты огибающей должны быть функциями переменного параметра α

$$X=X(\alpha)\ \text{и}\ Y=Y(\alpha)^1. \tag{2}$$

Если нам удастся определить функции $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$, то уравнения (2) будут служить параметрическими уравнениями огибающей и задача о нахождении огибающей данного семейства кривых будет решена.

Выразим прежде всего аналитически тот факт, что каждая точка огибающей $M_i(X_i, Y_i)$ лежит на одной из кривых семейства $F(x, y, \alpha_i)=0$

$$F(X_i, Y_i, \alpha_i)=0$$

или, учитывая формулы (2),

$$F[X(\alpha_i),\ Y(\alpha_i),\ \alpha_i]=0;$$

а так как это равенство справедливо при любом значении параметра α, то ему можно придать более общий вид:

$$F[X(\alpha),\ Y(\alpha),\ \alpha]=0. \tag{3}$$

Надо только помнить, что параметр α должен одновременно принимать одинаковые значения во всех трех аргументах левой части уравнения (3).

Продифференцируем равенство (3), принимая во внимание, что левая часть его есть сложная функция одного независимого переменного α:

$$F'_x(X, Y, \alpha)\,X'(\alpha)+F'_y(X, Y, \alpha)\,Y'(\alpha)+F'_\alpha(X, Y, \alpha)=0. \tag{4}$$

---

[1] $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ могут оказаться и не однозначными функциями, если огибающая касается каждой огибаемой более чем в одной точке.

Мы получили одно соотношение, которому должны удовлетворять искомые функции $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$, т. е. координаты любой точки огибающей.

Для получения второго аналогичного соотношения воспользуемся тем, что каждая точка огибающей $M_i(X_i, Y_i)$ есть точка прикосновения огибающей с соответствующей огибаемой $F(x, y, \alpha_i)=0$, т. е. обе кривые имеют общую касательную в этой точке.

Угловой коэффициент касательной к огибаемой $F(x, y, \alpha_i)=0$ в точке $M_i(X_i, Y_i)$ вычисляется по формуле (§ 167):

$$k=-\frac{F'_x(X_i, Y_i, \alpha_i)}{F'_y(X_i, Y_i, \alpha_i)},$$

а угловой коэффициент касательной к огибающей:

$$X=X(\alpha),\ Y=Y(\alpha)$$

в точке $M_i(X_i, Y_i)$ вычисляется по формуле (§ 105):

$$k_1=\frac{Y'(\alpha_i)}{X'(\alpha_i)}.$$

Но по условию обе эти касательные совпадают, а следовательно, их угловые коэффициенты равны:

$$-\frac{F'_x(X_i, Y_i, \alpha_i)}{F'_y(X_i, Y_i, \alpha_i)}=\frac{Y'(\alpha_i)}{X'(\alpha_i)},$$

откуда

$$F'_x(X_i, Y_i, \alpha_i)\cdot X'(\alpha_i)+F'_y(X_i, Y_i, \alpha_i)\cdot Y'_i(\alpha_i)=0.$$

Последнее равенство выражает свойство любой точки огибающей, а потому оно должно быть справедливо при любом значении параметра α и можно написать:

$$F'_x(X, Y, \alpha)\cdot X'(\alpha)+F'_y(X, Y, \alpha)\cdot Y'(\alpha)=0. \qquad (5)$$

Это и есть новое соотношение, которому должны удовлетворять координаты любой точки огибающей.

Сопоставляя условия (4) и (5), получим:

$$F'_\alpha(X, Y, \alpha)=0. \qquad (6)$$

Вспомним, что мы начали отыскивание огибающей семейства кривых:

$$F(x, y, \alpha)=0 \qquad (1)$$

указанием, что любая точка $M(X, Y)$ огибающей лежит на одной из кривых семейства, а потому ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Но не всякая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1), т. е. не всякая точка огибаемых, принадлежит огибающей. И вот полученное равенство (6) дает простое дополнительное условие, позволяющее выделить те точки огибаемых, которые вместе с тем являются точками огибающей.

Таким образом координаты точек огибающей должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0 \\ F'_{\alpha}(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Решая уравнение (7) относительно x и y, мы получим искомые параметрические уравнения огибающей:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\alpha) \\ y &= \varphi(\alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Исключив параметр α из (8) или непосредственно из (7), получим обычное уравнение огибающей в прямоугольных координатах:

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{9}$$

Итак, правило нахождения огибающей семейства кривых, зависящих от одного параметра, заключается в следующем:

Первый шаг. *Дифференцируем уравнение семейства кривых* (1) *по переменному параметру, рассматривая все остальные величины, входящие в уравнение, как постоянные.*

Второй шаг. *Полученное таким образом уравнение* (6) *и данное уравнение семейства кривых* (1) *решаем относительно* x *и* y, *в результате чего будем иметь параметрические уравнения огибающей* (8).

Замечание. Если нужно найти уравнение огибающей в прямоугольных координатах, второй шаг может быть заменен исключением параметра α из уравнений (1) и (6). Полученный результат исключения и будет искомым уравнением огибающей.

Пример 1. Найти огибающую семейства прямых

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - 4 = 0.$$

Решение.

Первый шаг: $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$.

Второй шаг:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cos\alpha \\ y &= 4\sin\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Исключая параметр α, получим обычное уравнение огибающей:

$$x^2+y^2=16.$$

Пример 2. Найти огибающую семейства окружностей:

$$(x-\alpha)^2+y^2=1.$$

Решение.

Первый шаг: $-2(x-\alpha)=0$ или $x-\alpha=0$.

Исключаем параметр α: $y^2=1$.

Огибающая состоит из двух прямых:

$$y=+1 \text{ и } y=-1.$$

Пример 3. Найти огибающую семейства эллипсов:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(5-\alpha)^2}=1.$$

Решение.

Первый шаг: $-\frac{2x^2}{\alpha^3}+\frac{2y^2}{(5-\alpha)^3}=0$ или $\frac{x^2}{\alpha^3}=\frac{y^2}{(5-\alpha)^3}$.

Второй шаг:
$$\left.\begin{aligned}5x^2&=\alpha^3\\5y^2&=(5-\alpha)^3\end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned}x&=\sqrt{\frac{\alpha^3}{5}}\\y&=\sqrt{\frac{(5-\alpha)^3}{5}}\end{aligned}\right\}.$$

Исключение параметра α даст:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{2}{3}},$$

т. е. огибающей служит астроида.

Примечание. Если после решения уравнений (1) и (6) относительно x и y параметр α окажется исключенным и мы получим для x и y некоторые постоянные значения,— соответствующее семейство не имеет огибающей и, применяя вышеприведенное правило, мы получим одну или несколько отдельных точек.

Пример 4. Найти огибающую семейства окружностей:

$$x^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2.$$

Решение.

Первый шаг: $-2(y-\alpha)=2\alpha$ или $y=0$.

Второй шаг:
$$\left.\begin{aligned}x&=0\\y&=0\end{aligned}\right\}.$$

Вместо огибающей получили начало координат,— единственную точку, общую всем окружностям данного семейства.

Если кривые данного семейства имеют кратные (особые) точки, то уравнениям (7) удовлетворяют не только координаты точек огибающей линии, но и координаты всех кратных точек огибаемых.

В самом деле, если семейство кривых дано уравнением:

$$F(x, y, \alpha)=0, \tag{1}$$

то координаты особых точек этих кривых удовлетворяют не только уравнению (1), но и уравнениям:

$$F'_x(x, y, \alpha)=0 \text{ и } F'_y(x, y, \alpha)=0. \tag{10}$$

Так как на каждой кривой семейства лежит своя особая точка, то координаты особых точек являются функциями параметра α:

$$x=x(\alpha) \text{ и } y=y(\alpha),$$

и они удовлетворяют уравнению семейства (1) при соответствующих значениях параметра α, т. е.

$$F[x(\alpha), y(\alpha), \alpha]=0.$$

Дифференцируем это равенство по единственному независимому переменному α:

$$F'_x(x, y, \alpha)\cdot x'(\alpha)+F'_y(x, y, \alpha)\cdot y'(\alpha)+F'_\alpha(x, y, \alpha)=0.$$

Учитывая условия (10), получим уравнение:

$$F'_\alpha(x, y, \alpha)=0,$$

которому удовлетворяют координаты кратных точек кривых данного семейства.

Таким образом, уравнения, полученные нами для огибающей, изображают не только огибающую, но и геометрическое место особых точек кривых семейства. Поэтому при наличии кратных точек на кривых семейства необходимо каждый раз проводить дополнительное исследование полученного уравнения.

Пример 5. Найти огибающую семейства полукубических парабол:

$$x^2-(y-\alpha)^3=0.$$

Решение.
Первый шаг. $3(y-\alpha)^2=0$ или $y-\alpha=0$.
Второй шаг. $x=0$.
Таким образом, огибающей может служить только ось y.
Исследование кривых на особые точки:

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, \alpha)=x^2-(y-\alpha)^3=0\\ &F'_\alpha(x, y, \alpha)=2x=0\\ &F'_y(x, y, \alpha)=-3(y-\alpha)^2=0 \end{aligned}\right\} M(0, \alpha).$$

Каждая кривая имеет двойную точку на оси y. При изменении параметра α эти двойные точки заполняют ось y. Таким образом, уравнение $x=0$ определяет геометрическое место двойных точек, а огибающей данное семейство не имеет (рис. 195).

Примечание. При решении многих задач на отыскание огибающей указываются лишь свойства огибаемых кривых, но не дается готового уравнения семейства этих кривых. Поэтому приходится предварительно составлять уравнение семейства кривых по их геометрическим свойствам, и очень часто бывает удобнее вводить в уравнение не один, а два переменные параметра, что дает уравнение вида:

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0. \tag{11}$$

Но если семейство кривых по существу зависит от одного переменного параметра, то между α и β должна существовать функциональная зависимость, которую тоже необходимо выразить некоторым дополнительным отношением:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0. \tag{12}$$

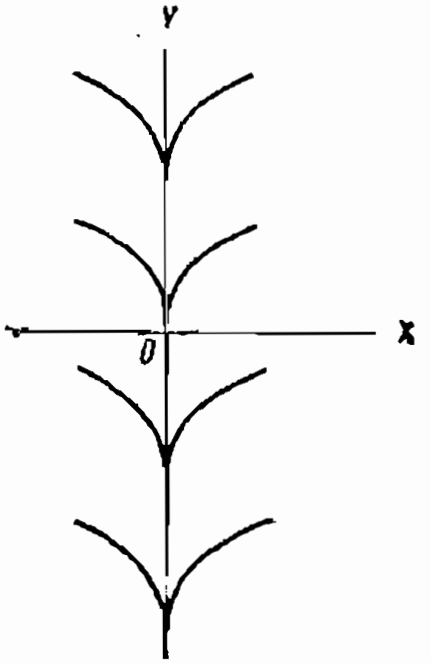


Рис. 195

Можно было бы из этого последнего равенства выразить β через α и, вставив полученное выражение в уравнение (11), свести задачу к уже изученному случаю, но такое решение иногда оказывается весьма сложным и выгоднее сохранить в уравнении (11) оба параметра, но при дифференцировании помнить, что β есть функция от α, определенная соотношением (12).

Тогда результат дифференцирования (11) по единственному независимому параметру α будет:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \tag{13}$$

Для определения производной $\frac{d\beta}{d\alpha}$ дифференцируем соотношение (12):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \tag{14}$$

Теперь, чтобы найти уравнение огибающей, достаточно исключить α, β и $\frac{d\beta}{d\alpha}$ из (11), (12), (13) и (14).

Пример 6. Найти огибающую семейства эллипсов, оси которых совпадают с осями координат, а площадь имеет постоянную величину.

Решение. Все эллипсы, симметричные относительно осей координат, могут быть представлены уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{A}$$

Это семейство эллипсов, зависящее от двух переменных параметров a и b. Выделим из них семейство эллипсов, зависящих от одного параметра, использовав второе данное свойство: площадь эллипсов, т. е. $\pi \cdot a \cdot b$, должна сохранять постоянную величину. Обозначим эту постоянную буквой K; тогда дополнительное соотношение между параметрами будет:

$$\pi \cdot a \cdot b = K. \tag{B}$$

Дифференцируем (A) и (B) по a, помня, что b есть функция от a:

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} \cdot \frac{db}{da} = 0 \quad \text{и} \quad b + a \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

После исключения $\frac{db}{da}$ из этих двух равенств получим

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением (A), будем иметь:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2} \text{ и } \frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2},$$

откуда:

$$a=\pm x\sqrt{2} \text{ и } b=\pm y\sqrt{2}.$$

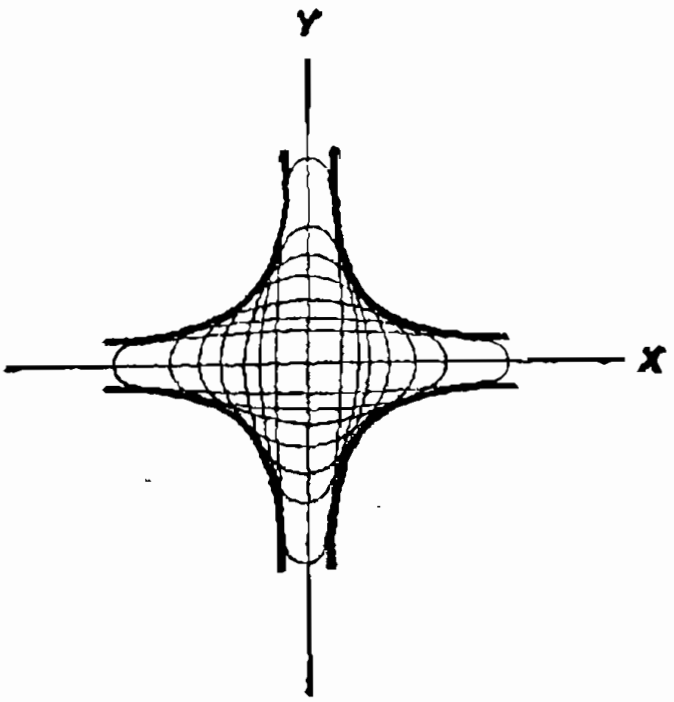


Рис. 196

Полученные выражения для параметров подставим в уравнение (B):

$$xy=\pm\frac{K}{2\pi}.$$

Искомая огибающая состоит из двух сопряженных равносторонних гипербол (рис. 196).

§ 178. Эволюта кривой как огибающая семейства ее нормалей. Возьмем любую кривую

$$y=f(x)$$

и составим уравнение семейства касательных к этой кривой, приняв за переменный параметр абсциссу x_1 точки прикосновения:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1).$$

Найдем огибающую этого семейства прямых.

Дифференцируем его уравнение по параметру x_1:

$$-f'(x_1)=f''(x_1)(x-x_1)-f'(x_1),$$

откуда:

$$f''(x_1)(x-x_1)=0,$$

а так как:

$$f''(x_1)\neq 0^1, \quad \text{то} \quad x-x_1=0$$

и параметрические уравнения огибающей будут:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\\ y&=f(x_1)\end{aligned}\right\}.$$

Исключая из них параметр x_1, получим уравнение огибающей в прямоугольных координатах:

$$y=f(x).$$

[1] Если $f''(x_1)=0$ при любом значении x_1, данная линия $y=f(x)$ есть прямая и все ее касательные сливаются с ней самой.

Но это есть уравнение данной кривой.

Таким образом, *всякая кривая служит огибающей семейства своих касательных.*

Доказанное положение непосредственно вытекает и из самого определения огибающей.

В § 138 было доказано, что нормали кривой служат касательными к ее эволюте; другими словами, эволюта кривой является огибающей семейства нормалей данной кривой. Таким образом, мы теперь имеем второй метод для отыскания эволюты кривой: надо составить уравнение семейства нормалей данной кривой и найти их огибающую, применяя правило § 177.

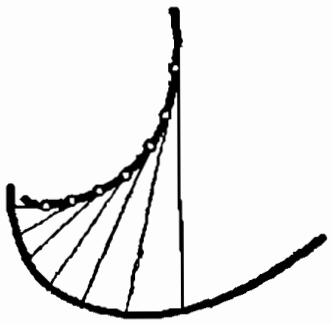


Рис. 197

Кроме того, известно, что точка прикосновения каждой нормали кривой к ее эволюте есть центр кривизны кривой в соответствующей точке (рис. 197); поэтому параметрические уравнения огибающей семейства нормалей являются вместе с тем формулами для вычисления координат центра кривизны кривой в любой ее точке.

Конечно, результаты, получаемые этим вторым методом, ничем не отличаются от тех, которые были получены раньше, но в целом ряде случаев они будут достигнуты проще.

Пример. Найти эволюту параболы $y^2 = 4px$, рассматривая ее как огибающую нормалей параболы.

Решение. Уравнение нормали к данной параболе в точке $P(x_1, y_1)$ имеет вид:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2p}(x - x_1).$$

При рассмотрении семейства нормалей придется в этом уравнении считать x_1 и y_1 переменными параметрами; но так как они являются координатами точек параболы, то связаны они между собой уравнением $y_1^2 = 4px_1$, и в данном случае удобно выразить x_1 через y_1, а именно $x_1 = \frac{y_1^2}{4p}$, и уравнение семейства нормалей будут содержать только один переменный параметр y_1:

$$y - y_1 = \frac{y_1^3}{8p^2} - \frac{xy_1}{2p}. \qquad (A)$$

Дифференцируем (A) по параметру y_1:

$$-1 = \frac{3y_1^2}{8p^2} - \frac{x}{2p},$$

откуда

$$x = \frac{3y_1^2 + 8p^2}{4p}. \qquad (B)$$

Подставим это выражение в (A) и решим полученное уравнение относительно y:

$$y = -\frac{y_1^3}{4p^2}. \qquad (C)$$

Уравнение (B) и (C) определяет координаты центра кривизны параболы в любой ее точке.

Исключая из этих уравнений параметр y_1, получим искомое уравнение эволюты параболы:

$$27py^2 = 4(x-2p)^3.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти огибающую следующих семейств прямых линий:

a) $y = ax + a^2$. Отв. $x^2 + 4y = 0$.

b) $y = \frac{x}{a} + a^2$. $27x^2 = 4y^3$.

c) $\frac{x}{a} - \frac{y}{a^2} = 2$. $27y = x^3$.

d) $a^2x + ay - 1 = 0$. $y^2 + 4x = 0$.

2. Найти огибающую и сделать соответствующие чертежи для следующих семейств кругов:

a) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$. Отв. Обе оси координат.

b) $(x-a)^2 + y^2 = 4a$. $y^2 = 4x + 4$.

c) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 4$. $(x-y)^2 = 8$.

3. Найти огибающую семейства парабол:

$tx^2 + t^2y = 1$, где t — переменный параметр.

Отв. $x^4 + 4y = 0$.

4. Прямая перемещается так, что сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, сохраняет постоянную величину l. Составить уравнение огибающей всех положений подвижной прямой.

Отв. Парабола $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{l}$.

5. Найти огибающую семейства прямых, на которых оси координат отсекают отрезок постоянной длины l.

Отв. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

6. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат двойные ординаты параболы $y^2 = 4px$.

Отв. Парабола $y^2 = 4p(x+p)$.

7. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат перпендикулярные к оси x хорды эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Отв. Эллипс $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Составить уравнение огибающей семейства окружностей, центры которых лежат на параболе $y^2 = 4ax$, причем все окружности семейства проходят через вершину этой параболы.

Отв. Циссоида $x^3 + y^2(x+2a) = 0$.

9. Найти огибающую кругов, проходящих через начало координат и имеющих центры на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$.

Отв. Лемниската $(x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2-y^2)$.

10. Найти эволюту эллипса:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

если его нормали даны уравнением:

$$by = ax\operatorname{tg}\varphi - (a^2-b^2)\sin\varphi,$$

где φ — переменный параметр.

Отв. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

11. Найти эволюту астроиды:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

зная, что ее нормали могут быть даны уравнением:

$$y\cos t-x\sin t=a\cos 2t,$$

где t — переменный параметр.

Отв. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

12. Найти огибающую семейства кривых:

$$(x-t)^3-y^2=0$$

и сделать соответствующий чертеж.

Отв. Огибающей нет; ось x есть геометрическое место точек возврата.

13. Найти огибающую семейства эллипсов:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

сумма полуосей которых равна c.

Отв. Астроида $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$.

14. Найти огибающую эллипсов, оси которых совпадают с осями координат, причем расстояние между концами большой и малой осей сохраняет постоянную величину, равную l.

Отв. Квадрат, стороны которого $(x\pm y)^2=l^2$.

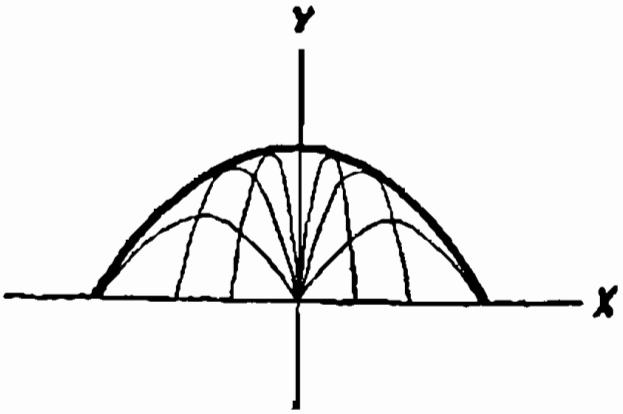


Рис. 198

15. Ядра выбрасываются пушкой с начальной скоростью v_0. Предполагая, что пушке может быть дано любое наклонение и что она всегда находится в одной и той же вертикальной плоскости, найти огибающую всевозможных траекторий ядер, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Указание. Уравнение любой траектории имеет вид:

$$y=x\cdot\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

где α — переменный параметр.

Отв. Парабола $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$ (рис. 198).

16. Найти огибающую семейства строфоид:

$$[x^2+(y-a)^2](x-2)+x=0.$$

Отв. Ось y. Прямая $x=1$ является геометрическим местом узловых точек строфоид, а прямая $x=2$ служит их общей асимптотой.

§ 179. Пространственная кривая и ее уравнение. Если все точки кривой лежат в одной и той же плоскости, кривая называется *плоской кривой*, и, приняв эту плоскость за координатную (x, y), можно представить кривую одним уравнением:

$$F(x, y)=0.$$

Если же кривая не лежит в одной плоскости, ее точки могут быть отнесены к некоторой пространственной системе координат, и тогда эта пространственная кривая определяется системой двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)&=0 \\ \Phi(x, y, z)&=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

т. е. рассматривается как линия пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана одним из уравнений (1).

Однако в целом ряде случаев бывает удобнее пользоваться так называемыми параметрическими уравнениями кривой, к которым естественно перейти, рассматривая пространственную кривую, как траекторию подвижной точки, т. е. как геометрическое место всех ее последовательных положений в пространстве.

Движение точки в пространстве вполне определено, если в любой момент времени t известно положение точки, иначе говоря, если для каждого значения t можно вычислить координаты x, y и z подвижной точки.

Таким образом, мы приходим к уравнениям движения точки в пространстве:

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t). \qquad (2)$$

Но эти же уравнения определяют и траекторию точки, обычные уравнения которой получаются исключением переменного параметра t из (2).

Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями* пространственной кривой. Иногда удобнее выбрать в качестве переменного параметра не время, а какую-нибудь иную величину, меняющуюся при движении точки, например, угол поворота и пр.

Пример 1. Пусть дана кривая своими параметрическими уравнениями:

$$x=t+a;\quad y=\sqrt{a^2-t^2};\quad z=\sqrt{2a(a-t)}.$$

Представить ее, как пересечение двух поверхностей.

Решение. Чтобы исключить параметр t из трех данных уравнений, решим первое из них относительно t и вставим полученное значение в два другие уравнения:

$$t=x-a;$$

$$y^2+(x-a)^2=a^2;\quad z^2=4a^2-2ax.$$

Данную кривую можно рассматривать как линию пересечения круглого и параболического цилиндров, проектирующих эту линию соответственно на плоскости (x, y) и (x, z).

Это не единственно возможный ответ предложенной задачи. Сложив, например, уравнение обоих цилиндров, получим:

$$x^2+y^2+z^2=4a^2,$$

т. е. данная кривая лежит и на этой сферической поверхности, а потому ее можно представить, как пересечение шара с одним из прежних цилиндров и т. д.

Пример 2. Составить параметрические уравнения винтовой линии, лежащей на прямом круглом цилиндре и пересекающей все его образующие под одним и тем же углом.

Решение. Примем ось цилиндра за ось z, плоскость одного из перпендикулярных сечений за плоскость (x, y) и через точку A пересечения этой плоскости с винтовой линией проведем ось x (рис. 199). Постоянными параметрами винтовой линии являются радиус a кругового сечения цилиндра и угол α, под которым винтовая линия пересекает все образующие.

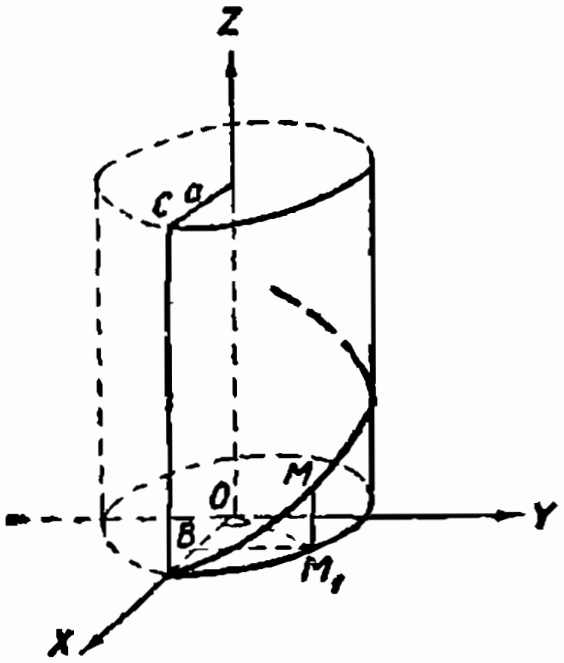


Рис. 199

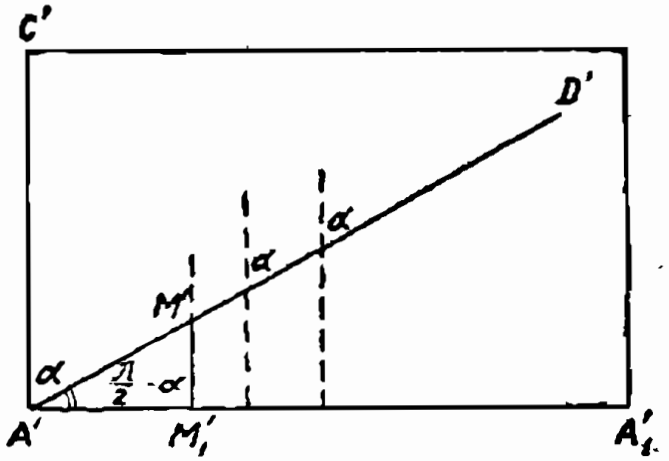


Рис. 200

Следующее соображение облегчит вывод требуемых уравнений: если разрезать цилиндрическую поверхность по образующей AC и развернуть ее на плоскость, то окружность основания цилиндра развернется в прямую $A'A_1'$, все образующие составят систему прямых линий, перпендикулярных к $A'A_1'$, а винтовая линия, пересекающая все эти параллельные прямые под одним и тем же углом α, развернется тоже в прямую $A'D'$, наклоненную к $A'A_1'$ под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (рис. 200).

Возьмем на винтовой линии любую точку M и построим ее координатные линии $MM_1 = z$, $BM_1 = y$, $OB = x$.

За переменный параметр t примем угол AOM_1, тогда из $\triangle OBM_1$ имеем:

$$x = a \cdot \cos t; \quad y = a \cdot \sin t.$$

Аппликату $MM_1 = M'M_1'$ определяем из треугольника $A'M'M_1'$, принимая во внимание, что $A'M_1' = \smile AM_1 = a \cdot t$:

$$z = MM_1 = M'M_1' = A'M_1' \cdot \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha \cdot t.$$

Обозначив постоянный коэффициент $a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ через b, получим параметрические уравнения винтовой линии:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = a \cdot \sin t, \quad z = bt.$$

Исключив t из первых двух уравнений, получим:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это подтверждает, что винтовая линия лежит на данном круглом цилиндре.

Если же исключить параметр t из двух последних уравнений, то окажется, что:

$$y = a \cdot \sin \frac{z}{b},$$

т. е. цилиндр, проектирующий винтовую линию на плоскость (yz), имеет синусоидальную направляющую.

§ 180. Касательная прямая и нормальная плоскость пространственной кривой. Пусть дана кривая своими параметрическими уравнениями:

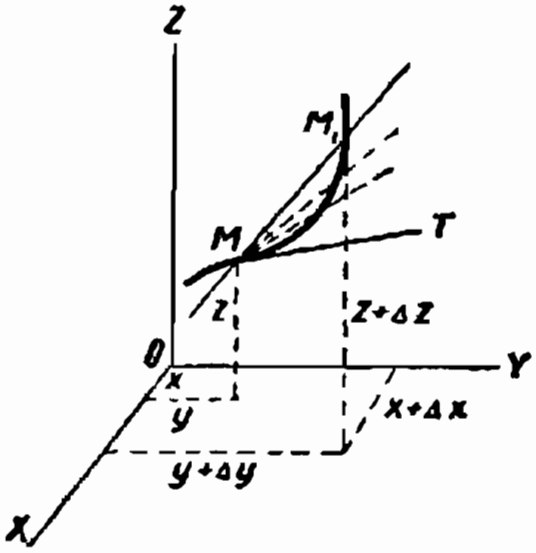


Рис. 201

$$x = f(t);\ y = \varphi(t);\ z = \psi(t)^* \quad (2)$$

и на ней точка $M(x, y, z)$, соответствующая некоторому начальному значению параметра t (рис. 201).

Если дать t приращение Δt, все координаты получат соответствующие приращения Δx, Δy, Δz и точка займет на кривой новое положение $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. Проведем через M и M_1 секущую прямую, ее уравнения будут:

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z}\ ^{**}. \quad (3)$$

Касательной *к кривой в точке M называется предельное положение MT секущей, когда точка M* неограниченно приближается по кривой к точке M. Для получения уравнений касательной надо в уравнениях (3) перейти к пределу, в предположении, что $\Delta t \to 0$ (а следовательно, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$); но это удобнее сделать, предварительно разделив все знаменатели дробей, входящих в (3), на Δt. Тогда уравнения секущей MM_1 примут вид:

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}. \quad (3')$$

и, перейдя к пределу, получим уравнения касательной:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \quad (4)$$

---

* В дальнейшем будем всюду предполагать, что функции $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого и второго порядка.

** Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), имеют вид: $\frac{X-x_1}{x_2-x_1} = \frac{Y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{Z-z_1}{z_2-z_1}$; в данном случае $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$, $z_2 - z_1 = \Delta z$.

Отсюда видно, что направляющие косинусы касательной к кривой (2) пропорциональны производным координат по переменному параметру t:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \frac{dl}{dt} : \frac{d\varphi}{dt} : \frac{d\phi}{dt}.$$

В случае плоской кривой, в каждой ее точке можно было провести одну нормаль, прямую, перпендикулярную к касательной в этой точке. Но в пространстве к касательной MT в точке M можно провести не одну, а бесчисленное множество перпендикулярных прямых; все эти прямые называются нормалями пространственной кривой и лежат они в одной плоскости, перпендикулярной к MT в точке M.

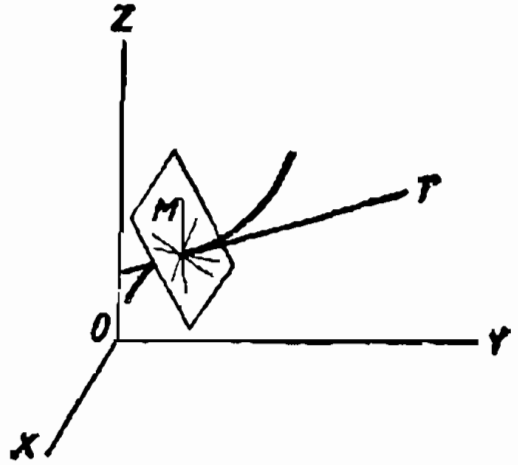


Рис. 202

Плоскость, являющаяся геометрическим местом нормалей к кривой в точке M, называется нормальной плоскостью (рис. 202); уравнение ее следующее [1]:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \qquad (5)$$

Пример. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии:

$$x=a\cos t;\quad y=a\sin t;\quad z=bt$$

в любой ее точке и в точке, где $t=0$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t=-y;\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t=x;\quad \frac{dz}{dt}=b.$$

Уравнения касательной в точке $M(x, y, z)$:

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{b}.$$

Уравнения касательной в точке $A(a, 0, 0)$:

$$\frac{X-a}{0}=\frac{Y}{a}=\frac{Z}{b}\quad \text{или}\quad X=a \text{ и } bY-aZ=0.$$

[1] Уравнение всякой плоскости, проходящей через $M(x, y, z)$, имеет вид $A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$; коэффициенты A, B и C пропорциональны направляющим косинусам прямой, перпендикулярной к плоскости, в данном случае таким перпендикуляром служит касательная.

Уравнение нормальной плоскости в точке $M(x, y, z)$: $-y(X-x)+x(Y-y)+b(Z-z)=0$ или $yX-xY-bZ+bz=0$ и в точке $A(a, 0, 0)$: $aY+bZ=0$.

Теперь перейдем к выводу уравнений касательной прямой и нормальной плоскости пространственной кривой в том случае, когда кривая дана уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)&=0,\\ \Phi(x, y, z)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Можно всегда предположить, что та же кривая изображается тремя уравнениями в параметрической форме. В самом деле, достаточно положить в уравнениях (1) $x=f(t)$, где $f(t)$ произвольно выбранная функция[1], и, решив эти уравнения относительно y и z, получить для них определенные выражения, содержащие t.

Но так как кривая, изображаемая полученными таким образом уравнениями:

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t), \tag{2}$$

целиком лежит на каждой из поверхностей:

$$F(x, y, z)=0 \text{ и } \Phi(x, y, z)=0,$$

то уравнения этих поверхностей удовлетворяются координатами любой точки кривой (2), т. е.

$$F[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0 \text{ и } \Phi[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0. \tag{6}$$

Продифференцируем эти равенства, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}&=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Принимая во внимание, что производные:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} \text{ и } \frac{dz}{dt}$$

характеризуют направление касательной к кривой (2), находим их отношения из системы двух однородных уравнений (7):

$$\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}:\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right):$$
$$:\left(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right):\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right).$$

[1] Можно даже положить $x=t$.

Полученные результаты позволят привести уравнения касательной прямой к виду:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}}, \quad (8)$$

или, пользуясь детерминантами:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}}. \quad (8')$$

Нормальная плоскость может быть представлена в данном случае уравнением:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}(Z-z)=0. \quad (9)$$

Примечание. Надо помнить, что во всех частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и т. д., входящих в уравнения (8), (9), переменные координаты заменены координатами точки прикосновения.

Пример. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии пересечения шара $x^2+y^2+z^2=4r^2$ и цилиндра $x^2+y^2=2ry$ в точке $(r;\ r;\ r\sqrt{2})$ (рис. 203).

Решение.

$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4r^2,$$
$$\Phi(x, y, z)=x^2+y^2-2ry.$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=2r;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2r;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2r\sqrt{2};$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=2r;\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0;$$
$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=$$
$$=0:+4r^2\sqrt{2}:-4r^2=0:\sqrt{2}:-1.$$

Уравнения касательной прямой:

$$\frac{X-r}{0}=\frac{Y-r}{\sqrt{2}}=\frac{Z-r\sqrt{2}}{-1},$$

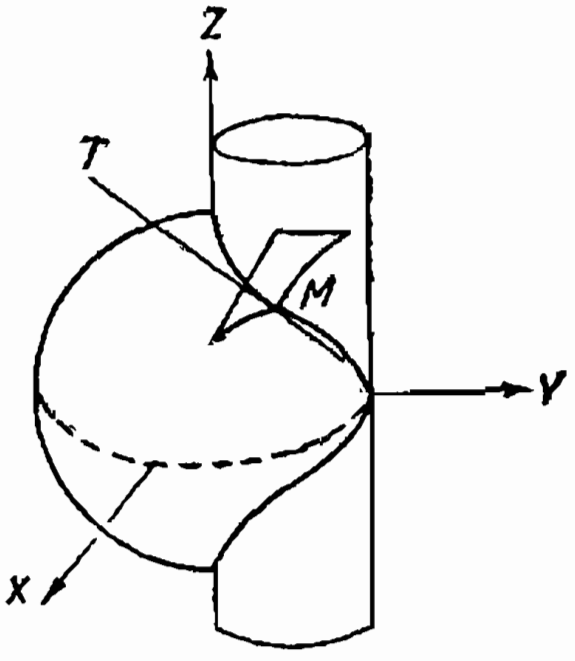


Рис. 203

или

$$X=r,\ Y+\sqrt{2}\cdot Z=3r.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$\sqrt{2}(Y-r)-(Z-r\sqrt{2})=0,$$

или

$$\sqrt{2}\cdot Y-Z=0.$$

§ 181. Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой. Принимая во внимание, что положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, всегда возможно провести плоскость через три произвольно выбранные точки кривой. Эта секущая плоскость может иметь с кривой еще другие общие точки, но выбрать их по своему усмотрению уже нельзя.

Если две из выбранных точек пересечения кривой и плоскости сливаются, то плоскость содержит касательную прямую, проведенную к кривой в этой точке. Через каждую касательную прямую можно провести бесчисленное множество — целый пучок — плоскостей; все они называются касательными плоскостями, и каждая из них имеет в точке касания две слившиеся точки пересечения с кривой. Если же и третья точка пересечения совпадает с первыми двумя, то вблизи рассматриваемой точки соответствующая касательная плоскость будет теснее примыкать к кривой, чем все остальные плоскости.

Предельное положение плоскости, три точки пересечения которой с пространственной кривой сливаются в одной точке, называется соприкасающейся плоскостью кривой[1].

Пусть кривая дана уравнениями в параметрической форме:

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t). \tag{2}$$

Возьмем на ней любые три точки: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, соответствующую значению параметра t_0, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, соответствующую значению t_1 и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, соответствующую значению t_2. Проведем плоскость через эти три точки.

Уравнение всякой плоскости имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{10}$$

Надо только подобрать коэффициенты уравнения (10) так, чтобы плоскость прошла через выбранные три точки, т. е. искомые коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+Cz_0+D&=0,\\ Ax_1+By_1+Cz_1+D&=0,\\ Ax_2+By_2+Cz_2+D&=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

[1] Соприкасающаяся плоскость плоской кривой во всех ее точках совпадает с плоскостью самой кривой.

Пользуясь тем, что точки M_0, M_1 и M_2 взяты на кривой (2), можно придать условиям (11) более удобную форму, а именно: подставим в уравнение плоскости (10) координаты точек, выраженные через параметр t:

$$Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D=0, \tag{12}$$

и, так как левая часть полученного уравнения есть функция одного аргумента t, ее можно сокращенно обозначить через $F(t)$:

$$F(t)=Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D. \tag{12'}$$

Уравнению (12) должны удовлетворять значения t_0, t_1, t_2, что можно записать:

$$F(t_0)=0,\ F(t_1)=0,\ F(t_2)=0.$$

Но, если $F(t)$ обращается в нуль при трех значениях аргумента, ее производная $F'(t)$, согласно теореме Ролля, должна обращаться в нуль по крайней мере при двух значениях аргумента t' и t'', т. е.

$$F'(t')=0 \text{ и } F'(t'')=0,$$

где

$$t_0<t'<t_1 \text{ и } t_1<t''<t_2. \tag{13}$$

Применяя еще раз теорему Ролля, но уже к производной $F'(t)$, получим $F''(\tau)=0$, где

$$t'<\tau<t''. \tag{14}$$

Таким образом, условия (11) равнозначны условиям:

$$F(t_0)=0;\ F'(t')=0;\ F''(\tau)=0. \tag{14'}$$

Чтобы получить коэффициенты для уравнения соприкасающейся плоскости, придется предположить, что точки M_1 и M_2 неограниченно приближаются по кривой к M_0, т. е. $t_1\to t_0$ и $t_2\to t_0$, но тогда, в силу (13) и (14), $t'\to t_0$, $t''\to t_0$ и $\tau\to t_0$; для этого предельного случая условия (11') примут вид:

$$F(t_0)=0,\ F'(t_0)=0,\ F''(t_0)=0, \tag{15}$$

или в менее сокращенных обозначениях:

$$\left.\begin{aligned} F(t_0)&=Af(t_0)+B\varphi(t_0)+C\psi(t_0)+D=0,\\ F'(t_0)&=Af'(t_0)+B\varphi'(t_0)+C\psi'(t_0)=0,\\ F''(t_0)&=Af''(t_0)+B\varphi''(t_0)+C\psi''(t_0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

Так как соприкасающаяся плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, она может быть изображена уравнением:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

и отношения коэффициентов A, B и C определяются из двух последних уравнений (15′):

$$A:B:C=\begin{vmatrix}\varphi'(t_0) & \psi'(t_0)\\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\psi'(t_0) & f'(t_0)\\ \psi''(t_0) & f''(t_0)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}f'(t_0) & \varphi'(t_0)\\ f''(t_0) & \varphi''(t_0)\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}y_0' & z_0'\\ y_0'' & z_0''\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}z_0' & x_0'\\ z_0'' & x_0''\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}x_0' & y_0'\\ x_0'' & y_0''\end{vmatrix},$$

и, окончательно, уравнение соприкасающейся плоскости кривой (2) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет:

$$\begin{vmatrix}y_0' & z_0'\\ y_0'' & z_0''\end{vmatrix}(X-x_0)+\begin{vmatrix}z_0' & x_0'\\ z_0'' & x_0''\end{vmatrix}(Y-y_0)+\begin{vmatrix}x_0' & y_0'\\ x_0'' & y_0''\end{vmatrix}(Z-z_0)=0^1. \quad (16)$$

Пример. Составить уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии

$$x=a\cdot\cos t,\ y=a\cdot\sin t,\ z=bt$$

в точках $M(x, y, z)$ и $A(a, 0, 0)$.

---

[1] Формулы (15), полученные для определения коэффициентов соприкасающейся плоскости, позволяют легко доказать теорему.

Плоскость, проходящая через касательную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно касательной в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, стремится к соприкасающейся плоскости как к своему предельному положению, когда $M_1 \to M_0$.

В самом деле, условие прохождения плоскости (10) через касательную в точке M_0 выразится двумя равенствами:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=F(t_0)=0;\quad Ax_0'+By_0'+Cz_0'=F'(t_0)=0;$$

условие параллельности этой же плоскости касательной прямой в точке M_1 имеет вид:

$$Ax_1'+By_1'+Cz_1'=F'(t_1)=0.$$

Применяя теорему Ролля к $F'(t)$, убеждаемся, что это последнее условие можно заменить новым:

$$F''(\tau_1)=0, \text{ где } t_0<\tau_1<t_1.$$

Итак, коэффициенты касательной плоскости в точке M_0, параллельной касательной прямой в точке M_1, вычисляются из равенств:

$$F(t_0)=0,\ F'(t_0)=0,\ F''(\tau_1)=0.$$

Для вычисления коэффициентов предельного положения рассматриваемой плоскости следует предположить, что $t_1 \to t_0$, а следовательно, и $\tau_1 \to t_0$, а потому эти коэффициенты вычисляются из уравнений:

$$F(t_0)=0,\ F'(t_0)=0 \text{ и } F''(t_0)=0,$$

которые тождественны уравнениям (15), т. е. предельное положение рассматриваемой плоскости совпадает с соприкасающейся плоскостью к кривой в точке M_0.

Решение. $x' = -a\sin t = -y;\quad y' = a\cos t = x;\quad z' = b,$

$x'' = -a\cos t = -x;\quad y'' = -a\sin t = -y;\quad z'' = 0.$

Уравнение соприкасающейся плоскости в $M(x, y, z)$:

$$by(X-x) - bx(Y-y) + (x^2+y^2)(Z-z) = 0,$$

или, учитывая, что для винтовой линии $x^2+y^2=a^2$:

$$by(X-x) - bx(Y-y) + a^2(Z-z) = 0,$$

и после приведения подобных членов:

$$byX - bxY + a^2Z - a^2z = 0.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости в точке $A(a, 0, 0)$:

$$-abY + a^2Z = 0 \text{ или } bY - aZ = 0.$$

ЗАДАЧИ

Найти уравнения касательной прямой, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости для каждой из следующих кривых в указанных точках:

1. $x = 2t;\ y = t^2;\ z = 4t^4$ при $t = 1$. **Отв.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{8}$; $x + y + 8z - 35 = 0$; $16x - 24y + z - 12 = 0$.

2. $x = t^2 - 1;\ y = t + 1;\ z = t^3$, $t = 2$. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-8}{12}$; $4x + y + 12z - 111 = 0$; $6x - 12y - z + 26 = 0$.

3. $x = t^3 - 1;\ y = t + t^2;\ z = 4t^3 - 3t + 1;\ t = 1$. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{3}$; $x + y + 3z - 8 = 0$; $9x - 3y - 2z + 10 = 0$.

4. $x = t;\ y = \sin t;\ z = \cos t;\ t = \dfrac{\pi}{4}$. $\dfrac{4x-\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot y - 1}{1} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot z - 1}{-1}$; $2x + \sqrt{2}\cdot y - \sqrt{2}\cdot z - \dfrac{\pi}{2} = 0$; $2x - \sqrt{2}\cdot y + \sqrt{2}\cdot z - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

5. $x = at;\ y = bt^2;\ z = ct^3;\ t = 1$.

6. $x = t;\ y = 1 - t^2;\ z = 3t^2 + 4t;\ t = -2$.

7. $x = t;\ y = e^t;\ z = e^t;\ t = 0$.

8. $x = a\sin t;\ y = b\cos t;\ z = t;\ t = \dfrac{\pi}{6}$.

9. Найти уравнения касательной прямой к окружности

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25 \\ y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

в точке $(2;\ 2\sqrt{3};\ 3)$.

Отв. $\dfrac{x-2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{y-2\sqrt{3}}{1} = \dfrac{z-3}{-2\sqrt{3}}$.

10. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$\left.\begin{aligned} 2x^2+3y^2+z^2&=9\\ z^2&=3x^2+y^2\end{aligned}\right\}$$

в точке $(1;\ -1;\ 2)$.

Отв. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$; $8x+10y+7z-12=0$.

11. Найти направляющие косинусы касательной к каждой из кривых:

а) $x=t^2$; $y=t^3$; $z=t^4$; в точке, где $x=1$.

b) $\left.\begin{aligned} xyz&=1\\ y^2&=x\end{aligned}\right\}$ в точке $(1;\ 1;\ 1)$.

c) $\left.\begin{aligned} y&=x^2\\ z^2&=1-y\end{aligned}\right\}$ в точке $(0;\ 0;\ 1)$.

§ 182. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть дана поверхность уравнением

$$F(x,\ y,\ z)=0. \tag{17}$$

Возьмем на ней любые две точки $M(x,\ y,\ z)$ и $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$; прямая MM_1, их соединяющая, называется секущей данной поверхности. *Если точка M_1, двигаясь по некоторой кривой, имеющей касательную в точке M и лежащей на поверхности, неограниченно приближается к точке M, то секущая MM_1 стремится занять некоторое предельное положение MT, которое называется* касательной *к поверхности в точке M* (рис. 204). Другими словами, касательной к поверхности в данной точке называется касательная в той же точке к кривой, через нее проходящей и целиком лежащей на поверхности.

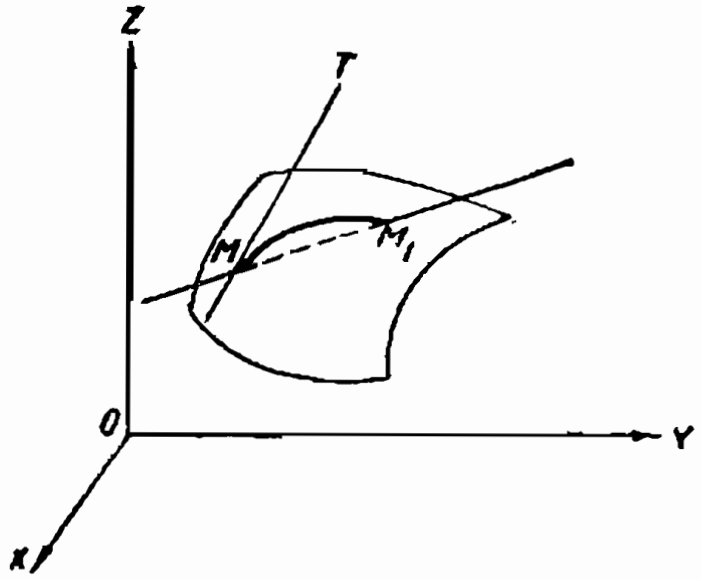


Рис. 204.

Но так как на поверхности через данную точку M можно провести бесчисленное множество кривых, имеющих различное направление, то и касательных к поверхности в этой точке будет тоже неограниченное число, и возникает вопрос о геометрическом месте всех этих касательных прямых.

Докажем, что все касательные прямые к поверхности в данной точке лежат в одной и той же плоскости[1].

[1] Предполагается, что рассматриваемая точка поверхности $F(x, y, z)=0$ не является особой ее точкой, т. е. по крайней мере одна из частных производных $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ в этой точке отлична от нуля.

Рассмотрим поверхность:

$$F(x, y, z)=0, \tag{17}$$

возьмем на ней точку $M(x, y, z)$ и проведем на поверхности через точку M любую кривую. Уравнения этой кривой пусть будут:

$$x=f(t);\ y=\varphi(t);\ z=\psi(t). \tag{2}$$

Как было показано в § 180, направление касательной к кривой (2) определяется угловыми коэффициентами [1]:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}.$$

Воспользуемся тем, что кривая (2) целиком лежит на поверхности (17), т. е. при любом значении параметра t справедливо равенство:

$$F[f(t),\ \varphi(t),\ \psi(t)]=0.$$

Откуда:

$$\frac{dF}{dt}=0,$$

или, согласно правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0. \tag{18}$$

Если в полученное соотношение (18) подставить вместо переменных координат координаты точки M, то вторые сомножители в произведениях левой части равенства (18) будут равны угловым коэффициентам касательной к кривой (2) в точке M, а первые сомножители — частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ — будут некоторые постоянные числа, зависящие только от выбора поверхности (17) и точки M на ней.

Рассмотрим прямую MN, проходящую через точку M и имеющую своими угловыми коэффициентами значения частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$, вычисленные для точки M:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{19}$$

[1] Угловыми коэффициентами прямой в пространстве называются три числа, пропорциональные ее направляющим косинусам.

Эта прямая называется нормалью к поверхности (17) в точке $M(x, y, z)$, а равенство (18) показывает, что касательная в точке M к любой кривой (2), лежащей на поверхности, перпендикулярна к нормали, проведенной к поверхности в той же точке.

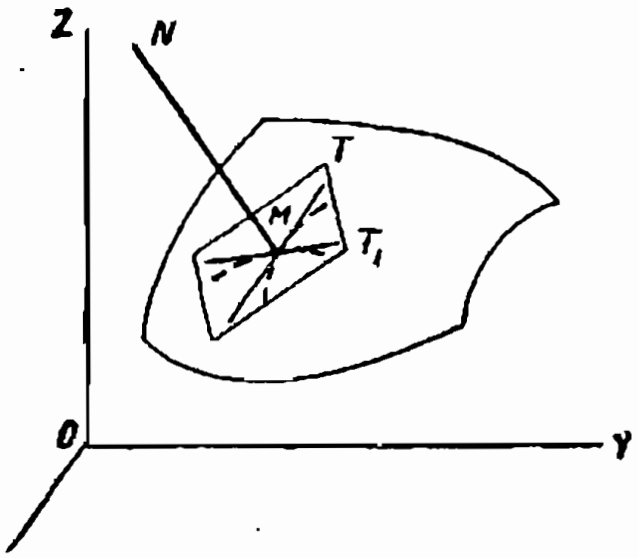


Рис. 205

Если взять на поверхности другую кривую, угловые коэффициенты ее касательной в точке M будут иные, но они все же будут удовлетворять соотношению (18).

Таким образом, *все касательные к поверхности в точке M перпендикулярны к одной и той же прямой — к нормали поверхности; следовательно, все они лежат в одной плоскости, перпендикулярной к нормали* (рис. 205).

Эта плоскость, являющаяся геометрическим местом всех касательных прямых к поверхности в данной точке, называется касательной плоскостью.

Касательная плоскость проходит через точку $M(x, y, z)$ и перпендикулярна к нормали (19); поэтому она изображается уравнением:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \qquad (20)$$

Пример. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ в точке } M(x_1, y_1, z_1).$$

Решение. $F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{x_1}{a^2}(X-x_1)+\frac{y_1}{b^2}(Y-y_1)+\frac{z_1}{c^2}(Z-z_1)=0,$$

или

$$\frac{x_1X}{a^2}+\frac{y_1Y}{b^2}+\frac{z_1Z}{c^2}=1.$$

§ 183. Геометрическая интерпретация полного дифференциала функции двух аргументов. Составим уравнение касательной плоскости к поверхности, уравнение которой разрешено относительно z:

$$z=f(x, y). \quad (21)$$

Перенеся все члены уравнения в одну сторону, получим:

$$F(x, y, z)=$$
$$=f(x, y)-z=0,$$

откуда вычислим производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x};$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y};$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=-1.$$

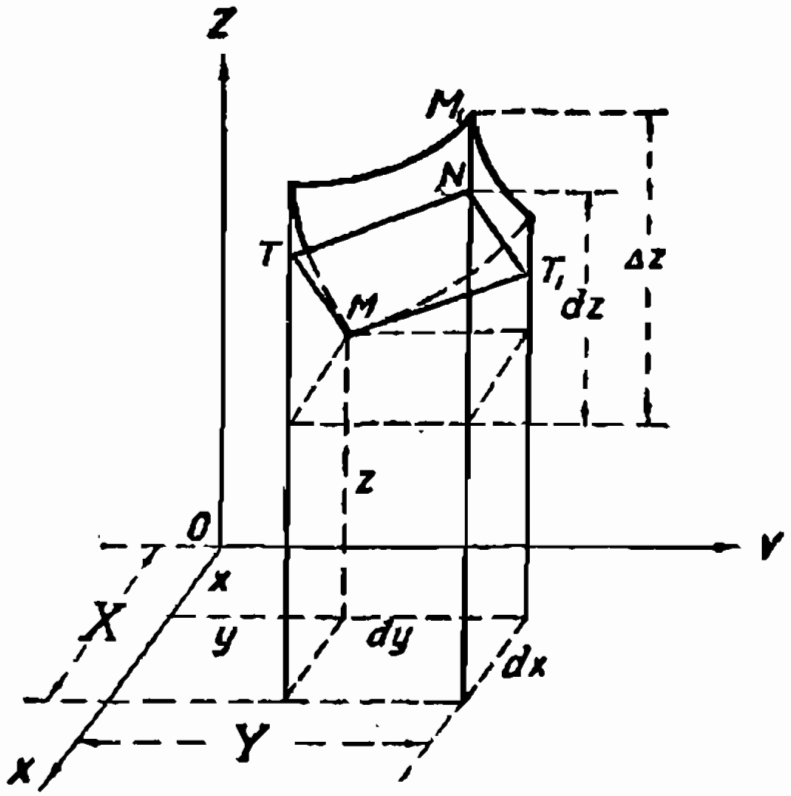


Рис. 206

Подставив эти выражения вместо коэффициентов в (20), получим уравнение касательной плоскости:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)=Z-z, \quad (22)$$

где X, Y, Z — координаты любой точки N касательной плоскости, а x, y, z — координаты точки прикосновения.

Введем обозначения (рис. 206):

$$X-x=dx \text{ и } Y-y=dy,$$

тогда уравнение касательной примет вид:

$$\frac{dz}{dx}\cdot dx+\frac{dz}{dy}\cdot dy=Z-z. \quad (22')$$

Но левая часть этого равенства представляет полный дифференциал функции $z=f(x, y)$, т. е.

$$dz=Z-z.$$

Таким образом, полный дифференциал функции двух аргументов, соответствующих их приращениям dx и dy, равен соответствующему приращению аппликаты касательной плоскости к той поверхности, которая геометрически изображает данную функцию.

ЗАДАЧИ

1. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к эллипсоиду $4x^2+9y^2+36z^2=36$ в точке, где $x=2$, $y=1$ и $z>0$.

Отв. $8(x-2)+9(y-1)+6\sqrt{11}\left(z-\frac{1}{6}\sqrt{11}\right)=0$;

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{9}=\frac{6z-\sqrt{11}}{36\sqrt{11}}.$$

2. Найти уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $z=2x^2+4y^2$ в точке (2; 1; 12).

Отв. $8x+8y-z=12$.

3. Составить уравнения нормали к однополосному гиперболоиду $x^2-4y^2+2z^2=6$ в точке (2; 2; 3).

Отв. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{3}$.

4. Найти уравнение касательной плоскости к двухполосному гиперболоиду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_1, y_1, z_1).

Отв. $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-\frac{z_1z}{c^2}=1$.

5. Найти уравнение касательной плоскости в точке (x_1, y_1, z_1) к поверхности $ax^2+by^2+cz^2+d=0$.

Отв. $ax_1x+by_1y+cz_1z+d=0$.

6. Показать, что уравнение касательной плоскости к шару $x^2+y^2+z^2+2Lx+2My+2Nz+D=0$ в точке (x_1, y_1, z_1) имеет вид:

$$x_1x+y_1y+z_1z+L(x+x_1)+M(y+y_1)+N(z+z_1)+D=0.$$

7. Найти уравнение касательной плоскости в любой точке поверхности:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

и показать, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых касательной плоскостью на осях, есть величина постоянная.

8. Показать, что тетраэдр, образуемый координатными плоскостями с любой касательной плоскостью поверхности $xyz=a^3$, имеет постоянный объем.

9. Составить уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

a) $x^2+4y^2-17z^2=0$; (1; 2; -1).
b) $x^2+y^2+z^2=11$; (3; 1; 1).
c) $3x^2+y^2-2z=0$; $x=1$; $y=1$.
d) $x^2y^2+2x+z^3=16$; $x=2$; $y=1$.
e) $x^2+3y^2+2z^2=9$; $y=1$; $z=1$.

ГЛАВА XVII

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

§ 184. Вектор-функция скалярного аргумента[1]. Непрерывность. Производная. Все переменные величины, с которыми мы имели дело в дифференциальном исчислении,— безразлично, будь то независимые переменные или их функции,— всегда носили характер скалярных величин.

Однако, не говоря даже о более сложных задачах техники, в самых основных вопросах физики или механики трудно обойтись без рассмотрения переменных векторных величин. Примером переменных векторов могут служить: скорость качающегося маятника; сила, под действием которой земля движется по своей орбите; радиус-вектор подвижной точки и т. д.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением переменных векторов, модуль (длина) и направление которых зависят от какого-нибудь скалярного аргумента, хотя бы от времени, или от длины дуги, от величины угла и т. д.

Если $\overline{Q}$ является таким вектором-функцией аргумента f, мы выражаем эту зависимость равенством:

$$\overline{Q}=\overline{Q}(t). \qquad (1)$$

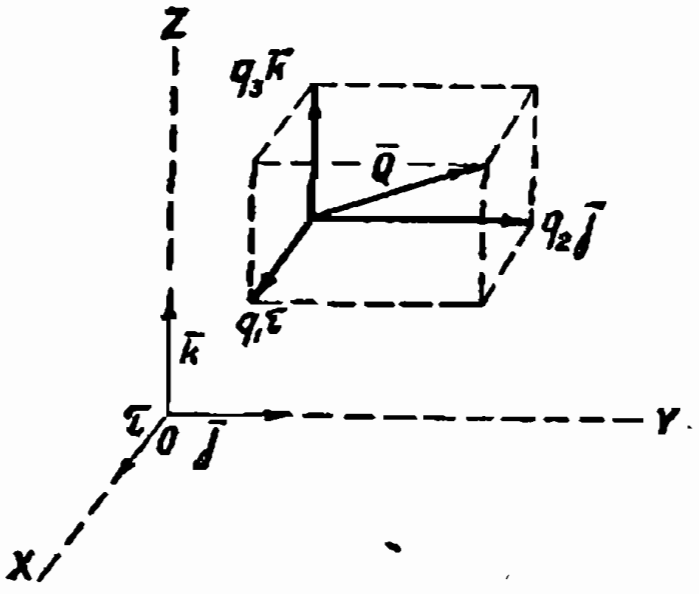


Рис. 207

Задание одного вектора-функции (1) равносильно заданию трех обыкновенных скалярных функций того же аргумента t.

В самом деле, всякий вектор в пространстве может быть разложен по любым трем (некомпланарным) направлениям, на-

[1] В дальнейшем предполагается, что учащийся знаком с основами векторной алгебры.

пример, по трем осям координат, т. е. его можно представить как геометрическую сумму трех векторов (компонентов), соответственно параллельных осям координат. Если мы обозначим орты (единичные векторы) осей координат через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, а проекции вектора $\bar{Q}$ на оси координат обозначим соответственно через q_1, q_2, q_3, то (рис. 207)

$$\bar{Q}=q_1\bar{i}+q_2\bar{j}+q_3\bar{k}. \tag{2}$$

Но, поскольку вектор $\bar{Q}$ меняется в зависимости от t, то и проекции его также меняются в зависимости от t, и, следовательно, мы имеем:

$$q_1=f_1(t),\ q_2=f_2(t),\ q_3=f_3(t), \tag{3}$$

$$\bar{Q}(t)=f_1(t)\,\bar{i}+f_2(t)\,\bar{j}+f_3(t)\,\bar{k}. \tag{2}$$

Напомним, что проекции вектора на оси координат называются иначе координатами этого вектора, что кратко записывается так:

$$\bar{Q}\{q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \text{или} \quad \bar{Q}\{f_1(t);\ f_2(t);\ f_3(t)\}.$$

Координаты вектора вполне определяют его, т. е. по координатам вектора можно вычислить его модуль и направляющие косинусы:

$$|\bar{Q}|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\sqrt{[f_1(t)]^2+[f_2(t)]^2+[f_3(t)]^2}, \tag{4}$$

$$\cos(\hat{\bar{Q}\bar{i}})=\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}};\quad \cos(\hat{\bar{Q}\bar{j}})=\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}};$$

$$\cos(\hat{\bar{Q}\bar{k}})=\frac{q_3}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что все три скалярные функции (3) непрерывны и имеют непрерывные производные. Покажем, что при этих условиях вектор:

$$\bar{Q}(t)=f_1(t)\cdot\bar{i}+f_2(t)\cdot\bar{j}+f_3(t)\cdot\bar{k}$$

также будет непрерывной и дифференцируемой функцией аргумента t.

Вектор $\bar{Q}(t)$ называется непрерывной функцией от аргумента t, если модуль его геометрического приращения $|\Delta\bar{Q}|$ как угодно мал при условии, что $|\Delta t|$ достаточно мало, т. е. для каждого

сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такое ε', что:

$$|\Delta\bar{Q}|<\varepsilon, \text{ если } |\Delta t|<\varepsilon'.$$

Пусть дан вектор:

$$\bar{Q}(t)=f_1(t)\cdot\bar{i}+f_2(t)\cdot\bar{j}+f_3(t)\cdot\bar{k}. \qquad (2')$$

Дадим аргументу приращение Δt; тогда:

$$\bar{Q}(t+\Delta t)=f_1(t+\Delta t)\,\bar{i}+f_2(t+\Delta t)\,\bar{j}+f_3(t+\Delta t)\,\bar{k}.$$

Вычтем из этого измененного вектора первоначальный (2'):

$$\Delta\bar{Q}=\bar{Q}(t+\Delta t)-\bar{Q}(t)=[f_1(t+\Delta t)-f_1(t)]\,\bar{i}+$$
$$+[f_2(t+\Delta t)-f_2(t)]\,\bar{j}+[f_3(t+\Delta t)-f_3(t)]\,\bar{k}.$$

Модуль полученного приращения вектора можно вычислить по формуле (4):

$$|\Delta\bar{Q}|=$$
$$=\sqrt{[f_1(t+\Delta t)-f_1(t)]^2+[f_2(t+\Delta t)-f_2(t)]^2+[f_3(t+\Delta t)-f_3(t)]^2}<$$
$$<|f_1(t+\Delta t)-f_1(t)|+|f_2(t+\Delta t)-f_2(t)|+|f_3(t+\Delta t)-f_3(t)|,$$

но, так как функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ по предположению непрерывны, то можно выбрать приращение аргумента настолько малым, $|\Delta t|<\varepsilon'$, чтобы:

$$|f_1(t+\Delta t)-f_1(t)|<\frac{\varepsilon}{3};\ |f_2(t+\Delta t)-f_2(t)|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$|f_3(t+\Delta t)-f_3(t)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

а потому:

$$|\Delta\bar{Q}|<\varepsilon.$$

Таким образом, непрерывность скалярных функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ влечет за собой непрерывность вектора-функции:

$$\bar{Q}(t)=f_1(t)\,\bar{i}+f_2(t)\,\bar{j}+f_3(t)\,\bar{k}\ *.$$

Приращение $\Delta\bar{Q}=\bar{Q}(t+\Delta t)-\bar{Q}(t)$, как разность двух векторов, опять является вектором; разделим его на соответствующее приращение аргумента, т. е. на скалярную величину Δt; резуль-

* Как и в случае скалярных функций, условию непрерывности вектора-функции можно придать форму: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{Q}(t+\Delta t)=\bar{Q}(t)$.

тат деления $\frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t}$ есть вектор, параллельный $\Delta\bar{Q}$. Если $\Delta t \to 0$, вектор $\frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t}$ будет меняться по величине и направлению, но возможно, что он будет приближаться к определенному вектору, как к своему пределу. Этот предельный вектор и называется производной вектора-функции $\bar{Q}(t)$ по аргументу t, т. е.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t}. \tag{5}$$

Мы уже видели, что для вектора:

$$\bar{Q}(t) = f_1(t)\,\bar{i} + f_2(t)\,\bar{j} + f_3(t)\,\bar{k}$$

геометрическое приращение выражается следующим образом:

$$\Delta\bar{Q} = [f_1(t+\Delta t) - f_1(t)]\,\bar{i} + [f_2(t+\Delta t) - f_2(t)]\,\bar{j} + \\ + [f_3(t+\Delta t) - f_3(t)]\,\bar{k},$$

откуда:

$$\frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t} = \frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}\cdot\bar{i} + \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}\cdot\bar{j} + \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\cdot\bar{k}.$$

Переходим к пределу в предположении, что $\Delta t \to 0$ и помня, что все три функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ имеют производные, а $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ являются постоянными ортами:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t} = f_1'(t)\,\bar{i} + f_2'(t)\,\bar{j} + f_3'(t)\,\bar{k}. \tag{5'}$$

Таким образом, если $\bar{Q}\{f_1(t);\ f_2(t);\ f_3(t)\}$,
то

$$\frac{d\bar{Q}}{dt}\{f_1'(t);\ f_2'(t);\ f_3'(t)\},$$

т. е. производную вектора-функции можно определить как новый вектор, координаты которого равны производным соответствующих координат первоначального вектора.

§ 185. Правила дифференцирования векторов. Основные правила дифференцирования векторов-функций содержатся в следующих формулах:

1. $\frac{d\bar{C}}{dt} = 0$, где $\bar{C}$ — постоянный вектор.

II. $\frac{d(\bar{P}+\bar{Q})}{dt}=\frac{d\bar{P}}{dt}+\frac{d\bar{Q}}{dt}$.

III. $\frac{d(\alpha\bar{Q})}{dt}=\alpha\cdot\frac{d\bar{Q}}{dt}$, где α — постоянное число.

IV. $\frac{du(t)\cdot\bar{Q}(t)}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot\bar{Q}(t)+u(t)\frac{d\bar{Q}}{dt}$.

V. $\frac{d(\bar{P}\bar{Q})}{dt}=\left(\frac{d\bar{P}}{dt},\ \bar{Q}\right)+\left(\bar{P},\ \frac{d\bar{Q}}{dt}\right)$, где $(\bar{P},\ \bar{Q})$ — скалярное произведение двух векторов.

V^1. $\frac{d(\bar{P},\ \bar{P})}{dt}=\frac{d\bar{P}^2}{dt}=2\left(\bar{P},\ \frac{d\bar{P}}{dt}\right)$.

VI. $\frac{d[\bar{P},\ \bar{Q}]}{dt}=\left[\frac{d\bar{P}}{dt},\ \bar{Q}\right]+\left[\bar{P},\ \frac{d\bar{Q}}{dt}\right]$, где $[\bar{P},\ \bar{Q}]$ — векторное произведение двух векторов.

В этой последней формуле нельзя менять порядок сомножителей.

VII. $\frac{d\bar{P}}{dt}=\frac{d\bar{P}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, где $\bar{P}=\bar{P}(s)$ и $s=\varphi(t)$.

При выводе этих формул можно или непосредственно пользоваться определением производной вектора-функции (5), которое ничем не отличается от определения производной скалярной функции, или же можно свести дифференцирование векторов к дифференцированию скалярных функций — их координат.

Докажем, например, справедливость VI формулы, пользуясь первым из этих методов.

Так как векторное произведение двух векторов есть новый вектор, введем обозначение:

$$\bar{M}(t)=[\bar{P}(t),\ \bar{Q}(t)].$$

Дадим аргументу приращение Δt, тогда:

$$\bar{M}(t+\Delta t)=[\bar{P}(t+\Delta t),\ \bar{Q}(t+\Delta t)].$$

После вычитания получим:

$$\Delta\bar{M}=[\bar{P}(t+\Delta t),\ \bar{Q}(t+\Delta t)]-[\bar{P}(t),\ \bar{Q}(t)].$$

Делим приращение векторов произведения на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta\bar{M}}{\Delta t}=\frac{[\bar{P}(t+\Delta t),\ \bar{Q}(t+\Delta t)]-[\bar{P}(t),\ \bar{Q}(t)]}{\Delta t}.$$

Чтобы найти производную векторного произведения, осталось перейти к пределу, но для вычисления этого предела придется

предварительно преобразовать переменный вектор $\frac{\Delta\bar{M}}{\Delta t}$; прибавим и отнимем от числителя $\Delta\bar{M}$ одно и то же векторное произведение $[\bar{P}(t), \bar{Q}(t+\Delta t)]$; тогда, благодаря свойству распределительности векторного произведения, имеем:

$$[\bar{P}(t+\Delta t), \bar{Q}(t+\Delta t)]-[\bar{P}(t),\bar{Q}(t+\Delta t)]=[\Delta\bar{P}, \bar{Q}(t+\Delta t)],$$

и

$$[\bar{P}(t), \bar{Q}(t+\Delta t)]-[\bar{P}(t), \bar{Q}(t)]=[\bar{P}(t), \Delta\bar{Q}],$$

а потому

$$\frac{\Delta\bar{M}}{\Delta t}=\frac{[\Delta\bar{P}, \bar{Q}(t+\Delta t)]+[\bar{P}(t), \Delta\bar{Q}]}{\Delta t}=\left[\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta t}, \bar{Q}(t+\Delta t)\right]+\left[\bar{P}(t), \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t}\right]$$

(чтобы разделить векторное произведение на скаляр, достаточно разделить на него один из сомножителей).

Теперь переход к пределу не представляет никаких затруднений:

$$\frac{d[\bar{P}(t), \bar{Q}(t)]}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{M}}{\Delta t}=\left[\frac{d\bar{P}}{dt}, \bar{Q}(t)\right]+\left[\bar{P}(t), \frac{d\bar{Q}}{dt}\right].$$

Дадим еще вывод формулы V, применяя на этот раз второй метод.

Пусть $\bar{P}\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\bar{Q}\{q_1, q_2, q_3\}$, где $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ являются функциями аргумента t, имеющими производные $p_1', p_2', \ldots, q_3'$; тогда:

$$\frac{d\bar{P}}{dt}\{p_1', p_2', p_3'\} \text{ и } \frac{d\bar{Q}}{dt}\{q_1', q_2', q_3'\}.$$

Как известно, скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений одноименных координат этих векторов, т. е.

$$(\bar{P}, \bar{Q})=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$$

и, следовательно:

$$\frac{d(\bar{P}\bar{Q})}{dt}=\frac{d(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)}{dt}=(p_1'q_1+p_2'q_2+p_3'q_3)+$$
$$+(p_1q_1'+p_2q_2'+p_3q_3')=\left(\frac{d\bar{P}}{dt}, \bar{Q}\right)+\left(\bar{P}, \frac{d\bar{Q}}{dt}\right).$$

§ 186. Векторно-параметрическое уравнение кривой. Переходя к геометрическим приложениям векторов-функций, напомним, что положение точки M в пространстве вполне определяется одним

вектором — радиусом-вектором $\bar{r}$ этой точки относительно произвольно выбранного полюса O, т. е.

$$\bar{r}=\overline{OM}.$$

Если мы выберем полюс O за начало координат, а направление осей определим тремя взаимно перпендикулярными ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то положение точки M может быть задано двояким образом — или тремя координатами, или одним радиусом-вектором (рис. 208):

$$M(x, y, z), \text{ или } M(\bar{r}),$$

причем:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k},$$

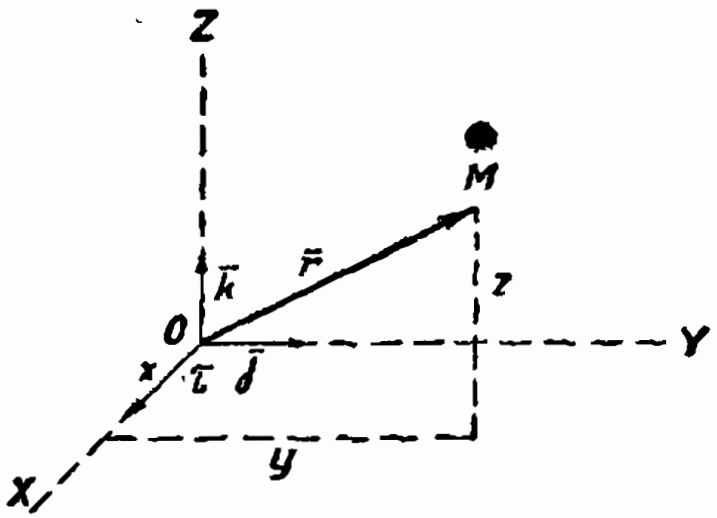


Рис. 208

т. е. координаты данной точки являются вместе с тем и координатами ее радиуса-вектора:

$$\bar{r}\{x, y, z\}.$$

Если точка M перемещается в пространстве, описывая некоторую кривую, то координаты ее меняются в зависимости от времени или другого скалярного параметра, и траектория точки может быть задана уравнениями:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t).$$

Но при движении точки M меняется и ее радиус-вектор $\bar{r}$; его зависимость от выбранного параметра t выразится равенством:

$$\bar{r}(t)=f(t)\,\bar{i}+\varphi(t)\,\bar{j}+\psi(t)\,\bar{k}.$$

Обратно, если дан закон изменения радиуса-вектора точки M в зависимости от параметра t:

$$\bar{r}=\bar{r}(t), \tag{6}$$

то закон движения точки в пространстве, а следовательно, и ее траектория будет вполне определена.

Таким образом, вместо трех параметрических уравнений пространственной кривой, мы получили одно векторно-параметрическое уравнение кривой (6).

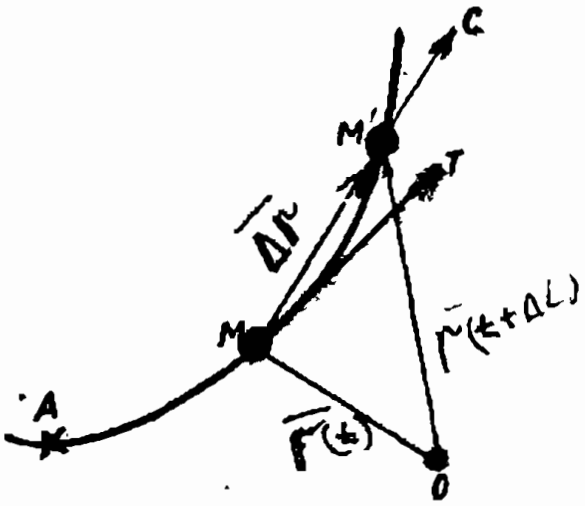


Рис. 209

§ 187. Производная радиуса-вектора. Орт касательной. Пусть дана пространственная кривая векторно-параметрическим уравнением:

$$\bar{r}=\bar{r}(t).$$

Начальному значению параметра t соответствует на кривой точка M (рис. 209). Дадим параметру приращение Δt, тогда на кривой получим новое положение M' подвижной точки и

$$\overline{OM'}=\bar{r}(t+\Delta t).$$

Геометрическое приращение радиуса-вектора:

$$\Delta\bar{r}=\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)$$

изобразится на чертеже вектором хорды $\Delta\bar{r}=\overline{MM'}$. Разделим $\Delta\bar{r}$ на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}=\overline{MC}^{1}.$$

Когда $\Delta t\to 0$, точка M' неограниченно приближается к M, двигаясь по кривой, направление и длина секущего вектора $\overline{MC}$ меняются. Предельное положение этого вектора направлено по касательной кривой в точке M:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\overline{MT}.$$

Итак, производная переменного радиуса-вектора есть вектор, направленный по касательной к траектории конца радиуса-вектора.

---

[1] Чертеж сделан в предположении, что $0<\Delta t<1$, так как векторы $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ и $\Delta\bar{r}$ и имеют одинаковое направление и $\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right|>|\Delta\bar{r}|$.

Так как нам постоянно придется иметь дело с направлением касательной, введем обозначение $\bar{\tau}$ для орта касательной, тогда:

$$\bar{\tau} = \frac{\overline{dr}}{|dr|} \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\tau} \cdot \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|.$$

Модуль производной радиуса-вектора можно вычислить, принимая во внимание, что:

$$\bar{r}\{x, y, z\},$$

а следовательно:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\},$$

откуда:

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ получит более конкретное толкование, если под параметром t мы будем подразумевать время и, кроме того, в качестве промежуточного аргумента выберем длину дуги кривой s, измеряемой от произвольно выбранной на кривой начальной точки A:

$$\smile AM = s(t); \quad \smile AM' = s(t + \Delta t); \quad \smile MM' = \Delta s.$$

Тогда, согласно формуле VII, имеем:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Но:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \lim_{M' \to M} \frac{\overline{MM'}}{\smile MM'} = \bar{\tau},$$

так как вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ имеет направление касательной, а модуль его равен единице, как предел отношения длины хорды к длине соответствующей дуги, когда эта последняя стремится к нулю.

С другой стороны, Δs есть путь, пройденный подвижной точкой за промежуток времени Δt; отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость точки за этот промежуток времени, а предел отношения даст истинную скорость, с которой движется по кривой точка M в момент t:

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v,$$

и мы окончательно получим:

$$\frac{\bar{dr}}{dt} = v \cdot \tau = v, \tag{7}$$

т. е. производная по времени радиуса-вектора подвижной точки равна вектору-скорости этой точки, другими словами, вектору, направленному по касательной к траектории и имеющему модуль, равный скалярной величине скорости.

§ 188. Дифференциал дуги пространственной кривой. Исследуя производную радиуса-вектора, мы видим, что производная радиуса-вектора по дуге равна орту касательной:

$$\frac{\bar{dr}}{ds} = \bar{\tau}, \text{ т. е. } \left|\frac{\bar{dr}}{ds}\right| = 1. \tag{7'}$$

Но этот модуль можно вычислить и при помощи координат вектора-производной, если:

$$\bar{r}\{x, y, z\}; \text{ то } \frac{\bar{dr}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\},$$

и следовательно,

$$\left|\frac{\bar{dr}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Сопоставляя этот результат с (7'), имеем:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1,$$

откуда получаем формулу для дифференциала дуги пространственной кривой:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{8}$$

Тот факт, что производная радиуса-вектора имеет особо простое значение, если за аргумент принять длину дуги, заставляет предполагать, что при таком выборе и последующие формулы получат более простой вид, а потому в дальнейшем, изображая пространственную кривую векторно-параметрическим уравнением, мы будем брать длину дуги s в качестве переменного параметра. Уравнение кривой примет вид:

$$\bar{r} = \bar{r}(s).$$

§ 189. Кривизна пространственной кривой. Определение кривизны, данное для плоской кривой, *переносится без всяких изменений на пространственную кривую.*

Пусть кривая (рис. 210) дана уравнением:

$$\bar{r}=\bar{r}(s)$$

и начальному значению параметра s соответствует на кривой точка M. Если дать дуге приращение Δs, на кривой получим вторую точку M'. Построим орты касательных в начале и в конце дуги MM', т. е. $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\tau}(s+\Delta s)$. Эти орты отличаются друг от друга направлением и угол между ними называется углом смежности дуги MM'.

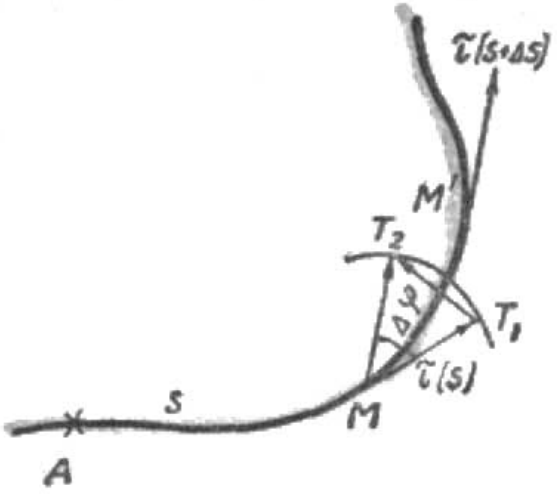


Рис. 210

Средней кривизной дуги MM' называется отношение угла смежности к длине самой дуги. Но так как касательные прямые, проведенные в двух разных точках пространственной кривой, вообще говоря, не пересекаются, то для получения угла смежности построим в точке M не только орт касательной в этой точке $\overline{MT_1}=\bar{\tau}(s)$, но и вектор $\overline{MT_2}=\bar{\tau}(s+\Delta s)$. Угол $T_1MT_2=\Delta\varphi$ и будет углом смежности дуги MM'.

Таким образом, средняя кривизна дуги $MM'=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.

Кривизной кривой в точке M называется предел средней кривизны дуги MM', когда $M'\to M$, т. е.

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Для удобства вычисления этого предела делаем следующее добавочное построение: соединим концы T_1 и T_2 ортов вектором:

$$\overrightarrow{T_1T_2}=\bar{\tau}(s+\Delta s)-\bar{\tau}(s)=\Delta\bar{\tau}$$

и эти же точки соединим дугой окружности, центр которой совпадает с точкой M, а радиус равен единице:

$$\smile T_1T_2=\Delta\varphi.$$

Теперь переходим к вычислению кривизны кривой в точке M.

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta\bar{\tau}|}\cdot\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\smile T_1T_2}{|\overrightarrow{T_1T_2}|}\cdot\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\Delta s},$$

но так как предел отношения дуги к хорде, ее стягивающей, равен единице, то:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta s} = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right|.$$

Принимая во внимание, что:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

имеем:

$$K = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|, \tag{9}$$

или, пользуясь координатными обозначениями:

$$\bar{r}\{x, y, z\}; \quad \frac{d\bar{r}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}; \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left\{\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right\},$$

получим:

$$K = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{10}$$

Кривизну пространственной кривой всегда считают величиной положительной.

Величина, обратная кривизне кривой в данной точке, называется радиусом кривизны в этой точке:

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}. \tag{10'}$$

§ 190. Главная нормаль кривой. Изучение кривизны пространственной кривой привело нас к новому вектору-производной:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2},$$

и нам удалось вычислить его модуль (10).

Переходим к исследованию направления вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$.

Воспользуемся тем, что переменный вектор τ меняет свое направление в зависимости от параметра s, но сохраняет неизменным модуль, равный выбранной единице длины, т. е. во всех точках кривой удовлетворяется соотношение:

$$\bar{\tau}^2 = 1.$$

Продифференцировав это равенство, согласно формуле V получим:

$$2\left(\bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right)=0.$$

Но скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда эти векторы взаимно перпендикулярны: $\frac{d\bar{\tau}}{ds} \perp \bar{\tau}$.

Таким образом, вектор-производная орта касательной перпендикулярен к касательной прямой, а следовательно, имеет направление одной из нормалей пространственной кривой.

Та нормаль, по которой направлен вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, *называется* **главной нормалью** *кривой; орт главной нормали обозначим через* $\bar{\nu}$.

Учитывая, что $\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|=K=\frac{1}{\rho}$ и $\frac{d\bar{\tau}}{ds} \parallel \bar{\nu}$, имеем:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=K\cdot\bar{\nu}=\frac{\bar{\nu}}{\rho}. \tag{11}$$

Покажем, что главная нормаль кривой в данной точке M лежит в соприкасающейся плоскости (см. § 181), проведенной в этой точке.

С этой целью проследим (рис. 211), как геометрически получается производная $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$. К точке M отнесены два вектора: орт касательной в данной точке $\overline{MT_1}=\tau(s)$ и вектор $\overline{MT_2}$, равный орту касательной в точке M':

$$\overline{MT_2}=\bar{\tau}(s+\Delta s).$$

Из построения следует, что

$$\overline{T_1T_2}=\Delta\bar{\tau}.$$

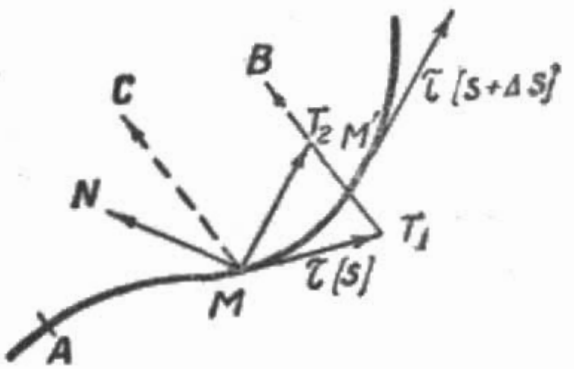


Рис. 211

Разделив этот последний вектор на скаляр Δs, получим вектор $\overline{T_1B}=\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}$ того же направления, что и $\Delta\bar{\tau}$.

Таким образом, вектор $\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}=\overline{T_1B}$ и равный ему вектор $\overline{MC}$, проведенный из точки M, лежат в плоскости треугольника MT_1T_2, т. е. в плоскости, проходящей через касательную прямую в точке M параллельно касательной в точке M'. Когда $M'\to M$, эта плоскость вращается вокруг касательной MT_1 и в пределе стре-

мится совпасть с соприкасающейся плоскостью (см. § 181). Но переменный вектор $\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}=\overline{T_1B}=\overline{MC}$ все время лежит в этой вращающейся плоскости, а потому предельный вектор:

$$\overline{MN}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}=\frac{d\bar{\tau}}{ds}$$

лежит в предельной, т. е. в соприкасающейся плоскости.

Раньше мы видели, что вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, отнесенный к точке M, направлен по главной нормали кривой, теперь мы убедились, что он лежит в соприкасающейся плоскости. Другими словами, главной нормалью пространственной кривой называется та нормаль, которая лежит в соприкасающейся плоскости.

§ 191. Основной трехгранник. С каждой точкой M пространственной кривой:

$$\bar{r}=\bar{r}(s)$$

можно связать три взаимно перпендикулярные направления — главные направления. Два из них определены ортом касательной $\bar{\tau}$, направленным в сторону возрастания параметра s, и ортом главной нормали $\bar{\nu}$, направленным в ту сторону, в которую поворачивается касательная при движении точки M по кривой в ее положительном направлении (рис. 212), т. е. в сторону вогнутости кривой. Через эти два орта проходит соприкасающаяся плоскость. Третье главное направление должно быть перпендикулярно к первым двум, т. е. перпендикулярно к соприкасающейся плоскости. Прямая, проведенная через точку M перпендикулярно к соприкасающейся плоскости, служит тоже нормалью к кривой. Эта вторая замечательная нормаль называется **бинормалью**. Для определения положительного направления из бинормали выбираем ее орт $\bar{\beta}$ так, чтобы $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ составили правую тройку векторов, другими словами, $\bar{\beta}$ расположено относительно

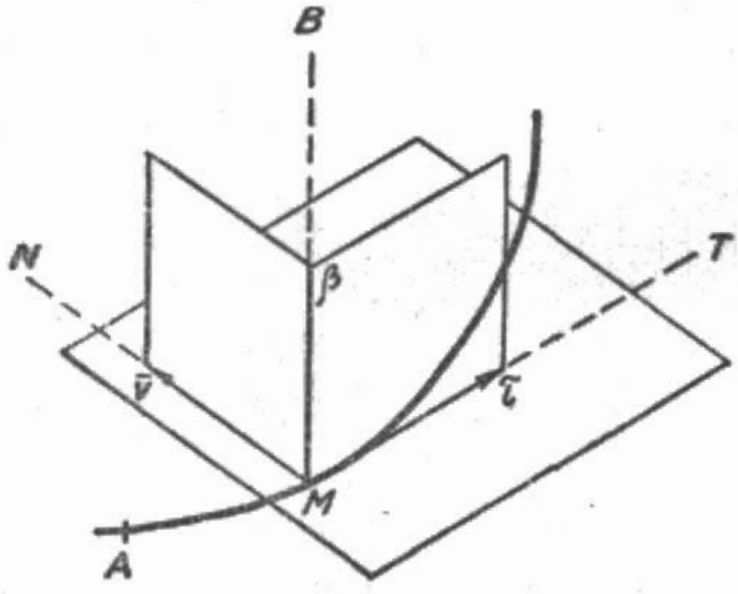


Рис. 212

$\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$, как ось z относительно x и y. Можно было бы определить орт $\bar{\beta}$ как векторное произведение ортов касательной и главной нормали:

$$\bar{\beta}=[\bar{\tau}, \bar{\nu}]. \tag{12}$$

Плоскость, проходящая через обе нормали, перпендикулярна к касательной и, следовательно, является нормальной плоскостью к кривой. Наконец, можно еще провести плоскость через касательную и бинормаль; эта последняя плоскость называется спрямляющей плоскостью кривой (рис. 212).

Три взаимно перпендикулярные плоскости — соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая — составляют основной трехгранник кривой; ребрами этого трехгранника служат касательная, главная нормаль и бинормаль. По мере того как точка M движется по кривой, главные направления меняются, весь трехгранник перемещается в пространстве, причем вершина его M скользит по кривой и взаимное расположение его элементов сохраняется неизменным. Основной трехгранник, сопровождающий точку M при ее движении по кривой, служит естественной подвижной системой координат, связанной с этой кривой.

Составим уравнения всех граней и ребер основного трехгранника. Это сделать особенно легко, пользуясь векторными обозначениями.

Напомним, что плоскость, проходящая через точку $M(\bar{r})$ перпендикулярно вектору $\bar{a}$, изображается уравнением:

$$(\bar{R}-\bar{r}, \bar{a})=0\ ^{1},$$

где R — текущий радиус-вектор, т. е. радиус-вектор любой точки N рассматриваемой плоскости.

---

[1] Приведенное уравнение показывает, что вектор $\bar{R}-\bar{r}$, соединяющий данную точку M с любой точкой N изучаемого геометрического места, перпендикулярен к данному вектору $\bar{a}$, т. е. все точки $N(\bar{R})$ лежат в плоскости, проходящей через $M(\bar{r})$ перпендикулярно к $\bar{a}$ (рис. 213).

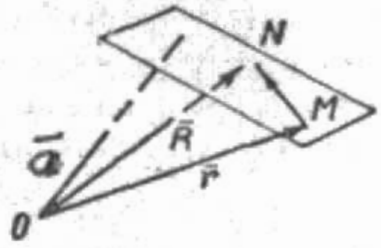


Рис. 213

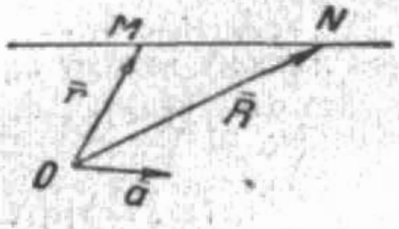


Рис. 214

Так как все основные плоскости проходят через точку $\overline{M}(\bar{r})$ данной кривой и соответственно перпендикулярны ортам главных направлений, то их можно изобразить уравнениями:

соприкасающаяся плоскость $(\bar{R}-\bar{r}, \bar{\nu})=0$;

спрямляющая плоскость $(\bar{R}-\bar{r}, \bar{\beta})=0$;

нормальная плоскость $(\bar{R}-\bar{r}, \bar{\tau})=0$.

Для составления уравнений ребер трехгранника вспомним, что уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(\bar{r})$ параллельно данному вектору $\bar{a}$, отличается от вышеприведенного уравнения плоскости только тем, что в него входит не скалярное, а векторное произведение тех же сомножителей, т. е. уравнение такой прямой имеет вид:

$$[\bar{R}-\bar{r}, \bar{a}]=0$$

откуда получим:

уравнение касательной $[\bar{R}-\bar{r}, \bar{\tau}]=0$;

уравнение главной нормали $[\bar{R}-\bar{r}, \bar{\nu}]=0$;

уравнение бинормали $[\bar{R}-\bar{r}, \bar{\beta}]=0$.

Чтобы составить уравнения этих же элементов основного трехгранника, но в более употребительных координатных обозначениях, надо вычислить угловые коэффициенты основных ортов.

Принимая во внимание, что:

$$\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds} \text{ и } \bar{r}\{x, y, z\},$$

имеем:

$$\bar{\tau}=\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}. \tag{13}$$

Но координаты орта, т. е. его проекции на оси координат, являются вместе с тем и направляющими косинусами этого орта [2]:

$$\cos(\hat{\bar{i}\,\bar{\tau}})=\frac{dx}{ds}; \cos(\hat{\bar{j}\,\bar{\tau}})=\frac{dy}{ds}; \cos(\hat{\bar{k}\,\bar{\tau}})=\frac{dz}{ds}, \tag{13'}$$

---

[1] Уравнение $[\bar{R}-\bar{r}, \bar{a}]=0$ показывает, что вектор $\overline{MN}=\bar{R}-\bar{r}$ параллелен данному вектору $\bar{a}$; но так как через данную точку $M(\bar{r})$ можно провести только одну прямую, параллельную $\bar{a}$, то все точки $N(\bar{R})$ лежат на этой прямой (рис. 214).

[2] $\frac{dx}{ds}=\text{Пр}_{\bar{i}}\bar{\tau}=[\bar{\tau}]\cdot\cos(\hat{\bar{i}\,\bar{r}})=\cos(\hat{\bar{i}\,\bar{r}})$ и т. д.

поэтому касательная прямая изображается уравнениями:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}},$$

а уравнение нормальной плоскости будет:

$$\frac{dx}{ds}(X-x)+\frac{dy}{ds}(Y-y)+\frac{dz}{ds}(Z-z)=0.$$

Чтобы определить угловые коэффициенты главной нормали, вспомним, что:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\frac{\bar{\nu}}{\rho},\ \text{откуда}\ \bar{\nu}=\rho\cdot\frac{d^2\bar{r}}{ds^2},$$

а так как:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left\{\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}\right\},$$

то:

$$\bar{\nu}\left\{\rho\frac{d^2x}{ds^2},\ \rho\frac{d^2y}{ds^2},\ \rho\frac{d^2z}{ds^2}\right\}, \tag{14}$$

и, следовательно:

$$\cos(\hat{\bar{i}\,\bar{\nu}})=\rho\frac{d^2x}{ds^2};\ \cos(\hat{\bar{j}\,\bar{\nu}})=\rho\cdot\frac{d^2y}{ds^2};\ \cos(\hat{\bar{k}\,\bar{\nu}})=\rho\cdot\frac{d^2z}{ds^2},$$

или в качестве угловых коэффициентов главной нормали можно взять производные второго порядка координат по дуге:

$$l_1:m:n_1=\cos(\hat{\bar{i}\,\bar{\nu}}):\cos(\hat{\bar{j}\,\bar{\nu}}):\cos(\hat{\bar{k}\,\bar{\nu}})=\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2}; \tag{14'}$$

уравнения главной нормали примут вид:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{Y-y}{\frac{d^2y}{ds^2}}=\frac{Z-z}{\frac{d^2z}{ds^2}},$$

а спрямляющая плоскость, перпендикулярная к главной нормали, изобразится уравнением:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0.$$

Осталось вычислить угловые коэффициенты бинормали. Воспользуемся ранее данным определением орта бинормали:

$$\bar{\beta}=[\bar{\tau},\ \bar{\nu}],$$

причем: $\bar{\tau}\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}$ и $\bar{\nu}\left\{\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \rho\frac{d^2z}{ds^2}\right\}$

и, следовательно [1]:

$$\bar{\beta}\left\{\rho\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}; \rho\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}; \rho\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}\right\}. \tag{15}$$

Таким образом, угловые коэффициенты бинормали будут:

$$l_2 : m_2 : n_2 = \begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}, \tag{15'}$$

и бинормаль изобразится уравнениями:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}},$$

а уравнение соприкасающейся плоскости, перпендикулярной к бинормали, примет вид:

$$\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}(X-x) + \begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix}(Y-y) + \begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix}(Z-z) = 0.$$

§ 192. Кручение пространственной кривой. Формулы Френе. Мы видели, что пространственная кривая имеет кривизну, ничем не отличающуюся от кривизны плоской кривой:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

[1] Если даны координаты двух векторов $\bar{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, то координаты их векторного произведения $[\bar{a}, \bar{b}]$ равны детерминантам второго порядка, которые получаются из матрицы $\begin{Vmatrix}x_1 y_1 z_1\\ x_2 y_2 z_2\end{Vmatrix}$ последовательным вычеркиванием первого, второго и третьего столбца, причем у среднего детерминанта знак меняется на противоположный.

Кривизна кривой характеризует быстроту изменения ее направления или, иначе, быстроту отклонения кривой от прямой (от ее касательной).

Но пространственная кривая, не умещающаяся ни в какой плоскости, обладает еще второй кривизной — кручением, которое характеризует быстроту отклонения кривой от плоскости. Из всех плоскостей, проведенных через точку M пространственной кривой, теснее всех примыкает к кривой, вблизи данной точки, соприкасающаяся плоскость. Если мы возьмем на кривой две точки M и M' и проведем в них соответствующие соприкасающиеся плоскости, то эти две плоскости образуют между собой некоторый угол $\Delta\theta$ — угол кручения; и чем больше угол $\Delta\theta$ (при сохранении длин дуги MM'), тем быстрее отходит кривая от своей соприкасающейся плоскости, тем больше кручение.

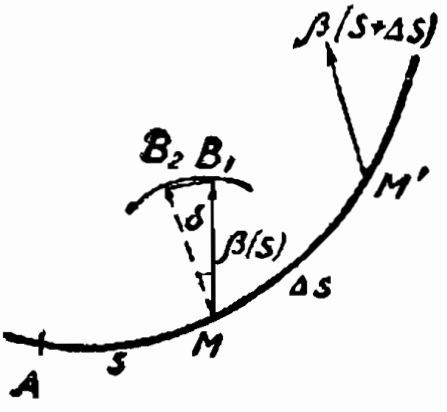


Рис. 215

Предел отношения угла кручения $\Delta\theta$ к длине соответствующей дуги MM', когда $M' \to M$ называется **кручением кривой** в точке M и обозначается буквой T:

$$T = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$ [1]

Заметим, что угол между двумя плоскостями измеряется углом между их нормалями, а потому угол кручения $\delta = \Delta\theta$ есть угол между бинормалями, проведенными в точках M и M' (рис. 215), т. е. между ортами $\bar{\beta}(s)$ и $\bar{\beta}(s+\Delta s)$. Чтобы построить угол кручения $\Delta\theta$, проведем в точке M не только орт соответствующей бинормали $\overline{MB_1} = \bar{\beta}(s)$, но и $\overline{MB_2} = \bar{\beta}(s+\Delta s)$. Вектор, соединяющий концы B_1 и B_2 этих двух ортов, будет:

$$\overline{B_1B_2} = \bar{\beta}(s+\Delta s) - \bar{\beta}(s) = \Delta\bar{\beta}.$$

Проведем через эти же две точки B_1 и B_2 дугу окружности, центр которой находится в точке M и радиус равен единице:

$$\smile B_1B_2 = \Delta\theta.$$

---

[1] Кручение всякой плоской кривой равно нулю, потому что соприкасающиеся плоскости, проведенные в различных точках такой кривой, сливаются и $\Delta\theta = 0$.

Пространственные кривые, точки которых не лежат в одной плоскости, в отличие от плоских кривых называются **кривыми двоякой кривизны**.

Теперь нетрудно вычислить кручение T:

$$T=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta\bar{\beta}|}\cdot\frac{|\Delta\bar{\beta}|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\smile B_1B_2}{|\overline{B_1B_2}|}\cdot\frac{|\Delta\bar{\beta}|}{\Delta s}=\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right|, \quad (16)$$

так как:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\smile B_1B_2}{|\overline{B_1B_2}|}=1.$$

Таким образом, кручение пространственной кривой в данной точке равно модулю вектора-производной орта бинормали по дуге.

Хотя мы уже определили координаты орта $\bar{\beta}$ (15), но их производные настолько сложны, что воспользоваться ими для вычисления кручения $T=\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right|$ не целесообразно.

Прежде чем искать выражения для кручения в координатных обозначениях, остановимся на более подробном исследовании того вектора $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$, с которым связана величина кручения.

Для определения направления вектора-производной $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ заметим, что $\bar{\beta}^2=1$, следовательно, $2\left(\bar{\beta},\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right)=0$, т. е. $\frac{d\bar{\beta}}{ds}\perp\bar{\beta}$. Поэтому, если мы отнесем вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ к точке M, то он будет лежать в соприкасающейся плоскости; но этим еще не вполне определяется его направление.

Для уточнения направления $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ примем во внимание, что:

$$\bar{\beta}=[\bar{\tau},\bar{\nu}],$$

откуда:

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=\frac{d[\bar{\tau},\bar{\nu}]}{ds}=\left[\frac{d\bar{\tau}}{ds},\bar{\nu}\right]+\left[\bar{\tau},\frac{d\bar{\nu}}{ds}\right]=\left[\frac{\bar{\nu}}{\rho},\bar{\nu}\right]+\left[\bar{\tau},\frac{\bar{d\nu}}{ds}\right]=\left[\bar{\tau},\frac{\bar{d\nu}}{ds}\right]^1.$$

Но векторное произведение двух векторов перпендикулярно к каждому из сомножителей, следовательно:

$$\frac{\bar{d\beta}}{ds}\perp\bar{\tau}.$$

Итак, вектор $\frac{\bar{d\beta}}{ds}$ лежит в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен к касательной, т. е. он лежит на главной нормали.

---

[1] $\left[\frac{\bar{\nu}}{\rho},\bar{\nu}\right]=0$, так как $\frac{\bar{\nu}}{\rho}\parallel\bar{\nu}$.

Сопоставляя два полученные результата:

$$\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right| = T \text{ и } \frac{d\bar{\beta}}{ds} = \pm\bar{\nu}\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right|,$$

имеем:

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \pm T\cdot\bar{\nu}.$$

Присутствие двух знаков в последней формуле объясняется тем, что вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$, будучи параллелен главной нормали, может иметь направление, совпадающее с направлением орта $\bar{\nu}$, или направление прямо противоположное. Это зависит от того, в каком направлении вращается бинормаль (а [illegible], и соприкасающаяся плоскость) при перемещении точки по кривой из M в M'.

Если же мы условимся приписывать [illegible] знак самому кручению, т. е. будем считать, что кручение T может быть как положительной, так и отрицательной величиной, то формула примет более простой вид:

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = T\cdot\bar{\nu},$$

или, введя в рассмотрение радиус кручения ρ_1, как величину обратную кручению, получим:

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = T\bar{\nu} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}. \tag{17}$$

Отметим, что мы теперь имеем простые выражения для производных двух основных ортов (11) и (17):

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho} \text{ и } \frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1},$$

где ρ — радиус кривизны, а ρ_1 — радиус кручения.

Дополним эти результаты выводом формулы производной орта $\bar{\nu}$.

Согласно определению $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ составляют правую тройку взаимно перпендикулярных ортов, а поэтому:

$$\bar{\nu} = [\bar{\beta}, \bar{\tau}],$$

и, дифференцируя это векторное произведение, получим:

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \frac{d[\bar{\beta}, \bar{\tau}]}{ds} = \left[\bar{\beta}, \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right] + \left[\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \bar{\tau}\right] = \left[\bar{\beta}, \frac{\bar{\nu}}{\rho}\right] + \left[\frac{\bar{\nu}}{\rho_1}, \bar{\tau}\right] =$$
$$= \frac{1}{\rho}[\bar{\beta}, \bar{\nu}] + \frac{1}{\rho_1}[\bar{\nu}, \bar{\tau}],$$

или, учитывая, что:

$$[\bar{\beta}, \bar{\nu}] = -[\bar{\nu}, \bar{\beta}] = -\bar{\tau} \text{ и } [\bar{\nu}, \bar{\tau}] = -[\bar{\tau}, \bar{\nu}] = -\bar{\beta},$$

можно придать последней формуле более простой вид:

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho} - \frac{\bar{\beta}}{\rho_1}.$$

Теперь окончательно получим так называемые формулы Френе для производных всех трех основных ортов пространственной кривой:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho} - \frac{\bar{\beta}}{\rho_1}; \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}. \tag{18}$$

Эти формулы обнаруживают тесную зависимость между законом изменения главных направлений пространственной кривой, ее кривизной и кручением[1].

Формулы Френе облегчают вывод формулы для вычисления кручения кривой.

---

[1] Мы дали формулы Френе в векторных обозначениях, но, спроектировав каждую из этих формул последовательно на три оси координат, мы получим девять формул Френе, выражающих производные направляющих косинусов каждого из главных направлений через направляющие косинусы двух других направлений и через радиусы кривизны и кручения пространственной кривой:

$$\frac{d\cos\alpha_1}{ds} = \frac{\cos\alpha_2}{\rho}; \quad \frac{d\cos\beta_1}{ds} = \frac{\cos\beta_2}{\rho}; \quad \frac{d\cos\gamma_1}{ds} = \frac{\cos\gamma_2}{\rho};$$

$$\frac{d\cos\alpha_2}{ds} = -\frac{\cos\alpha_1}{\rho} - \frac{\cos\alpha_3}{\rho_1}; \quad \frac{d\cos\beta_2}{ds} = -\frac{\cos\beta_1}{\rho} - \frac{\cos\beta_3}{\rho_1};$$

$$\frac{d\cos\gamma_2}{ds} = -\frac{\cos\gamma_1}{\rho} - \frac{\cos\gamma_3}{\rho_1};$$

$$\frac{d\cos\alpha_3}{ds} = \frac{\cos\alpha_2}{\rho_1}; \quad \frac{d\cos\beta_3}{ds} = \frac{\cos\beta_2}{\rho_1}; \quad \frac{d\cos\gamma_3}{ds} = \frac{\cos\gamma_2}{\rho_1},$$

где обозначения углов взяты из таблицы:

	x	y	z
$\bar{\tau}$	α_1	β_1	γ_1
$\bar{\nu}$	α_2	β_2	γ_2
$\bar{\beta}$	α_3	β_3	γ_3

Рассмотрим производную третьего порядка радиуса-вектора:

$$\bar{r}=\bar{r}(s),$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\bar{\nu}}{\rho}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\bar{\nu}+\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{\nu}}{ds},$$

или, воспользовавшись второй формулой Френе:

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\bar{\nu}-\frac{\bar{\tau}}{\rho^2}-\frac{\bar{\beta}}{\rho\cdot\rho_1}.$$

Таким образом, вектор-производная третьего порядка от радиуса-вектора оказался разложенным по трем главным направлениям.

Умножим все члены полученного равенства скалярно на вектор $\bar{\beta}$ и учтем, что:

$$(\bar{\nu},\ \bar{\beta})=0;\ (\bar{\tau},\ \bar{\beta})=0\ \text{ и }\ (\bar{\beta},\ \bar{\beta})=1.$$

Тогда будем иметь:

$$\left(\frac{d^3\bar{r}}{ds^3},\ \bar{\beta}\right)=-\frac{1}{\rho\rho_1},$$

откуда определяем кручение $T=\frac{1}{\rho_1}$:

$$T=-\rho\left(\bar{\beta},\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)=-\rho\left(\left[\bar{\tau},\ \bar{\nu}\right],\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)=$$

$$=-\rho\left(\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\ \rho\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right],\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)=-\rho^2\left(\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right]\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right).$$

Смешанное произведение трех векторов $\left(\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right],\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)$ равно детерминанту третьего порядка, составленному из координат векторов-сомножителей, и так как:

$$\frac{d\bar{r}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right\};\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left\{\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}\right\}\ \text{и}\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\left\{\frac{d^3x}{ds^3},\ \frac{d^3y}{ds^3},\ \frac{d^3z}{ds^3}\right\},$$

то:

$$\left(\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right]\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)=\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3}\end{vmatrix}.$$

Кроме того, мы имели (10′):

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

и теперь можно получить окончательную формулу для кручения кривой в координатных обозначениях:

$$T = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \qquad (19)$$

Надо помнить, что во всех полученных соотношениях производные берутся по дуге; если же другая величина будет выбрана за переменный параметр в параметрических уравнениях кривой, — все формулы окажутся значительно сложнее.

Пример 1. Вычислить угловые коэффициенты главных направлений, кривизну и кручение в любой точке $M(x, y, z)$ винтовой линии:

$$x = a \cdot \cos(q \cdot s),\ y = a \cdot \sin(q \cdot s),\ z = s \cdot \cos\alpha\ ^1.$$

Решение.

Вычислим производные первых трех порядков всех координат по дуге;

$$\frac{dx}{ds} = -aq \cdot \sin(qs) = -qy; \quad \frac{dy}{ds} = aq \cdot \cos(qs) = q \cdot x; \quad \frac{dz}{ds} = \cos\alpha;$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -aq^2 \cos(qs) = -q^2x; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -aq^2 \sin(qs) = -q^2y; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -aq^3 \sin(qs) = q^3y; \quad \frac{d^3y}{ds^3} = -aq^3 \cos(qs) = -q^3x; \quad \frac{d^3z}{ds^3} = 0.$$

Пользуясь формулами (13′), (14′) и (15′), составляем таблицу угловых коэффициентов главных направлений:

	l	m	n
$\overline{\tau}$	$-qy$	qx	$\cos\alpha$
$\overline{\nu}$	x	y	0
$\overline{\beta}$	$-y\cos\alpha$	$x\cos\alpha$	$-a^2q$

[1] Эти уравнения винтовой линии могут быть получены из уравнений $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = a\operatorname{ctg}\alpha \cdot t$, приведенных в § 184, если параметр $t = \angle AOM_1$ (черт. 199) выразить через дугу $s = \smile AM = A'M'$. Нужное соотношение просто получается из треугольника $A'M'M_1'$ (черт. 200), а именно $A'M_1' = A'M' \cdot \sin\alpha$ или $\alpha \cdot t = s \cdot \sin\alpha$, откуда $t = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot s$. При замене параметра t в первых двух уравнениях винтовой линии введено обозначение $\frac{\sin\alpha}{a} = q$ и, следовательно, $t = q \cdot s$.

Кривизну K вычисляем по формуле (10):

$$K=\sqrt{q^4(x^2+y^2)}=a\cdot q^2.$$

Для нахождения кручения T вычисляем предварительно детерминант третьего порядка, входящий в (19):

$$D=-a^2q^5\begin{vmatrix}-aq\sin(qs) & aq\cos(qs)\cos\alpha\\ \cos(qs) & \sin(qs)\ \ 0\\ \sin(qs) & -\cos(qs)\ \ 0\end{vmatrix}=+a^2q^5\cdot\cos\alpha,$$

$$T=-\frac{D}{K^2}=-\frac{a^2q^5\cos\alpha}{a^2q^4}=-q\cos\alpha.$$

Обратим внимание на характерное свойство винтовой линии: кривизна и кручение винтовой линии являются постоянными величинами.

Пример 2. Вычислить радиус кривизны и радиус кручения в любой точке кривой:

$$x=\frac{1}{2}\sin^2 t,\ y=\frac{1}{2}(t+\sin t\cdot\cos t),\ z=\sin t.$$

Решение. Геометрическое значение параметра t нам неизвестно, поэтому начнем с вычисления: $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$,

$$\frac{dx}{dt}=\sin t\cdot\cos t;\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(1+\cos^2 t-\sin^2 t)=\cos^2 t;\quad \frac{dz}{dt}=\cos t,$$

$$\frac{ds}{dt}=\cos t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}\cdot\cos t,$$

так как $\frac{ds}{dt}\neq 1$, t не является дугой кривой и, следовательно, при вычислении производных координат по дуге надо пользоваться правилом дифференцирования сложных функций, учитывая, что $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\cos t}$:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{\sin t}{\sqrt{2}};\quad \frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\cos t}{\sqrt{2}};\quad \frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{2};\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg} t;\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0;$$

$$\frac{d^3x}{ds^3}=0;\quad \frac{d^3y}{ds^3}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\right)\frac{dt}{ds}=-\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^3 t};\quad \frac{d^3z}{ds^3}=0;$$

$$K=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 t}=\frac{1}{2}\sec t;\ \rho=2\cos t,$$

$$D=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix}\sin t & \cos t & 1\\ 1 & -\operatorname{tg} t & 0\\ 0 & \frac{1}{\cos^3 t} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{8\cos^3 t};\quad T=-\rho^2 D=\frac{1}{2\cos t};$$

$$\rho_1=2\cos t.$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить дифференциал дуги кривой:

$$x = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t,\quad z = 4\sin\frac{t}{2}$$

и составить уравнения ее главной нормали при $t = t_0$.

Отв. $ds = 2dt;\ \dfrac{X - x_0}{\sin t_0} = \dfrac{Y - y_0}{\cos t_0} = \dfrac{Z - z_0}{-\sin\dfrac{t_0}{2}}$.

2. Вычислить кривизну кривой:

$$x = \frac{t^4}{4},\quad y = \frac{t^3}{3},\quad z = \frac{t^2}{2}$$

в точке, где $t = 1$.

Отв. $K = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Составить уравнения граней основного трехгранника кривой:

$$x = \frac{t}{\sqrt{2}},\ y = \frac{t}{\sqrt{2}},\ z = \ln\sin t$$

в точке, где $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Отв. $x - y = 0;\ z = 0;\ x + y = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4. Вычислить кривизну и кручение в любой точке кривой:

$$x = t,\ y = a,\ z = \ln(\cos t)$$

и составить уравнения главных плоскостей в точке, где $t = 0$.

Отв. $K = \cos t,\ T = 0;\ y = a;\ z = 0;\ x = 0$.

5. Составить уравнения ребер основного трехгранника кривой:

$$x = \frac{1}{2}\sin^2 t;\quad y = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t);\quad z = \sin t$$

в точке, где $t = t_0$.

Отв. $\dfrac{X - x_0}{\sin t_0} = \dfrac{Y - y_0}{\cos t_0} = \dfrac{Z - z_0}{1};\quad \dfrac{X - x_0}{\cos t_0} = \dfrac{Y - y_0}{-\sin t_0} = \dfrac{Z - z_0}{0};$

$$\frac{X - x_0}{\sin t_0} = \frac{Y - y_0}{\cos t_0} = \frac{Z - z_0}{-1}.$$

6. Вычислить кривизну в любой точке кривой:

$$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}.$$

Отв. $K = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$.

7. Вычислить кручение в любой точке кривой:

$$x = e^t\sin t,\quad y = e^t\cos t,\quad z = e^t.$$

Отв. $T = \dfrac{1}{3e^t}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Формулы элементарной алгебры и геометрии. Для удобства учащихся мы даем следующий список элементарных формул. Начинаем с *алгебры*.

(1) Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ решается по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Природа корней зависит только от выражения $\Delta=b^2-4ac$, стоящего под радикалом и называемого *дискриминантом*. Если $\Delta>0$, корни действительные и различные; если $\Delta=0$, корни действительные и равные; если $\Delta<0$, корни мнимые.

(2) Логарифмы

$$\lg(ab)=\lg a+\lg b;\quad \lg a^n=n\lg a;\quad \lg 1=0;$$

$$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b;\quad \lg\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\lg a;\quad \lg_a a=1.$$

(3) Бином Ньютона (n целое положительное)

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n.$$

(4) Факториал $n!=1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\cdot n$.

В следующих формулах *элементарной геометрии* буквы r или R обозначают радиус, h — высоту, S — площадь основания и l — образующую.

(5) Круг. Длина окружности $=2\pi r$; площадь $=\pi r^2$.

(6) Круговой сектор. Площадь $=\dfrac{1}{2}r^2\alpha$, где α — центральный угол сектора, измеренный в радианах.

(7) Призма. Объем $=Sh$.

(8) Пирамида. Объем $=\dfrac{1}{3}Sh$.

(9) Прямой круглый цилиндр. Объем $=\pi r^2h$; боковая поверхность $=2\pi rh$; полная поверхность $=2\pi r(r+h)$.

(10) Прямой круглый конус. Объем $=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$; боковая поверхность $=\pi rl$; полная поверхность $=\pi r(r+l)$.

(11) Шар. Объем $=\dfrac{4}{3}\pi r^3$; поверхность $=4\pi r^2$.

(12) Усеченный прямой круглый конус.

Объем $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$; боковая поверхность $= \pi l(R + r)$.

2. Формулы тригонометрии. Многие из следующих формул оказываются полезными:

(1) Измерение углов. Приняты два способа измерять величины углов; в основу их положены две различные единицы измерения.

Градусное измерение. За единицу угла принимается $\frac{1}{360}$ полного оборота; эта единица называется *градусом.*

Радианное измерение. За единицу угла принимается центральный угол, вырезывающий из окружности дугу, длина которой равна ее радиусу; эта единица называется *радианом.*

Основное соотношение между двумя этими единицами измерения дается уравнением

$$180 \text{ } \textit{градусов} = \pi \text{ } \textit{радианов},$$

где $\pi = 3{,}14159\ldots$ Из него мы получаем:

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} = 0{,}0174 \ldots \text{ радиана}$$

и

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} \text{ градусов} = 57{,}29 \ldots \text{ градусов}.$$

Из определения радиана следует, что *число радианов в угле* $= \frac{\textit{вырезанной дуге}}{\textit{радиус}}$.

Эти уравнения позволяют нам переходить от одного способа измерения к другому.

(2) Соотношения между тригонометрическими функциями

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};\quad \operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x};\quad \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sc}^2 x;\quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x.$$

(3) Формулы приведения углов

Угол	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

(4) Функции от $x+y$ и от $x-y$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};\quad \operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

(5) Функции от $2x$ и от $\frac{x}{2}$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \cos 2x=\cos^2x-\sin^2x;\quad \operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x};$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$$

$$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x;\qquad \cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

(6) Теоремы сложения

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

(7) Соотношения для косоугольного треугольника

Закон синусов $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

Закон косинуса $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Формулы для площади $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$S=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)},$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{где}\ p=\frac{a+b+c}{2}.$$

3. Формулы аналитической геометрии на плоскости. Самые важные формулы содержатся в следующем списке:

(1) Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Тангенс наклона отрезка M_1M_2: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\varphi$.

Середина отрезка $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

(2) Угол между двумя прямыми

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

для параллельных прямых: $k_1 = k_2$; для перпендикулярных прямых: $k_1 k_2 = -1$.

(3) Различные формы уравнения прямой

Уравнение прямой пучка: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(4) Расстояние точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(5) Соотношения между прямоугольными и полярными координатами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi;\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

(6) Уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Центр (a, b).

(7) Уравнение параболы

Уравнение с вершиной в начале:

$$y^2 = 2px,\ \text{фокус}\ \left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

$$x^2 = 2py,\ \text{фокус}\ \left(0, \frac{p}{2}\right).$$

Уравнение с вершиной в точке (a, b):

$$(y - b)^2 = 2p(x - a),\ \text{ось}\ y = b,$$

$$(x - a)^2 = 2p(y - b),\ \text{ось}\ x = a.$$

Уравнение с осью, совпадающей с осью OY:

$$y = Ax^2 + C.$$

(8) Уравнения других кривых

Эллипс с центром в начале и с фокусами на оси OX:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола с центром в начале и с фокусами на оси OX:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Равносторонняя (равнобокая) гипербола с центром в начале и с осями координат как ее асимптотами

$$xy = m.$$

4. Формулы аналитической геометрии в пространстве. Некоторые из наиболее важных формул таковы:

(1) Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

(2) Прямая.
Направляющие косинусы: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.
Направляющие коэффициенты: m, n, p.
Для них

$$\frac{\cos\alpha}{m} = \frac{\cos\beta}{n} = \frac{\cos\gamma}{p},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Для прямой, проведенной через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos\gamma}{z_2 - z_1}.$$

(3) Две прямые.
Направляющие косинусы: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$.
Направляющие коэффициенты: m, n, p; m', n', p'.
Если θ есть угол между прямыми, то

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

$$\cos\theta = \frac{mm' + nn' + pp'}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}}.$$

Условие параллельности: $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}$.

Условие перпендикулярности: $mm' + nn' + pp' = 0$.

(4) Уравнение прямой с направляющими коэффициентами m, n, p, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

(5) Плоскость. Для плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C суть направляющие коэффициенты перпендикуляра к плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через (x_1, y_1, z_1) *и перпендикулярной к прямой с направляющими коэффициентами* A, B, C:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

(6) Две плоскости.
Уравнения:

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A'x+B'y+C'z+D'&=0. \end{aligned}$$

Направляющие коэффициенты их линии пересечения:

$$BC'-CB',\ CA'-AC',\ AB'-BA'.$$

Если θ — угол между двумя плоскостями, тогда

$$\cos\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

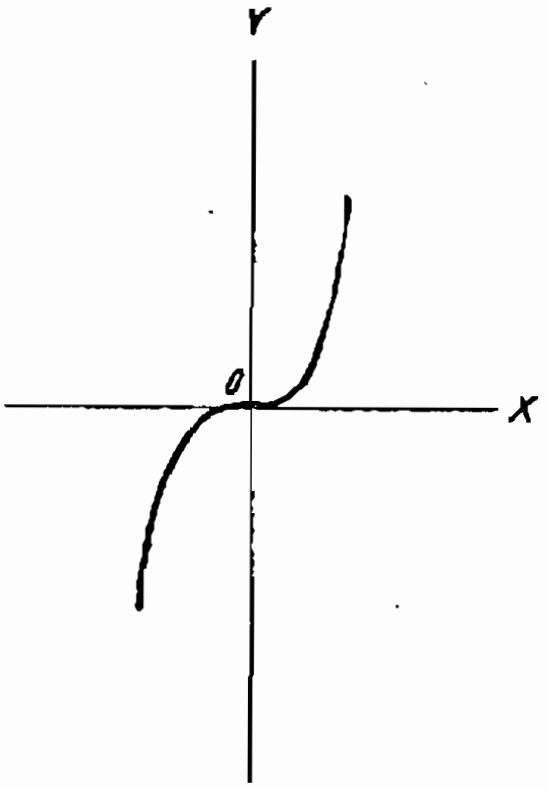
§ 5. Греческий алфавит

Буквы	Названия	Буквы	Названия
A α	Альфа	N ν	Ни
B β	Бета	Ξ ξ	Кси
Γ γ	Гамма	O o	Омикрон
Δ δ	Дельта	Π π	Пи
E ε	Эпсилон	P ρ	Ро
Z ζ	Дзета	Σ σ ς	Сигма
H η	Эта	T τ	Тау
Θ θ	Тета	Υ υ	Ипсилон
I ι	Иота	Φ φ	Фи
K $\varkappa$	Каппа	X χ	Хи
Λ λ	Лямбда	Ψ ϕ	Пси
M μ	Ми	Ω ω	Омега

КРИВЫЕ ДЛЯ СПРАВОК

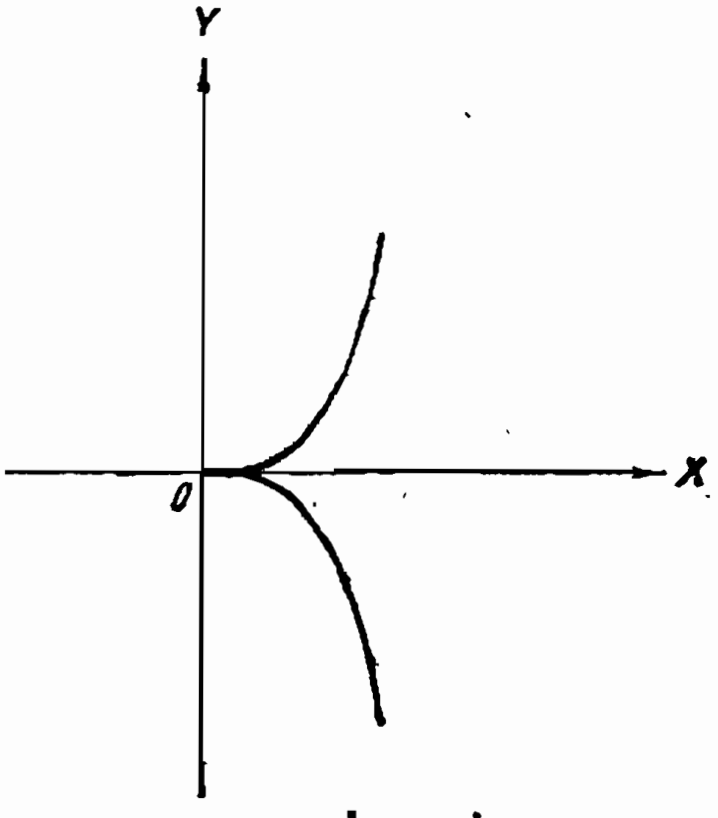
Для удобства учащегося здесь собрано некоторое число наиболее известных кривых, встречающихся в тексте.

Рис. I. Кубическая парабола.



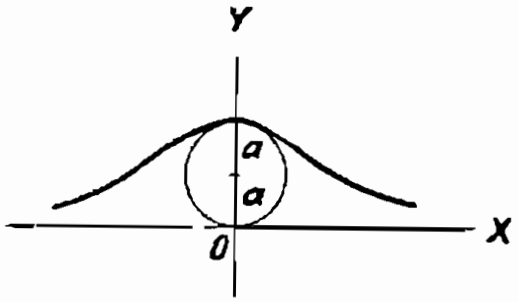
$y = ax^3$.

Рис. II. Полукубическая парабола.



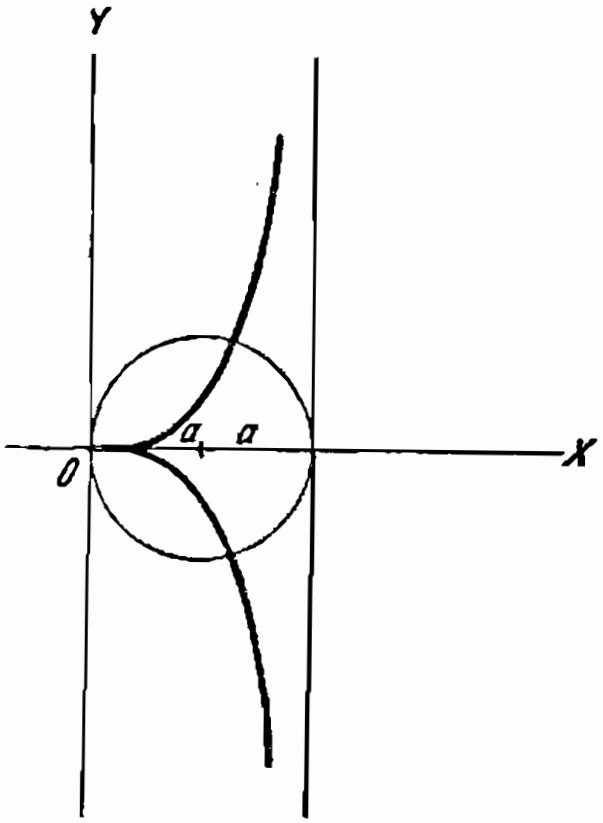
$y^2 = ax^3$.

Рис. III. Локон Аньези.



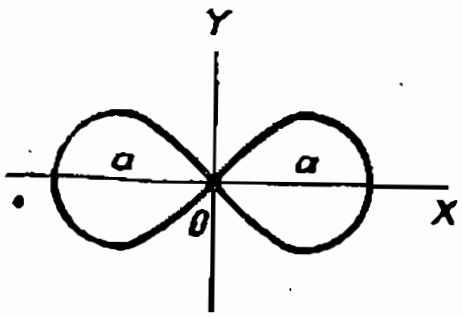
$$x^2y = 4a^2(2a - y).$$

Рис. IV.
Циссоида Диоклеса.



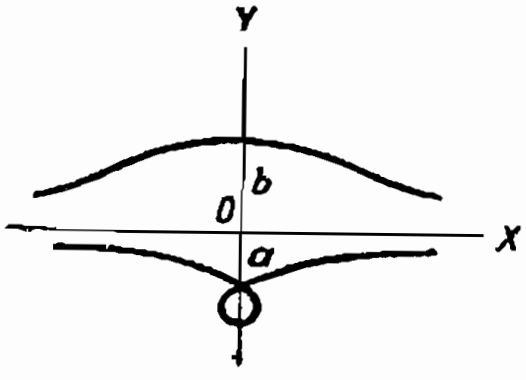
$$y^2(2a - x) = x^3.$$

Рис. V. Лемниската Бернулли.



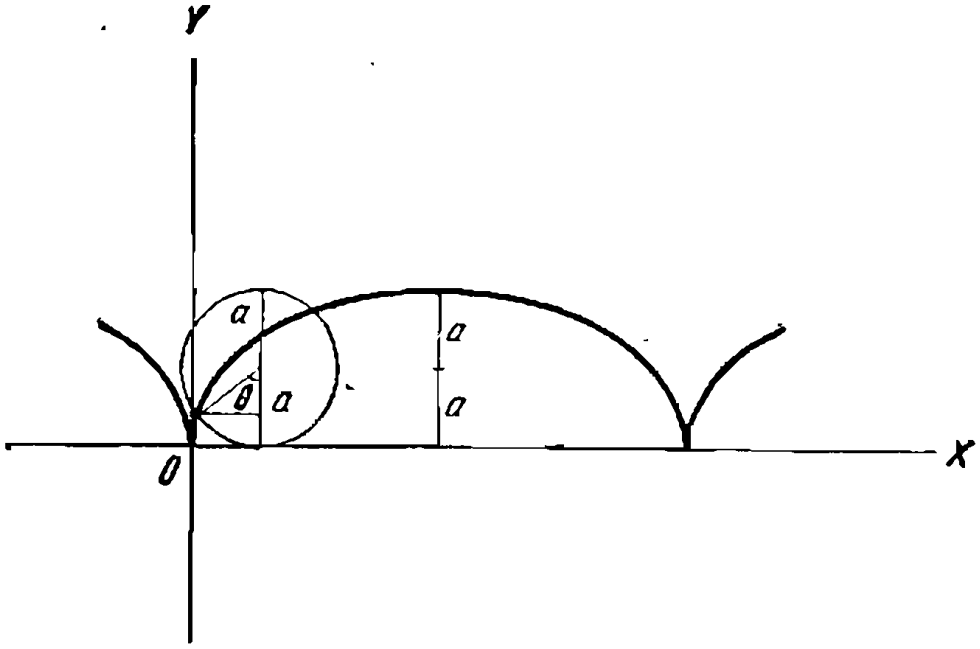
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Рис. VI. Конхоида Никомеда.



$$x^2y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2),$$
$$\rho = a \csc\theta + b.$$

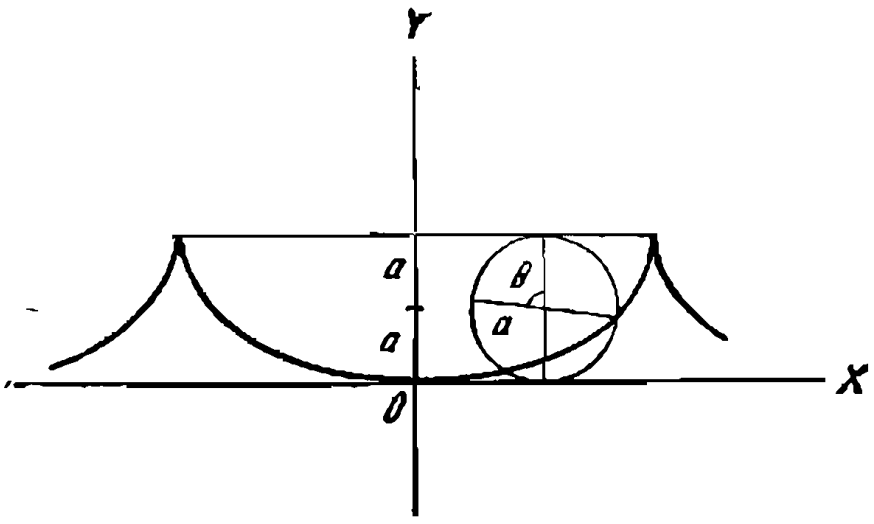
Рис. VII. Циклоида обыкновенная.



$$x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

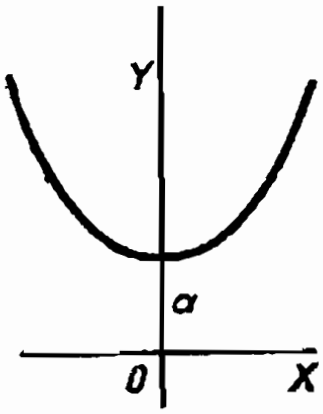
Рис. VIII. Циклоида с вершиной в начале.



$$x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2}$$

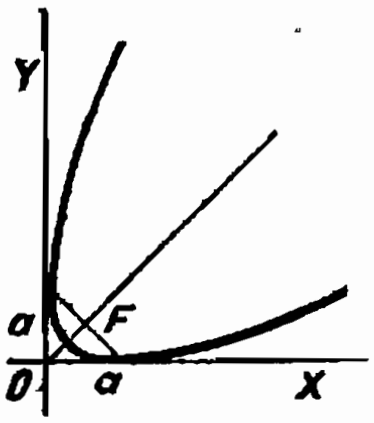
$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

Рис. IX. Цепная линия.



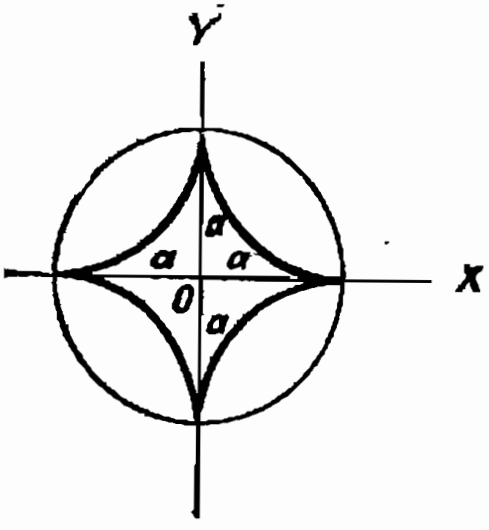
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Рис. X. Парабола.



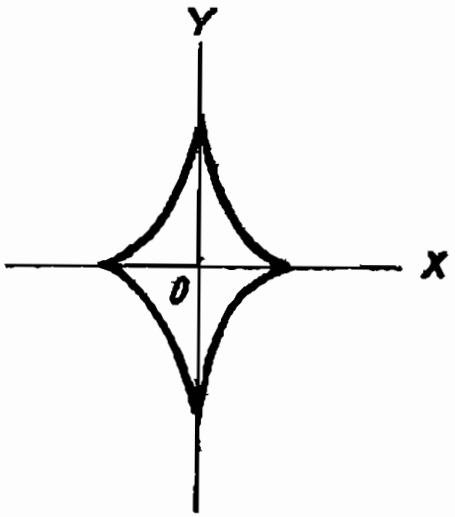
$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Рис. XI. Гипоциклоида с 4 остриями.



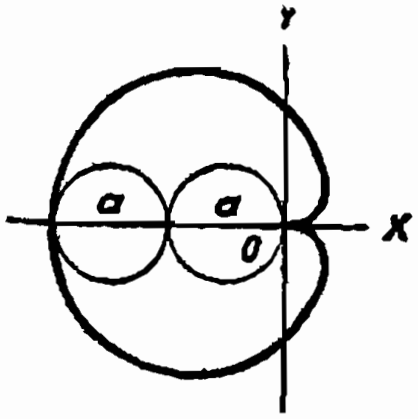
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta. \end{cases}$$

Рис. XII. Эволюта эллипса.



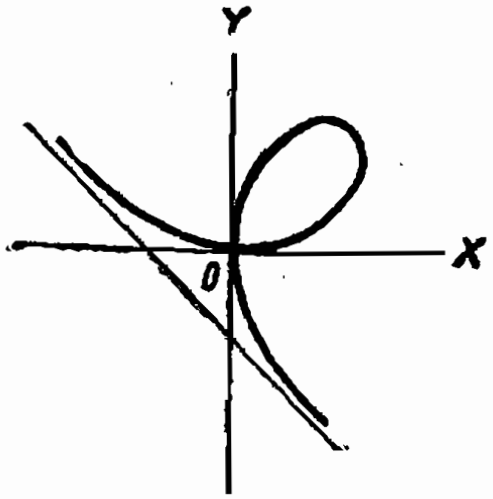
$$(ax)^{\frac{2}{3}} + by^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Рис. XIII. Кардиоида.



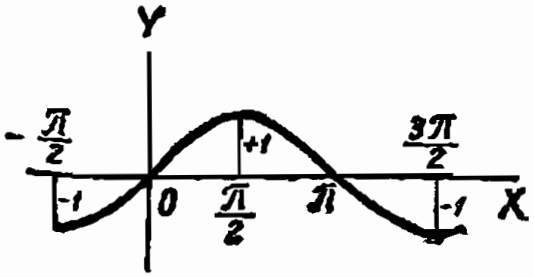
$$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\rho=a(1-\cos\theta).$$

Рис. XIV. Декартов лист.



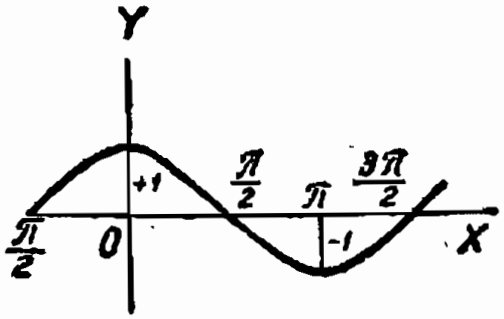
$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Рис. XV. Синусоида.



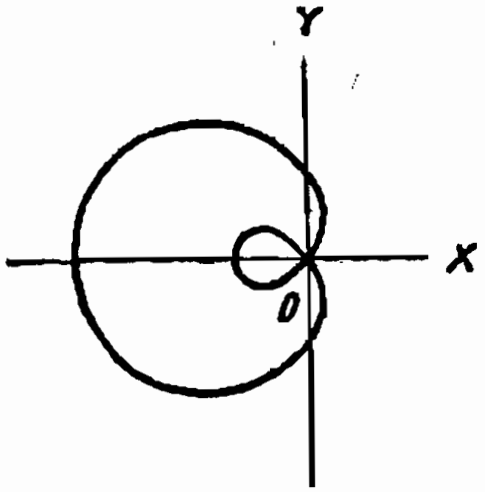
$$y=\sin x.$$

Рис. XVI. Косинусоида.



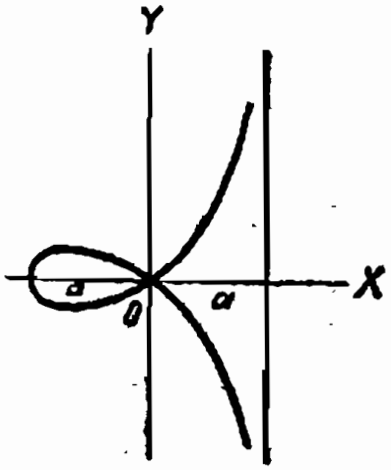
$$y=\cos x.$$

Рис. XVII. Улитка Паскаля.



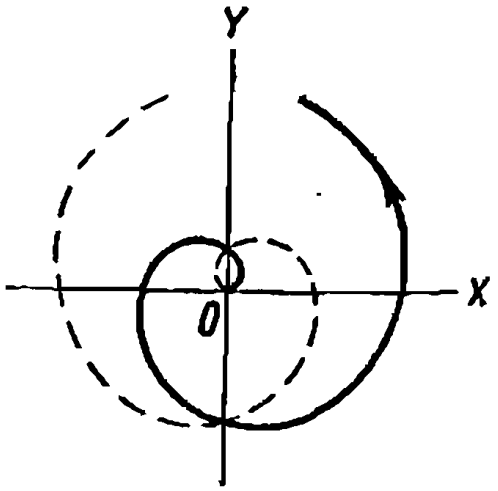
$$\rho=b-a\cos\theta.$$

Рис. XVIII. Строфоида.



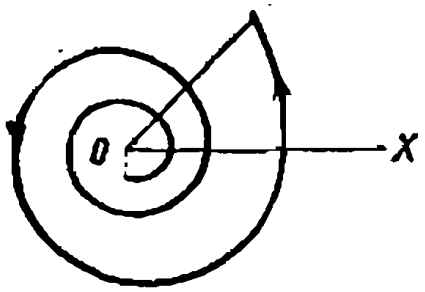
$$y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}.$$

Рис. XIX. Спираль Архимеда.



$\rho = a\theta.$

Рис. XX. Логарифмическая спираль.

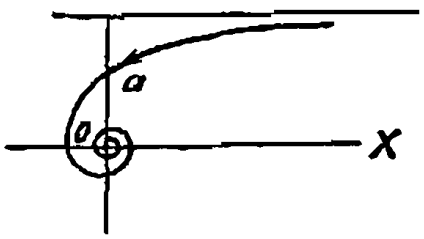


$\rho = e^{a\theta}$

или

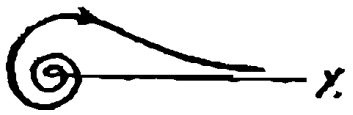
$\ln \rho = a\theta.$

Рис. XXI. Гиперболическая спираль.



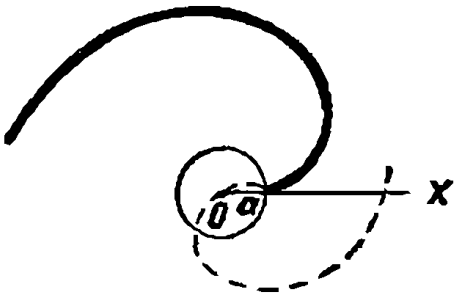
$\rho\theta = a.$

Рис. XXII. Жезл.



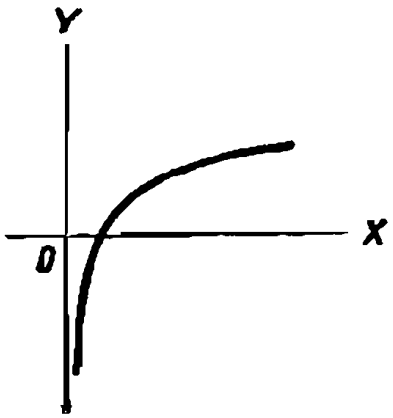
$\rho^2\theta = a^2.$

Рис. XXIII. Параболическая спираль.



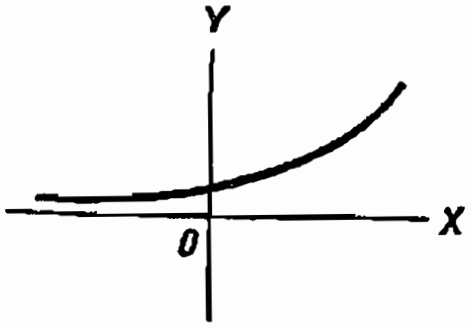
$(\rho - a)^2 = 4ac\theta.$

Рис. XXIV. Логарифмическая кривая.



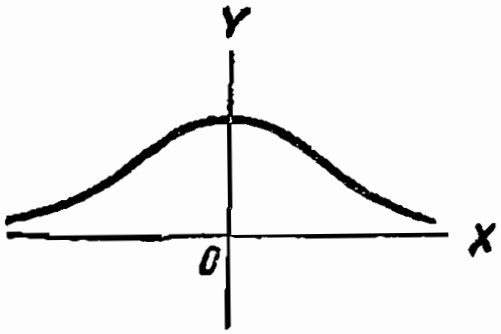
$y = \ln x.$

Рис. XXV. Показательная кривая.



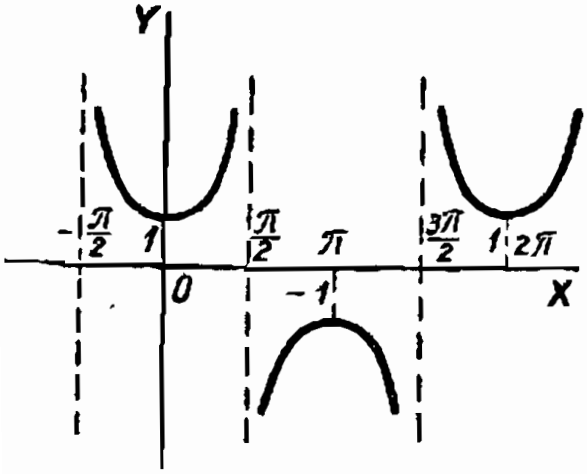
$y = e^x$.

Рис. XXVI. Кривая вероятности.



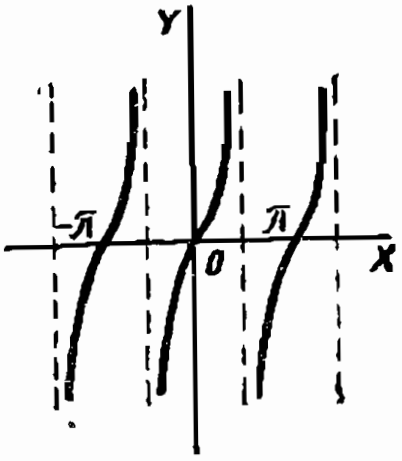
$y = e^{-x^2}$.

Рис. XXVII. Кривая секанса.



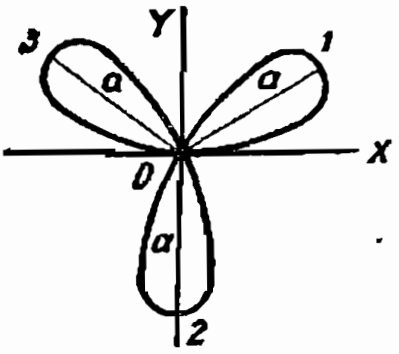
$y = \sec x$.

Рис. XXVIII. Тангенсоида.



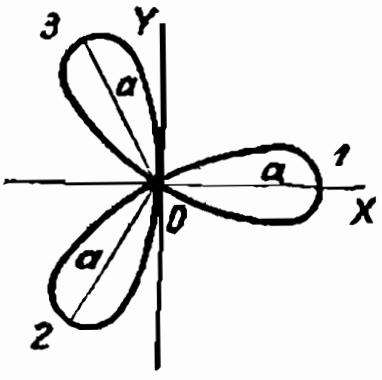
$y = \operatorname{tg} x$.

Рис. XXIX. Трехлепестковая роза.



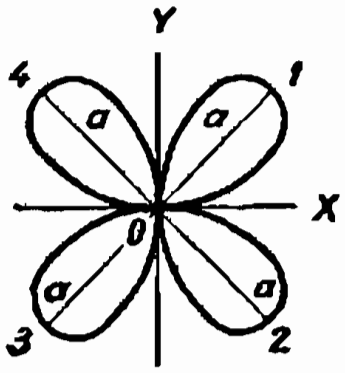
$\rho = a \sin 3\theta$.

Рис. XXX. Трехлепестковая роза.



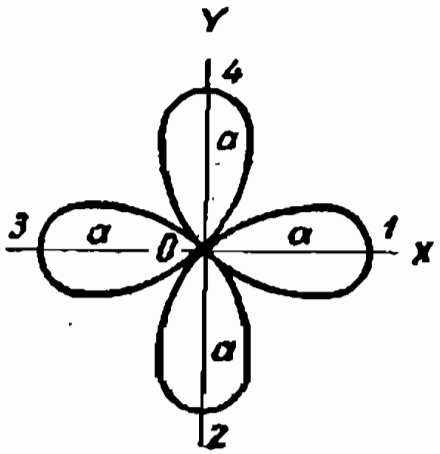
$\rho = a \cos 3\theta$.

Рис. XXXI. Четырехлепестковая роза.



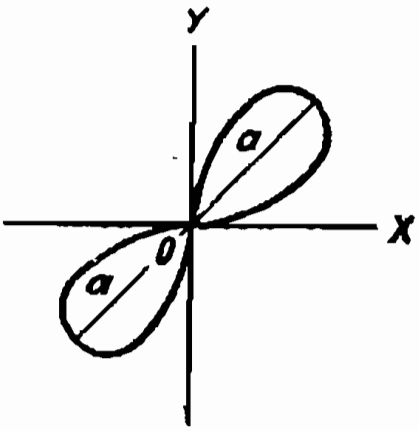
$\rho = a \sin 2\theta.$

Рис. XXXII. Четырехлепестковая роза.



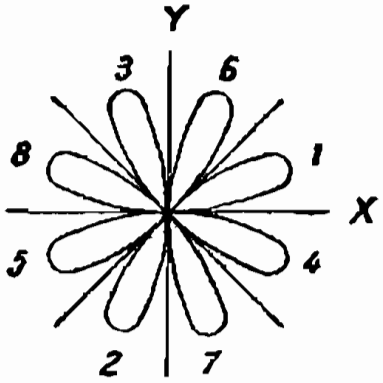
$\rho = a \cos 2\theta.$

Рис. XXXIII. Двухлепестковая роза. Лемниската.



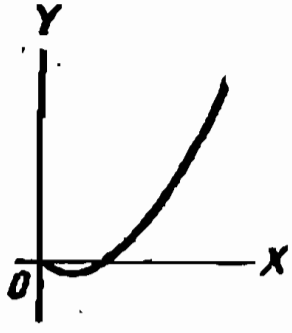
$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta.$

Рис. XXXIV. Восьмилепестковая роза.



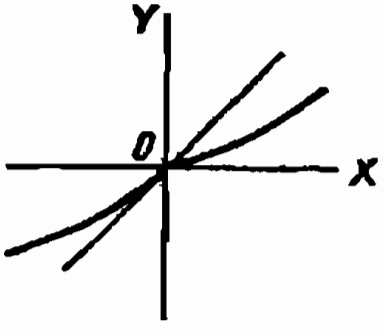
$\rho = a \sin 4\theta.$

Рис. XXXV. Кривая с точкой остановки в начале.



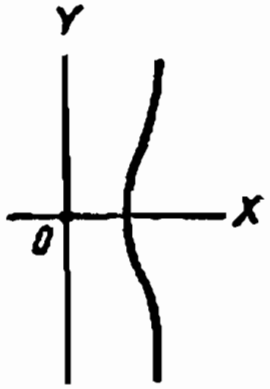
$y = x \ln x.$

Рис. XXXVI. Кривая с угловой точкой в начале.



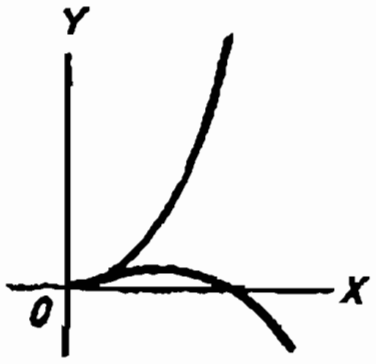
$y\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = x.$

Рис. XXXVII. Кривая с изолированной точкой в начале.



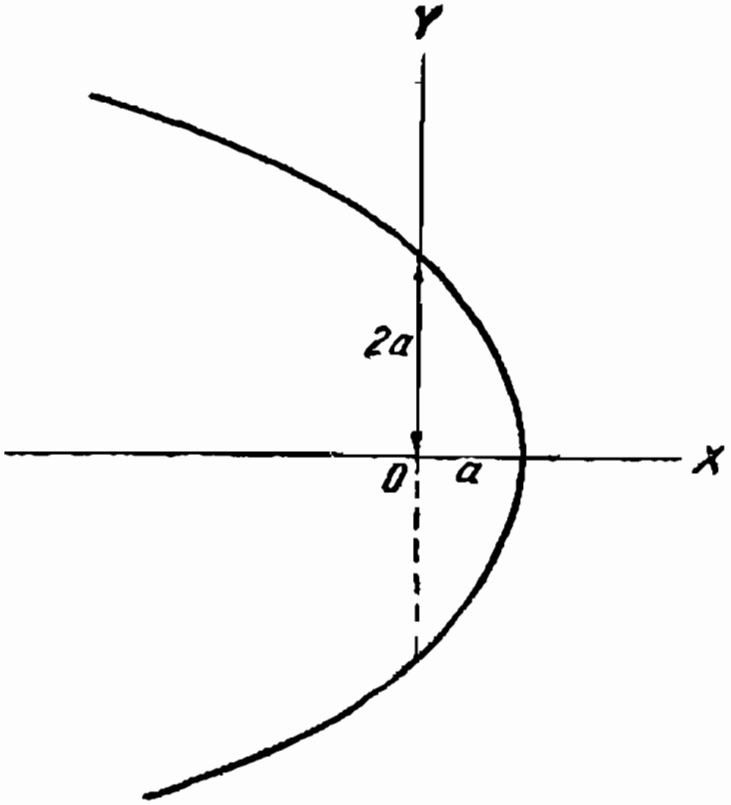
$y^2 = x^3 - x^2$.

Рис. XXXVIII. Кривая с клювом (острием второго рода) в начале.



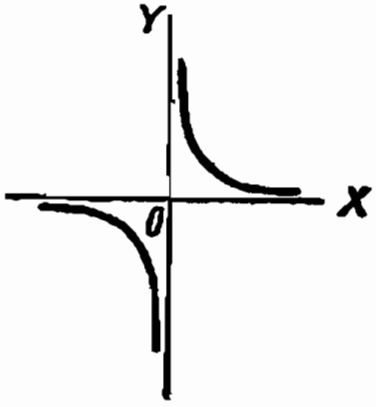
$(y - x^2)^2 = x^5$.

Рис. XXXIX. Парабола.



$\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$.

Рис. XL. Равносторонняя гипербола.



$xy = a$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Число

(1) Рациональные числа. (2) Практическое значение рациональных чисел. (3) Сопоставление рациональных чисел с точками прямой линии. (4) Несоизмеримые отрезки. (5) Иррациональные числа. (6) Иррациональное число есть непериодическая бесконечная десятичная дробь. (7) Действительные числа. (8) Абсолютная величина. (9) Деление на нуль запрещается. 5

Глава II. Величина

(10) О величинах вообще. (11) Переменная величина. (12) Постоянная величина. (13) Геометрическое изображение величин. (14). Область значений переменного. (15) Отрезок и промежуток. (16) Классификация переменных величин. (17) Приращение переменной величины. (18) Постоянная величина как переменная 16

Глава III. Функция

(19) Функция. (20) Зависимые и независимые переменные. (21) Характеристика функции. (22) Вычисление функций. (23) Область изменения аргумента. (24) Приращение функции. (25) Геометрическое изображение функций. (26) Геометрическое изображение приращения функции. (27) О различном происхождении функций. (28) Классификация функций 31

Глава IV. Предел

(29) Предел переменного. (30) О способах переменной величины приближаться к своему пределу. (31) Бесконечно малые. (32) Связь понятия предела и бесконечно малого. (33) Предварительные свойства переменных величин, стремящихся к пределу. (34) Важнейшие свойства бесконечно малых. (35) Основные теоремы о пределах. (36) Понятие о бесконечно большом. (37) Связь бесконечно большого и бесконечно малого 56

Глава V. Непрерывность

(38) Понятие непрерывности функции. (38) Определение непрерывности функции в точке. (40) Геометрическое изображение непрерывности функции в точке. (41) Непрерывность в точке двусторонняя и односторонняя. (42) Важнейшие свойства функций, непрерывных в точке. (43) Правило испытания на непрерывность. (44) Свойства функций, непрерывных на отрезке. (45) Пределы функции и их обозначения. Пределы в бесконечности. (46) Типы разрывов функций. Неустранимый и устранимый разрывы. (47) Кажущийся разрыв и так называемая «истинная величина» функции. Раскрытие неопределенностей. (48) Натуральные логарифмы . . 77

Глава VI. Дифференцирование

(49) Введение. (50) Приращение. (51) Сравнение приращений. (52) Производная функция одного переменного. (53) Различные обозначения производной. (54) Дифференцируемые функции. (55) Общее правило дифференцирования. (56) Геометрический смысл производной 120

Глава VII. Правила для дифференцирования алгебраических выражений

(57) Важность общего правила. (58) Дифференцирование постоянного. (59) Дифференцирование переменного по этому же самому переменному. (60) Дифференцирование суммы (алгебраической). (61) Дифференцирование произведения постоянного на функцию. (62) Дифференцирование произведения двух функций. (63) Дифференцирование произведения любого заданного конечного числа функций. (64) Дифференцирование функции с постоянным показателем степени. (65) Дифференцирование частного. (66) Дифференцирование функции от функции. (67) Об ошибках, часто случающихся при дифференцировании функции от функции. (68) Практика дифференцирования функции от функции. (69) Дифференцирование обратных функций. (70) Дифференцирование неявных функций 136

Глава VIII. Различные приложения производной

(71) Направление кривой. (72) Уравнения касательной и нормали; длины подкасательной и поднормали. (73) Наибольшая и наименьшая величина функции; введение. (74) Функции возрастающие и убывающие. Их отличительные признаки. (75) Максимальные и минимальные величины функции; их логические определения. (76) Первый способ исследования функции на максимум и минимум. Рабочее правило. (77) Максимальная и минимальная величины непрерывной функции, когда у нее нет производной в некоторых точках. (78) Общие указания для наиболее практичного отыскания максимальных и минимальных величин. (79) Производная как быстрота изменения. (80) Скорость прямолинейного движения. (81) Связанные скорости 160

Глава IX. Последовательное дифференцирование и его приложения

(82) Определение последовательных производных. (83) n-я производная. (84) Последовательное дифференцирование неявных функций. (85) Направление изгиба кривой. (86) Второй способ испытания на максимум и минимум. (87) Точки перегиба. (88) Вычерчивание кривых. (89) Ускорение прямолинейного движения 190

Глава X. Дифференцирование трансцендентных функций

(90) Формулы производных; второй основной список. (91) Дифференцирование логарифма. (92) Дифференцирование показательной функции. (93) Дифференцирование общей показательной функции. Доказательство правила степени. (94) Практика дифференцирования логарифмических выражений. (95) Дифференцирование $\sin v$. (96) Дифференцирование $\cos v$. (97) Дифференцирование $\operatorname{tg} v$. (98) Дифференцирование $\operatorname{ctg} v$. (99) Пояснение. (100) Обратные тригонометрические функции. (101) Дифференцирование $\arcsin v$. (102) Дифференцирование $\arccos v$. (103) Дифференцирование $\operatorname{arc\,tg} v$. (104) Дифференцирование $\operatorname{arc\,ctg} v$ 209

Глава XI. Приложения к параметрическим уравнениям, полярным уравнениям и к корням

(105) Параметрические уравнения кривой. Наклон. (106) Параметрические уравнения. Вторая производная. (107) Криволинейное движение. Скорость. (108) Криволинейное движение. Компоненты ускорения. (109) Полярные координаты. Угол между радиусом-вектором и касательной. (110) Длины полярной подкасательной и полярной поднормали. (111) Отделение кратных корней у многочленов. (112) Действительные корни уравнений. Графические методы. (113) Второй метод отделения действительных корней. (114) Метод Ньютона 237

Глава XII. Дифференциалы

(115) Введение. (116) Определения. (117) Геометрическое изображение дифференциала. (118) Приращение функции и дифференциал функции. (119) О сравнении бесконечно малых друг с другом. (120) Приближенное вычисление приращения функции при помощи дифференциала. (121) Малые ошибки. (122) Формулы для нахождения дифференциалов функций. (123) Дифференциал дуги в прямоугольных декартовых координатах. (124) Дифференциал дуги в полярных координатах. (125) Скорость криволинейного движения как быстрота изменения дуги. (126) Неизменность формулы для дифференциала функции. (127) Дифференциалы высших порядков 268

Глава XIII. Кривизна, радиус и круг кривизны

(128) Кривизна. (129) Кривизна окружности. (130) Кривизна в прямоугольных координатах. (131) Кривизна в параметрической форме. (132) Кривизна в полярных координатах. (133) Радиус кривизны. (134) Рельсовый путь или переходные кривые. (135) Круг кривизны. (136) Центр кривизны. (137) Эволюты. (138) Свойства эволюты. (139) Эвольвенты и их механическое построение. (140) Преобразование производных 292

Глава XIV. Теорема о среднем и ее приложения

(141) Теорема Ролля. (142) Соприкасающийся круг. (143) Предельная точка пересечения двух близких нормалей. (144) Теоремы о среднем (законы среднего). (145) Теорема о среднем Тейлора. (146) Максимум и минимум, исследуемые аналитически. (147) Неопределенные формы. (148) Оценка элементарными приемами функции, принимающей неопределенную форму. (149) Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$. (150) Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. (151) Раскрытие неопределенности $0 \cdot \infty$. (152) Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$. (153) Раскрытие неопределенностей 0^0, 1^∞, ∞^0. (154) Асимптоты. (155) Нахождение асимптот кривой, отнесенной к прямоугольной системе координат. (156) Предельное положение касательной. (157) Нахождение асимптот алгебраических кривых. (158) Асимптоты кривой, отнесенной к полярной системе координат 316

Глава XV. Частные производные

(159) Непрерывные функции двух и более независимых переменных. (160) Частные производные. (161) Геометрическая интерпретация частных производных. (162) Полное приращение. (163) Полный дифференциал. (164) Закон сохранения формулы полного дифференциала при преобразовании независимых переменных. (165) Практическое вычисление полных дифференциалов. (166) Частная производная и полная производная. Дифференцирование вдоль линии. (167) Дифференцирование неявных функций. (168) Производные высшего порядка. (169) Теоремы о среднем для функций нескольких независимых переменных (законы среднего). (170) Необходимые условия максимума и минимума функций нескольких переменных. (171) Достаточные условия максимума и минимума функций двух переменных 355

Глава XVI. Приложение частных производных

(172) Особые точки. (173) Определение касательных в особых точках алгебраической кривой. (174) Различные типы двукратных точек алгебраической кривой. (175) Особые точки трансцендентных кривых. (176) Семейство кривых и их огибающая. (177) Нахождение огибающей семейства кривых, зависящих от одного параметра. (178) Эволюта кривой как огибающая

семейства ее нормалей. (179) Пространственная кривая и ее уравнение. (180) Касательная прямая и нормальная плоскость пространственной кривой. (181) Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой. (182) Касательная плоскость и нормаль к поверхности. (183) Геометрическая интерпретация полного дифференциала функции двух аргументов 391

Глава XVII. Основы векторного анализа и его применение в теории пространственных кривых

(184) Вектор-функция скалярного аргумента. Непрерывность. Производная. (185) Правила дифференцирования векторов. (186) Векторно-параметрическое уравнение кривой. (187) Производная радиуса-вектора. Орт касательной. (188) Дифференциал дуги пространственной кривой. (189) Кривизна пространственной кривой. (190) Главная нормаль кривой. (191) Основной трехгранник. (192) Кручение пространственной кривой. Формулы Френе. 429

Приложение I. Элементарные формулы 455

Приложение II. Кривые для справок 463

Николай Николаевич Лузин
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *С. И. Новосёлов*
Редактор издательства *Д. А. Тальский*
Технический редактор *В. А. Мурашова*

Сдано в набор 8/III — 1960 г. Подписано к печати 20/VI — 1960 г. Бумага 60×92¹/₁₆. 30 печ. л. 29,2 уч.-изд. л. Заказ № 249. Тираж 100 000 экз. (1-ый завод 50 000 экз.) Цена 9 р. 80 к. С 1/I-61 г. — 98 коп.

Государственное издательство «Высшая школа»
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

0 к.

с 1/I-61 г. 98 коп.