Ю.А. Мотыцкий, С.В. Сорокин

НОВЫЕ МЕТОДЫ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

УРСС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров

НОВЫЕ МЕТОДЫ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Москва • 2004

УРСС

ББК 22.318

Магницкий Николай Александрович, Сидоров Сергей Васильевич

Новые методы хаотической динамики. — М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.

ISBN 5–354–00655–4

В книге представлена во многих случаях отличная от традиционной точка зрения авторов на принципы формирования, сценарии возникновения и способы управления хаотическими режимами поведения в нелинейных диссипативных динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных диффузионного типа и уравнениями с запаздывающим аргументом.

Показано, что во всех таких системах реализуется один универсальный сценарий перехода к хаосу. Найден и теоретически обоснован механизм такого сценария. Все аналитические результаты и выводы подтверждены расчетами, снабжены примерами и многочисленными рисунками.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся проблемами синергетики, нелинейной и хаотической динамики.

Рисунков — 149. Библ. — 136.

Оригинал-макет предоставлен авторами,
текст опубликован в авторской редакции.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 26.01.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 20. Зак. № 19

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГП «Облиздат»
248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5

ISBN 5–354–00655–4

© Н. А. Магницкий,
С. В. Сидоров, 2004
© Едиториал УРСС, 2004

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

2343 ID 19833



Оглавление

Предисловие 7

Введение 9

Глава 1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 12

1.1. Основные определения и теоремы 12

1.1.1. Поля направлений и их интегральные кривые 12
1.1.2. Векторные поля, дифференциальные уравнения, интегральные и фазовые кривые 12
1.1.3. Теоремы существования и единственности решений 14
1.1.4. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров. Уравнения в вариациях 14
1.1.5. Диссипативные и консервативные системы уравнений 16
1.1.6. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений 16
1.1.7. Некорректность численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений 17

1.2. Особые точки и их инвариантные многообразия 18

1.2.1. Особые точки систем дифференциальных уравнений 18
1.2.2. Устойчивость особых точек и стационарных решений 19
1.2.3. Инвариантные многообразия 20
1.2.4. Особые точки линейных векторных полей 21
1.2.5. Сепаратрисы особых точек. Гомоклинические и гетероклинические траектории. Сепаратрисные контуры 24

1.3. Периодические и непериодические решения, предельные циклы и инвариантные торы 26

1.3.1. Периодические решения 26
1.3.2. Предельные циклы 26
1.3.3. Отображение Пуанкаре 29
1.3.4. Инвариантные торы 31
1.3.5. Непериодические решения. Показатели Ляпунова 33

1.4. Аттракторы автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений 38

1.4.1. Основные определения 38
1.4.2. Классические регулярные аттракторы диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений 39
1.4.3. Классические нерегулярные аттракторы диссипативных динамических систем 41
1.4.4. Размерность аттракторов. Фракталы 49

Глава 2. Бифуркации в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений 53

2.1. Структурная устойчивость и бифуркации 53

2.1.1. Структурная устойчивость 53
2.1.2. Бифуркации 55

2.2. Однопараметрические локальные бифуркации 57

2.2.1. Бифуркации устойчивых особых точек 58
2.2.2. Бифуркации устойчивых предельных циклов 64
2.2.3. Бифуркации устойчивых двумерных торов 77

2.3. Простейшие двухпараметрические локальные бифуркации 81

2.3.1. Нормальная форма складки 81
2.3.2. Нормальная форма сборки 83

2.4. Нелокальные бифуркации 84

2.4.1. Бифуркации гомоклинических сепаратрисных контуров 85
2.4.2. Бифуркации гетероклинических сепаратрисных контуров 92
2.4.3. Приближенный метод нахождения точек бифуркаций гомоклинических и гетероклинических контуров 95
2.4.4. Каскады бифуркаций. Сценарии перехода к хаосу 101
2.4.5. Бифуркации нерегулярных аттракторов 107

Глава 3. Хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений 109

3.1. Система уравнений Лоренца 109

3.1.1. Классический сценарий рождения аттрактора Лоренца 109
3.1.2. Сценарий рождения аттрактора Лоренца через неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций 112
3.1.3. Сценарий рождения полного двойного гомоклинического аттрактора в системе Лоренца 127
3.1.4. Бифуркации гомоклинических и гетероклинических контуров в системе уравнений Лоренца 138
3.1.5. Диаграммы нелокальных бифуркаций в системе уравнений Лоренца 147

3.2. Комплексная система уравнений Лоренца 147

3.2.1. Сценарий перехода к хаосу 150

3.3. Системы уравнений Рёсслера 153

3.4. Система Чуа 159

3.5. Некоторые другие хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений 165

3.5.1. Системы Валлиса 165
3.5.2. Система Рикитаки 174
3.5.3. Система "Simple" 178

3.5.4. Система Рабиновича-Фабриканта 181
3.6. Заключительные замечания и выводы 184

Глава 4. Основы теории динамического хаоса в системах обыкновенных дифференциальных уравнений 186

4.1. Теория одномерных гладких отображений 187
4.1.1. Монотонные обратимые отображения 189
4.1.2. Немонотонные отображения 193
4.2. Каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода циклов одномерных отображений 194
4.2.1. Логистическое отображение 194
4.2.2. Оператор удвоения периода 198
4.2.3. Универсальность Фейгенбаума 201
4.2.4. Размерность аттрактора Фейгенбаума 206
4.3. Субгармонический каскад бифуркаций Шарковского циклов одномерных отображений 207
4.3.1. Теорема Шарковского 207
4.3.2. За каскадом Фейгенбаума 214
4.4. Регулярные и сингулярные устойчивые и седловые циклы трехмерных автономных систем. Особые точки типа "ротор" 216
4.4.1. Регулярные и сингулярные предельные циклы 216
4.4.2. Особые точки типа "ротор" 219
4.5. Природа сингулярных аттракторов трехмерных автономных систем 221
4.5.1. Структура *двумерной сепаратрисной поверхности* седлового сингулярного цикла 221
4.5.2. Механизм рождения сингулярных аттракторов. Каскады бифуркаций Фейгенбаума и Шарковского 224
4.5.3. Гомоклинический и более сложные каскады бифуркаций .. 225
4.6. Некотрые примеры систем с сингулярными аттракторами 227
4.7. Заключительные замечания и выводы 236

Глава 5. Динамический хаос в бесконечномерных системах дифференциальных уравнений 238

5.1. Регулярная динамика и диффузионный хаос в системах уравнений "реакция-диффузия" 239
5.2. Переход к хаосу в маломодовом приближении для уравнения Курамото-Цузуки. 245
5.3. Динамический хаос в дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом 250

5.4. Циклы и хаос в распределенных экономических системах 253
5.4.1. Описание модели саморазвивающейся рыночной экономики 254
5.4.2. Исследование поведения макроэкономических показателей 261
5.4.3. Некоторые аспекты поведения экономических показателей при наличии диффузии капитала и спроса 267

Глава 6. Управление хаосом в системах дифференциальных уравнений 271

6.1. Методы Отта-Гребоджи-Йорке и Пирагаса 272
6.1.1. OGY-метод. 272
6.1.2. Метод Пирагаса 274
6.2. Метод Магницкого 275
6.2.1. Локализация и стабилизация неустойчивых неподвижных точек и циклов хаотических отображений 275
6.2.2. Локализация и стабилизация неустойчивых неподвижных точек хаотических динамических систем ... 282
6.2.3. Локализация и стабилизация неустойчивых циклов хаотических динамических систем 285
6.2.4. Управление хаосом в уравнениях с запаздывающим аргументом 291
6.2.5. Стабилизация термодинамической ветви в системах уравнений "реакция-диффузия" 298
6.3. Реконструкция динамической системы по траектории нерегулярного аттрактора 307

Список литературы 311

Предисловие

Настоящая книга написана на основе исследований, проводимых в последние годы под руководством одного из авторов в лаборатории нелинейной и хаотической динамики Института системного анализа РАН и на кафедре нелинейных динамических систем факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. В ней авторы излагают свою, во многих случаях отличную от традиционной, точку зрения на принципы формирования, сценарии возникновения и способы управления хаотическими режимами в нелинейных диссипативных динамических системах, описываемых автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных диффузионного типа и уравнениями с запаздывающим аргументом. Все теоретические результаты и выводы подтверждены многочисленными примерами, иллюстрациями и численными расчетами.

Книга состоит из шести глав. В первой главе излагаются основные понятия, определения и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимые для понимания материала, излагаемого в последующих главах. Вторая глава посвящена описанию основных бифуркаций особых точек, предельных циклов, торов и нерегулярных аттракторов нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделено малоизученным нелокальным бифуркациям гомоклинических и гетероклинических контуров, а также различным каскадам бифуркаций как регулярных так и нерегулярных аттракторов. В третьей главе книги на основе проведенных численных расчетов и большого иллюстративного материала показано, что все классические автономные диссипативные нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют один общий сценарий перехода к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода, субгармонический и затем гомоклинический каскады мягких бифуркаций устойчивых предельных циклов. Этот сценарий описывается теорией динамического хаоса в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, развитой одним из авторов и изложенной в четвертой главе. Показано, что все рождающиеся таким образом нерегулярные аттракторы, названные сингулярными, принадлежат замыканию неустойчивого многообразия сингулярного предельного цикла, дающего начало всем каскадам мягких бифуркаций.

В пятой главе показано, что тот же сценарий перехода к хаосу имеет место и в бесконечномерных системах дифференциальных уравнений в частных производных типа реакция-диффузия, а также в обыкновенных дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом. В шестой главе книги рассмотрены как классические, так и оригинальные методы решения основной проблемы управления хаосом, заключающиеся в обнаружении и стабилизации неустойчивых циклов

нелинейных систем дифференциальных уравнений, обладающ ... тической динамикой.

Первая, вторая и пятая главы книги написаны Н.А. Магн... и, третья, четвертая и шестая главы — совместно Н.А. Магни... и С.В. Сидоровым. Численные расчеты и рисунки выполнены С. Сидоровым.

Авторы выражают признательность Д.В. Аносову, А.Б. Бакушинскому, С.В. Емельянову, В.А. Ильину, Ю.С. Ильяшенко, Ю.Л. Климонтовичу, С.К. Коровину, Е.И. Моисееву, Ю.С. Попкову за полезные обсуждения затрагиваемых в книге вопросов, а также ЗАО "Партнер", без финансовой поддержки которого работа над книгой и ее издание были бы просто невозможными.

Особую благодарность авторы выражают Е.И. Магницкой и Н.В. Сидоровой за внимание, терпение и поддержку при написании настоящей книги.

Проблемы, поднятые в книге, методы их решения и полученные результаты выходят далеко за рамки традиционных представлений о хаотических аттракторах нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Свои мнения по этому поводу, замечания и предложения просим присылать по адресу nmag@isa.ru.

Введение

темы нелинейных дифференциальных уравнений являются частным случаем обширного семейства нелинейных динамических систем, в которое также входят различные нелинейные алгебраические, разностные, интегральные, функциональные и абстрактные операторные уравнения. В связи с этим до последнего времени совершенно естественным представлялся единый геометрический подход к изучению нелинейных динамических систем, позволяющий рассматривать с общих позиций нелинейные системы, описываемые как дискретными отображениями, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных [1-10]. Согласно геометрической точке зрения *динамической системой* называется однопараметрическая непрерывная или дискретная группа (полугруппа) $\varphi^t(x)$ преобразований метрического фазового пространства M в себя. Непрерывные группы также часто называют *потоками*, а дискретные - *отображениями* или *каскадами* [3, 11]. Интенсивное применение геометрического подхода к анализу динамических систем началось со знаменитой работы американского математика С. Смейла, предложившего конструкцию отображения, которое впоследствии получило название *подкова Смейла* [5]. Было показано, что устойчивым предельным множеством (аттрактором) дискретной динамической системы может быть вовсе не гладкое многообразие целой размерности, какими являются, например, устойчивый *предельный цикл* или *тор*, а всюду дырявое, самоподобное *фрактальное* множество дробной размерности. Кроме того, было показано, что поведение траекторий динамической системы на таком *странном* в терминологии Д. Рюэля и Ф. Такенса [6] аттракторе является довольно сложным, сочетая в себе глобальную устойчивость (траектория не уходит из некоторой области фазового пространства) с локальной неустойчивостью отдельных близких траекторий, экспоненциально разбегающихся со временем, что характеризуется наличием на аттракторе как отрицательного, так и положительного показателей Ляпунова. В дальнейшем были найдены и другие *хаотические динамические системы*, описываемые дискретными отображениями и обладающие странными аттракторами, такие, например, как логистическое отображение, отображение Хенона, соленоид Смейла-Вильямса [5, 11–16] и др.

Так как анализ свойств непрерывных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, может быть сведен к анализу свойств некоторого отображения – *отображения Пуанкаре*, то обнаруженное в непрерывных динамических системах нерегулярное, хаотическое поведение траекторий, стали связывать с наличием в системе странного аттрактора. Однако доказательство этого факта непосредственно для знаменитой системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца, в которой впервые было обнаружено нерегулярное поведение траекторий [17], столкнулось со значитель-

ными трудностями. Многочисленные попытки в течение длительного времени обосновать методами геометрической теории динамических систем наличие странного аттрактора в окрестностях петель сепаратрис седло-узла и седло-фокуса в системе Лоренца закончились неудачей [18–27]. Более того, задача показать, совпадает ли поведение решений системы Лоренца с динамикой геометрического аттрактора Лоренца была сформулирована С. Смейлом как одна из 18 наиболее значительных математических проблем XXI века [28]. А результаты недавних работ авторов [29–31] позволили определенно утверждать, что геометрический подход, развитый для дискретных отображений и позволивший получить для них ряд блестящих результатов, является не совсем адекватным применительно к непрерывным динамическим системам, описываемым дифференциальными уравнениями. Сложилось впечатление, что само определение сложного (нерегулярного) аттрактора непрерывной динамической системы как странного аттрактора, а также такие традиционные разделы хаотической динамики, как вычисление размерности аттрактора, сценарии перехода к хаосу и критерии динамического хаоса требуют значительной корректировки.

Как показывают многочисленные примеры [29–34], ни наличие положительного показателя Ляпунова, ни наличие петель сепаратрис седло-узлов или седло-фокусов, ни наличие самих седло-узлов или седло-фокусов не являются необходимыми условиями существования в системе дифференциальных уравнений хаотической динамики. Более того, нерегулярные аттракторы огромного класса трехмерных диссипативных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащего и все классические хаотические системы, рождаются в результате одних и тех же каскадов мягкий бифуркаций устойчивых предельных циклов. Началом всегда является каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, переходящий в полный или неполный субгармонический каскад бифуркаций Шарковского, который продолжается полным или неполным гомоклиническим каскадом бифуркаций.

В настоящей книге, следуя работе Н. Магницкого [35], изложена теория таких аттракторов, названных *сингулярными*. Они существуют только в отдельных точках накопления значений бифуркационного параметра и содержат в любой своей окрестности неустойчивые циклы различных периодов. Доказано, что любой сингулярный аттрактор трехмерной автономной диссипативной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений лежит на двумерной многолистной поверхности трехмерного фазового пространства, являющейся замыканием двумерного инвариантного неустойчивого многообразия *сингулярного* седлового цикла, дающего начало каскаду бифуркаций удвоения периода. В связи с этим размерность сингулярного аттрактора трехмерной системы не может превышать величины два. Хаотическая динамика во всех системах указанного класса

возникает благодаря сдвигу фаз между траекториями, образующими сепаратрисную поверхность сингулярного цикла, что приводит к возможности появления в трансверсальной к циклу двумерной вращающейся плоскости непрерывных одномерных отображений, имеющих многозначные обратные отображения. Последнее невозможно ни в каком сечении Пуанкаре, переход к которому приводит к потере фазы. Любым сингулярным аттрактором любой системы класса является замыкание некоторой полуустойчивой непериодичекой траектории, в связи с чем сингулярный аттрактор не может иметь единого положительного показателя Ляпунова и не является гиперболическим множеством.

Таким образом, во всех системах рассмотренного в книге класса автономных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в процессе перехода к хаосу рождаются полные или неполные субгармонические или гомоклинические сингулярные аттракторы. Этот же сценарий перехода к хаосу характерен и для всех известных классических трехмерных автономных диссипативных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, включая системы уравнений Лоренца, Рёсслера, Чуа и др. (см.[29–33]). Более того, как показано в книге, этот же сценарий перехода к хаосу реализуется и в системах с большим числом измерений, и в бесконечномерных системах дифференциальных уравнений. А так как других сценариев перехода к хаосу в диссипативных системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, кроме как через субгармонический или гомоклинический каскады бифуркаций, реально пока не обнаружено, то весьма правдоподобной выглядит гипотеза об универсальности описанного в книге способа возникновения хаотической динамики в системах дифференциальных уравнений.

В книге изложены в основном результаты, полученные авторами в области хаотической динамики диссипативных систем дифференциальных уравнений в последние годы. При этом за рамками книги остались такие значительные разделы теории динамического хаоса, как хаос в *гамильтоновых системах и перемешивание*, хаотические отображения и *фракталы*. Некоторые основные результаты, связанные с этими понятиями и требующиеся для изложения основного материала, рассмотрены в первой вводной главе. По причинам, изложенным выше, стиль изложения результатов в книге является традиционным, соответствующим стилю, принятому в качественной теории дифференциальных уравнений, а не в современной теории динамических систем.

Глава 1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В этой главе дан краткий обзор основных понятий и теорем общего характера теории обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимых для понимания материала, излагаемого в последующих главах. Более подробное изложение представленных в данной главе результатов можно найти в работах, которые указаны в списке цитируемой литературы.

1.1. Основные определения и теоремы.

1.1.1. Поля направлений и их интегральные кривые. Рассмотрим вещественное конечномерное линейное пространство $\mathbb{R}^m$. *Полем направлений* в области M пространства $\mathbb{R}^m$ называется соответствие, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет проходящую через x прямую.

Определение. *Интегральной кривой поля направлений* называется кривая, которая в каждой своей точке касается направления поля в этой точке.

1.1.2. Векторные поля, дифференциальные уравнения, интегральные и фазовые кривые. *Векторным полем* F, заданным в области M пространства $\mathbb{R}^m$, называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ приложенный к ней вектор F пространства $\mathbb{R}^m$.

Системой дифференциальных уравнений, соответствующей векторному полю F, называется система

$$\dot{x} = F(x),\ x \in M \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где точка над буквой означает дифференцирование по t. Область M называется *фазовым пространством* системы, а прямое произведение $I \times M$ – *расширенным фазовым пространством*, где I – интервал вещественной оси времени t.

Система (1.1) называется также *автономной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений. *Неавтономной* называется система, правая часть которой зависит также и от t:

$$\dot{x} = F(x,t),\ x \in M \subset \mathbb{R}^m,\ t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Семейством обыкновенных дифференциальных уравнений называется множество систем уравнений вида

$$\dot{x} = F(x,t,\mu),\ x \in M \subset \mathbb{R}^m,\ \mu \in L \subset \mathbb{R}^k,\ t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

заданных в фазовом пространстве M векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства $\mathbb{R}^k$.

Именно автономные семейства (1.3) обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu),\ x \in M \subset \mathbb{R}^m,\ \mu \in L \subset \mathbb{R}^k,\ t \in I \subset \mathbb{R},$$

задаваемые семействами векторных полей $F(x, \mu)$ и представляющие наибольший интерес с точки зрения различных приложений, будут являться основным объектом изучения настоящей книги.

Определение. *Решением системы дифференциальных уравнений* (1.2) называется дифференцируемое отображение $x : I \to M$ интервала I вещественной оси t в фазовое пространство, если для любого $\tau \in I$ выполнено соотношение

$$\dot{x}(\tau) = F(x(\tau), \tau).$$

Определение. *Интегральной кривой системы дифференциальных уравнений* называется график ее решения, а *фазовой кривой* – проекция интегральной кривой на фазовое пространство вдоль оси t.

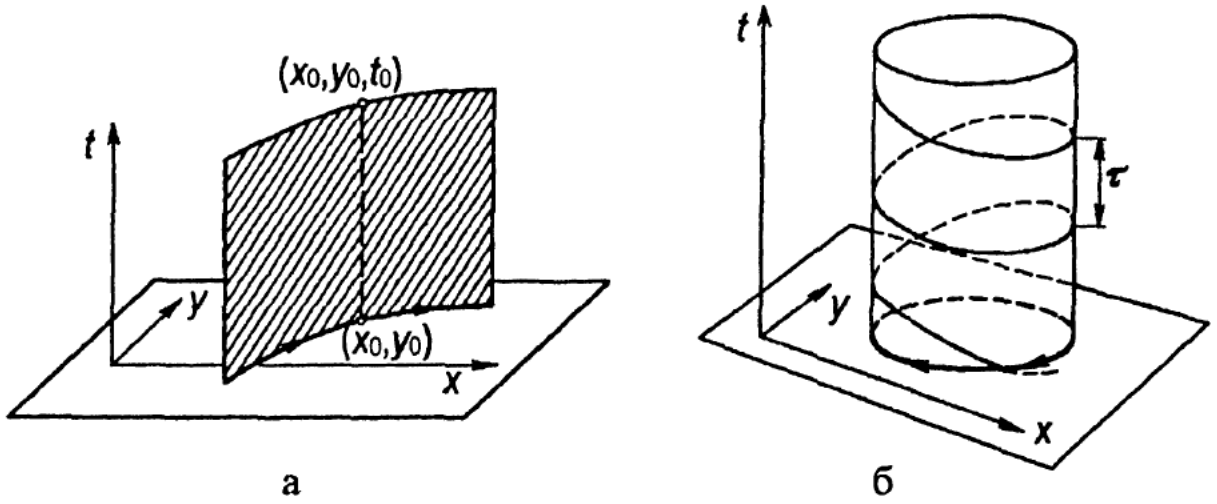

Рис. 1.1. Проекции отрезка интегральной кривой и спирали с шагом τ на фазовую плоскость (x, y) в виде отрезка (а) и замкнутой кривой (б).

Примеры интегральных и фазовых кривых изображены на рис. 1.1. Фазовые кривые часто также называют *траекториями* решений системы дифференциальных уравнений.

В дальнейшем нас будут интересовать только неограниченные временные интервалы $I = [0, \infty)$ и $I = (-\infty, \infty)$. При этом всегда будем полагать, что начальный момент времени $t_0 = 0$.

1.1.3. Теоремы существования и единственности решений. Дифференцируемым называется векторное поле с дифференцируемыми компонентами. Полем класса C^r называется поле с компонентами, имеющими непрерывные производные всех порядков, не превосходящих r.

Теорема 1.1 ([36–38]). *Через каждую точку расширенного фазового пространства дифференцируемого векторного поля проходит одна и только одна интегральная кривая соответствующей системы дифференциальных уравнений с вещественным временем.*

Условие гладкости правой части в сформулированной теореме может быть ослаблено.

Определение. Отображение $f : M \to N$, $M \in \mathbb{R}^m$, $N \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица, если существует такая положительная константа q, что

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq q\|x_1 - x_2\|$$

для всех $x_1 \in M$, $x_2 \in M$.

Теорема 1.2 ([36–38]). *Пусть правая часть системы уравнений* (1.2) *непрерывна в некоторой области $I \times M$ пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяет в ней условию Липшица по x с одной и той же константой q. Тогда через каждую точку области $I \times M$ расширенного фазового пространства проходит одна и только одна интегральная кривая системы уравнений* (1.2).

Если правая часть системы (1.2) только непрерывна, то и тогда через каждую точку расширенного фазового пространства проходит хотя бы одна интегральная кривая. Единственность при этом может быть нарушена, что видно из примера уравнения $\dot{x} = 2x^{1/2}$, имеющего интегральные кривые $(t, 0)$ и (t, t^2), проходящие через точку $(0, 0)$.

В силу сформулированных выше теорем задание начального условия в начальный момент времени $x(0) = x_0$ однозначно определяет решение системы дифференциальных уравнений в любой момент времени t : $x(t) = \varphi^t(x_0)$. Задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*. Отображение φ^t является отображением фазового пространства M в себя и называется *фазовым потоком*. Любая область G фазового пространства под воздействием фазового потока переходит за время t в некоторую другую область $G_t = \varphi^t(G)$.

1.1.4. Теорема о дифференцируемой зависимости решений от начальных условий и параметров. Уравнения в вариациях. Пусть f – дифференцируемое отображение области M пространства $\mathbb{R}^m$ в область N пространства $\mathbb{R}^n$. *Производной отображения* f в точке x_0 называется главная линейная часть отображения f в точке x_0,

т.е. линейный оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

В координатах $(x_1, ..., x_m)$ и $(y_1, ..., y_n)$ отображение f записывается в виде вектор-функции $y = f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Матрица оператора A в координатах (x, y) – это матрица Якоби вектор-функции f, т.е.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0),\ A = \{a_{ij}\},\ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1.3 ([36]). *Пусть семейство дифференциальных уравнений* (1.3) *задано векторными полями* $F(x, t, \mu)$, *непрерывными в некоторой области пространства* $\mathbb{R}^{k+m+1}$ *вместе со своими производными* $\partial F/\partial x$ *и* $\partial F/\partial \mu$. *Тогда решение* φ *семейства* (1.3) *с начальным условием* $\varphi(0, \mu) = x$ *непрерывно дифференцируемо по* x, μ. *Если зависимость поля* F *от параметров* μ *лишь непрерывная, то и зависимость решения от параметров непрерывна.*

Уравнения для производных решения по начальным условиям и параметрам выписываются явным образом. Обозначим через φ_ξ решение системы (1.2) с начальным условием $\varphi_\xi(0) = \xi$. Фиксируем $\xi = x$ и положим

$$X(t) = \left.\frac{\partial \varphi_\xi(t)}{\partial \xi}\right|_{\xi = x}.$$

При каждом t линейный оператор $X(t)$ действует из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$. Из (1.2) следует, что операторнозначная функция $X(t)$ удовлетворяет следующему *уравнению в вариациях*:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \text{ где } A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi_x(t), t).$$

Это – линейное однородное неавтономное дифференциальное уравнение, причем $X(0)$ — единичная матрица.

Выпишем теперь уравнение в вариациях для производной решения семейства (1.3) по параметрам. Пусть $\varphi_{\xi,\alpha}$ – решение семейства (1.3) с начальным условием $\varphi_{\xi,\alpha}(0, \alpha) = \xi$. Фиксируем $\xi = x$, и положим

$$Y(t) = \left.\frac{\partial \varphi_{\xi,\alpha}(t)}{\partial \alpha}\right|_{\xi = x, \alpha = \mu}.$$

При каждом t линейный оператор $Y(t)$ действует из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$. Из (1.3) следует, что операторнозначная функция $Y(t)$ удовлетворяет следующему уравнению в вариациях:

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + b(t),$$

где

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi_{x,\mu}(t), t, \mu),\ b(t) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(\varphi_{x,\mu}(t), t, \mu).$$

Это — линейное неоднородное неавтономное дифференциальное уравнение, причем $Y(0) = 0$.

1.1.5. Диссипативные и консервативные системы уравнений. Обозначим через $V(\Omega_t)$ евклидов объем области $\Omega_t = \varphi^t(\Omega_0)$ фазового пространства, получающейся при сдвиге в течение времени t всех точек некоторой начальной области Ω_0 вдоль фазовых кривых автономной системы дифференциальных уравнений (1.1). Тогда изменение объема $V(\Omega_t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV(\Omega_t)}{dt} = \int\limits_V \mathrm{div}F(x)dx, \qquad \text{где} \qquad \mathrm{div}F(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x)$$

– сумма диагональных элементов оператора $\partial F/\partial x$, а dx – евклидов элемент объема.

Определение. Система уравнений (1.1) называется *консервативной*, если объем произвольной области фазового пространства не меняется со временем, и *диссипативной*, если объем некоторой области фазового пространства со временем уменьшается.

Таким образом, если всюду в фазовом пространстве $\mathrm{div}F(x) = 0$, то система сохраняет объем и является консервативной. Если же существует область фазового пространства, в которой $\mathrm{div}F(x) < 0$, то система (1.1) – диссипативна в этой области.

В дальнейшем нас будут интересовать исключительно семейства автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Читателей, интересующихся хаотической динамикой консервативных и, в частности, гамильтоновых систем, отсылаем к работам [2, 12, 39, 40].

1.1.6. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши для автономной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.1) только в исключительных случаях может быть найдено в явном виде. Интегрирование таких систем требует, как правило, аппроксимации решения различными линейными функциями на последовательных малых отрезках времени (шагах) длительности τ. Самым распространенным методом такой аппроксимации является метод Рунге-Кутта 4-го порядка, дающий при малых τ разностные уравнения, аппроксимирующие решения с точностью $O(\tau^4)$.

Обозначим через y_n уже найденное приближенное значение решения системы (1.1) в момент t_n. Тогда приближенное значение решения системы (1.1) в момент $t_{n+1} = t_n + \tau$ находится по формуле:

$y_{n+1} = y_n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4)$, где $k_1 = F(t_n, y_n)$, $k_2 = F(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau k_1)$, $k_3 = F(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau k_1 + b_{32}\tau k_2)$, $k_4 = F(t_n + a_4\tau, y_n + b_{41}\tau k_1 + b_{42}\tau k_2 + b_{43}\tau k_3)$. Параметры σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, a_2, a_3, a_4 и b_{21}, b_{31}, b_{32}, b_{41}, b_{42}, b_{43} могут быть определены, вообще говоря, различными способами. Все численные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенных в настоящей книге, выполнены при следующих значениях этих параметров: $\sigma_1 = \sigma_4 = 1/6$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1/3$, $a_2 = a_3 = 1/2$, $a_4 = 1$ и $b_{21} = b_{32} = 1/2$, $b_{31} = 0$, $b_{41} = b_{42} = 0$, $b_{43} = 1$.

Заметим, что оценки точности приближенных решений совпадают, как правило, с оценками точности аппроксимации и существенно зависят от длины временного интервала T, на котором решается система дифференциальных уравнений. Например, в методе Рунге-Кутта 4-го порядка точность решения $\|x(t_n) - y_n\| = CT\exp(\alpha T)\tau^4$, где α и C – некоторые постоянные [41].

1.1.7. Некорректность численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При численном решении нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих сложной нерегулярной динамикой, задача, как правило, состоит не в решении уравнения на каком-либо небольшом конечном отрезке времени, а в нахождении предельных множеств (аттракторов) траекторий при $t \to \infty$. В такой постановке оценки погрешностей численных методов теряют смысл. При этом огромной проблемой становится некорректность решаемой задачи.

Суть проблемы состоит в следующем. Любой метод численного решения дифференциального уравнения требует аппроксимации тем или иным способом производной функции, известной лишь приближенно в узлах некоторой сетки. Задача вычисления производной от неточно заданной функции является классической *некорректной задачей* [42]. Малым погрешностям в задании функции могут соответствовать большие погрешности в вычислении ее производной, т.е. нет непрерывной зависимости производной от функции. Пусть, например, погрешность в задании функции имеет вид $m^{-1}\sin m^2 t$. Погрешность в вычислении производной при этом будет $m\cos m^2 t$. Следовательно, при $m \to \infty$ погрешность функции в равномерной метрике неограниченно убывает, в то время как погрешность производной в той же метрике неограниченно растет.

Некорректность вычисления производной $x'(t_n)$ сеточной функции $x(t)$ приводит к тому, что шаг сетки τ не может быть выбран произвольно малым, а должен определяться погрешностью в вычислении самой функции. Действительно, пусть значения функции $x(t)$ в точках t_{n+1} и t_n нам известны с точностью δ, т.е. нам заданы значения y_{n+1} и y_n такие, что $|x(t_{n+1}) - y_{n+1}| \le \delta$, $|x(t_n) - y_n| \le \delta$. Тогда точность замены производной $x'(t_n)$ приближенной формулой, например, $(y_{n+1} - y_n)/\tau$, равна не $O(\tau)$, а $O(\tau) + 2\delta/\tau$. Погрешность

при этом состоит из двух частей: погрешности метода аппроксимации производной $O(\tau)$ и неустранимой погрешности $2\delta/\tau$, связанной с погрешностью вычисления самой функции. При $\tau \to 0$ неустранимая погрешность, очевидно, неограниченно возрастает. Оптимальным в данном случае является выбор шага сетки $\tau = O(\delta^{1/2})$. Такой способ выбора оптимального шага называется *регуляризацией по шагу*.

Покажем, что аналогичный эффект имеет место и при численном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.1), например, методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Пусть $y_{n+1} = y_n + \tau f(y_n)$. Обозначим через $y_n - x(t_n) = \delta_n$ ошибку в вычислении значения решения $x(t)$ в точке t_n. Тогда $\delta_{n+1} = \delta_n + \tau f'(x_n + \theta\delta_n)\delta_n - (x_{n+1} - x_n) + \tau f(x_n)$, где $|\theta| < 1$. Так как точность аппроксимации метода равна $O(\tau^4)$, то $|\delta_{n+1}| \le |\delta_n| \cdot |1 + \tau L| + K\tau^4$, где $L = f'(x_n + \theta\delta_n)$. Очевидно, что если $\tau \to 0$, то $\delta_{n+1} \to \delta_n$, и суммарная погрешность со временем может только нарастать от шага к шагу. В то же время если $-1/\tau < L < 0$, то можно добиться значительного уменьшения ошибки при выборе оптимального шага, минимизирующего оценку погрешности.

Ниже в работе будут продемонстрированы многочисленные примеры конкретных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих сложной динамикой, в которых при малом шаге наблюдается якобы хаотическое поведение траекторий, а при некотором разумном шаге – устойчивый предельный цикл. Самый яркий пример – знаменитая система уравнений Лоренца [17].

1.2. Особые точки и их инвариантные многообразия.

1.2.1. Особые точки систем дифференциальных уравнений. Особая точка (неподвижная точка, положение равновесия, стационарная точка, точка покоя) системы дифференциальных уравнений (1.1) – это особая точка соответствующего векторного поля $F(x)$.

Определение. *Особая точка векторного поля* – это точка фазового пространства, в которой вектор поля обращается в нуль.

Пусть x_0 – особая точка дифференцируемого векторного поля $F(x)$, являющегося правой частью автономной системы уравнений (1.1), а $\partial F/\partial x$ – производная отображения F. Система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Ay, \qquad \text{где} \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \qquad y = x - x_0$$

называется *линеаризацией системы* (1.1) *в особой точке* x_0, поле Ay – *линейной частью поля* F *в точке* x_0, а A – оператор этой линейной части или *оператор линеаризации*.

Определение. Особая точка векторного поля называется *невырожденной*, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден.

Определение. Особая точка системы дифференциальных уравнений (1.1) называется *гиперболической*, если ни одно собственное значение оператора линейной части поля в этой точке не лежит на мнимой оси.

Определение. Две системы дифференциальных уравнений (или, что то же самое – два векторных поля) *топологически эквивалентны* в окрестности особых точек, если существует гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение), переводящий особую точку первой системы и траектории, лежащие в некоторой ее окрестности, в особую точку и траектории второй системы с сохранением ориентации траекторий.

Теорема 1.4 (теорема Гробмана-Хартмана [37, 43]). *Непрерывно дифференцируемое векторное поле с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.*

Из сформулированной теоремы в частности вытекает, что качественное поведение решений автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) в окрестности гиперболической особой точки полностью определяется поведением решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянным оператором (матрицей) линейной части поля в этой точке.

1.2.2. Устойчивость особых точек и стационарных решений. Особая точка (неподвижная точка, положение равновесия) автономной системы дифференциальных уравнений называется устойчивой (асимптотически устойчивой), если устойчиво (асимптотически устойчиво) тождественно равное ей стационарное решение этой системы.

Определение. Стационарное решение автономной системы дифференциальных уравнений (решение, тождественно равное особой точке) называется *устойчивым по Ляпунову*, если все решения этой системы с начальными условиями из достаточно малой окрестности указанной особой точки определены на всей положительной полуоси времени и равномерно по времени сходятся к исследуемому стационарному решению при стремлении начального условия к указанной особой точке.

Другими словами, стационарное решение x_0 системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех решений $x(t)$ системы (1.1) из $\|x(0) - x_0\| < \delta$ следует $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ для всех $t > 0$.

Определение. Стационарное решение автономной системы уравнений (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения $x(t)$ системы (1.1) с достаточно близкими к исследуемой особой точке начальными условиями $\|x(0) - x_0\| < \delta$ стремятся к ней при $t \to \infty$, т.е. $\|x(t) - x_0\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Если в условиях асимптотической устойчивости стремление решений системы уравнений (1.1) к особой точке экспоненциально, т.е. $\|x(t) - x_0\| < c\exp(-\gamma t)$ с некоторыми положительными постоянными c и γ, то стационарное решение x_0 системы (1.1) называется *экспоненциально асимптотически устойчивым.*

Устойчивость (и асимптотическая устойчивость) стационарных решений (особых точек) – локальное свойство векторного поля, задающего систему дифференциальных уравнений. Просто стремление решений к положению равновесия при $t \to \infty$ не является локальным свойством и недостаточно для асимптотической устойчивости.

Теорема 1.5 (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [44]). *Если оператор линеаризации A дифференцируемого векторного поля $F(x)$ системы (1.1) в особой точке имеет собственные значения только с отрицательной вещественной частью, то эта особая точка асимптотически устойчива. Если одно из собственных значений оператора A имеет положительную вещественную часть, то особая точка не устойчива по Ляпунову.*

Из теоремы Ляпунова вытекает, что устойчивая гиперболическая особая точка всегда экспоненциально асимптотически устойчива.

Определение. Дифференцируемая функция $V(x)$ называется функцией Ляпунова для особой точки x_0 векторного поля $F(x)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- функция V определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке строгий локальный минимум;
- производная функции V вдоль векторного поля F в некоторой окрестности точки x_0 неположительна, т.е.

$$\frac{d}{dt}V(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}F_k(x) \le 0.$$

Теорема 1.6 ([44]). *Особая точка дифференцируемого векторного поля, для которой существует функция Ляпунова, устойчива.*

1.2.3. Инвариантные многообразия. Подмножество G фазового пространства называется инвариантным по отношению к фазовому потоку φ^t множеством или просто *инвариантным множеством*, если для всех допустимых t имеет место $\varphi^t(G) = G$. *Многообразием* называется подмножество G евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, имеющее в каждой своей точке единственную касательную гиперплоскость. В этом случае говорят, что G гладко вложено в $\mathbb{R}^m$. Если множество G гладко вложено в фазовое пространство M системы дифференциальных уравнений, то говорят, что G является подмногообразием фазового пространства.

Определение. *Инвариантное многообразие* векторного поля и соответствующей системы дифференциальных уравнений – это та-

кое подмногообразие фазового пространства, которое в каждой своей точке касается вектора поля.

Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^m$ распадается в прямую сумму трех подпространств:

$$\mathbb{R}^m = T^s \otimes T^u \otimes T^c.$$

Все три подпространства в правой части равенства инвариантны относительно оператора A. Спектр ограничения A на T^s лежит в открытой левой полуплоскости, ограничения A на T^u – в правой полуплоскости и ограничения A на T^c – на мнимой оси. Для оператора A, являющегося оператором линеаризации векторного поля F уравнения (1.1) в гиперболической особой точке, $T^c = \{0\}$.

Теорема 1.7 (теорема Адамара-Перрона [45]). *Пусть F есть C^r-гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой 0 и линейной частью Ax в нуле, T^s и T^u – плоскости, соответствующие оператору A. Тогда система дифференциальных уравнений имеет два C^r-гладких инвариантных относительно F многообразия W^s и W^u, проходящих через 0 и касающихся в нуле плоскостей T^s и T^u соответственно. Решения с начальными условиями на W^s (W^u) экспоненциально стремятся к нулю при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). W^s называется устойчивым, а W^u – неустойчивым многообразием особой точки 0.*

Теорема 1.8 (теорема о центральном многообразии [37, 45, 46]). *Если в условиях предыдущей теоремы оператор A имеет собственные значения также и на мнимой оси, т.е. $T^c \neq \{0\}$, то система дифференциальных уравнений (1.1) имеет третье C^{r-1}-гладкое инвариантное многообразие W^c, проходящее через 0 и касающееся в нуле плоскости T^c.*

Многообразие W^c называется центральным многообразием, а плоскость $T^s \otimes T^u$ – плоскостью *гиперболических переменных*. Поведение фазовых кривых на многообразии W^c определяется нелинейными членами.

Схематически инвариантные подпространства и многообразия особых точек изображены на рис.1.2. Принятые для них обозначения ясны из сформулированных выше теорем: s – stable, u – unstable, c – center.

Во многих случаях при исследовании локальной топологии нелинейного векторного поля и соответствующей системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки важно знать только ограничение этого поля на центральное многообразие [45, 46]. Однако, как будет показано ниже, этого оказывается совершенно недостаточно для получения глобальной топологической картины, которая определяется именно гиперболическими переменными.

1.2.4. Особые точки линейных векторных полей. Любая система линейных дифференциальных уравнений, задаваемая линейным

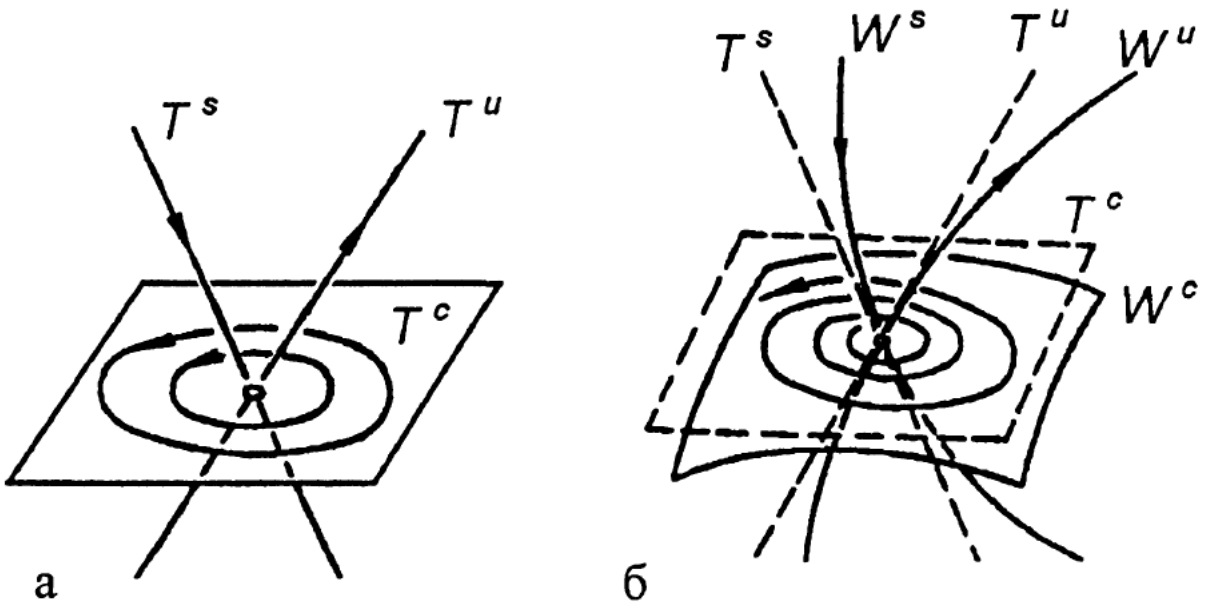

Рис. 1.2. Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия линейной системы (а) и нелинейной системы (б).

векторным полем, имеет в окрестности особой точки вид

$$\dot{y} = Ay. \tag{1.4}$$

Тип особой точки и характер поведения решений системы (1.4) в окрестности особой точки определяются собственными значениями линейного оператора A.

На вещественной плоскости невырожденная особая точка бывает одного из следующих четырех типов: *седло, узел, фокус, центр*. Собственные значения λ_1 и λ_2 линейного оператора A в этом случае определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A \pm \sqrt{D}),$$

где $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$, $\mathrm{tr}A$ – след матрицы A, т.е. сумма ее диагональных элементов, а $\det A$ – определитель матрицы A. Области, занимаемые при этом различными типами особых точек уравнения (1.4) в плоскости $(\det A, \mathrm{tr}A)$, представлены на рис. 1.3. В случае $D = 0$ дикритический узел соответствует скалярной матрице $A = \lambda E$, где E – единичная матрица, а вырожденный узел – матрице, подобной двумерной жордановой клетке.

Условие $\det A = 0$ определяет линию вырожденных особых точек, среди которых можно выделить вырожденный плоский седло-узел, имеющий, как правило, один узловой и два седловых сектора. Невырожденные седло, узел и фокус являются гиперболическими особыми точками. Поэтому, как следует из теоремы Гробмана-Хартмана, все изображенные на рис. 1.3 картинки, кроме центра, сохраняются при малых возмущениях линейной системы (1.4). Кроме того, седло

всегда неустойчиво, а узел и фокус могут быть как устойчивыми (экспоненциально асимптотически), так и неустойчивыми в зависимости от знака вещественных частей собственных значений матрицы A.

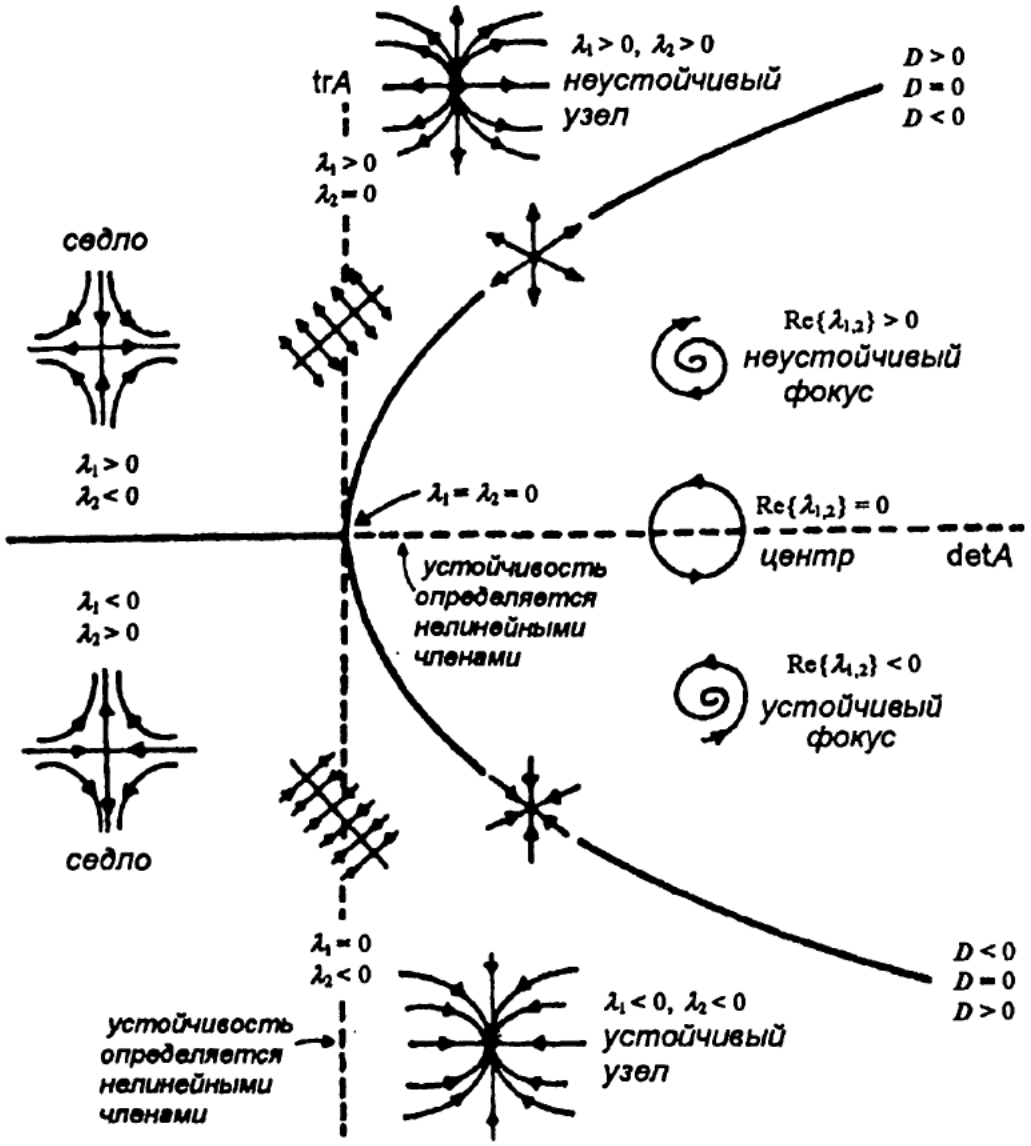

Рис. 1.3. Классификация особых точек линейных двумерных систем.

В трехмерном вещественном пространстве существуют более сложные гиперболические особые точки, являющиеся комбинациями седла с узлом или фокусом и называемые, соответственно, *седло-узлом* (рис. 1.4) и *седло-фокусом* (рис. 1.5). Седло-узел и седло-фокус всегда неустойчивы. Они имеют одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия (или наоборот). Как мы увидим ниже, в окрестностях таких особых точек возможно присутствие сложной нерегулярной динамики. Поэтому эти точки могут играть важную роль в образовании хаотических аттракторов нелинейных систем обыкно-

венных дифференциальных уравнений.

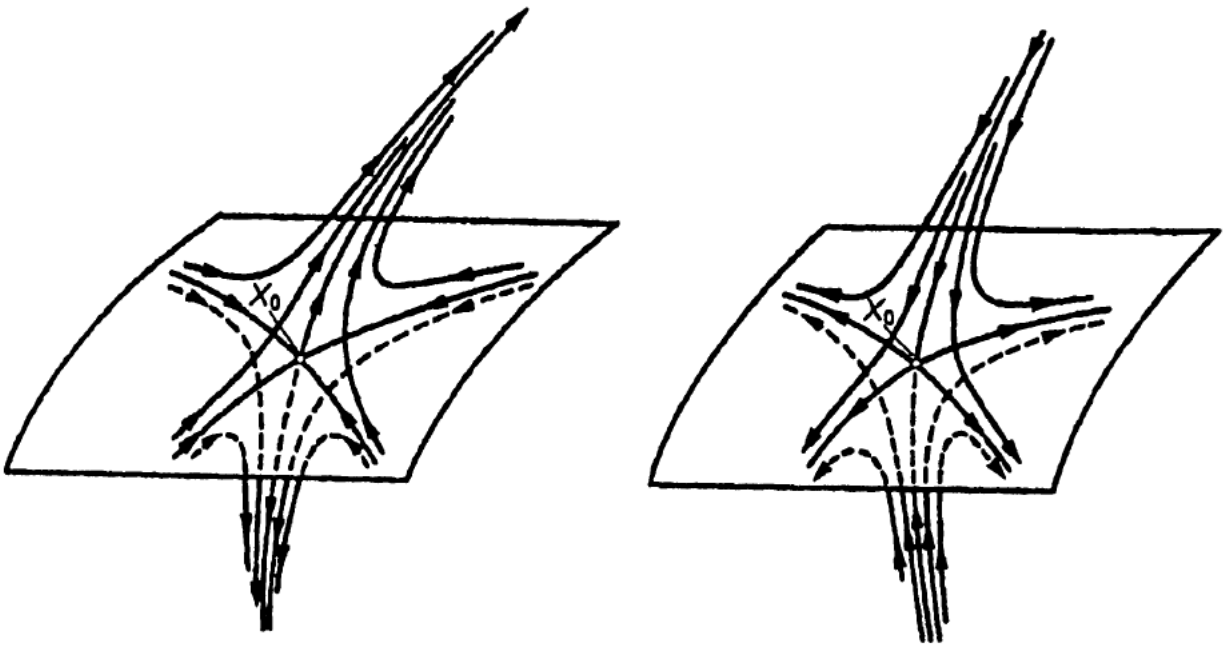

Рис. 1.4. Особые точки x_0 типа седло-узел.

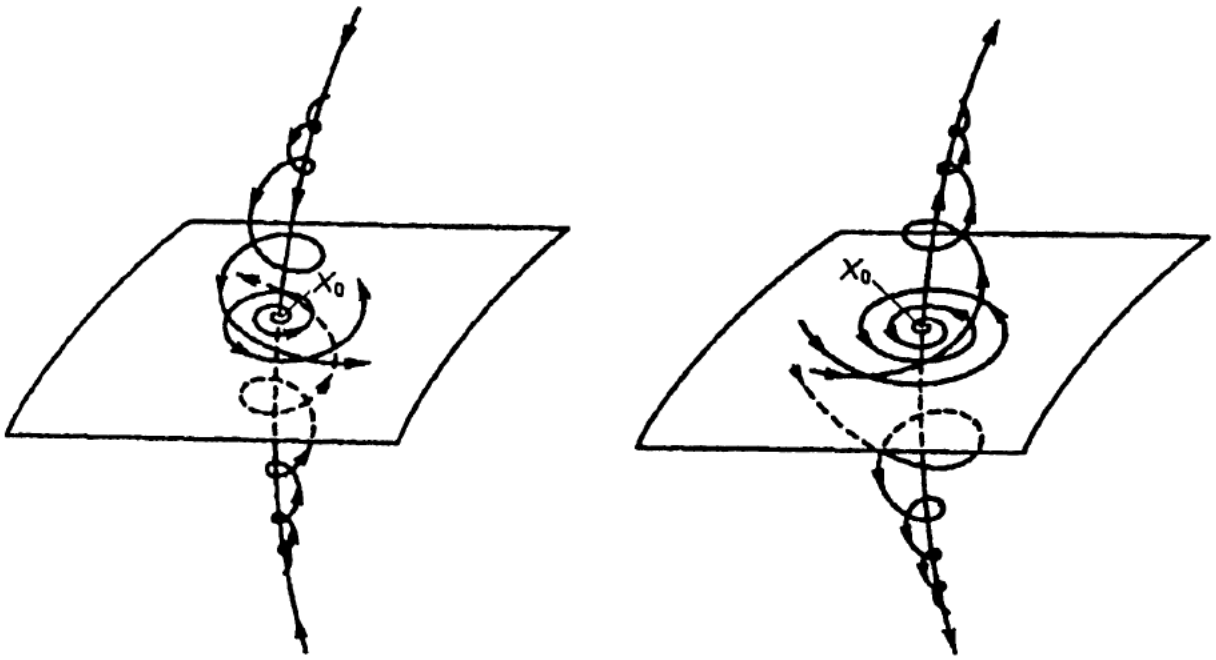

Рис. 1.5. Особые точки x_0 типа седло-фокус.

1.2.5. Сепаратрисы особых точек. Гомоклинические и гетероклинические траектории. Сепаратрисные контуры. Траектория автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется *сепаратрисой особой точки*, если она стремится к особой точке либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Одномерные инвариантные устойчивые (неустойчивые) многообразия особых точек состоят из самой особой точки и двух входящих в



Рис. 1.6. Гомоклинический (а) и гетероклинический (б) контуры.

нее (исходящих из нее) сепаратрис. Многомерные инвариантные многообразия особых точек иногда также называют *сепаратрисными поверхностями*.

Гомоклинической траекторией (петлей сепаратрисы) особой точки называется траектория (фазовая кривая), стремящаяся к особой точке как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Гомоклиническая траектория принадлежит пересечению устойчивого инвариантного W^s и неустойчивого инвариантного W^u многообразий особой точки.

Гетероклинической траекторией называется траектория, принадлежащая пересечению устойчивого инвариантного многообразия одной особой точки с неустойчивым инвариантным многообразием другой особой точки и стремящаяся при $t \to +\infty$ к первой особой точке, а при $t \to -\infty$ ко второй особой точке.

Сепаратрисным контуром называется замкнутая (в фазовом пространстве) кривая (цикл), состоящая из нескольких сепаратрис, соединяющих особые точки.

В двумерных системах с невырожденными особыми точками возможны только гомоклинические траектории седел и произвольные гетероклинические траектории и сепаратрисные контуры, соединяющие седла, узлы и фокусы (рис.1.6).

Рассмотрим пример системы на плоскости, имеющей при различных значениях параметра как гомоклинические, так и гетероклинические траектории

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = \gamma - \sin x.$$

Последняя система при $\gamma = 0$ имеет сёдла в точках $(\pm\pi, 0)$ и центр в точке $(0, 0)$. Две гетероклинические траектории, соединяющие седла, находятся прямым интегрированием системы методом разделения переменных. Они удовлетворяют уравнению $y^2 = 4\cos^2\dfrac{x}{2}$. При $0 < \gamma < 1$ система имеет центр в точке $(x_1, 0)$ и седло в точке $(x_2, 0)$, где $x_1 = \arcsin\gamma$, $x_2 = \pi - x_1$. Интегрируя систему, найдем, что петля сепаратрисы седла удовлетворяет уравнению

$$y^2 = 2\gamma x + 4\cos^2\frac{x}{2} - C,\ \text{где}\ C = 2\gamma x_2 + 4\cos^2\frac{x_2}{2}.$$

В трехмерных системах с невырожденными особыми точками возможны петли сепаратрис как седло-узлов, так и седло-фокусов, а также различные гетероклинические траектории и состоящие из них замкнутые сепаратрисные контуры. Примеры таких контуров приведены в п. 2.4.2.

1.3. Периодические и непериодические решения, предельные циклы и инвариантные торы.

1.3.1. Периодические решения. Решение $x(t)$ автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) называется *периодическим решением*, если существует постоянная T, такая что $x(t+T) = x(t)$ для всех t. Минимальное такое значение T называется *периодом* решения $x(t)$, а само решение $x(t)$ – *T-периодическим.*

Фазовая кривая (траектория) периодического решения системы (1.1) является замкнутой и называется *циклом.* Обратно, любой цикл (замкнутая фазовая кривая) системы (1.1) определяет периодическое решение системы с некоторым периодом.

Теория циклов, развитая, в основном, в трудах А. Пуанкаре, дает возможность математически описать эволюцию огромного класса природных явлений и социальных процессов, заключающуюся в установлении со временем периодических режимов их функционирования или поведения.

1.3.2. Предельные циклы. Замкнутые траектории систем дифференциальных уравнений могут быть изолированными и неизолированными.

Определение. *Предельным циклом* автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) называется ее изолированная замкнутая траектория.

Неизолированные замкнутые траектории, существующие, например, в окрестности особой точки типа центр, не представляют интереса для теории диссипативных систем дифференциальных уравнений, так как они не являются предельными траекториями в том смысле, что для каждой такой траектории не существует ее окрестности, из которой все другие траектории стремятся к ней либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Определение. Предельный цикл называется *орбитально асимптотически устойчивым* (или просто устойчивым), если для сколь угодно малой его окрестности U, все траектории, начинающиеся в достаточно малой его окрестности, не выходят со временем из U и неограниченно приближаются к циклу при $t \to +\infty$.

Исследование предельного цикла на устойчивость может быть проведено с использованием теории Флоке. Пусть $x_0(t)$ – Т-периодическое решение системы (1.1), представленное в фазовой плоскости своим предельным циклом. Линеаризуя систему (1.1) на ее периодическом

решении аналогично тому, как это сделано в п. 1.2.1, получим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad \text{где} \qquad A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t)) \tag{1.5}$$

с T-периодической матрицей $A(t)$ и $y(t) = x(t) - x_0(t)$.

Теорема 1.9 (теорема Флоке [12, 36]). *Каждое фундаментальное матричное решение линейной системы* (1.5) *с периодическими вещественными коэффициентами представимо в виде* $Y(t) = P(t)\exp(Bt)$, *где* $P(t)$ *– некоторая* T*-периодическая комплексная матрица, а* B *– некоторая постоянная комплексная матрица, причем существует обратимая действительная матрица* C *такая, что* $C = \exp(BT)$.

Матрица C, называемая *матрицей монодромии*, единственным образом определяется периодической матрицей $A(t)$. Ее собственные значения λ_i называются *мультипликаторами* линейной системы (1.5) или *мультипликаторами цикла*, по которому система (1.5) построена. Собственные значения α_i матрицы B называются *показателями Флоке*. Их вещественные части также определяются однозначно. Очевидно, что $\lambda_i = \exp(\alpha_i T)$, а $C = Y(T)$, если $Y(0)$ – единичная матрица.

Действительная неособая матрица C не обязана иметь действительный логарифм, т.е. не всегда существует действительная матрица B такая, что $C = \exp(BT)$. Примером является матрица C, имеющая простой отрицательный мультипликатор. Однако матрица C^2 уже всегда имеет действительный логарифм. Поэтому каждое действительное фундаментальное матричное решение линейной системы (1.5) с T-периодическими коэффициентами представимо в виде $Y(t) = \tilde{P}(t)\exp(\tilde{B}t)$, где $\tilde{P}(t)$ – некоторая действительная $2T$-периодическая матрица, а $\tilde{B}$ – некоторая постоянная действительная матрица такая, что $C^2 = \exp(2\tilde{B}T) = \exp(2BT)$.

По значениям мультипликаторов цикла или показателей Флоке линейной неавтономной системы (1.5) первого приближения можно сделать вывод об устойчивости периодического решения $x_0(t)$ нелинейной автономной системы (1.1).

Теорема 1.10 ([36]). *Один простой мультипликатор цикла всегда имеет значение* $+1$, *соответствующий показатель Флоке равен нулю. Если один показатель Флоке равен нулю, а все остальные* $m-1$ *показателей имеют отрицательные вещественные части (или все мультипликаторы цикла, кроме единичного, имеют модули, меньшие 1, то есть лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного), то периодическое решение* $x_0(t)$ *системы* (1.1) *устойчиво (асимптотически орбитально устойчиво). Если же хотя бы один показатель Флоке имеет положительную вещественную часть (или мультипликатор цикла лежит вне единичного круга), то периодическое решение* $x_0(t)$ *системы* (1.1) *неустойчиво.*

Можно показать [36], что в условиях сформулированной теоремы периодическое решение $x_0(t)$ не только устойчиво, но каждое решение $x(t)$, лежащее вблизи его траектории, обладает асимптотической фазой, т.е. существует постоянная c такая, что

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_0(t+c)\| = 0.$$

Нетрудно видеть, что производная $y(t) = \dot{x}_0(t)$ исходного периодического решения нелинейной автономной системы (1.1) является одним из решений линейной неавтономной системы (1.5), так как

$$\dot{y} = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t))\dot{x}_0(t) = A(t)y(t).$$

Поэтому единичный мультипликатор цикла соответствует собственному вектору матрицы монодромии, касающемуся цикла. Он связан с движением вдоль цикла и не влияет на его устойчивость. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы изображены на рис. 1.7 (а,б).

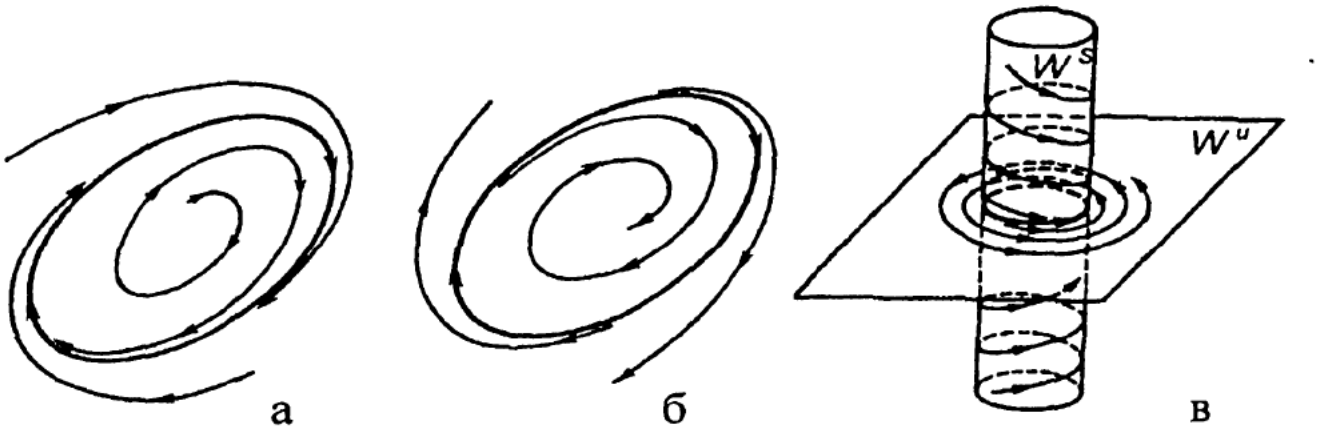

Рис. 1.7. Устойчивый (а), неустойчивый (б) и седловой (в) предельные циклы.

Периодическое решение не может быть асимптотически устойчивым, так как решения с начальными условиями в разных точках цикла не сближаются при $t \to +\infty$.

Определение. Предельный цикл называется *гиперболическим*, если он не имеет мультипликаторов, лежащих на единичной окружности, кроме одного, равного $+1$ (имеется ровно один показатель Флоке с нулевой вещественной частью, равный нулю).

Определение. Предельный цикл называется *невырожденным*, если он не имеет мультипликаторов, равных $+1$, кроме одного (имеется ровно один простой нулевой показатель Флоке, но могут быть ненулевые показатели Флоке с нулевыми вещественными частями).

Определение. Предельный цикл, имеющий мультипликаторы внутри и на границе единичного круга, называется *полуустойчивым*.

Полуустойчивый предельный цикл в трехмерном случае имеет мультипликаторы, равные $\{|\lambda_1| < 1,\ +1,\ |\lambda_2| = 1\}$.

Определение. Гиперболический предельный цикл, для которого показатели Флоке имеют как отрицательные, так и положительные вещественные части (или мультипликаторы лежат как внутри, так и вне единичной окружности) называется *седловым*. Понятие седлового цикла определено для размерности фазового пространства $m > 2$. При $m = 3$ седловой предельный цикл имеет мультипликаторы, равные $\{|\lambda_1| < 1,\ +1,\ |\lambda_2| > 1\}$.

Для седлового предельного цикла автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений одни фазовые кривые, находящиеся вблизи седловой траектории, стремятся к ней (наматываются на нее) при $t \to +\infty$, образуя ее устойчивое инвариантное многообразие W^s, а другие – сматываются с нее, образуя ее неустойчивое инвариантное многообразие W^u (рис. 1.7в).

Приведенное выше определение гиперболического предельного цикла соответствует определению, данному в работе [3], и естественным образом обобщает понятие гиперболической особой точки. Из этого определения в частности следует, что устойчивый цикл также является гиперболическим. Заметим, однако, что в литературе, посвященной теории гиперболических динамических систем, часто гиперболическими циклами называются именно седловые в нашем определении предельные циклы.

1.3.3. Отображение Пуанкаре. Кроме вычисления показателей Флоке существует и другой метод изучения качественного поведения решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности предельного цикла – построение отображения Пуанкаре и исследование свойств этого отображения в окрестности его неподвижной точки. Основной смысл использования отображения Пуанкаре для анализа динамики систем дифференциальных уравнений состоит в том, что при переходе к отображению размерность изучаемой системы уменьшается на единицу.

Пусть γ – предельный цикл, соответствующий T-периодическому решению $x_0(t)$ автономной системы (1.1). Проведем через некоторую точку x^* замкнутой кривой γ $(m-1)$-мерную секущую гиперповерхность S трансверсально γ, т.е. так, чтобы касательный к кривой γ в точке x^* вектор не лежал в S. Так как кривая γ является фазовой кривой T-периодического решения, то траектория, стартующая в точке x^*, за время T вернется в эту же точку. Любая другая траектория, стартующая из некоторой точки x, лежащей в окрестности $U \subset S$ точки x^*, вернется и пересечет S в том же направлении в точке $P(x)$, лежащей в окрестности $V \subset S$ точки x^* (рис. 1.8а). Локальный *диффеоморфизм* $P : U \to V$, т.е. взаимно однозначное отображение, дифференцируемое вместе с обратным, называется *отображением Пуанкаре или отображением первого возвращения.*

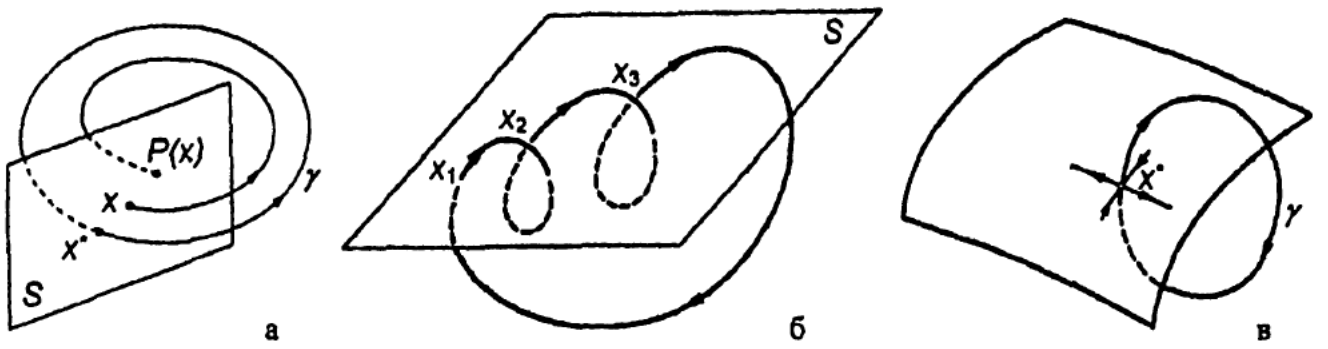

Рис. 1.8. Неподвижная точка (а), цикл (б) и седловая точка (в) отображения Пуанкаре с соответствующим ей седловым предельным циклом.

Так как $P(x^*) = x^*$, то точка x^* является неподвижной точкой отображения Пуанкаре. Циклу отображения Пуанкаре порядка n (или n-кратному циклу) соответствует последовательность точек $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих условиям (рис. 1.8б)

$$x_2 = P(x_1),\ x_3 = P(x_2),\ ...,\quad x_1 = P(x_n).$$

Определение. Неподвижная точка x^* отображения $P(x)$ устойчива, если существует ее окрестность U такая, что все итерации отображения P, начинающиеся в этой окрестности, сходятся к неподвижной точке, т.е. если $x_0 \in U$ и $x_{k+1} = P(x_k),\ k = 0, 1, ...$, то $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$.

Так как отображение Пуанкаре дифференцируемо, то его можно линеаризовать в его неподвижной точке

$$P(x) - x^* = A(x - x^*) + o(\|x - x^*\|),\ \text{где}\ A = D_x P(x^*) = \frac{\partial P}{\partial x}(x^*).$$

Линейный оператор A имеет ранг, равный $m - 1$. При выборе соответствующей гиперповерхности S, перпендикулярной вектору, касательному к циклу γ в точке x^*, и системы координат, один из ортов которой совпадает с касательным к циклу вектором, матрица оператора A будет иметь размерность $(m-1) \times (m-1)$.

Как и в случае систем дифференциальных уравнений отображение $P(x)$ может быть консервативным, т.е. сохранять фазовый объем, и диссипативным – сжимать фазовый объем.

Определение. Отображение $P(x)$ называется консервативным в области $B \subset M$, если $|\det D_x P(x)| = 1$ для всех $x \in B$. Если же для всех $x \in B$ имеет место $|\det D_x P(x)| < 1$ то отображение $P(x)$ называется диссипативным в области $B \subset M$.

Устойчивость неподвижной точки отображения $P(x)$ определяется собственными значениями матрицы A.

Теорема 1.11 ([15]). *Если все $m-1$ собственных значений α_k матрицы A лежат внутри единичного круга плоскости комплексного*

переменного, т.е. $|\alpha_k| < 1$, то неподвижная точка x^* отображения $P(x)$ устойчива; если же среди собственных значений α_k имеется хотя бы одно α_i с $|\alpha_i| > 1$, то неподвижная точка отображения $P(x)$ неустойчива.

Естественно все приведенные выше определения и теоремы переносятся без изменений на любые дифференцируемые многомерные отображения $P(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Устойчивой (неустойчивой) неподвижной точке отображения Пуанкаре соответствует устойчивый (неустойчивый) цикл соответствующей системы дифференциальных уравнений, а седловой точке, имеющей собственные значения оператора линейной части, лежащие как внутри, так и вне единичного круга плоскости комплексного переменного, соответствует седловой предельный цикл (рис. 1.8в).

К сожалению, при изучении конкретных систем дифференциальных уравнений построение отображения Пуанкаре и его производной возможно только численно. С другой стороны, результаты, полученные для абстрактных $(m-1)$-мерных отображений, совсем необязательно должны переноситься на m-мерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Другими словами, к настоящему времени не решена даже проблема возможности восстановления системы дифференциальных уравнений по ее отображению Пуанкаре, и очень сомнительно, чтобы сделать это оказалось проще, чем провести полное качественное исследование самой системы дифференциальных уравнений. Кроме того, рассматриваемые ниже в главе 3 многочисленные примеры анализа сценариев перехода к хаосу в конкретных многомерных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений показывают, что этот переход аналогичен переходу к хаосу в результате бифуркаций непрерывных одномерных отображений. Поэтому более интересным и важным нам представляется анализ именно одномерных непрерывных отображений и их связь с нелинейными диссипативными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта связь реализуется не через отображение Пуанкаре, а через переход к некоторому $(m-1)$-мерному (двумерному в трехмерном случае) подпространству, вращающемуся трансверсально циклу, и через построение в нем уже одномерного отображения. Рассмотрению этих вопросов посвящена глава 4 книги.

1.3.4. Инвариантные торы. В системах дифференциальных уравнений T-периодическое движение по циклу является одним из наиболее простых движений и характеризуется наличием одной частоты $\omega = 2\pi/T$. Значительно более сложным является многочастотный режим движения, характеризующийся наличием нескольких независимых частот $\omega_1, ..., \omega_n$. Движение в таком режиме можно представить как движение по поверхности n-мерного инвариантного тора, задаваемого углами $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \omega_i t$, $i = \overline{1,n}$ (рис. 1.9а). Размерность m фазового пространства при этом должна быть не меньше, чем $n+1$.

Поведение траекторий системы на поверхности тора существен-

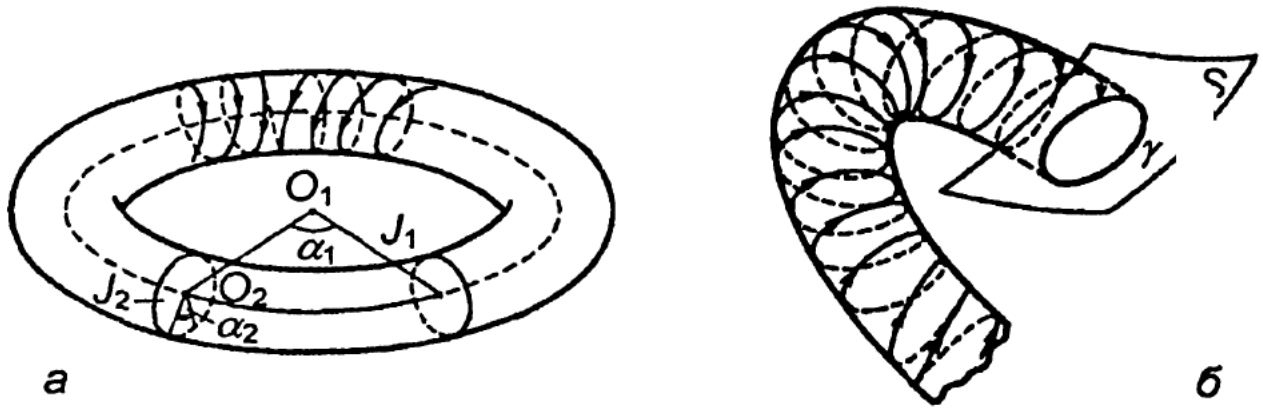

Рис. 1.9. Двумерный инвариантный тор (а) и квазипериодический режим движения на нем (б).

но зависит от соотношения между частотами ω_i, $i = 1, ..., n$. В случае, например, $n = 2$ движение по двумерному тору будет периодическим тогда и только тогда, когда отношение частот рационально, т.е. $\omega_1/\omega_2 = k/m$, где $k, m \in \mathbb{N}$. При этом $T = \pi(k/\omega_1 + m/\omega_2)$ и, следовательно, $\alpha_1(T) = \alpha_{10} + \omega_1 T = \alpha_{10} + 2\pi k$, а $\alpha_2(T) = \alpha_{20} + \omega_2 T = \alpha_{20} + 2\pi m$, т.е. углы α_1 и α_2 задают одну и ту же точку на поверхности тора и поэтому за время T траектория возвращается в исходную точку.

В случае когда частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, т.е. их отношение иррационально, фазовая траектория никогда не замкнется и с течением времени будет проходить сколь угодно близко к любой заданной точке на поверхности тора. В этом случае фазовая кривая образует всюду плотную обмотку тора, а такое движение называется *квазипериодическим.*

Периодическое и квазипериодическое движения по тору удобно наглядно представлять отображением Пуанкаре на секущей гиперповерхности S, проведенной трансверсально к поверхности тора. При этом периодическое движение будет представлено в S конечным числом точек, последовательно переходящих друг в друга под воздействием отображения Пуанкаре, а квазипериодическое – бесконечным множеством точек, плотно заполняющих некоторую замкнутую кривую (рис. 1.9б).

Периодические и квазипериодические движения по многомерным инвариантным торам возникают естественным образом в гамильтоновых консервативных системах [39, 40]. При этом необходимо различать резонансные и нерезонансные торы.

Определение. Инвариантный тор размерности $n \geq 2$ называется *резонансным*, если существуют некоторые не все равные нулю целые числа k_i, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i = 0.$$

В случае полностью интегрируемой гамильтоновой системы все фазовое пространство можно представить в виде совокупности вложенных друг в друга резонансных и нерезонансных торов, так что каждый тор не является ни изолированным, ни предельным. В случае же неполностью интегрируемой гамильтоновой системы резонансные и некоторые из нерезонансных торов разрушаются, а движение с заданными на них начальными условиями оказывается очень сложным, отличным как от периодического, так и от квазипериодического. Области разрушенных торов сливаются, образуя единую сеть - *паутину Арнольда*. Движение по этой паутине, называемое *диффузией Арнольда*, является примером хаотического поведения решений в консервативных системах. Объяснение этому явлению дает теорема КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера), прекрасно изложенная во многих монографиях и учебниках [2, 39, 47], к которым мы и отсылаем интересующегося этими вопросами читателя. Здесь же мы лишь отметим, что в любом случае торы в консервативных гамильтоновых системах не являются предельными множествами и не могут быть устойчивыми в том же смысле, что и предельные циклы.

Напротив, в диссипативных системах, исследованию которых посвящена настоящая работа, именно устойчивые торы во многих случаях играют существенную роль.

Определение. Инвариантный тор называется устойчивым, если для сколь угодно малой его окрестности U, все траектории, начинающиеся в достаточно малой его окрестности, не выходят со временем из U и неограниченно приближаются к тору при $t \to +\infty$.

Методы анализа устойчивости инвариантных торов диссипативных систем нелинейных дифференциальных уравнений в настоящее время разработаны еще не достаточно. Можно попытаться проанализировать на устойчивость замкнутую кривую, заполненную точками отображения Пуанкаре на секущей гиперповерхности S. Однако, эта кривая не является решением какого-либо уравнения, и анализ ее устойчивости представляется весьма проблематичным. Можно также пытаться использовать рассматриваемые в следующем пункте показатели Ляпунова, что представляет собой скорее теоретическую, чем практическую ценность. В целом ситуация с диссипативными системами выглядит значительно более сложной, чем в случае гамильтоновых систем, а нахождение даже двумерных торов в конкретных системах дифференциальных уравнений является скорее искусством, чем наукой. Некоторые оригинальные методы нахождения устойчивых торов и анализа их бифуркаций изложены во второй главе книги.

1.3.5. Непериодические решения. Показатели Ляпунова. Понятия устойчивости, сформулированные выше для стационарных и периодических решений, естественным образом переносятся на произвольные решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1).

Определение. Решение $x_0(t)$ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если все решения этой системы с начальными условиями из достаточно малой окрестности начального условия указанного решения определены на всей положительной полуоси времени и равномерно по времени сходятся к исследуемому решению при стремлении начального условия к начальному условию указанного решения.

Другими словами, решение $x_0(t)$ системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех решений $x(t)$ системы (1.1) из условия $\|x(0) - x_0(0)\| < \delta$ следует $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ для всех $t > 0$.

Определение. Решение $x_0(t)$ автономной системы дифференциальных уравнений (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения $x(t)$ системы (1.1) с достаточно близкими к исследуемому решению начальными условиями $\|x(0) - x_0(0)\| < \delta$ стремятся к нему при $t \to \infty$, т.е. $\|x(t) - x_0(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Если в условиях асимптотической устойчивости стремление решений системы уравнений (1.1) к исследуемому решению $x_0(t)$ экспоненциально, т.е. $\|x(t) - x_0(t)\| \leq c\exp(-\gamma t)$ с некоторыми положительными постоянными c и γ, то решение $x_0(t)$ системы (1.1) называется *экспоненциально асимптотически устойчивым.*

Некоторые виды асимптотической, но не экспоненциально асимптотической устойчивости (степенной и дробно-экспоненциальной устойчивости) исследованы в [48].

Для исследования устойчивости решения $x_0(t)$ системы (1.1) линеаризуем ее на этом решении аналогично тому, как это сделано в п. 1.2.1 и п. 1.3.2, и получим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad \text{где} \qquad A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t)), \tag{1.6}$$

а $y(t) = x(t) - x_0(t)$. В данном случае линейный оператор $A(t)$ может иметь матрицу с произвольными ограниченными на полуоси $0 \leq t < \infty$ элементами.

Рассмотрим решение $y(t)$ линейной системы (1.6) и определим для него *показатель Ляпунова* $\lambda(y)$ по формуле

$$\lambda(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}.$$

В частном случае, когда $x_0(t) = x_0$ – стационарное решение, оператор линейной части имеет постоянную матрицу $A(t) = A$. При этом фундаментальная матрица решений линейной системы (1.6) имеет вид $Y(t) = \exp(At)$. Без ограничения общности будем считать, что

матрица A имеет жорданову форму. Следовательно, каждой ее жордановой клетке порядка k с собственным значением λ соответствует цепочка из k решений линейной системы вида

$$y_i(t) = e^{\lambda t}\Big(\xi_{i-1} + t\xi_{i-2} + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\xi_0\Big), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где ξ_0 – собственный, а ξ_j – присоединенные вектора собственного значения λ. Для каждого из решений цепочки его показатель Ляпунова $\lambda(y_i)$, очевидно, равен $\mathrm{Re}\lambda$. Таким образом, линейная система (1.6) с постоянной матрицей A имеет m показателей Ляпунова с учетом их кратностей, совпадающих с вещественными частями собственных значений матрицы A. Кратность каждого показателя определяется порядком соответствующей ему жордановой клетки. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению стационарное решение (особая точка) системы (1.1) асимптотически устойчиво, если все показатели Ляпунова линейной системы первого приближения отрицательны.

В другом важном частном случае, когда $x_0(t)$ является периодическим решением автономной системы (1.1), показатели Ляпунова совпадают с вещественными частями показателей Флоке, что следует из представления фундаментальной матрицы решений в виде $Y(t) = P(t)\exp(Bt)$ с периодической и, следовательно, ограниченной матрицей $P(t)$. Система также имеет m показателей с учетом их кратностей, которые определяются порядками жордановых клеток матрицы B. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.12 ([12]). *Если траектория автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1.1) *остается в ограниченной области и не стремится к особой точке при* $t \to \infty$, *то по крайней мере один показатель Ляпунова линеаризованной на этом решении системы равен нулю.*

Таким образом, если один из показателей Ляпунова системы, линеаризованной на периодическом решении, равен нулю, а все остальные показатели отрицательны, то предельный цикл устойчив. Нулевой показатель соответствует направлению, касательному к циклу (рис. 1.10а).

В общем случае линейная неавтономная система (1.6) имеет m показателей

$$\lambda_m \le \lambda_{m-1} \le \ldots \le \lambda_2 \le \lambda_1,$$

среди которых могут быть и кратные. Показатели в этом случае уже не являются собственными значениями какой-либо постоянной матрицы, в том числе и матрицы $A(\infty)$, если даже соответствующий предел существует. Нулевой показатель соответствует направлению, касательному к ограниченному непериодическому решению и не стремящемуся к особой точке. Показатель λ_1 называется старшим характеристическим показателем системы (1.6) и обозначается через Λ.

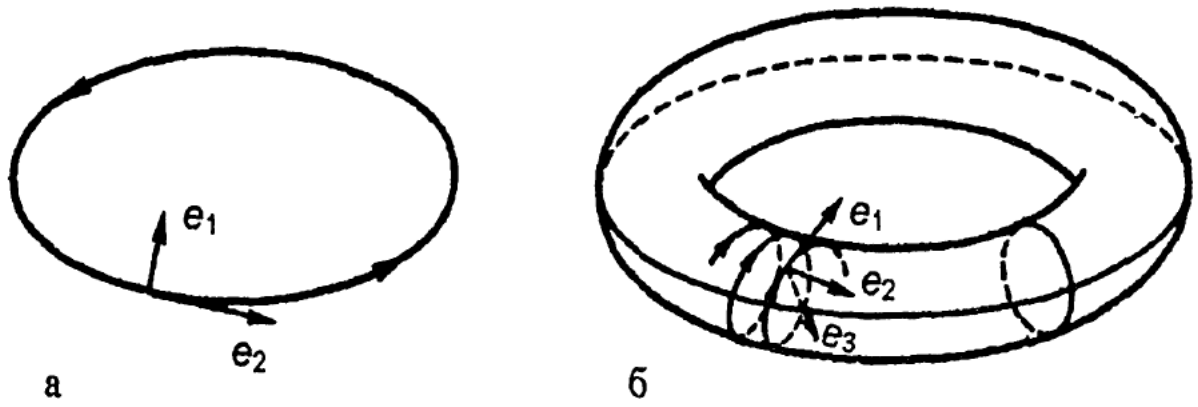

Рис. 1.10. В случае предельного цикла (а) и инвариантного тора (б) равны нулю показатели Ляпунова, отвечающие соответственно направлениям e_2 и e_1, e_2.

Нетрудно показать, что

$$\Lambda = \sup_{y \neq 0} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}.$$

Определение. Линейная неавтономная система (1.6) с вещественными коэффициентами называется *правильной*, если сумма ее показателей Ляпунова совпадает со средним значением следа матрицы $A(t)$, который в свою очередь совпадает с дивергенцией векторного поля, т.е.

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} A(s) ds = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{m} a_{kk}(s) ds = \overline{\mathrm{tr} A(t)} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{div} F(x_0(s)) ds.$$

Принято считать, что все интересные с практической точки зрения системы являются правильными. Для таких систем имеет место обобщенная теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 1.13 ([43]). *Пусть решение $x_0(t)$ неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1.2) *таково, что разность $y(t) = x(t) - x_0(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\dot{y} = A(t)y + f(y,t),$$

где $A(t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0(t), t)$, $\|f(y,t)\| \leq K\|y\|^q$, $q > 1$. *Тогда, если линейная система первого приближения $\dot{y} = A(t)y$ правильная и имеет*

отрицательный старший характеристический показатель Λ, *то решение* $x_0(t)$ *системы* (1.2) *асимптотически устойчиво. Если показатель* $\Lambda > 0$, *то решение* $x_0(t)$ *системы* (1.2) *неустойчиво.*

Существуют многочисленные обобщения сформулированной теоремы, связанные, в основном, с обобщением понятия старшего характеристического показателя Λ. Так в [43] рассмотрено понятие верхнего центрального показателя, в [49] — понятие генерального показателя. В [48] введено понятие *характеристической функции* $\Lambda(t)$ линейной системы (1.6), обобщающее как понятие старшего характеристического показателя, так и понятие верхнего центрального показателя. Отрицательность характеристической функции обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $x_0(t)$ системы (1.2) без требования правильности линейной системы первого приближения и без требования отрицательности старшего характеристического показателя (он может равняться нулю).

Определение. Ограниченная траектория автономной системы (1.1) называется *гиперболической*, если линеаризованная на этом решении система (1.6) имеет ровно один простой нулевой показатель.

Последнее определение, очевидно, обобщает введенные ранее понятия гиперболической особой точки и гиперболического предельного цикла.

Определение. Гиперболическая траектория, имеющая как положительные, так и отрицательные показатели, называется *седловой.*

Для седловой траектории автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений также как и для седлового предельного цикла можно определить ее устойчивое инвариантное многообразие W^s и ее неустойчивое инвариантное многообразие W^u .

Определение *асимптотической орбитальной устойчивости* и *полуустойчивости* ограниченной непериодической траектории вводится аналогично тому, как это было сделано для предельных циклов в п. 1.3.2. В первом случае линеаризованная на решении система имеет один нулевой и остальные отрицательные показатели, а во втором – кратный нулевой и остальные отрицательные показатели.

Если траектория периодического или непериодического решения $x_0(t)$ системы (1.1) лежит на инвариантном n-мерном торе, то такое решение не может быть асимптотически устойчивым, так как решения с начальными условиями в разных точках тора не сближаются при $t \to +\infty$. При этом n показателей линеаризованной на таком решении системы, соответствующие направлениям в касательной к поверхности тора гиперплоскости, будут равняться нулю (рис. 1.10б). Сам тор будет устойчивым, если все остальные показатели Ляпунова отрицательны. Таким образом, любая траектория на поверхности устойчивого тора является полуустойчивой.

Для непериодического решения автономной системы (1.1), траектория которого не лежит на поверхности инвариантного тора, т.е. решение не является также и квазипериодическим, ничто не запрещает

реализоваться случаю, когда один (старший) или несколько показателей Ляпунова равны нулю, а остальные показатели отрицательны.

В заключение отметим одно важное свойство диссипативных систем автономных дифференциальных уравнений, вытекающее из условия правильности системы (1.6), линеаризованной на решении, лежащем в области диссипативности. Так как вдоль такого решения дивергенция векторного поля отрицательна, то сумма показателей Ляпунова линеаризованной на этом решении системы (1.6) также отрицательна, т.е.

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k < 0.$$

1.4. Аттракторы автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.4.1. Основные определения. Как уже отмечалось выше, основным отличительным свойством диссипативной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений является сокращение со временем ее фазового объема. В итоге при $t \to \infty$ все решения такой системы или часть решений неограниченно приближаются к некоторому компактному (замкнутому и ограниченному) подмножеству B фазового пространства M, называемому аттрактором. Тем самым аттрактор содержит "множество установившихся режимов" системы.

В настоящее время нет единого строгого определения аттрактора. Это связано в первую очередь с тем, что до сих пор неясно, что из себя представляют и как устроены нерегулярные (хаотические или какие-либо еще) аттракторы.

Определение. Точка y называется *ω-предельной точкой* для $x \in M$, если существует последовательность $t_n \to \infty$, такая, что $\varphi^{t_n}(x) \to y$. Множество всех ω-предельных точек для траектории, начинающейся в точке x, называется ω-предельным множеством для x и обозначается $\omega(x)$.

Объединение всех множеств $\omega(x)$ для всех $x \in G \subset M$ обозначается $\omega(G)$. Аналогично для отрицательных значений t определяются α-предельные точки и множества. Если $y \in \omega(x)$, то $\varphi^t(y) \in \omega(x)$, т.е. $\omega(x)$ является инвариантным множеством.

Определение. Компактное инвариантное относительно потока φ^t множество $B \subset M$ называется *притягивающим множеством*, если для него существует окрестность U (открытое множество, содержащее B) такая, что почти для всех $x \in U$, $\varphi^t(x) \to B$ при $t \to \infty$ (т.е. $\operatorname{dist}(\varphi^t(x), B) = \inf\limits_{y \in B} \|\varphi^t(x) - y\| \to 0$ при $t \to \infty$).

Наибольшее множество U, удовлетворяющее этому определению, называется областью притяжения B.

В традиционном определении притягивающего множества [11] мы заменили слова "для всех" на слова "для почти всех". В противном случае даже простейший аттрактор Фейгенбаума (см. главы 2–4) не удовлетворял бы определению притягивающего множества.

Не все притягивающие множества являются аттракторами, а только те из них, которые обладают свойством *неразложимости* на два отдельных компактных инвариантных подмножества. Приведем наиболее популярное на сегодняшний день определение аттрактора.

Определение. *Аттрактором* называется неразложимое притягивающее множество.

Часто аттрактором называют притягивающее множество B, содержащее всюду плотную траекторию [11], т.е. содержащее точку x, для которой $\omega(x) = B$. И это действительно так для многих аттракторов, рождающихся в результате каскадов бифуркаций устойчивых циклов. Однако, даже простой резонансный двумерный устойчивый тор не имеет всюду плотной траектории, а содержит бесконечное число периодических полуустойчивых траекторий.

Диссипативная система дифференциальных уравнений может иметь как конечное, так и бесконечное число различных аттракторов. Все начальные точки в фазовом пространстве, кроме множества меры нуль, лежат в области притяжения одного из них.

Во многих случаях аттрактор найти не удается, но важно знать, существует ли он. Для этого используется понятие *поглощающего множества*.

Определение. Компактное инвариантное множество $G \subset M$ называется поглощающим, если существует его окрестность U такая, что все траектории, начинающиеся в U, за конечное время входят в G и остаются там навсегда. Можно показать, что система, обладающая поглощающим множеством G, имеет также и аттрактор $B \subset \omega(G)$.

Аттракторы нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие введенному выше определению, бывают простыми (регулярными) и сложными (нерегулярными).

1.4.2. Классические регулярные аттракторы диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В современной литературе нет строгого определения регулярности аттрактора. Интуитивно это понятие связано с достаточной простотой поведения решений систем дифференциальных уравнений на таком аттракторе и с достаточной гладкостью самого аттрактора. Считается, что самым сложным на регулярном аттракторе может быть эргодическое движение.

Определение. *Эргодическим* называется такое движение системы дифференциальных уравнений по ее инвариантному множеству $B \subset M$, при котором относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри любой области $\Omega \subset B$, равно относительному объему этой области в B и не зависит от выбора начальных условий. Другими

словами, для почти всех $x \in B$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_\Omega(\varphi^t(x))dt = V_\Omega / V_B,$$

где χ_Ω, V_Ω – характеристическая функция и евклидов объем области Ω.

Примером эргодического движения служит квазипериодическое движение с несоизмеримыми частотами по инвариантному тору. С течением времени фазовая траектория равномерно и плотно покрывает поверхность тора. Но действие фазового потока φ^t на малую область Ω_0, принадлежащую, например, поверхности двумерного инвариантного тора, сводится просто к перемещению Ω_0 по поверхности тора (рис. 1.11а). Следовательно, как и в случае периодического движения, любые две близкие в начальный момент траектории остаются близкими и во все последующие моменты времени.

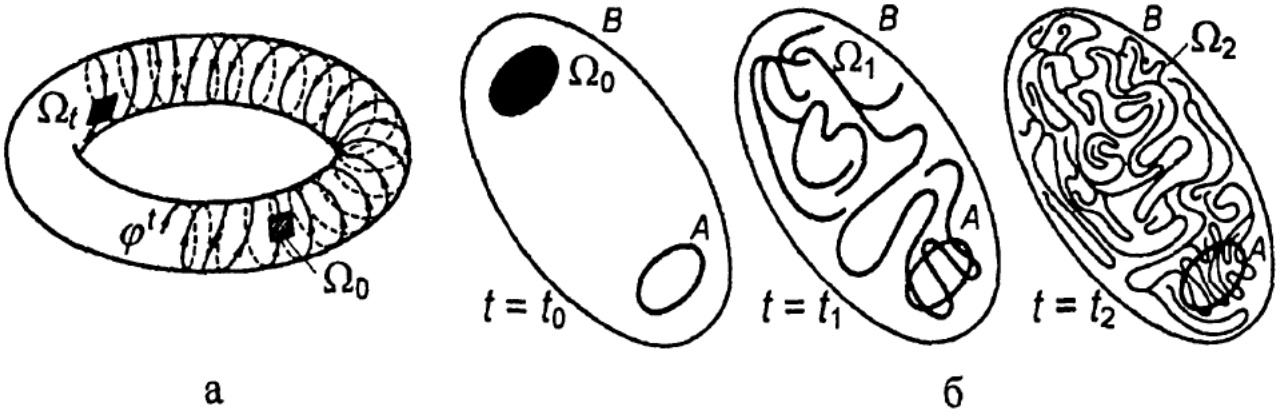

Рис. 1.11. Действие фазового потока φ^t на область Ω при квазипериодическом движении (а) и в случае перемешивания (б).

Таким образом, простыми (регулярными) аттракторами принято считать устойчивые (асимптотически устойчивые) особые точки, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) предельные циклы и устойчивые инвариантные торы. Все эти аттракторы являются подмногообразиями фазового пространства (например, предельный цикл и двумерный инвариантный тор – это, соответственно, одномерное и двумерное подмногообразия). Динамика систем с такими аттракторами не является хаотической, а носит асимптотически сходящийся, периодический или, самое сложное, эргодический характер. Главное – это то, что траектории систем с простыми (регулярными) аттракторами глобально устойчивы по отношению к малым возмущениям, что означает их глобальную предсказуемость.

Определить тип регулярного аттрактора, к которому принадлежит исследуемая траектория системы, позволяют в некоторой степени показатели Ляпунова системы первого приближения, линеари-

зованной на этой траектории. Если все показатели отрицательны, то траектория – аттрактор, являющийся устойчивой особой точкой (узел или фокус). Если один (старший) показатель равен нулю, а все остальные показатели отрицательны, то траектория скорее всего является устойчивым предельным циклом. Словосочетание "скорее всего" употреблено здесь в том смысле, что в этом случае ничто не запрещает траектории быть также и устойчивой непериодической траекторией, не заканчивающейся в особой точке. Если n показателей Ляпунова равны нулю, а все остальные $m-n$ показателей отрицательны, то траектория скорее всего лежит на инвариантном устойчивом n-мерном торе. В последнем случае ничто также не запрещает траектории быть полуустойчивой непериодической траекторией, лежащей на некоторой инвариантной n-мерной поверхности.

Здесь необходимо отметить, что, как следует из результатов работы [6], устойчивые инвариантные торы размерности $n > 2$ как правило разрушаются под воздействием всегда присутствующих в системе возмущений. Кроме того, возникновению режима движения с большим числом несоизмеримых частот препятствует явление *синхронизации* колебаний [50]. Синхронизация заключается в том, что в многомерных системах колебания с независимыми частотами сложным образом влияют друг на друга, что приводит к исчезновению квазипериодического и установлению периодического режима движения с соизмеримыми частотами, т.е. предельному циклу на торе. Поэтому появление многомерного инвариантного устойчивого тора в фазовом пространстве диссипативной системы автономных дифференциальных уравнений является скорее исключением, чем правилом.

1.4.3. Классические нерегулярные аттракторы диссипативных динамических систем. В современной литературе используется несколько различных определений сложных (нерегулярных) аттракторов, отражающих разные стороны нерегулярности поведения принадлежащих им траекторий. Основной смысл всех определений заключается в том, что на самом нерегулярном аттракторе движение должно быть неустойчивым: траектории системы должны быстро расходиться, оставаясь на аттракторе. При этом поведение решений диссипативной системы с нерегулярным аттрактором будет характеризоваться сочетанием глобального сжатия фазового объема с локальной неустойчивостью отдельных фазовых траекторий.

Однако существование большинства классических нерегулярных аттракторов доказано исключительно для дискретных диссипативных динамических систем (отображений или каскадов). Последнее обстоятельство определяет содержание настоящего параграфа, вынуждая рассмотреть несколько важных интересных примеров не из области диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Часто *хаотическим* аттрактором называется аттрактор, динамика которого характеризуется положительным показателем Ляпунова

[11]. При этом считается, что диссипативная система является правильной, и, следовательно, должны также существовать и отрицательные показатели, по сумме абсолютных величин превышающие положительный показатель. Если размерность фазового пространства равна трем, то показатели Ляпунова должны быть следующими: $\lambda_3 < 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$. Однако, как уже отмечалось выше, сложный аттрактор может иметь нулевой старший характеристический показатель. Таким является, например, аттрактор Фейгенбаума (см. ниже главу 2). Следовательно, экспоненциальное разбегание траекторий не является необходимым для хаотичности движения. Кроме того, так как показатели Ляпунова могут быть найдены только численно, а приближенное вычисление решений системы дифференциальных уравнений на ее сложном аттракторе является сильно некорректной задачей, то доверять положительности показателя Ляпунова можно далеко не всегда. Например, в случае знаменитой системы Лоренца из положительности найденного численно показателя Ляпунова не следует, как правило, наличия в системе хаотической динамики. На самом деле в этом случае система вполне может иметь устойчивый предельный цикл [29]. Таким образом, мы приходим к выводу, что численно найденное на какой-либо траектории положительное значение показателя Ляпунова не является, во-первых, характерной чертой хаотичности движения, и, во-вторых, ничего не говорит ни о природе, ни о структуре нерегулярного аттрактора.

Большинство исследователей справедливо связывают понятие хаотичности с наличием на аттракторе более сложных, чем эргодические, режимов поведения, в которых со временем начальная область Ω_0 таким образом распределяется по всему инвариантному множеству B, что ее отдельные части можно будет обнаружить в любом сколь угодно малом открытом подмножестве $A \subset B$ независимо от размеров, формы и расположения исходной области Ω_0 . Говорят, что такие системы или движения обладают свойством перемешивания (рис. 1.11б).

Строго условие перемешивания формулируется следующим образом. Обозначим $\Omega_t = \varphi^t(\Omega_0)$. Пусть $\Omega_t \cap A$ представляет собой пересечение множеств A и Ω_t.

Определение. Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) называется *перемешивающей* (и соответственно поток – *перемешивающим*) на инвариантном компактном множестве B, если для любых областей $\Omega_0 \subset B$ и $A \subset B$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(\Omega_t \cap A)}{V(A)} = \frac{V(\Omega_0)}{V(B)},$$

где $V(G)$ – евклидов объем области G.

Аттрактор, движение по которому обладает свойством перемешивания, называется *стохастическим* [11] аттрактором. Для перемешивающих систем близкие в начальный момент времени траектории уже

не остаются близкими в последующие моменты времени. Разбегание фазовых траекторий означает *непредсказуемость* поведения решений системы. Любая погрешность в определении траектории в начальный момент времени может привести со временем к совершенно непредвиденным результатам. С другой стороны, движение по стохастическому аттрактору кроме непредсказуемости обладает также и свойством *необратимости*. Зная положение фазовой точки в конечный момент времени, невозможно сказать, где точка находилась в начальный момент.

Примером классического аттрактора диссипативной системы, обладающего свойством перемешивания, является аттрактор Хенона двумерного каскада

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n,\ y_{n+1} = bx_n,\ a = 1.4,\ b = 0.3. \qquad (1.7)$$

Отображение Хенона P является диссипативным во всей своей области определения, так как $|\det D_x P| = |-b| = 0.3 < 1$. Все траектории каскада (1.7) стремятся к аттрактору, изображенному на рисунке 1.12а. Более того, любой сколь угодно малый объем в фазовом пространстве под действием отображения Хенона равномерно размазывается по всему аттрактору.

Из рис. 1.12б,в,г также видно, что аттрактор Хенона обладает масштабной инвариантностью, т.е. увеличенная часть аттрактора оказывается подобной всему аттрактору. Говорят, что в этом случае множество обладает *фрактальной структурой*. Аттракторы, имеющие фрактальную структуру, называются *странными* [6]. Такие аттракторы не являются конечным объединением подмногообразий фазового пространства (как цикл или тор) и имеют дробную размерность (см. ниже).

Однако, если для эргодичности существуют теоремы, показывающие, что этим свойством обладает большинство реальных систем, то перемешивание требует доказательства в каждом отдельном случае. Насколько нам известно, в настоящее время отсутствуют примеры аттракторов диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых свойство перемешивания строго доказано. Существование классических странных аттракторов также доказано исключительно для дискретных диссипативных динамических систем, но не для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того есть примеры странных аттракторов с нулевым старшим показателем Ляпунова, т.е. аттракторов, имеющих фрактальную структуру, но не обладающих свойством экспоненциального разбегания траекторий. Простейшим примером такого аттрактора является инвариантное множество (аттрактор Фейгенбаума) одномерного *логистического отображения*

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \qquad x \in [0; 1] \qquad (1.8)$$

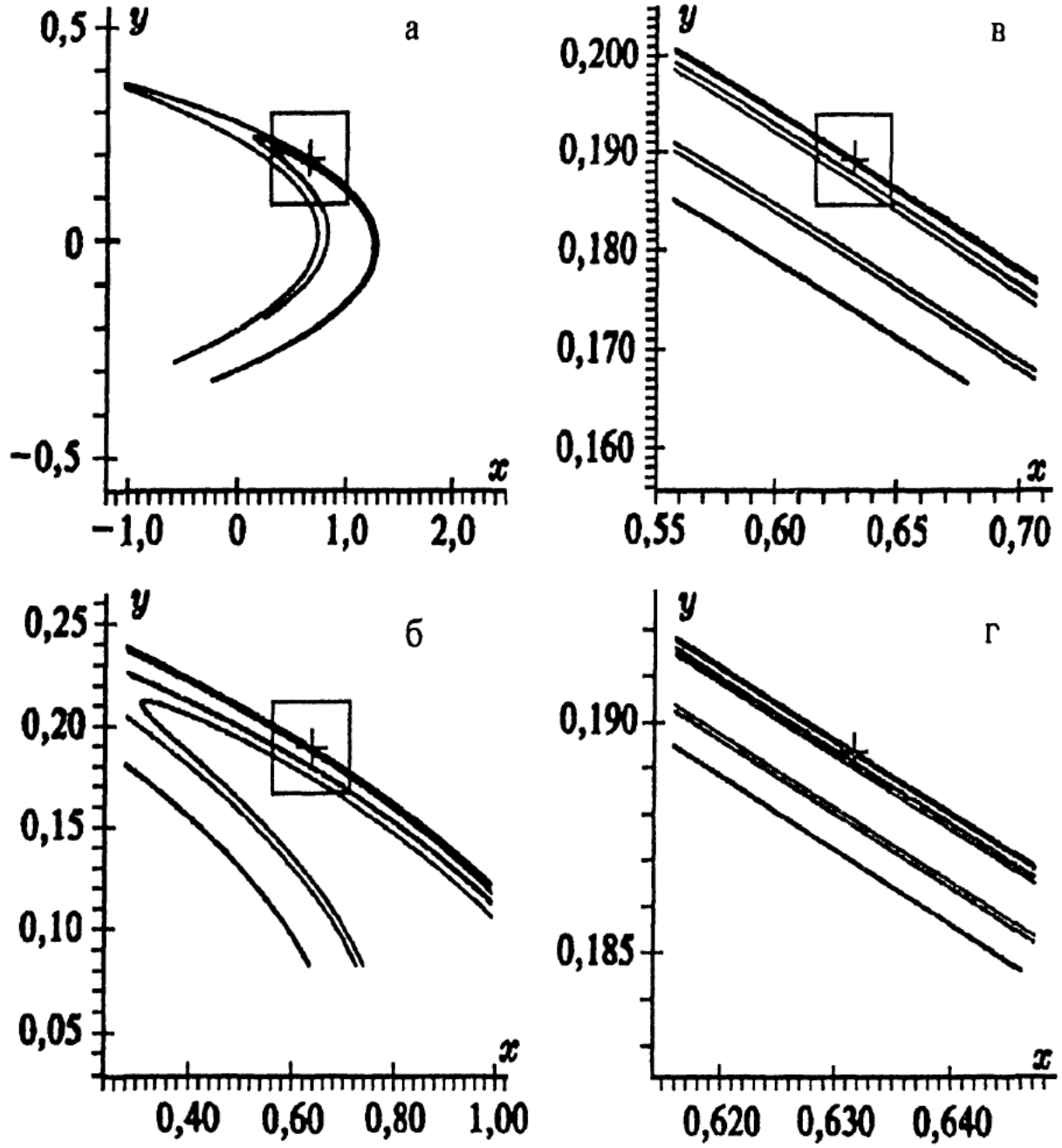

Рис. 1.12. Иллюстрация фрактальной структуры аттрактора Хенона. Квадрат выбирается в окрестности неподвижной точки, обозначенной крестиком [11].

при некотором $\mu = \mu_\infty$ (подробно отображение (1.8) будет рассмотрено в следующих главах, где будет показано, что его свойства являются типичными не только для отображений, но и для непрерывных систем дифференциальных уравнений). То же логистическое отображение при $\mu = 4$ дает пример аттрактора, совпадающего со всем отрезком $[0; 1]$ и, следовательно, не имеющего фрактальной структуры и не являющегося странным. Поэтому ни странность аттрактора, ни его стохастичность также не являются характерными чертами хаотичности.

В некоторых работах, в особенности по теории дискретных дина-

мических систем (каскадов) активно используется понятие *гиперболического аттрактора* [3, 51], являющегося одновременно аттрактором и гиперболическим множеством, т.е. множеством, целиком состоящим из седловых траекторий. Гиперболичность аттрактора обеспечивает расщепление касательного пространства на растягивающее и сжимающее подпространства. В окрестности гиперболического аттрактора динамическая система наряду с неустойчивостью траекторий обнаруживает также и сильные стохастические (вероятностные) свойства. Поэтому все гиперболические аттракторы являются стохастическими.

Свойство гиперболичности накладывает еще более жесткие требования на аттрактор, чем его стохастичность. Поэтому неудивительно, что к настоящему времени построено всего несколько исключительных модельных примеров существования гиперболических аттракторов только дискретных динамических систем. В диссипативных системах автономных дифференциальных уравнений гиперболических аттракторов до сегодняшнего дня не найдено.

Примером гиперболического аттрактора служит *соленоид Смейла-Вильямса*. Общую конструкцию построения соленоида можно найти в [7]. Здесь мы приведем лишь схему построения. Рассмотрим тороидальную область D, т.е. внутренность двумерного тора в пространстве размерности не менее трех (рис. 1.13а). Растянем ее, затем со-

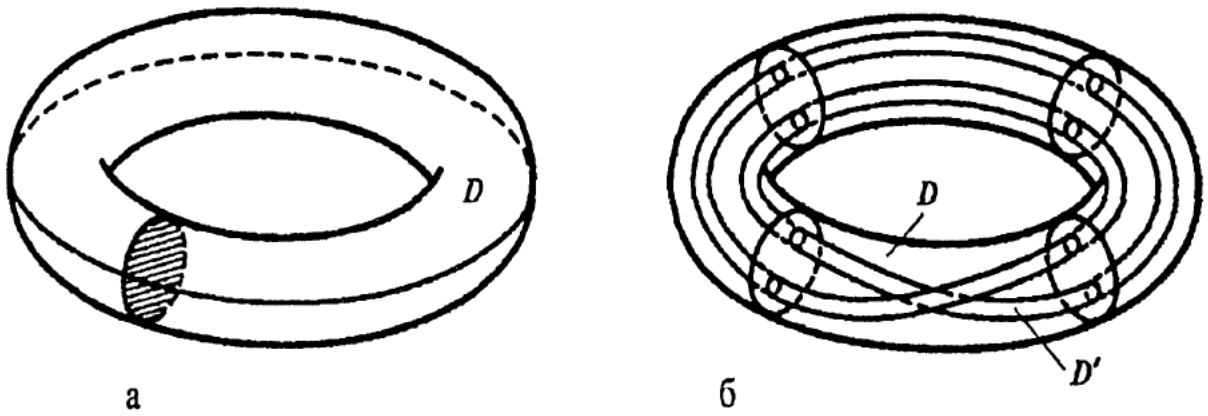

Рис. 1.13. Построение соленоида Смейла-Вильямса.

жмем вдоль меридиана, затем перекрутим и изогнем так, чтобы она перешла в область D', лежащую в D (рис. 1.13б). Аналогичное преобразование применим к области D' и получим область D'', и т.д. В результате бесконечной последовательности таких преобразований в сечении тороидальной области вертикальной плоскостью получим иерархию структур, типа изображенных на рис. 1.14. При этом изначально близкие точки будут расходиться экспоненциально быстро, а объем исходной области D – стремиться к нулю. В пределе получается инвариантное притягивающее множество – аттрактор, представляющий собой линию, бесконечное число раз пересекающую секущую

плоскость и имеющую в сечении фрактальную структуру канторова множества.

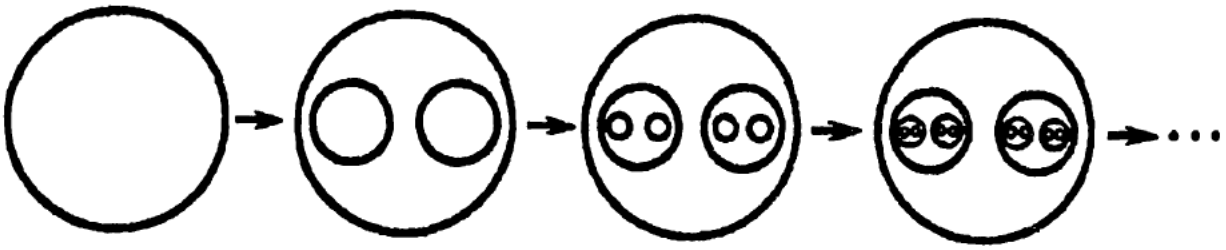

Рис. 1.14. Иерархия структур, возникающих при построении соленоида Смейла-Вильямса (в сечении).

Другим важным примером гиперболического множества, хотя и не являющегося аттрактором, служит знаменитая подкова Смейла. Изложение построения подковы проведем, следуя [52]. Рассмотрим двумерную область G в форме стадиона, состоящую из трех частей – квадрата S и пристыкованных по бокам двух половинок круга D_1 и D_0. Сожмем эту область по горизонтали более чем вдвое, затем еще сильнее растянем по вертикали, затем изогнем в виде подковы и наложим на исходную область так, как показано на рис. 1.15. Полученное отображение двумерной области G в себя и есть отображение F подковы Смейла.

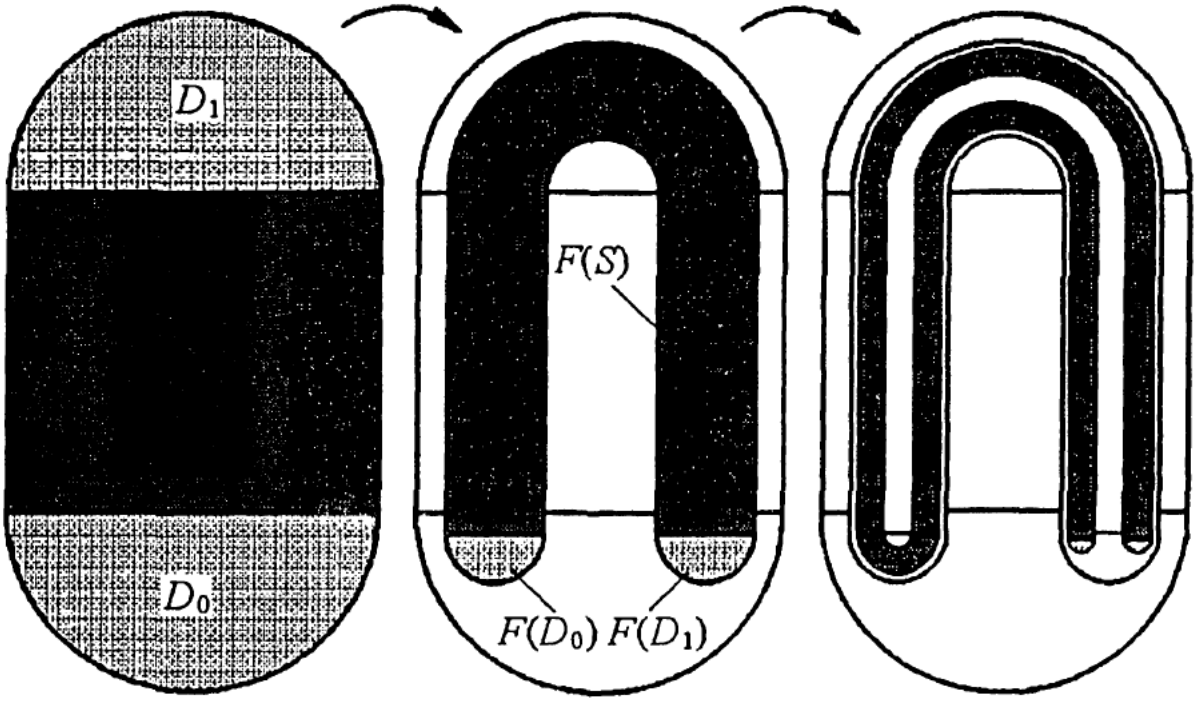

Рис. 1.15. Построение подковы Смейла.

Нас будет интересовать множество

$$\Lambda = \bigcap_{-\infty<n<\infty} F^n(S).$$

Нетрудно видеть, что множество $F(S) \cap S$ состоит из двух вертикальных полос V_0 и V_1, отвечающих двум половинкам подковы и получающихся при горизонтальном сжатии области S. В свою очередь множество $F^{-1}(S) \cap S$ состоит из двух горизонтальных полос H_0 и H_1, которые при вертикальном растяжении должны сравняться по ширине с областью S. Следовательно, множество $(F^{-1}(S) \cap F(S)) \cap S$ состоит из четырех квадратов, которые можно закодировать в соответствии с индексами образующих их горизонтальных и вертикальных полос. До разделительной точки ставим индекс горизонтальной полосы, а после точки – индекс вертикальной полосы (рис.1.16).

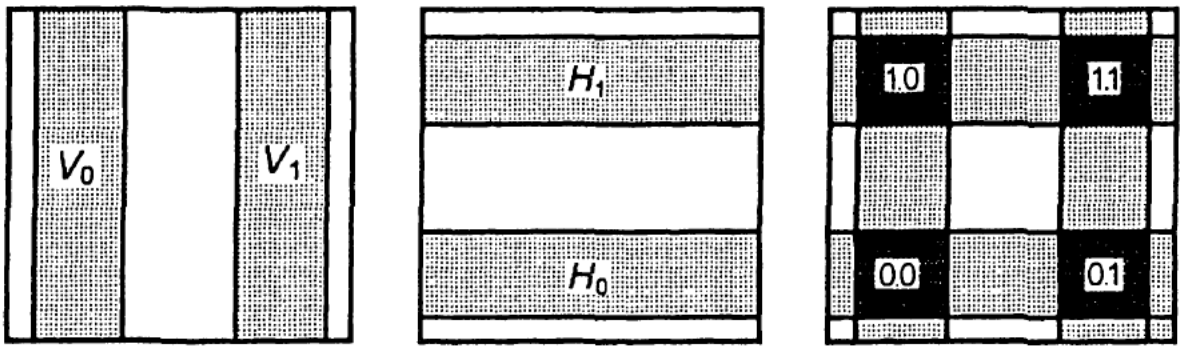

Рис. 1.16. Слева – множество точек, которые остаются в области S на последующем шаге, в центре – множество точек, которые принадлежали области S на предыдущем шаге, справа – пересечение этих множеств определяет множество точек, "выживших" на протяжении двух шагов итерационного процесса.

За два шага итераций отображений F и F^{-1} мы получим множество $(F^{-2}(S) \cap F^{-1}(S) \cap F(S) \cap F^2(S)) \cap S$, состоящее из шестнадцати квадратиков, лежащих на пересечении четырех горизонтальных полос: H_{00}, H_{01}, расположенных внутри полосы H_0, и H_{10}, H_{11} расположенных внутри полосы H_1; и четырех вертикальных полос: V_{00}, V_{01}, расположенных внутри полосы V_0, и V_{10}, V_{11}, расположенных внутри полосы V_1. Все квадратики кодируем, соответственно, двумя цифрами до разделительной точки и двумя после нее.

Продолжая этот процесс далее, после бесконечного числа итераций получим в пределе канторову решетку – двумерное замкнутое нигде не плотное множество Λ, инвариантное относительно отображения F. Элементы множества Λ кодируются бесконечными в обе стороны от разделительной точки двоичными последовательностями, причем применение к ним отображения F приводит к сдвигу разделительной точки на одну позицию вправо, а F^{-1} – влево. Следовательно, множество

Λ содержит счетное число циклов отображения подковы, которым соответствуют периодические двоичные последовательности, и континуум всевозможных непериодических траекторий каскада F.

В [5, 7] доказано, что множество Λ является гиперболическим и, следовательно, стохастическим множеством. Можно показать, что подкова Смейла присутствует в отображении Хенона, а также в отображении Пуанкаре окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (см. п. 2.4.1). Но, как уже отмечалось выше, множество Λ не является аттрактором. Поэтому, наличие подковы, хотя и позволяет сделать вывод о сложной природе динамики рассматриваемой системы, но, к сожалению, не решает проблему обоснования присутствия в ней нерегулярного аттрактора.

Иногда под хаотическим аттрактором понимается аттрактор, содержащий бесконечное всюду плотное множество неустойчивых периодических траекторий. В литературе также используется понятие *квазиаттрактора* [53], содержащего одновременно с неустойчивыми также и устойчивые периодические траектории, но с очень малыми областями притяжения. Как мы увидим ниже, эти свойства также не являются характерными для диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих хаотической динамикой. Аттракторы таких систем, с одной стороны, могут не содержать периодических траекторий, а с другой стороны, могут содержать всюду плотные множества более сложной природы, чем бесконечные множества неустойчивых периодических траекторий.

Таким образом, существующая в настоящее время классификация нерегулярных аттракторов сложных динамических систем только в исключительных случаях описывает отдельные черты нерегулярных аттракторов диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не давая общего представления об их природе, структуре и принципах формирования. В главе 4 вниманию читателя будет предложена новая теория и, на наш взгляд, более естественная классификация широкого круга нерегулярных аттракторов диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанная на различных сценариях (каскадах бифуркаций) их рождения из устойчивых предельных множеств (регулярных аттракторов). Как показывают многочисленные примеры, рассмотренные в работах [29–34], а также содержание главы 3 настоящей книги, огромный класс нерегулярных аттракторов автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащий и все классические аттракторы, рождается в результате одних и тех же каскадов мягких бифуркаций регулярных аттракторов (циклов, торов). Началом всегда является каскад бифуркаций удвоения периода некоторого цикла, переходящий в полный или неполный субгармонический каскад, который затем продолжается полным или неполным гомоклиническим каскадом бифуркаций. Так как название хаотический аттрактор уже

занято аттракторами с положительными показателями Ляпунова, то нерегулярные аттракторы, рождающиеся на всех стадиях всех упомянутых выше каскадов бифуркаций в точках накопления значений бифуркационного параметра назовем *сингулярными аттракторами.* Основы теории сингулярных аттракторов будут заложены в последующих главах книги.

1.4.4. Размерность аттракторов. Фракталы. Регулярные аттракторы диссипативных динамических систем, как отмечалось выше, являются гладкими подмногообразиями фазового пространства и имеют целую размерность. В то же время существуют аттракторы, такие, например, как аттракторы отображения Хенона и отображения подковы Смейла, которые не обладают даже простой непрерывностью, но обладают геометрической (масштабной) инвариантностью, т.е. являются *фракталами* [54]. Простейшим примером фрактала является канторово совершенное множество, схема построения которого приведена на рис.1.17. Разделим отрезок $[0;1]$ на три равные части и вырежем среднюю из них – интервал $(1/3;2/3)$. С каждым из оставшихся отрезков поступим таким же образом, и эту процедуру повторим бесконечное число раз. На первом этапе построения мы будем иметь два отрезка длиной $1/3$ каждый, на втором – четыре длиной $1/9$ каждый и т.д.

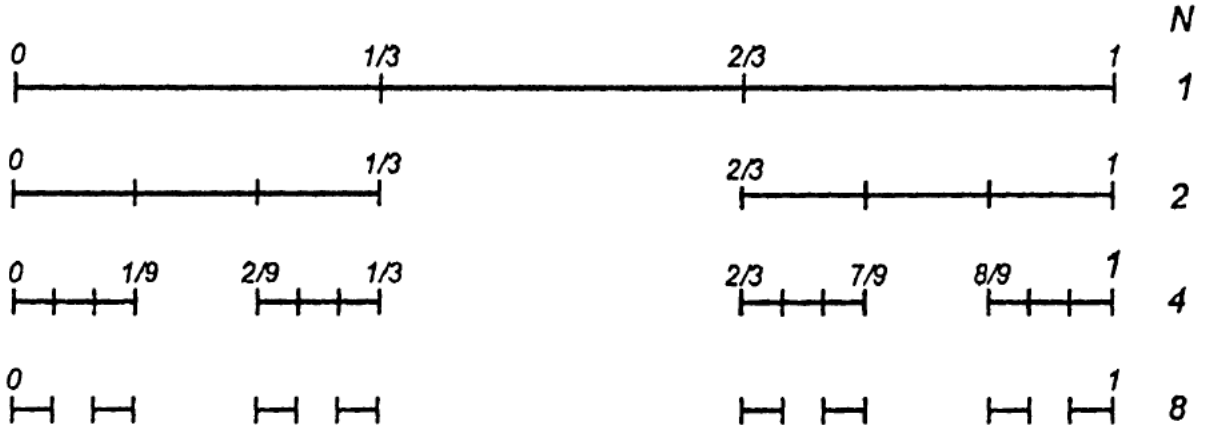

Рис. 1.17. Построение канторова множества.

На k-ом этапе мы будем иметь 2^k не связанных друг с другом отрезков длиной $(1/3)^k$ каждый. В пределе при $k \to \infty$ на отрезке останется множество точек, называемое *канторовым множеством.* Это множество нигде не плотно на отрезке, т.е. не содержит ни одного интервала сколь угодно малой длины. Но оно замкнуто и плотно в себе, т.е. не содержит изолированных точек, и, следовательно, является совершенным множеством. Более того, канторово множество имеет мощность континуума, но нулевую борелевскую меру. В последнем

легко убедиться, подсчитав сумму длин всех вырезанных отрезков:

$$L = 1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Непосредственным обобщением канторова множества на плоский и пространственный случай являются *ковер* и *куб Серпиньского* [13, 15].

Нетрудно видеть, что если на каждом шаге из оставшихся отрезков мы будем вырезать не третью, а q-ю часть, то полученное в результате множество также будет иметь меру нуль для любого $0 < q < 1$. Однако при различных значениях q эти множества, очевидно, будут существенно различаться. Следовательно, для их измерения нужны другие количественные характеристики, не совпадающие с обычной мерой.

Существует несколько определений размерности множеств, обладающих фрактальной структурой: хаусдорфова размерность, емкость множества, вероятностная размерность, энтропийная размерность и т.д. [50]. Дадим определение наиболее распространенной размерности – емкости или фрактальной размерности множества, наиболее часто используемой количественной характеристики странных аттракторов диссипативных динамических систем.

Рассмотрим в m-мерном фазовом пространстве M динамической системы некоторое множество B. Покроем это множество m-мерными кубиками со стороной ε так, чтобы эти кубики содержали все точки множества B. Пусть $N(\varepsilon)$ – минимальное число таких кубиков, необходимых для покрытия B. Если существует предел

$$d_F(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{1.9}$$

то этот предел $d_F(B)$ называется *емкостью* или *фрактальной размерностью* множества B.

Покажем, что фрактальная размерность регулярных аттракторов диссипативных динамических систем равна целому числу и совпадает с их обычной размерностью. Действительно, обозначим через $d = 1, 2, 3$ обычные размерности одномерных, двумерных и трехмерных компактных подмногообразий трехмерного евклидова пространства. Так как количество кубиков со стороной ε, необходимое для покрытия единичного отрезка, пропорционально $1/\varepsilon$, для покрытия единичной квадрата – $1/\varepsilon^2$, а для покрытия единичного объема – $1/\varepsilon^3$, то для каждого d число кубиков, необходимое для покрытия компактного подмногообразия размерности d, равно $N(\varepsilon) = C\varepsilon^{-d}$, где C – некоторая постоянная. Подставляя $N(\varepsilon)$ в формулу (1.9), получим, что $d_F = d$, т.е. фрактальная размерность компактных подмногообразий евклидова пространства совпадает с их обычной (топологической) размерностью. Следовательно, фрактальная размерность устойчивого

предельного цикла равна единице, а устойчивого инвариантного тора — двум.

Однако для нерегулярных множеств и странных аттракторов, обладающих масштабно-инвариантной структурой, фрактальная размерность имеет дробное значение. Покажем это на примере рассмотренного выше канторова множества B. Рассмотрим последовательность $\varepsilon_k = (1/3)^k \to 0$ при $k \to \infty$. Из построения канторова множества следует, что для любого k (номер этапа построения) канторово множество полностью покрывается $N(k) = 2^k$ отрезками длиной $\varepsilon_k = (1/3)^k$ каждый. Тогда из (1.9) следует, что

$$d_F(B) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln N(k)}{\ln(1/\varepsilon_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631.$$

Ясно, что рассмотренные выше странные аттракторы двумерных дискретных диссипативных динамических систем (каскадов) имеют дробную фрактальную размерность, значение которой лежит в интервале между единицей и двойкой, т.е. эти множества уже не являются линиями, но еще не являются также и поверхностями. Заметим, что нахождение значения фрактальной размерности является сложной вычислительной проблемой и не всегда может быть успешно реализовано. Что же касается хаотических аттракторов диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, то они, как уже отмечалось выше, не обязаны быть странными и иметь не целую фрактальную размерность (см. главу 4).

Не странными, т.е. не имеющими фрактальной структуры, могут быть даже некоторые хаотические (перемешивающие) отображения. Классическим примером является модифицированное отображение "кота" Арнольда

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n) \bmod 1, \\ y_{n+1} &= (x_n + 2y_n) \bmod 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отображение (1.10) при $\delta < 1/2\pi$ взаимно однозначно переводит единичный квадрат плоскости (x, y) в себя и является диссипативным в области $1/2 < y < 1$, т.е. при каждой итерации элемент площади этой области сжимается. Но, несмотря на сжатие площади, отображение (1.10) является эргодическим и перемешивающим. Поэтому хаотическим аттрактором отображения (1.10) является весь единичный квадрат, имеющий фрактальную размерность, равную двум.

Точки, являющиеся последовательными итерациями отображения (1.10), практически полностью покрывают квадрат, но плотность их распределения существенно неоднородна. Количественной мерой этой неоднородности является величина *информационной размерности* d_I,

определяемая следующим образом

$$d_I(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \qquad I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i,$$

где $N(\varepsilon)$ – количество m-мерных кубиков со стороной ε, покрывающих множество $B \subset M$, P_i – вероятность посещения траекторией системы i-го кубика, а $I(\varepsilon)$ – энтропия Шеннона.

В результате неоднородности плотности распределения вероятностей точек в квадрате, информационные размерности аттракторов отображения (1.10) будут различны при разных δ и все будут лежать в интервале $1 < d_I < 2$.

Как будет следовать из результатов главы 4, введенные выше в рассмотрение сингулярные аттракторы автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений более естественно различать по их информационной, а не фрактальной размерности.

Глава 2. Бифуркации в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотренные в первой главе вопросы были связаны с поведением траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений в фазовом пространстве. При этом векторное поле F было фиксированным, и мы просто изучали его свойства и свойства задаваемой им системы дифференциальных уравнений. Перейдем теперь к изучению свойств семейства систем дифференциальных уравнений по отношению к возмущениям векторного поля F.

2.1. Структурная устойчивость и бифуркации.

2.1.1. Структурная устойчивость. Понятие структурной устойчивости (грубости) векторного поля или задаваемой им системы дифференциальных уравнений было предложено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [55]. Оно требует определений возмущения векторного поля и топологической эквивалентности векторных полей.

Определение. *Возмущением* амплитуды ε векторного поля $F(x) \in C^1$ будем называть любое векторное поле $F_1(x) \in C^1$, для которого существует компактное множество K, вне которого $F_1(x) \equiv F(x)$, а на K

$$\|F(x) - F_1(x)\| < \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \|\partial(F(x) - F_1(x))/\partial x\| < \varepsilon \quad [8].$$

Определение. Две системы дифференциальных уравнений (или, что то же самое – два векторных поля) *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм фазового пространства одной системы на фазовое пространство второй системы, переводящий ориентированные траектории первой системы в ориентированные траектории второй системы.

Данное определение является определением глобальной топологической эквивалентности, справедливой во всем фазовом пространстве. Оно естественным образом обобщает определение локальной топологической эквивалентности векторных полей (систем дифференциальных уравнений) в окрестностях их особых точек (см. п. 1.2.1). Заметим, что в случае топологической эквивалентности векторных полей направление времени вдоль эквивалентных траекторий должно сохраняться, но масштаб времени может изменяться. Так что движения, например, по эквивалентным циклам могут происходить, вообще говоря, с разными периодами.

Определение. Гладкое векторное поле $F(x)$ (или дифференциальное уравнение (1.1)), заданное на гладком компактном многообразии M, называется *структурно устойчивым*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что все возмущения $F_1(x)$ амплитуды, меньшей ε, топологически эквивалентны $F(x)$.

Теорема 2.1 ([2, 55]). *Структурно устойчивые векторные поля образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех непрерывно дифференцируемых векторных полей на двумерном компактном многообразии.*

Следовательно структурно устойчивые векторные поля заполняют целые области в пространстве всех полей, и в любой окрестности любого структурно неустойчивого поля можно указать поле, являющееся структурно устойчивым. Таким образом, структурная устойчивость является *типичным* свойством или *случаем общего положения* для двумерных векторных полей. В этом случае можно ожидать, что всегда присутствующие погрешности в определении векторных полей не приведут к изменению качественной картины решений задаваемых этими полями систем дифференциальных уравнений.

Необходимые и достаточные условия структурной устойчивости двумерных автономных систем дифференциальных уравнений дает следующая теорема.

Теорема 2.2 ([56]). *Система дифференциальных уравнений (1.1) структурно устойчива (глобально структурно устойчива) на двумерном компактном многообразии M тогда и только тогда, когда: 1) число особых точек конечно и все они являются гиперболическими; 2) число предельных циклов конечно и все они невырождены; 3) в M нет седловых связок, т.е. сепаратрис, идущих из седла в седло.*

Выполнение первых двух условий теоремы обеспечивает в силу теоремы Гробмана-Хартмана локальную структурную устойчивость системы дифференциальных уравнений в окрестностях гиперболических особых точек и невырожденных предельных циклов, а дополнительное условие отсутствия седловых гомоклинических и гетероклинических траекторий является уже достаточным в двумерном случае условием для обеспечения глобальной структурной устойчивости системы в целом.

Для систем более высокой, чем два, размерности перечисленные в теореме условия с заменой невырожденных циклов на гиперболические также *являются необходимыми условиями глобальной* структурной устойчивости, так как при невыполнении первых двух условий система не будет не только глобально, но даже и локально структурно устойчивой, а любая седловая связка разрушается малым шевелением векторного поля. Но, к сожалению, эти условия не являются достаточными для глобальной структурной устойчивости систем высокой (более двух) размерности. Более того, для таких систем множество структурно устойчивых векторных полей не является всюду плотным в пространстве всех непрерывно дифференцируемых вектор-

ных полей, т.е в этом пространстве существуют области, свободные от структурно устойчивых векторных полей, и, следовательно, типичным свойством является структурная неустойчивость. Пример такой области для полей на трехмерном торе впервые построен Смейлом (см. [57]). Ниже будет показано, что в пространстве трехмерных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в любых окрестностях значений параметров, при которых системы обладают гомоклиническими или гетероклиническими траекториями, могут существовать одновременно как структурно устойчивые, так и структурно неустойчивые системы. Поэтому типичность свойства в данном случае должна определяться мерой или размерностью множества систем, обладающих этим свойством.

2.1.2. Бифуркации. Структурная устойчивость систем дифференциальных уравнений является устойчивостью по отношению к произвольным малым гладким возмущениям векторных полей. Однако системы дифференциальных уравнений, получающиеся из различных приложений, всегда содержат то или иное число системных параметров. Поэтому с точки зрения приложений более естественным и интересным является анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений по отношению к более узкому классу возмущений — произвольным малым возмущениям параметров таких систем. В этом случае само пространство параметров будем интерпретировать как конечномерное пространство систем дифференциальных уравнений некоторого специального вида, а возмущение конкретной системы — как некоторое возмущение ее параметров.

Теория бифуркаций систем дифференциальных уравнений, берущая свое начало в работах А. Пуанкаре, описывает качественные, скачкообразные изменения фазовых портретов систем дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении их параметров. Значения параметров, при которых происходят эти качественные изменения фазовых портретов, называются *бифуркационными значениями* или *точками бифуркации.*

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad \mu \in L \subset \mathbb{R}^k, \quad F \in C^\infty, \tag{2.1}$$

заданных в фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства $\mathbb{R}^k$.

Определение. Векторное поле $F(x, \mu_0)$ системы (2.1) (или дифференциальное уравнение (2.1)), назовем *грубым*, если существует окрестность $U \subset L$ вектора μ_0 такая, что для всех $\mu \in U$ векторные поля $F(x, \mu)$ топологически эквивалентны векторному полю $F(x, \mu_0)$.

В соответствии с данным определением точками бифуркации являются те и только те совокупности значений параметров, при которых

система является *негрубой*, т.е. при которых отсутствует непрерывная зависимость фазового портрета системы от ее параметров. Заметим, что в некоторых работах понятие грубости отождествляется с понятием структурной устойчивости векторного поля и соответствующего ему дифференциального уравнения [10]. Мы же будем использовать термин грубости системы только для обозначения ее устойчивости по отношению к более узкому, но вместе с тем более важному, семейству возмущений векторных полей — параметрическим возмущениям.

Предположим, что в пространстве параметров нет областей, заполненных исключительно негрубыми системами вида (2.1). Тогда полное качественное исследование семейства систем (2.1) сводится к установлению разбиения пространства параметров на области с одинаковой (грубой) качественной структурой и к установлению этой качественной структуры. Разбиение пространства параметров на *грубые области* и разделяющие их $(k-1)$-мерные *пленки*, соответствующие негрубым системам, называется *бифуркационной диаграммой*.

Пленки являются $(k-1)$-мерными гладкими поверхностями в пространстве параметров. Они определяются одним условием $G_1(\mu)=0$ с градиентом, не равным нулю. Поэтому говорят, что бифуркация, связанная с протыканием пленки вектором бифуркационных параметров, имеет *коразмерность 1*. Трансверсальным пересечением двух пленок является гладкая поверхность размерности $k-2$, задаваемая двумя условиями $G_1(\mu)=0$ и $G_2(\mu)=0$. Бифуркация, связанная с прохождением вектора бифуркационных параметров через такую поверхность, заполненную негрубыми системами, имеет коразмерность 2. Вообще говорят, что бифуркация имеет коразмерность n, если она связана с прохождением вектора бифуркационных параметров через гладкую поверхность размерности $k-n$, являющуюся трансверсальным пересечением n гладких гиперповерхностей, задаваемых n условиями и заполненных негрубыми системами.

Таким образом, коразмерность бифуркации показывает, от скольких параметров должна зависеть система дифференциальных уравнений, чтобы бифуркация была для нее типичной. Чем выше коразмерность, тем более нетипичной будет бифуркация. В трехмерном пространстве параметров, которое будет представлять для нас наибольший интерес, бифуркация коразмерности 1 будет происходить на некоторой гладкой двумерной поверхности, коразмерности 2 — на линии, а коразмерности 3 — в точке.

Часто, кроме бифуркационных диаграмм семейства систем в пространстве параметров, используют для наглядности представления так называемые *фазопараметрические диаграммы*. В этом случае по одним координатным осям откладывают значения параметров, а по другим – динамические переменные или связанные с ними величины. Получается поверхность, точки которой соответствуют определенным динамическим режимам семейства систем, меняющимся при изменении параметров.

Так как структурно устойчивые векторные поля заполняют области в пространстве всех полей, то они заполняют области и в конечномерном пространстве параметров. Следовательно, структурно устойчивые поля являются грубыми. Из этого следует, что кандидатами в точки бифуркации являются в первую очередь те значения параметров μ_0, при которых векторное поле $F(x, \mu_0)$ имеет негиперболические особые точки, негиперболические циклы или сепаратрисные контуры.

Поскольку грубость как частный случай структурной устойчивости может быть как локальной, так и нелокальной (глобальной), то бифуркации также могут быть локальными и нелокальными. К *локальным бифуркациям* относятся бифуркации негиперболических особых точек, циклов и торов, которые приводят к локальному качественному изменению фазового портрета системы. К *нелокальным бифуркациям*, нелокально меняющим фазовый портрет системы, относятся, как правило, бифуркации сепаратрисных контуров. Кроме того, в системах размерности выше двух возможны нелокальные бифуркации различных нерегулярных аттракторов.

Мы рассмотрим сначала наиболее простые локальные бифуркации, имеющие коразмерность 1. Для анализа таких бифуркаций достаточно будет рассмотреть семейство систем дифференциальных уравнений (2.1), имеющее одномерное пространство параметров, в котором эти бифуркации являются точечными. Сложнее обстоит дело с нелокальными (глобальными) бифуркациями. Во-первых, такие бифуркации могут иметь коразмерность, большую 1. Во-вторых, что самое главное, в современной качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем полностью отсутствуют как методы нахождения бифуркационных поверхностей (пленок) для таких бифуркаций в пространстве параметров, так и методы определения коразмерности (количества и вида условий). Некоторые оригинальные приемы, разработанные авторами в этом направлении, будут представлены в п. 2.4.3.

2.2. Однопараметрические локальные бифуркации.

Пусть значение $\mu = 0$ является бифуркационным значением параметра μ, то есть именно при этом значении параметра качественно меняется фазовый портрет семейства систем дифференциальных уравнений (2.1). Наиболее интересными с точки зрения различных приложений являются бифуркации устойчивых предельных множеств (аттракторов), так как они приводят к изменениям наблюдаемых в реальных экспериментах установившихся режимов. Бифуркации аттракторов принято разделять на *мягкие* (внутренние) и *жесткие* (кризисы аттракторов). Мягкие бифуркации приводят к топологическим изменениям самих аттракторов, но не приводят к их исчезновению. Жесткие бифуркации приводят к исчезновению аттракторов. В настоящем

пункте будут рассмотрены однопараметрические локальные бифуркации регулярных аттракторов.

Итак, пусть системы дифференциальных уравнений из семейства (2.1) при всех значениях параметра μ, лежащих в некоторой окрестности U бифуркационного значения параметра $\mu = 0$, имеют своими решениями либо особые точки (положения равновесия или стационарные точки) $x_0(\mu)$, либо предельные циклы $x_0(t, \mu)$, либо инвариантные двумерные торы, устойчивые при всех $\mu < 0$. Опишем основные бифуркации, которые могут происходить в этих случаях в семействе (2.1) при переходе параметра через значение $\mu = 0$.

2.2.1. Бифуркации устойчивых особых точек. Особая (стационарная) точка или положение равновесия однопараметрического семейства (2.1) удовлетворяет, очевидно, условию $F(x_0(\mu), \mu) = 0$. Поэтому, линеаризуя семейство (2.1) в окрестности особой точки, получим зависящую от параметра систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(\mu)y + O(|y|^2), \quad A(\mu) = D_x F(x_0(\mu), \mu) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(\mu), \mu), \qquad (2.2)$$

где $y(t) = x(t) - x_0(\mu)$. Вектор $y = 0$ является решением системы (2.2) для всех $\mu \in U$.

Бифуркации, связанные с потерей устойчивости особой точки семейства (2.1), могут произойти при переходе параметра через значение, при котором точка является негиперболической. Рассмотрим два основных, наиболее часто встречающихся в приложениях случая: одно собственное значение матрицы $A(0)$ равно нулю или два комплексно сопряженных собственных значения матрицы $A(0)$ лежат на мнимой оси, а все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Можно показать, используя теорему о центральном многообразии [45,46], что бифуркации, приводящие к потере устойчивости особой точки семейства (2.1), определяются исключительно теми координатами системы (2.2), которые соответствуют собственным значениям матрицы $A(0)$, лежащим на мнимой оси. Систему уравнений, записанную в этих координатах, обычно называют *нормальной формой* семейства (2.1) в окрестности особой точки. Наиболее распространены следующие четыре типа бифуркаций.

1. Транскритическая бифуркация (бифуркация обмена устойчивостью). Бифуркация имеет нормальную форму $\dot{y} = \mu y + y^2$ (или $\dot{y} = \mu y - y^2$). Нетрудно видеть, что два стационарных решения $y = 0$ и $y = -\mu$ ($y = \mu$) сосуществуют вместе и обмениваются устойчивостью при переходе параметра через бифуркационное значение $\mu = 0$ (рис. 2.1а). Бифуркация является мягкой.

Чтобы получить аналог бифуркации для систем с фазовым пространством большей размерности, необходимо к рассмотренному вещественному собственному значению матрицы линеаризации, отвеча-

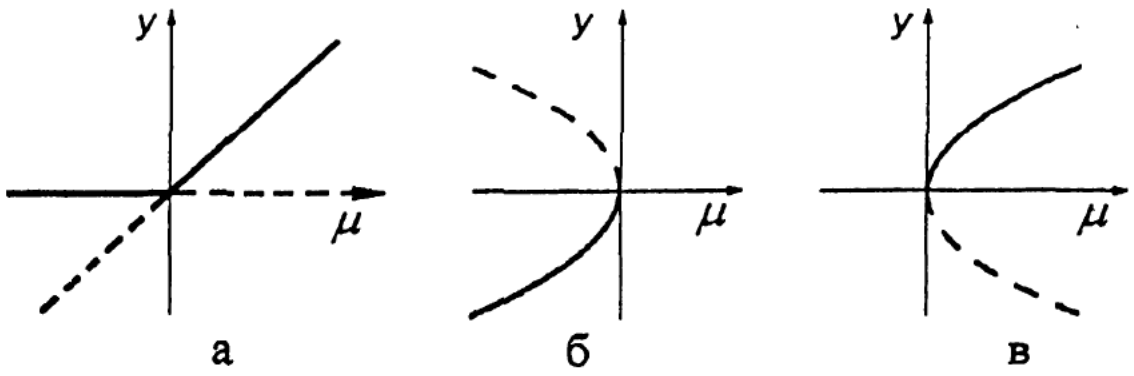

Рис. 2.1. Примеры бифуркаций: транскритической (а), типа седло-узел с одновременным исчезновением (б) и рождением (в) устойчивой и неустойчивой особых точек.

ющему за бифуркацию, добавить соответствующее количество собственных значений с отрицательными вещественными частями и проинтерпретировать переход между получившимися особыми точками. Так аналогом транскритической бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой устойчивый узел становится седлом, а седло становится устойчивым узлом.

В случае размерности пространства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел или устойчивый фокус становятся седло-узлом или седло-фокусом, а седло-узел или седло-фокус — устойчивыми узлом или фокусом.

2. Седло-узловая бифуркация. Эта бифуркация имеет не очень удачное название, которое связано исключительно с ее интерпретацией в двумерном фазовом пространстве — рождением вырожденного плоского седло-узла. Такой седло-узел не надо путать с невырожденным седло-узлом трехмерного пространства, о котором будет идти речь в описании бифуркации типа вилки.

Нормальная форма седло-узловой бифуркации имеет вид $\dot{y} = \mu + y^2$. Последнее уравнение при $\mu < 0$ имеет два стационарных решения $y_{12} = \pm\sqrt{-\mu}$, одно из которых является асимптотически устойчивым, а другое — нет. При $\mu = 0$ оба решения сливаются в одно стационарное решение $y = 0$, являющееся асимптотически устойчивым (неустойчивым) для траекторий, начинающихся слева (справа) от нуля. При $\mu > 0$ уравнение не имеет особых точек, и, следовательно, аттрактор исчезает, т.е. рассмотренная бифуркация является кризисом (рис. 2.1б).

Как уже было отмечено выше, аналогом этой бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой имеющиеся в системе при $\mu < 0$ устойчивый узел и седло сливаются при $\mu = 0$ в вырожденную особую точку — вырожденный седло-узел, разрушающийся при $\mu > 0$ (рис. 2.2).

В случае размерности пространства больше двух в результате рас-

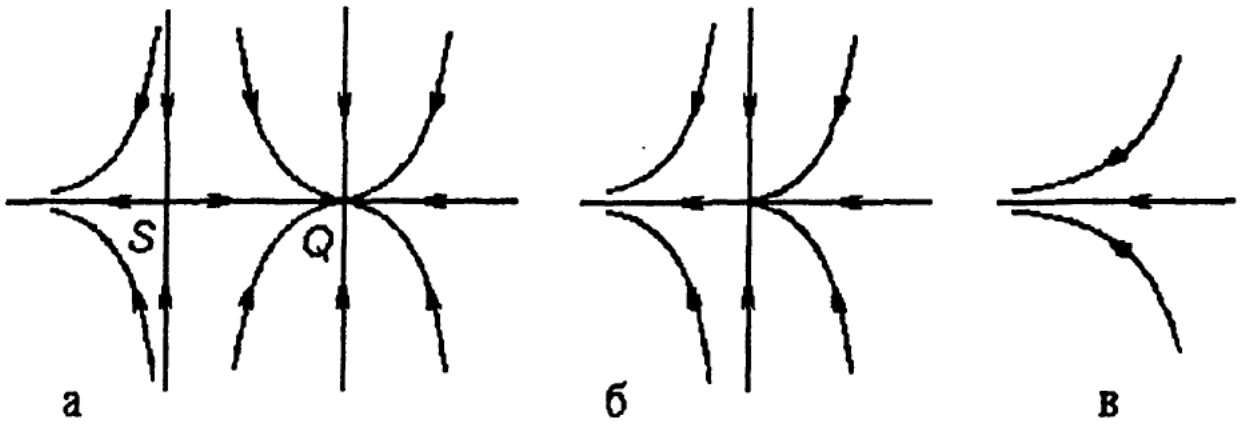

Рис. 2.2. Седло-узловая бифуркация на плоскости.

смотренной бифуркации устойчивый узел и седло-узел (невырожденный) сливаются при $\mu = 0$ в вырожденную особую точку, исчезающую при $\mu > 0$.

Большое значение имеет также обратная седло-узловая бифуркация с нормальной формой $\dot{y} = \mu - y^2$, при которой происходит одновременное рождение устойчивой и неустойчивой особых точек или устойчивого узла и седла (рис. 2.1в, и рис. 2.2).

3. Бифуркация типа вилки. Существуют два вида этой бифуркации: *надкритическая*, имеющая нормальную форму $\dot{y} = \mu y - y^3$, и *подкритическая*, имеющая нормальную форму $\dot{y} = \mu y + y^3$. В случае надкритической бифуркации стационарные решения имеют вид: $y = 0$ и $y_{12} = \pm\sqrt{\mu}$ (последние два решения определены только при $\mu > 0$). Устойчивое стационарное решение, становясь неустойчивым, порождает два других устойчивых стационарных решения (рис. 2.3а). Бифуркация также является мягкой.

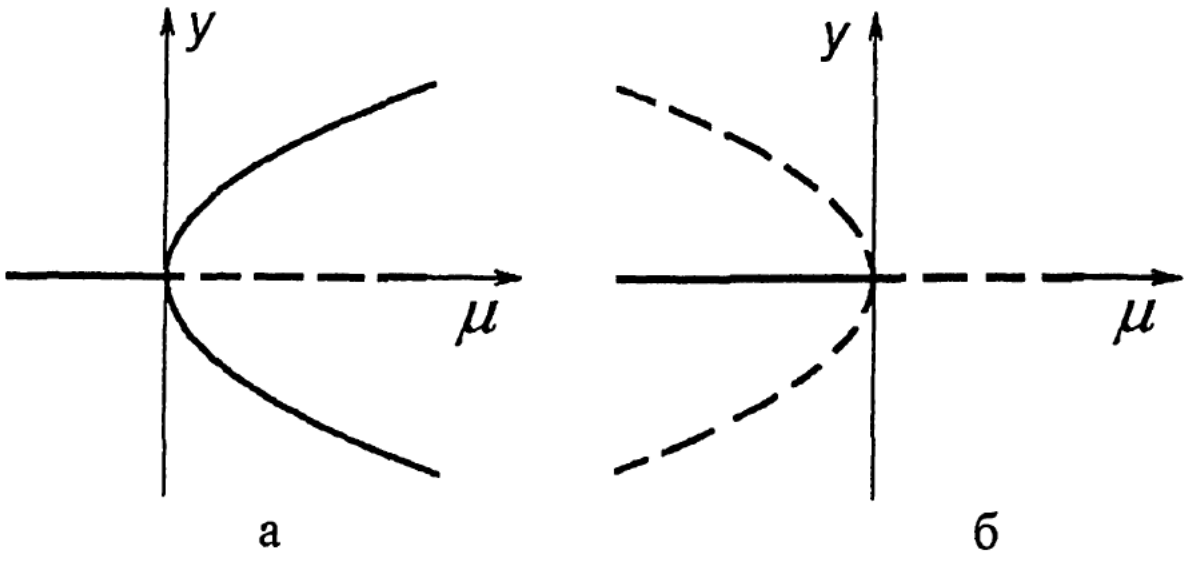

Рис. 2.3. Примеры бифуркаций типа вилки: а – надкритическая и б – подкритическая.

Аналогом этой бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой устойчивый узел становится седлом, в окрестности которого симметрично рождаются два новых устойчивых узла (рис. 2.4). В случае размерности простран-

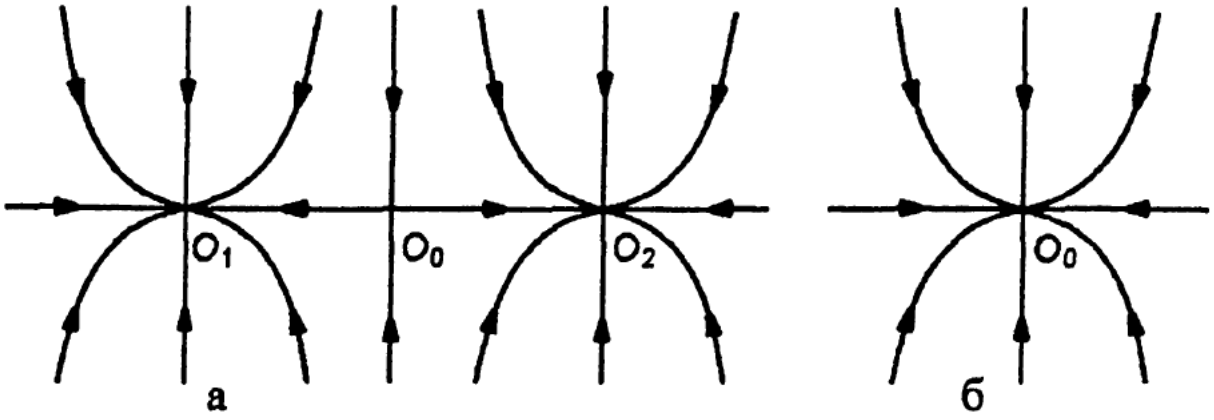

Рис. 2.4. Бифуркация типа вилки на плоскости: а – два устойчивых узла и седло после бифуркации; б – один устойчивый узел до бифуркации.

ства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел становится седло-узлом, а родившиеся в его окрестности устойчивые особые точки могут быть не только узлами, но и фокусами, т.е иметь наряду с одним отрицательным вещественным собственным значением матрицы линеаризации еще два комплексно сопряженных собственных значения с отрицательными вещественными частями. Бифуркация типа вилки, например, имеет место в знаменитой системе Лоренца трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{2.3}$$

при переходе параметра r через значение $r = 1$ [13,14]. Система (2.3) имеет бесконечный спектр разнообразных бифуркаций, поэтому мы будем неоднократно возвращаться к ней в дальнейшем.

В случае подкритической бифуркации стационарные решения имеют вид: $y = 0$ и $y_{12} = \pm\sqrt{-\mu}$ (последние два решения определены только при $\mu < 0$). Таким образом, устойчивое стационарное решение (узел) становится неустойчивым (седлом, седло-узлом, седло-фокусом), а вместе с этим исчезают два других неустойчивых стационарных решения (седла, седло-узла, седло-фокуса). Бифуркация является кризисом.

4. Бифуркация Андронова-Хопфа (бифуркация рождения цикла). Рассмотренные выше три бифуркации соответствуют случаю, когда при возрастании значений параметра μ ровно одно вещественное собственное значение матрицы $A(\mu)$ переходит при $\mu = 0$

слева направо через мнимую ось плоскости комплексного переменного вдоль вещественной оси, а все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части, т.е. остаются в левой полуплоскости. Бифуркация Андронова-Хопфа соответствует случаю, когда при возрастании значений параметра μ два комплексно сопряженных собственных значения $\mu \pm i\nu$ матрицы $A(\mu)$ переходят при $\mu = 0$ слева направо через мнимую ось плоскости комплексного переменного, а все остальные собственные значения имеют при этом отрицательные вещественные части [45,46].

Существуют два вида бифуркации Андронова-Хопфа: мягкая или *суперкритическая* бифуркация и жесткая или *субкритическая* бифуркация. Суперкритическая бифуркация имеет нормальную форму

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\nu y_2 + [\mu - (y_1^2 + y_2^2)]y_1, \\ \dot{y}_2 &= \nu y_1 + [\mu - (y_1^2 + y_2^2)]y_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

что эквивалентно более компактной записи $\dot{y} = (\mu + i\nu)y - y|y|^2$ относительно комплексной переменной $y = y_1 + iy_2$.

Решение системы (2.4) можно записать в виде:

$$y_1(t) = u(t)\cos\nu t, \quad y_2(t) = u(t)\sin\nu t,$$

где функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{u} = \mu u - u^3$. Поэтому, как нетрудно видеть, при $\mu < 0$ система имеет единственное устойчивое стационарное решение — фокус $y_1 = y_2 = 0$ (или $u = 0$). При $\mu = 0$ нулевое решение также является устойчивым фокусом, так как при этом $u(t) = (c + 2t)^{-1/2} \to 0$, $t \to \infty$. При $\mu > 0$ помимо неустойчивого фокуса — стационарного решения $y_1 = y_2 = 0$ в системе существует и другое решение $y_1(t) = \sqrt{\mu}\cos\nu t$, $y_2(t) = \sqrt{\mu}\sin\nu t$. Для этого решения $y_1^2 + y_2^2 = \mu$, откуда следует, что его траектория на фазовой плоскости (y_1, y_2) является предельным циклом — окружностью с радиусом $\sqrt{\mu}$ (рис. 2.5а). Более того, предельный цикл является устойчивым, что следует из устойчивости особой точки $u = \sqrt{\mu}$ уравнения $\dot{u} = \mu u - u^3$.

Таким образом, в результате мягкой или суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа происходит смена устойчивости стационарной точки, сопровождающаяся рождением из нее устойчивого предельного цикла, амплитуда которого пропорциональна $\sqrt{\mu}$, а период $T \approx 2\pi/\nu$ при $\mu \to 0$. Эта бифуркация играет важную роль в теории нелинейных динамических систем и как самостоятельный математический объект, присутствующий практически во всех классических системах с нерегулярной динамикой, таких как системы Лоренца (2.3), Рёсслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \tag{2.5}$$

Чуа (Chua)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{2.6}$$

[11–16, 29, 50, 58–62] и многих других, так и как отправная точка различных каскадов бифуркаций перехода к хаосу (см. главу 3).

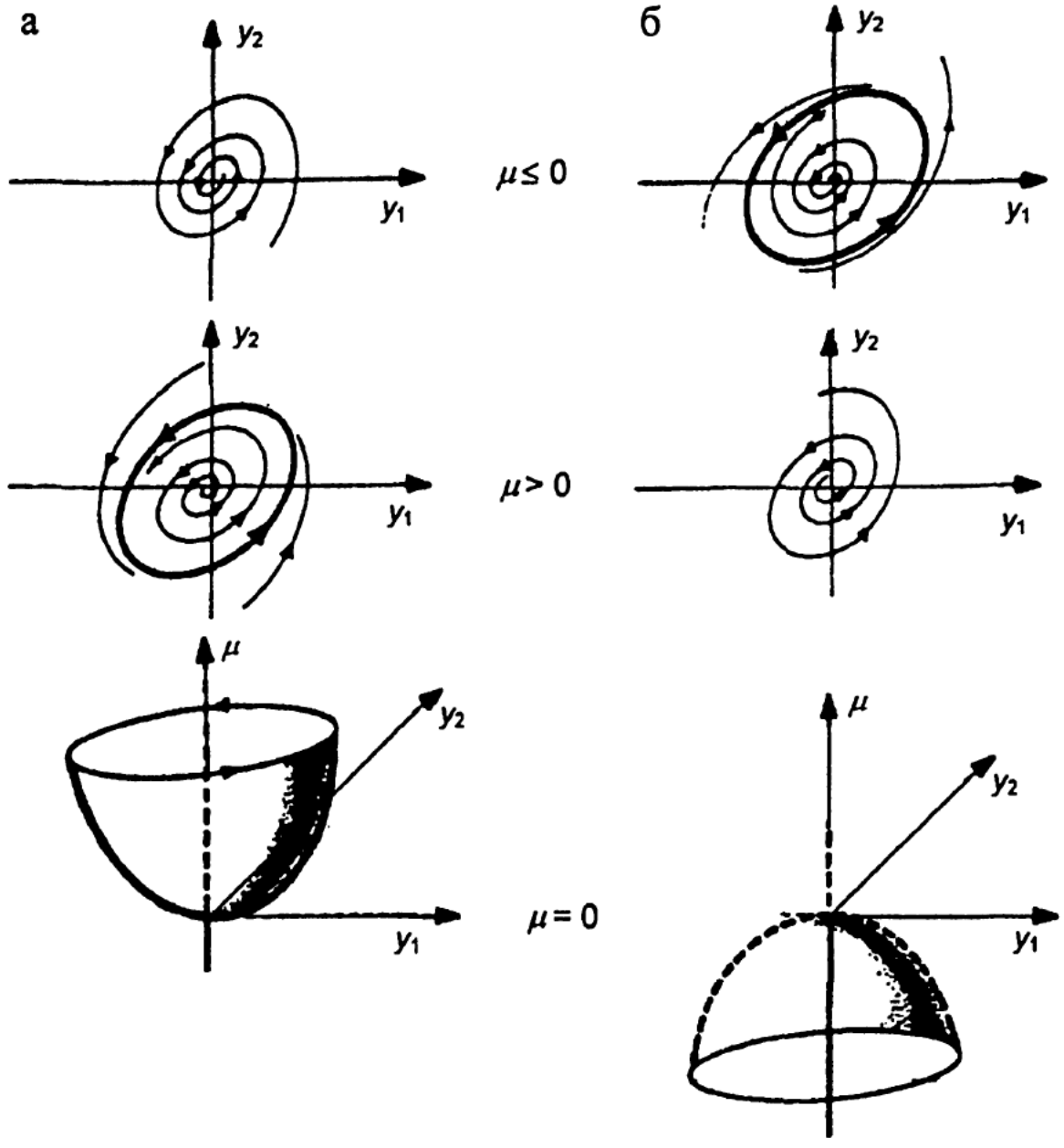

Рис. 2.5. Два вида бифуркаций Андронова-Хопфа на плоскости: а – суперкритическая и б – субкритическая.

Заметим, что только условия на собственные значения матрицы $A(0)$ не обеспечивают наличия в системе мягкой бифуркации Андронова-Хопфа. Дополнительным достаточным условием является наличие в системе устойчивого фокуса не только при $\mu < 0$, но и при $\mu = 0$, что выполнено для рассмотренной выше нормальной формы

бифуркации. Если особая точка является центром при $\mu = 0$, то при тех же условиях на собственные значения матрицы $A(0)$ может либо не рождаться предельного цикла вовсе, что имеет место в системе

$$\dot{x} = (\mu + 1)x - 2xy + x^3,$$
$$\dot{y} = -2y + 2x^2,$$

либо происходить одновременная смена устойчивости как стационарной точки, так и окружающего ее предельного цикла. Последняя бифуркация, например, наряду с бифуркацией Андронова-Хопфа, является отправной точкой сценария перехода к хаосу в системе уравнений Магницкого

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx[(1-\sigma)z - \delta y], \\ \dot{y} &= x[1 - (1-\delta)y + \sigma z], \\ \dot{z} &= a(y - dx), \end{aligned} \tag{2.7}$$

описывающей поведение макропоказателей рыночной экономики [63, 64].

Субкритическая (жесткая) бифуркация Андронова-Хопфа имеет нормальную форму

$$\dot{y}_1 = -\nu y_2 + [\mu + (y_1^2 + y_2^2)]y_1,$$
$$\dot{y}_2 = \nu y_1 + [\mu + (y_1^2 + y_2^2)]y_2.$$

Решение системы можно записать в виде:

$$y_1(t) = u(t)\cos\nu t,\ y_2(t) = u(t)\sin\nu t,$$

где функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{u} = \mu u + u^3$. Поэтому при $\mu < 0$ система имеет устойчивое стационарное решение — фокус $y_1 = y_2 = 0$ или $(u = 0)$ и неустойчивый предельный цикл: $y_1(t) = \sqrt{-\mu}\cos\nu t$, $y_2(t) = \sqrt{-\mu}\sin\nu t$. При $\mu \geq 0$ предельный цикл влипает в нулевое решение, которое при этом становится неустойчивым фокусом. При этом происходит исчезновение аттрактора, и, следовательно, бифуркация является кризисом (рис. 2.5б).

Мягкая бифуркация Андронова-Хопфа имеет место и в общем случае любой размерности пространства $m > 2$ и даже в бесконечномерном случае [46]. В случае жесткой бифуркации следует говорить об исчезновении седлового предельного цикла.

2.2.2. Бифуркации устойчивых предельных циклов. В случае, когда предельный цикл $x_0(t, \mu)$, имеющий период T, является решением семейства уравнений (2.1) при всех $\mu \in U$, то, линеаризуя семейство (2.1) на цикле, получим зависящую от параметра систему

неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической матрицей линейной части

$$\dot{y} = A(t,\mu)y + O(|y|^2), \quad A(t,\mu) = D_x F(x_0(t,\mu),\mu), \tag{2.8}$$

где $y(t) = x(t) - x_0(t,\mu)$, а $A(t+T,\mu) = A(t,\mu)$. При этом вектор $y = 0$ является решением системы (2.8) для всех $\mu \in U$.

Как следует из теории Флоке [12, 36, 37], каждое фундаментальное матричное решение линейной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{y} = A(t,\mu)y, \quad A(t+T,\mu) = A(t,\mu) \tag{2.9}$$

представимо в виде $Y(t,\mu) = P(t,\mu)U(t,\mu)$, где $P(t,\mu)$ — некоторая, вообще говоря, комплексная T-периодическая матрица, а матрица $U(t,\mu) = \exp(B(\mu)t)$ является фундаментальной матрицей линейной системы уравнений с постоянными, вообще говоря, комплексными коэффициентами

$$\dot{u} = B(\mu)u(t). \tag{2.10}$$

Преобразование $P(t,\mu)$, таким образом, осуществляет приведение линейной системы (2.9) с периодическими коэффициентами к линейной системе (2.10) с постоянными коэффициентами. Как было отмечено в п.1.3.2. главы 1 устойчивость (неустойчивость) периодического решения определяется собственными значениями матрицы B — показателями Флоке исходного цикла или, что равносильно, собственными значениями действительной матрицы $C = \exp(BT)$ – мультипликаторами цикла. Так как цикл устойчив при всех $\mu < 0$, то один показатель Флоке равен нулю, а все остальные $m-1$ показателей имеют отрицательные вещественные части (один простой мультипликатор имеет значение $+1$, а все остальные мультипликаторы имеют модули, меньшие 1, то есть лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного).

Следовательно, бифуркации, связанные с потерей устойчивости периодического решения семейства (2.1), могут произойти лишь в тех случаях, когда при $\mu = 0$ один или несколько показателей Флоке из $m-1$ пересекают мнимую ось слева направо или, что равносильно, один или несколько мультипликаторов, лежащих внутри единичного круга при $\mu < 0$, пересекают единичную окружность при $\mu = 0$. Бифуркации циклов могут иметь место, очевидно, только в системах уравнений размерности $m > 1$.

Можно показать, используя теорему о центральном многообразии [45, 46], что, как и в случае особой точки, бифуркации, приводящие к потере устойчивости периодического решения семейства (2.1), определяются исключительно теми координатами системы (2.10), которые соответствуют собственным значениям матрицы $B(0)$, лежащим на мнимой оси. Систему уравнений, записанную в этих координатах, назовем *нормальной формой* семейства (2.1) в окрестности периодического решения.

Определение нормальной формы и, соответственно, вида происходящей бифуркации периодического решения, является чрезвычайно сложной задачей. Заменой переменных $y(t) = Q(t,\mu)z(t)$ с T-периодической матрицей $Q(t,\mu)$ ее решение может быть упрощено переходом к системе координат, связанной с циклом. В такой системе одним из координатных векторов является вектор $\dot{x}_0(t)$, касательный к циклу, другим – вектор цикла $x_0(t)$. Так как мультипликатор цикла, соответствующий вектору $\dot{x}_0(t)$, всегда равен единице, а показатель Флоке – нулю и не является бифуркационным, то координаты нормальной формы заведомо лежат в гиперплоскости S, трансверсальной вектору $\dot{x}_0(t)$, и задаваемой последними $m-1$ компонентами вектора $z(t)$. Обозначим этот вектор, имеющий на единицу меньшую размерность, чем исходный вектор $y(t)$ линеаризованной на цикле системы (2.9), через $v(t)$. Вектор $v(t)$ удовлетворяет системе $m-1$ линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}(t) = D(t,\mu)v(t), \tag{2.11}$$

где действительная матрица $D(t,\mu)$ получается из действительной матрицы

$$G(t,\mu) = Q^{-1}A(t,\mu)Q(t,\mu) - Q^{-1}(t,\mu)\dot{Q}(t,\mu)$$

вычеркиванием ее первой строки и первого столбца. Система (2.11) имеет те же показатели Флоке, за исключением нулевого, что и исходная линеаризованная система (2.9).

Возможны два принципиально различных случая: случай постоянной матрицы $D(t,\mu) = D(\mu)$ и случай переменной T-периодической матрицы $D(t,\mu)$. Первый случай означает, что матрицы $Q(t,\mu) = P(t,\mu)$ и $G(t,\mu) = B(\mu)$ действительны, а показателями Флоке цикла, отличными от нулевого, являются собственные значения матрицы $D(\mu)$. Другими словами, первый случай означает, что переход преобразованием $Q(t,\mu)$ к системе координат, связанной с циклом, уже осуществляет приведение системы (2.9) с периодическими коэффициентами к системе с постоянными вещественными коэффициентами. Вектор $z(t)$ в этом случае совпадает с вектором $u(t)$ в (2.10), а компонентами вектора $v(t)$ являются последние $m-1$ компонент вектора $u(t)$. Во втором случае имеет место более сложная ситуация. Рассмотрим отдельно два описанных выше случая.

Случай постоянной матрицы $D(t,\mu) = D(\mu)$. В этом случае типичной бифуркации цикла соответствует либо переход одного вещественного собственного значения, либо двух комплексно сопряженных собственных значений матрицы $D(\mu)$ через мнимую ось. При этом все остальные собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части. Рассмотрим четыре основных, наиболее часто встречающихся в приложениях, бифуркации циклов, соответствующих этому случаю.

1. Бифуркация рождения пары устойчивых замкнутых траекторий. В этом случае при $\mu < 0$ в системе существует устойчивый цикл $x_0(t, \mu)$, один мультипликатор которого равен $+1$, а все остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга. При переходе значений параметра μ через точку $\mu = 0$ один простой мультипликатор цикла переходит через точку $+1$ единичной окружности, что соответствует пересечению мнимой оси одним простым вещественным показателем Флоке линеаризованной системы (2.9) или одним вещественным собственным значением матрицы $D(\mu)$. Поэтому нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой бифуркации особой точки типа вилки: $\dot{u} = \mu u - u^3$. Циклу, очевидно, соответствует нулевое решение этого уравнения.

В результате бифуркации цикл $x_0(t, \mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно рядом с ним на расстоянии $u_{12} = \pm\sqrt{\mu}$ в направлении собственного вектора, соответствующего показателю, проходящему через мнимую ось, рождается пара устойчивых предельных циклов. На рис. 2.6 родившиеся циклы лежат в параллельных исходному циклу плоскостях, так как вектор u направлен вертикально. Возможен и другой случай, когда вектор u лежит в плоскости исходного цикла. Тогда родившиеся циклы будут лежать в той же плоскости – один внутри исходного цикла, а другой вне его.

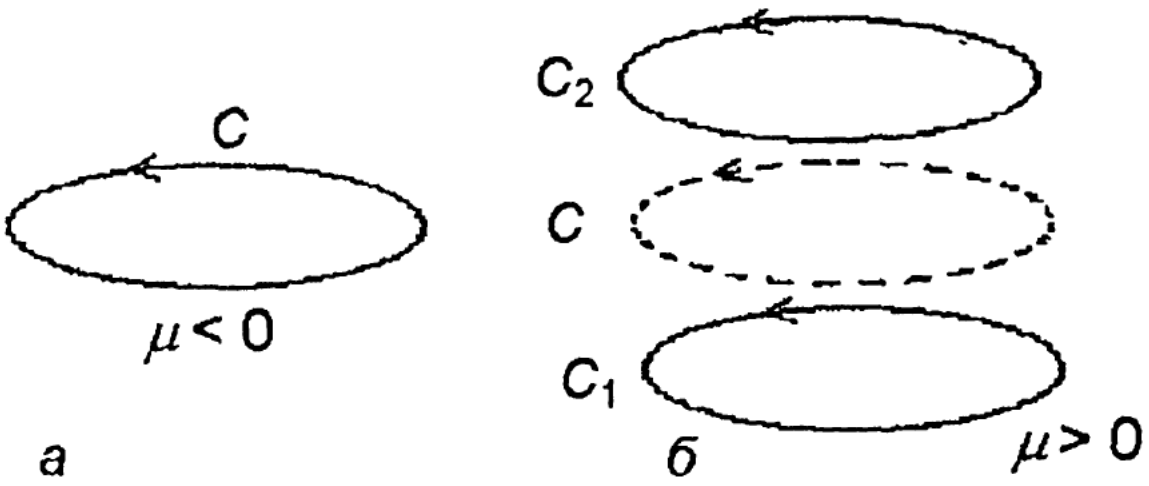

Рис. 2.6. Рождение из устойчивого цикла (а) двух других устойчивых циклов (б).

В случае размерности фазового пространства $m > 2$, цикл, потерявший устойчивость, становится седловым. Бифуркация является мягкой. В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\nu x_2 - x_2 x_3 + (\mu + 1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= \nu x_1 + x_1 x_3 + (\mu + 1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2, \\ \dot{x}_3 &= \mu x_3 - x_3^3. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Система (2.12) имеет своим решением особую точку $O = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, устойчивую при $\mu < -1$. При $\mu > -1$ из нее в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл $x_0(t) = (\cos \nu t, \sin \nu t, 0)^{\mathrm{T}}$, лежащий в плоскости переменных (x_1, x_2). Дальнейшее исследование системы (2.12) проведем описанным выше методом. Линеаризованная на цикле система примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -2y_1(\mu+1)\cos^2 \nu t - y_2(\nu + (\mu+1)\sin 2\nu t) - y_3 \sin \nu t + f_1, \\
\dot{y}_2 &= y_1(\nu - (\mu+1)\sin 2\nu t) - 2y_2(\mu+1)\sin^2 \nu t + y_3 \cos \nu t + f_2, \\
\dot{y}_3 &= \mu y_3 - y_3^3,
\end{aligned}$$

где разложения функций $f_1(y_1, y_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$ в ряды в точке $(0,0)$ начинаются с членов второго порядка. Заменой переменных $y(t) = Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$ — периодической матрицей

$$Q(t) = \left(\dot{x}_0(t),\ x_0(t),\ (0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} -\nu \sin \nu t & \cos \nu t & 0 \\ \nu \cos \nu t & \sin \nu t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перейдем к системе, записанной в связанных с циклом координатах:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_3/\nu + \widetilde{f}_1(z_1, z_2), \\
\dot{z}_2 &= -2(\mu+1)z_2 + \widetilde{f}_2(z_1, z_2), \\
\dot{z}_3 &= \mu z_3 - z_3^3.
\end{aligned}$$

Линейная часть последней системы имеет действительную постоянную матрицу $G(t,\mu) = G(\mu) = B(\mu)$ с нулевым первым столбцом, т.е. координата z_1 однозначно определяется координатами z_2 и z_3 системы, лежащими в плоскости S, перпендикулярной плоскости цикла. Поэтому устойчивость цикла и его возможные бифуркации определяются исключительно двумерной системой уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{u}_2 &= -2(\mu+1)u_2 + \widetilde{f}_2(u_2, u_3), \\
\dot{u}_3 &= \mu u_3 - u_3^3,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

записанной в координатах $u_2 = z_2$ и $u_3 = z_3$ с диагональной матрицей $D(\mu) = \mathrm{diag}(-2(\mu+1), \mu)$. Заметим, что диагональные элементы матрицы $D(\mu)$ являются показателями Флоке предельного цикла исходной системы (2.12).

Так как циклу системы (2.12) соответствует нулевая особая точка системы (2.13), то цикл является устойчивым в интервале изменения параметра $-1 < \mu < 0$. При $\mu > 0$ нулевая особая точка системы (2.13) и, соответственно, цикл системы (2.12) становятся неустойчивыми. Происходит рождение двух новых устойчивых особых точек

$u_3 = z_3 = y_3 = x_3 = \pm\sqrt{\mu}$ системы (2.13), лежащих на отрезке, перпендикулярном плоскости цикла. Этому соответствует рождение двух устойчивых циклов, лежащих в параллельных плоскости исходного цикла плоскостях на расстоянии $\pm\sqrt{\mu}$ от нее.

Бифуркация рождения из одного устойчивого цикла двух других устойчивых циклов предваряет *гомоклинический каскад бифуркаций* рождения устойчивых циклов в системе Лоренца (2.3)[29,30].

2. Транскритическая (обмена устойчивостью между циклами) бифуркация. В этом случае при $\mu < 0$ наряду с устойчивым циклом $x_0(t,\mu)$ в системе (2.1) существует также и неустойчивый (седловой) цикл $x_1(t,\mu)$, лежащий на расстоянии $u = \mu$ от устойчивого цикла в направлении собственного вектора, соответствующего показателю Флоке устойчивого цикла (простому вещественному собственному значению матрицы $D(\mu)$), проходящему через мнимую ось. При переходе значений параметра μ через точку $\mu = 0$ один простой мультипликатор цикла, соответствующий указанному показателю Флоке, переходит через точку $+1$ единичной окружности, а циклы обмениваются устойчивостью – устойчивый цикл $x_0(t,\mu)$ становится неустойчивым (седловым), а неустойчивый (седловой) цикл $x_1(t,\mu)$ – устойчивым (рис. 2.7).

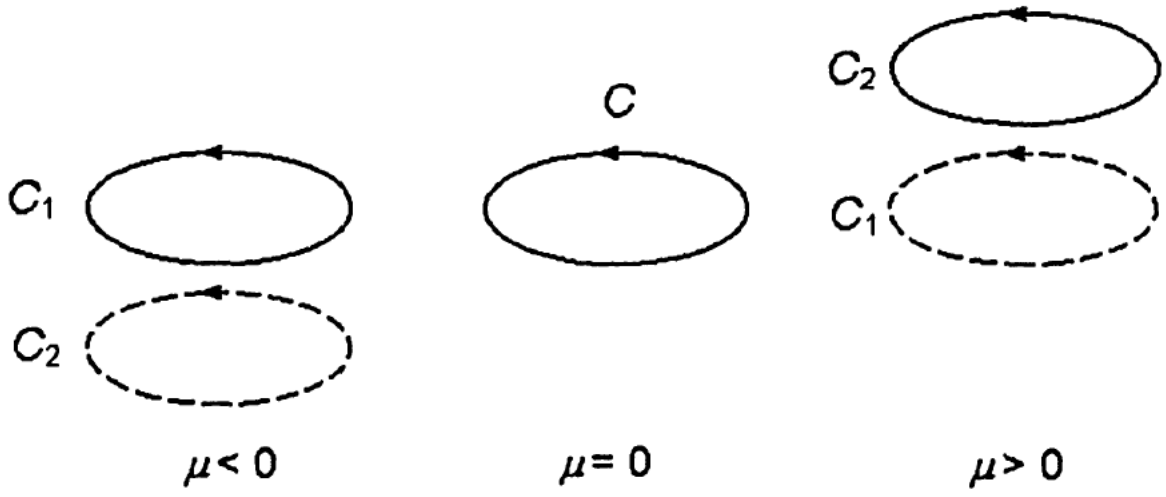

Рис. 2.7. Бифуркация обмена устойчивостью между циклами.

Нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой транскритической бифуркации особой точки: $\dot{u} = \mu u - u^2$ (на рис. 2.7 направление вектора u совпадает с вертикалью). Бифуркация является мягкой. Если направление вектора u совпадает с горизонталью, то при этом оба цикла должны лежать в одной плоскости (один внутри другого). В результате бифуркации внутренний устойчивый, например, цикл становится неустойчивым,а внешний неустойчивый — устойчивым циклом.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных

уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\nu x_2 - x_2x_3 + (\mu+1)(1-x_1^2-x_2^2)x_1,\\ \dot{x}_2 &= \nu x_1 + x_1x_3 + (\mu+1)(1-x_1^2-x_2^2)x_2,\\ \dot{x}_3 &= \mu x_3 - x_3^2,\end{aligned} \tag{2.14}$$

отличающуюся от системы (2.12) только третьим уравнением. При $-1 < \mu < 0$ система (2.14) кроме устойчивого предельного цикла $x_0(t) = (\cos\nu t,\ \sin\nu t,\ 0)^{\mathrm{T}}$, лежащего в плоскости переменных (x_1, x_2), имеет также неустойчивый предельный цикл $x_1(t) = (\cos\nu t,\ \sin\nu t,\ \mu)^{\mathrm{T}}$, лежащий на расстоянии μ от него по оси x_3. При $\mu > 0$ происходит обмен устойчивости между циклами. Заметим, что описанным в предыдущем пункте методом анализ устойчивости цикла системы (2.14) сводится к анализу устойчивости нулевой особой точки двумерной системы

$$\begin{aligned}\dot{u}_2 &= -2(\mu+1)u_2 + \widetilde{f}_2(u_2, u_3),\\ \dot{u}_3 &= \mu u_3 - u_3^2\end{aligned}$$

с диагональной матрицей линейной части (показателями Флоке исходного цикла $x_0(t)$) $D(\mu) = \mathrm{diag}(-2(\mu+1), \mu)$.

3. Бифуркация исчезновения (рождения) пары замкнутых траекторий. В этом случае при $\mu < 0$ наряду с устойчивым циклом $x_0(t, \mu)$ в системе (2.1) существует также и неустойчивый седловой цикл $x_1(t, \mu)$. При возрастании значений параметра μ эти циклы сближаются друг с другом и при $\mu = 0$ сливаются в один вырожденный цикл. При $\mu > 0$ оба цикла исчезают (рис. 2.8). Поэтому нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой седло-узловой бифуркации особой точки: $\dot{u} = \mu + u^2$ (на рис. 2.8 направление вектора u совпадает с вертикалью). Бифуркация является жесткой (кризисом). Как и в случае предыдущих бифуркаций циклы могут лежать в одной плоскости один внутри другого.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\nu x_2 - x_2x_3 + (\mu+1)(1-x_1^2-x_2^2)x_1,\\ \dot{x}_2 &= \nu x_1 + x_1x_3 + (\mu+1)(1-x_1^2-x_2^2)x_2,\\ \dot{x}_3 &= \mu + x_3^2,\end{aligned} \tag{2.15}$$

отличающуюся только третьим уравнением от систем (2.12) и (2.14). При $-1 < \mu < 0$ система (2.15) кроме устойчивого предельного цикла $x_0(t) = (\cos(\nu - \sqrt{-\mu})t,\ \sin(\nu - \sqrt{-\mu})t,\ -\sqrt{-\mu})^{\mathrm{T}}$, лежащего в плоскости $x_3 = -\sqrt{-\mu}$, имеет также и неустойчивый предельный цикл $x_1(t) = (\cos(\nu + \sqrt{-\mu})t,\ \sin(\nu + \sqrt{-\mu})t,\ \sqrt{-\mu})^{\mathrm{T}}$, лежащий на расстоянии

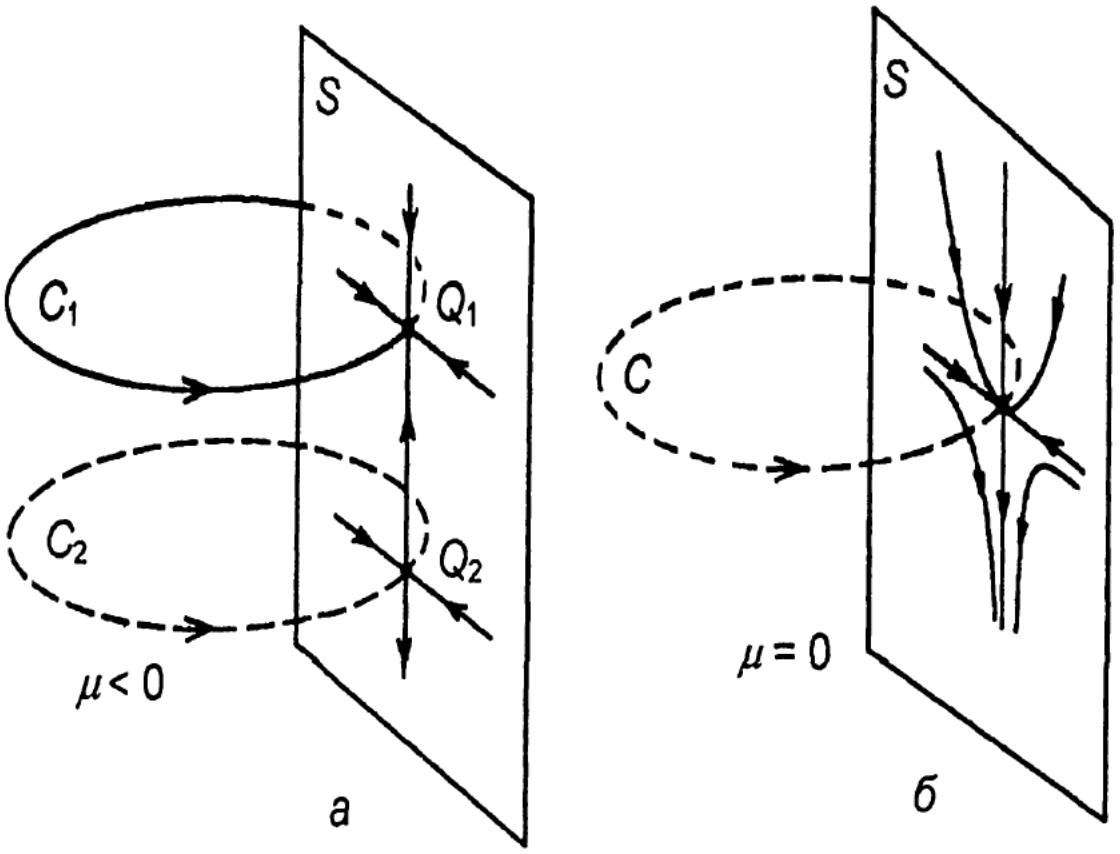

Рис. 2.8. Седло-узловая бифуркация предельных циклов.

$2\sqrt{-\mu}$ от него в плоскости $x_3 = \sqrt{-\mu}$. Заметим, что движение по циклам происходит с разными частотами. При $\mu = 0$ оба цикла сливаются, образуя лежащий в плоскости $x_3 = 0$ неустойчивый цикл, исчезающий при $\mu > 0$. Анализ устойчивости цикла системы (2.15) также сводится к анализу устойчивости нулевой особой точки двумерной системы

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= -2(\mu+1)u_2 + \widetilde{f}_2(u_2, u_3), \\ \dot{u}_3 &= \mu + u_3^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если рассмотреть процесс изменения параметра μ от больших значений к меньшим, то описываемая бифуркация означает, что при $\mu = 0$ внезапно возникает замкнутая траектория (цикл), которая при дальнейшем уменьшении параметра расщепляется на две замкнутые траектории, одна из которых устойчивая, а другая — нет. Другими словами, происходит внезапное одновременное рождение устойчивого и седлового предельных циклов. Каскад бифуркаций этого типа, порождающих бесконечную последовательность пар различных устойчивых и седловых *гомоклинических циклов*, можно наблюдать в системе Лоренца (2.3) [29,30].

4. Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора. Эта бифуркация может произойти только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Она связана с переходом при $\mu = 0$ двух комплексно со-

пряженных мультипликаторов исходного предельного цикла $x_0(t,\mu)$, имеющего период T, через точки $\exp(\pm i\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, единичной окружности или, что равносильно, с переходом двух комплексно сопряженных показателей Флоке цикла (собственных значений матрицы $D(\mu)$ системы (2.11)) через точки $\pm i\varphi/T$ мнимой оси плоскости комплексного переменного. Бифуркация является частным случаем бифуркации Андронова-Хопфа в гиперплоскости S, трансверсальной к исходному циклу, и имеет нормальную форму

$$\dot{u}_1 = (\mu - u_1^2 - u_2^2)u_1 - \frac{\varphi}{T}u_2,$$
$$\dot{u}_2 = \frac{\varphi}{T}u_1 + (\mu - u_1^2 - u_2^2)u_2.$$

При этом цикл $x_0(t,\mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно возникает новое устойчивое движение по двумерному тору T^2, задаваемому основной частотой исходного цикла $\omega_0 = 2\pi/T$ и частотой $\omega_1 = \varphi/T = \omega_0\varphi/2\pi$ родившегося в результате бифуркации цикла $u(t) = \sqrt{\mu}\exp(i\varphi/T)$ (рис. 2.9).

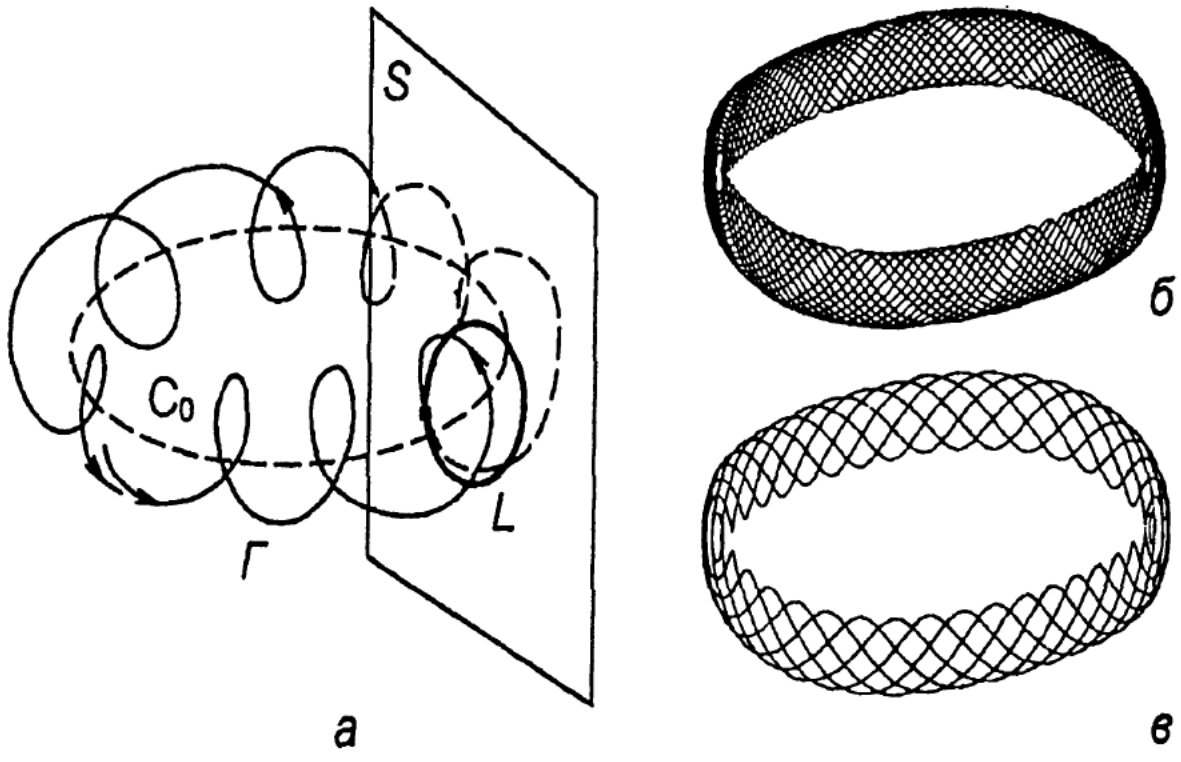

Рис. 2.9. Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла C_0: а – траектория на торе в окрестности потерявшего устойчивость цикла C_0; б – эргодический тор; в – резонанс на торе.

Величина, равная отношению между частотами $\theta = \omega_1/\omega_0 = \varphi/2\pi$, называется числом вращения на торе T^2. Если число вращения рационально, т.е. $\theta = p/q$, где q и $p < q/2$ – целые положительные числа, то родившееся устойчивое движение на торе будет периодическим. Если же число вращения иррационально, то фазовая кривая родившегося

устойчивого движения образует всюду плотную обмотку тора (см. п. 1.3.4. главы 1).

При дальнейшем увеличении значений параметра μ фазовый портрет системы будет качественно меняться, демонстрируя переходы от эргодического движения на торе к режимам резонансов. Родившийся тор является устойчивым в том смысле, что любая траектория системы стремится к некоторой траектории, расположенной на торе, с некоторой своей асимптотической фазой.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\nu x_2 - x_2 x_3 - 2x_1 x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \\
\dot{x}_2 &= \nu x_1 + x_1 x_3 - 2x_2 x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2, \\
\dot{x}_3 &= 2\mu x_3 - x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 - 1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Система (2.17) имеет предельный цикл $x_0(t) = (\cos \nu t,\ \sin \nu t,\ 0)^{\mathrm{T}}$, лежащий в плоскости переменных (x_1, x_2). Линеаризованная на цикле система имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 2y_1 \mu \cos^2 \nu t - y_2(\nu - \mu \sin 2\nu t) - y_3(\sin \nu t + 2\cos \nu t) + f_1, \\
\dot{y}_2 &= y_1(\nu + \mu \sin 2\nu t) + 2y_2 \mu \sin^2 \nu t + y_3(\cos \nu t - 2\sin \nu t) + f_2, \\
\dot{y}_3 &= 2y_1 \cos \nu t + 2y_2 \sin \nu t + 2\mu y_3 - y_3^3,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где разложения функций $f_1(y_1, y_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$ в ряды в точке $(0, 0)$ начинаются с членов второго порядка. Заменой $y(t) = Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $Q(t)$, описанной в п. 1, приведем систему (2.18) к связанным с циклом координатам

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_3/\nu + \widetilde{f}_1(z_1, z_2), \\
\dot{z}_2 &= 2\mu z_2 - 2z_3 + \widetilde{f}_2(z_1, z_2), \\
\dot{z}_3 &= 2z_2 + 2\mu z_3 - z_3^3.
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости цикла сводится к анализу устойчивости нулевой особой точки двумерной системы

$$\begin{aligned}
\dot{u}_2 &= 2\mu u_2 - 2u_3 + g(u_2, u_3), \\
\dot{u}_3 &= 2u_2 + 2\mu u_3 - u_3^3,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

матрица $D(\mu)$ линейной части которой имеет комплексно сопряженные собственные значения $2\mu \pm 2i$. Следовательно, при $\mu < 0$ нулевая особая точка системы (2.19) и цикл $x_0(t)$ системы (2.17) устойчивы. При $\mu > 0$ в системе (2.19) в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл периода $T \approx \pi$, что

соответствует рождению устойчивого двумерного тора с частотами, приближенно равными ν и 2, в системе (2.17). Четкие переходы от резонансных к нерезонансным торам можно наблюдать в системе (2.17) при малых $\mu > 0$ и варьировании параметра ν.

Бифуркацию рождения устойчивого тора из цикла можно наблюдать также при некоторых значениях параметров в комплексной системе уравнений Лоренца [65,34]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= X(r - Z) - Y, \\ \dot{Z} &= (X^*Y + XY^*)/2 - bZ. \end{aligned} \tag{2.20}$$

В системе (2.20) переменные X, Y и параметр $r = r_1 + ir_2$ — комплексные. Следовательно, система (2.20) является пятимерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при $r_2 = 0$ сводится к классической трехмерной системе уравнений Лоренца (2.3).

Рассмотренная бифуркация рождения устойчивого тора T^2 является суперкритической (мягкой) бифуркацией. Наряду с ней, как и в случае бифуркации Андронова-Хопфа, может происходить также и субкритическая (жесткая) бифуркация. В этом случае при $\mu < 0$ система имеет устойчивый цикл, лежащий внутри неустойчивого тора. При $\mu \geq 0$ тор влипает в устойчивый цикл, который после этого становится неустойчивым. Происходит исчезновение аттрактора, и, следовательно, бифуркация является кризисом.

Случай переменной T-периодической матрицы $D(t, \mu)$. Этот случай означает, что переход преобразованием $Q(t, \mu)$ к системе координат, связанной с циклом, осуществляет приведение системы (2.8) с периодическими коэффициентами к системе (2.11) меньшей размерности, но имеющей также T-периодические вещественные коэффициенты. В этом случае, как следует из теоремы Флоке, фундаментальное матричное решение линейной системы (2.11) представимо в виде $V(t, \mu) = R(t, \mu)\exp(E(\mu)t)$, где $R(t, \mu)$ – некоторая T- периодическая комплексная матрица, а $E(\mu)$ – некоторая постоянная комплексная матрица, собственные значения которой являются показателями Флоке исходного цикла. Мы рассмотрим наиболее интересный и важный с точки зрения различных приложений случай бифуркации удвоения периода цикла, которому соответствует переход при $\mu = 0$ одного комплексного собственного значения матрицы $E(\mu)$ через мнимую ось. При этом все остальные собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части.

Бифуркация удвоения периода цикла. Эта бифуркация может произойти только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Она связана с переходом через мнимую ось слева направо одного комплексного показателя Флоке $\alpha(\mu)$ исходного цикла $x_0(t, \mu)$ при $\mu = 0$.

При этом соответствующий вещественный мультипликатор цикла при $\mu = 0$ имеет вид

$$\lambda = \exp(\alpha(0)T) = \exp(i\pi) = -1.$$

Но с другой стороны, что тоже следует из теоремы Флоке, фундаментальное матричное решение линейной системы (2.9) представимо в виде произведения некоторой $2T$-периодической вещественной матрицы на вещественную матрицу $\exp(H(\mu)t)$, одно собственное значение которой выходит при $\mu = 0$ из единичного круга через точку $+1$. Следовательно, переход одного комплексного показателя Флоке цикла $x_0(t, \mu)$, имеющего период T, через мнимую ось, что эквивалентно переходу мультипликатора цикла через точку -1 единичной окружности, означает, что цикл $x_0(t, \mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно возникает другой устойчивый цикл, имеющий ту же амплитуду и удвоенный период $2T$ (рис. 2.10).

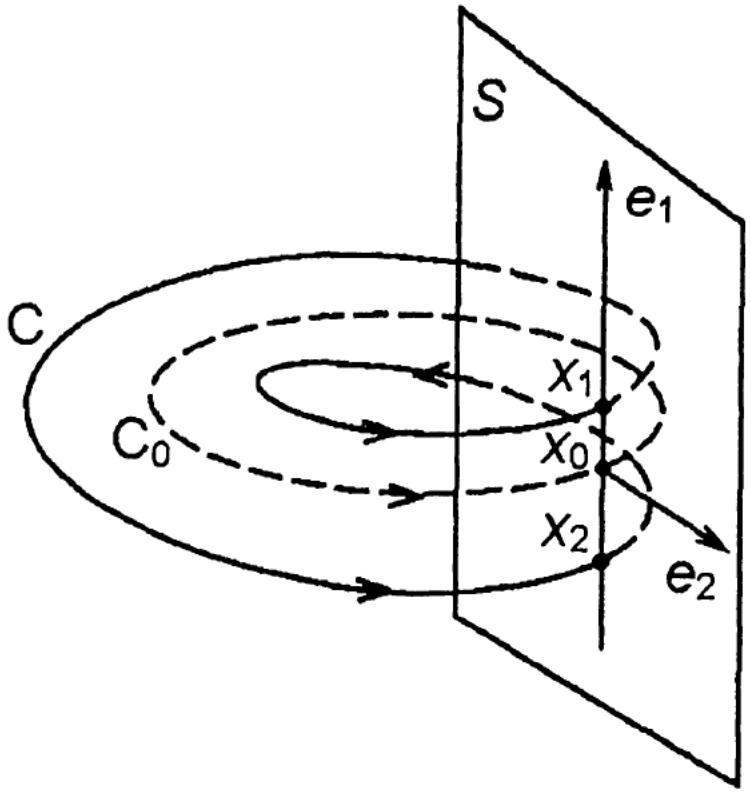

Рис. 2.10. Суперкритическая бифуркация удвоения периода цикла: C_0 – исходный цикл; C – цикл удвоенного периода после бифуркации.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\nu x_2 - \nu x_1 x_3/2 - ((\mu - 1)x_1 + 1)(1 - x_1^2 - x_2^2), \\
\dot{x}_2 &= \nu x_1 + 2x_3(1 - \nu x_2/4) - (\mu - 1)x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \qquad (2.21) \\
\dot{x}_3 &= 2(\mu - 1 - x_1)x_3 + (x_2 + \nu/4)(x_1^2 + x_2^2 - 1).
\end{aligned}$$

Система (2.21) имеет предельный цикл $x_0(t) = (\cos\nu t,\ \sin\nu t,\ 0)^{\mathrm{T}}$, лежащий в плоскости переменных (x_1, x_2). Линеаризованная на цикле система имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot y_1 &= 2y_1((\mu-1)\cos\nu t+1)\cos\nu t+\\
&\quad + y_2(((\mu-1)\cos\nu t+1)2\sin\nu t-\nu) - y_3\frac{\nu}{2}\cos\nu t + f_1(y_1,y_2,y_3),\\
\dot y_2 &= y_1(\nu+(\mu-1)\sin 2\nu t)+\\
&\quad + 2y_2(\mu-1)\sin^2\nu t + 2y_3(1-\frac{\nu}{4}\sin\nu t) + f_2(y_1,y_2,y_3),\\
\dot y_3 &= 2y_1\big(\frac{\nu}{4}+\sin\nu t\big)\cos\nu t+\\
&\quad + 2y_2\big(\frac{\nu}{4}+\sin\nu t\big)\sin\nu t + 2y_3(\mu-1-\cos\nu t) + f_3(y_1,y_2,y_3),
\end{aligned}$$

где разложения функций $f_1(y_1,y_2,y_3)$, $f_2(y_1,y_2,y_3)$ и $f_3(y_1,y_2,y_3)$ в ряды в точке $(0,0,0)$ начинаются с членов второго порядка. Заменой $y(t) = Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $Q(t)$, описанной в п.1, приведем последнюю систему к связанным с циклом координатам

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= -\frac{2}{\nu}z_2\sin\nu t + \frac{2}{\nu}z_3\cos\nu t + \tilde f_1(z_1,z_2,z_3),\\
\dot z_2 &= 2(\mu-1+\cos\nu t)z_2 + (2\sin\nu t-\frac{\nu}{2})z_3 + \tilde f_2(z_1,z_2,z_3),\\
\dot z_3 &= (2\sin\nu t+\frac{\nu}{2})z_2 + 2(\mu-1-\cos\nu t))z_3 + f_3(z_1,z_2,z_3).
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости цикла сводится к анализу устойчивости нулевого решения линейной двумерной системы

$$\begin{aligned}
\dot u_2 &= 2(\mu-1+\cos\nu t)u_2 + (2\sin\nu t-\frac{\nu}{2})u_3\\
\dot u_3 &= (2\sin\nu t+\frac{\nu}{2})u_2 + 2(\mu-1-\cos\nu t)u_3.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Матрица $D(t,\mu)$ коэффициентов системы (2.22) является $2\pi/\nu$-периодической матрицей. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что система (2.22) имеет фундаментальную матрицу решений вида

$$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\nu t}{2} & -\sin\dfrac{\nu t}{2}\\ \sin\dfrac{\nu t}{2} & \cos\dfrac{\nu t}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\exp(2\mu t) & 0\\ 0 & \exp(2(\mu-2)t)\end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Следовательно, при $\mu < 0$ нулевое решение системы (2.22) и, соответственно, цикл $x_0(t)$ системы (2.21) устойчивы. При $\mu > 0$ в системе

(2.21) появляется устойчивое решение с частотой $\nu/2$ или же с удвоенным периодом $4\pi/\nu$. Выражение (2.23) является представлением решения линейной системы с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $D(t,\mu)$ в виде произведения $4\pi/\nu$-периодической вещественной матрицы на вещественную матрицу $\exp(H(\mu)t)$, одно собственное значение которой выходит из единичного круга при $\mu = 0$ через точку $+1$. Для того, чтобы перейти к представлению Флоке, запишем (2.23) в виде произведения $2\pi/\nu$-периодической комплексной матрицы на комплексную матрицу $\exp(E(\mu)t)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+e^{-i\nu t}}{2} & -\dfrac{1-e^{-i\nu t}}{2i} \\ \dfrac{1-e^{-i\nu t}}{2i} & \dfrac{1+e^{-i\nu t}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{(2\mu+\frac{i\nu}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(2\mu-4+\frac{i\nu}{2})t} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы $E(\mu)$: $i\nu/2 + 2\mu$ и $i\nu/2 + 2(\mu - 2)$ являются показателями Флоке цикла $x_0(t)$ системы (2.21). При $\mu = 0$ первый из них переходит слева направо через мнимую ось, а второй остается в левой полуплоскости. Соответствующий первому показателю Флоке мультипликатор равен

$$\lambda = \exp\Big(\Big(2\mu + \frac{i\nu}{2}\Big)\frac{2\pi}{\nu}\Big) = \exp\Big(\frac{4\pi\mu}{\nu} + i\pi\Big).$$

При $\mu = 0$ он, очевидно, пересекает границу единичной окружности в точке -1. Второй мультипликатор при этом равен $-\exp(-8\pi/\nu)$ и остается лежащим на вещественной оси внутри единичного круга.

Бифуркация удвоения периода цикла играет основополагающую роль в процессе формирования хаотических аттракторов нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Она начинает бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, открытый впервые М.Фейгенбаумом [66] и ведущий к возникновению простейшего нерегулярного аттрактора — аттрактора Фейгенбаума. Ее можно наблюдать также и во всех других более сложных каскадах бифуркаций, ведущих к возникновению более сложных аттракторов, таких, например, как аттракторы Лоренца, Ресслера и Чуа. Она обнаружена также и в большом числе нелинейных динамических систем, описываемых не только обыкновенными дифференциальными уравнениями, но и дифференциальными уравнениями в частных производных и с запаздывающим аргументом (см. подробнее в гл. 3–5).

2.2.3. Бифуркации устойчивых двумерных торов. Определение нормальной формы и, соответственно, вида происходящих на торе бифуркаций, является еще более сложной задачей, чем аналогичная задача для устойчивых предельных циклов. В то время как для анализа бифуркаций предельных циклов существует пусть не вполне конструктивная, но фундаментальная основа в виде теории показателей Флоке, какая-либо теория бифуркаций устойчивых двумерных

торов в настоящее время практически отсутствует. Рассмотрим один из возможных подходов к построению такой теории.

Предположим, что устойчивый двумерный тор T^2 семейства систем (2.1) был рожден в результате рассмотренной в предыдущем пункте бифуркации Андронова-Хопфа устойчивого T-периодического предельного цикла $x_0(t)$. Это значит, что линеаризованная на цикле система (2.8) заменой переменных $y(t) = Q(t,\mu)z(t)$ с T-периодической матрицей $Q(t,\mu)$ сводится к системе $m-1$ порядка, записанной в системе координат, связанной с циклом. В такой системе, напомним, одним из координатных векторов является вектор $\dot{x}_0(t)$, касательный к циклу, другим — вектор цикла $x_0(t)$. Так как мультипликатор цикла, соответствующий вектору $\dot{x}_0(t)$, всегда равен единице, а показатель Флоке — нулю и не является бифуркационным, то координаты нормальной формы образовавшегося двумерного тора заведомо лежат в гиперплоскости S, трансверсальной вектору $\dot{x}_0(t)$ и задаваемой последними $m-1$ компонентами вектора $z(t)$. Этот вектор, который мы обозначим через $v(t)$, удовлетворяет системе $m-1$ дифференциальных уравнений

$$\dot{v}(t) = D(t,\mu)v(t) + P(v,\mu) \tag{2.24}$$

где разложение вектор-функции $P(v,\mu)$ в ряд по степеням v в нуле начинается с членов второго порядка, а T-периодическая матрица $D(t,\mu)$ получается из матрицы

$$G(t,\mu) = Q^{-1}(t,\mu)A(t,\mu)Q(t,\mu) - Q^{-1}(t,\mu)\dot{Q}(t,\mu)$$

вычеркиванием ее первой строки и первого столбца.

Рождение устойчивого двумерного тора T^2 в системе (2.1) является следствием рождения устойчивого цикла $v_0(t)$ в системе (2.24) в результате бифуркации Андронова-Хопфа (см. п.2.2.2 и пример в нем). Рассматривая теперь систему (2.24) как новую исходную систему типа (2.1), имеющую на единицу меньшую размерность и обладающую устойчивым предельным циклом, мы можем применить к ней теорию показателей Флоке, изложенную в п.2.2.2. Ясно, что бифуркации цикла $v_0(t)$ системы (2.24) приводят к соответствующим бифуркациям двумерного тора T^2 системы (2.1). Таким образом, возможны следующие пять типов бифуркаций устойчивых двумерных торов нелинейных динамических систем.

1. Бифуркация рождения пары устойчивых двумерных торов. В этом случае при $\mu < 0$ в системе (2.24) существует устойчивый цикл $v_0(t,\mu)$, один мультипликатор которого равен $+1$, а все остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга. При переходе значений параметра μ через точку $\mu = 0$ один простой мультипликатор цикла переходит через точку $+1$ единичной окружности, что соответствует пересечению мнимой оси одним простым вещественным показателем Флоке линеаризованной на цикле системы. Поэтому нормальная форма такой бифуркации двумерного тора совпадает с

одномерной нормальной формой бифуркации особой точки типа вилки: $\dot{u} = \mu u - u^3$. Тору, очевидно, соответствует нулевое решение этого уравнения.

В результате бифуркации двумерный тор T^2 теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно рядом с ним на расстоянии $u_{12} = \pm\sqrt{\mu}$ от него (внутри и вне его в трехмерном случае) в направлении собственного вектора, соответствующего показателю цикла $v_0(t, \mu)$, проходящему через мнимую ось, рождается пара устойчивых двумерных торов. Бифуркация является мягкой.

2. Транскритическая (обмена устойчивостью между торами) бифуркация. В этом случае при $\mu < 0$ наряду с устойчивым двумерным тором T_0^2 системы (2.1) и соответствующим ему устойчивым циклом $v_0(t, \mu)$ системы (2.24) существует также и неустойчивый (седловой) двумерный тор T_1^2 системы (2.1) и соответствующий ему седловой цикл $v_1(t, \mu)$ системы (2.24), лежащий на расстоянии $u = \mu$ внутри него. При переходе значений параметра μ через точку $\mu = 0$ один простой мультипликатор цикла $v_0(t, \mu)$ переходит через точку $+1$ единичной окружности, а торы обмениваются устойчивостью. Устойчивый внешний тор T_0^2 и, соответственно, устойчивый цикл $v_0(t, \mu)$ становятся неустойчивыми (седловыми), а неустойчивый внутренний (седловой) тор T_1^2 и, соответственно, неустойчивый (седловой) цикл $v_1(t, \mu)$ — устойчивыми.

Нормальная форма такой бифуркации двумерного тора совпадает с одномерной нормальной формой транскритической бифуркации особой точки: $\dot{u} = \mu u - u^2$. Бифуркация является мягкой.

3. Бифуркация исчезновения (рождения) пары двумерных торов. В этом случае при $\mu < 0$ наряду с устойчивым двумерным тором T_0^2 системы (2.1) и соответствующим ему устойчивым циклом $v_0(t, \mu)$ системы (2.24) существует также и неустойчивый (седловой) двумерный тор T_1^2 системы (2.1) и соответствующий ему седловой цикл $v_1(t, \mu)$ системы (2.24). При возрастании значений параметра μ эти торы сближаются друг с другом и при $\mu = 0$ сливаются в один вырожденный тор. При $\mu > 0$ оба тора исчезают. Поэтому нормальная форма такой бифуркации устойчивого двумерного тора совпадает с одномерной нормальной формой седло-узловой бифуркации особой точки: $\dot{u} = \mu + u^2$. Бифуркация является жесткой (кризисом).

Если рассмотреть процесс изменения параметра μ от больших значений к меньшим, то описываемая бифуркация означает, что при $\mu = 0$ внезапно рождается двумерный тор, который при дальнейшем уменьшении параметра расщепляется на два тора, один из которых устойчивый, а другой — нет. Другими словами, происходит внезапное одновременное рождение устойчивого и седлового двумерных торов, расположенных один внутри другого.

4. Бифуркация рождения (гибели) трехмерного тора. Эта бифуркация может произойти только в фазовом пространстве размерности $m > 3$. Она связана с одновременным переходом при $\mu = 0$

двух комплексно сопряженных мультипликаторов цикла $v_0(t,\mu)$ системы (2.24) через единичную окружность, что эквивалентно переходу двух комплексно сопряженных показателей Флоке цикла $v_0(t,\mu)$ слева направо через мнимую ось. При этом цикл $v_0(t,\mu)$ системы (2.24) теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно вокруг него возникает двумерный тор T^2 в результате бифуркации Андронова-Хопфа в гиперплоскости S, трансверсальной к циклу. Одновременно в системе (2.1) рождается, очевидно, устойчивый трехмерный тор T^3, а существовавший до этого в системе двумерный тор T^2 становится неустойчивым, но не исчезает. В зависимости от соотношения частот вращения по циклам исходного двумерного тора и по родившемуся в гиперплоскости S циклу, движение по возникшему трехмерному устойчивому тору может быть либо периодическим, либо квазипериодическим. В первом случае любая траектория на торе замкнута, во втором, эргодическом случае любое движение по тору имеет незамкнутую траекторию, всюду плотно заполняющую поверхность тора.

При дальнейшем увеличении значений параметра μ фазовый портрет системы будет качественно меняться, демонстрируя переходы от эргодического движения на торе к режимам резонансов.

Рассмотренная бифуркация рождения устойчивого тора T^3 является суперкритической (мягкой) бифуркацией. Наряду с ней, как и в случае бифуркации двумерного тора, может происходить также и субкритическая (жесткая) бифуркация. В этом случае при $\mu < 0$ система имеет устойчивый двумерный тор, лежащий внутри неустойчивого трехмерного тора. При $\mu \geq 0$ неустойчивый трехмерный тор влипает в устойчивый двухмерный тор, который после этого становится неустойчивым. Происходит исчезновение аттрактора, и, следовательно, бифуркация является кризисом.

5. Бифуркация удвоения периода двумерного тора. Эта бифуркация также может произойти только в фазовом пространстве размерности $m > 3$. Она связана с переходом через мнимую ось слева направо одного комплексного показателя Флоке цикла $v_0(t,\mu)$ системы (2.24) при $\mu = 0$. При этом соответствующий вещественный мультипликатор цикла при $\mu = 0$ проходит через точку -1 единичной окружности. Цикл $v_0(t,\mu)$ системы (2.24) теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно в системе возникает другой устойчивый цикл, имеющий ту же амплитуду и удвоенный период. Очевидно при этом двумерный тор T^2 исходной системы (2.1) теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно с этим в системе (2.1) рождается устойчивый двумерный тор, имеющий удвоенный период по одной из частот. В результате такой бифуркации происходит удвоение поверхности тора внутри ограниченного объема фазового пространства. При этом тор остается двумерным.

Бифуркацию рождения устойчивого двумерного тора удвоенного периода можно наблюдать при некоторых значениях параметров в комплексной системе уравнений Лоренца (2.20) [34].

Кроме рассмотренных выше основных локальных однопараметрических бифуркаций в нелинейных динамических системах могут происходить и некоторые более сложные, малоизученные бифуркации устойчивых циклов и торов, такие, например, как недавно открытые в системе Лоренца бифуркации самоорганизации циклов [29,30]; или бифуркации, связанные с различными случаями вырождения мультипликаторов линейных систем первого приближения на циклах, или с резонансами частот рождающихся торов [67].

2.3. Простейшие двухпараметрические локальные бифуркации.

Анализ бифуркаций систем дифференциальных уравнений в многомерном пространстве параметров является значительно более сложной проблемой по сравнению с проведенным выше анализом бифуркаций в однопараметрических системах. Это связано, во-первых, с тем, что очень сложной оказывается задача нахождения границ бифуркационных поверхностей (пленок) в пространстве параметров даже для бифуркаций коразмерности 1. Во-вторых, в семействах таких систем непременно присутствуют более сложные бифуркации коразмерности 2 и выше. Задача нахождения условий, определяющих такие бифуркации, и их бифуркационных поверхностей решена в настоящее время только для самых простейших модельных уравнений.

Рассмотрим два наиболее часто встречающихся случая анализа двухпараметрических локальных бифуркаций в семействах уравнений, являющихся обобщениями уравнений, рассмотренных в предыдущем пункте. Заметим, что такие многопараметрические локальные бифуркации являются предметом изучения теории катастроф [68–70], а их нормальные формы и фазопараметрические диаграммы носят уже устоявшиеся наименования, которые и будут нами использованы.

2.3.1. Нормальная форма складки. Рассмотрим двухпараметрическую нормальную форму следующего вида

$$\dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + y^2. \tag{2.25}$$

Нетрудно видеть, что при $\mu_1 = 0$ эта нормальная форма совпадает с нормальной формой транскритической бифуркации, а при $\mu_2 = 0$ – с нормальной формой седло-узловой бифуркации. Выясним, какова коразмерность каждой из этих бифуркаций в двумерном пространстве параметров (μ_1, μ_2) семейства дифференциальных уравнений (2.25).

Уравнение (2.25) имеет две особые точки

$$y_{12} = \frac{-\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 - 4\mu_1}}{2}.$$

Так как кривая в пространстве параметров, при переходе через которую особые точки исчезают, определяется условием $\mu_2^2 = 4\mu_1$, то это

условие и является условием, определяющим в двумерном пространстве параметров (μ_1, μ_2) одномерную бифуркационную кривую для седло-узловой бифуркации. Следовательно, седло-узловая бифуркация имеет коразмерность 1. На рис. 2.11 приведена фазопараметрическая диаграмма поверхности особых точек двухпараметрического семейства (2.25), имеющая особенность типа *складки* вдоль линии, проекция которой на плоскость параметров и есть бифуркационная парабола $\mu_2^2 = 4\mu_1$.

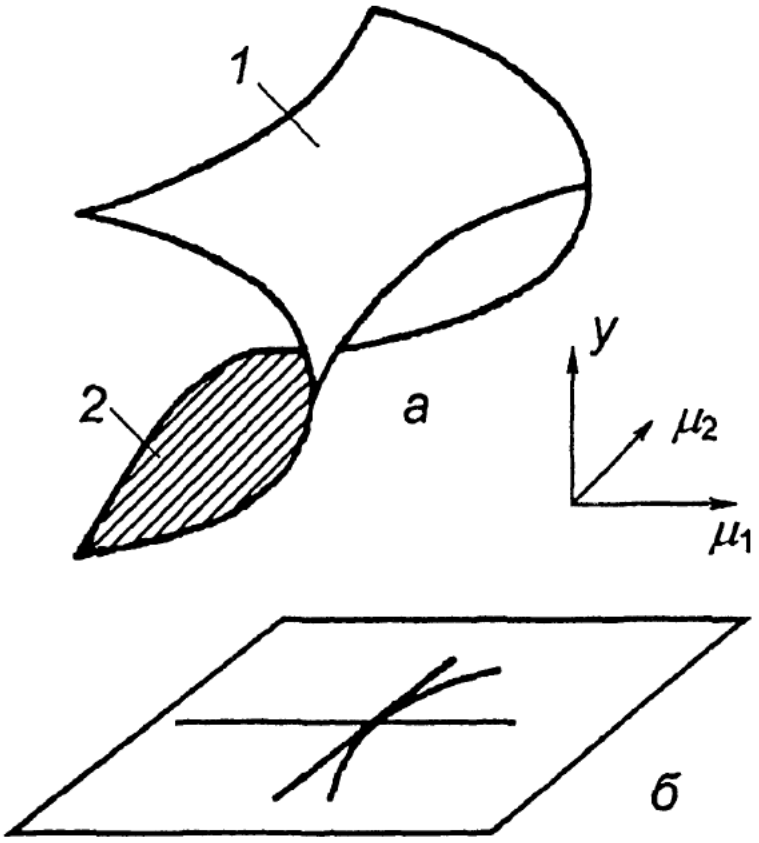

Рис. 2.11. Фазопараметрическая диаграмма складки (а) и ее проекция на плоскость параметров (μ_1, μ_2) (б). 1– неустойчивые точки, 2– устойчивые точки.

Рассмотрим теперь условия, определяющие в пространстве параметров (μ_1, μ_2) транскритическую бифуркацию. При этой бифуркации происходит обмен устойчивостью между особыми точками семейства уравнений (2.25). На рис. 2.12 изображены проекции фазопараметрической поверхности особых точек семейства на плоскость $(y,\ \mu_2)$ для случаев $\mu_1 < 0$, $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 > 0$. Очевидно, что обмен устойчивостью может происходить только в случае $\mu_1 = 0$. При этом, как мы видели выше при анализе транскритической бифуркации в однопараметрических семействах, необходимо положить и $\mu_2 = 0$. Следовательно, транскритическая бифуркация в двухпараметрическом семействе уравнений (2.25) имеет коразмерность 2.

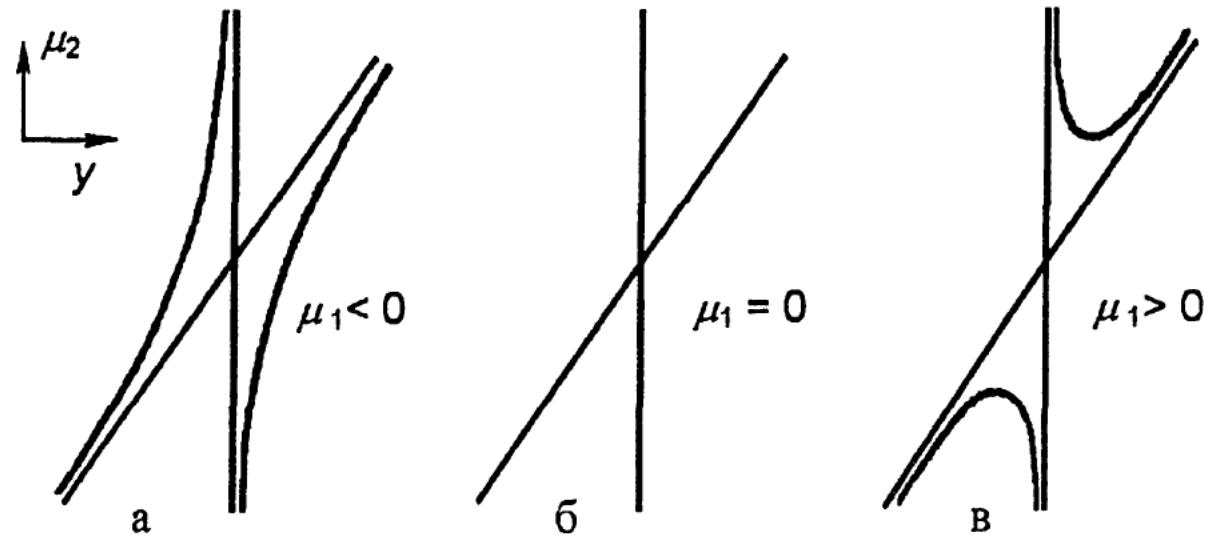

Рис. 2.12. Проекция складки на плоскость (y, μ_2) при $\mu_1 < 0$ (а), $\mu_1 = 0$ (*б*), $\mu_1 > 0$ (в).

2.3.2. Нормальная форма сборки. Рассмотрим двухпараметрическую нормальную форму

$$\dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y - y^3, \tag{2.26}$$

совпадающую при $\mu_1 = 0$ с нормальной формой рассмотренной выше надкритической бифуркации типа вилки. Уравнение (2.26) в зависимости от соотношения между параметрами μ_1 и μ_2 может иметь одну или три особых точки. На рис. 2.13а приведена фазопараметрическая диаграмма поверхности особых точек двухпараметрического семейства (2.26), имеющая особенность типа *сборки* в области, проекция которой на плоскость параметров (μ_1, μ_2) изображена на рис. 2.13б.

При $\mu_2 < 0$ и произвольном μ_1 уравнение (2.26) имеет единственное асимптотически устойчивое стационарное решение. При $\mu_2 > 0$ существует область значений μ_1 (заштрихованная область G на бифуркационной диаграмме, рис. 2.13б), где система имеет три особые точки, лежащие на трех листах поверхности сборки. При этом, верхний и нижний листы соответствуют асимптотически устойчивым особым точкам, а средний — неустойчивой.

Если менять параметр μ_1 слева направо в направлении увеличения его значений, то при переходе через левую границу l_1 области G на бифуркационной диаграмме в дополнение к уже существующей устойчивой особой точке появляются еще одна устойчивая и одна неустойчивая особые точки. В области G семейство (2.26) имеет два аттрактора (рис. 2.13а). При переходе через правую границу l_2 области происходит смена аттрактора. Две из трех особых точек (устойчивая и неустойчивая) сливаются и исчезают, причем исчезает не та устойчивая особая точка, которая появилась при пересечении левой границы области, а та, которая существовала еще до подхода к границе.

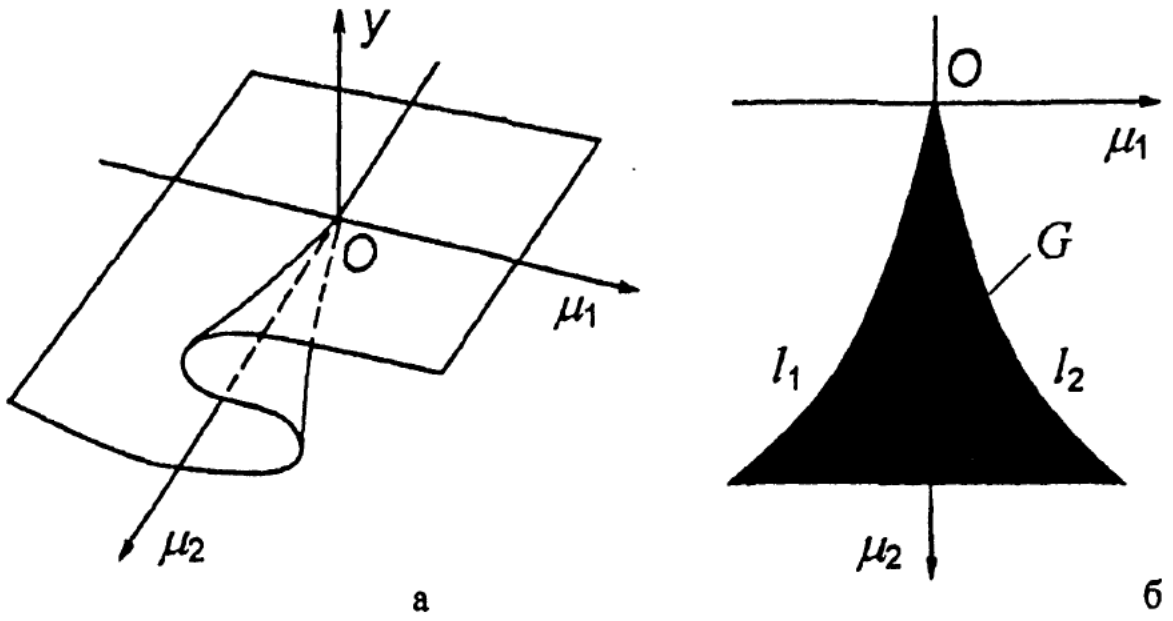

Рис. 2.13. Фазопараметрическая диаграмма сборки (а) и ее проекция на плоскость параметров (μ_1, μ_2) (б).

Если менять параметр μ_2 в направлении увеличения его значений при $\mu_1 \neq 0$, то также при переходе через границу области G на бифуркационной диаграмме в дополнение к уже существующей устойчивой особой точке появляются еще одна устойчивая и одна неустойчивая особые точки (рис. 2.13а).

Таким образом, на границах области G при $\mu_1 \neq 0$ происходит описанная выше в п. 2.2.1 седло-узловая бифуркация, имеющая коразмерность 1. Следовательно, единственной точкой в плоскости параметров, в которой может происходить бифуркация типа вилки, является точка $\mu_2 = \mu_1 = 0$. Бифуркация типа вилки имеет в данном случае коразмерность 2.

2.4. Нелокальные бифуркации.

Кроме рассмотренных выше наиболее распространенных локальных бифуркаций особых точек (положений равновесия), циклов и торов в нелинейных системах дифференциальных уравнений существуют более сложные и малоизученные нелокальные бифуркации *гомоклинических и гетероклинических контуров*, являющихся сепаратрисами седловых предельных множеств — тех же особых точек, циклов и торов. Такие бифуркации не приводят к локальным топологическим изменениям самих седловых предельных множеств, но оказывают решающее влияние на нелокальное изменение динамики системы в областях фазового пространства, охватывающих предельные множества, соединенные сепаратрисными контурами. Бифуркации такого типа, носящие названия *гомоклиническая бабочка*, бифуркация *точка-цикл* и *гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса* присутствуют,

например, в системе уравнений Лоренца (2.3). В нелинейных системах дифференциальных уравнений могут происходить также нелокальные бифуркации нерегулярных аттракторов, рождающихся в результате каскадов мягких бифуркаций регулярных аттракторов. Рассмотрим основные известные на сегодняшний день нелокальные бифуркации.

2.4.1. Бифуркации гомоклинических сепаратрисных контуров. В настоящее время в какой-то степени изученными являются только бифуркации гомоклинических контуров особых точек. Бифуркации более сложных контуров на сегодняшний день практически не исследованы ни теоретически, ни экспериментально. Рассмотрим некоторые наиболее важные с нашей точки зрения бифуркации.

1. Петля сепаратрисы седловой особой точки. Эта бифуркация возможна в фазовой плоскости при $m = 2$. Пусть имеется седловая особая точка O системы (2.1) с вещественными собственными значениями матрицы линеаризации в ней $\lambda_1(\mu) < 0$ и $\lambda_2(\mu) > 0$. Пусть устойчивое W^s и неустойчивое W^u одномерные многообразия особой точки O при увеличении параметра $\mu < 0$ сближаются, а при $\mu = 0$ касаются друг друга. В момент касания происходит бифуркация и образуется особая двоякоасимптотическая траектория Γ, называемая петлей сепаратрисы седла (рис. 2.14а).

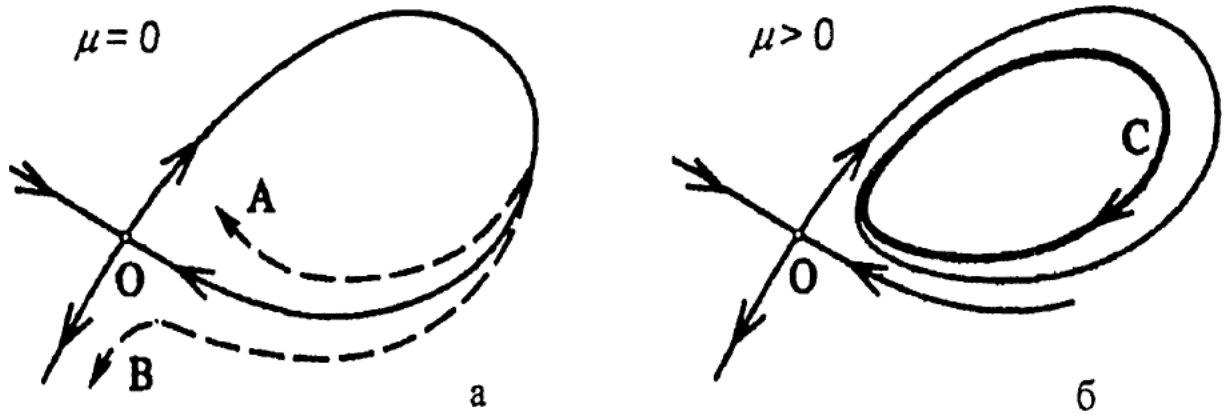

Рис. 2.14. Бифуркация образования петли сепаратрисы седла: а – момент бифуркации; б – после бифуркации.

Петля сепаратрисы седла является негрубым образованием и при $\mu > 0$ она разрушается. Если *седловая величина* $\sigma(\mu) = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)$ отрицательна при $\mu = 0$, т.е. $\sigma(0) < 0$, то петля устойчива, и при ее разрушении в сторону A (рис. 2.14а) из нее рождается устойчивый предельный цикл (рис. 2.14б). При разрушении петли в сторону B цикл не рождается. Если $\sigma(0) > 0$, то петля неустойчива, и при ее разрушении из нее может родиться только неустойчивый цикл.

Рассмотренная в обратном порядке бифуркация образования петли сепаратрисы седла может означать кризис аттрактора – устойчивого предельного цикла в результате его касания седла O. При приближении к точке бифуркации длина периодической орбиты остается ограниченной, в то время как ее период стремится к бесконечности.

2. Петля сепаратрисы вырожденного двумерного седло-узла. Эта бифуркация также возможна в фазовой плоскости при $m = 2$. Пусть при $\mu < 0$ в системе (2.1) существуют две особые точки: седло O_1 и устойчивый узел O_2, причем неустойчивые сепаратрисы седла, замыкаясь на узел, образуют сепаратрисный контур (рис. 2.15а).

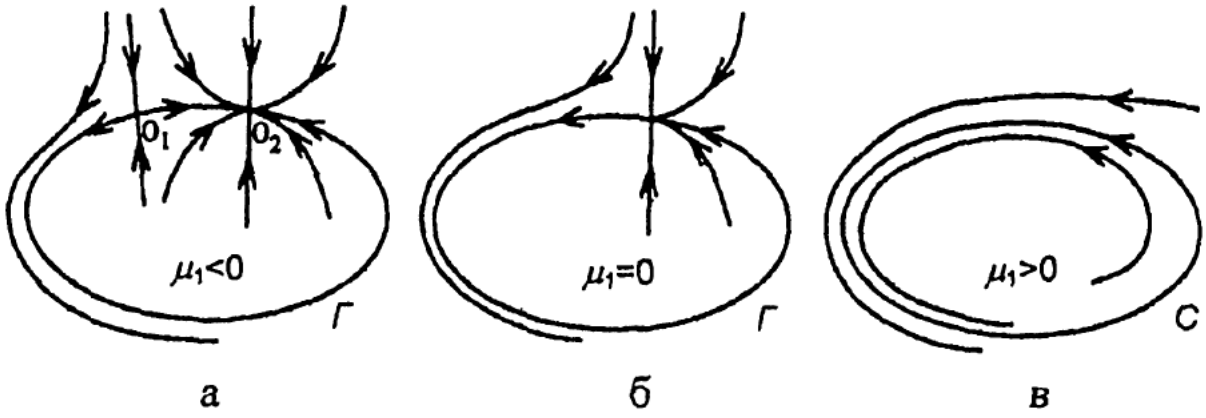

Рис. 2.15. Бифуркация образования петли сепаратрисы седло-узла.

В точке бифуркации при $\mu = 0$ происходит образование негрубого состояния равновесия — вырожденного седло-узла, имеющего гомоклиническую петлю сепаратрисы Г (рис. 2.15б). При $\mu > 0$ седло-узел разрушается, а из петли сепаратрисы рождается устойчивый предельный цикл (рис. 2.15в).

Рассмотренная в обратном порядке данная бифуркация может означать кризис аттрактора – устойчивого предельного цикла в результате образования на нем вырожденного седло-узла. При приближении к точке бифуркации длина периодической орбиты остается ограниченной, в то время как ее период стремится к бесконечности.

3. Петля сепаратрисы седло-узла. Эта бифуркация возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть имеется особая точка O системы (2.1) типа седло-узел с вещественными собственными значениями матрицы линеаризации в ней, такими что $\lambda_i(\mu) < 0$, $i = 1, ..., m-1$, а $\lambda_m(\mu) > 0$. Пусть одна из сепаратрис неустойчивого одномерного многообразия W^u особой точки при увеличении параметра $\mu < 0$ сближается с устойчивым $(m-1)$-мерным многообразием W^s и при $\mu = 0$ касается его. В момент касания происходит бифуркация и образуется особая двоякоасимптотическая траектория Г, называемая *петлей сепаратрисы седло-узла* (рис. 2.16 а).

Петля сепаратрисы седло-узла также является негрубым образованием и при $\mu > 0$ она разрушается. Если седловая величина

$$\sigma(\mu) = \lambda_m(\mu) + \max_{i=1,...,m-1} \lambda_i$$

отрицательна при $\mu = 0$, т.е. $\sigma(0) < 0$, то петля устойчива, и при ее разрушении из нее может родиться устойчивый предельный цикл

аналогично тому, как это имеет место в случае петли сепаратрисы седла. *Если $\sigma(0) > 0$, то петля неустойчива, и при ее разрушении из нее может родиться только неустойчивый предельный цикл.*

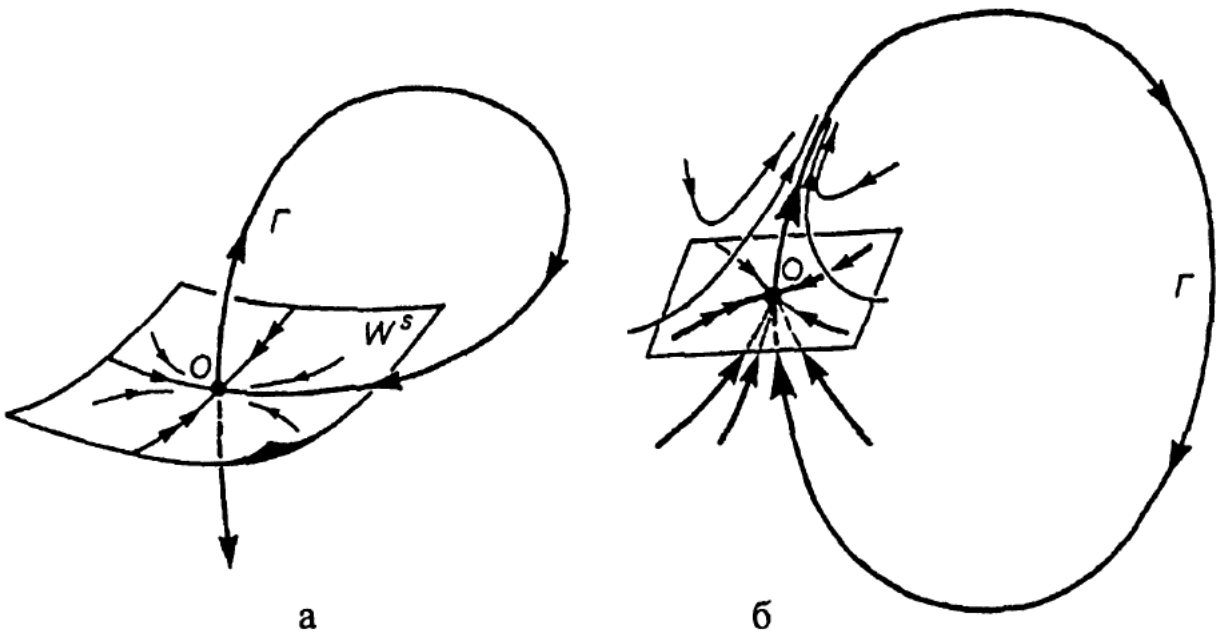

Рис. 2.16. Петля сепаратрисы седло-узла (а) и вырожденного седло-узла (б).

Рассмотренная в обратном порядке бифуркация образования петли сепаратрисы седло-узла может означать кризис аттрактора — устойчивого предельного цикла в результате его касания седло-узла O. При приближении к точке бифуркации длина периодической орбиты остается ограниченной, в то время как ее период стремится к бесконечности.

4. Петля сепаратрисы вырожденного седло-узла. Эта бифуркация также возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть при $\mu < 0$ в системе (2.1) существуют две особые точки: седло-узел O_1, имеющий одномерное неустойчивое многообразие, и устойчивый узел O_2, причем неустойчивые сепаратрисы седло-узла, замыкаясь на узел, образуют сепаратрисный контур. В точке бифуркации при $\mu = 0$ происходит образование негрубого состояния равновесия — вырожденного седло-узла, имеющего гомоклиническую петлю сепаратрисы Г (рис. 2.16б). При $\mu > 0$ вырожденный седло-узел разрушается, а из петли сепаратрисы может родиться устойчивый предельный цикл .

Рассмотренная в обратном порядке данная бифуркация может означать кризис аттрактора — устойчивого предельного цикла в результате образования на нем вырожденного седло-узла. При приближении к точке бифуркации длина периодической орбиты остается ограниченной, в то время как ее период стремится к бесконечности.

5. Гомоклиническая бабочка. Эта бифуркация также возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть имеется особая точка O системы (2.1) типа седло-узел с вещественными

собственными значениями матрицы линеаризации в ней, такими что $\lambda_i(\mu) < 0$, $i = 1, ..., m-1$, а $\lambda_m(\mu) > 0$. Пусть обе сепаратрисы неустойчивого одномерного многообразия W^u особой точки при увеличении параметра $\mu < 0$ сближаются с устойчивым $(m-1)$-мерным многообразием W^s и при $\mu = 0$ касаются его. В момент касания происходит бифуркация и образуется особый сепаратрисный контур, состоящий из двух двоякоасимптотических траекторий, называемый гомоклинической бабочкой (рис. 2.17).

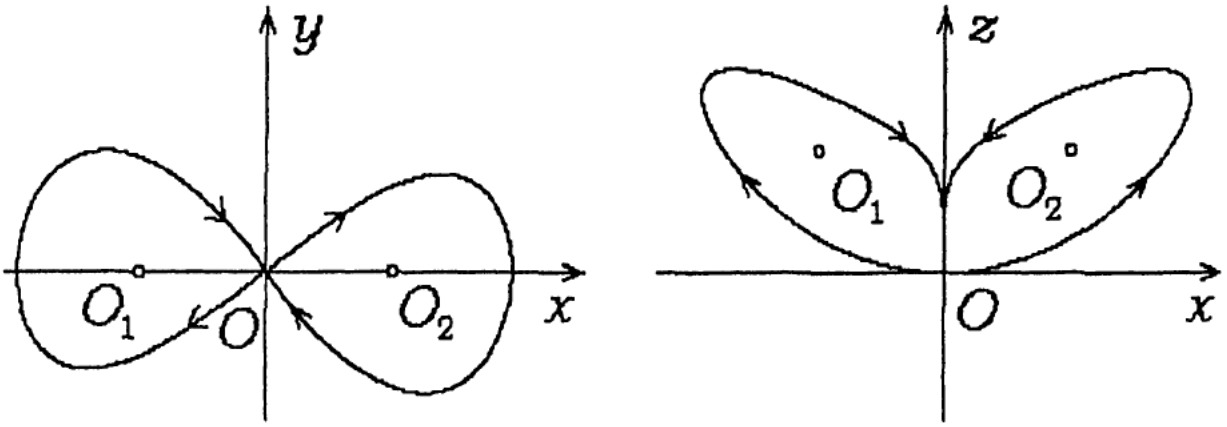

Рис. 2.17. Гомоклиническая бабочка трехмерного седло-узла в проекциях на плоскости (x, y) и (x, z).

Гомоклиническая бабочка также является негрубым образованием и при $\mu > 0$ она может разрушиться с образованием предельного цикла в виде восьмерки. Бифуркация такого типа характерна для систем с симметрией. Она является одной из основных бифуркаций в уже неоднократно упоминавшейся знаменитой системе уравнений Лоренца (2.3). Принято считать, что именно она является первопричиной жесткого рождения хаотического аттрактора Лоренца. Исследованию этой проблемы посвящено огромное количество работ (см.[17–20, 22–27, 71]), смысл которых сводится к попыткам построения в окрестности сепаратрисного контура инвариантного множества типа подковы Смейла с фрактальной структурой. Эти попытки до сих пор успеха в понимании природы аттрактора Лоренца не принесли по причинам, которые будут подробно рассмотрены в третьей и четвертой главах книги.

6. Петля сепаратрисы седло-фокуса. Эта бифуркация также возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть имеется особая точка O системы (2.1) типа седло-фокус с одним вещественным собственным значением $\lambda(\mu) > 0$ и двумя комплексно сопряженными собственными значениями $\rho(\mu) \pm i\omega(\mu)$ с $\rho < 0$. Пусть при $\mu = 0$ в системе (2.1) образуется петля сепаратрисы седло-фокуса Г. Что произойдет при $\mu > 0$ зависит от того, в каком направлении пойдут сепаратрисы седло-фокуса после разрушения петли и какова первая седловая величина $\sigma_1(\mu) = \rho(\mu) + \lambda(\mu)$. Если $\sigma_1(0) < 0$, то из петли

может родиться устойчивый предельный цикл аналогично рождению цикла из петли сепаратрисы седло-узла. Если $\sigma_1(0) > 0$, то в окрестности петли в момент ее существования, а также при ее разрушении имеется сложная структура фазовых траекторий, предположительно состоящая из счетного множества периодических траекторий, континуума непериодических траекторий и семейства стохастических траекторий, что свидетельствует о присутствии в системе хаотической динамики. Этот результат связан с наличием в системе при $\sigma_1(0) > 0$ подковы Смейла (см. гл. 1), что в случае размерности пространства $m = 3$ было обосновано аналитически в работе Л. Шильникова [21]. Теорема Шильникова, хотя и не объясняет природу хаотических аттракторов нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее имеет важное значение, так как именно в ней впервые было обращено внимание на то, что в системах с особыми точками типа седло-фокус возможно существование хаотической динамики.

Следуя работам [21, 52], рассмотрим автономную систему трех дифференциальных уравнений, имеющую особую точку типа седло-фокус с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями, в которую для удобства поместим начало координат. Матрица линеаризации системы в седло-фокусе имеет одно действительное собственное значение $\lambda > 0$ и два комплексно сопряженных собственных значения $\rho \pm i\omega$ с $\rho < 0$. Систему координат можно выбрать так, чтобы уравнения системы приняли следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - \omega y + P(x, y, z), \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.27}$$

где P, Q, R — некоторые функции, разложение которых в ряд по степеням x, y, z содержит члены, начиная со второй степени. Пусть система (2.27) имеет гомоклиническую петлю сепаратрисы седло-фокуса, схематически изображенную на рис. 2.18а. Покажем, что если $|\rho| < \lambda$, т.е. скорость ухода от особой точки по ее неустойчивому многообразию превалирует над скоростью приближения к ней по ее устойчивому многообразию, то наличие петли седло-фокуса влечет существование подковы Смейла и, следовательно, сложной нерегулярной динамики.

Окружим особую точку цилиндром высоты $2h$ и радиуса r с образующей, параллельной оси z. Размеры цилиндра считаем малыми, так что внутри него для анализа потока траекторий можно пользоваться линейным приближением в силу теоремы Гробмана-Хартмана. Точку, в которой сепаратриса протыкает верхнее основание цилиндра, обозначим через p, а точку, в которой она при возвращении протыкает боковую поверхность цилиндра, — через q. Выделим на боковой поверхности цилиндра узкую в вертикальном направлении прямоуголь-

ную область D. Положение точки в этой области будем характеризовать двумя переменными ξ и θ, $0 < \xi \leq \varepsilon$, $|\theta| < \theta_{\max}$, где $\xi = z$, а θ есть угол, отсчитываемый от точки q (рис. 2.18б).

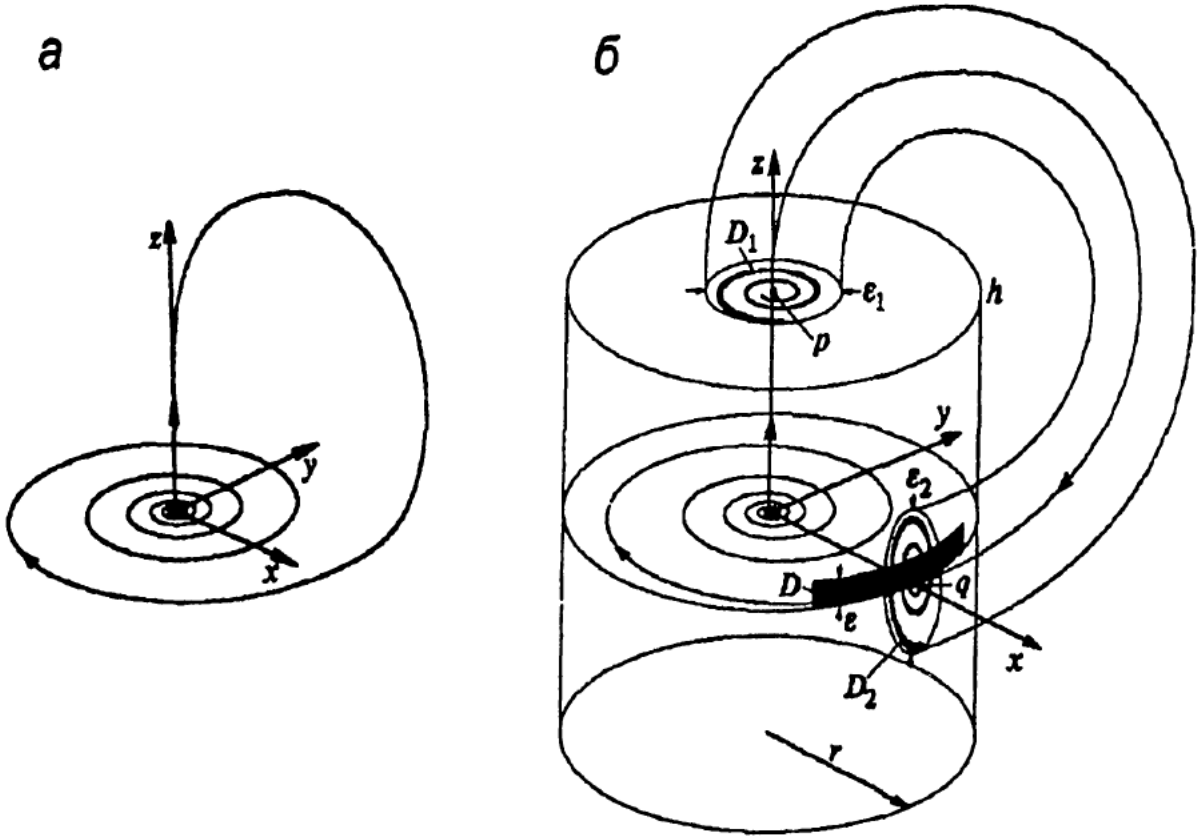

Рис. 2.18. Петля сепаратрисы седло-фокуса (а) и построение, иллюстрирующее доказательство теоремы Шильникова (б).

Движение по траектории, выпущенной из точки (z, θ), будет определяться внутри цилиндра в силу справедливости линейного приближения следующими соотношениями:

$$x = r\exp(\rho t)\cos(\omega t + \theta),$$
$$y = r\exp(\rho t)\sin(\omega t + \theta),$$
$$z = \xi\exp(\lambda t).$$

Полагая $z = h$, найдем из третьего уравнения момент выхода траектории из цилиндра $t = \lambda^{-1}\ln(h/\xi)$. Координаты выхода получим тогда из первых двух уравнений:

$$x = r\left(\frac{\xi}{h}\right)^{-\rho/\lambda}\cos\left(\theta - \frac{\omega}{\lambda}\ln\frac{\xi}{h}\right),$$
$$y = r\left(\frac{\xi}{h}\right)^{-\rho/\lambda}\sin\left(\theta - \frac{\omega}{\lambda}\ln\frac{\xi}{h}\right). \qquad (2.28)$$

Будем варьировать ξ и θ в пределах области D. Тогда полученные в соответствии с формулой (2.28) точки x и y на верхней поверхности

цилиндра расположатся в области D_1, имеющей форму скручивающейся к точке p спирали (рис.2.18 б). Область D_1, очевидно, располагается внутри круга диаметра $\varepsilon_1 = 2r(\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$. Потоком траекторий вдоль сепаратрисы область D_1 отобразится в некоторую область D_2 на боковой поверхности цилиндра. При этом ее центральная точка p перейдет в точку q, так что новая область некоторым образом наложится на исходную область D. Сделаем предположение о том, что отображение области D_1 в область D_2 можно аппроксимировать линейными уравнениями. Тогда можно считать, что область D_2 также является спиралью, лежащей внутри круга, диаметр которого изменится по сравнению с диаметром круга, содержащего область D_1, в k раз и составит $\varepsilon_2 = 2kr(\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$.

Если показатель степени $|\rho|/\lambda$ больше единицы, то при малых ε величина $\varepsilon_2 < 2\varepsilon$, так что верхняя часть спирали D_2 не выходит за границы исходной области D. Напротив, при $|\rho|/\lambda < 1$ при малых ε всегда будет $\varepsilon_2 > 2\varepsilon$, так что становится очевидным присутствие подковы в отображении исходной области D в область D_2 (рис. 2.19а). Более того, при уменьшении ε в построенном отображении появляются все новые и новые подковы (см. рис. 2.19б,в). Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, можно обнаружить присутствие в отображении счетного множества подков. Если в систему ввести небольшое возмущение, ведущее к раз-

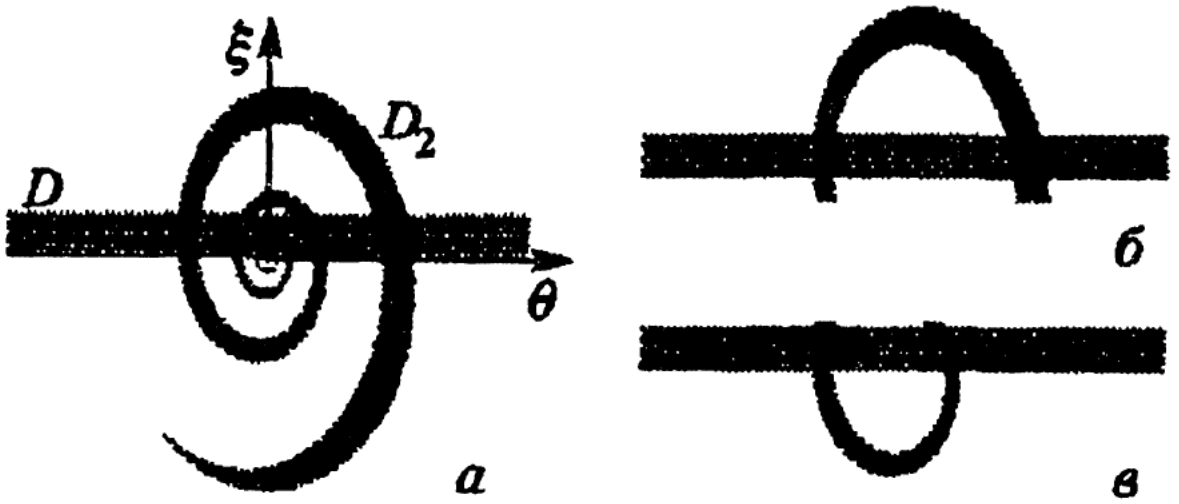

Рис. 2.19. Пояснение наличия подков в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса.

рушению петли сепаратрисы, то конечное число подков сохранится и при наличии возмущения. Таким образом, можно утверждать, что в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса с одномерным неустойчивым многообразием при $|\rho| < \lambda$ имеет место сложная нерегулярная динамика.

Альтернативная версия теоремы Шильникова получается, если рассматривать систему с гомоклинической петлей седло-фокуса, имеющего одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. При этом $\lambda < 0$, $\rho > 0$, а задача сводится к предыдущей обращением

времени $t \to -t$. Условием присутствия подковы и сложной нерегулярной динамики в этом случае служит неравенство $\rho < |\lambda|$.

Замечание. В теореме Шильникова доказано существование подковы, но не доказано, вообще говоря, существование инвариантного множества отображения подковы, которое должно обладать определенными свойствами. Поэтому из теоремы, вообще говоря, нельзя сделать вывод о том, что сложная нерегулярная динамика, имеющая место в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса является именно той динамикой, которая характерна для инвариантного множества подковы Смейла (см. главу 1). Более того, как показывают многочисленные примеры систем дифференциальных уравнений, рассмотренные в третьей и четвертой главах настоящей книги, сложная нерегулярная и даже хаотическая динамика присутствует в этих системах не только в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса, но и на любом расстоянии от нее в пространстве параметров. Необходимым условием не является ни наличие петли сепаратрисы, ни наличие самого седло-фокуса. Это уже никак не объясняется ни доказанной теоремой, ни отображением типа подковы. Следовательно, должен существовать некоторый другой механизм, обеспечивающий наличие сложной нерегулярной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений как с особыми точками типа седло-фокус или седло-узел, так и без них (см. главу 4).

2.4.2. Бифуркации гетероклинических сепаратрисных контуров. В отличие от бифуркаций гомоклинических сепаратрисных контуров, бифуркации гетероклинических контуров в фазовом пространстве размерности $m > 2$ в настоящее время практически не исследованы даже в том случае, когда они соединяют различные особые точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому изложенные в этом пункте факты, касающиеся бифуркаций гетероклинических контуров в системах большой размерности, опираются исключительно на результаты численных экспериментов. Рассмотрим некоторые наиболее важные с нашей точки зрения бифуркации гетероклинических контуров.

1. Сепаратриса, идущая из седла в седло. Эта бифуркация возможна в фазовой плоскости при $m = 2$. Пусть имеются две седловые особые точки O и O_1 системы (2.1) с вещественными собственными значениями матриц линеаризации в них, имеющими разные знаки. Пусть неустойчивое одномерное многообразие W^u особой точки O и устойчивое одномерное многообразие W_1^s особой точки O_1 при увеличении параметра $\mu < 0$ сближаются, а при $\mu = 0$ касаются друг друга. В момент касания происходит бифуркация и образуется особая гетероклиническая траектория Г, называемая *сепаратрисой, идущей из седла в седло* (рис. 2.20а).

Такой сепаратрисный контур является негрубым образованием и при $\mu > 0$ просто разрушается двумя возможными путями, изображенными на рис. 2.20б,в. Заметим, что в двумерном случае могут су-

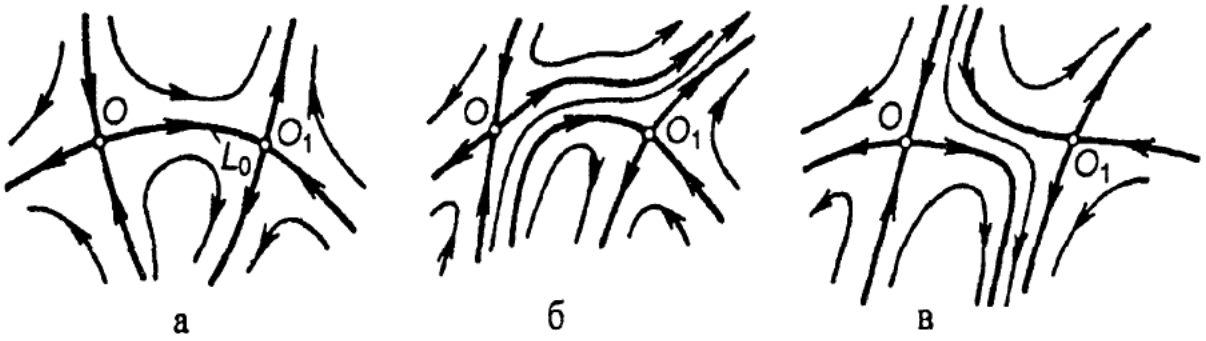

Рис. 2.20. Бифуркация сепаратрисы, идущей из седла в седло.

ществовать также сепаратрисы седел, стремящиеся в одну сторону к узлу, фокусу или предельному циклу (рис. 2.21а,б), но такие сепаратрисные контуры являются грубыми и их вид не меняется при малых изменениях значений системных параметров [56].

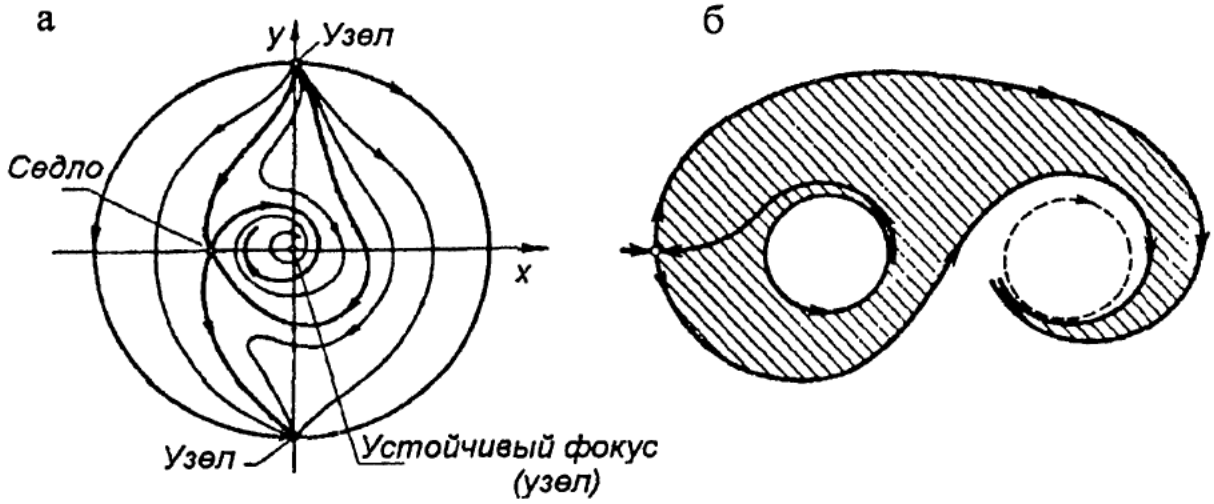

Рис. 2.21. Примеры грубых сепаратрисных контуров в двумерном случае [56].

2. Сепаратрисный контур, соединяющий седло-узел с седло-фокусом. Эта бифуркация возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть в системе (2.1) имеются две особые точки типа седло-узел и седло-фокус, одна из которых имеет одномерное устойчивое W^s и $(m-1)$-мерное неустойчивое W^u многообразия, а другая, наоборот, имеет одномерное неустойчивое W^u и $(m-1)$-мерное устойчивое W^s многообразия. Пусть одна из двух сепаратрис одномерного устойчивого многообразия первой особой точки при увеличении параметра $\mu < 0$ сближается с сепаратрисой одномерного неустойчивого многообразия второй особой точки и при $\mu = 0$ касается его. Одновременно, одна из сепаратрис неустойчивого многообразия первой особой точки касается устойчивого многообразия второй особой точки. В момент касания происходит бифуркация и образуется особый гетероклинический замкнутый контур, связывающий седло-узел с седло-фокусом (рис. 2.22а). Численные эксперименты, проведенные с системой Лоренца показывают, что такой сепаратрисный

контур является негрубым образованием и что в любой его окрестности может наблюдаться сложная нерегулярная динамика траекторий при наличии бесконечного числа неустойчивых и устойчивых предельных циклов. Подробнее об этом смотрите главу 3 настоящей книги.

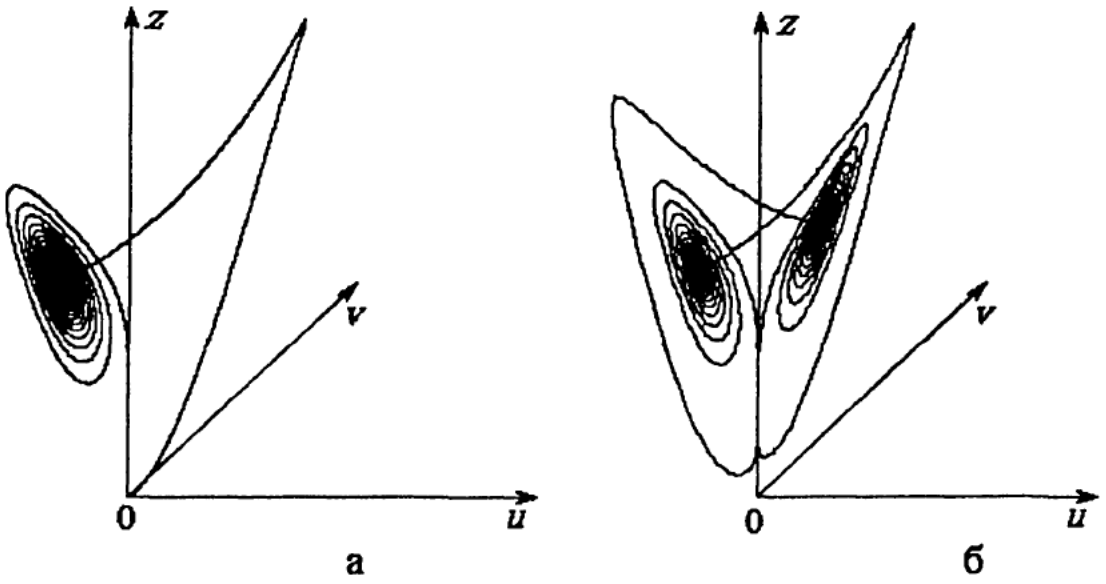

Рис. 2.22. Гетероклинические сепаратрисные контуры, связывающие седло-узел с седло-фокусом (а) и седло-фокус с седло-фокусом (б).

3. Сепаратрисный контур, соединяющий седло-фокус с седло-фокусом. Эта бифуркация также возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть в системе (2.1) имеются две *особые точки* типа *седло-фокус*, одна из которых имеет одномерное устойчивое W^s и $(m-1)$-мерное неустойчивое W^u многообразия, а другая также имеет одномерное устойчивое W^s и $(m-1)$-мерное неустойчивое W^u многообразия. Пусть одна из двух сепаратрис одномерного устойчивого многообразия первой особой точки при увеличении параметра $\mu < 0$ сближается с неустойчивым многообразием второй особой точки и при $\mu = 0$ касается его. Одновременно, одна из двух сепаратрис одномерного устойчивого многообразия второй особой точки сближается с неустойчивым многообразием первой особой точки и при $\mu = 0$ касается его. В момент касания происходит бифуркация и образуется особый гетероклинический замкнутый контур, связывающий два седло-фокуса (рис. 2.22б). Численные эксперименты показывают, что такой сепаратрисный контур является негрубым образованием и что в любой его окрестности может наблюдаться сложная нерегулярная динамика траекторий при наличии бесконечного числа неустойчивых и устойчивых предельных циклов. Подробнее об этом смотрите главу 3 настоящей книги.

4. Бифуркация точка-цикл. Эта бифуркация также возможна только в фазовом пространстве размерности $m > 2$. Пусть в системе (2.1) имеются две особые точки типа седло-узел и седло-фокус. Пусть

седло-фокус имеет одномерное устойчивое W^s и $(m-1)$-мерное неустойчивое W^u многообразия, а седло-узел, наоборот, имеет одномерное неустойчивое W^u и $(m-1)$-мерное устойчивое W^s многообразия. Пусть при $\mu < 0$ в системе существует неустойчивый цикл, делающий один виток в окрестности седло-узла и возрастающее при росте значений параметра μ количество витков n вокруг седло-фокуса, так что $n \to \infty$ при $\mu \to 0$ (рис. 2.23а). Тогда при $\mu = 0$ возможна следующая бифуркация: цикл влипает в седло-узел и одновременно рождается седловой или полуустойчивый цикл вокруг седло-фокуса. Другими словами, из исходного цикла при $\mu = 0$ рождается сепаратрисный контур, состоящий из двух сепаратрис седло-узла, одна из которых стремится к родившемуся вокруг седло-фокуса новому циклу при $t \to +\infty$, а другая — при $t \to -\infty$ (рис. 2.23б).

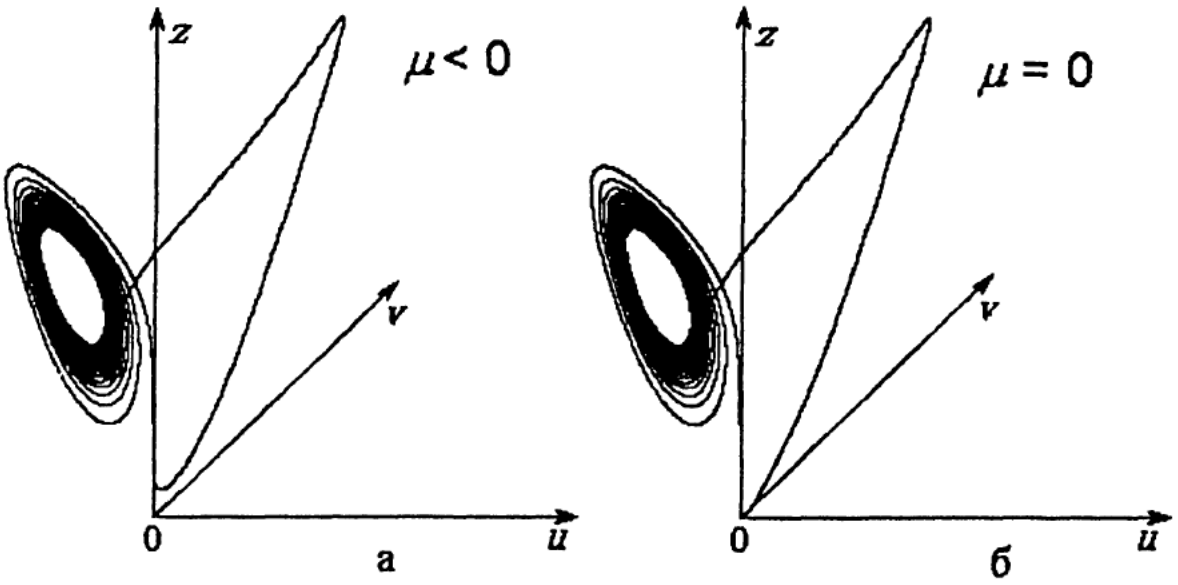

Рис. 2.23. Бифуркация точка-цикл при $\mu < 0$ (а) и $\mu = 0$ (б).

Эта бифуркация существует в системе Лоренца при некоторых значениях системных параметров. Численные эксперименты, проведенные с системой, показывают, что описанный выше сепаратрисный контур является негрубым образованием и что в любой его окрестности есть периодические, но нет устойчивых траекторий. Подробнее об этом смотрите главу 3 настоящей книги.

Кроме рассмотренных выше сепаратрисных ко́нтуров в семействах систем типа (2.1) возможно также существование гетероклинического контура, связывающего два седло-узла с одномерными устойчивым и неустойчивым многообразиями. Однако примеры таких систем в настоящее время авторам не известны.

2.4.3. Приближенный метод нахождения точек бифуркаций гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек. Гомоклинические и гетероклинические контуры особых точек играют важную роль в формировании нерегулярных аттракторов нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

С этой точки зрения решение проблемы нахождения в пространстве параметров бифуркационных поверхностей и кривых существования в семействе систем (2.1) гомоклинических петель сепаратрис и гетероклинических контуров особых точек имеет, несомненно, большое значение. Аналитически решить подобную задачу удалось только для петли сепаратрисы кусочно-линейной системы Чуа [72]. В работе [73] Х. Ченом найдено необходимое и достаточное условие

$$3\sigma > 2b + 1$$

существования третьего параметра r в системе уравнений Лоренца (2.3) при котором система с тройкой параметров $(\sigma,\ b,\ r)$ имеет гомоклиническую петлю сепаратрисы седло-узла.

Следуя [74], рассмотрим метод приближенного нахождения бифуркационных поверхностей (кривых) в пространстве параметров и определения их коразмерности для следующих сепаратрисных контуров особых точек: гетероклинический контур, соединяющий два седло-узла, два седло-фокуса или седло-узел с седло-фокусом; гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса; гомоклиническая петля сепаратрисы седло-узла. Предполагается, что при всех значениях параметров из области $U \subset \mathbb{R}^k$ для особых точек семейства (2.1) выполнены условия теоремы Гробмана-Хартмана, так что сепаратрисы, входящие в особые точки вдоль их устойчивых многообразий и выходящие из них вдоль их неустойчивых многообразий, существуют. Проблема состоит в приближенном нахождении тех значений параметров, при которых эти сепаратрисы образуют замкнутые контуры в фазовом пространстве. В главе 3 приведеные ниже результаты проиллюстрированы примерами определения всех указанных контуров для системы Лоренца (2.3).

Гетероклинические контуры седло-узлов и седло-фокусов. Пусть особая точка $\overline{x}(\mu)$ семейства (2.1) является седло-узлом или седло-фокусом, имеющим одномерное устойчивое W^s и $(m-1)$-мерное неустойчивое W^u многообразия, а особая точка $\tilde{x}(\mu)$ семейства (2.1) является седло-узлом или седло-фокусом, имеющим, наоборот, одномерное неустойчивое W^u и $(m-1)$-мерное устойчивое W^s многообразия. При этом матрица Якоби правой части системы (2.1) имеет ровно одно отрицательное вещественное собственное значений λ в точке $\overline{x}(\mu)$ и ровно одно положительное вещественное собственное значение ν в точке $\widetilde{x}(\mu)$. Задача состоит в нахождении бифуркационной поверхности S в пространстве параметров $\mathbb{R}^k$ такой, что при любом значении $\mu \in S$ сепаратриса, входящая в особую точку $\widetilde{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to -\infty$ вдоль ее одномерного неустойчивого многообразия, входит также в особую точку $\overline{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to +\infty$ вдоль ее одномерного устойчивого многообразия.

Запишем уравнения системы (2.1) в виде

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x, \mu),\ j = 1, \ldots, m. \qquad (2.29)$$

Выберем одну из координат, имеющую наиболее простую правую часть в окрестности особых точек $\overline{x}(\mu)$ и $\widetilde{x}(\mu)$, например, x_1. Вычислим производные dx_j/dx_1 в особой точке, например, $\overline{x}(\mu)$, воспользовавшись для этого разложением в этой точке правых частей системы (2.29):

$$\frac{dx_j(\overline{x})}{dx_1} = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f_j(x,\mu)}{f_1(x,\mu)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{\partial f_j(\overline{x},\mu)}{\partial x_l} \cdot \dfrac{dx_l(\overline{x})}{dx_1}}{\sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{\partial f_1(\overline{x},\mu)}{\partial x_l} \cdot \dfrac{dx_l(\overline{x})}{dx_1}}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.30}$$

Легко видеть, что если система (2.29) приведена к виду $f_1(x,\mu) = x_2$ (то есть $\dot{x}_1 = x_2$), то вектор y с координатами $y_j = dx_j/dx_1$, $j = \overline{1,m}$, является решением системы нелинейных уравнений

$$y_2 y_j = \sum_{l=1}^{m} a_{jl} y_l, \ j = 1,\ldots,m, \tag{2.31}$$

где a_{jl} — элементы матрицы Якоби правой части системы (2.29), вычисленные в особой точке. Из (2.31) следует, что

$$Ay = y_2 y$$

и, следовательно, значение $y_2 = dx_2/dx_1$ является собственным значением матрицы линеаризации системы (2.29) в особой точке. Примем $\overline{y}_2 = \lambda$ в точке $\overline{x}(\mu)$ и $\widetilde{y}_2 = \nu$ в точке $\widetilde{x}(\mu)$. Остальные величины $\widetilde{y}_j$, $j = 3,...,n$, однозначно определим из системы уравнений (2.31). Заметим, что если какие-либо величины y_j окажутся равными нулю в какой-либо особой точке, то это потребует дополнительного разложения правых частей в ряд Тейлора в этой особой точке до получения отличных от нуля производных некоторого порядка.

Выпустим теперь из окрестности особой точки $\widetilde{x}(\mu)$ системы (2.29) траекторию вдоль ее неустойчивого многообразия так, что она будет иметь в каждой проекции (x_1, x_j) тангенс угла наклона к оси x_1 отрезка, соединяющего начальную и особую точки, равный $\widetilde{y}_j$. С этой целью для любой сколь угодно малой величины $\varepsilon > 0$ рассмотрим значение $x_1(0) = \widetilde{x}_1(\mu) + \varepsilon$ координаты x_1, сколь угодно близкое к значению этой координаты в особой точке $\widetilde{x}(\mu)$. Остальные координаты начальной точки примем равными $x_j(0) = \widetilde{x}_j(\mu) + \widetilde{y}_j\varepsilon$. Другими словами, решая систему (2.29) с указанными начальными условиями мы получаем траекторию $x^+(t)$ системы, сколь угодно близкую к сепаратрисе, исходящей из особой точки $\widetilde{x}(\mu)$. Аналогично, выпускаем из окрестности особой точки $\overline{x}(\mu)$ траекторию $x^-(t)$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, решая в обратном времени систему (2.29) с начальными условиями $x_1(0) = \overline{x}_1(\mu) + \varepsilon$, $x_j(0) = \overline{x}_j(\mu) + \overline{y}_j\varepsilon$, $j = 2,3,...,m$. Теперь нам необходимо сшить траектории $x^+(t)$ и $x^-(t)$. Точку сшивки

можно выбрать достаточно произвольно, например, это могут быть точки пересечения проекциями траекторий $x^+(t)$ и $x^-(t)$ в плоскости (x_1, x_2) оси x_1, то есть точки $x_1^+(t^+)$ и $x_1^-(t^-)$ такие, что $x_2^+(t^+) = 0$ и $x_2^-(t^-) = 0$. При этом однозначно определяются моменты t^+ и t^- пересечения оси x_1 проекциями этих траекторий и соответствующие этим моментам концы проекций полутраекторий x_j^+ и x_j^-, $j = 3, ..., m$. Тогда для получения кривой, приближенно совпадающей с гетероклиническим контуром системы (2.29), необходимо и достаточно решить систему $m-1$ уравнений относительно k параметров

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} x_1^+(t^+, \mu, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_1^-(t^-, \mu, \varepsilon), \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} x_j^+(t^+, \mu, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_j^-(t^-, \mu, \varepsilon), j = \overline{3, m}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Теорема 2.3. *В случае общего положения система* (2.29) *не имеет в пространстве параметров значений соответствующих гетероклиническим контурам особых точек, связывающих их одномерные многообразия при* $k < m-1$. *В противном случае бифуркационная поверхность гетероклинических контуров особых точек, связывающих их одномерные многообразия, имеет в пространстве параметров коразмерность* $m-1$ *и определяется с любой точностью при численном решении системы уравнений* (2.32) *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Таким образом, при $k = m-1$ в пространстве параметров существует только единственная точка, соответствующая гетероклиническому контуру указанного вида, при $k = m$ – часть линии, при $k \geq m+1$ – часть поверхности, имеющая размерность $k - m + 1$.

Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса. Пусть особая точка $\overline{x}(\mu)$ семейства (2.1) является седло-фокусом, имеющим двумерное неустойчивое многообразие W^u и $(m-2)$-мерное устойчивое многообразие W^s. При этом матрица Якоби правой части системы (2.1) имеет в особой точке два комплексно сопряженных собственных значения λ_2 и λ_3 с положительными вещественными частями и остальные $m-2$ вещественных отрицательных собственных значения λ_1, $\lambda_4, ..., \lambda_m$. Задача состоит в нахождении бифуркационной поверхности S в пространстве параметров $\mathbb{R}^k$ такой, что при любых $\mu \in S$ сепаратриса, входящая при закручивании в особую точку $\overline{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to -\infty$ вдоль ее двумерного неустойчивого многообразия, входит также в эту же особую точку $\overline{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to +\infty$ вдоль ее $(m-2)$-мерного устойчивого многообразия.

Рассмотрим сначала случай $m = 3$, то есть случай одномерного устойчивого многообразия седло-фокуса $\overline{x}(\mu)$. Аналогично случаю, рассмотренному выше, найдем вектор производных в особой точке $y_j = dx_j/dx_1$, $j = 1, 2, 3$ так, что $y_2 = \lambda_1 < 0$. Выпустим из окрестности особой точки $\overline{x}(\mu)$ в обратном времени траекторию $x^-(t)$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, так, что она будет иметь в проекциях

(x_1, x_2) и (x_1, x_3) тангенс угла наклона в начальной точке сколь угодно мало отличающийся от значения $y_2 = \lambda_1$. Для этого решаем систему (2.29) в обратном времени с начальными условиями $x_1(0) = \overline{x}_1(\mu) + \varepsilon$, $x_j(0) = \overline{x}_j(\mu) + y_j\varepsilon$, $j = 2, 3$, где ε – любое сколь угодно малое положительное число. Останавливаем расчет траектории $x^-(t)$ в момент времени t^-, когда ее проекция в плоскости (x_1, x_2) пересечет ось x_1, то есть когда $x_2^-(t^-) = 0$.

Для того, чтобы найти траекторию $x^+(t)$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, исходящей в прямом времени из седло-фокуса $\overline{x}(\mu)$, приведем матрицу линеаризации системы (2.29) невырожденным преобразованием к виду

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, $\lambda_3 = \alpha - i\beta$, $\alpha > 0$.

В координатах $z = C^{-1}(x - \overline{x}(\mu))$ особая точка $z = 0$ имеет одномерное устойчивое многообразие, касательное к оси z_3, и двумерное неустойчивое многообразие, касательное к плоскости (z_1, z_2). Для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство начальных условий $z_{10} = \varepsilon\cos\varphi$, $z_{20} = \varepsilon\sin\varphi$, $z_{30} = 0$, зависящих от произвольной фазы φ, но лежащих на одном расстоянии ε от особой точки. Этим начальным условиям соответствует семейство траекторий $x^+(t, \varphi)$, выпущенных в прямом времени из точек

$$x(0) = \overline{x}(\mu) + C\begin{pmatrix} \varepsilon\cos\varphi \\ \varepsilon\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из таких траекторий аппроксимирует сколь угодно близко одну из сепаратрис седло-фокуса $\overline{x}(\mu)$. Выберем теперь фазу $\varphi(\varepsilon, \mu)$ так, чтобы $x_1^+(t^+) = x_1^-(t^-)$, где t^+ — момент времени, когда проекция траектории $x^+(t)$ в плоскости (x_1, x_2) пересекает ось x_1, то есть когда $x_2^+(t^+) = 0$. Тогда для получения петли сепаратрисы седло-фокуса в случае $m = 3$ необходимо и достаточно решить только одно уравнение относительно набора параметров, а именно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_3^+(t^+, \mu, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_3^-(t^-, \mu, \varepsilon). \qquad (2.33)$$

Следовательно, в этом случае бифуркация образования петли сепаратрисы седло-фокуса имеет коразмерность 1, то есть является $k-1$-мерной поверхностью в пространстве параметров.

Теперь нетрудно видеть, что при $m > 3$ коразмерность бифуркации образования петли сепаратрисы седло-фокуса также равна 1, так как существует $(m-3)$-мерное семейство сепаратрис, входящих при

$t \to +\infty$ в особую точку вдоль ее $(m-2)$-мерного устойчивого многообразия. То есть имеется в наличии еще $m-3$ свободных параметра, необходимые для замыкания траекторий $x^+(t)$ и $x^-(t)$ во всех проекциях (x_1, x_j), $j = \overline{4,m}$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2.4. *Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса имеет в пространстве параметров коразмерность 1, а ее бифуркационная поверхность является частью $(k-1)$-мерной гиперповерхности и определяется приближенно численным решением уравнения* (2.33) *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-узла. Пусть особая точка $\widetilde{x}(\mu)$ семейства (2.1) является седло-узлом, имеющим одномерное неустойчивое многообразие W^u и $(m-1)$-мерное устойчивое многообразие W^s. При этом матрица Якоби правой части системы (2.1) имеет в особой точке одно положительное собственное значение ν_2 и $m-1$ отрицательных вещественных собственных значений $\nu_1, \nu_3, \ldots, \nu_m$. Задача состоит в нахождении бифуркационной поверхности S в пространстве параметров $\mathbb{R}^k$ такой, что при любом значении $\mu \in S$ сепаратриса, входящая в особую точку $\widetilde{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to -\infty$ вдоль ее одномерного неустойчивого многообразия, входит также в ту же особую точку $\widetilde{x}(\mu)$ семейства (2.1) при $t \to +\infty$ вдоль ее $(m-1)$-мерного устойчивого многообразия.

Рассмотрим сначала случай $m = 2$, то есть случай одномерного устойчивого многообразия седло-узла $\widetilde{x}(\mu)$, которое в этом случае является просто седлом. Аналогично изложенному выше найдем значения производной $y_2 = dx_2/dx_1$ в особой точке. При этом, очевидно, существуют два значения $y_2^+ = \nu_2 > 0$ и $y_2^- = \nu_1 < 0$, являющихся вещественными собственными значениями матрицы Якоби правой части системы (2.1) в особой точке.

Выпустим из окрестности особой точки $\widetilde{x}(\mu)$ в прямом времени траекторию $x^+(t)$, сколь угодно близкую к сепаратрисе таким образом, чтобы она имела в плоскости (x_1, x_2) тангенс угла наклона к оси x_1 в начальной точке, сколь угодно мало отличающийся от значения $y_2^+ = \nu_2 > 0$. Для этого решаем систему (2.29) в прямом времени с начальными условиями

$$x_1(0) = \widetilde{x}_1(\mu) + \varepsilon, \; x_2(0) = \widetilde{x}_2(\mu) + y_2^+ \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Вычисление траектории $x^+(t)$ прекращаем в момент t^+, при котором $x_2^+(t^+) = 0$. Аналогично, выпустим из особой точки $\widetilde{x}(\mu)$ в обратном времени траекторию $x^-(t)$, сколь угодно близкую к сепаратрисе так, что она будет иметь в плоскости (x_1, x_2) тангенс угла наклона в начальной точке, сколь угодно мало отличающийся от значения $y_2^- = \nu_1 < 0$. Для этого решаем систему (2.29) в обратном времени с начальными условиями

$$x_1(0) = \widetilde{x}_1(\mu) + \varepsilon, \; x_2(0) = \widetilde{x}_2(\mu) + y_2^- \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Вычисление траектории $x^-(t)$ прекращаем в момент t^-, при котором $x_2^-(t^-) = 0$. Необходимым и достаточным условием существования петли сепаратрисы является выполнение одного равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_1^+(t^+, \mu, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_1^-(t^-, \mu, \varepsilon) \tag{2.34}$$

относительно семейства параметров μ. Таким образом, в случае $m = 2$ бифуркация образования петли сепаратрисы седла имеет коразмерность 1, то есть является $(k-1)$-мерной гиперповерхностью в пространстве параметров.

Нетрудно видеть, что при $m > 2$ коразмерность бифуркации образования петли сепаратрисы седло-узла также равна 1, так как существует $(m-2)$-мерное семейство сепаратрис, входящих при $t \to +\infty$ в особую точку вдоль ее $(m-1)$-мерного устойчивого многообразия. Иными словами, имеется еще $m-2$ свободных параметров, необходимых для замыкания траекторий $x^+(t)$ и $x^-(t)$ во всех проекциях (x_1, x_j), $j = \overline{3, m}$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2.5. *Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-узла имеет в пространстве параметров коразмерность 1, а ее бифуркационная поверхность является частью $(k-1)$-мерной гиперповерхности и определяется с любой точностью приближенным решением уравнения* (2.34) *при некотором* $\varepsilon > 0$.

2.4.4. Каскады бифуркаций. Сценарии перехода к хаосу. В нелинейных динамических системах, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных могут существовать последовательности (каскады) бифуркаций, приводящие к возникновению сложных, хаотических режимов поведения. Они получили название *сценариев перехода к хаосу*. Рассмотрим наиболее важные и типичные из этих сценариев.

1. Каскад бифуркаций удвоения периода. Сценарий Фейгенбаума. Этот сценарий, которому соответствует бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода рождающихся устойчивых предельных циклов, является универсальным и самым распространенным сценарием перехода к хаосу в нелинейных динамических системах. Как уже отмечалось выше, его можно обнаружить во многих нелинейных динамических системах, имеющих хаотическое поведение, как в отображениях с дискретным временем, так и в системах, описываемых дифференциальными уравнениями. Он присутствует, например, в гидродинамической модели Лоренца (2.3) и в гипотетических моделях химических реакций Рёсслера (2.5), в электротехнической модели Чуа (2.6) и в модели кроветворения Мэкки-Гласса (см. главу 5), в макроэкономической модели Магницкого (2.7) и в моделях различных биологических и экосистем [75]. Именно этот каскад, ведущий к возникновению нерегулярного аттрактора Фейгенбаума (рис. 2.24), является,

как правило, начальной стадией других, более сложных каскадов бифуркаций, ведущих к возникновению более сложных хаотических аттракторов. Кроме того, пока только для сценария Фейгенбаума удалось доказать некоторые универсальные свойства последовательности значений бифуркационного параметра μ_n, при которых происходят очередные бифуркации удвоения периода циклов, и которые сходятся к значению $\mu_\infty = \lim \mu_n$ при $n \to \infty$ (см. главу 4).

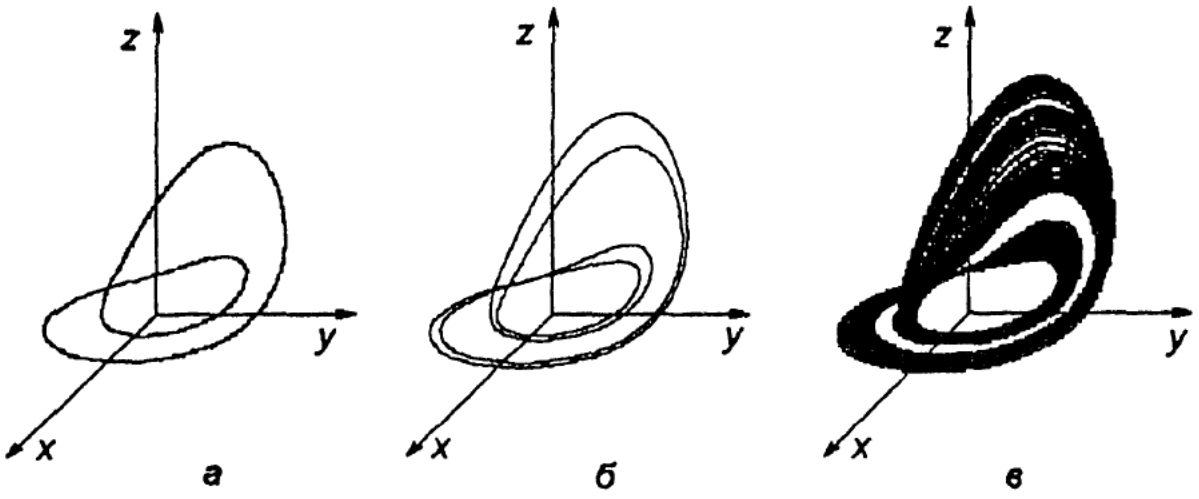

Рис. 2.24. Устойчивые циклы периода два (а), периода четыре (б) и аттрактор Фейгенбаума (в) в системе Рёсслера.

Многочисленные примеры каскадов бифуркаций удвоения периода в конкретных системах обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в третьей главе книги. Теория перехода к хаосу через каскад Фейгенбаума изложена в четвертой главе.

2. Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов. Иногда в научной литературе субгармоническим каскадом называется каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума [14]. Мы же, чтобы разделить понятия субгармонического каскада и каскада удвоения периода, будем характеризовать этим термином значительно более сложный каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода, начальной стадией которого является каскад Фейгенбаума. Как правило, каскад бифуркаций удвоения периода, описанный выше, имеет свое продолжение. При дальнейшем увеличении значений бифуркационного параметра $\mu > \mu_\infty$ в системе происходит рождение устойчивых предельных циклов любого периода в соответствии со сценарием, найденным Шарковским [76]. Им было доказано, что существует отношение, которое упорядочивает циклы непрерывных одномерных отображений по величине их периода следующим образом:

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3. \quad (2.35)$$

Первое соотношение в этом ряду означает, что если одномерное непрерывное отображение имеет цикл удвоенного периода, то оно имеет и простой цикл. Самым сложным в этом ряду является цикл периода три. Существование такого цикла означает также и существование любого цикла любого периода из ряда (2.35).

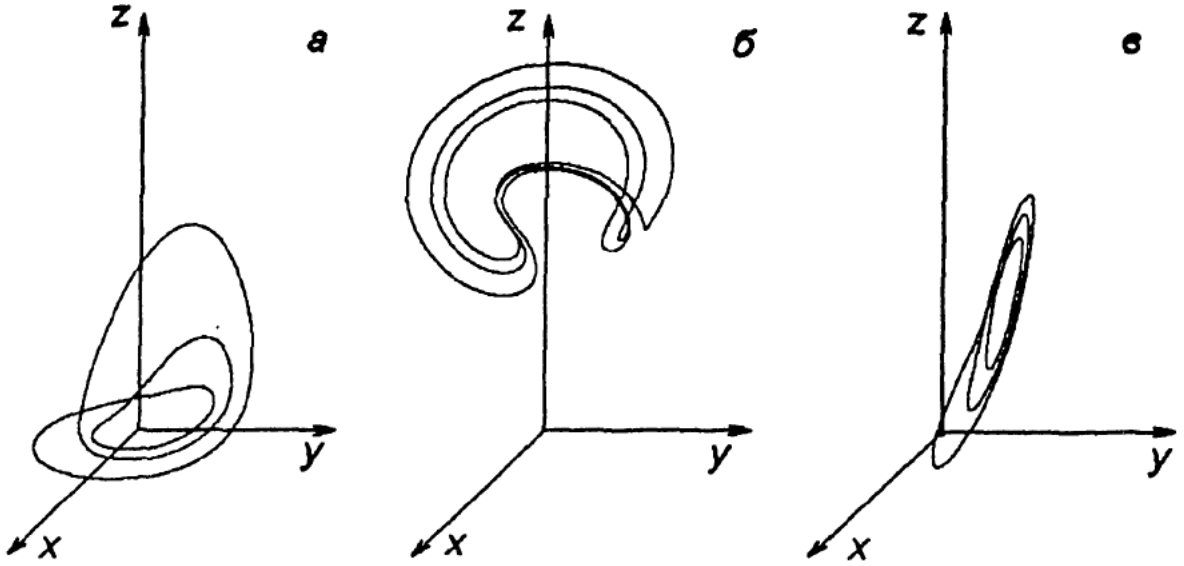

Рис. 2.25. Устойчивые циклы периода три в системах Ресслера (а), Лоренца (б), Чуа (в).

Оказалось, что не только порядок Фейгенбаума, но и порядок Шарковского и даже некоторый более сложный порядок имеют место для типичного каскада бифуркаций устойчивых циклов нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Так как частоты рождающихся периодических колебаний являются субгармониками основной главной частоты, то применение к такому каскаду бифуркаций термина субгармонический является вполне оправданным. Субгармонический каскад бифуркаций присутствует в моделях Лоренца, Ресслера, Чуа, Мэкки-Гласа, Магницкого и многих других моделях. Основной характерной чертой каскада является наличие в системе устойчивого предельного цикла периода три. На рис. 2.25 показаны устойчивые циклы периода три, найденные при соответствующих значениях бифуркационных параметров в системах Ресслера, Лоренца и Чуа.

Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов порождает бесконечное число циклических субгармонических сингулярных (в смысле определения п. 1.4.3 главы 1) аттракторов, являющихся значительно более сложными аттракторами, чем простейший аттрактор Фейгенбаума. Каждый из таких аттракторов порождается каскадом бифуркаций удвоения периода некоторого устойчивого цикла из ряда (2.35), родившегося в результате соответствующей седло-узловой бифуркации, и является неполным циклическим субгармоническим аттрактором. Полный циклический субгармонический сингу-

лярный аттрактор возникает после каскада бибифуркаций удвоения периода цикла периода три. На рис. 2.26 показаны полные циклические субгармонические аттракторы систем Рёсслера, Лоренца и Чуа.

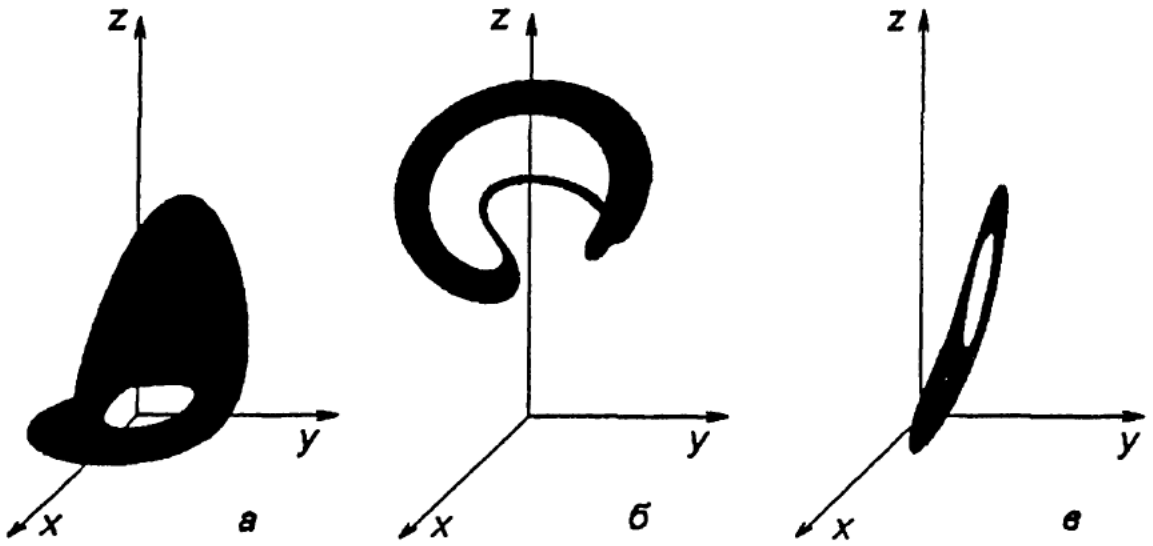

Рис. 2.26. Циклические субгармонические аттракторы в системах Рёсслера (а), Лоренца (б) и Чуа (в).

3. Гомоклинический каскад бифуркаций устойчивых циклов. В некоторых нелинейных динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, процесс усложнения режимов поведения траекторий не заканчивается рождением полного циклического субгармонического аттрактора, а продолжается каскадом бифуркаций рождения устойчивых гомоклинических циклов, стремящихся к существующему в системе гомоклиническому контуру — петле сепаратрисы седло-фокуса. Последовательность таких ци-

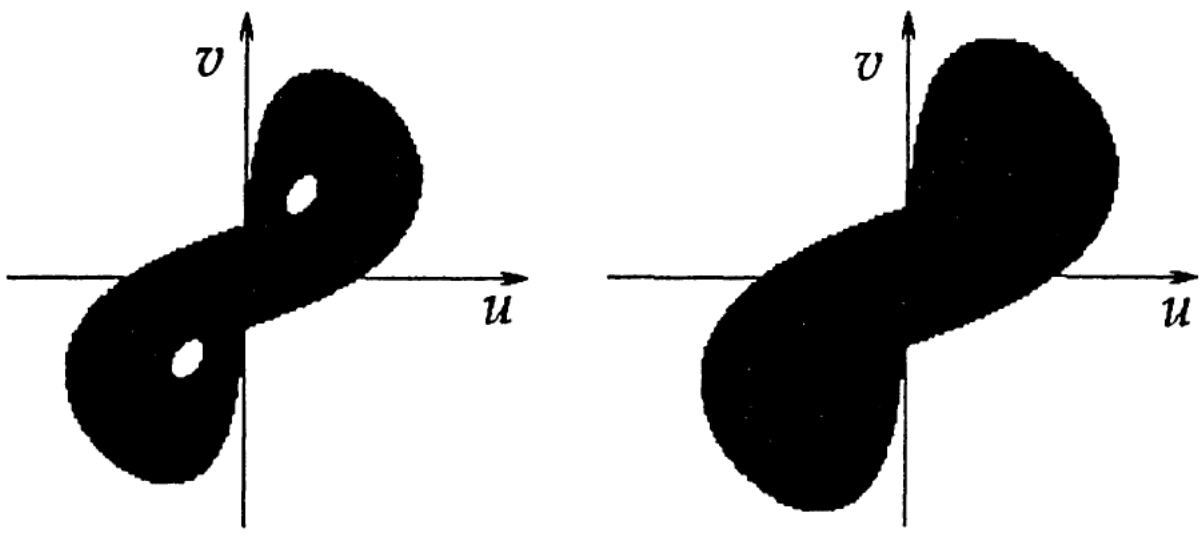

Рис. 2.27. Проекции классического аттрактора Лоренца (а) и полного двойного гомоклинического аттрактора системы Лоренца (б).

клов, порождающих *двойной гомоклинический каскад бифуркаций* впервые была обнаружена в системе Лоренца (2.3) в работах [29, 30]. Причем было показано, что в системе Лоренца при различных совокупностях управляющих параметров может существовать как полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций, состоящий из бесконечного числа пар устойчивых гомоклинических циклов, так и неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций, состоящий из конечного числа пар устойчивых гомоклинических циклов. В результате такого каскада бифуркаций образуется либо классический *неполный двойной гомоклинический аттрактор Лоренца*, обладающий "глазами", либо *полный двойной гомоклинический аттрактор*, не имеющий глаз (рис. 2.27). Подробно гомоклинический каскад бифуркаций в системе Лоренца и в других системах рассмотрен в третьей главе.

4. Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых двумерных торов. В работе [34] при изучении поведения решений комплексной системы уравнений Лоренца (2.20) было показано, что после образования устойчивого двумерного тора T^2 дальнейший процесс усложнения решений системы (2.20) при уменьшении значений параметра r_2 может происходить через субгармонический (по одной частоте) каскад бифуркаций двумерных торов. Основной характерной чертой этого каскада является рождение устойчивого двумерного тора периода три, понимаемого как прямое произведение простого цикла на цикл утроенного периода. При дальнейшем уменьшении значений бифуркационного параметра r_2 в системе рождается полный *субгармонический тороидальный аттрактор*. Подробно процесс рождения такого аттрактора в системе (2.20) рассмотрен в третьей главе книги.

5. Каскад бифуркаций Андронова-Хопфа. Сценарии Ландау и Рюэля-Такенса. В середине XX века Л. Ландау и независимо от него Э. Хопф выдвинули гипотезу, согласно которой хаотическая динамика диссипативных систем есть не что иное, как движение по инвариантному тору большой размерности, рождающемуся в результате каскада бифуркаций Андронова-Хопфа. В результате первой такой бифуркации происходит рождение устойчивого предельного цикла, в результате второй — рождение инвариантного двумерного тора. Дальнейшее изменение значений бифуркационного параметра может привести к последовательности бифуркаций, в результате которых в фазовом пространстве возникают устойчивые инвариантные торы все возрастающей размерности. В конечном счете происходит переход к сложному квазипериодическому движению с k несоизмеримыми частотами, которое при больших k будет выглядеть хаотическим.

Однако, сценарий Ландау-Хопфа не нашел экспериментального подтверждения: после небольшого числа бифуркаций обычно наблюдается резкий переход к хаотическому движению. Впервые на возможность разрушения инвариантного тора малой размерности и рожде-

ние хаотического аттрактора обратили внимание Рюэль и Такенс [6]. Ими совместно с Ньюхаузом было показано [77], что трехчастотное квазипериодическое движение, возникающее после трех бифуркаций Андронова-Хопфа, как правило, неустойчиво, легко разрушается, а на месте разрушенного трехмерного тора может появиться странный аттрактор. Такая последовательность бифуркаций, приводящая к образованию нерегулярного аттрактора, носит название *сценария Рюэля-Такенса.*

Сценарий Рюэля-Такенса перехода к хаосу, как и сценарий Ландау является скорее теоретически возможным сценарием, иллюстрацией чего служат различные модельные примеры, использующие, как правило, итерации двумерных отображений [14, 50]. Авторам неизвестны конкретные примеры систем дифференциальных уравнений, в которых переход к хаосу осуществлялся бы подобным образом. На наш взгляд более естественной является ситуация, когда в реальных системах, описываемых дифференциальными уравнениями, после возникновения устойчивого двумерного тора T^2 дальнейший переход к хаосу осуществляется через субгармонический (по одной частоте) каскад бифуркаций двумерных торов, что имеет место, например, в системе комплексных уравнений Лоренца (2.20).

6. Переход к хаосу через перемежаемость. Сценарий Помо-Манневиля. Сценарий Помо-Манневиля перехода к хаосу через перемежаемость является одним из трех рассматриваемых в классической литературе сценариев возникновения хаотических режимов поведения в нелинейных диссипативных системах наряду со сценариями Фейгенбаума и Рюэля-Такенса [11–16].

Явление перемежаемости, обнаруженное, как казалось, в модели Лоренца [14], не имеет строгого формального определения. Сущность его состоит в том, что устойчивое периодическое решение системы, исчезая при изменении параметра, тем не менее оставляет "память" о себе, так что траектории системы начинают совершать колебания, почти соответствующие колебаниям исчезнувшей устойчивой периодической траектории, но прерываемые время от времени аномальными хаотическими флуктуациями. Возможность существования такого явления иллюстрируется математически только на примерах простейших одномерных отображений. Поэтому, после обнаружения того факта, что в системе Лоренца на самом деле нет ни перемежаемости, ни перехода к хаосу через перемежаемость [29], а всего лишь вследствие погрешностей в вычислениях имеет место перескок траектории с одного фрагмента устойчивого цикла на другой его фрагмент, близко расположенный к нему в фазовом пространстве, говорить о возможности возникновения хаотических режимов поведения в сложных нелинейных динамических системах через перемежаемость следует с осторожностью в каждом конкретном случае. Авторам неизвестны реальные нелинейные системы дифференциальных уравнений, в которых переход к хаосу осуществлялся бы подобным образом. Явление

"перемежаемости" в системе Лоренца подробно рассмотрено в главе 3 книги.

2.4.5. Бифуркации нерегулярных аттракторов. Как уже неоднократно отмечалось выше, кроме регулярных аттракторов – устойчивых особых точек, циклов и торов, семейства нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.1) могут иметь и другие аттракторы, отличные от регулярных по некоторым признакам. В научной литературе существуют различные подходы к объяснению природы таких аттракторов и причин их возникновения. Единая терминология также отсутствует (см. п. 1.4.3). Наша точка зрения, объясняющая наличие таких аттракторов в широком классе систем вида (2.1) и полностью совпадающая с результатами численных экспериментов, изложена в четвертой главе настоящей книги. В третьей главе показано, что типичные нерегулярные аттракторы — это негрубые образования, рождающиеся в результате субгармонического и гомоклинического каскадов мягких бифуркаций регулярных аттракторов. Такие аттракторы были названы нами в п. 1.4.3 сингулярными аттракторами. Так как в любой окрестности точки существования сингулярного аттрактора в пространстве параметров существует, как правило, бесконечное число точек существования различных регулярных аттракторов, а в процессе каскадов бифуркаций сложность сингулярных аттракторов возрастает, то их типичными бифуркациями являются следующие бифуркации.

1. **Бифуркация образования регулярного аттрактора (устойчивого цикла).** Пусть значение параметра $\mu = 0$ является точкой накопления некоторого бесконечного каскада значений параметра $\mu_n < 0$, в которых происходят бифуркации устойчивых циклов семейства (2.1), так что $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$ (по поводу каскадов бифуркаций устойчивых циклов и торов смотрите п. 2.4.4 и главы 3 и 4). Тогда при $\mu = 0$ система (2.1) имеет негрубый сингулярный аттрактор. Очевидно, что при малом возмущении параметра μ в область отрицательных значений может произойти одна из бесконечного количества бифуркаций образования некоторого устойчивого цикла. При малом возмущении параметра в область положительных значений может также произойти одна из бесконечного количества бифуркаций образования некоторого устойчивого цикла некоторого другого бесконечного каскада бифуркаций. Простейшим сингулярным аттрактором такого типа является аттрактор Фейгенбаума (см. главы 3 и 4).

2. **Бифуркация образования регулярного аттрактора (устойчивого тора).** Пусть значение параметра $\mu = 0$ является точкой накопления некоторого бесконечного каскада значений параметра $\mu_n < 0$, в которых происходят бифуркации удвоения периодов устойчивых торов семейства (2.1) по одной из частот, так что $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $\mu = 0$ система (2.1) имеет негрубый сингулярный тороидальный аттрактор. Очевидно, что при малом возмущении параметра μ в область отрицательных значений может произойти одна

из бесконечного числа бифуркаций образования некоторого устойчивого тора некоторого периода. Сингулярный аттрактор такого типа описан в п. 3.2 главы 3.

3. Бифуркация образования нерегулярного аттрактора. Пусть, как в первом случае, значение параметра $\mu = 0$ является точкой накопления некоторого бесконечного каскада значений параметра $\mu_n < 0$, в которых происходят бифуркации устойчивых циклов семейства (2.1), так что $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $\mu = 0$ система (2.1) имеет негрубый сингулярный аттрактор (например, аттрактор Фейгенбаума). При малом возмущении параметра μ в область положительных значений наряду с бифуркацией образования некоторого устойчивого цикла может также произойти одна из бифуркаций образования некоторого другого сингулярного аттрактора, если возмущенное значение параметра будет являться точкой накопления некоторого другого бесконечного каскада бифуркаций устойчивых циклов.

4. Бифуркация связанности. Эта бифуркация состоит в объединении частей сингулярного аттрактора семейства систем (2.1), посещаемых всюду плотной в аттракторе траекторией с регулярной очередностью. Она реализуется бесконечное число раз в любом субгармоническом каскаде бифуркаций, следующим за каскадом бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума. То есть, усложнение структуры каждого последующего сингулярного аттрактора, начиная с простейшего фрактального аттрактора Фейгенбаума, происходит именно в результате объединения частей предыдущего сингулярного аттрактора (см. главу 3), причем объединение частей происходит в порядке, обратном порядку каскада бифуркаций удвоения периода устойчивых циклов, приведшему к рождению аттрактора Фейгенбаума.

5. Бифуркация объединения сингулярных аттракторов. Подобно объединению частей одного сингулярного аттрактора в семействе систем (2.1) может также происходить и объединение двух различных сингулярных аттракторов. Такая бифуркация характерна для систем с несколькими особыми точками типа седло-фокус. В частности ее можно наблюдать при некоторых значениях системных параметров в системе уравнений Лоренца, когда происходит слияние двух лент двух субгармонических аттракторов, образовавшихся вокруг двух седло-фокусов системы, в один нерегулярный аттрактор, охватывающий пространственную область вокруг обеих особых точек (подробнее см. главу 3).

Рассмотренные выше возможные бифуркации сингулярных аттракторов семейства систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) опираются на большой фактический материал, приведенный в третьей главе книги, и на изложенную в четвертой главе строгую математическую теорию сингулярных аттракторов, обладающих хаотической динамикой.

Глава 3. Хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Хаотическими мы будем называть нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие нерегулярные аттракторы. В настоящей главе рассмотрены примеры как классических, так и менее известных хаотических систем. Показано, что все они без исключения имеют сингулярные (см. п. 1.4.3 главы 1) нерегулярные аттракторы, а переход к хаосу во всех этих системах осуществляется либо через субгармонический, либо через гомоклинический каскад бифуркаций.

3.1. Система уравнений Лоренца.

Система трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{3.1}$$

названная системой уравнений Лоренца [17], является исторически первой динамической системой, в которой было показано существование нерегулярного аттрактора (аттрактора Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $24.06 \lesssim r \lesssim 28$). За прошедшие сорок лет исследование системы Лоренца было выполнено многими авторами, результаты опубликованы в многочисленных статьях и монографиях, вошли в учебные пособия и университетские курсы (см., например, [4, 11–27, 50–53, 67, 71]), однако полной ясности в том, что из себя представляет аттрактор Лоренца, так и не наступило.

3.1.1. Классический сценарий рождения аттрактора Лоренца. Кратко изложим в виде тезисов общепринятую на сегодняшний день точку зрения на структуру аттрактора Лоренца и причины его появления.

1. Точка $O(0, 0, 0)$ в начале координат является особой (неподвижной, стационарной) точкой системы (3.1) при любых r, σ, b. Она устойчива при $r < 1$.

2. При $r > 1$ в системе возникают еще две особые (неподвижные, стационарные) точки:

$$O_1\left(\sqrt{b(r-1)},\ \sqrt{b(r-1)},\ r-1\right),$$
$$O_2\left(-\sqrt{b(r-1)},\ -\sqrt{b(r-1)},\ r-1\right),$$

которые устойчивы до значения параметра $r_c = \dfrac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$, ($r_c \approx 24.7368$ для $\sigma = 10,\ b = 8/3$). Точка O при всех $r > 1$ является седлоузлом и имеет двумерное устойчивое W^s и одномерное неустойчивое W^u многообразия. Точки O_1 и O_2 при всех значениях $r > r_c$ являются седло-фокусами, имеющими двумерные неустойчивые и одномерные устойчивые многообразия.

3. При $1 < r < r_1 \approx 13.926$ сепаратрисы Γ_1 и Γ_2, выходящие из точки O вдоль ее одномерного неустойчивого многообразия W^u, притягиваются к своим ближайшим устойчивым точкам O_1 и O_2 соответственно.

4. При $r = r_1$ каждая из сепаратрис Γ_1 и Γ_2 превращается в замкнутую гомоклиническую петлю. При этом обе эти гомоклинические петли касаются в точке O друг друга и оси z, образуя фигуру, названную гомоклинической бабочкой. Считается, что формирование неустойчивой гомоклинической бабочки является одной из двух бифуркаций, ведущих к возникновению аттрактора Лоренца.

5. При $r_1 < r < r_2 \approx 24.06$ от каждой из замкнутых гомоклинических петель рождается по седловой периодической траектории L_1 и L_2. Сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 при этом стремятся к устойчивым точкам O_2 и O_1 соответственно. Принято считать, что устойчивые многообразия седловых периодических траекторий L_1 и L_2 являются границами областей притяжения точек O_1 и O_2. Кривая, берущая начало вне этих областей, может совершать колебания из окрестности L_1 в окрестность L_2 и обратно, пока не попадет в область притяжения одного из аттракторов O_1 или O_2, причем по мере приближения параметра r к значению r_2 число колебаний существенно возрастает. Такое поведение системы называют метастабильным хаосом.

6. При $r = r_2$ сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 уже не стремятся к точкам O_2 и O_1, а наматываются на седловые предельные траектории L_2 и L_1 соответственно. Здесь происходит вторая бифуркация, ведущая к возникновению аттрактора Лоренца.

7. При $r_2 < r < r_3 = r_c$ точки O_1 и O_2 еще устойчивы. Кроме них в фазовом пространстве имеется притягивающее множество B, называемое аттрактором Лоренца и представляющее собой совокупность интегральных кривых, идущих от L_1 к L_2 и обратно. Седловая точка O принадлежит аттрактору вместе со своими сепаратрисами Γ_1 и Γ_2.

8. При $r \to r_3 = r_c$ седловые предельные циклы L_1 и L_2 стягиваются к точкам O_1 и O_2 и при $r = r_3$ исчезают, сливаясь с ними в результате субкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

9. При $r_3 < r < r_4 \approx 30.1$ единственным устойчивым предельным множеством в системе (3.1) является аттрактор Лоренца. Принято считать, что он представляет собой ветвящуюся поверхность S, расположенную вблизи плоскости $x - y = 0$ и состоящую из бесконечного числа листов, связанных вместе и сколь угодно близко прижатых друг к другу. Фазовая траектория, начавшаяся слева от оси z, будет рас-

кручиваться по спирали вокруг точки O_1 до тех пор, пока не пересечет ось z, после чего начнет раскручиваться по спирали вокруг точки O_2 в противоположном направлении. Количество оборотов вокруг точек O_1 и O_2 меняется нерегулярным образом, так что движение выглядит хаотическим. Считается, что аттрактор не является двумерным многообразием, а имеет фрактальную структуру, и его фрактальная размерность при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ равна 2.05 ± 0.01 [15].

10. При $r_4 < r \lesssim 313$ структура решений системы уравнений Лоренца становится необычайно сложной с чередованием хаотических и периодических режимов. В этом диапазоне изменения параметра r известно несколько окон периодичности, например: $99.524 < r < 100.795$; $145 < r < 166$; $214.364 < r < 313$. Принято считать, что окон периодичности может быть бесконечно много, а каждое такое окно представляет собой прямой субгармонический каскад бифуркаций, который заканчивается основным устойчивым предельным циклом. В дальнейшем, при увеличении r, каждый такой цикл разрушается перемежаемостью типа I, а появлению окна периодичности предшествует обратный каскад бифуркаций (например, обратный каскад существует при $197.4 < r < 214.364$, а перемежаемость типа I при $r > 166.07$ [14]).

11. При $r > 313$ в системе Лоренца аттрактором является единственный устойчивый предельный цикл.

Итак, пункты 1–11 содержат основные общепринятые утверждения, касающиеся аттрактора Лоренца и сценария его возникновения (и исчезновения). Заметим, что все эти утверждения основаны исключительно на компьютерных экспериментах и умозрительных заключениях и не опираются на какие-либо аналитические доказательства. Некоторые из этих утверждений легко проверяются, и их справедливость никогда не подвергалась сомнению (например, утверждения пунктов 1–2 и 11). Другие утверждения, напротив, трудно проверить, и они всегда выглядели достаточно сомнительными. Так, например, если при $r = r_1$ из гомоклинических петель действительно рождаются седловые циклы L_1 и L_2 и именно они определяют "глаза" аттрактора Лоренца при $r \approx r_2$, то почему эти "глаза" наблюдаются у аттрактора и при $r > r_3$, когда циклы L_1 и L_2 уже исчезли? Вывод один – "глаза" аттрактора определяются не седловыми циклами L_1 и L_2, если даже они и существуют. Но если они и существуют, то вовсе необязательно что они рождаются при значении $r = r_1$ в результате бифуркации гомоклинической бабочки. Другими сомнительными утверждениями всегда являлись утверждения о структуре аттрактора и о его размерности, вычисленной на компьютере с совершенно невероятной точностью. Не находило также своего логического объяснения и явление перемежаемости.

В работе [29] авторами было показано, что на самом деле в системе Лоренца реализуется совершенно иной переход к хаосу – через двойной гомоклинический каскад бифуркаций. Рассмотрим этот сценарий

более подробно.

3.1.2. Сценарий рождения аттрактора Лоренца через неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. Из наличия в системе Лоренца (3.1) седло-узла и двух седло-фокусов вытекает возможность существования в ней различных гомоклинических и гетероклиничиских контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций.

Определение. *Полным (неполным) гомоклиническим каскадом* бифуркаций в системах нелинейных дифференциальных уравнений назовем каскад бифуркаций возникновения устойчивых предельных циклов, порожденных единственным устойчивым предельным циклом при изменении значений бифуркационного параметра вдоль прямой, проходящей в пространстве параметров через точку (вблизи точки) существования гомоклинического контура.

Определение. Любой сингулярный аттрактор, родившийся в результате полного (неполного) гомоклинического каскада бифуркаций предельных циклов, назовем *полным (неполным) гомоклиническим аттрактором.*

Если прямая, соответствующая изменению значений бифуркационного параметра проходит в пространстве параметров через точку (вблизи точки) одновременного существования двух гомоклинических контуров, то образующийся каскад бифуркаций устойчивых циклов назовем полным (неполным) двойным гомоклиническим каскадом, а рождающийся в результате такого каскада аттрактор назовем полным (неполным) двойным гомоклиническим аттрактором.

Метод исследования аттрактора. Оказалось, что все циклы из бесконечного семейства неустойчивых циклов, порождающих аттрактор Лоренца, имеют пересечение с одномерным неустойчивым неинвариантным многообразием V^u точки O (не путать с инвариантным многообразием W^u). Этот результат, хотя строго и не доказан непосредственно для системы Лоренца, но вытекает из теории динамического хаоса, изложенной ниже в главе 4. Следовательно, после вывода аналитических формул для многообразия V^u появляется возможность свести задачу нахождения и доказательства существования неустойчивых циклов в системе Лоренца к одномерному случаю, а именно, к нахождению неподвижных точек одномерного отображения возвращения на неустойчивое многообразие. Этим методом, могут быть найдены и любые устойчивые циклы, участвующие в формировании аттрактора. Таким образом, если начальная точка находится на одномерном многообразии V^u, то численно можно получить любой (как устойчивый, так и неустойчивый) цикл, существующий в системе Лоренца. Ниже данным методом показано, что пункты 4–5 изложенного выше классического сценария перехода к хаосу в системе Лоренца неверны. Пункты 6–10 частично неверны и частично требуют более детального изучения.

Для каждого фиксированного набора параметров $(\sigma, b, r > 1)$ приведем систему уравнений (3.1) линейной невырожденной заменой переменных

$$x = u + v,\ \sigma(y - x) = \lambda_1 u + \lambda_2 v,\ z = z \tag{3.2}$$

к главным осям плоскости $z = 0$. Так как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1 + \sigma}{\sigma} & \dfrac{\lambda_2 + \sigma}{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{\sigma}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2 + \sigma}{\sigma} & -1 \\ -\dfrac{\lambda_1 + \sigma}{\sigma} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma xz/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \sigma xz/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ xy \end{pmatrix},$$

где $\Lambda = A^{-1} \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} A =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1\lambda_2 + (\sigma+1)\lambda_1 - \sigma(r-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_2^2 + (\sigma+1)\lambda_2 - \sigma(r-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \dfrac{-\lambda_1^2 - (\sigma+1)\lambda_1 + \sigma(r-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{-\lambda_1\lambda_2 - (\sigma+1)\lambda_1 + \sigma(r-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если величины λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda - \sigma(r - 1) = 0,$$

т.е.

$$\lambda_1 = -\frac{\sigma+1}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-1)} < 0,$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-1)} > 0,$$

то матрица $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Таким образом, система уравнений (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda_1 u + \frac{\sigma z(u+v)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \dot{v} &= \lambda_2 v - \frac{\sigma z(u+v)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \dot{z} &= -bz + (u+v)^2 + \frac{(u+v)(\lambda_1 u + \lambda_2 v)}{\sigma}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Запись уравнений Лоренца в переменных (u, v, z) выгодно отличается от записи в переменных (x, y, z) по причине того, что при любом r устойчивое многообразие W^s начала координат (точки O) касательно к оси u, а неустойчивое W^u – касательно к оси v. Последнее обстоятельство дает возможность наглядно увидеть некоторые новые важные характеристики аттрактора, инвариантные относительно параметра r.

Заметим, что координаты неподвижных точек

$$O_1(\lambda_2\sqrt{b(r-1)}/(\lambda_2-\lambda_1),\ -\lambda_1\sqrt{b(r-1)}/(\lambda_2-\lambda_1),\ r-1),$$
$$O_2(-\lambda_2\sqrt{b(r-1)}/(\lambda_2-\lambda_1),\ \lambda_1\sqrt{b(r-1)}/(\lambda_2-\lambda_1),\ r-1)$$

системы (3.3) расположены симметрично относительно оси z в первой и третьей четвертях полупространства $z > 0$. Если одновременно смотреть на проекции произвольной траектории Г системы (3.3) на плоскости (u, v) и (u, z) при значении параметра r, соответствующем хаотическому поведению системы (например, $r = 28$), то можно заметить, что траектория принадлежит двум множествам — листам двумерной поверхности, описанной в главе 4. Одно из этих множеств S имеет вид боковых поверхностей двух деформированных усеченных конусов с вершинами в точках O_1 и O_2. Каждый конус лежит на своей образующей $z = z_s(u, v)$, $0 < z_{s\min} \le z \le z_{s\max} < r - 1$, на которой достигаются локальные минимумы по z различных траекторий при их условном вращении вокруг точек $O_1(O_2)$. В проекции на плоскость $z = 0$ вращение происходит по часовой стрелке. Верхняя часть конуса деформирована и изогнута. Меньшее основание конуса определяет "глаз" аттрактора, внутрь которого траектория не заходит, а большее основание определяет максимальный размер аттрактора, при котором траектория переходит от вращения вокруг точки $O_1(O_2)$ к вращению вокруг точки $O_2(O_1)$. Этот переход осуществляется по двум симметричным частям второго множества G, на котором траектория также имеет точки локальных минимумов по z, лежащие на некоторой кривой $z = z_g(u, v)$, где $0 < z_{g\min} \le z \le z_{g\max} < r - 1$. Принято считать, как уже отмечалось выше, что "глаз" аттрактора определяется седловым циклом, возникающим из гомоклинического контура при $r = r_1$.

Но при $r = 28$ цикл уже не существует, а "глаз" остается, хотя имеет меньшие размеры, чем при $r = r_2 \approx 24.06$. К причинам этого явления мы вернемся ниже, а теперь отметим, что естественно предположить, что "глаза" аттрактора определяются не седловыми циклами, возникающими вокруг стационарных точек O_1 и O_2 по отдельности, а некоторыми другими циклами, охватывающими одновременно обе точки O_1 и O_2. Но тогда траектории этих циклов должны иметь локальные минимумы на кривой $z_g(u, v)$. Следовательно, найдя уравнение данной кривой, мы фактически сведем задачу отыскания циклов к одномерному случаю. С этой целью сделаем в системе (3.1) преобразование, аналогичное преобразованию (3.2), но зависящее от z

$$x = \widetilde{u} + \widetilde{v},\ \sigma(y - x) = \lambda_1(z)\widetilde{u} + \lambda_2(z)\widetilde{v},\ z = z.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1(z) + \sigma}{\sigma} & \dfrac{\lambda_2(z) + \sigma}{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(z) = \frac{\sigma}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2(z) + \sigma}{\sigma} & -1 \\ -\dfrac{\lambda_1(z) + \sigma}{\sigma} & 1 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} \dot{A}(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{u}} \\ \dot{\widetilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{u}} \\ \dot{\widetilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(z) & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda(z) = A^{-1}(z) \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r - z & -1 \end{pmatrix} A(z) - A^{-1}(z)\dot{A}(z) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} \left[\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\dot{\lambda}_1(z) & -\dot{\lambda}_2(z) \\ \dot{\lambda}_1(z) & \dot{\lambda}_2(z) \end{pmatrix} \right],$$

$$\Lambda_{11} = \lambda_1(z)\lambda_2(z) + (\sigma+1)\lambda_1(z) - \sigma(r-z-1),$$
$$\Lambda_{12} = \lambda_2^2(z) + (\sigma+1)\lambda_2(z) - \sigma(r-z-1),$$
$$\Lambda_{21} = -\lambda_1^2(z) - (\sigma+1)\lambda_1(z) + \sigma(r-z-1),$$
$$\Lambda_{22} = -\lambda_1(z)\lambda_2(z) - (\sigma+1)\lambda_1(z) + \sigma(r-z-1).$$

Следовательно, если величины $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ являются корнями уравнения

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda - \sigma(r-z-1) = 0,$$

т.е.

$$\lambda_1(z) = -\frac{\sigma+1}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-z-1)} < 0,$$
$$\lambda_2(z) = -\frac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-z-1)} > 0,$$

то матрица $\Lambda(z)$ принимает вид

$$\Lambda(z) = \operatorname{diag}(\lambda_1(z),\ \lambda_2(z)) + \frac{\sigma\dot{z}}{(\lambda_2(z)-\lambda_1(z))^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом система (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{u}} &= \lambda_1(z)\widetilde{u} + \frac{\sigma\dot{z}(\widetilde{u}-\widetilde{v})}{(\lambda_2(z)-\lambda_1(z)^2}, \\
\dot{\widetilde{v}} &= \lambda_2(z)\widetilde{v} - \frac{\sigma\dot{z}(\widetilde{u}-\widetilde{v})}{(\lambda_2(z)-\lambda_1(z))^2}, \\
\dot{z} &= -bz + (\widetilde{u}+\widetilde{v})^2 + \frac{(\widetilde{u}+\widetilde{v})(\lambda_1(z)\widetilde{u}+\lambda_2(z)\widetilde{v})}{\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ясно, что система (3.4) имеет решение не при всех начальных условиях, а только для $z < r$, и тем самым не эквивалентна системе (3.1). Но точки кривой $z_g(u,v)$ лежат в этом диапазоне и, следовательно, должны удовлетворять системе уравнений (3.4). Также очевидно, что, по крайней мере в некоторой окрестности начала координат (точки O) кривая $z_g(u,v)$ должна быть некоторым образом связана с одномерным неустойчивым многообразием V^u точки O как для системы (3.3), так и для системы (3.4). Замечательным является тот факт, что многообразие V^u можно найти в явном виде из системы (3.4). Действительно, каждая точка многообразия V^u не должна двигаться в плоскости, параллельной устойчивому многообразию W^s точки O, т.е на V^u необходимо выполнение условий $\dot{z} = 0$ и $\dot{\widetilde{u}} = 0$. При этом из системы (3.4) видно, что векторное поле на V^u просто совпадает с направлением $\widetilde{v}$. Положив в (3.4) $\dot{z} = 0$, $\dot{\widetilde{u}} = 0$ (и, следовательно, $\widetilde{u} = 0$), найдем, что

$$\widetilde{v} = \pm\sqrt{\frac{b\sigma z}{\sigma + \lambda_2(z)}}. \tag{3.5}$$

Далее, так как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A^{-1}A(z) \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1(z) & \lambda_2 - \lambda_2(z) \\ \lambda_1(z) - \lambda_1 & \lambda_2(z) - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = A^{-1}(z)A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} \begin{pmatrix} \lambda_2(z) - \lambda_1 & \lambda_2(z) - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_1(z) & \lambda_2 - \lambda_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Следовательно, точке $(0, \widetilde{v}(z), z)$ пространства $(\widetilde{u}, \widetilde{v}, z)$ соответствует точка $(u(z), v(z), z)$ пространства (u, v, z), лежащая на неустойчивом многообразии V^u точки O системы (3.3) и удовлетворяющая уравнениям

$$u(z) = \frac{\lambda_2 - \lambda_2(z)}{\lambda_2 - \lambda_1}\widetilde{v}(z), \; v(z) = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\widetilde{v}(z). \tag{3.6}$$

Очевидно, что кривая, описываемая уравнениями (3.5)– (3.6), является касательной к оси v при $z \to 0$, так как вдоль этой кривой

$$\frac{dv}{du} = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_2(z)} \to \infty \text{ при } z \to 0.$$

Так как на полученной кривой $\dot{z} = 0$, то эта кривая (многообразие V^u) и есть искомая кривая $z = z_g(u(z), v(z))$ при $0 < z < r - 1$, а переход траектории в аттракторе Лоренца из одной части множества S в другую (из одного полупространства в другое) происходит через неустойчивое одномерное многообразие V^u точки O. Таким образом, задача нахождения неустойчивых траекторий аттрактора Лоренца и, в частности, всех неустойчивых циклов в этом аттракторе сводится к одномерному случаю и может быть решена **методом возвращения на одномерное неустойчивое многообразие V^u точки O.**

Определим отображение $f_1(z)$ первого возвращения следующим образом. Для любого значения $0 < z_0 < r - 1$ из точки $(z_0, u(z_0), v(z_0)) \in V^u$, расположенной, например, в правом полупространстве, испускаем траекторию системы (3.3). Эта траектория делает некоторое число оборотов в правом полупространстве вокруг точки O_1, затем переходит в левое полупространство и делает опять некоторое число оборотов вокруг точки O_2. После этого траектория

возвращается (впервые) в исходное правое полупространство, пересекая плоскость $\widetilde{u} = 0$ системы (3.4) в точке, принадлежащей многообразию V^u, но возможно, при некотором другом значении переменной $z = f_1(z_0)$. Точка пересечения траекторией плоскости $\widetilde{u} = 0$ находится из уравнения

$$\widetilde{u}(t) = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} u(t) + \frac{\lambda_2(z) - \lambda_2}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} v(t) = 0. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) необходимо решать достаточно точно. Поэтому в окрестности плоскости $\widetilde{u} = 0$, положение которой в плоскости (u, v) зависит от значения переменной z, система (3.3) должна интегрироваться с малым шагом h (например, $h \sim 10^{-7}$ при использовании метода Рунге-Кутта 4-го порядка) . Найденному решению уравнения (3.7) соответствует время T первого возвращения на неустойчивое многообразие V^u, а значение переменной $z(T) = f_1(z_0)$ является отображением первого возвращения. Аналогично может быть определено отображение $f_k(z_0)$ k-го возвращения на многообразие V^u.

Так как отображение возвращения любого порядка является непрерывным одномерным отображением, то описанный выше метод дает возможность не только найти с любой степенью точности любой неустойчивый цикл, существующий в системе Лоренца, как неподвижную точку соответствующего отображения возвращения, но и однозначно доказать существование этого цикла. В этом отношении метод возвращения на одномерное неустойчивое многообразие имеет неоспоримое преимущество перед широко известным методом сечения Пуанкаре. Необходимая точность задания начального значения z_0 составляет в некоторых случаях $10^{-10} - 10^{-15}$.

Сценарий перехода к хаосу. Теперь приведем сценарий возникновения аттрактора Лоренца, полученный с использованием изложенного выше метода, при фиксированных классических значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$.

1–3. Эти пункты сценария, изложенные в начале работы, остаются без изменения.

4. При $r = r_1 \approx 13.926667...$ сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 образуют единый замкнутый контур, охватывающий обе стационарные точки O_1 и O_2 - конец сепаратрисы Γ_1 входит в начало сепаратрисы Γ_2 и, наоборот, конец Γ_2 входит в начало Γ_1. Из этого контура при увеличении r сначала возникает замкнутый цикл C_0. Он восьмеркой охватывает обе точки O_1 и O_2 и хорошо наблюдается уже при $r = 14$ ($z \approx 0.152293$, $h = 10^{-4}$). Сразу заметим, что этот цикл существует в системе Лоренца при всех $r > r_1$ и именно он является единственным устойчивым аттрактором системы при $r > 313$ (рис. 3.1).

5. При $r_1 < r < r_2 \approx 24.058$ не происходит рождения циклов L_1 и L_2 вокруг точек соответственно O_1 и O_2, а с ростом r последовательно рождаются пары циклов C_n^+ и C_n^-, $n = 0, 1, \ldots$, которые являются

определяющими в формировании аттрактора Лоренца. Цикл C_n^+ совершает n полных оборотов в полупространстве, содержащем точку O_1, и один неполный оборот вокруг точки O_2. Цикл C_n^-, наоборот, делает n полных оборотов вокруг точки O_2 и один неполный оборот вокруг точки O_1. Циклы C_1^+ и C_1^- также хорошо наблюдаются при $r = 14$.

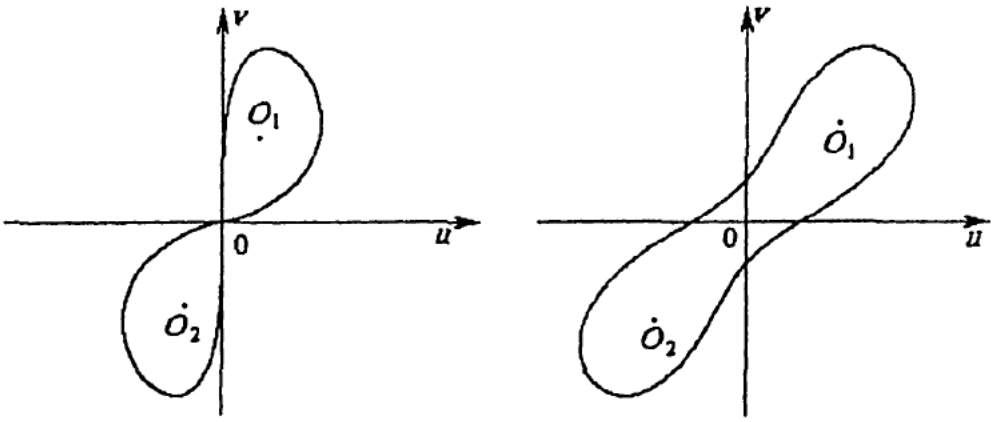

Рис. 3.1. Проекции на плоскость (u, v) фазового портрета цикла C_0 при значениях $r = 14$ (слева) и $r = 350$ (справа).

Для каждого $r_1 < r < r_2$ найдется число $n(r)$, $(n(r) \to \infty$ при $r \to r_2)$ такое, что в пространстве (u, v, z) существуют неустойчивые циклы C_0, C_k^+, C_k^-, $k = 0, 1, ..., n$, циклы C_{km}^+, C_{km}^-, $k, m < n$, совершающие k оборотов относительно точки O_1 и m оборотов относительно точки O_2 и являющиеся различными комбинациями циклов C_n^+ и C_n^-, и много других циклов, порожденных бифуркациями циклов C_n^+ и C_n^- (см. ниже п. 10). Все эти циклы следующим образом располагаются на кривой V^u при $0 < z_{\min} \le z \le z_{\max} < r - 1$. Точка $z_{\min}$ соответствует правому большому одиночному витку цикла C_n^-. Этот виток является большим основанием правого усеченного конуса множества S. Далее траектория цикла переходит в левое полупространство и совершает n оборотов, раскручиваясь по часовой стрелке вокруг точки O_2. Меньший первый виток вокруг точки O_2 является меньшим основанием левого усеченного конуса множества S. Точка $z_{\max}$ соответствует первому меньшему витку цикла C_n^+ вокруг точки O_1. Этот виток служит меньшим основанием правого усеченного конуса. Далее траектория этого цикла совершает n витков вокруг точки O_1, раскручиваясь по часовой стрелке, затем переходит в левое полупространство и совершает один большой виток вокруг точки O_2. Этот виток является большим основанием левого усеченного конуса. Между точками $z_{\min}$ и $z_{\max}$ расположена точка z_0, соответствующая основному циклу C_0. Заметим, что все циклы C_{km}^+, получающиеся при $z > z_0$, являются симметричными относительно оси z циклам C_{km}^-, образовавшимся при $z < z_0$, и могут быть найдены посредством смены знака начальной точки в формуле (3.5). Поэтому для нахождения

всех циклов при заданном r достаточно найти их пары для интервала $z_{\min} \le z \le z_0$. Это целесообразно сделать еще и по следующей причине. Циклы, найденные при $z_{\min} \le z \le z_0$ имеют небольшое число витков вокруг точки O_1 в правом полупространстве, переходя затем в левое полупространство. Эти витки невозможно спутать с многократным вращением вокруг какого-либо одного седлового цикла. Напротив, циклы, наблюдаемые при $z_0 < z \le z_{\max}$, имеют очень большое число витков вокруг точки O_1 в правом полупространстве. Создается иллюзия того, что вращение происходит вокруг одного предельного цикла - мифического седлового цикла L_1 в общепризнанном сценарии. Эта иллюзия все более усугубляется по мере приближения r к r_2, когда число витков цикла C_n^+ неограниченно растет. На рис. 3.2 показаны циклы C_{237}^+ и C_{237}^- при $r = 23.5$.

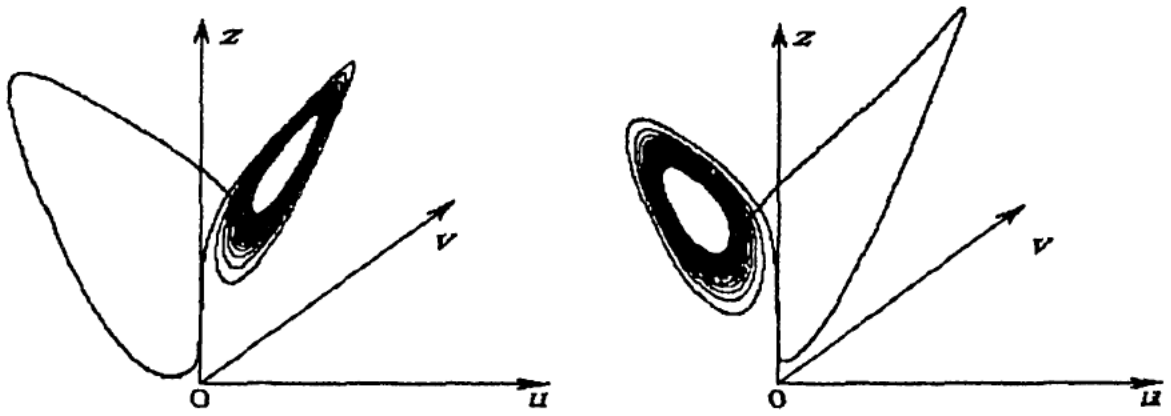

Рис. 3.2. Траектории циклов C_{237}^+ (слева) и C_{237}^- (справа) в фазовом пространстве (u, v, z).

Границы областей притяжения устойчивых точек O_1 и O_2 определяются меньшими витками циклов C_n^+ и C_n^-, размеры которых убывают при увеличении r. Поэтому при некотором значении параметра $r = r_a$ область притяжения множества $B = S \cup G$ перестает пересекаться с областями притяжения точек O_1 и O_2, и множество B становится аттрактором. Численные расчеты показывают, что это происходит не в результате бифуркации в точке $r = r_2$, а несколько раньше при $r = r_a \approx 23.9$, т.е. при $r_a < r_2$. Этому есть логичное объяснение, если исходить из концепции, согласно которой аттрактор Лоренца формируется в результате бифуркаций конечного числа устойчивых циклов $C_k^{\pm}$, $k = 0, 1, ...l$, при уменьшении величины r от $r \approx 313$ (см. ниже п. 10). Так как область притяжения аттрактора (и его "глаза") формируется циклами $C_l^{\pm}$ и множеством циклов, порожденным их бифуркациями, то при некотором $n > l$ $(r_a < r < r_2)$ меньшие витки циклов $C_n^{\pm}$ будут лежать внутри "глаз" аттрактора, т.е. аттрактор не будет иметь пересечения с областями притяжения точек O_1 и O_2.

Таким образом, в системе Лоренца ($\sigma = 10$, $b = 8/3$) метастабиль-

ный хаос существует только в интервале $r_1 < r \leq r_a$, а в интервале $r_a < r < r_2$ в системе уже имеются три устойчивых предельных множества: точки O_1, O_2 и аттрактор Лоренца.

6. При $r \to r_2$ размеры "глаз" уменьшаются вместе с ростом количества витков циклов C_n^+ и C_n^- вокруг точек O_1 и O_2, соответственно. Значение $z_{\max}$ растет, $z_{\min}$ уменьшается, причем $z_{\min} \to 0$ при $r \to r_2$. Увеличиваются длины образующих усеченных конусов, так как дополнительные витки добавляются в вершину конуса, уменьшая размер меньшего основания. Большее основание, напротив, увеличивается. При $r = r_2$ значение $z_{\min} = 0$, но $z_{\max} < r - 1$,так что большее основание каждого конуса достигает своей максимальной величины, в то время как меньшее основание не стягивается в точку – вершину конуса. Имеет место следующая бифуркация. Каждое семейство циклов C_n^+ (или C_n^-) при $n \to \infty$ образует в пределе гетероклиническую структуру "точка - цикл", состоящую из двух сепаратрисных контуров точки O. Первый контур состоит из сепаратрисы, выходящей из точки O по её неустойчивому многообразию и наматывающейся на возникший (только при $r = r_2$!) седловой цикл $L_1(L_2)$ точки O_1 (или, соответственно, точки O_2). Второй контур состоит из сепаратрисы, сматывающейся с седлового цикла L_1 (L_2) и входящей в точку O по её устойчивому многообразию. Как это происходит нетрудно представить из рис. 3.2, на котором изображена почти предельная ситуация, правда пока ещё без циклов L_1 и L_2, необходимых для разделения замкнутых контуров, изображенных на рисунке, на две части.

Как уже отмечалось в предыдущем п. 5, описанная бифуркация не приводит при $r = r_2$ к образованию аттрактора Лоренца. Правильнее будет сказать, что она является лишь предпосылкой к разрушению аттрактора при уменьшении r. Сам аттрактор, существующий в системе при $r = r_2$, был образован при $r < 313$ из конечного числа устойчивых циклов $C_k^{\pm}$, $k = 0, 1, ..., l$. Ему не принадлежат не только сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 точки O, но и бесконечное множество неустойчивых циклов $C_n^{\pm}$, существующих в окрестности гетероклинической структуры "точка-цикл".

7. При $r_2 < r < r_3$ точки O_1 и O_2 ещё устойчивы, и их области притяжения ограничиваются возникшими предельными циклами L_1 и L_2, которые стягиваются в точки при $r \to r_3$. Но аттрактор Лоренца B не является совокупностью интегральных кривых, идущих от L_1 к L_2 и обратно, а сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 седловой точки O не принадлежат аттрактору. Циклы L_1 и L_2 уже выполнили свою роль при $r = r_2$ и никакого отношения к аттрактору более не имеют. При $r_2 < r < r_3$, также, как и при $r_1 < r < r_2$ циклы C_n^+ и C_n^- снова возникают из сепаратрисных контуров. Например, при $r = 24.06$ наблюдаются циклы C_{201}^+ и C_{201}^-, а при $r = 24.5$ – циклы C_{36}^+ и C_{36}^-. Аттрактор же определяется только их конечным числом (см. п. 10).

8. При $r = r_3$ седловые циклы L_1 и L_2 исчезают. В системе существует единственное предельное множество – аттрактор Лоренца.

9. Существуют еще два важных значения r_4 и r_5 параметра r, влияющие на формирование аттрактора Лоренца. По нашим данным это точки $r_4 \approx 31.1158$ и $r_5 \approx 32.75$ (последнее значение пока не удалось установить достаточно точно). При увеличении r от r_3 до r_4 количество витков циклов C_n^+ и C_n^- сначала быстро уменьшается, а затем опять возрастает и достигает значения 36 в точке r_4. При этом "глаза", создаваемые сепаратрисами точки O, значительно меньше "глаз" аттрактора и начинают расти при увеличении r. Таким образом, точка r_4 является точкой наименьшего расстояния прямой ($\sigma = 10,\ b = 8/3$) в пространстве параметров (σ, b, r) от гетероклинических контуров, связывающих точку O с точками O_1 и O_2. Сепаратрисы точки O подходят к одномерным устойчивым многообразиям седло-фокусов O_1 и O_2 на минимальное расстояние, но не попадают в эти точки! При приближении значения r к r_5, наоборот, "глаза", создаваемые сепаратрисами точки O, увеличиваются в размере и становятся больше "глаз" аттрактора. В точке r_5 "глаза" аттрактора имеют наименьший размер и, следовательно, значение r_5 - это точка наименьшего расстояния прямой ($\sigma = 10,\ b = 8/3$) в пространстве параметров (σ, b, r) от гомоклинических контуров точек O_1 и O_2. Почти гетероклинический и почти гомоклинический контуры, существующие в системе (3.3) соответственно в точках r_4 и r_5 изображены на рис. 3.3.

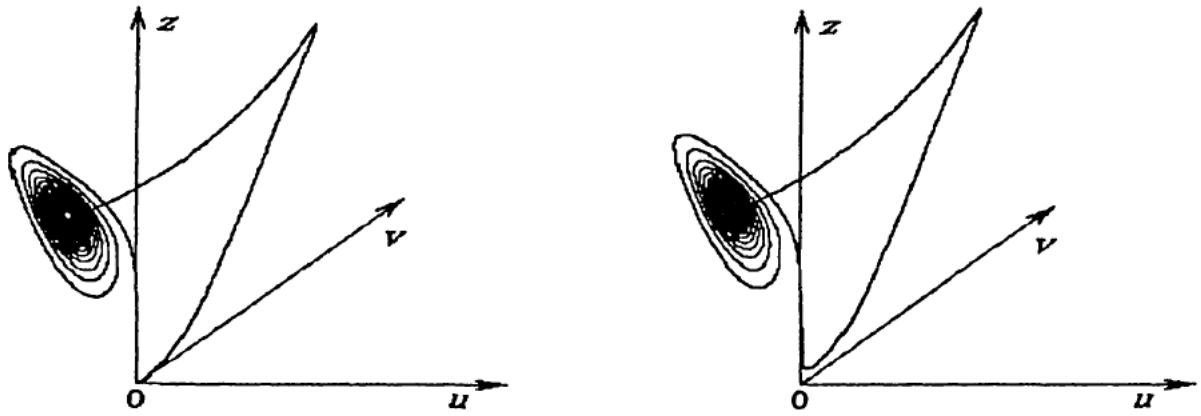

Рис. 3.3. Почти гетероклинический (слева)и почти гомоклинический (справа) контуры соответственно при $r \approx 30.748888$ и $r \approx 32.75$.

Ясно, что в системе (3.3) (и в системе (3.1)) существуют более сложные аттракторы при тех значениях параметров σ и b, при которых прямая r проходит точно через гетероклинический или гомоклинический контуры. Так как гомоклинические контуры лежат на многообразии V^u, то самым сложным является аттрактор при тех значениях параметров σ^* и b^*, при которых гомоклинические контуры в пределе при $r \to r^*$ сливаются с гетероклиническими контурами (см. п. 3.1.3). В случае же аттрактора Лоренца ($\sigma = 10,\ b = 8/3$) дело обстоит несколько иначе. Аттрактор формируется только конечным числом устойчивых циклов $C_n^{\pm}$, рождающихся вокруг гомоклиниче-

ских контуров седло-фокусов O_1 и O_2 при уменьшении r, и всеми их бифуркациями при $r > r_5$ (см. следующий пункт). Таким образом, аттрактор Лоренца, как и другие известные нерегулярные аттракторы, возникает из устойчивых предельных множеств в результате мягких бифуркаций, что, впрочем, вполне естественно и хорошо согласуется с интуитивным пониманием сущности аттрактора. Он образуется не при увеличении r и не за счет бифуркаций в точках r_1 и r_2, а совсем наоборот, при уменьшении r от $r \approx 313$ через бесконечное число бифуркаций в точках, рассматриваемых в следующем разделе. Последней из этих точек является точка r_5. При $r < r_5$ "глаза" аттрактора растут, идет последовательное уменьшение занимаемой им области, а затем и его разрушение через бифуркации в точках r_2, r_a и r_1.

10. Процесс рождения аттрактора Лоренца ($\sigma = 10$, $b = 8/3$) в системе (3.3) (системе (3.1)) при уменьшении r от 313 до r_5 происходит через *неполный двойной гомоклинический каскад бифуркаций.* Полный каскад будет иметь место в случае прохождения прямой r точно через точку существования двух гомоклинических контуров. Заметим, что в системах с одним гомоклиническим контуром может существовать простой (одинарный) полный или неполный каскад бифуркаций перехода к хаосу. Опишем подробно переход к хаосу через двойной гомоклинический (полный или неполный) каскад бифуркаций. Как уже отмечалось выше, при $r > 313$ в системе существует единственный устойчивый предельный цикл C_0, охватывающий оба состояния равновесия O_1 и O_2. При значении $r \approx 313$ цикл C_0, становясь неустойчивым, порождает два устойчивых цикла C_0^+ и C_0^-, также охватывающих состояния равновесия O_1 и O_2, но имеющих прогибы в направлении своих половин неустойчивого многообразия V^u точки O. Здесь, собственно, и начинается двойной гомоклинический каскад бифуркаций. В случае неполного каскада он состоит из конечного числа стадий возникновения устойчивых циклов $C_k^{\pm}$, $k = 0, 1, ..., l$, и бесконечного числа их дальнейших бифуркаций. В случае же полного каскада число стадий бесконечно и в пределе при $l \to \infty$ циклы стремятся к гомоклиническим контурам точек O_1 и O_2 соответственно. На k-ой стадии каскада изначально устойчивые циклы $C_k^{\pm}$ претерпевают субгармонический каскад бифуркаций, образуя два аттрактора, которые имеют вид лент, лежащих в своих областях неустойчивого многообразия V^u точки O. Затем эти две ленты сливаются, образуя единый аттрактор вокруг обеих точек O_1 и O_2, после чего происходит каскад бифуркаций циклов, рождающихся в результате слияния лент и совершающих обороты как вокруг точек O_1 и O_2 по отдельности, так и вокруг обеих точек одновременно. Последний каскад бифуркаций обладает свойством самоорганизации, так как характеризуется упрощением структуры циклов, т.е. рождением при уменьшении величины r новых устойчивых циклов с меньшим числом оборотов вокруг точек O_1 и O_2. Каждый цикл каскада бифуркаций самоорганизации претерпевает свой субгармонический каскад бифуркаций, после чего все

циклы, образующиеся в результате бесконечного числа бифуркаций всех субгармонических каскадов и каскадов бифуркаций самоорганизации циклов, становятся неустойчивыми и ложатся своими лентами в свои области многообразия V^u, создавая таким образом некоторое множество B_k. В результате неполного гомоклинического каскада бифуркаций образуется множество $B = \cup B_k$, которое состоит из бесконечного числа всех возможных неустойчивых циклов, возникающих на всех l стадиях каскада. Эти циклы порождают неполный двойной гомоклинический аттрактор, являющийся аттрактором Лоренца.

Опишем более подробно первую стадию двойного гомоклинического каскада. Каждый из циклов C_0^+ и C_0^- претерпевает субгармонический каскад бифуркаций, который начинается каскадом Фейгенбаума, т.е. каскадом бифуркаций удвоения периода циклов, а завершается появлением в окрестности исходного цикла устойчивых циклов любого периода согласно порядку Шарковского, причем каждый родившийся устойчивый цикл любого периода имеет свой каскад бифуркаций удвоения. Например, при $r = 222$ наблюдаются циклы удвоенного периода, при $r = 216$ – циклы учетверенного периода, при $r = 214$ – циклы периода 6, при $r = 209$ – циклы периода 3 и т.д. При $r \approx 203$ по окончании субгармонического каскада бифуркаций возникают два устойчивых множества (два аттрактора), образовавшихся вследствие бифуркаций циклов $C_0^+(C_0^-)$ и лежащих на многообразии V^u. Внешне эти множества выглядят как две широкие ленты. При $r \lesssim 203$ два аттрактора, образованных циклами C_0^+ и C_0^-, сливаются в один аттрактор, который пока находится на некотором расстоянии от оси z и поэтому не имеет "глаз". В результате появляется возможность

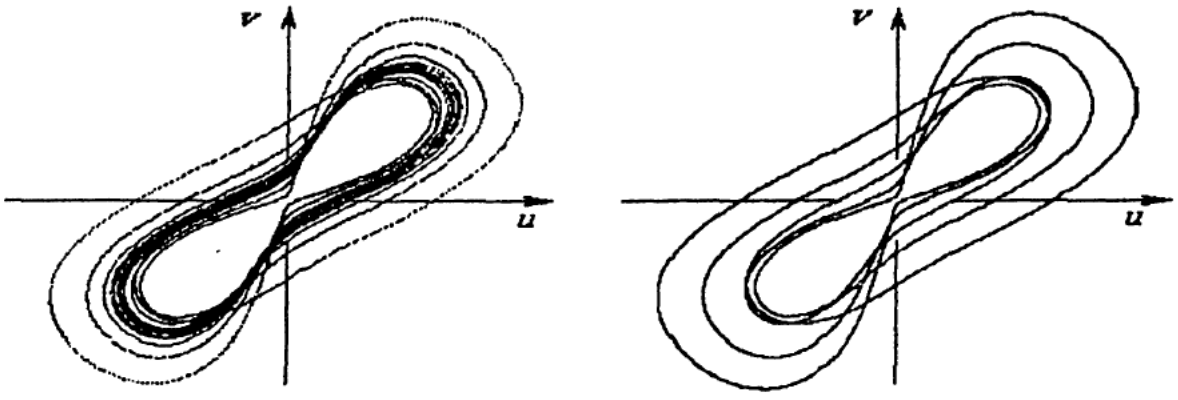

Рис. 3.4. Проекции на плоскость (u, v) фазового портрета устойчивых циклов, рождающихся в результате бифуркации самоорганизации при $r = 202.384$ (слева) и $r = 198.986$ (справа).

образования устойчивых циклов, делающих обороты вокруг обеих точек O_1 и O_2, причем количество витков в таких циклах уменьшается с уменьшением r (рис. 3.4) – начинается каскад бифуркаций самоорганизации циклов. При дальнейшем уменьшении r и, следовательно,

при приближении циклов, образующих аттрактор, к оси z, траектории системы начинают закручиваться вокруг точек O_1 и O_2, и при $r \approx 197.6$ у аттрактора образуются "глаза". Это обусловлено появлением устойчивых циклов типа $C_{km}^{\pm}$, делающих обороты как вокруг каждой из точек O_1 и O_2 по отдельности, так и вокруг обеих точек сразу. Эти циклы, самоорганизуясь, возникают парами в огромном количестве в результате седло-узловой бифуркации в интервале $170 < r < 197.6$. Все они последовательно претерпевают субгармонические каскады бифуркаций, также образуя свои более узкие ленты, и также ложатся на многообразие V^u, теряя при этом устойчивость.

Отметим, что надо быть аккуратным при определении бифуркаций циклов при значениях $r < 203$. Дело в том, что циклы в этом интервале лежат, как правило, уже достаточно близко к оси z и имеют в ее окрестности большие градиенты. Возникает типичная некорректная задача вычисления производной от функции, заданной неточно. Поэтому, если неправильно выбрать шаг интегрирования, то легко можно принять перескок траектории с одного цикла на другой в окрестности оси z за некоторое свойство аттрактора, хотя этот перескок объясняется исключительно неустойчивостью вычислительного процесса. Именно этой ошибкой объясняется "обнаружение" так называемой перемежаемости I рода в системе Лоренца (подробнее см. ниже).

При $r \approx 170$ возникает устойчивый цикл C_{11}, с которым происходят все те же бифуркации, что и с исходным циклом C_0, но в интервале $100.795 < r < 170$. На этом заканчивается первая стадия двойного гомоклинического каскада и при $r \approx 100.795$ рождается пара устойчивых циклов $C_1^{\pm}$. При $r \approx 71.52$ с рождения пары устойчивых циклов $C_2^{\pm}$ начинается третья стадия, которая длится до значения $r \approx 59.25$, когда происходит рождение пары устойчивых циклов $C_3^{\pm}$ и т.д. Весь неполный гомоклинический каскад заканчивается, как уже отмечалось выше, при значении r_5. При меньших значениях r в системе имеется, как принято считать, единственное устойчивое предельное множество $\overline{B}$ - аттрактор Лоренца. Вопрос о том, является ли множество $\overline{B}$ фракталом и имеет ли оно дробную размерность, остается пока открытым. Ответ на этот вопрос непосредственно связан с ответом на вопрос, какую структуру имеет множество всех неустойчивых предельных циклов, порождающих аттрактор, на кривой V^u: всюду плотно на V^u или имеет структуру канторова множества? В первом случае аттрактор не может быть фракталом и имеет размерность, равную двум. Многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что вероятнее всего имеет место первый случай, т.е. циклы, составляющие каждую ленту гомоклинического каскада, лежат всюду плотно в своей области многообразия V^u и, следовательно, пересечение аттрактора с V^u представляет собой отрезок, на котором $0 < z_{\min} \leq z \leq z_{\max} < r - 1$. Эти выводы полностью согласуются с теорией рождения сингулярных аттракторов на гладких подмного-

образиях фазового пространства (см. главу 4). Согласно этой теории размерность таких аттракторов не может быть больше двух, и что на самом деле в интервале изменения значений параметра $r_a < r < r_5$ существует не один структурно устойчивый аттрактор, а бесконечное количество структурно неустойчивых сингулярных аттракторов в точках накопления значений параметра r, соответствующих различным каскадам бифуркаций.

Еще более интересная ситуация складывается относительно явления "перемежаемости", открытого И. Помо и П. Манневилем в системе Лоренца при значении параметра $r = 166.1$ [14]. Утверждается, что устойчивый цикл, существующий в системе Лоренца для $148.5 < r < 166.07$, исчезает при увеличении r, и система входит в интервал "перемежаемости", когда движение в окрестности бывшего цикла прерывается нерегулярными хаотическими всплесками. Система, якобы, "помнит" о существовавшем в ней цикле. При дальнейшем увеличении r в системе возникает хаос. Переход к хаосу через перемежаемость является одним из трех общепризнанных сценариев возникновения хаотических режимов поведения в нелинейных динамических системах.

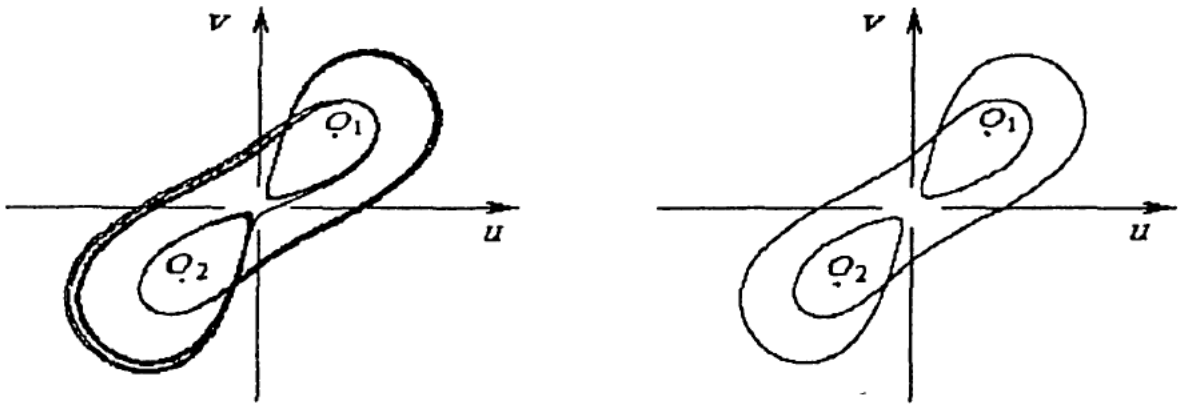

Рис. 3.5. Проекции на плоскость (u, v) фазового портрета цикла C_{11} слева при $r = 166.1$, $h = 0.003$ и справа при $r = 170$, $h = 0.03$.

Действительно, хаотический всплеск имеет место в системе Лоренца при $r = 166.1$, если принять при интегрировании системы методом Рунге-Кутта 4-го порядка шаг интегрирования $h \sim 10^{-3} - 10^{-5}$. Если же взять $h = 2 \cdot 10^{-2}$, то никаких хаотических всплесков не наблюдается ни при $r = 166.1$, ни даже при $r = 166.8$. Более того, нетрудно видеть, что в системе существует устойчивый предельный цикл вплоть до значения $r \approx 170$, если взять $h = 3 \cdot 10^{-2}$. Это тот же самый цикл C_{11}, что наблюдается и при значении $r < 166.07$ (рис. 3.5). Таким образом, в системе Лоренца нет ни перемежаемости, ни перехода к хаосу через перемежаемость. Этот эффект связан исключительно с численными ошибками, возникающими вследствие некорректности задачи вычисления производной в окрестности оси z.

Дополнительным основанием для такого вывода является тот факт,

что мультипликаторы цикла при $r = 166.06$, когда еще нет перемежаемости, имеют следующие значения $\{1; 0.91; 0\}$ и показывают, что данное значение параметра r находится еще достаточно далеко от границы области рождения цикла.

3.1.3. Сценарий рождения полного двойного гомоклинического аттрактора в системе Лоренца. Рассмотрим задачу нахождения таких значений параметров (σ^*, b^*), при которых переход к хаосу в системе Лоренца (3.1) осуществляется при уменьшении параметра r через полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. Этот случай соответствует ситуации, при которой прямая $\sigma = \sigma^*$, $b = b^*$ проходит в пространстве параметров (σ, b, r) через точку (σ^*, b^*, r^*) существования двух гомоклинических контуров (петель сепаратрис) седло-фокусов O_1 и O_2. В п. 3.1.4 мы покажем, что такие точки образуют полуповерхность в пространстве параметров (σ, b, r). Рождающийся при этом аттрактор (при $r = r^*$) не имеет глаз и занимает верхнюю часть $(0 < z^* < z < r - 1)$ многообразия V^u, где z^* — значение координаты z на многообразии V^u, соответствующее гомоклиническому контуру. Границей гомоклинической полуповерхности служит линия, точки которой являются точками слияния гомоклинических контуров неподвижных точек O_1 и O_2 системы Лоренца с гетероклиническими контурами точек (O, O_1) и (O, O_2). Пересечением гомоклинической полуповерхности с плоскостью $b = 8/3$ в пространстве параметров (σ, b, r) является криволинейный луч, исходящий из точки ($\sigma^* \approx 10.1668$, $r^* \approx 30.86865$) и проходящий, в частности, через точку ($\sigma^* \approx 10.5$, $r^* \approx 33.2189$). Получить подробное описание перехода к хаосу в системе Лоренца в самой точке ($b = 8/3, \sigma = 10.1668$) не представляется возможным вследствие сильной некорректности поставленной задачи. Поэтому ниже приведено подробное описание сценария перехода к хаосу в системе Лоренца при значениях параметров $b = 8/3$, $\sigma = 10.5$ и при уменьшении параметра r от значения $r = 350$ до $r \approx 33.2189$ через полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций, приводящий к рождению полного двойного гомоклинического аттрактора, отличного, вообще говоря, от классического аттрактора Лоренца. Метод исследования аттрактора аналогичен методу п. 3.1.2.

При $r > 340$ в системе (3.1) существует единственный устойчивый предельный цикл C_0, охватывающий оба состояния равновесия O_1 и O_2. Он же является неустойчивым циклом системы (3.1) при $13.958 \lesssim r \lesssim 340$, исчезая в результате бифуркации гомоклинической бабочки (рис. 3.6). При значении $r \approx 340$ цикл C_0, становясь неустойчивым, порождает два устойчивых цикла C_0^+ и C_0^-, также охватывающих состояния равновесия O_1 и O_2, но имеющих прогибы в направлении своих половин неустойчивого многообразия V^u точки O (рис. 3.7). Здесь, собственно, и начинается двойной гомоклинический каскад бифуркаций. В случае неполного каскада он состоит из конечного числа стадий возникновения устойчивых циклов $C_k^{\pm}$, $k = 0, 1, ..., l$, и бесконечного числа их дальнейших бифуркаций. В случае же полного

каскада число стадий бесконечно и в пределе при $l \to \infty$ циклы стремятся к гомоклиническим контурам точек O_1 и O_2 соответственно. Цикл C_k^+ совершает k полных оборотов вокруг точки O_1 в полупространстве, содержащем эту точку, и один неполный оборот вокруг точки O_2. Цикл C_k^-, напротив, делает k полных оборотов вокруг точки O_2 в полупространстве, содержащем эту точку, и один неполный оборот вокруг точки O_1.

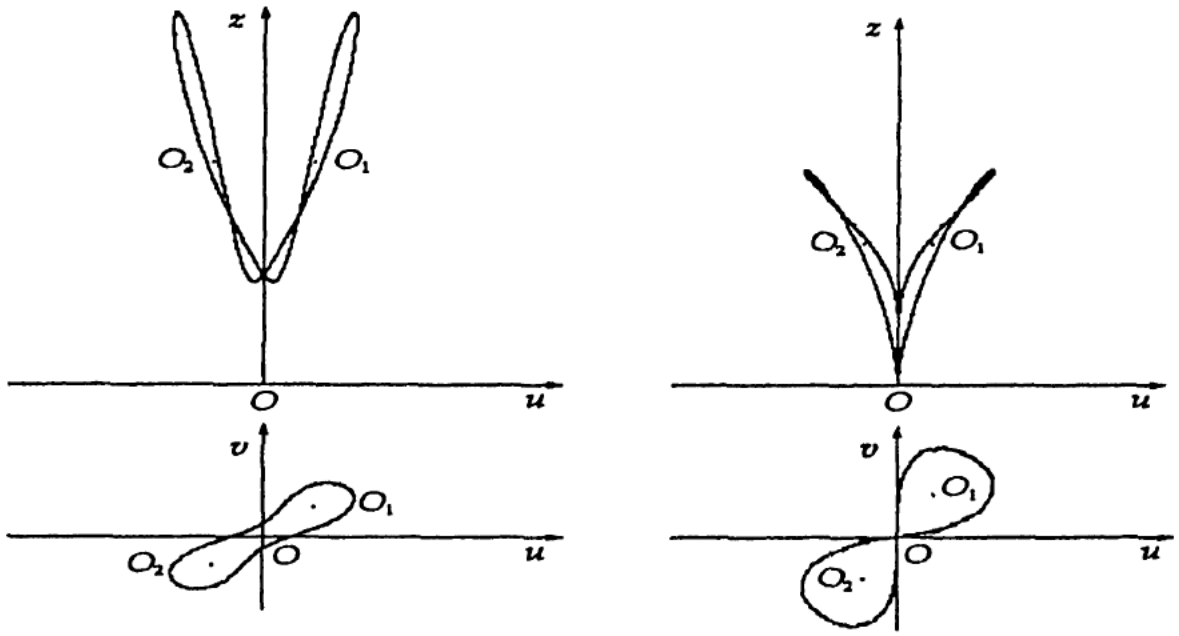

Рис. 3.6. Проекции циклов C_0 при $r = 350$ (слева) и при $r = r_1 \approx 13.958$ (справа).

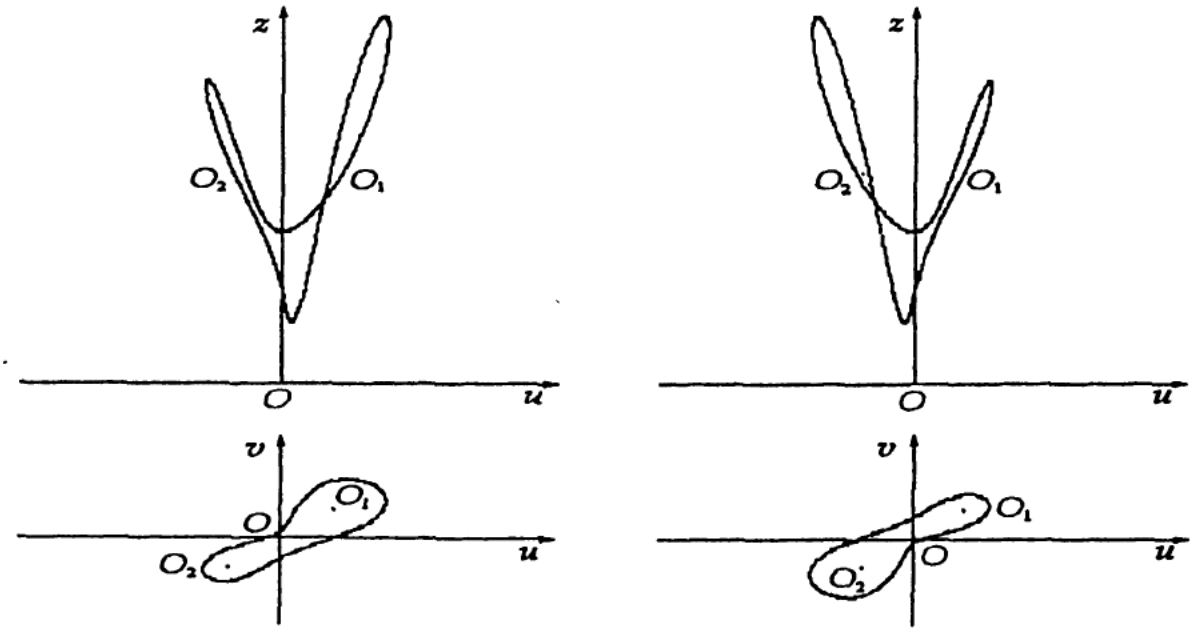

Рис. 3.7. Проекции циклов C_0^- (слева) и C_0^+ (справа) при $r = 300$.

Заметим, что на каждой стадии каскада вместе с парой устойчивых циклов $C_k^{\pm}$ одновременно рождается пара точно таких же не-

устойчивых циклов. На k-ой стадии каскада изначально устойчивые циклы $C_k^{\pm}$ претерпевают субгармонический каскад бифуркаций, образуя два субгармонических аттрактора, которые имеют вид лент, лежащих в своих областях неустойчивого многообразия V^u точки O. Затем эти две ленты сливаются, образуя единый аттрактор вокруг обеих точек O_1 и O_2, после чего происходит каскад бифуркаций циклов, рождающихся в результате слияния лент и совершающих обороты как вокруг точек O_1 и O_2 по отдельности, так и вокруг обеих точек одновременно. Последний каскад бифуркаций обладает свойством самоорганизации, так как характеризуется упрощением структуры циклов, т.е. рождением при уменьшении r новых устойчивых циклов с меньшим числом оборотов вокруг точек O_1 и O_2. Каждый цикл каскада бифуркаций самоорганизации претерпевает свой субгармонический каскад бифуркаций, после чего все циклы, образующиеся в результате бесконечного числа бифуркаций всех субгармонических каскадов и каскадов бифуркаций самоорганизации циклов, становятся неустойчивыми и ложатся своими лентами в свои области многообразия V^u, создавая, таким образом, некоторое множество B_k. В результате полного гомоклинического каскада бифуркаций образуется множество $B = \cup B_k$, $k = 0, 1, \ldots$, которое состоит из бесконечного числа всех возможных неустойчивых циклов, возникающих на всех стадиях каскада. Эти циклы порождают полный двойной гомоклинический аттрактор системы Лоренца.

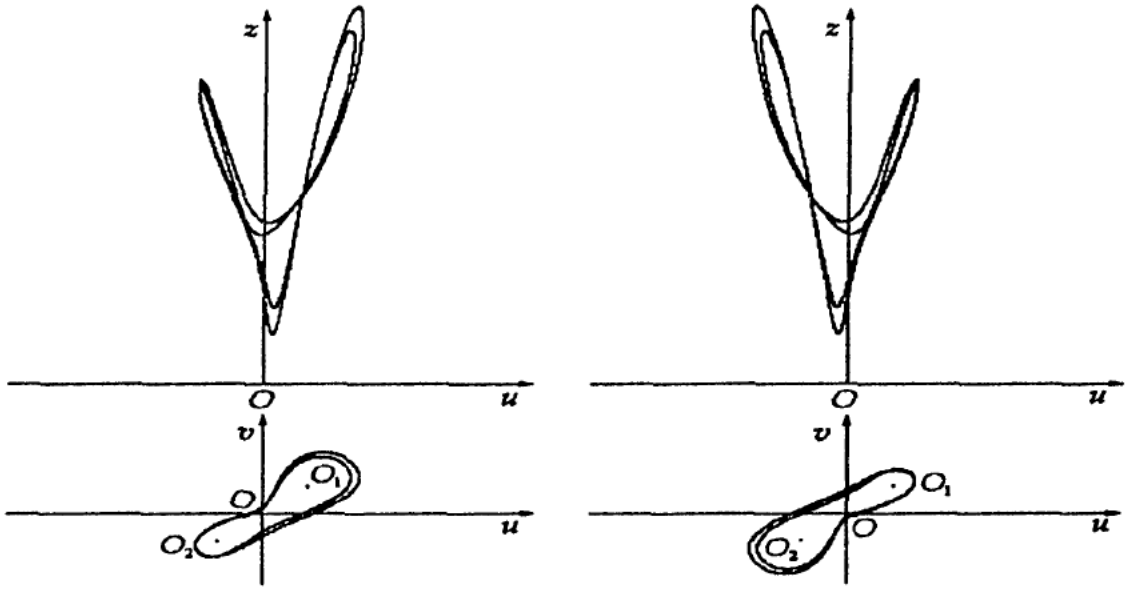

Рис. 3.8. Проекции циклов C_0^- (слева) и C_0^+ (справа) удвоенного периода при $r = 244$.

Рассмотрим более подробно первую стадию двойного гомоклинического каскада. Каждый из циклов C_0^+ и C_0^- претерпевает субгармонический каскад бифуркаций, состоящий из появления в окрестности исходного цикла устойчивых циклов любого периода и дальнейшего каскада бифуркаций удвоения периодов этих циклов. Например, при

$r \approx 251$ рождаются циклы удвоенного периода (рис. 3.8), при $r \approx 237$ – циклы учетверенного периода, при $r = 229.5$ наблюдаются циклы периода 5 (рис. 3.9), а при $r = 226.9$ – циклы периода 3 (рис. 3.10) и т.д. При $r \approx 225.5$ по окончании субгармонического каскада бифуркаций возникают два устойчивых множества (два субгармонических аттрактора), образовавшихся вследствие бифуркаций циклов $C_0^+(C_0^-)$ и лежащих на многообразии V^u. Внешне эти множества выглядят как две широкие ленты (рис. 3.11). При $r \lesssim 219.9$ два аттрактора, образованных циклами C_0^+ и C_0^-, сливаются в один нерегулярный аттрактор, который пока находится на некотором расстоянии от оси z и поэтому не имеет "глаз" (рис. 3.12).

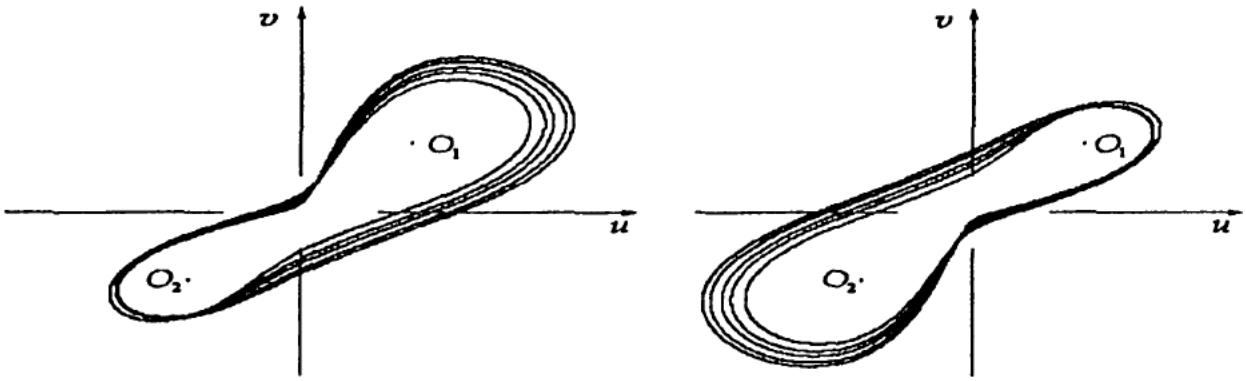

Рис. 3.9. Проекции циклов C_0^- (слева) и C_0^+ (справа) периода 5 при $r = 229.5$.

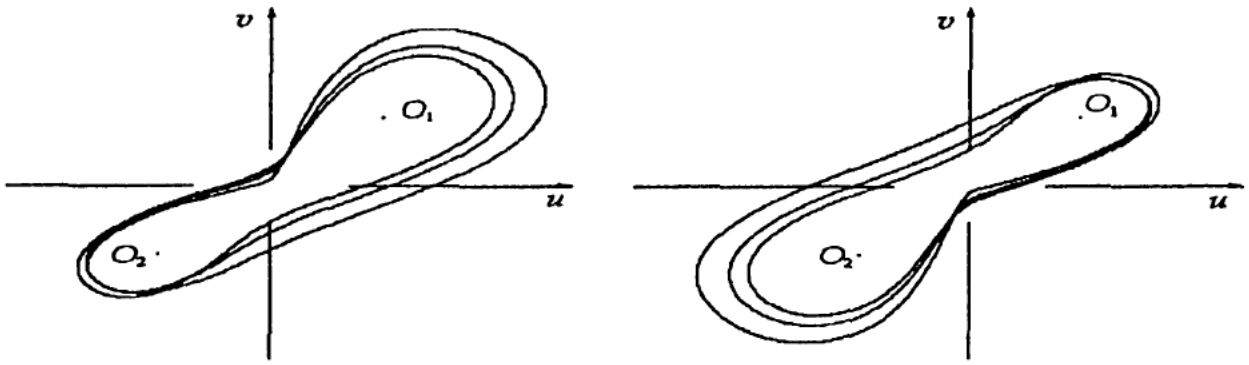

Рис. 3.10. Проекции циклов C_0^- (слева) и C_0^+ (справа) периода 3 при $r = 226.9$.

В результате такого слияния появляется возможность образования устойчивых циклов, делающих обороты вокруг обеих точек O_1 и O_2, причем количество витков в таких циклах уменьшается с уменьшением r (рис. 3.13) – начинается каскад бифуркаций самоорганизации циклов. При дальнейшем уменьшении r и, следовательно, при приближении циклов к оси z, траектории системы начинают закручиваться вокруг точек O_1 и O_2, и при $r \approx 213.55$ у циклов самоорганизации образуются "глаза". Появляются устойчивые циклы типа $C_{km}^{\pm}$, делающие обороты как вокруг каждой из точек O_1 и O_2 по отдельности

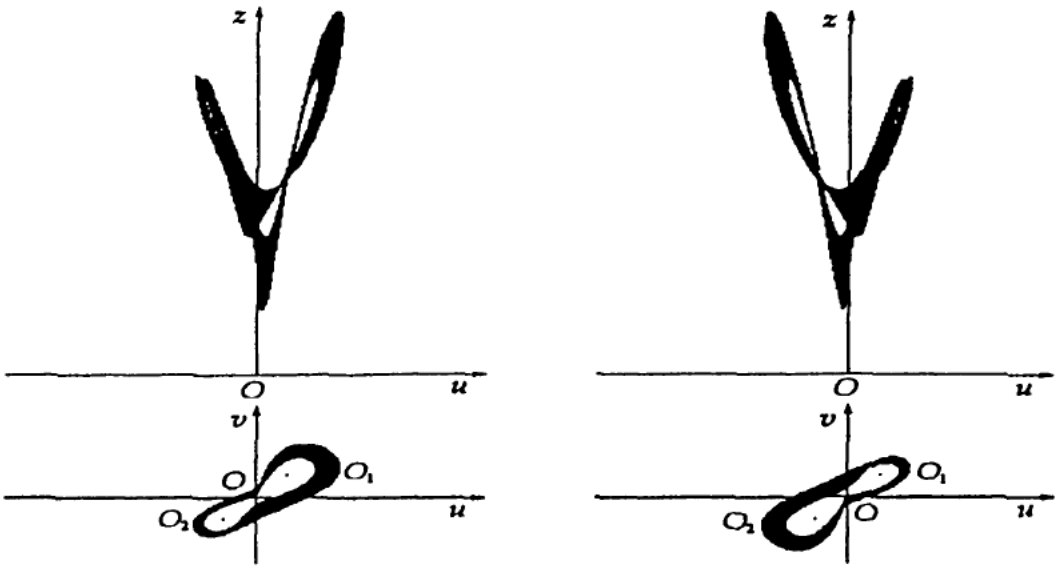

Рис. 3.11. Проекции субгармонических аттракторов, порожденных циклами C_0^- (слева) и C_0^+ (справа) при $r = 220$.

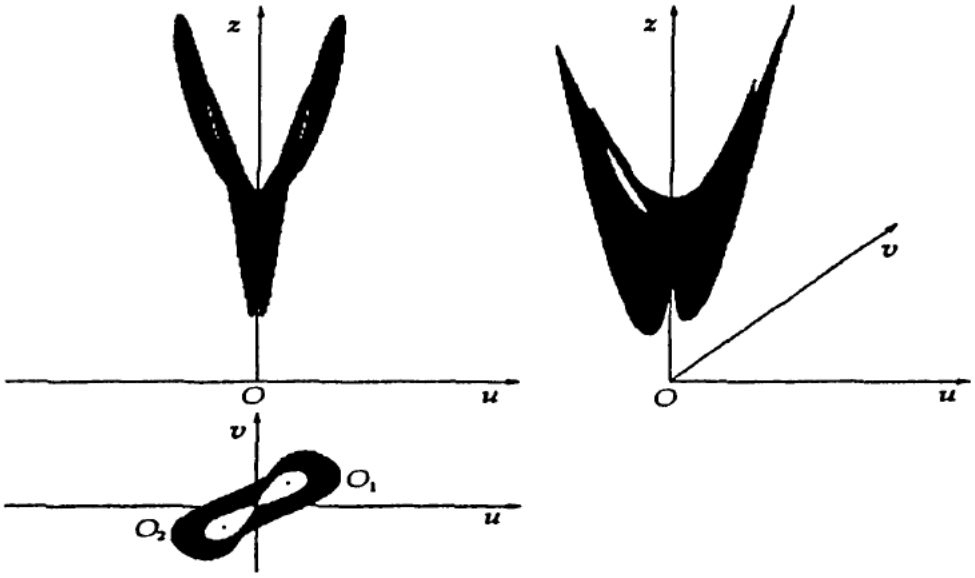

Рис. 3.12. Нерегулярный аттрактор, образованный слиянием двух субгармонических аттракторов при $r = 219.9$.

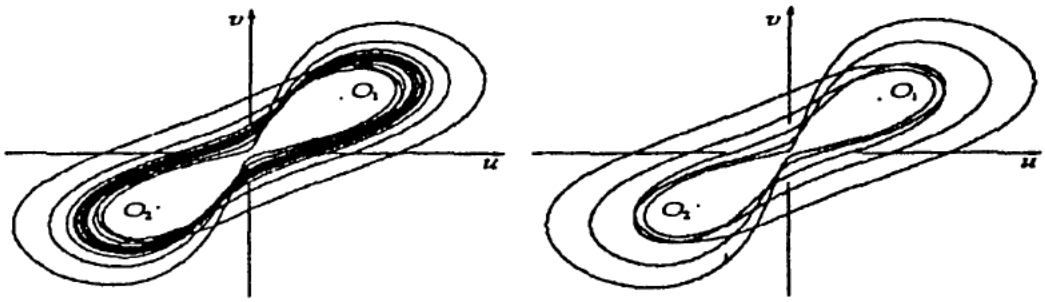

Рис. 3.13. Проекции циклов каскада самоорганизации периодов 11 и 5 соответственно при $r = 219.263$ и $r = 215.260$.

(ровно один оборот), так и вокруг обеих точек сразу. Эти циклы, самоорганизуясь, возникают парами в огромном количестве в интервале $183 < r < 213.55$ (рис. 3.14 – 3.16). Все они последовательно претерпевают субгармонические каскады бифуркаций (см. рис. 3.15), образуя

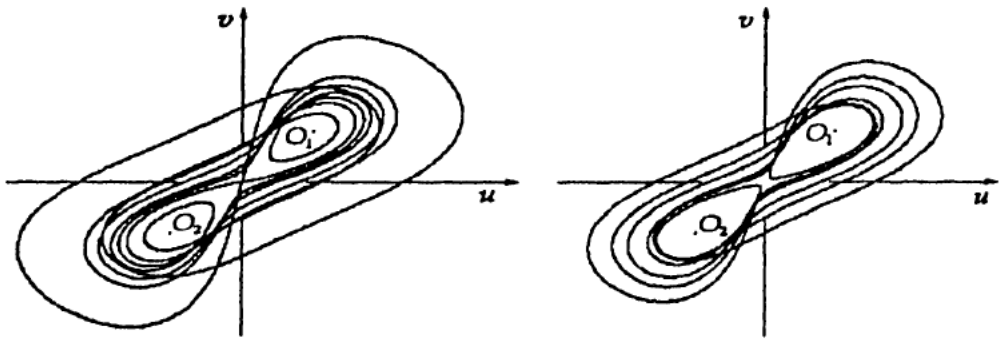

Рис. 3.14. Проекции циклов каскада самоорганизации при $r = 209.090$ (слева) и $r = 199.412$ (справа).

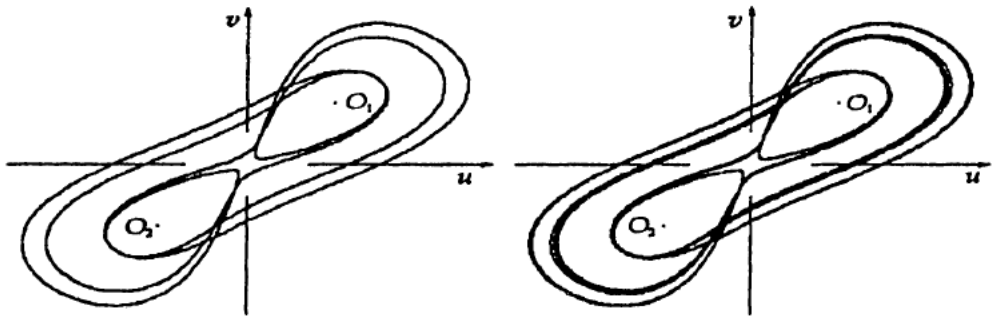

Рис. 3.15. Проекции циклов каскада самоорганизации при $r = 194.750$ (слева) и $r = 193.9175$ (справа).

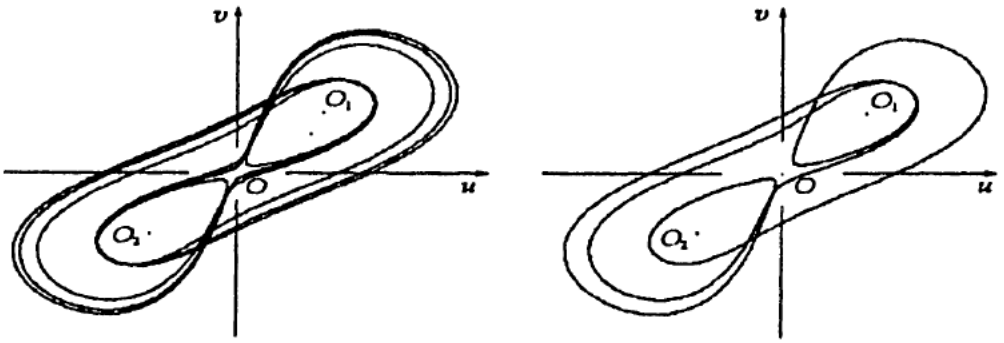

Рис. 3.16. Проекции циклов каскада самоорганизации при $r = 190.561$ (слева) и $r = 184.943$ (справа).

свои более узкие ленты, и также ложатся на многообразие V^u, теряя при этом устойчивость. При $r \approx 183$ каскад бифуркаций самоорганизации завершается рождением устойчивого цикла C_{11}, с которым в дальнейшем при уменьшении r происходят все те же бифуркации,

что и с исходным циклом C_0, но в интервале $108.339 < r < 183$ (рис. 3.17– 3.20). Заметим, что рождение двух устойчивых циклов C_{11}^- и C_{11}^+ из одного устойчивого цикла C_{11} происходит при $r \approx 165.2$.

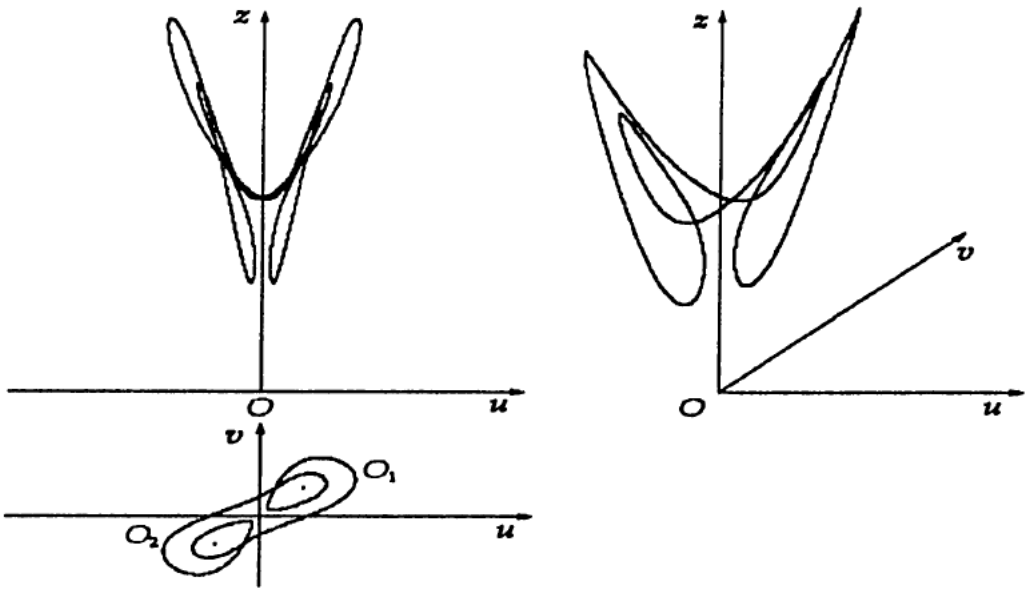

Рис. 3.17. Проекции и трехмерное изображение цикла C_{11} при $r = 176$.

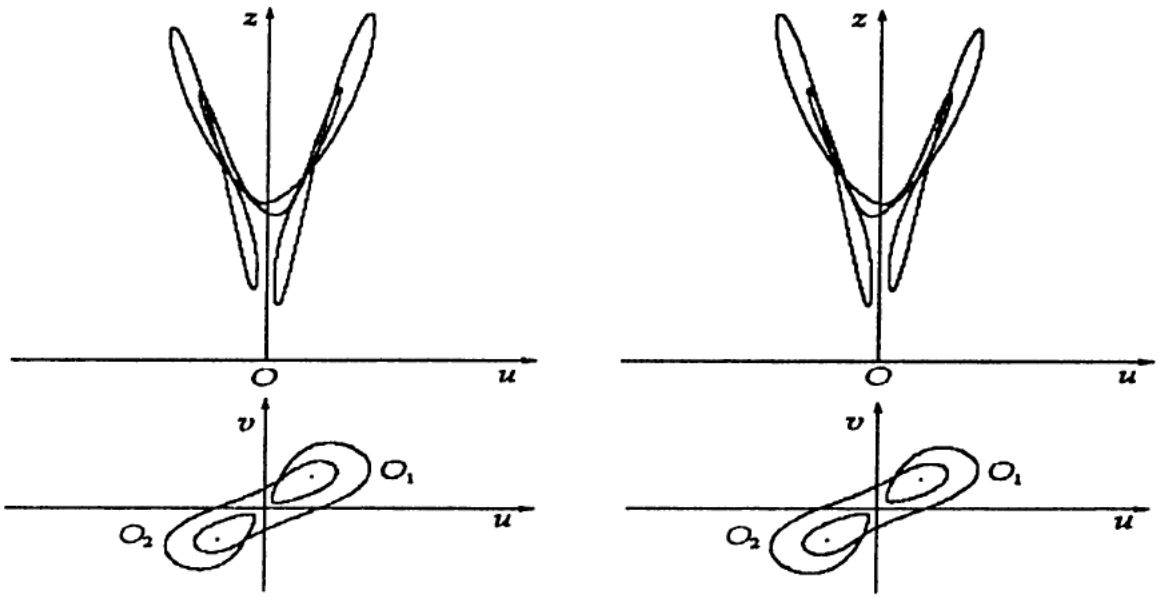

Рис. 3.18. Проекции устойчивых циклов C_{11}^- (слева) и C_{11}^+ (справа) при $r = 164$.

На этом заканчивается первая стадия двойного гомоклинического каскада и при $r \approx 108.339$ рождается пара устойчивых циклов $C_1^{\pm}$ (рис. 3.21). При $r \approx 72.296$ с рождения пары устойчивых циклов $C_2^{\pm}$ начинается третья стадия, которая длится до значения $r \approx 63$, когда происходит рождение пары устойчивых циклов $C_3^{\pm}$. Четвертая стадия каскада длится до значения $r \approx 55.67$, когда рождается пара устойчивых циклов $C_4^{\pm}$, пятая – до значения $r \approx 51.01$, шестая – до значения $r \approx 47.78$, когда рождается пара устойчивых циклов $C_6^{\pm}$ (рис. 3.22).

Внутри каждой k-ой стадии каскада происходит рождение устойчивых циклов C_{kk} и $C^{\pm}_{kk}$, а также всевозможных устойчивых циклов типа C_{km} и $C_{mk}, m = 1, ..., k-1$. Циклы C_{33} и C_{66} показаны на рис. 3.23. На рис. 3.24 представлен цикл C^{-}_{121}, рождающийся при $r \approx 33.2189$. Численно рождение этого цикла обнаружено при $r = 33.21895995031$, $z_0 = 2.3784027452$ и при шаге интегрирования $h = 0.01$.

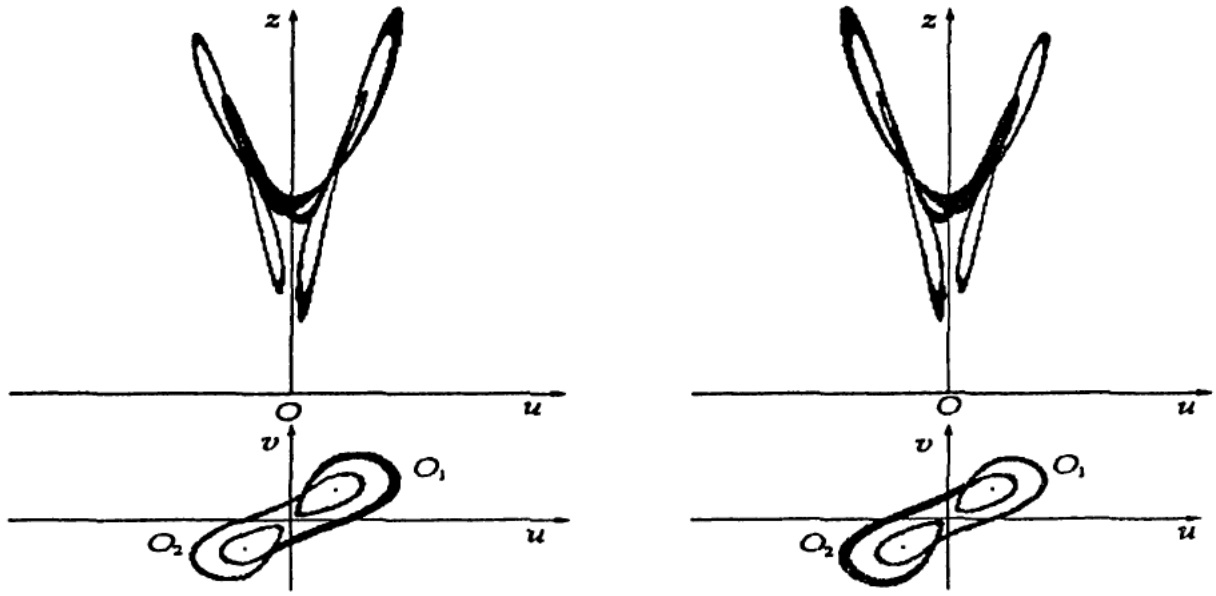

Рис. 3.19. Проекции субгармонических аттракторов, порожденных циклами C^{-}_{11} (слева) и C^{+}_{11} (справа) при $r = 155.42$.

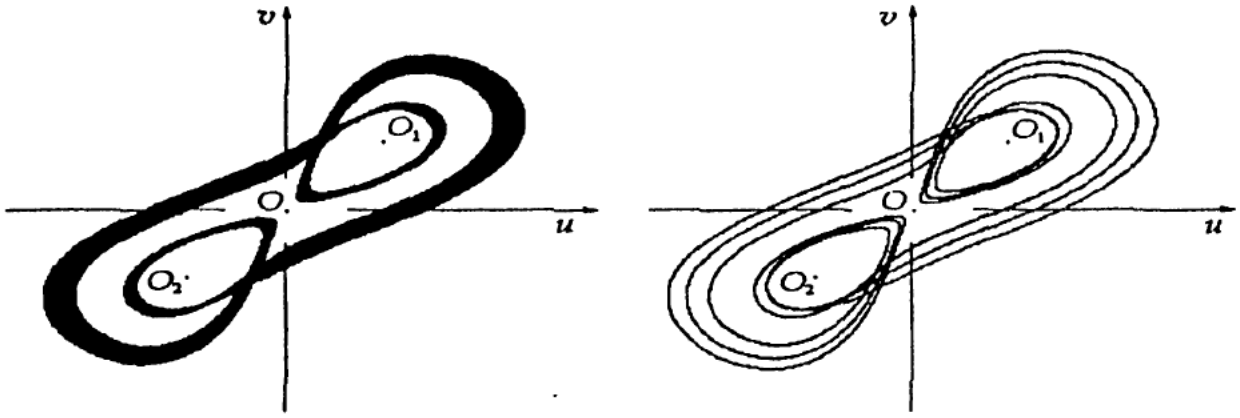

Рис. 3.20. Слева проекция нерегулярного аттрактора, образованного слиянием двух субгармонических аттракторов при $r = 155.41$, справа – одного из циклов самоорганизации при $r = 153.35$.

В результате по окончании полного двойного гомоклинического каскада бифуркаций при $r \approx 33.2189$ в системе Лоренца рождается полный двойной гомоклинический аттрактор, который отличен от аттрактора Лоренца, *являющегося неполным двойным гомоклиническим* аттрактором. Для сравнения на рис. 3.25 представлены аттрактор Лоренца ($b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$) и полный двойной гомоклинический аттрактор ($b = 8/3$, $\sigma = 10.5$, $r \approx 33.2189$).

Дальнейшие исследования полного двойного гомоклинического аттрактора в системе Лоренца при $\sigma = 10,\ b = 0.5$ дают веские основания сомневаться не только во фрактальности, но и в структурной устойчивости классического аттрактора Лоренца ($\sigma = 10,\ b = 8/3$) при всех значениях $r \in (r_a,\ r^*)$.

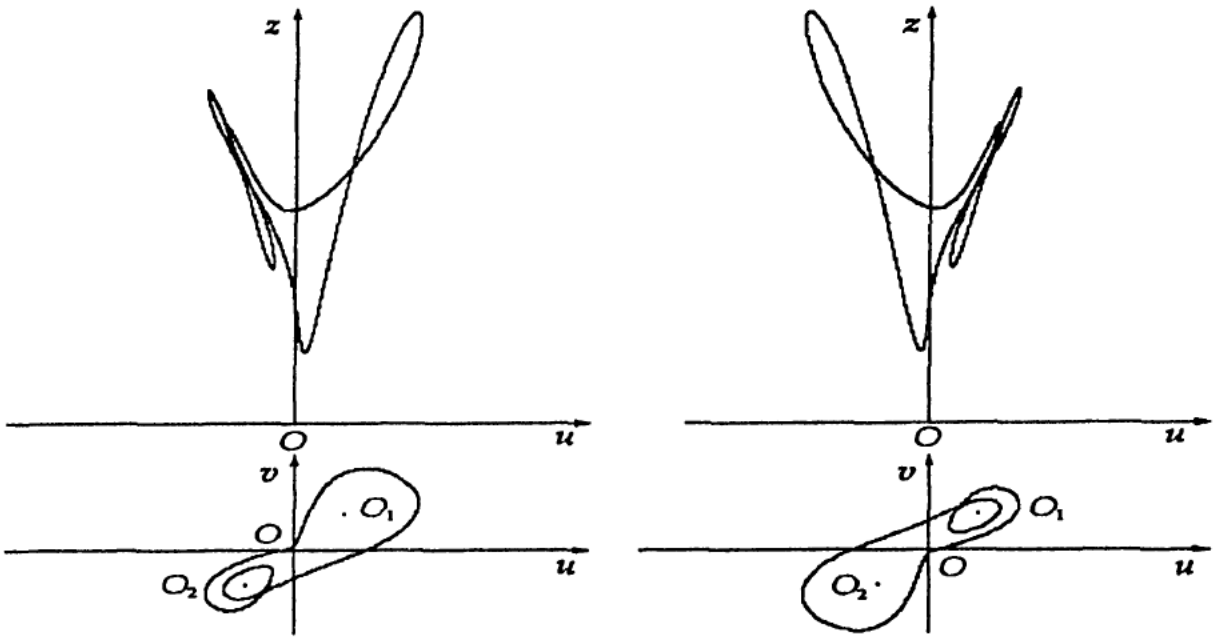

Рис. 3.21. Проекции устойчивых циклов C_1^- (слева) и C_1^+ (справа) при $r = 107.75$.

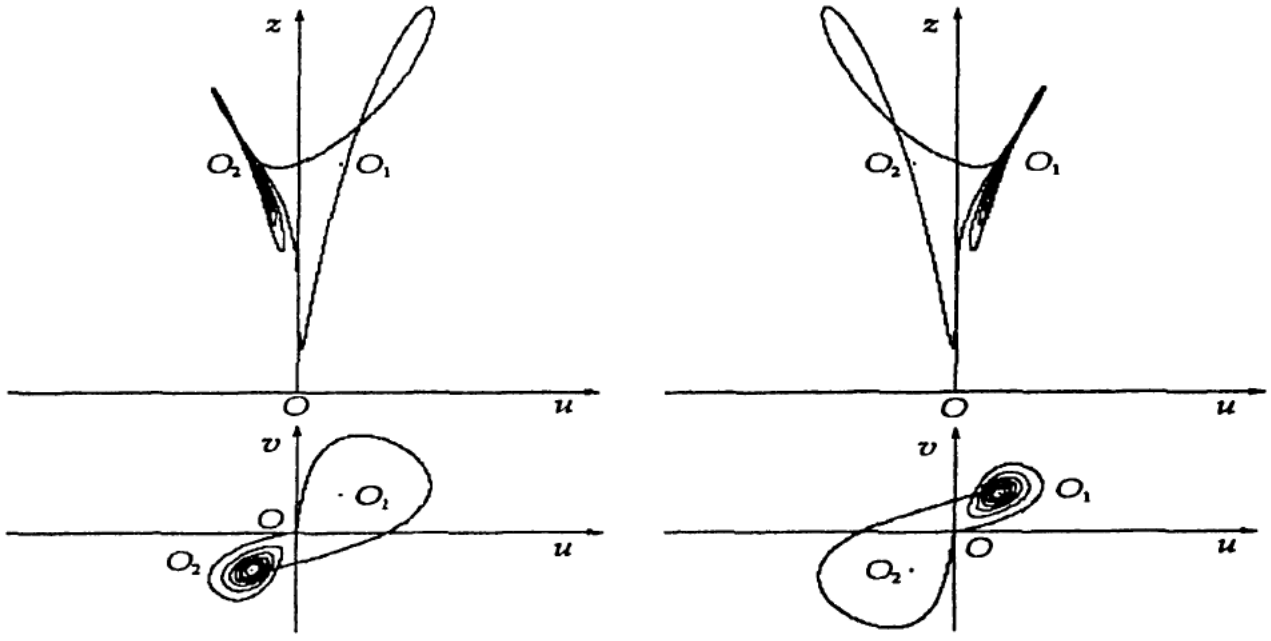

Рис. 3.22. Проекции устойчивых циклов C_6^- (слева) и C_6^+ (справа) при $r = 47.7788,\ z_0 = 13.72$.

Действительно, в случае $\sigma = 10,\ b = 0.5$ неподвижные точки O_1 и O_2 теряют устойчивость при критическом значении $r_3 \approx 15.882$, а полный двойной гомоклинический аттрактор формируется при значе-

нии $r^* \approx 234.177$. При значениях $r < r^*$ в системе Лоренца появляются особенности, отличные от сценария с классическим набором параметров. Так, с уменьшением значений параметра r наблюдается обратный двойной гомоклинический каскад, т.е. происходит сброс витков у устойчивых циклов $C_n^{\pm}$ и $C_{nn}^{\pm}$. Отметим, что при классическом наборе параметров это не наблюдается. При значении $r \approx 212.32$ в системе существует устойчивый цикл C_{44} который ранее наблюдался также устойчивым при $r \approx 265.4$, большем чем r^* (рис. 3.26).

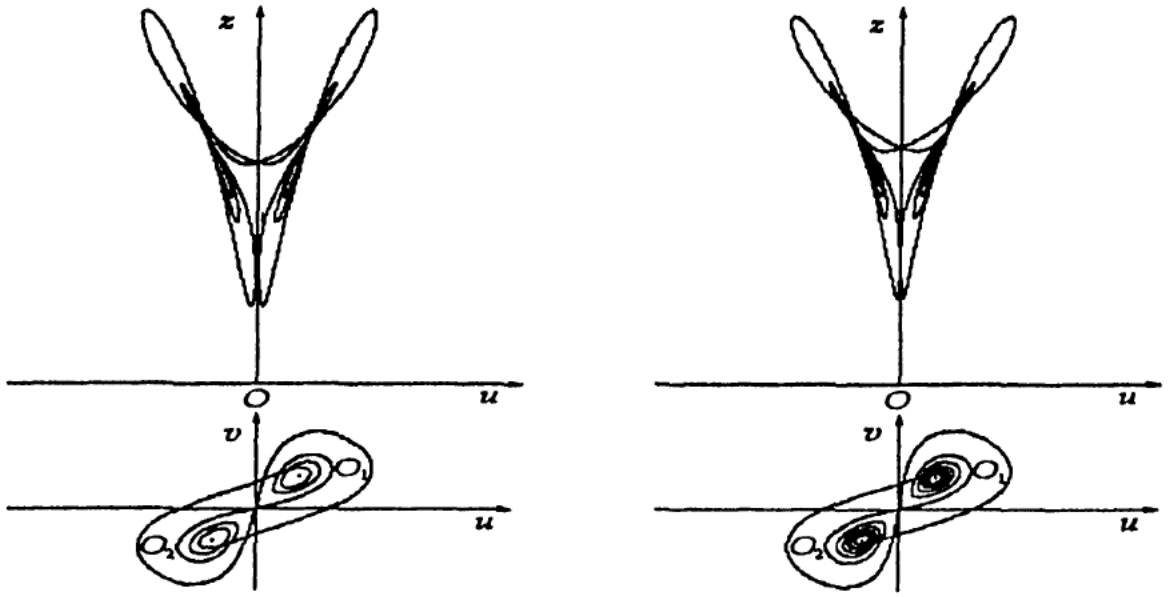

Рис. 3.23. Проекции устойчивых циклов C_{33} и C_{66} соответственно при $r = 74.09$ и $r = 50.8682$.

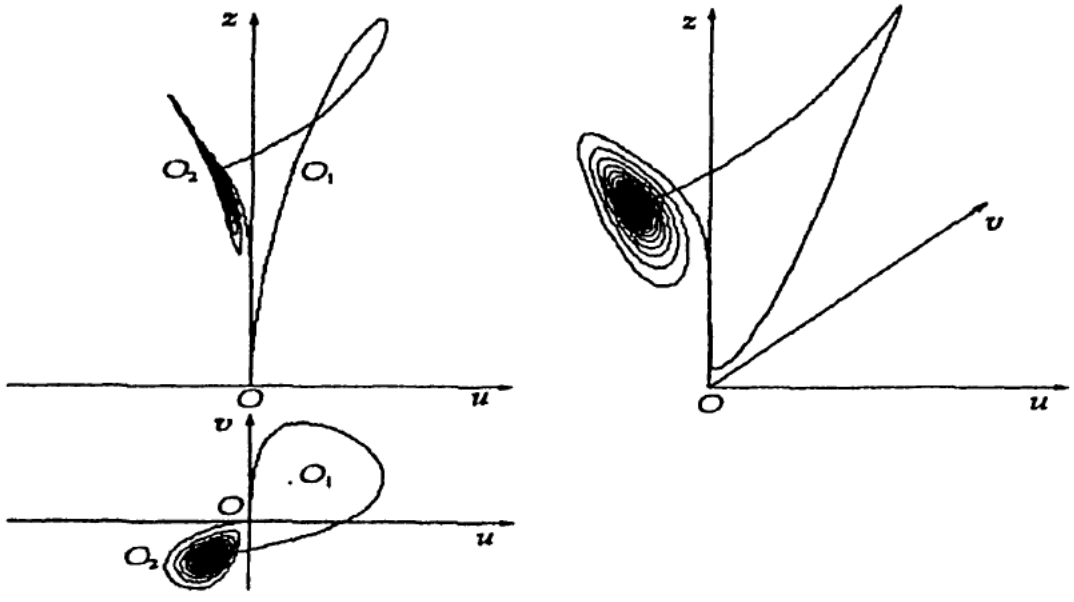

Рис. 3.24. Проекции и трехмерное изображение цикла C_{121}^{-} при $r \approx 33.21896$.

Полученные результаты дают основание утверждать, что по всей видимости, в любой окрестности значения r^* параметра r существуют системы с устойчивыми предельными циклами, которые мы не можем

наблюдать исключительно по причине вычислительных ошибок вследствие некорректности решаемой задачи.

Отметим также, что при фиксированных значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 0.5$ наблюдаются устойчивые циклы $C_0^{\pm}$ в интервале $19 < r < 38.5$, а при дальнейшем уменьшении r начинает формироваться очередной двойной гомоклинический каскад бифуркаций, начинающийся каскадом удвоения периода и продолжающийся субгармоническим каскадом бифуркаций. Так, например, при $r \approx 18.1$ отмечаются устойчивые циклы $C_0^{\pm}$ периода четыре, а при $r \approx 17.76$ циклы периода три.

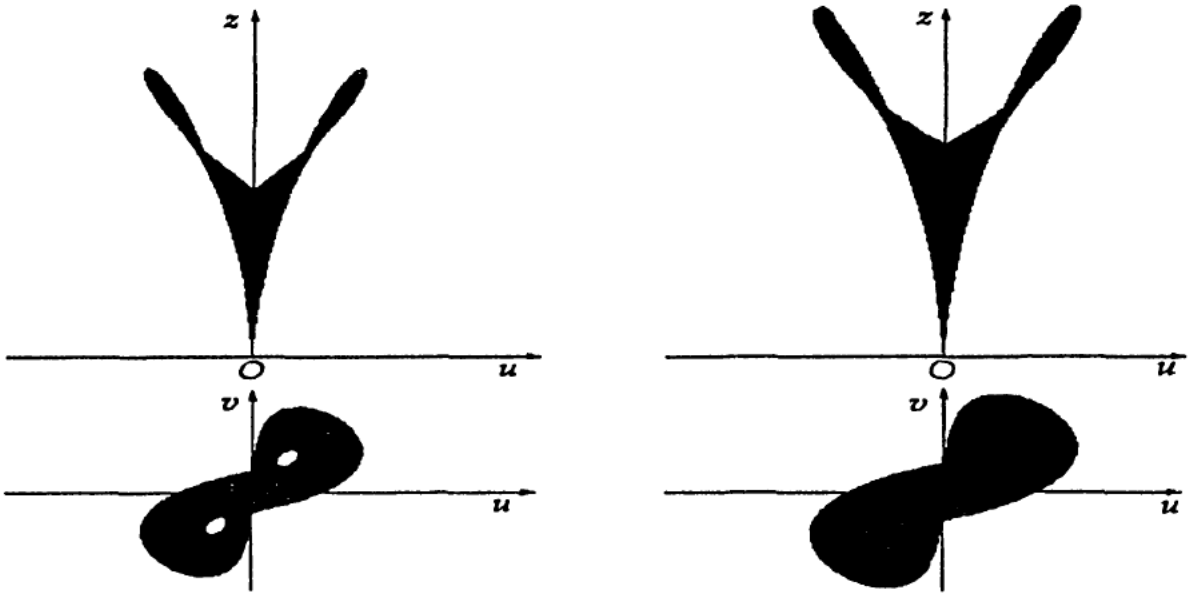

Рис. 3.25. Проекции аттрактора Лоренца при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ (слева) и полного двойного гомоклинического аттрактора при $b = 8/3$, $\sigma = 10.5$, $r = 33.2189$.

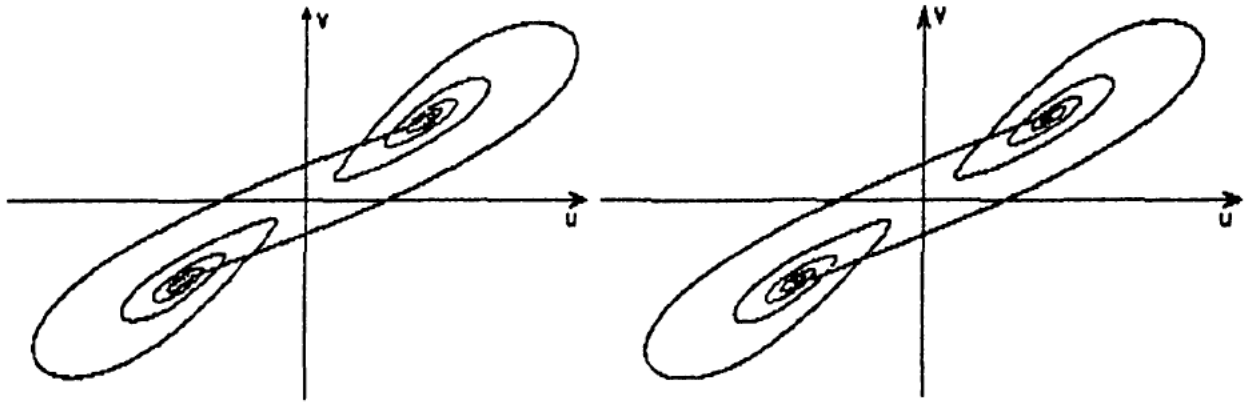

Рис. 3.26. Проекции на плоскость (u, v) фазового портрета устойчивого цикла C_{44} при $r = 265.4$ (слева) и при $r = 212.32$ (справа).

При значениях $r < 16.2$ можно отметить еще одну интересную особенность – возникновение устойчивого цикла C_{22}, который существует до значения $r \approx 15.1$, где он начинает двоиться. Следовательно,

при $r < r_3 \approx 15.882$ в системе имеются три аттрактора: два устойчивых фокуса O_1 и O_2 и устойчивый цикл. Таким образом, в отличие от классического сценария, в момент потери устойчивости точками O_1 и O_2, мы в качестве устойчивого предельного множества имеем предельный цикл, а не хаотический аттрактор. При дальнейшем уменьшении значений параметра r удалось найти устойчивые циклы $C_2^{\pm}$ при $r \approx 13.07$, C_{33} при $r \approx 12.95$ и некоторые другие устойчивые циклы вплоть до значений $r \approx 12.29$. При $r < r_a \approx 11.78$ в системе уже наблюдается метастабильный хаос. Таким образом, хаотический аттрактор, если и существует, то только в интервале изменения параметра $11.78 < r < 12.29$. Хотя более правдоподобной выглядит гипотеза о том, что и в этом интервале изменения значений бифуркационного параметра устойчивые циклы существуют почти всюду, за исключением точек накопления значений параметра r (предельных значений отдельных каскадов бифуркаций), что, впрочем, полностью согласуется с теорией сингулярных аттракторов, изложенной в главе 4 настоящей книги.

При переходе r через значение r_a система переходит в состояние метастабильного хаоса. При $r = r_2 \approx 10.103$ в системе происходит бифуркация "точка-цикл". Траектории, выходящие из окрестности нуля не стремятся к точкам O_1 и O_2 , а наматываются на границы их областей притяжения. Однако в классическом случае траектория, соскочив с границы и не попав в устойчивую точку, будет вечно двигаться по аттрактору ($r_a \approx 23.9 < r_2 \approx 24.06$ при $b = 8/3$ и $\sigma = 10$). В рассматриваемом случае траектория, не попав в устойчивую точку сразу, все равно рано или поздно стянется в O_1 или O_2, так как их области устойчивости достаточно велики, а система продолжает находится в области метастабильного хаоса ($r_2 \approx 10.103 < r_a \approx 11.78$ при $b = 0.5$ и $\sigma = 10$). Таким образом, это отличие от классического сценария еще раз подтверждает вывод работы [29] о том, что точка r_2 не имеет никакого отношения к образованию аттрактора Лоренца. Метастабильный хаос в системе продолжается до значения $r = r_1 \approx 6.493$, при котором бифуркация гомоклинической бабочки полностью разрушает остатки аттрактора, уничтожая последние из составляющих его неустойчивых циклов. При $1 < r < r_1$ траектории стягиваются к ближайшей устойчивой точке O_1 или O_2.

Таким образом, вопреки традиционному сценарию классический (и любой другой) аттрактор системы уравнений Лоренца рождается из устойчивых предельных множеств (циклов) в результате субгармонического и (или) гомоклинического каскадов мягких бифуркаций. Теория таких аттракторов изложена в главе 4.

3.1.4. Бифуркации гомоклинических и гетероклинических контуров в системе уравнений Лоренца. Применим подход, изложенный в п. 2.4.3 главы 2 для нахождения в пространстве параметров (σ, b, r) бифуркационных поверхностей и кривых существования в системе уравнений Лоренца (3.1) гомоклинических петель сепара-

трис и гетероклинических контуров особых точек.

Гетероклинические контуры, соединяющие седло-узел с седло-фокусом. Рассмотрим систему Лоренца (3.1) в области значений параметров $\sigma > 0$, $b > 0$, $r > 1$ и запишем ее в удобном для применения метода виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(\sigma+1)y - \sigma(z-r+1)x, \\ \dot{z} &= x^2 + xy/\sigma - bz. \end{aligned} \tag{3.8}$$

При значениях $r > 1$ система (3.8) имеет седло-узел $O(0,0,0)$ с вещественными собственными значениями матрицы линеаризации

$$\nu_1 = -\frac{\sigma+1}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-1)} < 0,$$

$$\nu_2 = -\frac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-1)} > 0, \qquad \nu_3 = -b < 0.$$

Вместе с этим система (3.8) имеет два седло-фокуса

$$O_{1,2}\left(\pm\sqrt{b(r-1)},\ 0,\ r-1\right)$$

с одним отрицательным вещественным собственным значением λ_1 и двумя комплексно сопряженными собственными значениями $\lambda_{2,3}$, имеющими положительные вещественные части при значениях $r > r_c = \sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ и удовлетворяющими характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0. \tag{3.9}$$

Задача состоит в определении таких значений параметров b, σ, r, при которых в системе (3.8) существуют гетероклинические контуры, соединяющие седло-узел O с седло-фокусом O_1. Заметим, что при тех же значениях параметров в системе будет одновременно существовать и контур, соединяющий седло-узел O с седло-фокусом O_2.

В соответствии с изложенной выше теорией преобразуем систему (3.8) к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\sigma+1)y - \sigma(z-r+1)x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x^2 + xy/\sigma - bz}{y}. \tag{3.10}$$

Система (3.10) имеет особенности в точках O и $O_{1,2}$, так как здесь $y = 0$. Используя разложения в точке O в ряд Тейлора, найдем

$$y'(0) = -\frac{(\sigma+1)y'(0) - \sigma(r-1)}{\quad}, \quad z'(0) = -\frac{bz'(0)}{\quad},$$

откуда следует, что $y'(0) = \nu_2 > 0,\ z'(0) = 0$. Далее также получим

$$z''(0) = \frac{2 + 2y'(0)/\sigma - bz''(0)}{2y'(0)} = \frac{2(1 + \nu_2/\sigma)}{2\nu_2 + b} > 0.$$

Аналогично вычислим в точке O_1

$$y'\left(-\sqrt{b(r-1)}\right) = \lambda_1 < 0,\ z'\left(-\sqrt{b(r-1)}\right) = -\frac{\sqrt{b(r-1)}(2 + \lambda_1/\sigma)}{b + \lambda_1} > 0,$$

где λ_1 – отрицательный вещественный корень характеристического уравнения (3.9).

Далее при малом $\varepsilon > 0$ численно решаем систему (3.8) в прямом времени с начальными условиями

$$x(0) = \varepsilon,\ y(0) = y'(0)\varepsilon = \nu_2\varepsilon,\ z(0) = \frac{z''(0)\varepsilon^2}{2} = \frac{1 + \nu_2/\sigma}{2\nu_2 + b}\varepsilon^2$$

и получаем траекторию $(x^+(t),\ y^+(t),\ z^+(t))$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, исходящей из седло-узла O. Затем численно решаем систему (3.8) в обратном времени с начальными условиями

$$x(0) = -\sqrt{b(r-1)} + \varepsilon, \quad y(0) = \lambda_1\varepsilon, \quad z(0) = r - 1 - \frac{\sqrt{b(r-1)}(2 + \lambda_1/\sigma)}{b + \lambda_1}\varepsilon$$

и получаем траекторию $(x^-(t),\ y^-(t),\ z^-(t))$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, входящей в седло-фокус O_1. Сшивку траекторий осуществляем на оси x в моменты времени t^+ и t^-, когда $y^+(t^+) = y^-(t^-) = 0$. Для выполнения последнего условия необходимо и достаточно решить систему двух уравнений

$$\begin{aligned} x^+(\sigma, b, r, t^+) &= x^-(\sigma, b, r, t^-), \\ z^+(\sigma, b, r, t^+) &= z^-(\sigma, b, r, t^-) \end{aligned} \tag{3.11}$$

относительно трех параметров. Поэтому бифуркация, связанная с существованием в системе Лоренца гетероклинического контура, имеет коразмерность два, то есть бифуркационная поверхность является частью линии в пространстве параметров.

На рис. 3.27 показаны проекции (x, y) и (x, z) гетероклинического контура системы (3.8), найденные в результате численного решения системы (3.11) относительно параметров σ и r при $b = 8/3$, $\varepsilon = 10^{-6}$. Приведенные результаты показывают, что для значения $b = 8/3$ контур существует только при $\sigma = 10.1672937 \pm 2 \cdot 10^{-7}$ и $r = 30.868108 \pm 2 \cdot 10^{-6}$. Отсюда следует, что в классическом случае ($\sigma = 10,\ b = 8/3$) система Лоренца не имеет гетероклинического контура ни при каком значении $1 < r < \infty$.

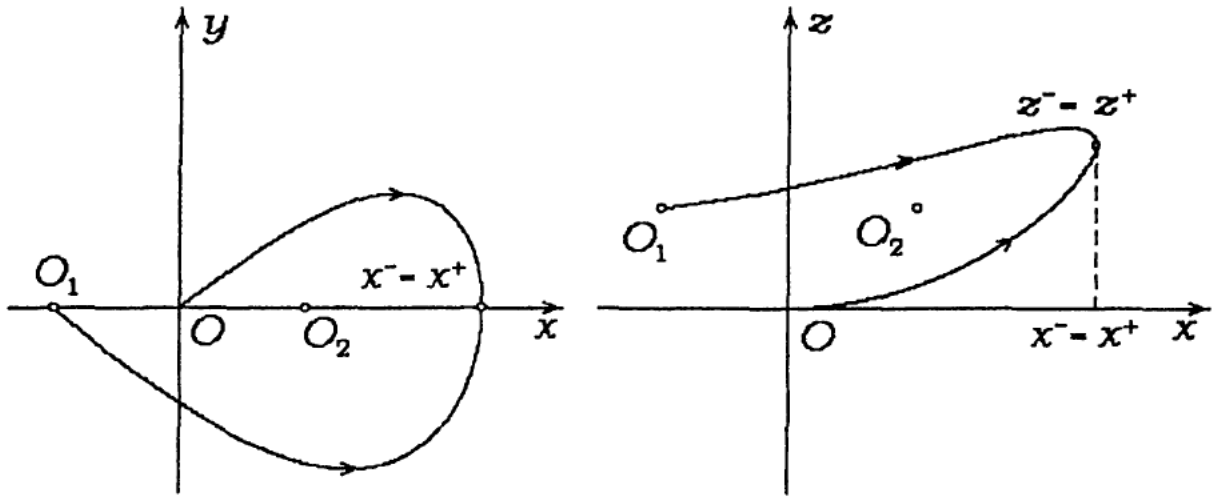

Рис. 3.27. Построение гетероклинического контура, соединяющего седло-узел с седло-фокусом в системе Лоренца.

Вторую часть гетероклинического контура, изображенного на рис. 3.27, составляет сепаратриса, накручивающаяся на седло-фокус O_1 при $t \to -\infty$ и стремящаяся к седло-узлу O при $t \to +\infty$ вдоль его двумерного устойчивого многообразия W^s. Эта сепаратриса входит в точку O в проекции (x, y) под углом, тангенс которого равен $y'(0) = \nu_1 < 0$. Однозначно замкнуть контур в проекции (x, y) дает возможность выбора свободного параметра – начальной фазы φ сепаратрисы при раскрутке вокруг седло-фокуса O_1. Замкнуть контур в проекции (x, z) дает возможность выбора другого свободного параметра – коэффициента $\varkappa$ в представлении $z(x) \approx (\varkappa x)^{-b/\nu_1}$, $x \to 0$, вытекающем из второго уравнения системы (3.10).

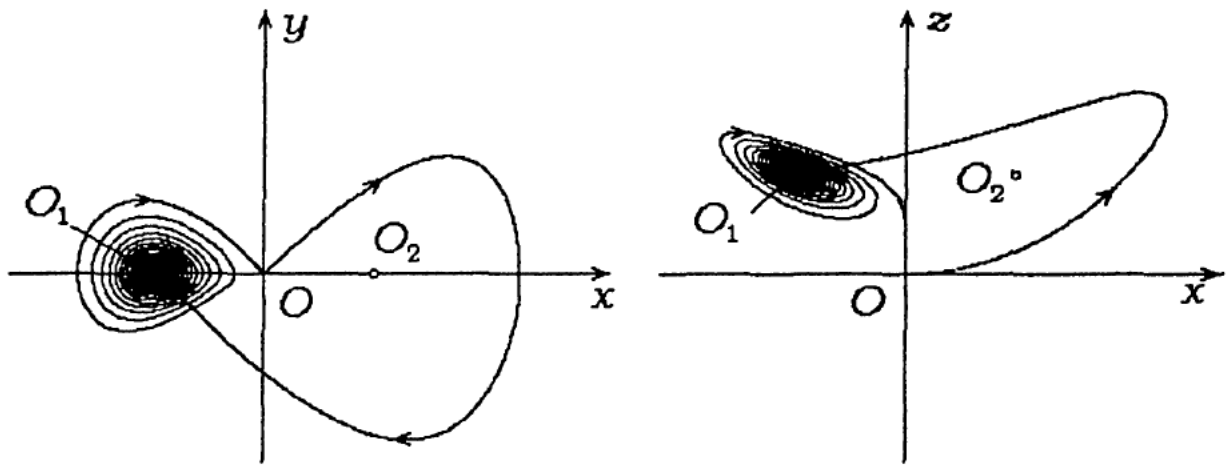

Рис. 3.28. Проекции полного гетероклинического контура, соединяющего седло-узел с седло-фокусом (для $b = 8/3$ получено $\sigma = 10.1672937 \pm 2 \cdot 10^{-7}$ и $r = 30.868108 \pm 2 \cdot 10^{-6}$).

Проекции (x, y) и (x, z) полного гетероклинического контура системы Лоренца при $b = 8/3$ ($\sigma = 10.1672937$, $r = 30.868108$) показаны на рис. 3.28.

Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса. Применим изложенный подход к нахождению двумерной полуповерхности гомоклинических контуров седло-фокусов O_1 и O_2 системы Лоренца (3.8) в области $b > 0$, $\sigma > 0$, $r > r_c$. Матрица линеаризации в точке O_1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -(\sigma+1) & \sigma\sqrt{b(r-1)} \\ -2\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)}/\sigma & -b \end{pmatrix}$$

имеет отрицательное вещественное собственное значение λ_1 и два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$, удовлетворяющих характеристическому уравнению (3.9). Сделаем замену $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = C(u, v, w)^{\mathrm{T}}$. Прямой подстановкой можно убедиться в том, что если матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} & 0 & \dfrac{\sigma\sqrt{b(r-1)}}{\lambda_1(\sigma+1+\lambda_1)} \\ 1 & -\dfrac{\beta}{\alpha} & \dfrac{\sigma\sqrt{b(r-1)}}{\sigma+1+\lambda_1} \\ \dfrac{\beta^2-\alpha(\sigma+1+\alpha)}{-\alpha\sigma\sqrt{b(r-1)}} & \dfrac{\beta(\sigma+1+2\alpha)}{-\alpha\sigma\sqrt{b(r-1)}} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь начальные условия $u_0 = \varepsilon\cos\varphi$, $v_0 = \varepsilon\sin\varphi$, $w_0 = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sqrt{b(r-1)} + \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\alpha}, \\ y(0) &= \varepsilon\cos\varphi - \frac{\beta\varepsilon\sin\varphi}{\alpha}, \\ z(0) &= r-1-\frac{\beta^2-\alpha(\sigma+1+\alpha)}{\alpha\sigma\sqrt{b(r-1)}}\varepsilon\cos\varphi - \frac{\beta(\sigma+1+2\alpha)}{\alpha\sigma\sqrt{b(r-1)}}\varepsilon\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решая систему (3.8) в прямом времени с начальными условиями (3.12), получим траекторию $(x^+(t),\ y^+(t),\ z^+(t))$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, выходящей из седло-фокуса O_1. Затем, решая систему (3.8) в обратном времени с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sqrt{b(r-1)} + \varepsilon, \\ y(0) &= \lambda_1\varepsilon, \\ z(0) &= r-1-\frac{\sqrt{b(r-1)}(2+\lambda_1/\sigma)}{b+\lambda_1}\varepsilon, \end{aligned}$$

получаем траекторию $(x^-(t),\ y^-(t),\ z^-(t))$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, входящей в седло-фокус O_1. Сшивку траекторий осуществляем в моменты t^+ и t^-, когда $y^+(t^+) = y^-(t^-) = 0$. Фазу $\varphi(\varepsilon, \mu)$ выбираем таким образом, чтобы $x^+(\sigma, b, r, t^+, \varphi) = x^-(\sigma, b, r, t^-, \varphi)$. Оставшееся условие получения гомоклинического контура с любой точностью

$$z^+(\sigma, b, r, t^+, \varphi) = z^-(\sigma, b, r, t^-, \varphi) \tag{3.13}$$

задает в пространстве параметров (σ, b, r) бифуркационную полуповерхность.

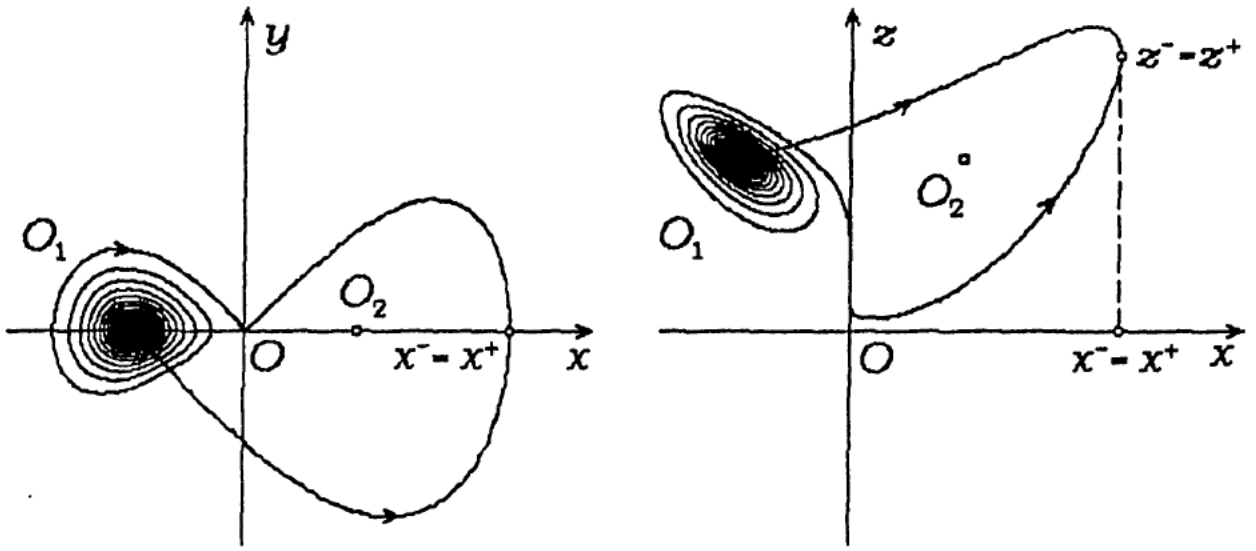

Рис. 3.29. Построение гомоклинической петли сепаратрисы седло-фокуса O_1 в системе Лоренца (для $b = 8/3$ и $\sigma = 10.5$ получено $r = 33.21926 \pm 1 \cdot 10^{-5}$).

На рис. 3.29 изображены проекции (x, y) и (x, z) гомоклинического контура системы (3.8), найденные в результате численного решения уравнения (3.13) относительно параметра r при $b = 8/3$, $\sigma = 10.5$ и $\varepsilon = 10^{-5}$. Заметим, что в системе Лоренца одновременно с гомоклинической петлей сепаратрисы седло-фокуса O_1 существует симметричная ей относительно оси z гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса O_2. Сечение бифуркационной полуповерхности плоскостью $b = 8/3$ является полупрямой в плоскости (σ, r), начинающейся в точке $\sigma = 10.1672937$, $r = 30.868108$ существования гетероклинического контура (см. рис. 3.28). Таким образом, кривая гетероклинических контуров в пространстве параметров (σ, b, r) системы Лоренца является границей (предельным случаем) полуповерхности гомоклинических петель сепаратрис седло-фокусов. В классическом случае прямая $\sigma = 10$, $b = 8/3$ не пересекает эту полуповерхность. Поэтому в классическом случае в системе Лоренца возможно существование только неполного двойного гомоклинического аттрактора. Заметим также, что полученное значение параметра r существования гомоклинической петли сепаратрисы седло-фокуса системы Лоренца при $\sigma = 10.5$, $b = 8/3$ уточняет значение, найденное авторами в работе [29] и в п. 3.1.3 другим методом.

Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-узла. Применим наш подход к нахождению двумерной полуповерхности гомоклинических петель сепаратрис седло-узла O системы Лоренца (3.8) в области $\sigma > 0,\ b > 0, r > 1$. Заменой $x^2 = v,\ y = xu,\ z = z$ приведем систему (3.8) к более удобному для применения предлагаемого метода виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(u-\nu_1)(u-\nu_2) - \sigma z, \\ \dot{v} &= 2uv, \\ \dot{z} &= v(1+u/\sigma) - bz. \end{aligned} \tag{3.14}$$

При этом наличие петли сепаратрисы седло-узла O системы (3.8) эквивалентно наличию гетероклинического контура системы (3.14), соединяющего две ее особые точки $P_1(\nu_1, 0, 0)$ и $P_2(\nu_2, 0, 0)$, где как отмечалось выше, величины

$$\nu_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \mp \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} + \sigma(r-1)},\ \nu_1 < 0,\ \nu_2 > 0,$$

являются собственными значениями матрицы линеаризации системы Лоренца (3.8) в седло-узле $O(0,0,0)$. Выберем координату u, на которой расположены особые точки P_1 и P_2 системы (3.14) и, в соответствии с изложенным выше, преобразуем систему (3.14) к виду

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2uv}{f(u)+\sigma z}, \qquad \frac{dz}{du} = -\frac{v(1+u/\sigma) - bz}{f(u)+\sigma z}, \tag{3.15}$$

где $f(u) = (u-\nu_1)(u-\nu_2)$. Используя разложение в ряд Тейлора для выражений в числителе и в знаменателе правых частей системы (3.15), найдем, что в точке $P_2(\nu_2, 0, 0)$

$$v'(\nu_2) = \frac{2v'(\nu_2)\nu_2}{\nu_1 - \nu_2 - \sigma z'(\nu_2)},\ z'(\nu_2) = \frac{v'(\nu_2)(1+\nu_2/\sigma) - bz'(\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2 - \sigma z'(\nu_2)}.$$

Из последней системы уравнений при $v'(\nu_2) \neq 0$ получаем, что $\nu_1 - \nu_2 - \sigma z'(\nu_2) = 2\nu_2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} z'(\nu_2) &= \frac{\nu_1 - 3\nu_2}{\sigma} < 0, \\ v'(\nu_2) &= \frac{z'(\nu_2)(2\nu_2+b)}{1+\nu_2/\sigma} = \frac{(\nu_1-3\nu_2)(2\nu_2+b)}{\sigma+\nu_2} < 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

В точке P_1, напротив, $v'(\nu_1) = 0$. Поэтому $\nu_2 - \nu_1 - \sigma z'(\nu_1) = -b$ и, следовательно, $z'(\nu_1) = (b + \nu_2 - \nu_1)/\sigma$.

Для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ численно решаем систему (3.14) в прямом времени с начальными условиями

$$u(0) = \nu_2 - \varepsilon,\ v(0) = -v'(\nu_2)\varepsilon,\ z(0) = -z'(\nu_2)\varepsilon,$$

где значения $v'(\nu_2)$ и $z'(\nu_2)$ определены в соответствии с формулами (3.16). Получим траекторию $(u^+(t), v^+(t), z^+(t))$, сколь угодно близкую к сепаратрисе, исходящей из особой точки $P_2(\nu_2, 0, 0)$ системы (3.14). Сшивку траекторий будем осуществлять при $u = 0$, то есть прекратим вычисление траектории, выпущенной из окрестности точки P_2 в момент t^+, когда $u^+(t^+) = 0$. При этом будем иметь значения $v^+(t^+)$ и $z^+(t^+)$.

Аналогично, из окрестности особой точки $P_1(\nu_1, 0, 0)$ выпустим в обратном времени однопараметрическое семейство траекторий $(u^-(t, \varkappa), v^-(t, \varkappa), z^-(t, \varkappa))$, сколь угодно близких к сепаратрисам, входящим в точку P_1. Для этого численно решим в обратном времени систему (3.14) с начальными условиями

$$u(0) = \nu_1 + \varepsilon,\ v(0) = (\varkappa\varepsilon)^{-2\nu_1/b},\ z(0) = z'(\nu_1)\varepsilon,$$

где $\varkappa$ – произвольная постоянная.

Чтобы понять, откуда берется однопараметрическое семейство начальных условий в точке P_1 для функции $v(t)$, сделаем в (3.14) замену переменой $v = w^{-2\nu_1/b}$. Тогда $\dot v = -2w^{-2\nu_1/b-1}\dot w\nu_1/b$. С другой стороны $\dot v = 2w^{-2\nu_1/b}u$. Следовательно,

$$\dot w = -\frac{b}{\nu_1}wu \qquad \text{и} \qquad w'(\nu_1) = -\frac{bw'(\nu_1)}{\nu_2 - \nu_1 - \sigma z'(\nu_1)}.$$

Последнее условие выполнено при любом $w'(\nu_1) = \varkappa = \text{const}$, так как $\nu_2 - \nu_1 - \sigma z'(\nu_1) = -b$. Поэтому начальное значение функции $w(t)$ имеет вид $w(0) = \varkappa\varepsilon$, что порождает начальное условие для функции $v(t)$ в точке P_1 в виде $v(0) = (\varkappa\varepsilon)^{-2\nu_1/b}$.

Выберем теперь момент времени t^- и значение $\varkappa$ таким образом, что

$$u^-(t^-, \varkappa) = 0,\ v^-(t^-, \varkappa) = v^+(t^+),$$

то есть замкнем проекцию гетероклинического контура системы (3.14) в плоскости (u, v). Тогда для получения всего гетероклинического контура с заданной точностью необходимо и достаточно решить одно уравнение

$$z^+(\sigma, b, r, t^+) = z^-(\sigma, b, r, t^-, \varkappa), \tag{3.17}$$

которое определяет в пространстве параметров (σ, b, r) бифуркационную поверхность. На рис. 3.30 показаны проекции (u, v) и (u, z) гетероклинического контура системы (3.14), полученные в результате численного решения уравнения (3.17) относительно параметра r при фиксированных значения $b = 8/3$, $\sigma = 10$ и $\varepsilon = 10^{-6}$. При этом найдены значения постоянной $\varkappa = 0.293356 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ и системного параметра $r = 13.926560 \pm 5 \cdot 10^{-6}$.

Найденный гетероклинический контур системы (3.14) порождает, согласно выражениям $x = \pm\sqrt{v}$, $y = xu$, две петли сепаратрисы седло-узла исходной системы Лоренца (3.8), формирующие так называемую

гомоклиническую бабочку. На рис. 3.31 изображены проекции (x, y) и (x, z) гомоклинической бабочки исходной системы уравнений Лоренца (3.8), соответствующей классическим значениям параметров $b = 8/3$, $\sigma = 10$. При этом, как уже было отмечено выше, удалось уточнить классическое значение параметра r, при котором имеет место гомоклиническая бабочка.

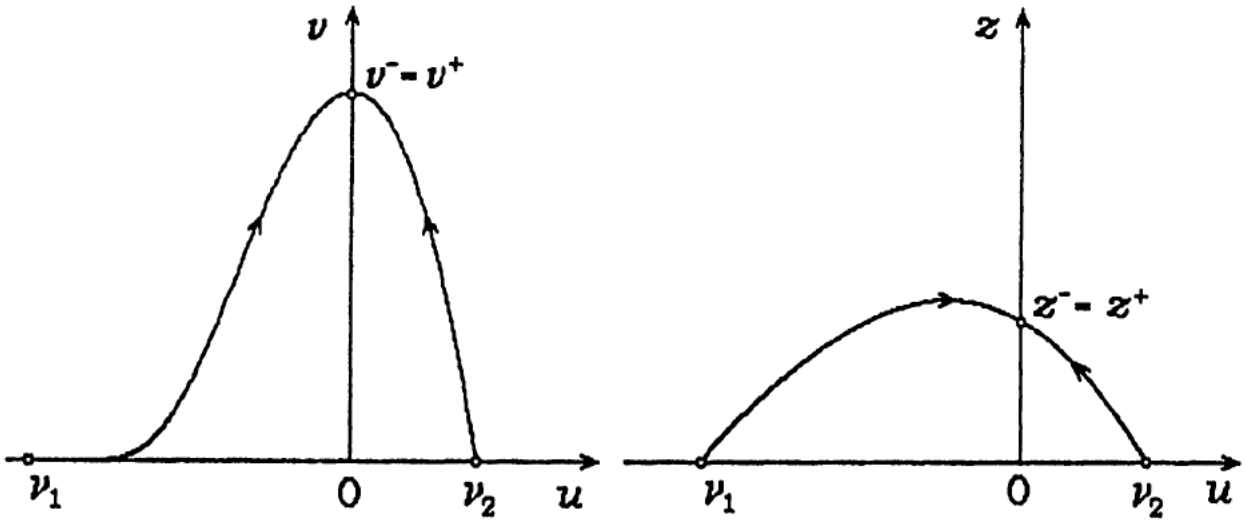

Рис. 3.30. Построение гомоклинической петли сепаратрисы седло-узла (гомоклинической бабочки) в системе Лоренца.

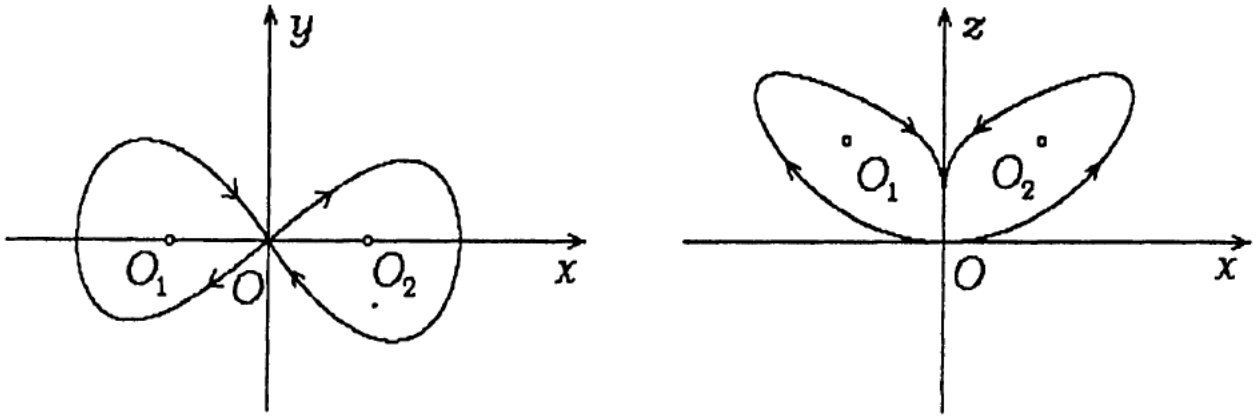

Рис. 3.31. Проекции гомоклинической бабочки системы Лоренца (для $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ получено $r = 13.926560 \pm 5 \cdot 10^{-6}$.)

Обратим внимание на почти четырнадцатый порядок касания решения $v(u)$ системы (3.14) оси u в особой точке P_1 и на примерно седьмой порядок касания решения $x(z)$ системы (3.8) оси z в седло-узле O (рис. 3.31). Неудивительно, что никакой метод численного интегрирования не в состоянии справиться с вычислением таких супер-неустойчивых траекторий в окрестности седло-узла O, какие имеют место в системе Лоренца.

3.1.5. Диаграммы нелокальных бифуркаций в системе уравнений Лоренца. Развитая в предыдущем разделе методика нахождения гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек системы уравнений Лоренца дает возможность построить численно бифуркационные поверхности рассмотренных выше бифуркаций в пространстве параметров $(\sigma,\ b,\ r)$. Такое построение было осуще-

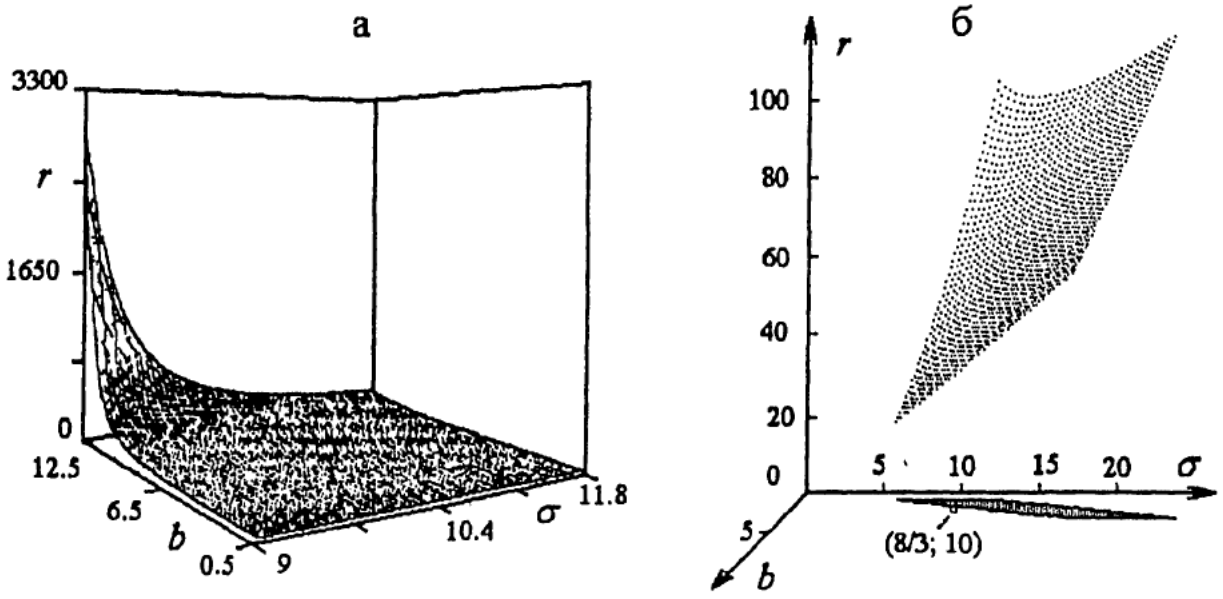

Рис. 3.32. Бифуркационная поверхность существования гомоклинической бабочки в области параметров $b \in (0.5,\ 12.5)$, $\sigma \in (9,\ 11.8)$ (а) и бифуркационная поверхность существования гомоклинической петли сепаратрисы седло-фокуса в области параметров $b \in (0.5,\ 4.5)$, $\sigma \in (5.9,\ 22.8)$ (б).

ствлено в работе [78]. На рис. 3.32 изображены часть бифуркационной поверхности существования гомоклинической бабочки и часть бифуркационной полуповерхности существования гомоклинической петли сепаратрисы седло-фокуса. При нахождении первой поверхности, как и ожидалось, подтвердилось неравенство Чена [73] $3\sigma > 2b + 1$ – необходимое и достаточное условие существования значения параметра r, при котором система Лоренца имеет две гомоклинические петли сепаратрис седло-узла.

3.2. Комплексная система уравнений Лоренца.

Система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - aY, \\ \dot{Z} &= -bZ + \frac{1}{2}(X^*Y + XY^*), \end{aligned} \tag{3.18}$$

записанная относительно двух комплексных переменных X и Y и одной вещественной переменной Z, имеющая вещественные параметры

σ, b и комплексные параметры $r = r_1 + ir_2$ и $a = 1 - ie$, называется комплексной системой уравнений Лоренца [65].

Покажем, что в системе (3.18) реализуется сценарий перехода к хаосу через субгармонический (по одной частоте) каскад бифуркаций двумерных торов. Как уже отмечалось выше, основной характерной чертой такого каскада является рождение устойчивого двумерного тора периода три, понимаемого как прямое произведение простого цикла на цикл утроенного периода.

Вводя новые вещественные переменные $x_1 = \mathrm{Re}X$, $x_2 = \mathrm{Im}X$, $y_1 = \mathrm{Re}Y$, $y_2 = \mathrm{Im}Y$, и полагая $e = 0$, систему (3.18) можно переписать в виде пятимерной системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ \dot{x}_2 &= -\sigma x_2 + \sigma y_2, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z + r_1 x_1 - y_1 - r_2 x_2, \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z + r_1 x_2 - y_2 + r_2 x_1, \\ \dot{z} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - bz, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $\sigma > 0$, $b > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. Система (3.19) имеет единственное положение равновесия – начало координат, устойчивость которого определяется собственными значениями якобиана $J(0)$ в данной точке

$$J(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & \sigma & 0 \\ r_1 & -r_2 & -1 & 0 & 0 \\ r_2 & r_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

В характеристическом уравнении

$$(\lambda + b)(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0,$$

где

$$a_1 = 2(\sigma + 1),\ a_2 = (\sigma + 1)^2 + 2\sigma(1 - r_1),$$
$$a_3 = 2\sigma(\sigma + 1)(1 - r_1) + 2\sigma r_2,\ a_4 = \sigma^2((1 - r_1)^2 + r_2^2),$$

одно собственное значение $\lambda = -b$ отрицательно. Поэтому устойчивость положения равновесия зависит от корней полинома четвертого порядка. *Условия* Рауса-Гурвица

$$a_1 > 0,\ a_1 a_2 - a_3 > 0,\ a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 > 0,\ a_4 > 0,$$

определяющие устойчивость этого полинома, равносильны системе из двух неравенств

$$a_1 a_2 - a_3 > 0,\ a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 > 0.$$

Подставляя в эту систему приведенные выше выражения для коэффициентов полинома, получаем, что неподвижная точка теряет устойчивость при условии

$$(r_1 - 1)(\sigma + 1)^2 + \sigma r_2^2 > 0, \tag{3.20}$$

и в системе (3.19) рождается предельный цикл. Покажем, что данный предельный цикл имеет вид

$$x_1(t) = R\cos\omega t,\ x_2(t) = R\sin\omega t. \tag{3.21}$$

Действительно, подставляя (3.21) в (3.19), найдем, что

$$y_1(t) = -\frac{R\omega}{\sigma}\sin\omega t + R\cos\omega t,\ y_2(t) = \frac{R\omega}{\sigma}\cos\omega t + R\sin\omega t.$$

Следовательно,

$$\dot{y}_1(t) = -\frac{R\omega^2}{\sigma}\cos\omega t - R\omega\sin\omega t = R\cos\omega t(r_1 - z) - \\ - r_2 R\sin\omega t + \frac{R\omega}{\sigma}\sin\omega t - R\cos\omega t$$

при

$$-\frac{R\omega^2}{\sigma} = R(r_1 - z - 1) \qquad \text{и} \qquad R\omega = r_2 R - \frac{R\omega}{\sigma}.$$

Аналогично

$$\dot{y}_2(t) = -\frac{R\omega^2}{\sigma}\sin\omega t + R\omega\cos\omega t = R\sin\omega t(r_1 - z) + \\ + r_2 R\cos\omega t - \frac{R\omega}{\sigma}\cos\omega t - R\sin\omega t$$

опять же при

$$-\frac{R\omega^2}{\sigma} = R(r_1 - z - 1) \qquad \text{и} \qquad R\omega = r_2 R - \frac{R\omega}{\sigma}.$$

Следовательно, $\omega = \dfrac{\sigma r_2}{\sigma + 1}$, $z = \dfrac{\omega^2}{\sigma} + r_1 - 1 = z_0$. Для нахождения амплитуды R воспользуемся пятым уравнением системы (3.19), положив в нем $z = z_0$:

$$bz_0 = -\frac{R^2\omega}{\sigma}\sin\omega t\cos\omega t + R^2\cos^2\omega t + \\ + \frac{R^2\omega}{\sigma}\sin\omega t\cos\omega t + R^2\sin^2\omega t = R^2.$$

Следовательно, $R^2 = bz_0 = b\left(\frac{\omega^2}{\sigma} + r_1 - 1\right) > 0$ в силу неравенства (3.20). При $r_2 = 0$ пятимерное пространство решений системы (3.19) разбивается на трехмерные пространства Лоренца, задаваемые фиксированными начальными значениями углов $\mathrm{tg}\varphi = x_2(0)/x_1(0)$ и $\mathrm{tg}\psi = y_2(0)/y_1(0)$. Со временем траектория затягивается в одно из пространств Лоренца и остается там навсегда. Например, при $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\psi = 1$ траектория не выходит из пространства Лоренца $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, что нетрудно видеть, вычитая из первого уравнения системы (3.19) второе уравнение, а из третьего уравнения – четвертое уравнение, учитывая при этом, что $r_2 = 0$. При $x_2(0) = y_2(0) = 0$ траектория также не выходит из трехмерного пространства Лоренца, описываемого переменными x_1, y_1, z. Таким образом, можно считать, что при $r_2 = 0$ динамика системы (3.19) эквивалентна динамике трехмерной системы уравнений Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z + r_1 x_1 - y_1, \\ \dot{z} &= -bz + x_1 y_1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

В п. 3.1 нами было установлено, что при значениях параметров $\sigma = 10.5$, $b = 8/3$, $r_1^* \approx 33.2189$ система уравнений (3.22) имеет наиболее сложный полный двойной гомоклинический аттрактор, переход к которому осуществляется через полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций при уменьшении параметра r_1 от $r_1 = 350$ до $r_1^* \approx 33.2189$. Поэтому, наиболее интересным представляется изучение перехода к хаосу в пятимерной системе уравнений (3.19) при $r_2 \to 0$ и при фиксированных значениях остальных параметров системы: $\sigma = 10.5$, $b = 8/3$, $r_1 = 33.2189$. Ниже мы покажем, что такой переход осуществляется через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов.

3.2.1. Сценарий перехода к хаосу. Как следует из изложенного выше, условием существования предельного цикла системы (3.19) является выполнение неравенства (3.20), которое автоматически удовлетворяется в случае рассматриваемых нами значений параметров σ, r_1, r_2. Поэтому при всех r_2, превышающих некоторое значение r_2^*, единственным устойчивым предельным множеством системы (3.19) является цикл (3.21). При $r_2 = r_2^* \approx 1.93$ из цикла (3.21) в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый тор T^2, после чего в системе (3.19) возникают двухчастотные колебательные режимы. Мультипликаторы μ_i, $i = \overline{1,5}$, цикла (3.21), измеренные для системы (3.19) при значениях $r_2 = 2.00$, $r_2 = 1.95$ и $r_2 = 1.93$ соответственно равны: $(0; 0; 1; 0.683 \pm 0.635i)$ с $|\mu_4| = |\mu_5| = 0.932$, $(0; 0; 1; -0.166 \pm 0.966i)$ с $|\mu_4| = |\mu_5| = 0.971$ и $(0; 0; 1; -0.570 \pm 0.812i)$ с $|\mu_4| = |\mu_5| = 0.992$, и подтверждают классический переход двух комплексно сопряженных мультипликаторов через окружность единично-

го радиуса при бифуркации образования тора, которая в нашем случае имеет место при уменьшении параметра r_2. Родившийся при этом тор T^2 и все дальнейшие его превращения, обусловленные соответствующими бифуркациями, удобно анализировать, исследуя проекции пересечения тора с четырехмерным подпространством $x_2 = 0$ на плоскости (x_1, y_1) и (x_1, z). На рис. 3.33 изображены соответствующие

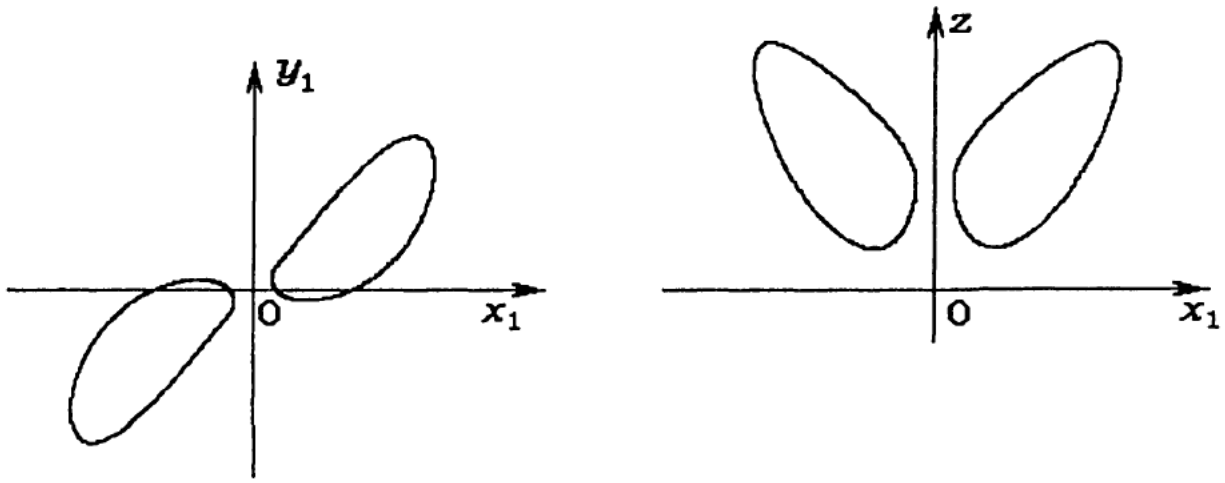

Рис. 3.33. Проекции простого двумерного тора из пространства $x_2 = 0$ на плоскости (x_1, y_1) и (x_1, z) при $r_2 = 1.001$.

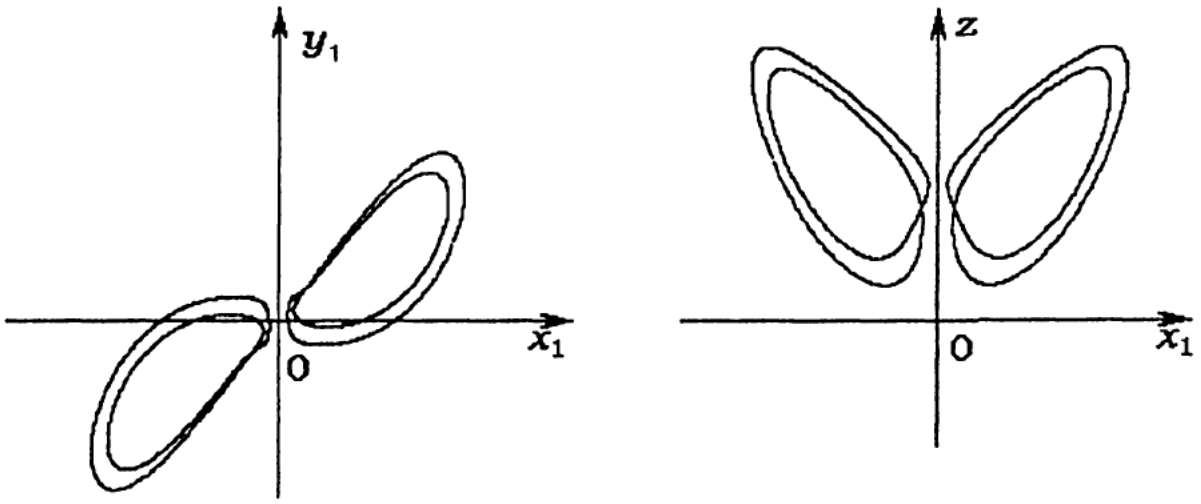

Рис. 3.34. Проекции двумерного тора периода два из пространства $x_2 = 0$ на плоскости (x_1, y_1) и (x_1, z) при $r_2 = 0.6015$.

проекции, полученные при значении параметра $r_2 = 1.001$. Каждая проекция представляет собой проекцию пары замкнутых кривых, по которым тор T^2 пересекается с четырехмерным подпространством $x_2 = 0$.

Устойчивый тор T^2 существует в системе (3.19) при значениях параметра $0.7925 \lesssim r_2 \lesssim 1.93$. При $r_2 \approx 0.7925$ в системе (3.19) происходит бифуркация удвоения периода замкнутых кривых, по которым тор пересекает подпространство $x_2 = 0$ (рис. 3.34). При этом тор

остается двумерным, но имеет период два, что соответствует удвоению площади его поверхности внутри ограниченного объема фазового пятимерного пространства.

При дальнейшем уменьшении значений параметра r_2 в системе (3.19) наблюдается субгармонический каскад бифуркаций замкнутых кривых, являющихся пересечением тора с подпространством $x_2 = 0$, что отражает рождение новых устойчивых двумерных торов различных периодов со все более увеличивающейся площадью поверхности внутри ограниченного объема фазового пространства. Так при $0.418 < r_2 < 0.421$ в системе (3.19) наблюдается устойчивый двумерный тор периода пять, а при $0.349 < r_2 < 0.352$ – устойчивый двумерный тор периода три (рис. 3.35). Последний факт говорит о том, что при $r_2 < 0.349$ в системе (3.19) уже имеется бесконечное число неустойчивых двумерных торов всех периодов в соответствии с порядком Шарковского.

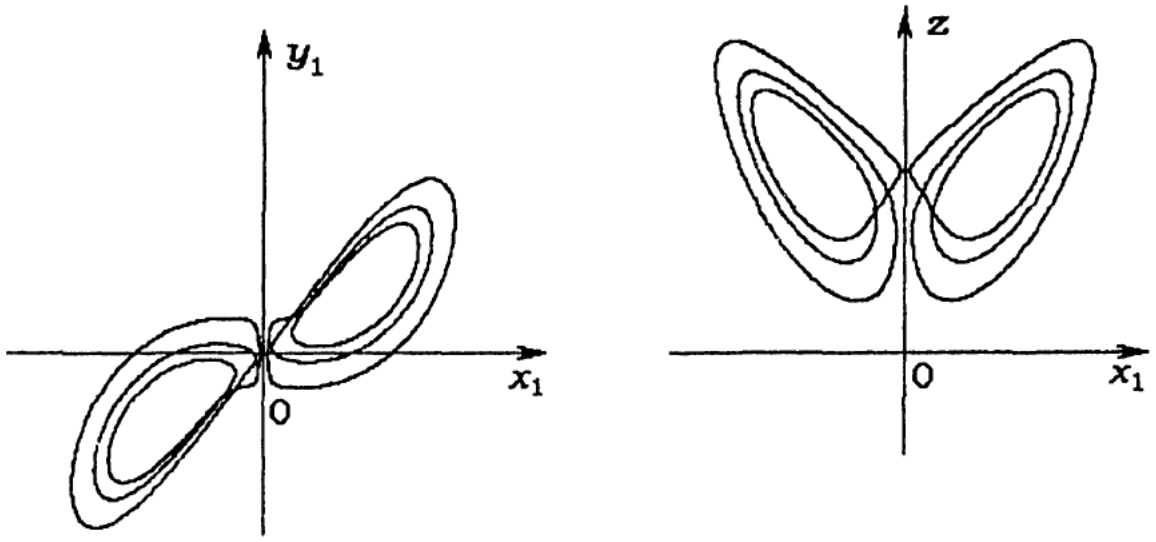

Рис. 3.35. Проекции двумерного тора периода три из пространства $x_2 = 0$ на плоскости (x_1, y_1) и (x_1, z) при $r_2 = 0.351$.

Таким образом, при значениях параметра $r_2 < 0.349$ в результате описанного субгармонического каскада бифуркаций в системе (3.19) возникает аттрактор, являющийся замыканием множества обмоток всех неустойчивых двумерных торов, родившихся изначально устойчивыми в результате описанного выше субгармонического каскада бифуркаций (рис. 3.36). Вопрос о размерности аттрактора остается пока открытым. Наша гипотеза состоит в том, что возникший таким образом аттрактор не является фракталом и имеет целую размерность, равную трем. В соответствии с высказанной гипотезой пересечение аттрактора с четырехмерным подпространством должно иметь размерность, равную двум, а его проекции из трехмерного подпространства $x_2 = 0, z = r_1 - 1$ на плоскости $(x_1, y_1), (x_1, y_2)$ и (y_2, y_1) должны быть одномерными кривыми, что хорошо подтверждается результатами проведенных нами численных экспериментов (рис. 3.37).

Заметим, что множество, являющееся пересечением аттрактора с подпространством $x_2 = 0$, при $r_2 \to 0$ стремится к предположительно двумерному полному гомоклиническому аттрактору системы Лоренца, лежащему в трехмерном пространстве (x_1, y_1, z).

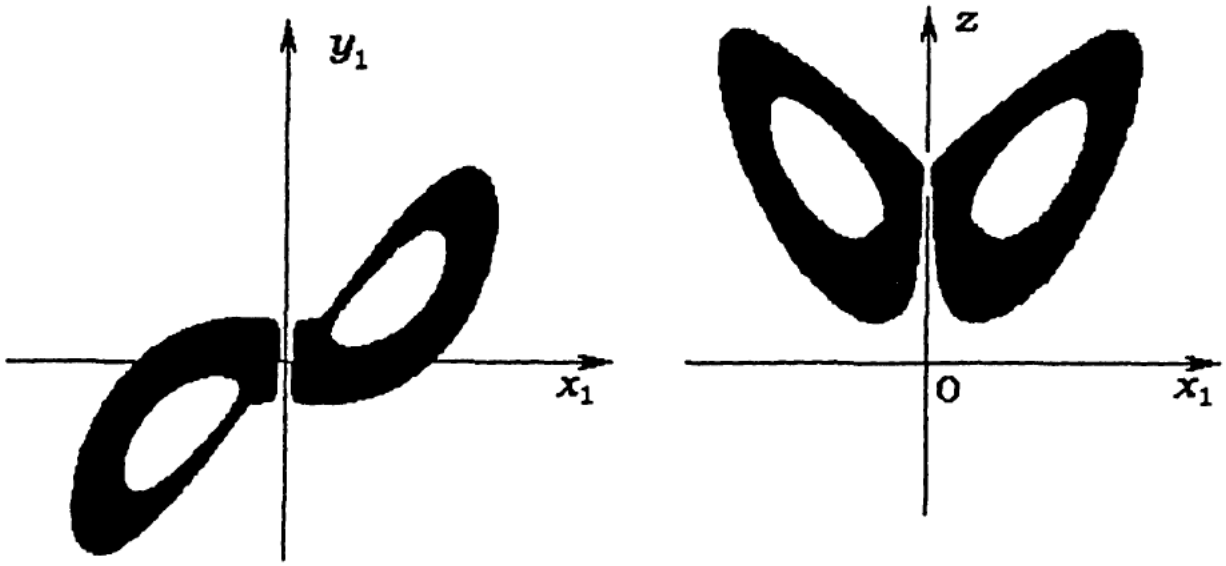

Рис. 3.36. Проекции субгармонического аттрактора из пространства $x_2 = 0$ на плоскости (x_1, y_1) и (x_1, z) при $r_2 = 0.25$.

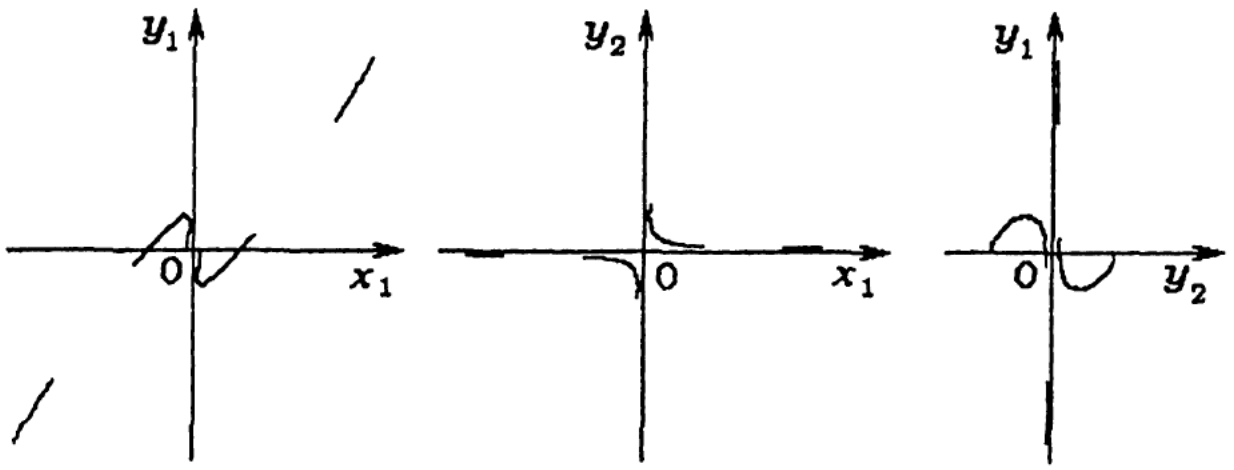

Рис. 3.37. Проекции субгармонического аттрактора из пространства $x_2 = 0$, $z = r - 1$ на плоскости (x_1, y_1), (x_1, y_2) и (y_2, y_1) при $r_2 = 0.25$.

3.3. Системы уравнений Рёсслера.

Рёсслером [58, 79] предложен ряд нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования некоторых гипотетических химических реакций, обладающих хаотическим поведением. Здесь мы остановимся на двух системах, наиболее известная из

которых имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - \mu). \end{aligned} \tag{3.23}$$

В работе [59] проведен качественный анализ бифуркации рождения предельного цикла для этой системы и найдена область параметров, в которой имеет место бифуркация Андронова-Хопфа. Сценарий перехода к хаосу, безусловно, связан с бифуркацией рождения предельного цикла, которая является и началом каскада бифуркаций Фейгенбаума и субгармонического каскада бифуркаций.

Система (3.23) не является диссипативной всюду в фазовом пространстве, так как $\mathrm{div}F(x,y,z) = x + a - \mu$ зависит от переменной x, и плоскость $x + a - \mu = 0$ делит все фазовое пространство на три не пересекающиеся области. Определим положение неподвижных (особых) точек системы (3.23) $O_i(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$, $i = 1, 2$, где

$$x_i^* = \frac{\mu}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - ab},\ y_i^* = -\frac{x_i^*}{a},\ z_i^* = -y_i^*.$$

Условие принадлежности точки O_1 к диссипативной области имеет вид

$$a - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - ab} < 0$$

и равносильно следующей совокупности систем неравенств с учетом того, что $a, b, \mu > 0$

$$\begin{cases} \mu & > 2a, \\ \mu & \geq 2\sqrt{ab}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu & \leq 2a, \\ \mu & > a + b. \end{cases}$$

Согласно [59] предельный цикл рождается в случае потери устойчивости точки O_1 при условии $a < b$. Так как при этом вторая система не совместна, то точка $O_1 \in D = \{x | \mathrm{div}F(x) < 0\}$ при любых значениях $\mu > 2\sqrt{ab}$.

Условие того, что точка $O_2 \in D = \{x | \mathrm{div}F(x) < 0\}$, имеет вид

$$a - \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - ab} < 0$$

и равносильно системе неравенств

$$\mu \geq 2a,\ \mu > 2\sqrt{ab},\ \mu < a + b,$$

которая совместна при $a < b$ и $2\sqrt{ab} < \mu < a + b$. В работе [59] показано, что точка O_1 теряет устойчивость при значении параметра $\mu^* = p + ab/p$, где $\sqrt{ab} < p = a/2 + \sqrt{a^2/4 + (b-a)/a}$, в результате бифуркации Андронова-Хопфа и переходит в состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразием. Нетрудно показать, что значение μ^* не входит в интервал $(2\sqrt{ab},\ a + b)$ при $ab < 1$ и, таким образом, точка O_2 лежит вне диссипативной области. При этом состояние равновесия точки O_2 определяется характеристическим уравнением

$$\lambda^3 + \lambda^2(\mu - a - x^*) + \lambda(1 + z^* - a(\mu - x^*)) - \sqrt{\mu^2 - 4ab} = 0 \quad (3.24)$$

матрицы Якоби системы (3.23), линеаризованной в точке O_2. На

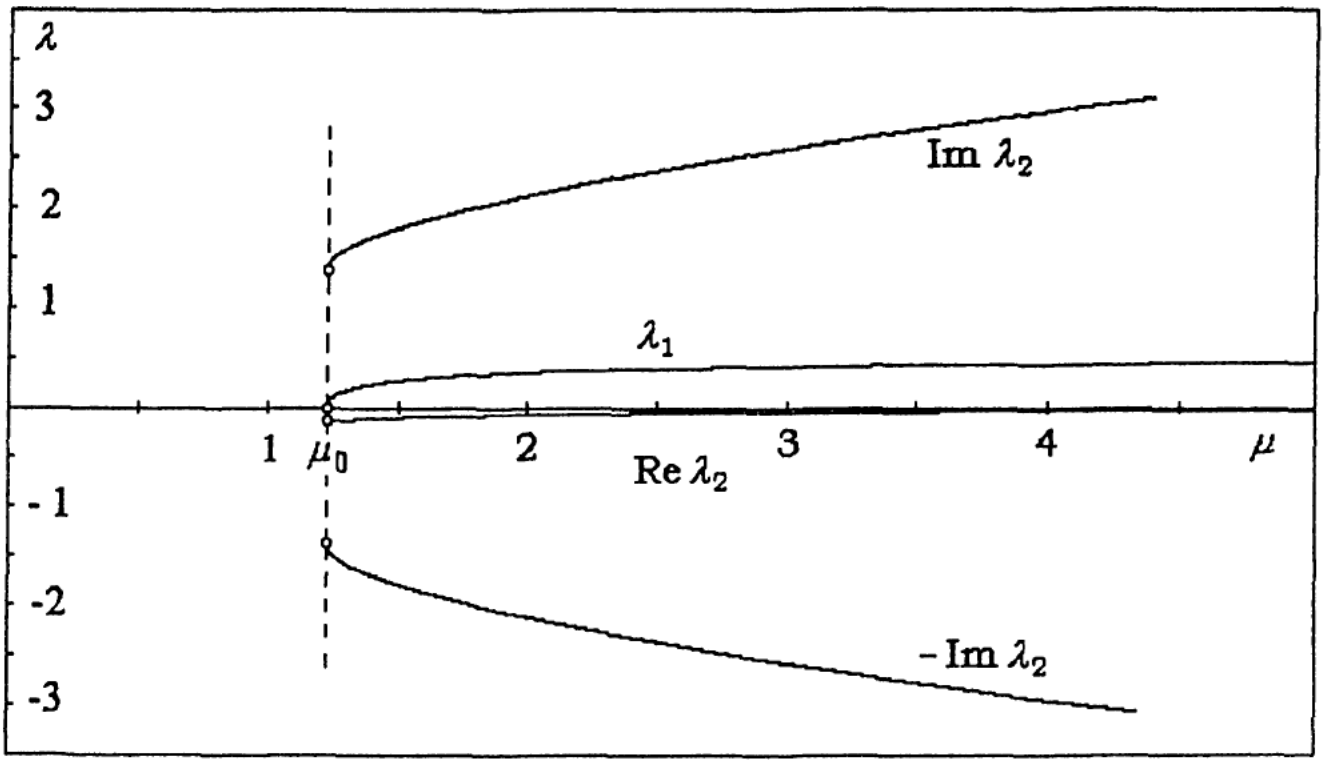

Рис. 3.38. Зависимость корней характеристического уравнения (3.24) от значений параметра μ для неподвижной точки O_2.

рис. 3.38 показано численное решение уравнения (3.24) в зависимости от значений параметра μ при фиксированных значениях параметров $a = 0.5$ и $b = 0.75$. Из рисунка видно, что точка O_2 при всех значениях параметра $\mu > \mu_0 = 2\sqrt{ab}$ имеет состояние равновесия типа седло-фокус с двумерным устойчивым многообразием и одномерным неустойчивым многообразием. Если бы точка O_2 лежала в диссипативной области системы (3.23), то можно было бы ожидать появления гетероклинических контуров, соединяющих точки O_1 и O_2. Но так как в диссипативной области лежит только точка O_1, то остаются только два возможных сценария перехода к хаотическому поведению: сцена-

рий Фейгенбаума (или более общий субгармонический каскад бифуркаций), и гомоклинический каскад бифуркаций. Действительно, при

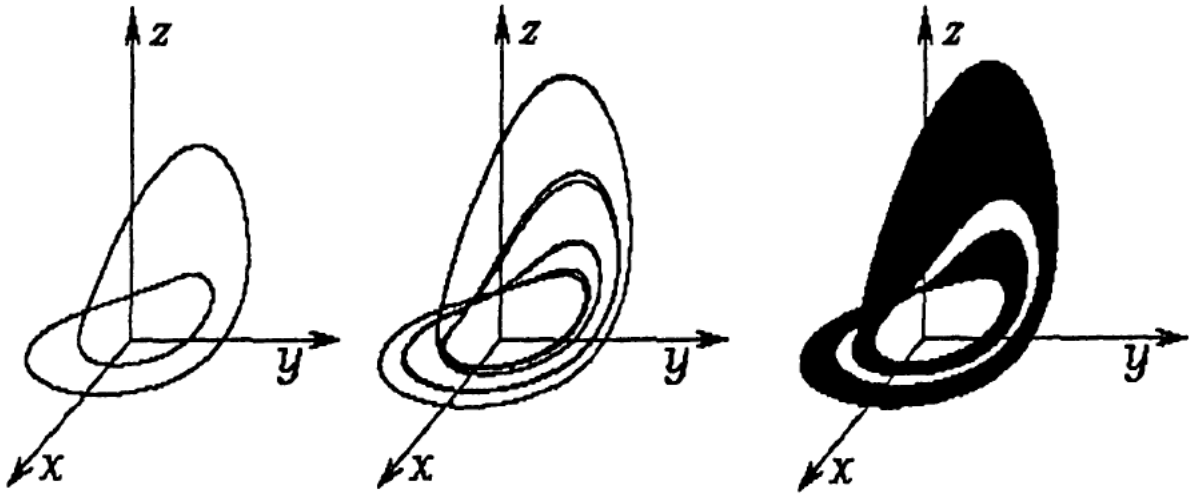

Рис. 3.39. Циклы периодов 2 и 8 соответственно при значениях параметра $\mu = 2.2$ и $\mu = 2.325$ и нерегулярный аттрактор при $\mu = 2.35$.

указанных выше фиксированных значениях параметров a и b с увеличением параметра μ от значения $\mu = 1.375$ до величины $\mu \approx 2.35$ наблюдается каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода (рис. 3.39). А при больших значениях $\mu = 2.421$ и $\mu = 2.446$ наблюдаются циклы соответственно периодов 5 и 3, что свидетельствует о наличии субгармонического каскада в сценарии перехода к хаосу (рис. 3.40),

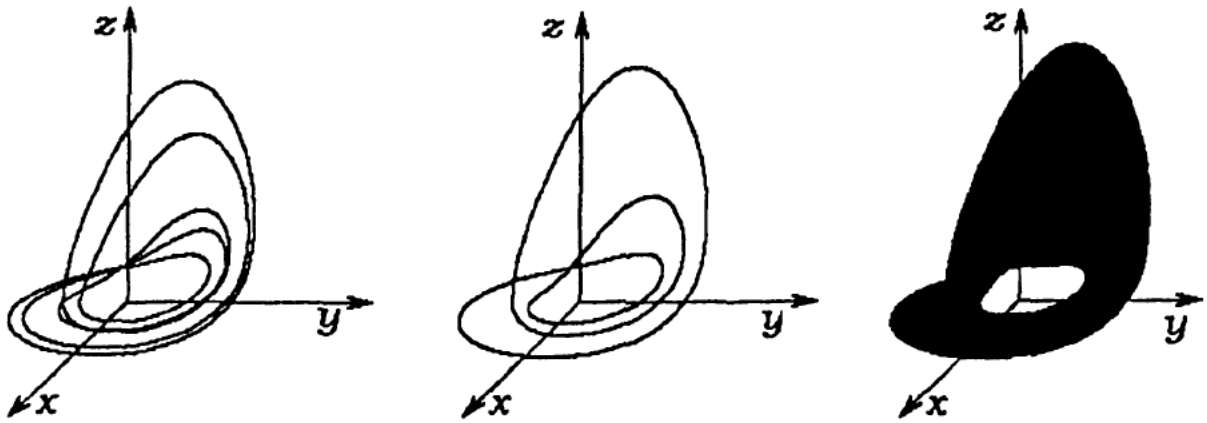

Рис. 3.40. Циклы периодов 5 и 3 соответственно при значениях параметра $\mu = 2.421$ и $\mu = 2.446$ и нерегулярный аттрактор при $\mu = 2.5$.

т.е. сценарий перехода к хаосу развивается согласно порядку Шарковского. При значении $\mu > 2.899$ хаотический аттрактор в системе Рёсслера исчезает, и решение системы становится неограниченным. Это обусловлено тем, что траектория с увеличением значений μ пересекает поверхность, в которой лежит неустойчивая седловая точка O_2, и удаляется в бесконечность вдоль неустойчивого одномерного многообразия этой точки.

Другая, рассмотренная нами система Рёсслера, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx + z(x - \mu). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Система (3.25), также как и предыдущая, не является всюду диссипативной. Дивергенция этой системы отрицательна в области $x < \mu - a$ фазового пространства. Система (3.25) имеет две неподвижные (особые) точки

$$O_1(0,0,0) \qquad \text{и} \qquad O_2(\mu - ab, b - \mu/a, \mu/a - b).$$

Характеристическое уравнение для матрицы Якоби в точке O_1 выглядит следующим образом

$$\lambda^3 + \lambda^2(\mu - a) + \lambda(1 + b - a\mu) + \mu - ab = 0. \tag{3.26}$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица точка O_1 устойчива при условиях

$$\mu - a > 0, \ (\mu - a)(1 + b - a\mu) > \mu - ab > 0. \tag{3.27}$$

Решение системы (3.27) в случае $b > 2a - a^2$ дает два критических значения параметра

$$\mu^*_{1,2} = \frac{a^2 + b \pm \sqrt{(a^2 + b)^2 - 4a^2}}{2a},$$

при которых происходит потеря устойчивости точки O_1. На множестве значений $\mu \in (\mu^*_1, \mu^*_2)$ точка O_1 является устойчивым фокусом, а при значениях $\mu = \mu^*_1$ или $\mu = \mu^*_2$ происходит бифуркация рождения предельного цикла. В случае $b < 2a - a^2$ при любых $\mu > a$ точка O_1 является неустойчивой, и в её окрестности могут существовать как устойчивые, так и неустойчивые периодические решения. На существование таких решений влияет вторая неподвижная точка O_2, состояние равновесия которой определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \lambda^2 a(b - 1) + \lambda(1 - a^2 b + \mu/a) + ab - \mu = 0. \tag{3.28}$$

Сравнивая выражения (3.26) и (3.28), видим, что устойчивость точки O_1 одновременно влечет неустойчивость точки O_2, причем точка O_2 остается неустойчивой даже в случае $b > 1$.

Исследование сценария перехода к хаосу в данной системе проведем при фиксированных значениях параметров $a = 0.38$ и $b = 0.3$. При данных значениях имеем $b < 2a - a^2$, точка O_1 – неустойчивый седло-фокус, и в системе существует цикл при значениях $\mu \in (0.9, 1.933)$. При

значениях $\mu < 0.9$ траектория системы переходит в область неустойчивости точки O_2 и удаляется в бесконечность вдоль неустойчивого одномерного многообразия этой точки.

С ростом значений параметра μ в системе (3.25) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода исходного цикла. Так при значении $\mu \approx 1.934$ рождается цикл периода 2, при $\mu \approx 2.535$ – цикл периода 4, при $\mu \approx 2.680$ – цикл периода 8 и т.д. Каскад Фейгенбаума завершается при значении параметра $\mu \approx 2.8$ образованием нерегулярного аттрактора в виде ленты (рис. 3.41). При дальнейшем увеличении значений параметра μ наблюдаются циклы периодов 7, 5 и 3 соответственно при значениях $\mu \in (2.8895, 2.8904)$, $\mu \in (2.954, 2.966)$ и $\mu \in (3.198, 3.532)$, что свидетельствует о наличии субгармонического

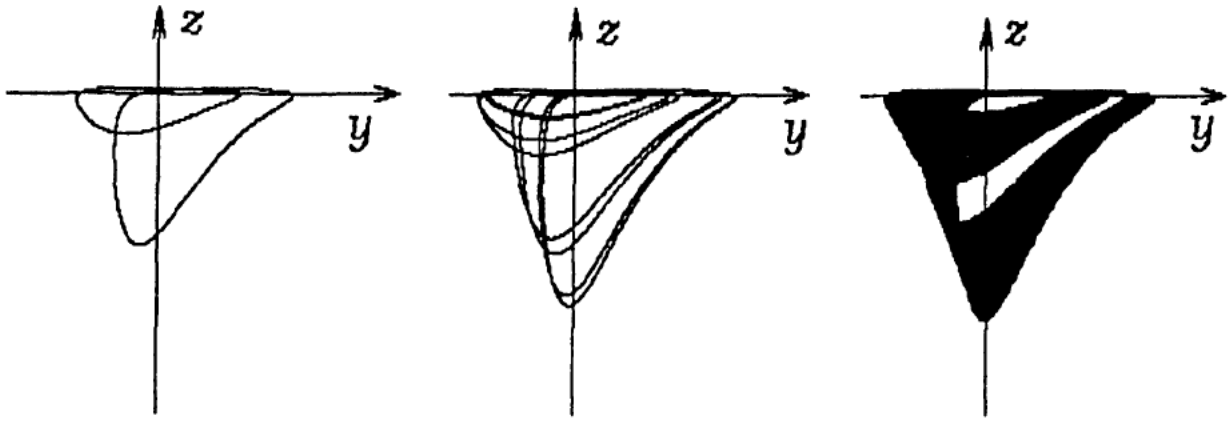

Рис. 3.41. Циклы периода 2 и 8 в системе (3.25) соответственно при значениях параметра $\mu = 2.2$ и $\mu = 2.69$ и вид нерегулярного аттрактора при $\mu = 2.8$.

каскада бифуркаций. Вид этих циклов аналогичен виду циклов, изображенных на рис. 3.40.

Следует отметить, что в данной системе Рёсслера при фиксированных значениях параметров $a = 0.38$, $b = 0.3$ наблюдается полный субгармонический каскад бифуркаций, плавно переходящий в простой гомоклинический каскад, циклы которого стремятся к гомоклиническому контуру седло-фокуса O_1. При значении $\mu = 2.89$ в системе (3.25) имеется устойчивый цикл периода 5, а при $\mu = 3.2$ — устойчивый цикл периода 3.

Так же как и в системе Лоренца здесь отмечено появление решений типа циклов самоорганизации при значении параметра $\mu = 3.668$, а при $\mu = 4.367$ наблюдается цикл C_4 гомоклинического каскада бифуркаций, завершающегося образованием нерегулярного гомоклинического аттрактора при значении $\mu \approx 4.828$ (рис. 3.42). Вопрос о том, является ли гомоклинический каскад в системе (3.25) полным, требует специального исследования в виду сильной некорректности решаемой задачи в окрестности оси z.

Таким образом, в системах Рёсслера вида (3.23) и (3.25) переход к хаосу осуществляется таким же образом, что и в системе Лоренца,

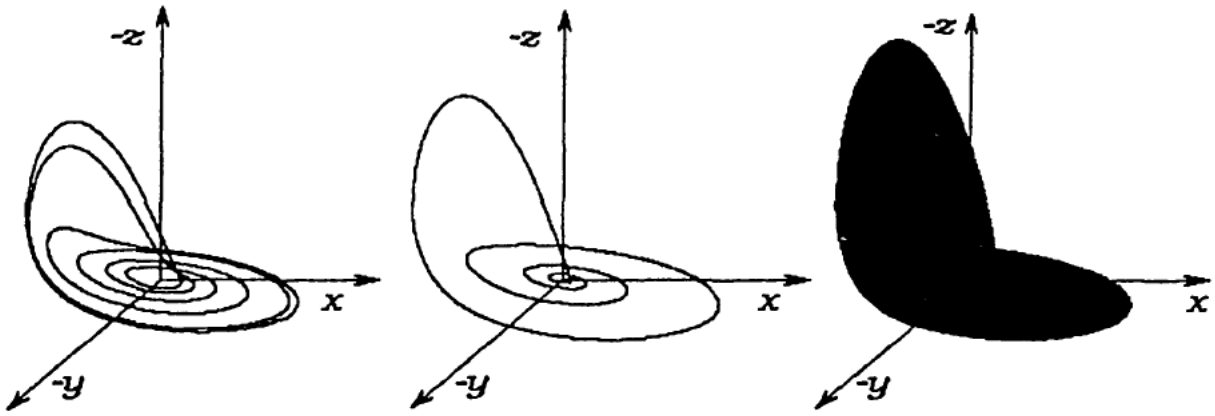

Рис. 3.42. Решения в виде цикла самоорганизации ($\mu = 3.668$), цикла C_4 ($\mu = 4.367$) и гомоклинического аттрактора ($\mu = 4.828$) в системе (3.25).

а именно: через каскады бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, субгармонические каскады и гомоклинический каскад бифуркаций.

3.4. Система Чуа.

Система Чуа моделирует некоторую электрическую цепь, предложенную Л. Чуа для генерации хаотических колебаний [60, 61]. Поведение этой электрической цепи и одноименной системы обыкновенных дифференциальных уравнений широко изучалось как в многочисленных физических опытах, так и математическими методами, включая численные эксперименты и аналитические расчеты [50, 62].

Рассмотрим эту систему в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где

$$h(x) = \begin{cases} bx + a + b, & x < -1, \\ -ax, & |x| \le 1, \\ bx - a - b, & x > 1, \end{cases}$$

a, b, β, μ – параметры, принятые для удобства положительными. Зафиксируем параметры $a = 1/7$, $b = 2/7$, $\beta > 1$ и исследуем решения системы (3.29) в зависимости от параметра μ.

Система уравнений (3.29) симметрична относительно начала координат, т.е. векторное поле инвариантно по отношению к преобразованию

$$(x,\ y,\ z) \to (-x,\ -y,\ -z).$$

Неподвижные (особые) точки системы (3.29) определяются из условия

$$\begin{cases} h(x) & = 0, \\ y & = 0, \\ x+z & = 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание вид функции $h(x)$, найдем, что система (3.29) имеет по одной неподвижной точке в каждой из областей: $D_{-1} = \{x|\ x < -1\}$, $D_0 = \{x|\ |x| < 1\}$ и $D_1 = \{x|\ x > 1\}$. Соответствующие этим областям неподвижные точки обозначим как $O_{-1}(-\xi, 0, \xi)$, $O_0(0,0,0)$ и $O_1(\xi, 0, -\xi)$, где $\xi = 1 + a/b$.

Система (3.29) линейна в каждом из подмножеств D_{-1}, D_0, D_1, и матрица Якоби этой системы имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -\mu c & \mu & 0, \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

где $c = -a$ при $x \in D_0$ и $c = b$ в противном случае. Собственные значения матрицы Якоби для неподвижных точек найдем из характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \mu c) + \lambda(\mu c - \mu + \beta) + \mu\beta c = 0. \tag{3.30}$$

Используя условия Рауса-Гурвица

$$\begin{cases} 1 + \mu c > 0, \\ (1 + \mu c)(\mu c - \mu + \beta) > \mu\beta c, \\ \mu\beta c > 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

определим состояния равновесия неподвижных точек и оценим значения параметра μ, соответствующие изменению устойчивости этих состояний. Для точки $O_0(0,0,0) \in D_0$ имеем $c = -a$. Поэтому согласно условиям (3.31) область D_0 является диссипативной при значениях параметра $\mu < 1/a$, а сама неподвижная точка O_0 устойчива при $\mu < 0$. При значении $\mu = 0$ два корня характеристического уравнения (3.30), которое принимает вид

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda + \beta) = 0,$$

являются комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью. Следовательно точка O_0 при переходе параметра μ через ноль слева направо меняет состояние равновесия с устойчивого фокуса на неустойчивый седло-фокус, имеющий двумерное устойчивое многообразие W^s и одномерное неустойчивое многообразие W^u.

В точках O_{-1} и O_1 величина $c = b > 0$. Поэтому области D_{-1} и D_1 являются диссипативными при всех положительных значениях

параметра μ. Другой знак величины c приводит согласно третьему неравенству в (3.31) к тому, что при значении $\mu = 0$ бифуркация изменения состояния равновесия точек O_{-1} и O_1 противоположна той, которую мы наблюдали в точке O_0, а именно, при возрастании значений параметра μ в точке $\mu = 0$ имеет место бифуркация перехода неустойчивого седло-фокуса с одномерным неустойчивым многообразием W^u и двумерным устойчивым многообразием W^s в устойчивый фокус. Как легко видеть из второго условия (3.31) точки O_{-1} и O_1 остаются устойчивыми до значения

$$\mu_c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4b\beta/(1-b)}}{2b},$$

при котором в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается орбитально-устойчивый предельный цикл.

Таким образом, все неподвижные точки имеют состояние равновесия типа седло-фокус, что, по-видимому, и определяет вид нерегулярных аттракторов, возникающих при значениях параметра $\mu > \mu_c$.

Рассмотрим сценарий появления нерегулярных аттракторов при фиксированных значениях параметров $a = 1/7$, $b = 2/7$, $\beta = 9$. При этих значениях $\mu_c \approx 5.12$, и предельный цикл является устойчивым в интервале $\mu \in (5.12,\ 5.895)$. При значениях $\mu > 5.895$ в системе (3.29) появляется цикл удвоенного периода и при дальнейшем возрастании параметра μ наблюдается каскад бифуркаций Фейгенбаума. Так при значении $\mu \approx 6.03$ рождается цикл периода 4, при $\mu \approx 6.058$ – цикл периода 8, при $\mu \approx 6.0616$ – цикл периода 16 и т.д. На рис. 3.43 показаны

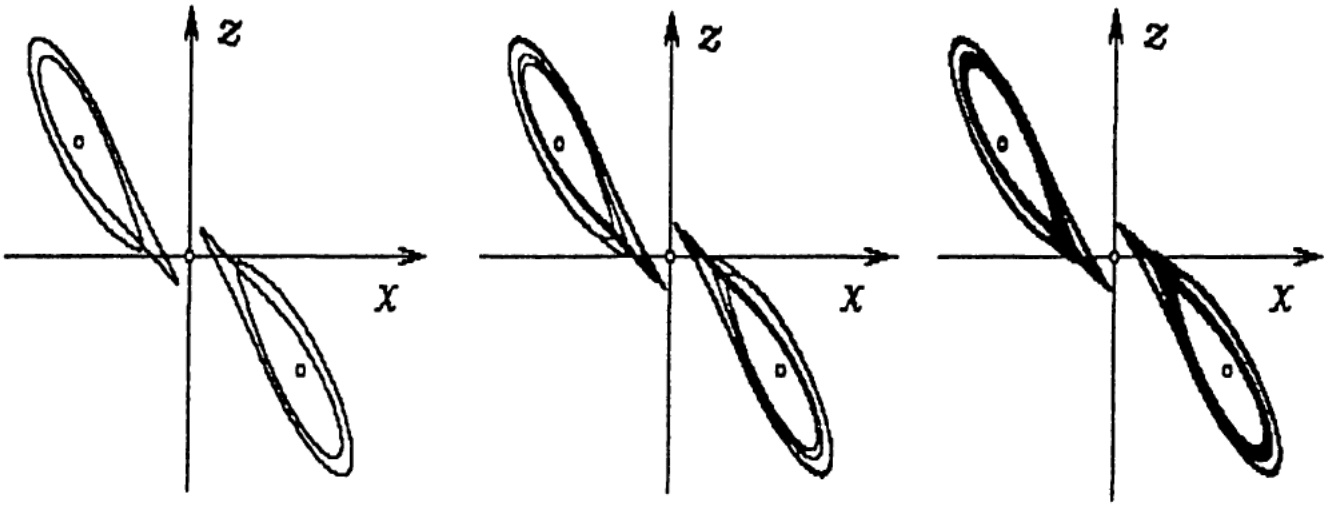

Рис. 3.43. Проекции на плоскость (x, z) циклов каскада Фейгенбаума периода 2 при $\mu = 5.9$, периода 4 при $\mu = 6.04$ и аттракторов Фейгенбаума при $\mu = 6.07$ в системе Чуа.

некоторые циклы каскада Фейгенбаума и нерегулярные аттракторы при $\mu = 6.07$, которые образуются в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

За каскадом бифуркаций удвоения периода следует субгармонический каскад бифуркаций. Так при значении параметра $\mu = 6.08$ наблюдается цикл периода 6, при $\mu = 6.1098$ – цикл периода 5, а в интервале значений $\mu \in [6.138,\ 6.142]$ лежит цикл периода 3, с которым при дальнейшем возрастании параметра μ также происходит каскад бифуркаций удвоения периода. Так при значении $\mu = 6.144$ наблюдается удвоенный цикл периода 3. Субгармонический каскад также завершается образованием двух нерегулярных аттракторов. Вид этих аттракторов и некоторых циклов субгармонического каскада показан на рис. 3.44.

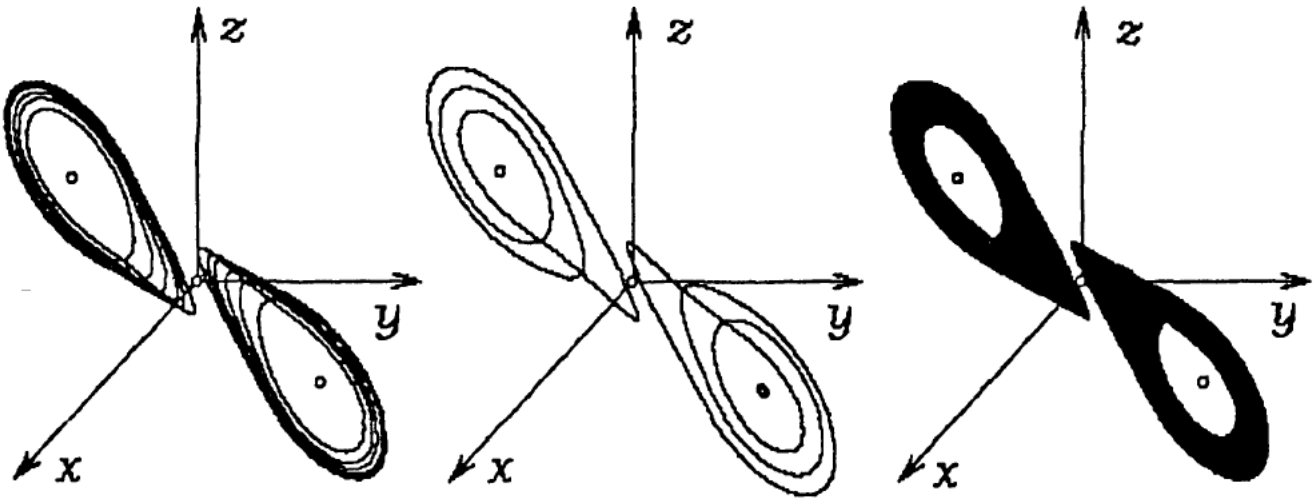

Рис. 3.44. Циклы каскада Шарковского периода 6 при $\mu = 6.08$, периода 3 при $\mu = 6.14$ и нерегулярные аттракторы при $\mu = 6.16$ в системе Чуа.

С дальнейшим ростом параметра μ в системе (3.29) обнаруживаются циклы типа C_n гомоклинического каскада бифуркаций. Такие циклы в системе (3.29) имеют один оборот, вытянутый в сторону точки O_0, и n оборотов, расположенных в области притяжения точки O_{-1} (или O_1). Очевидно, начало гомоклиническому каскаду дает цикл периода 3 при $\mu \in [6.138,\ 6.142]$. Далее, при значении $\mu = 6.176$ в системе (3.29) наблюдается цикл C_4, а при $\mu = 6.212$ – цикл C_6 (рис. 3.45). Эти циклы свидетельствуют о наличии в системе (3.29) гомоклинических петель сепаратрис у седло-фокусов O_{-1} и O_1, которые имеют двумерные устойчивые и одномерные неустойчивые многообразия. Однако при указанных выше фиксированных значениях параметров $a = 1/7$, $b = 2/7$, $\beta = 9$ сам гомоклинический контур обнаружить не удается. Поэтому в системе (3.29) с заданным выше набором фиксированных параметров существуют два неполных гомоклинических каскада бифуркаций.

С увеличением параметра μ области, которые занимают аттракторы, все более возрастают, вытягиваясь при этом в сторону точки O_0, т.е. навстречу друг другу. При некотором значении параметра μ^* эти области настолько сближаются друг с другом (в окрестности точки O_0), что происходит бифуркация объединения этих аттракторов (см.

п. 2.4.5) с образованием единого нерегулярного аттрактора, показанного на рис. 3.45. При значениях $a = 1/7$, $b = 2/7$, $\beta = 9$ получено $\mu^* \approx 6.244$.

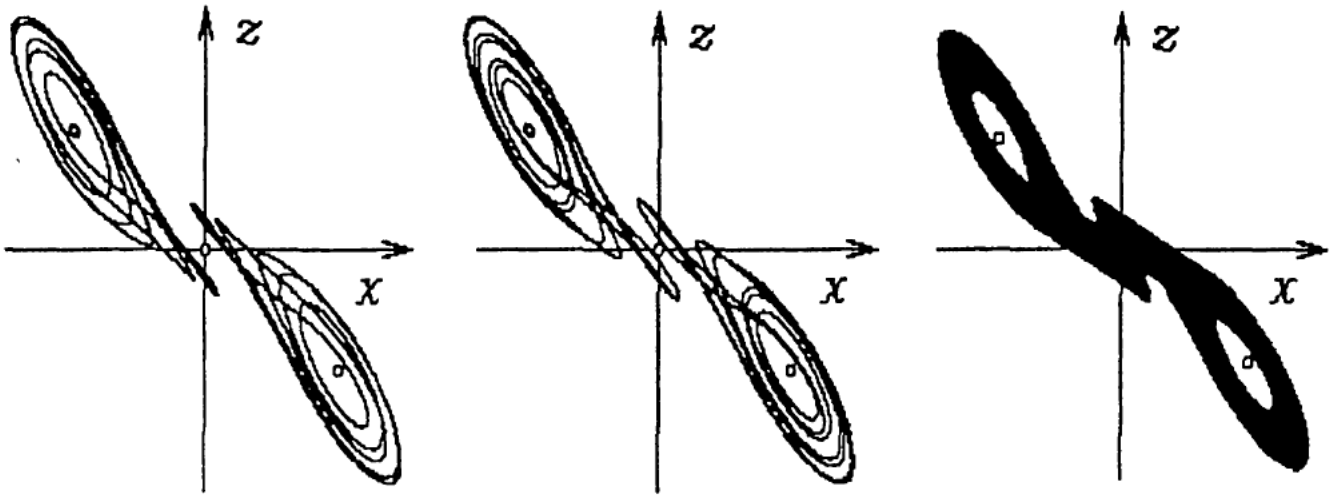

Рис. 3.45. Проекции на плоскость (x, z) циклов гомоклинического каскада C_4 при $\mu = 6.176$, C_6 при $\mu = 6.212$ и нерегулярного аттрактора при $\mu = 6.245$ в системе Чуа.

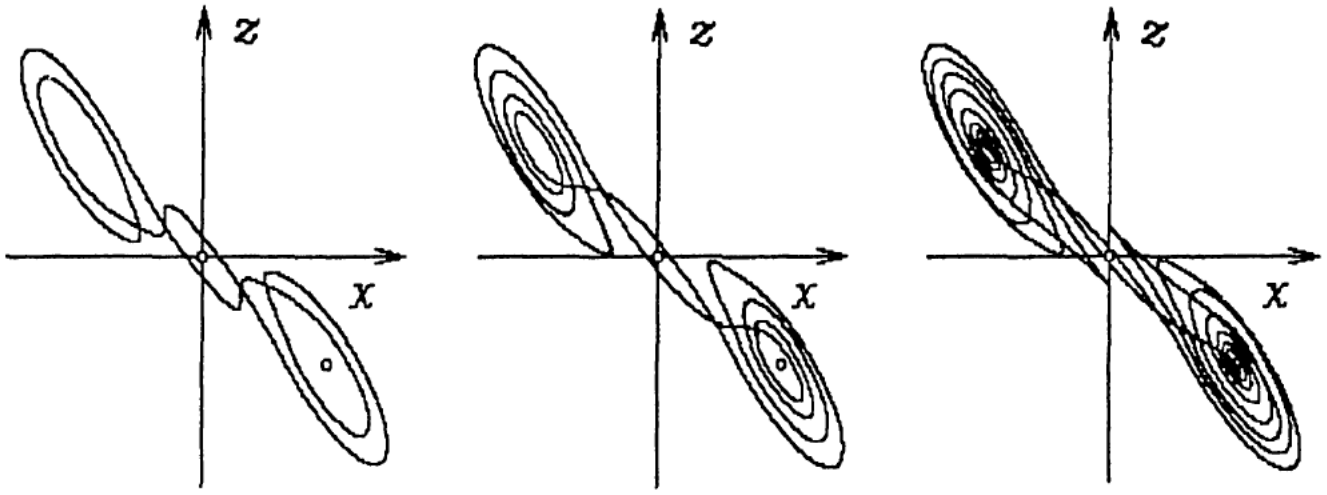

Рис. 3.46. Проекции на плоскость (x, z) циклов гомоклинического каскада C_{11} при $\mu = 6.340$, C_{33} при $\mu = 6.390$ и C_{77} при $\mu = 6.522$ в системе Чуа.

Представление о структуре возникшего аттрактора дает серия устойчивых циклов двойного гомоклинического каскада бифуркаций типа C_{nn}. Так при значениях параметра $\mu = 6.340$, $\mu = 6.390$ и $\mu = 6.522$ в системе (3.29) существуют соответственно циклы C_{11}, C_{33} и C_{77} гомоклинического каскада бифуркаций. Затем при значениях $\mu = 6.554$, $\mu = 6.660$, $\mu = 6.772$ и при $\mu \in [6.960,\ 6.985]$ наблюдаются циклы соответственно типов C_{55}, C_{33}, C_{22} и C_{11} гомоклинического каскада бифуркаций (рис. 3.46 — 3.47). Кроме того в системе Чуа при указанных выше фиксированных параметрах обнаружен цикл го-

моклинического каскада типа C_1 при значении параметра $\mu = 7.208$ (рис. 3.47).

При значениях параметра $\mu > \mu^*$ мы имеем в системе (3.29) двойной гомоклинический аттрактор. Определение значений параметров, при которых этот аттрактор является полным, требует дополнительного исследования. Заметим, что в литературе принято называть одним термином "двойной завиток" (double scroll) различные на самом деле неполные двойные гомоклинические аттракторы, существующие в системе Чуа [50, 62].

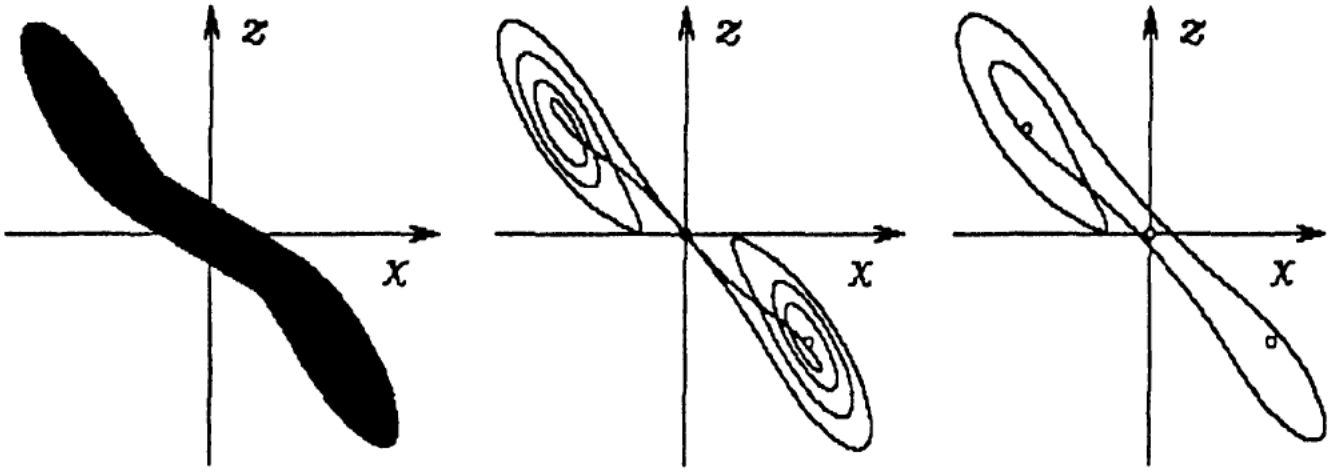

Рис. 3.47. Проекции на плоскость (x, z) нерегулярного двойного полного гомоклинического аттрактора при $\mu = 6.544$ и циклов гомоклинического каскада C_{33} при $\mu = 6.660$ и C_1 при $\mu = 7.208$ в системе Чуа.

Таким образом, в системе (3.29) при $\mu > \mu^*$ наблюдается тот же механизм образования нерегулярных аттракторов, что и в системе Лоренца при фиксированных значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 0.5$. Более того, обобщая, можно сказать, что в системе Чуа присутствуют те и только те механизмы образования нерегулярных аттракторов, что и в рассмотренных выше системах Лоренца, Рёсслера, а именно: каскады бифуркаций Фейгенбаума, субгармонические каскады бифуркаций циклов и гомоклинические каскады бифуркаций. Причем каскады удвоения периода циклов и субгармонические каскады бифуркаций имеют место вне зависимости от того, существуют ли в окрестности этих циклов петли сепаратрис седло-фокусов и сами седло-фокусы особых точек.

В заключение этого раздела отметим, что сходство гомоклинических каскадов систем Чуа и Лоренца распространяется включительно до цикла C_0, с которого, как показано выше в разделах 3.1.1 и 3.1.2, в системе Лоренца берет начало двойной гомоклинический каскад бифуркаций. Однако в системе Чуа при принятых нами фиксированных значениях параметров $a = 1/7$, $b = 2/7$, $\beta = 9$ этот цикл лежит в области значений параметра μ, где решения неустойчивы, и сам является, таким образом, неустойчивым и, следовательно, не обнаруживается.

В системе Чуа наблюдать цикл C_0 можно, например, при значениях параметров $a = 1/7,\ b = 2/7,\ \beta = 3$ и $\mu \in [2.854,\ 2.882]$.

3.5. Некоторые другие хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом разделе приведены результаты исследований сценариев образования нерегулярных аттракторов в системах обыкновенных дифференциальных уравнений Валлиса, Рикитаки и некоторых других. В представленных ниже исследованиях мы опирались на подход, разработанный при изучении аттрактора Лоренца [29, 30] и основанный на численном исследовании каскадов бифуркаций устойчивых циклов. Такой подход наиболее защищен от погрешностей численных экспериментов и позволяет воспроизвести результаты практически на любом компьютере. Дифференциальные уравнения интегрировались методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

3.5.1. Системы Валлиса. В 1986 г. Дж. Валлисом были предложены две модели для описания колебаний температуры в западной и восточной частях приэкваториальной области океана, которые оказывают сильное влияние на глобальный климат Земли. Первая модель, назовем ее Vallis, не учитывающая влияния пассатных ветров, представляет систему из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [80]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu y - ax, \\ \dot{y} &= xz - y, \\ \dot{z} &= 1 - xy - z, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где x – скорость движения воды на поверхности океана,

$$y = (T_w - T_e)/2,\ z = (T_w + T_e)/2,$$

T_w и T_e – температура соответственно в западной и восточной частях океана, μ и a – положительные параметры.

Система (3.32) имеет три неподвижные (особые) точки

$$O_0(0,0,1),\ O_i\left((-1)^i\sqrt{\frac{\mu - a}{a}},\ \frac{ax_i}{\mu},\ \frac{a}{\mu}\right),\ i = 1,2.$$

Точку O_0 с помощью замены $z \to z + 1$ удобно сдвинуть в начало координат и тогда система (3.32) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + \mu y, \\ \dot{y} &= x - y + xz, \\ \dot{z} &= -xy - z. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Отметим, что система Vallis в виде (3.33) отличается от системы уравнений Лоренца по существу только знаком нелинейных членов в уравнениях и, по-видимому, может иметь много с ней схожего. Действительно, система (3.33) всюду диссипативна при $a > 0$, так как $\mathrm{div}F(x,y,z) = -a-2$. Определим состояния равновесия неподвижных точек

$$O_0(0,0,0),\ O_i\left((-1)^i\sqrt{\frac{\mu-a}{a}},\ \frac{ax_i}{\mu},\ \frac{a}{\mu}-1\right),\ i=1,2,$$

системы (3.33), используя собственные значения матрицы Якоби

$$J(x^*,y^*,z^*) = \begin{pmatrix} -a & \mu & 0 \\ 1+z^* & -1 & x^* \\ -y^* & -x^* & -1 \end{pmatrix}.$$

Точка O_0 системы (3.33) является неподвижной при любых значениях параметров μ, a. Ее состояние равновесия определяется характеристическим уравнением

$$(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda(a+1)+a-\mu)=0.$$

Корни данного уравнения имеют отрицательные вещественные части при $\mu < a$, и следовательно, точка O_0 устойчива. При значениях параметра $\mu > a$ точка O_0 является неустойчивой, имеющей состояние равновесия типа седло-узел, а также одномерное неустойчивое и двумерное устойчивое многообразия. При $\mu > a$ в системе (3.33) образуются еще две неподвижные точки O_1 и O_2, состояния равновесия которых определяются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3+\lambda^2(a+2)+\lambda(a+\mu/a)+2(\mu-a)=0. \qquad (3.34)$$

Применяя к уравнению (3.34) условия Рауса-Гурвица для определения устойчивости многочленов, нетрудно получить, что при $a > 2$ точки O_1 и O_2 устойчивы в случае $a < \mu < \mu^* = \dfrac{a^3+4a^2}{a-2}$. При значениях $\mu > \mu^*$ уравнение (3.34) имеет один вещественный отрицательный корень и два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью, то есть точки O_1 и O_2 имеют состояние равновесия типа седло-фокуса.

Для анализа сценария перехода к хаосу в системе (3.33) фиксируем один из параметров $a = 5$, а параметр μ примем в качестве бифуркационного и численно рассмотрим решения системы (3.33) в диапазоне $\mu \in (a, +\infty)$. По аналогии с системой Лоренца сценарий перехода к хаосу в системе Vallis легче понять при уменьшении значений параметра μ от ∞ до a. Так при больших значениях параметра $\mu \geq 180$ в системе (3.33) существует единственный аттрактор – устойчивый

цикл C_0, который охватывает обе неподвижные точки O_1 и O_2. При значении $\mu \approx 180$ наблюдается бифуркация рождения из устойчивого цикла C_0 двух устойчивых циклов C_0^- и C_0^+, траектории которых деформированы соответственно к точкам O_1 и O_2 (рис. 3.48). При значении $\mu \approx 134.25$ происходит бифуркация удвоения периода этих циклов, которая кладет начало каскаду Фейгенбаума, а появление циклов $C_0^{\pm}$ периода 5 при $\mu \approx 124.1$ и периода 3 при $\mu \approx 122.74$ (рис. 3.49) свидетельствует о субгармоническом каскаде бифуркаций этих циклов, который завершается при значении $\mu \approx 122$ образованием нерегулярных аттракторов в виде двух лент, порожденных бесконечным числом неустойчивых циклов. Каждая из этих лент смещена в сторону одной из неподвижных точек O_1 или O_2 (рис. 3.50). При значении параметра $\mu \approx 119.06$ обе ленты сливаются, образуя нерегулярный аттрактор, показанный на рис. 3.51.

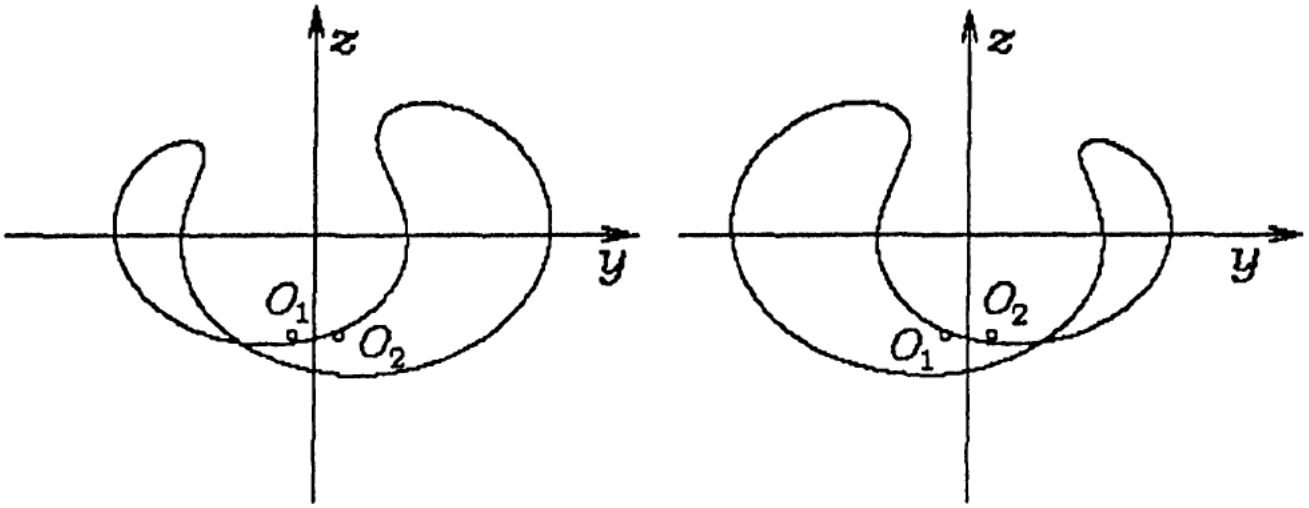

Рис. 3.48. Устойчивые циклы C_0^- и C_0^+ в системе (3.33) при $\mu = 170$.

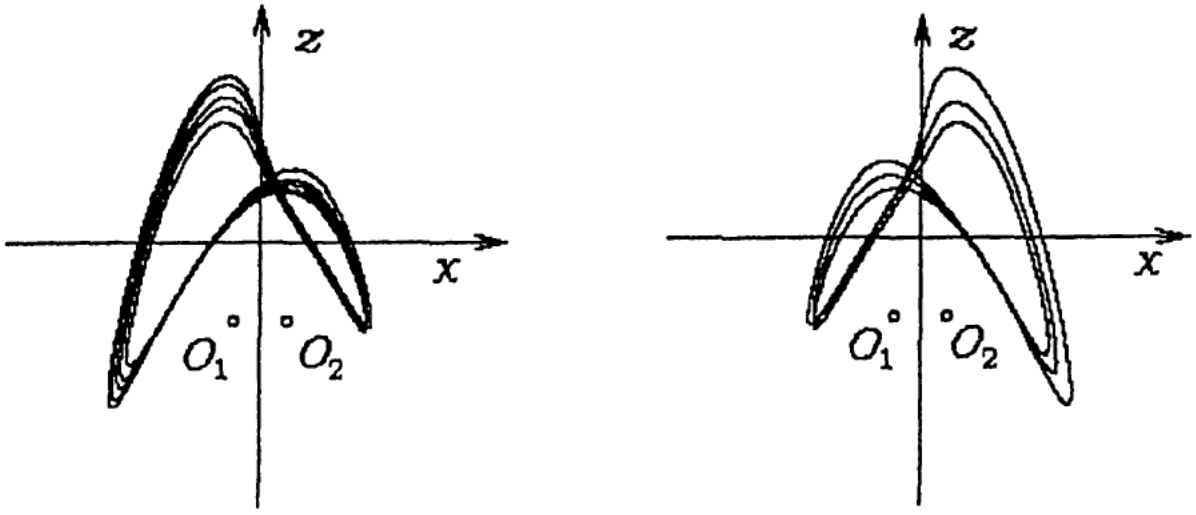

Рис. 3.49. Циклы C_0^+ периода 5 и C_0^- периода 3 соответственно при $\mu = 124.10$ и $\mu = 122.74$.

Аналогично системе Лоренца здесь также наблюдаются циклы, на-

званные нами при исследовании системы Лоренца циклами самоорганизации. Эти циклы обнаруживаются после образования нерегулярного аттрактора в результате слиянии лент, возникших в ходе субгармонического каскада бифуркаций. При удалении значений бифуркационного параметра от точки образования аттрактора вид данных циклов становится все более простым, а сам каскад циклов самоорганизации завершается образованием устойчивых циклов типа C_{nn}, где n – номер стадии в гомоклиническом каскаде бифуркаций. На рис. 3.52 показаны такие циклы самоорганизации в системе Vallis на первой стадии гомоклинического каскада при $\mu = 117.6$, $\mu = 103.7$ и образовавшийся далее при $\mu \approx 94.5$ цикл C_{11}.

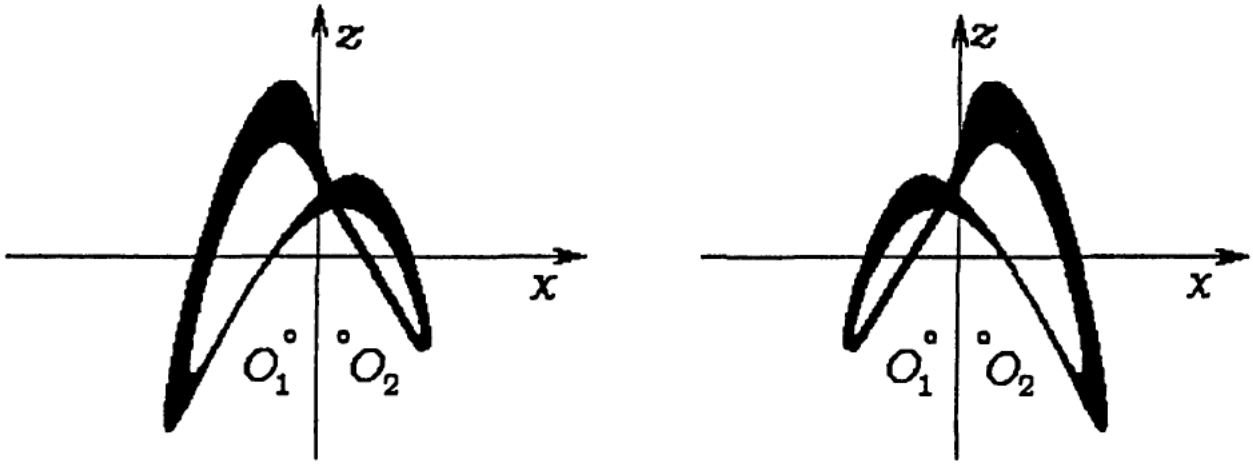

Рис. 3.50. Нерегулярные аттракторы в системе (3.33) при значении $\mu = 122$.

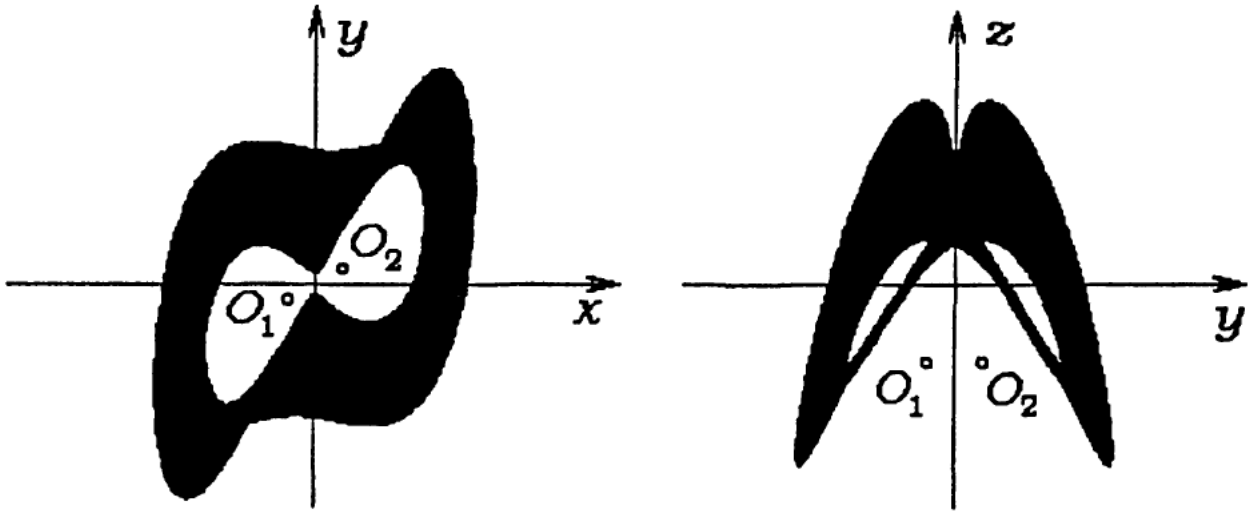

Рис. 3.51. Нерегулярный аттрактор в системе (3.33) при значении $\mu = 119$.

Для циклов C_{nn} характерны те же бифуркации, что и для цикла C_0. Поэтому и образовавшийся цикл C_{11} порождает затем два устойчивых цикла $C_{11}^{\pm}$ при значении $\mu \approx 88.3$, с каждым из которых происходит свой субгармонический каскад бифуркаций.

Также как и в системе Лоренца первая стадия гомоклинического каскада бифуркаций завершается образованием цикла C_1 при значении $\mu \approx 59$ (рис. 3.53). С этого цикла при дальнейшем уменьшении параметра μ начинается вторая стадия гомоклинического каскада, которая содержит циклы C_{12} ($\mu = 47.814$), C_{22} ($\mu = 53$) и завершается образованием цикла C_2 (рис. 3.53) при значении $\mu \approx 41.394$. При выбранном фиксированном значении параметра $a = 5$ критическое значение $\mu^* = 75$ и поэтому в системе (3.33) может реализоваться только неполный гомоклинический каскад бифуркаций. Вид проекций неполного гомоклинического аттрактора при значении $\mu = 37$ показан на рис. 3.54.

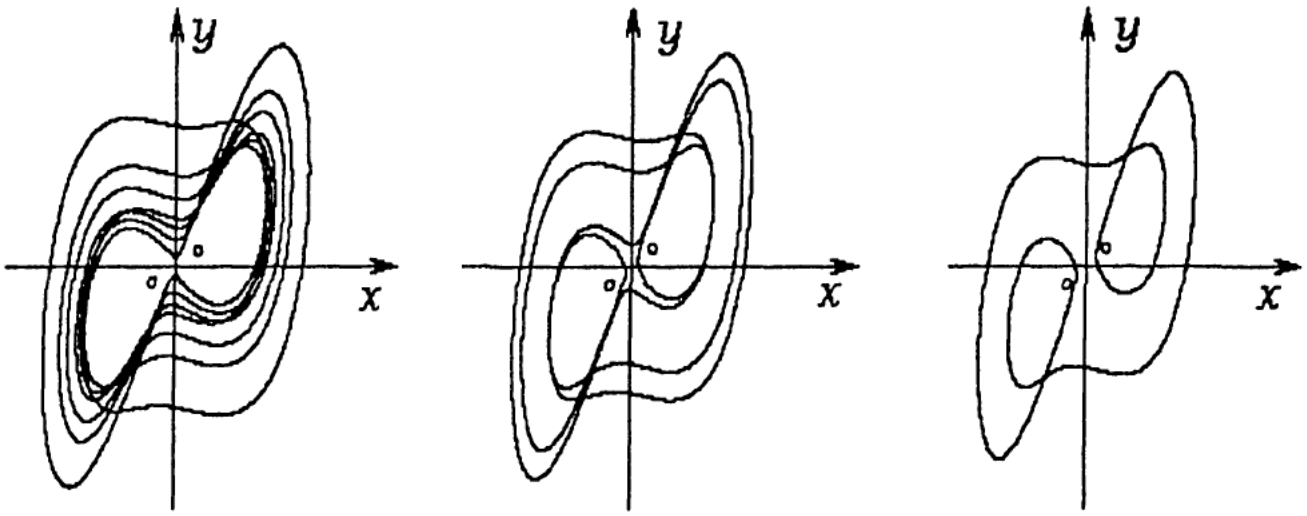

Рис. 3.52. Проекции циклов самоорганизации в системе (3.33) при значениях $\mu = 117.6$ и $\mu = 103.7$ и цикла C_{11} при $\mu = 90$.

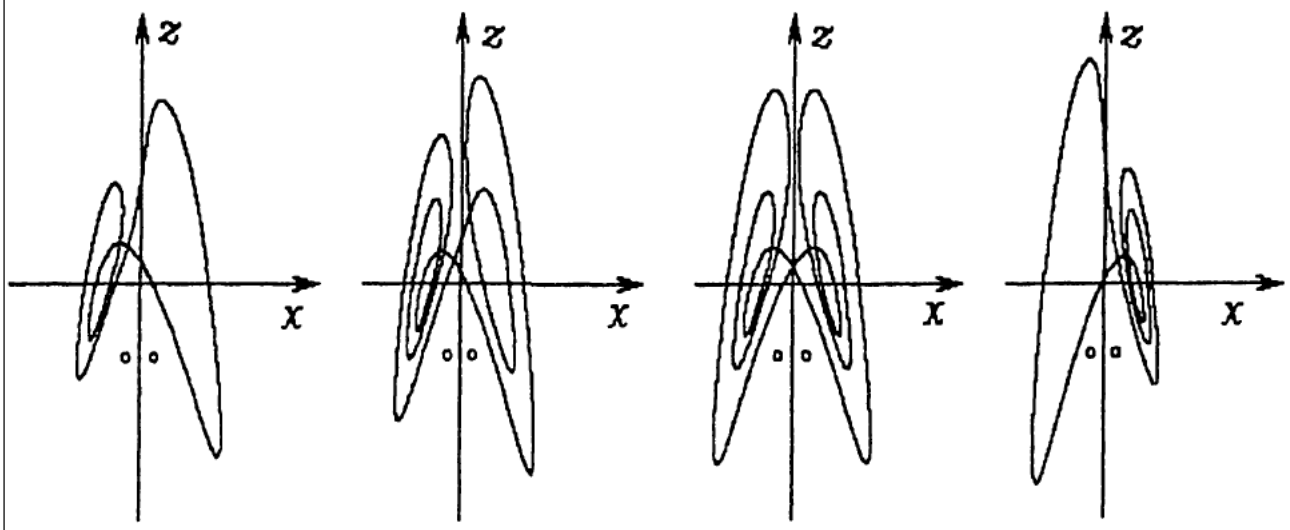

Рис. 3.53. Проекции устойчивых циклов C_1^- ($\mu = 58$), C_{12} ($\mu = 47.814$), C_{22} ($\mu = 53$) и C_2^+ ($\mu = 41.354$) в системе (3.33).

Таким образом, в системе Vallis мы имеем нерегулярный аттрактор, образовавшийся в результате неполного двойного гомоклиниче-

ского каскада бифуркаций, аналогично аттрактору в системе Лоренца. В зависимости от значений другого фиксированного параметра a здесь, как и в системе Лоренца, по-видимому, может рождаться как полный, так и неполный двойной гомоклинический аттрактор. Разбиение пространства параметров на области с различными видами аттракторов требует проведения специального исследования.

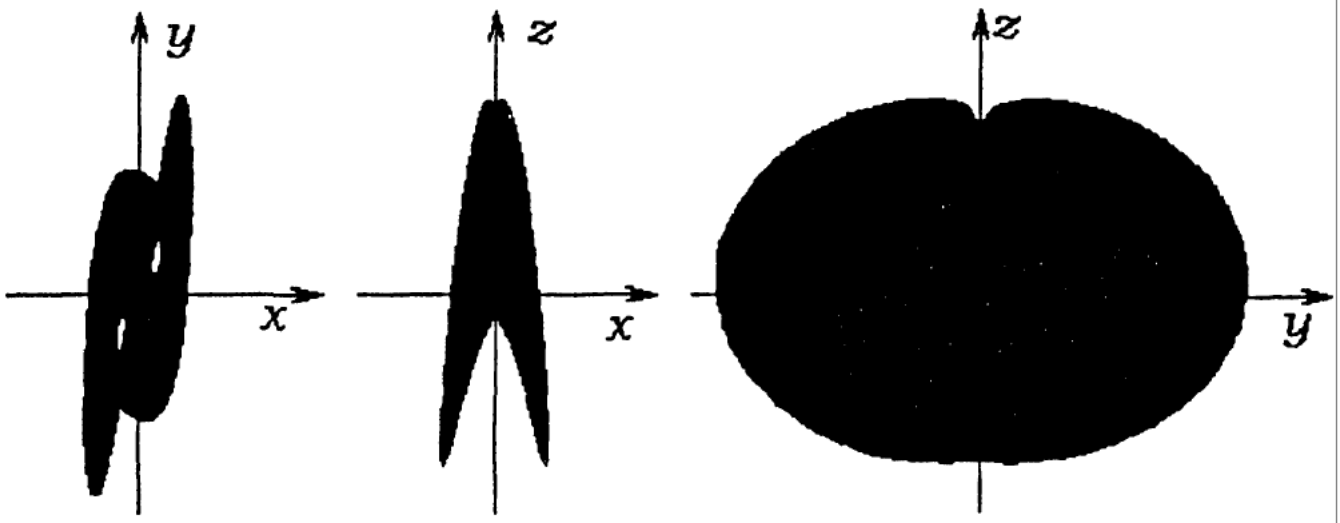

Рис. 3.54. Проекции неполного двойного гомоклинического аттрактора в системе (3.33).

Другая модель, назовем ее El-nino, предложена Валлисом для описания нелинейных взаимодействий атмосферы, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Эта модель является нелинейной и, в общем, неавтономной системой трех дифференциальных уравнений [81, 82]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(y-z) - b(x-f(t)), \\ \dot{y} &= xz - y + c, \\ \dot{z} &= -xy - z + c, \end{aligned} \tag{3.35}$$

где $x(t)$ - скорость поверхностного течения в океане, $y(t)$ и $z(t)$ температура воды соответственно на западной и восточной окраинах водного бассейна, $f(t) = a_0 + a_1 \sin 2\pi t$ - периодическая функция, учитывающая влияние пассатных ветров.

Рассмотрим сценарий образования нерегулярного аттрактора для случая $f(t) \equiv 0$, приведя, таким образом, систему (3.35) к автономному виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(y-z) - bx, \\ \dot{y} &= xz - y + c, \\ \dot{z} &= -xy - z + c, \end{aligned} \tag{3.36}$$

При значении $b > -2$ система (3.36) является диссипативной

($\mathrm{div}F(x,y,z) = -2-b < 0$) во всем фазовом пространстве. Она симметрична относительно замены переменных

$$x \to -x,\ y \to z,\ z \to y,$$

что находит отражение, в частности, в симметрии неподвижных (особых) точек: $O_0(0,c,c)$, $O_1(x^*,y^*,z^*)$ и $O_2(-x^*,z^*,y^*)$, где

$$x^* = \sqrt{\frac{2\mu c}{b} - 1},\ y^* = \frac{b + \sqrt{2\mu bc - b^2}}{2\mu},\ z^* = \frac{b - \sqrt{2\mu bc - b^2}}{2\mu}.$$

Для дальнейшего исследования примем фиксированными значения параметров $b = 10$, $c = 12$ и рассмотрим поведение решений системы (3.36) в зависимости от параметра μ. Начнем изучение с состояния равновесия неподвижных точек, которое определяется собственными значениями матрицы Якоби

$$J(x^*,y^*,z^*) = \begin{pmatrix} -b & \mu & -\mu \\ z^* & -1 & x^* \\ -y^* & -x^* & -1 \end{pmatrix}.$$

В системе El-nino, также как и в рассмотренной выше системе, точка $O_0(0,c,c)$ является неподвижной при любых значениях параметров μ, b, c. Характеристическое уравнение для этой точки имеет вид

$$(\lambda+1)(\lambda^2 + \lambda(b+1) + b - 2\mu c) = 0,$$

из которого следует, что точка O_0 имеет состояние равновесия типа устойчивого узла при условии $\mu < b/2c$, а при $\mu > b/2c$ она теряет устойчивость, становясь седло-узлом, имеющим двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия. При потере устойчивости точки O_0 появляются две другие точки O_1 и O_2, состояния равновесия которых определяются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \lambda^2(b+2) + \lambda\left(b + \frac{2\mu c}{b}\right) + 4\mu c - 2b = 0. \qquad (3.37)$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица

$$b + 2 > 0,\ (b+2)\left(b + \frac{2\mu c}{b}\right) > 4\mu c - 2b > 0$$

точки O_1 и O_2 устойчивы до значения $\mu < \mu^* = (b^3 + 4b^2)/2(b-2)$. При значениях $\mu > \mu^*$ уравнение (3.37) имеет один отрицательный корень и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью и, следовательно, точки O_1 и O_2 являются седло-фокусами. Отметим, что в системе El-nino наблюдается та же ситуация, что и в системе Лоренца, а именно: в момент потери устойчивости одной из

точек появляются две новые неподвижные точки, которые остаются устойчивыми фокусами до некоторого критического значения параметра μ^*. По-видимому, следует ожидать, что сценарий рождения хаотического аттрактора в системе El-nino будет аналогичен сценарию в системе Лоренца. Численные эксперименты показывают, что это действительно так. Причем, в зависимости от значений фиксированных параметров здесь, как и в системе Лоренца, могут иметь место как полный, так и неполный двойные гомоклинические каскады бифуркаций. Однако, подробное описание всех сценариев образования хаотических аттракторов в системе El-nino, так же как и в предыдущем случае, требует дополнительного исследования. Мы ограничимся обсуждением тех общих механизмов в картине рождения нерегулярных аттракторов, которые имеют принципиальное значение для большого класса динамических диссипативных систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

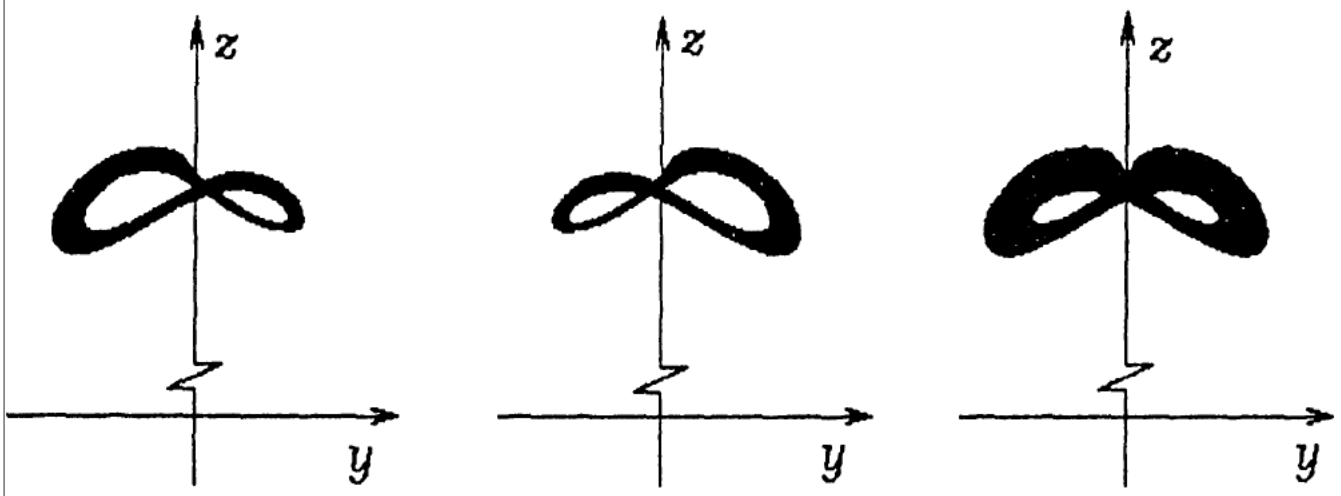

Рис. 3.55. Нерегулярные аттракторы в системе (3.36) при значениях параметра $\mu = 225$ и $\mu = 223.8$.

При указанных выше фиксированных значениях параметров $b = 10$ и $c = 12$ в системе El-nino на интервале значений параметра $\mu \in (346, \infty)$ имеется единственный аттрактор – цикл C_0, охватывающий обе точки O_1 и O_2. При значении $\mu \approx 346$ этот цикл теряет устойчивость и в результате бифуркации образуются два других устойчивых цикла C_0^+ и C_0^-, которые при дальнейшем уменьшении параметра μ в ходе субгармонического каскада бифуркаций, о чем свидетельствуют циклы $C_0^{\pm}$ периода 3 при значении $\mu = 231.5$, образуют на множестве $\mu \in (224, 230)$ аттракторы в виде двух лент (рис. 3.55), порожденных бесконечным числом неустойчивых циклов. При $\mu \approx 223.9$ обе ленты сливаются в один аттрактор. На множестве значений параметра $\mu \in (138.7, 150.5)$ наблюдается цикл C_{11}. Завершается первая стадия гомоклинического каскада рождением цикла C_1 при $\mu \approx 100.69$

Отметим, что субгармонический каскад бифуркаций цикла C_1 при

указанных выше фиксированных значениях параметров $b = 10$, $c = 12$ в системе El-nino завершается при значении $\mu = 99.327$ образованием цикла C_1 периода 3. При этом критическое значение $\mu^* = 87.5$. Иными словами уже первая стадия гомоклинического каскада завершается вблизи изменения состояния устойчивости неподвижных точек O_1 и O_2. Поэтому здесь затруднительно точно указать тип наблюдаемого аттрактора. Мы можем констатировать, что в системе El-nino аттрактор образуется в результате двойного гомоклинического каскада бифуркаций. Однако, является ли он полным или нет, то есть существует ли при данных значениях фиксированных параметров точка накопления гомоклинических циклов, на основании данных исследований сказать нельзя.

В заключение укажем еще одну особенность гомоклинических каскадов в системе El-nino. В интервале $\mu \in (b/2c, \mu^*)$, то есть в случае,

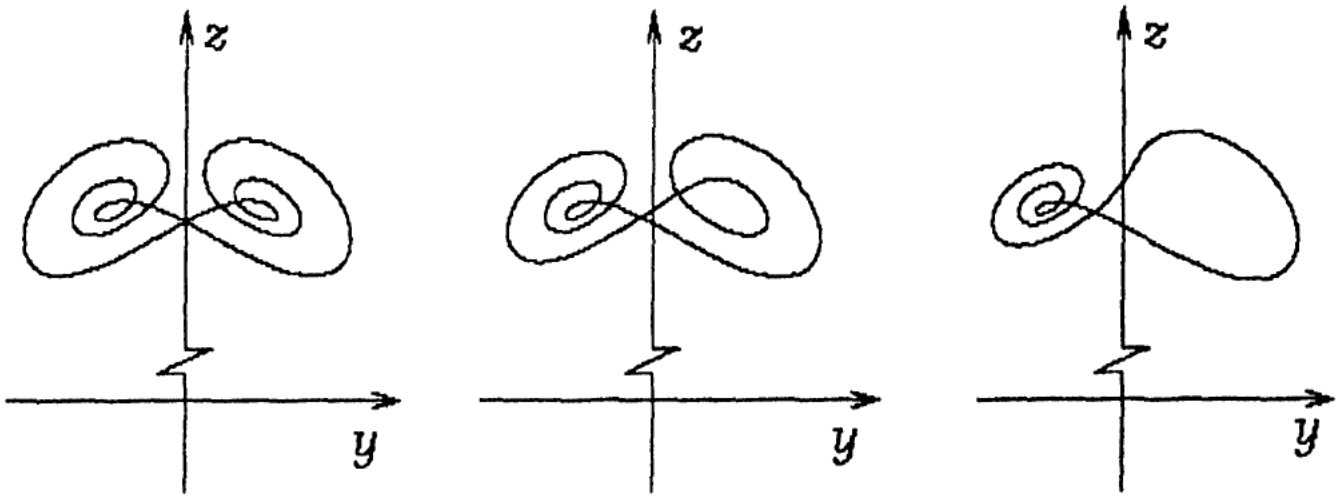

Рис. 3.56. Устойчивые циклы гомоклинического каскада C_{22}, C_{12}^- и C_2^- соответственно при значениях $\mu = 83.60$, $\mu = 77.3475$ и $\mu = 68.95$.

когда неподвижная точка O_0 остается неустойчивой, а неподвижные точки O_1 и O_2 являются устойчивыми, мы обнаружили следующие циклы гомоклинических каскадов: цикл C_{22} при $\mu \in (83.58, 83.62)$, цикл C_{12} при $\mu \in (77.345, 77.350)$ и цикл C_2 при $\mu \in (68.92, 68.97)$ (рис. 3.56) со своими субгармоническими каскадами. Не останавливаясь здесь на обсуждении этих особенностей, отметим, что мы уже встречались и встретимся в дальнейшем с системами, где гомоклинические каскады существуют вне окрестностей устойчивых особых точек. В частности подобные особенности наблюдаются и в системе уравнений Лоренца при фиксированных значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 0.5$ (см. п. 3.1.3 и [31]). Существование отмеченных особенностей свидетельствует о том, что ведущую роль в образовании нерегулярных аттракторов играют не особые точки и не гомоклинические и гетероклинические контуры седло-узлов и седло-фокусов, а некоторые циклы, которые дают начало каскадам бифуркаций и, в первую очередь, каскаду бифуркаций удвоения периода. В главе 4 рассмотрена теория таких циклов,

названных сингулярными, и изложен механизм образования порождаемых ими различных сингулярных аттракторов.

3.5.2. Система Рикитаки. Система из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [83]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + yz, \\ \dot{y} &= -\mu y + xu, \\ \dot{z} &= 1 - xy - bz, \\ \dot{u} &= 1 - xy - cu, \end{aligned} \tag{3.38}$$

предложена в 1958 г. T. Rikitaki для моделирования динамики изменения магнитных полюсов Земли. При положительных значениях параметров μ, b, c очевидно, что

$$\mathrm{div}F(x,y,z,u) = -(2\mu + b + c) < 0,$$

и система (3.38) является диссипативной. Система (3.38) имеет три неподвижные (особые) точки: $O_0(0,0,1/b,1/c)$ и

$$O_i\left((-1)^i\sqrt{\sqrt{\frac{c}{b}} - \mu c},\ (-1)^i\sqrt{\sqrt{\frac{b}{c}} - \mu b},\ \mu\sqrt{\frac{c}{b}},\ \mu\sqrt{\frac{b}{c}}\right),\ i = 1,2.$$

Точка O_0 является неподвижной при любых положительных значениях параметров, а точки O_1 и O_2 существуют только при условии $\mu^2 bc < 1$. Для определения условий устойчивости этих точек найдем собственные значения матрицы Якоби

$$J(x^*,y^*,z^*,u^*) = \begin{pmatrix} -\mu & z^* & y^* & 0 \\ u^* & -\mu & 0 & x^* \\ -y^* & -x^* & -b & 0 \\ -y^* & -x^* & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

В точке O_0 они определяются характеристическим уравнением

$$(\lambda + b)(\lambda + c)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - 1/bc) = 0,$$

из которого следует, что данная точка является устойчивым узлом при значении $\mu^2 > 1/bc$, а при $\mu^2 < 1/bc$ она теряет устойчивость и становится седло-узловой точкой.

Две другие неподвижные точки O_1 и O_2, как видно из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^3(2\mu + b + c) + \lambda^2(2\mu(b+c) + bc + x^{*2} + y^{*2}) + \\ + \lambda(x^*y^*(z^* + u^*) + x^{*2}(\mu + b) + y^{*2}(\mu + c) + 2\mu bc) + \\ + \mu(bx^{*2} + cy^{*2}) + x^*y^*(bz^* + cu^*) = 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

имеют одинаковое состояние равновесия. Определить это состояние аналитически, исходя из вида данного уравнения затруднительно. Мы численно рассчитали собственные значения якобиана в точках O_1 и O_2 в зависимости от параметра μ при фиксированных значениях $b = 0.004$ и $c = 0.002$. Численные расчеты показывают, что при всех значениях параметра $\mu \in (0, \sqrt{1/bc})$ два корня уравнения (3.39) являются вещественными и отрицательными, причем один из них пропорционален по абсолютной величине параметру μ, а два других корня – комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью. Таким образом, в данной системе нет условий для бифуркации Андронова-Хопфа и, как оказалось, поведение решений системы (3.1) существенно зависит от начальных условий. Если начальные условия выбраны вблизи неподвижных точек O_1 или O_2, то траектория притягивается к соответствующей неподвижной точке. Причем область устойчивости этих точек расширяется с ростом значений параметра μ. Если же начальные условия взяты вне области притяжения этих неподвижных точек, тогда в системе (3.38) наблюдаются как устойчивые, так и неустойчивые периодические решения. Так, например, на множестве значений $\mu \in (2.3, \sqrt{1/bc})$ наблюдается устойчивый цикл типа C_0, который охватывает восьмеркой обе неподвижные точки O_1 и O_2. При значении $\mu \approx 2.3$ происходит бифуркация этого цикла, в результате которой образуются два устойчивых цикла вида C_0^- и C_0^+, аналогично тому, как это происходит в системе Лоренца (рис. 3.57).

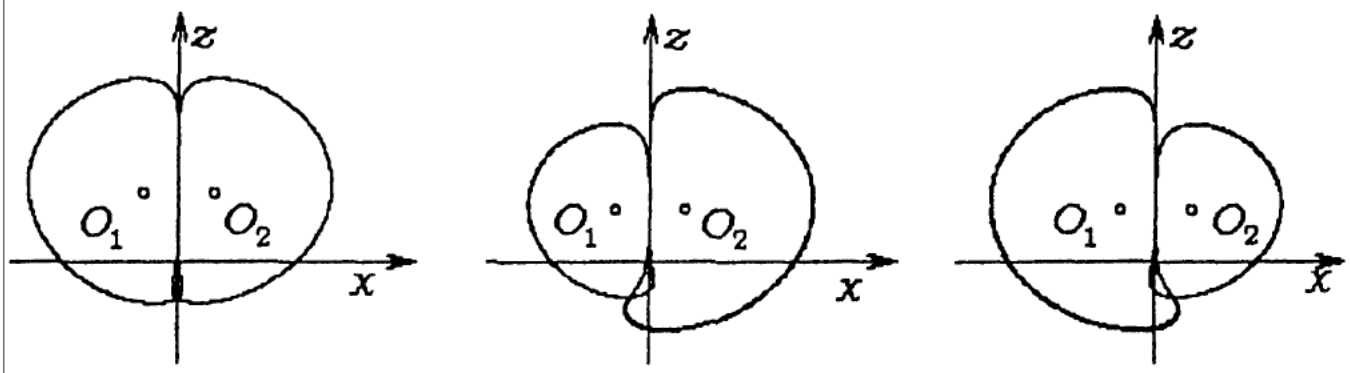

Рис. 3.57. Циклы C_0 и C_0^-, C_0^+ в системе (3.38) соответственно при значениях параметра $\mu = 3$ и $\mu = 2.23$.

Однако при заданных фиксированных значениях параметров $b = 0.004$ и $c = 0.002$ проследить гомоклинический каскад бифуркаций, двигаясь вниз по параметру μ, не удается, так как устойчивые циклы имеют чрезвычайно узкие бассейны притяжения. К счастью сценарий перехода к хаосу в системе Рикитаки не ограничен отмеченными выше бифуркациями. Оказывается, те же самые циклы C_0 и $C_0^{\pm}$ и другие циклы гомоклинического каскада обнаруживаются при малых значениях параметра μ и имеют при этом достаточно большие бассейны притяжения. Это позволяет рассматривать сценарий образования нерегулярных аттракторов, двигаясь по мере увеличения пара-

метра μ. Так цикл вида C_0 наблюдается при значениях $\mu \in (0.1, 0.448)$, а при $\mu = 0.448$ вследствие бифуркации этого цикла образуются два устойчивых цикла $C_0^{\pm}$ (рис. 3.58), которые при увеличении параметра μ порождают каскад бифуркаций Фейгенбаума.

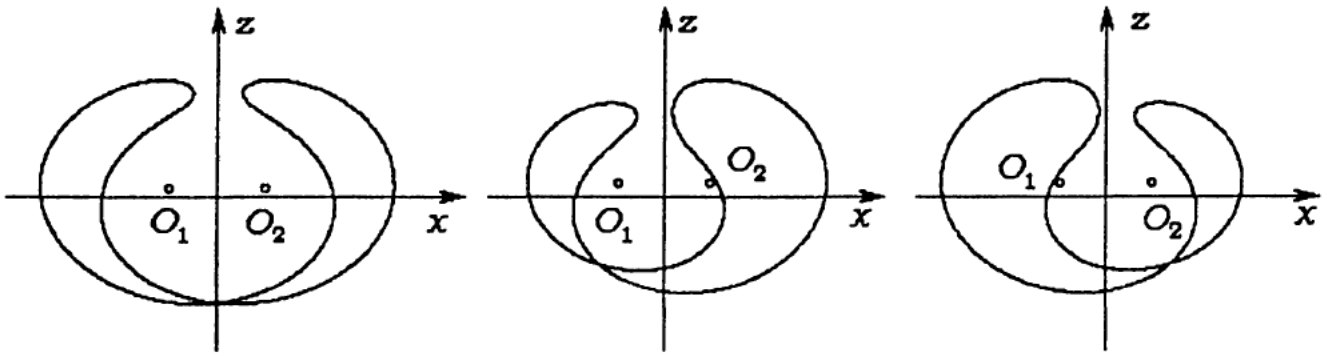

Рис. 3.58. Циклы C_0 и C_0^-, C_0^+ в системе (3.38) соответственно при значениях параметра $\mu = 0.4$ и $\mu = 0.47$.

В качестве примера укажем циклы $C_0^{\pm}$ периода 2 на множестве $\mu \in (0.489, 0.493)$, циклы периода 4 при $\mu \in (0.49340, 0.49436)$ и циклы периода 8 при $\mu \in (0.4938, 0.49454)$. Устойчивых циклов периода 5 и 3 в данной системе установить не удалось. Каждый из циклов C_0^- и C_0^+ сначала порождает в ходе субгармонического каскада бифуркаций свою ленту, а затем эти ленты сливаются в один нерегулярный аттрактор. Образование аттракторов в виде двух лент завершается

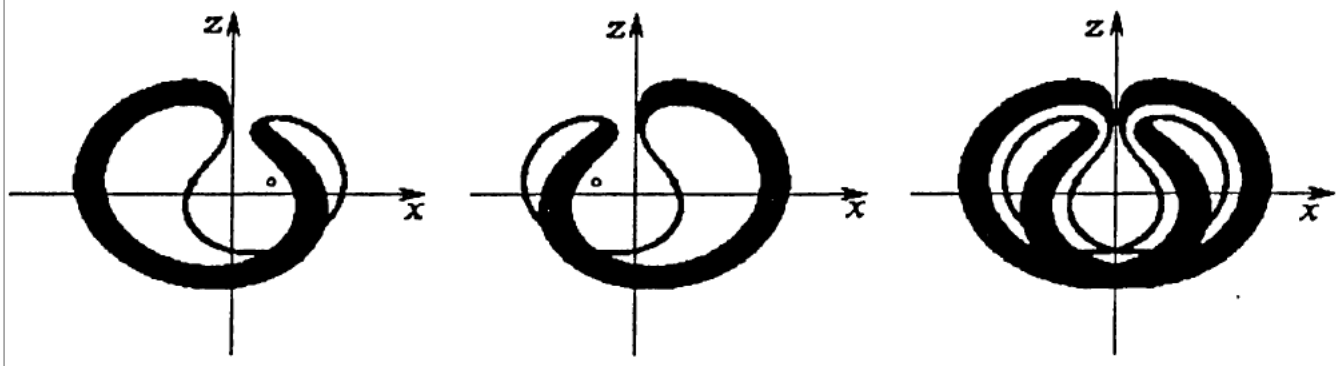

Рис. 3.59. Нерегулярные аттракторы в системе (3.38) при значениях параметра $\mu = 0.498$ и $\mu = 0.505$.

при значении $\mu \approx 0.498$, а при значении $\mu \approx 0.501$ происходит слияние этих лент, знаменующее появление неполного двойного субгармонического нерегулярного аттрактора (рис. 3.59).

Аналогично сценарию рождения двойного гомоклинического аттрактора в системе Лоренца, здесь также первая стадия гомоклинического каскада завершается циклом C_1 ($\mu \approx 0.609$), которому предшествует появление цикла C_{11} ($\mu \in (0.523, 0.531)$, рис. 3.60), порождающего свои циклы $C_{11}^{\pm}$ и соответствующие им каскады бифуркаций.

Вторая стадия гомоклинического каскада завершается образованием цикла C_2 при значении $\mu = 0.6786$, а в области значений $\mu \in (0.72662, 0.72667)$ лежит цикл C_3. На рис. 3.61 приведены проекции циклов C_1, C_2 и C_3 на плоскость (x, z).

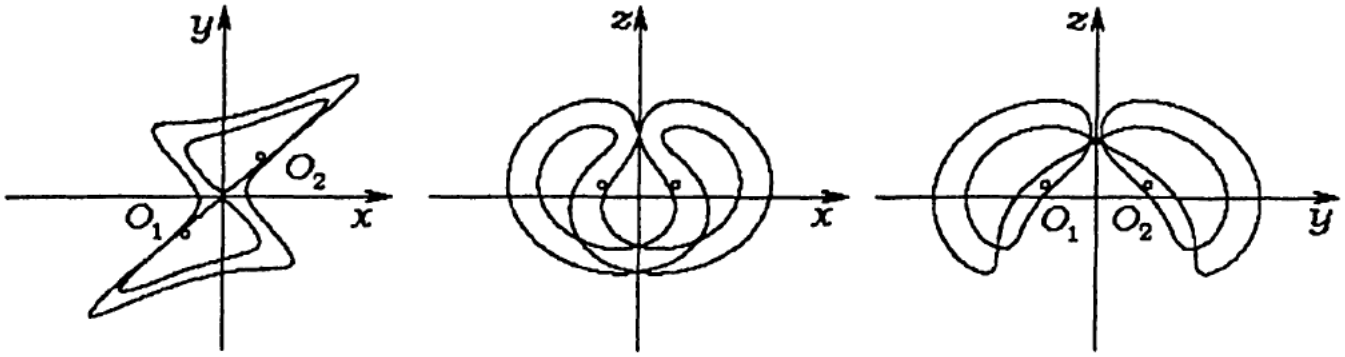

Рис. 3.60. Проекции цикла C_{11} в системе (3.38) при значении параметра $\mu = 0.530$.

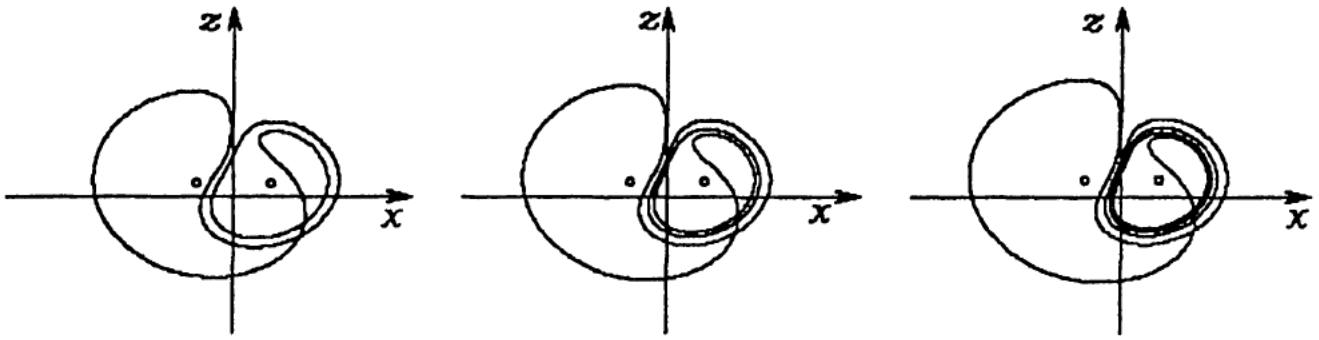

Рис. 3.61. Проекции циклов C_1, C_2 и C_3 гомоклинического каскада в системе (3.38) соответственно при значениях параметра $\mu = 0.61$, $\mu = 0.6787$ и $\mu = 0.72665$.

Как видно из приведенных данных с каждой последующей стадией гомоклинического каскада резко сокращаются области устойчивости циклов. Поэтому трудно установить количество стадий гомоклинического каскада бифуркаций, участвующих в образовании нерегулярных аттракторов. Но поскольку обе неподвижные точки O_1 и O_2 во всей области существования нерегулярных аттракторов являются устойчивыми фокусами, то число стадий конечно, а все аттракторы являются неполными. Относительно сценария образования нерегулярных аттракторов можно совершенно определенно утверждать, что и в данной системе такие аттракторы возникают вследствие двойного гомоклинического каскада бифуркаций. Причем, данный каскад имеет место как при уменьшении параметра μ от значения $\mu \approx 2.3$, так и при его увеличением от значения $\mu \approx 0.1$. На рис. 3.62 изображены проекции неполного двойного гомоклинического аттрактора системы Рикитаки при $\mu = 1$.

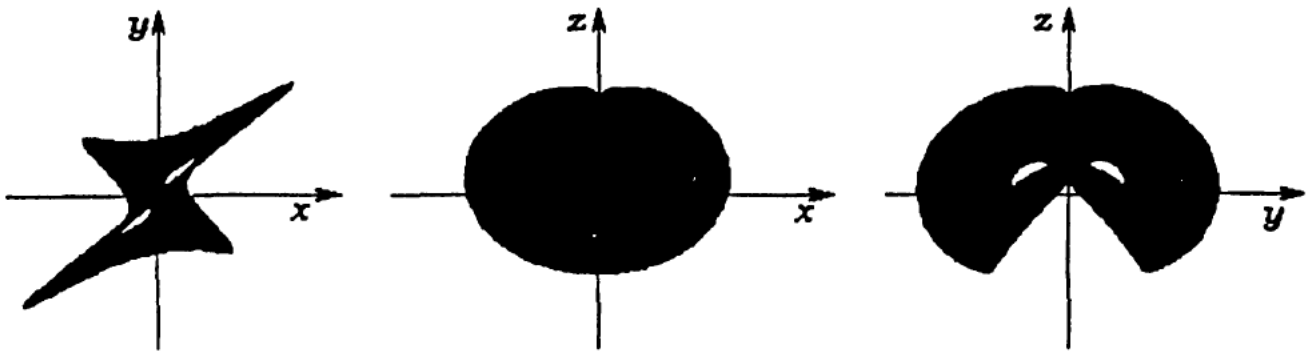

Рис. 3.62. Проекции неполного двойного гомоклинического нерегулярного аттрактора системы (3.38) при значении параметра $\mu = 1$.

3.5.3. Система "Simple" [84]. Система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + \mu yz, \\ \dot{y} &= x - y, \\ \dot{z} &= 1 - xy \end{aligned} \tag{3.40}$$

с квадратичной нелинейностью в правой части и одним параметром $\mu > 0$ моделирует некоторый автоколебательный процесс с диссипацией ($\mathrm{div}F(x,y,z) = -1$). Эта система имеет два состояния равновесия $O_1(-1,-1,1/\mu)$ и $O_2(1,1,-1/\mu)$, которые антисимметричны относительно знаков переменных. Собственные значения матрицы линеаризации в этих точках определяются различными характеристическими уравнениями: для точки O_1

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda(\mu - 1) + 2\mu = 0, \tag{3.41}$$

для точки O_2

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda(\mu + 1) + 2\mu = 0. \tag{3.42}$$

Из условий Рауса-Гурвица видно, что точка O_1 неустойчива при любых значениях параметра μ. Причем при значениях $\mu = -1$ и $\mu = 0$ уравнение (3.41) может быть решено точно и имеет соответственно следующие наборы решений:

$$\lambda(-1) = \{-1, \pm\sqrt{2}\} \qquad \text{и} \qquad \lambda(0) = \{0, (-1 \pm \sqrt{5})/2\}.$$

Компьютерные расчеты показывают, что точка O_1 является седло-узлом с двумерным устойчивым многообразием в интервале значений параметра $\mu \in (-1.146, 0)$ и седло-узлом с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразием при значениях $\mu \in (0, 0.08)$. При $\mu > 0.08$ эта точка становится неустойчивым седло-фокусом и имеет одномерное устойчивое и двумерного неустойчивое многообразия.

Условия Рауса-Гурвица для уравнения (3.42) показывают, что точка O_2 устойчива в интервале $\mu \in (0, 1)$. При значении $\mu = 1$ в системе

(3.40) в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл. В ходе дальнейшего увеличения параметра имеет место субгармонический каскад бифуркаций, и при $\mu = 2.036$ наблюдается устойчивый цикл периода 3 (рис. 3.63). Таким образом, хаотическое поведение системы при значениях параметра $\mu > 2.036$ обусловлено субгармоническим каскадом бифуркаций периодических решений, порожденных при потере устойчивости точки O_2 (рис. 3.64). Однако, уже при значениях параметра $\mu \geq 2.3$ в формировании нерегулярных аттракторов в системе (3.40) начинает проявляться влияние неподвижной точки O_1.

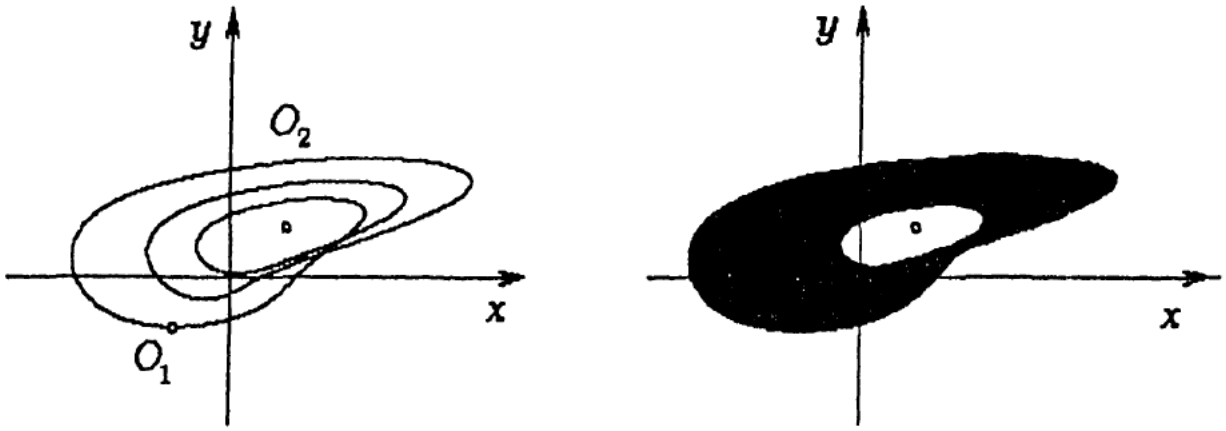

Рис. 3.63. Проекции цикла периода 3 при значениях параметра $\mu = 2.036$ и нерегулярного аттрактора при $\mu = 2.1$.

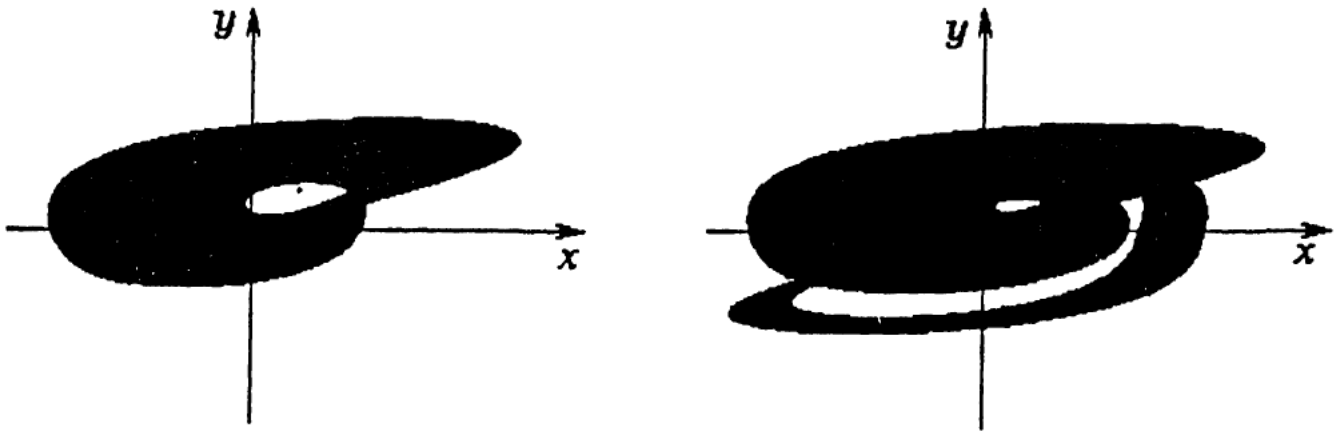

Рис. 3.64. Проекции нерегулярных аттракторов соответственно при значениях параметра $\mu = 2.3$ и $\mu = 2.37$.

Рассмотрим, как развивается сценарий перехода к хаосу при уменьшении значений параметра μ от $+\infty$. При значениях $\mu \in (10.45, \infty)$ система имеет единственный аттрактор – цикл C_0, охватывающий обе точки O_1 и O_2. С уменьшением значений параметра μ происходит субгармонический каскад бифуркаций цикла C_0. Так при значении $\mu = 8.31$ цикл C_0 имеет период 3, а при $\mu \in (7.95, 8.14)$ в системе (3.40) существует нерегулярный аттрактор, образовавшийся в резуль-

тате субгармонического каскада бифуркаций цикла C_0 (рис. 3.65).

Важно отметить, что при значении $\mu = 7.68$ в системе (3.40) рождается цикл C_1^-, имеющий один дополнительный оборот относительно точки O_1. Появление этого цикла свидетельствует о наличии гомоклинического каскада бифуркаций, аналогичного тому, который имеет место в системе уравнений Лоренца. Однако, в системе "Simple", в отличие от системы Лоренца, неподвижные точки O_1 и O_2 не имеют одинаковых собственных значений и, следовательно, различаются состояниями равновесия. Поэтому здесь циклы $C_k^{\pm}$, $k = 1, 2, ...$ рождаются не одновременно, но каждый из них появляется при соответствующем значении параметра. Так цикл C_1^+ наблюдается при значении $\mu = 5.19$. Тем не менее каждый из этих циклов порождает свой субгармонический каскад бифуркаций, о чем свидетельствуют циклы периода 3 для циклов C_1^- и C_1^+ соответственно при значениях $\mu = 7.296$ и $\mu = 5.102$ (рис. 3.66, рис. 3.67).

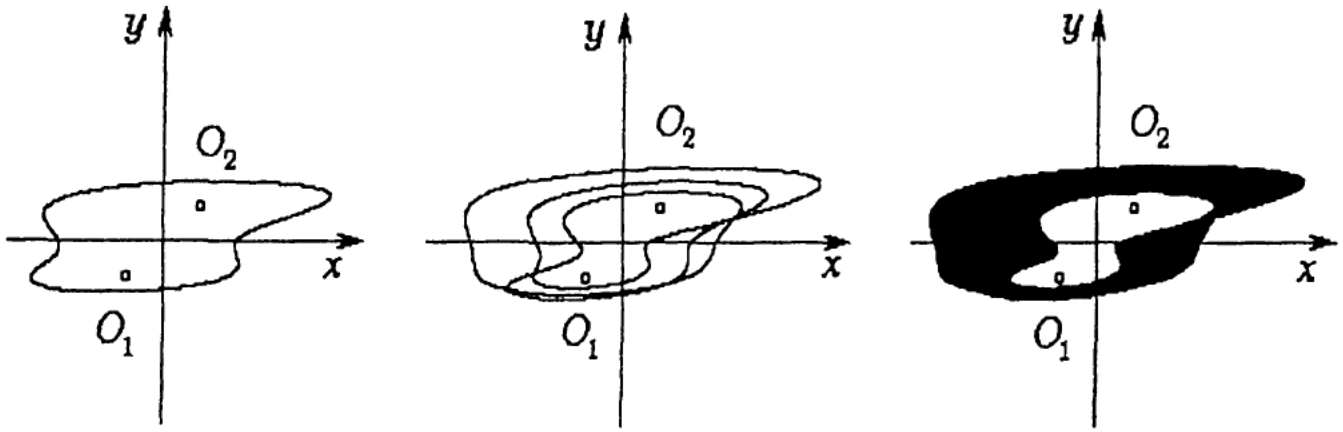

Рис. 3.65. Проекции цикла C_0 ($\mu = 12$), цикла C_0 периода 3 ($\mu = 8.31$) и нерегулярного аттрактора ($\mu = 8$) системы (3.40).

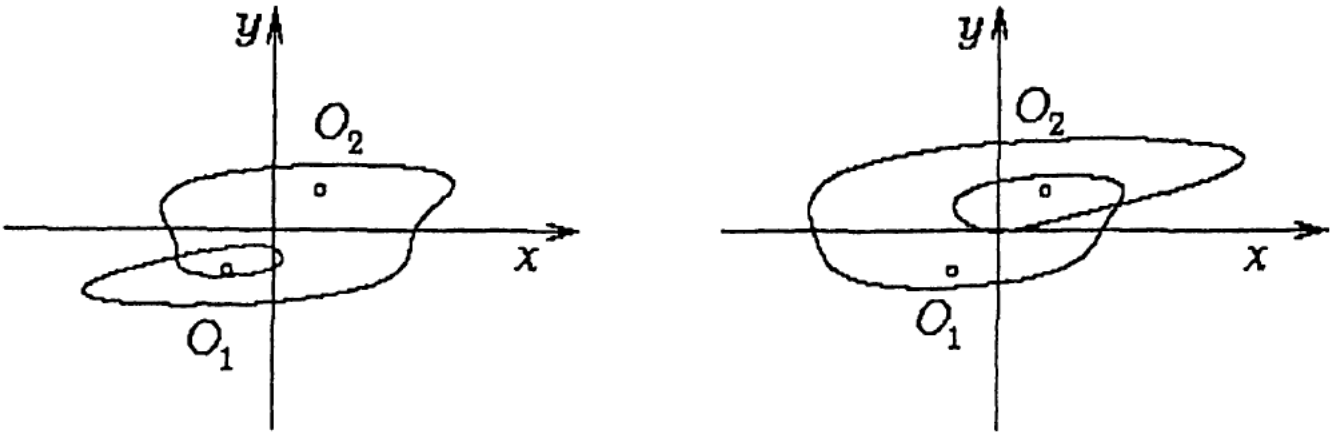

Рис. 3.66. Циклы C_1^- и C_1^+ соответственно при значениях параметра $\mu = 7.68$ и $\mu = 5.19$.

В системе "Simple", также как и в системе Лоренца, отмечены периодические решения типа циклов самоорганизации. Все эти харак-

терные черты: субгармонический каскад бифуркаций циклов, возникших вследствие бифуркации Андронова-Хопфа при потере устойчивости точки O_1, а также гомоклинический каскад, порождающий на каждой стадии собственные субгармонические каскады, свидетельствуют о тех же механизмах перехода к хаосу в системе "Simple", что и во всех рассмотренных выше системах.

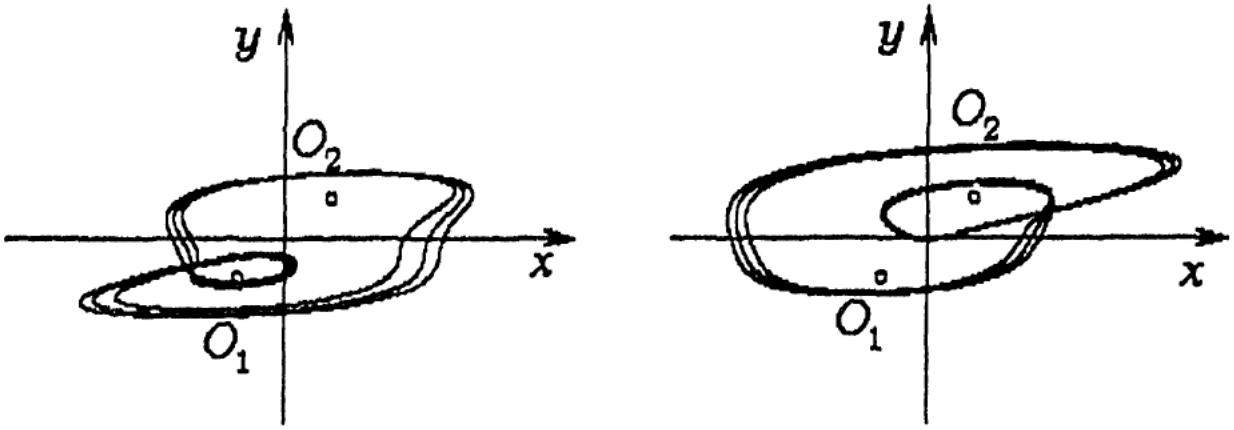

Рис. 3.67. Циклы периода 3 C_1^- и C_1^+ соответственно при значениях параметра $\mu = 7.296$ и $\mu = 5.102$.

3.5.4. Система Рабиновича-Фабриканта. В системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + ax, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + ay, \\ \dot{z} &= -2z(\mu + xy), \end{aligned} \tag{3.43}$$

предложенной Рабиновичем и Фабрикантом в 1979 г. [85], было обнаружено хаотическое поведение при значениях параметров $\mu = 1.1$ и $a = 0.87$. Отметим, что данная система всюду диссипативна при значениях $\mu > a$. Найдем ее неподвижные точки и определим их состояния равновесия. Одна из неподвижных точек $O_0(0, 0, 0)$ совпадает с началом координат и ее положение равновесия определяется характеристическим уравнением

$$(\lambda' + 2\mu)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1) = 0. \tag{3.44}$$

Корни $\lambda_1 = -2\mu$ и $\lambda_{2,3} = a \pm i$ уравнения (3.44) свидетельствуют, что точка O_0 является седло-фокусом, имеющим одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. Координаты других неподвижных точек определяются системой уравнений

$$x^2(4\mu - 3a) + ay^2 = 4\mu, \; xy + \mu = 0, \; z = 1 - x^2\left(1 - \frac{a}{\mu}\right),$$

решения которой зависят от значений параметров μ и a. Преобразуя эту систему к уравнению с одной переменной

$$ay^4 - 4\mu y^2 + \mu^2(4\mu - 3a) = 0,$$

получим, что последнее имеет вещественные корни при условии $4\mu - 3a \le 4/a$, которое совместно с условием $\mu > a$ диссипативности системы (3.43) определяет множество значений параметра $a \in (0; 2]$, при которых существуют другие неподвижные точки. При значении $\mu = 1/a + 3a/4$ система (3.43) помимо точки O_0 имеет еще две неподвижные точки

$$O_1\left(-\sqrt{a\mu/2},\ \sqrt{2\mu/a},\ (4+a^2)/8\right),$$
$$O_2\left(\sqrt{a\mu/2},\ -\sqrt{2\mu/a},\ (4+a^2)/8\right).$$

Для оценки состояния их равновесия найдем собственные значения матрицы Якоби

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} a - 2\mu & -ax^*/y^* & y^* \\ -ay^*/x^* - 2x^{*2} & a & 3x^* \\ -2y^*z^* & -2x^*z^* & 0 \end{pmatrix},$$

которые для указанных точек O_1 и O_2 определяются характеристическим уравнением

$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda(\mu - a) - 2a\mu\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) + 2z^*(3x^{*2} + y^{*2})) = 0. \qquad (3.45)$$

Корни уравнения (3.45) одинаковы для обеих точек O_1 и O_2, причем один из корней равен нулю, а два других корня имеют отрицательные вещественные части при $\mu > a$. Выполнив соответствующие расчеты, можно показать, что точки O_1 и O_2 в системе (3.43) при значении $\mu = 1/a + 3a/4$ являются устойчивыми. Однако в сценарии перехода к хаосу сами эти точки не имеют большого значения, так как определены только в единственной точке пространства параметров. При других же значениях параметра $\mu \in (0, 1/a + 3a/4)$ каждая из точек O_1 и O_2 образует пару неподвижных точек соответственно $O_{11}(-x_1^*, -y_1^*, z_1^*)$, $O_{21}(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$ и $O_{12}(-x_2^*, -y_2^*, z_2^*)$, $O_{22}(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$, где

$$x_i^* = \sqrt{\frac{a\mu}{2 + (-1)^i\sqrt{4 - 4a\mu + 3a^2}}},\ y_i^* = \frac{-\mu}{x_i^*},\ z_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Пары этих точек симметричны относительно поворота вокруг оси z на 180^0, что следует из системы уравнений для определения их координат. Поэтому для каждой пары неподвижных точек собственные

значения матрицы Якоби одинаковы и, следовательно, каждая пара неподвижных точек O_{11}, O_{21} и O_{12}, O_{22} имеет свое, одинаковое для обеих точек пары состояние равновесия.

Анализ состояний равновесия рассматриваемых пар точек в общем виде затруднителен, поэтому мы численно определили собственные значения матрицы Якоби соответственно для пар точек O_{11}, O_{21} и O_{12}, O_{22} при фиксированном значении параметра $a = 0.87$. Из численных расчетов следует, что пара точек O_{11} и O_{21}, будучи устойчивой при значении $\mu = \mu_0 \approx 1.7 < 1/a + 3a/4$, теряет затем устойчивость при значении параметра $\mu \approx 1.43$ вследствие бифуркации рождения предельного цикла. Эта бифуркация кладет начало каскаду Фейгенбаума. Так при значении $\mu \approx 1.182$ происходит удвоение периода предельного цикла, при $\mu \approx 1.159$ рождается цикл периода 4, при $\mu \approx 1.155$ – цикл периода 8, а при $\mu < 1.1536$ — нерегулярный аттрактор.

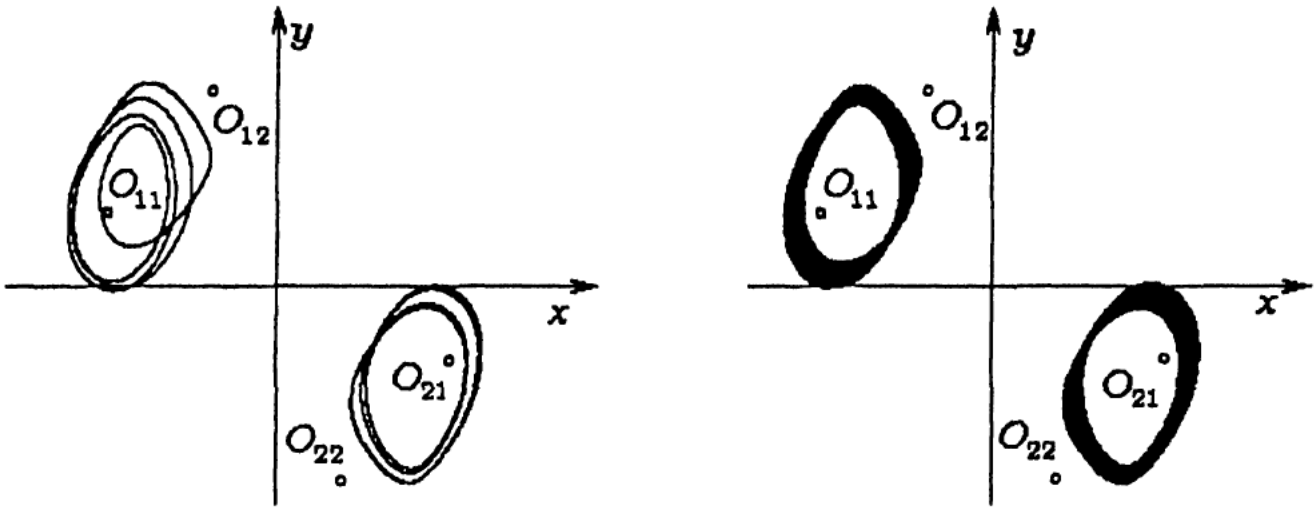

Рис. 3.68. Циклы периода 4 и нерегулярные аттрактор в системе (3.43) соответственно при значениях параметра $\mu = 1.158$ и $\mu = 1.152$.

Таким образом, возникающий при значении параметра $a = 0.87$ нерегулярный аттрактор обусловлен каскадом бифуркаций Фейгенбаума и неполным субгармоническим каскадом (рис. 3.68). Отметим, что при меньших значениях параметра $a = 0.7$ и $a = 0.5$ отмечается появление циклов периода 3, что говорит о возможности существования в системе (3.43) пе́рехода к хаосу и через полный субгармонический каскад бифуркаций и через гомоклинический каскад.

На рис. 3.68 показаны проекции на плоскость (x, y) циклов периода 4 и нерегулярных аттракторов. Каскады бифуркаций в системе (3.43) развиваются вокруг каждой из точек O_{11} и O_{21} независимо друг от друга, причем слияния лент аттракторов, как это наблюдается в ряде других систем, здесь не происходит.

Другая пара неподвижных точек O_{12} и O_{22} теряет устойчивость при значениях параметра $\mu < 1/a + 3a/4$ и переходит в состояние равновесия седло-фокуса, имеющего двумерное устойчивое и одномерное

неустойчивое многообразия. При дальнейшем уменьшении значений параметра μ появляются признаки гомоклинического каскада перехода к хаотическому режиму, о чем свидетельствует цикл типа C_3 при $\mu = 1.0978$ (рис. 3.69). Появление циклов гомоклинического каскада следует ожидать в связи с тем, что все неподвижные точки имеют состояние равновесия типа седло-фокус. Однако, сценарий перехода к хаосу через гомоклинический каскад бифуркаций в данной системе развития не имеет.

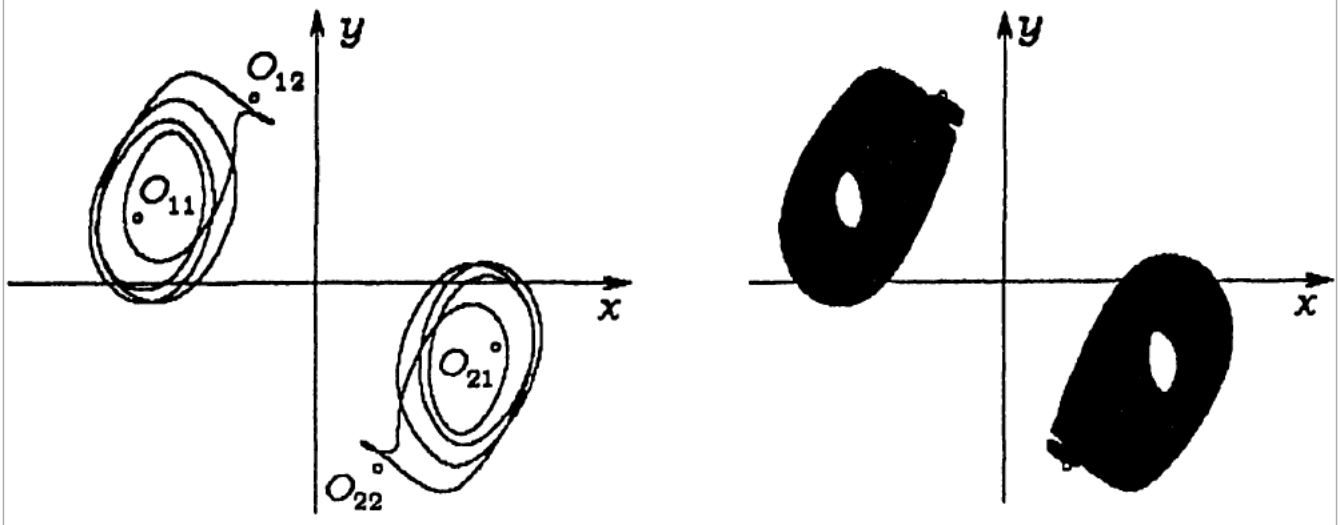

Рис. 3.69. Циклы типа C_3 при значении параметра $\mu = 1.0978$ и нерегулярные субгармонические аттракторы при $\mu = 1.097$ в системе (3.43).

Таким образом, в системе (3.43) присутствуют те же сценарии образования нерегулярных аттракторов, что и в системе Лоренца и в других системах. Причем, основную роль в их появлении здесь играет субгармонический каскад бифуркаций.

3.6. Заключительные замечания и выводы

Результаты приведенных в данной главе исследований ряда диссипативных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, показали, что все нерегулярные аттракторы этих систем являются сингулярными, а переход к хаотическому поведению осуществляется во всех рассмотренных системах с использованием одних и тех же механизмов. К ним относятся каскад бифуркаций удвоения периода циклов (каскад Фейгенбаума), субгармонический каскад бифуркаций, определяющий кратность периодов циклов согласно порядку Шарковского, и гомоклинический каскад бифуркаций. Эти же механизмы приводят к появлению хаотической динамики и в системах дифференциальных уравнений с частными производными, и в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см. главу 5).

Указанные механизмы порождают разнообразие сингулярных аттракторов в силу как геометрического строения динамических систем, так и за счет возможности реализации каскадов бифуркаций в

различных комбинациях и в разном объеме. Геометрическое строение систем связано с количеством, характером и расположением их особых точек и особых контуров, а также со структурой сепаратрисных поверхностей особых точек и особых циклов, дающих начало каскадам бифуркаций. Оно определяет строение сингулярных аттракторов, их симметрию, наличие или отсутствие двойных каскадов бифуркаций, порождающих аттракторы и т.д. По сложности и мощности множества циклов, участвующих в образовании аттрактора, следует различать полные или неполные, субгармонические и гомоклинические сингулярные аттракторы. Простейшим сингулярным аттрактором, присутствующим во всех системах, является аттрактор Фейгенбаума.

Другим важным наблюдением является обнаружение того факта, что ни наличие петли сепаратрисы седло-узла или седло-фокуса, ни наличие самого седло-узла или седло-фокуса не являются необходимыми условиями существования в диссипативной системе нелинейных дифференциальных уравнений хаотической динамики. Численные эксперименты также показали, что сингулярные аттракторы не являются структурно устойчивыми образованиями, лежат на двумерных гладких поверхностях трехмерного фазового пространства и, по всей видимости, не имеют положительных показателей Ляпунова, а их размерность не превышает величины два. Теория таких аттракторов рассмотрена в следующей главе.

Глава 4. Основы теории динамического хаоса в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

В работах [29–34] авторами были высказаны обоснованные предположения о том, что вопреки общепринятому мнению нерегулярные аттракторы нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений могут лежать на гладких подмногообразиях фазового пространства (двумерных поверхностях в трехмерном случае) и что весьма правдоподобным является отсутствие единого положительного показателя Ляпунова при движении по таким аттракторам. При этом размерность нерегулярных аттракторов трехмерных систем не должна быть больше двух, а хаос должен определяться не гиперболичностью системы и не экспоненциальным разбеганием траекторий на аттракторе, а сдвигом фазы одних траекторий относительно других при притяжении к аттрактору. Было также высказано предположение о том, что нерегулярные аттракторы трехмерных систем не являются некоторыми новыми устойчивыми в фазовом пространстве и структурно устойчивыми по отношению к параметрам образованиями, а существуют только в отдельных точках накопления значений бифуркационного параметра, являясь по сути замыканиями полуустойчивых непериодических траекторий. Эти предположения также полностью подтверждаются результатами многочисленных вычислительных экспериментов, приведенных в главах 3 и 5.

В настоящей главе все сформулированные выше проблемы решены положительно для широкого класса трехмерных автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих изначально сингулярный устойчивый цикл. Доказано [35], что все регулярные и сингулярные аттракторы таких систем, возникающие после потери устойчивости сингулярного цикла при изменении величины системного параметра в процессе субгармонического, гомоклинического и, возможно, более сложных каскадов бифуркаций, принадлежат замыканию его гладкого двумерного, как минимум двулистного неустойчивого инвариантного многообразия. Обнаружен механизм, посредством которого сдвиг фаз траекторий системы при их вращении вокруг исходного сингулярного цикла дает возможность перейти к некоторому одномерному непрерывному немонотонному отображению отрезка в себя в некоторой двумерной движущейся вдоль цикла плоскости. Исходному циклу в этой плоскости соответствует особая (неподвижная) точка типа "ротор" (см. 4.4) двумерной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Установленный переход дает возможность объяснить природу и принципы формирования сингулярных аттракторов автономных трехмерных систем на основе теории одномерных непрерывных немоно-

тонных отображений, фундамент которой заложен в работах М. Фейгенбаума, А. Шарковского, Т. Ли и Дж. Йорке [66, 76, 86–88]. Из этой теории следует, что переход к хаосу в трехмерных автономных нелинейных системах дифференциальных уравнений, имеющих сингулярные циклы, осуществляется именно тем способом, который мы наблюдаем в численных экспериментах – через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода циклов, а затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского.

В п. 4.1 настоящей главы излагается общая теория одномерных нелинейных отображений, в п. 4.2 – теория Фейгенбаума каскада бифуркаций удвоения периода циклов одномерных отображений, в п. 4.3 – теория образования циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. В п. 4.4 изложена теория регулярных и сингулярных устойчивых и седловых циклов трехмерных автономных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и теория особых точек типа ротор двумерных неавтономных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В п. 4.5 представлена теория сингулярных аттракторов в трехмерных автономных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, а в п. 4.6 приведены примеры таких систем, иллюстрирующие различные аспекты теории.

Так как других сценариев перехода к хаосу в трехмерных автономных диссипативных системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, кроме как через каскад бифуркаций удвоения периода циклов, субгармонический и затем, возможно, гомоклинический каскады бифуркаций, реально пока не обнаружено (см.[29–33], а также главы 3 и 5), то весьма правдоподобной выглядит гипотеза об универсальности описанного в настоящей главе способа возникновения хаотической динамики в трехмерных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. В системах с большим числом измерений может реализоваться сценарий перехода к хаосу через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов (см. п. 3.2 и [34]), что также укладывается в рамки изложенного ниже подхода. Таким образом, ни наличие в системе положительного показателя Ляпунова, ни наличие петли сепаратрисы седло-узла или седло-фокуса, ни наличие самого седло-узла или седло-фокуса не являются необходимыми условиями существования в системе дифференциальных уравнений хаотической динамики.

4.1. Теория одномерных гладких отображений.

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, заданную на интервале $I \subset \mathbb{R}$ и зависящую от скалярного параметра μ

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu),\ x_n \in I \subset \mathbb{R},\ f \in C^1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4.1)$$

Непрерывно дифференцируемое отображение $f : I \to I$ является одномерным и имеет наглядную геометрическую интерпретацию, так

как может быть графически представлено в координатах (x_n, x_{n+1}). В этом случае с помощью *диаграммы Ламерея* легко находятся его неподвижные точки, которые лежат на пересечении графика $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ и биссектрисы $x_{n+1} = x_n$ (рис. 4.1).

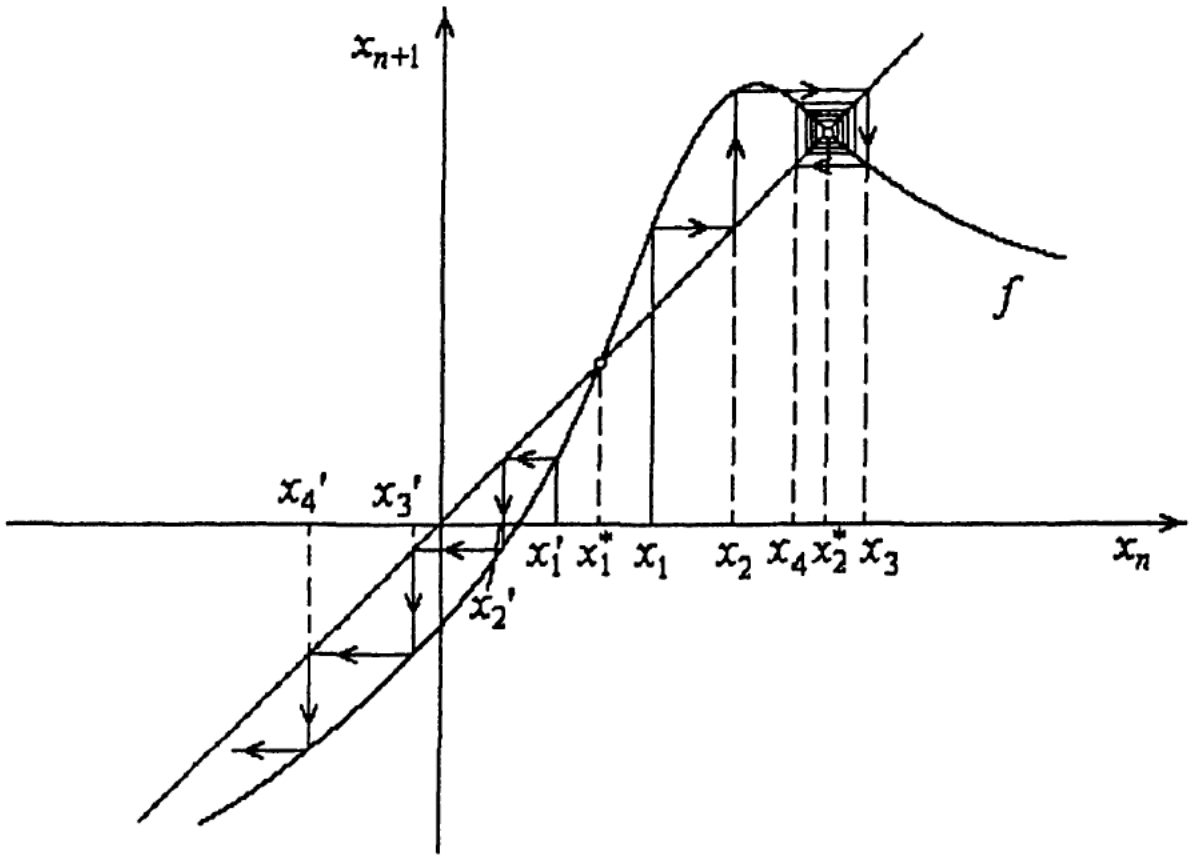

Рис. 4.1. Диаграмма Ламерея некоторого одномерного отображения f. Неподвижная точка x_1^* неустойчива, точка x_2^* устойчива.

Для одномерных отображений устойчивость неподвижной точки определяется значением модуля производной отображения в этой точке. Если в точке x^* величина $|f'(x^*, \mu)| < 1$, то неподвижная точка x^* устойчива и является притягивающей точкой. Если же $|f'(x^*, \mu)| > 1$, то неподвижная точка неустойчива. Данное условие является достаточным. Случай, когда $|f(x^*, \mu)| = 1$ требует дополнительного исследования. Например, для отображения $f(x) = x - a(x-b)^3$ неподвижная точка $x^* = b$, в которой $f'(b) = 1$, является устойчивой. В данном случае точка $x = b$ является точкой перегиба и в окрестности $\left(b - 1/\sqrt{3a},\ b + 1/\sqrt{3a}\right)$ этой точки функция $f(x)$ монотонно возрастает, то есть $f(x) > x$ при $x < b$ и $f(x) < x$ при $x > b$. Поэтому последовательность $\{f^n(x)\}$ монотонно стремится к точке b при всех значениях $x \in \left[b - \sqrt{1/3a}, b + \sqrt{1/3a}\right]$.

Устойчивой также является и неподвижная точка $x^* = 1 - 1/\mu = 2/3$ логистического отображения $f:\ x \mapsto \mu x(1-x)$ при значении $\mu = 3$, хотя $f'(x^*, \mu) = -1$. Действительно, представляя отображение

$$f^2(x, \mu) = f \circ f(x, \mu) = \mu^2 x(1-x)(1 - \mu x(1-x))$$

в виде ряда по степеням $(x-x^*)$

$$f^2(x,\mu) = x^* + (\mu-2)^2(x-x^*) - \mu(\mu-2)(\mu-3)(x-x^*)^2 - \\ - 2\mu^2(\mu-2)(x-x^*)^3 - \mu^3(x-x^*)^4,$$

и полагая $\mu = 3$, т.е.

$$f^2(x,3) = x - 18(x-x^*)^3 - 27(x-x^*)^4,$$

видим, что коэффициент при $(x-x^*)^3$ отрицательный и, следовательно, здесь мы имеет тот же случай, что и в предыдущем примере для отображения f. Если x близко к x^* и, например, $x < x^*$, то $x < f^2(x,\mu) < f^4(x,\mu) < ... \to x^*$, а также $f(x,\mu) > f^3(x,\mu) > ... \to x^*$. Аналогично при $x > x^*$ имеем $x > f^2(x,\mu) > f^4(x,\mu) > ... \to x^*$ и $f(x,\mu) < f^3(x,\mu) < ... \to x^*$.

Заметим, что необходимым и достаточным условием устойчивости неподвижной точки одномерного отображения $f \in C^0(I,I)$ является неравенство $f^2(x) > x$ при $x < x^*$ и $f^2(x) < x$ при $x > x^*$ [87].

4.1.1. Монотонные обратимые отображения. Когда одномерное отображение $f : I \to I$ строго монотонно, то оно обратимо, а динамическая система на интервале I устроена достаточно просто. Рассмотрим сначала случай, когда функция строго монотонно возрастает, то есть $f'(x) > 0$. Тогда $(f^m(x))' > 0$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Действительно, для $m = 2$ в произвольной точки x_n имеем $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f \circ f(x_n) = f^2(x_n)$. Отсюда

$$[f^2(x_n)]' = f'(f(x_n)) \cdot f'(x_n) = f'(x_{n+1}) \cdot f'(x_n) > 0,$$

так как каждый сомножитель больше нуля. Аналогично, для произвольного значения $m \in \mathbb{N}$ и в любой точке x_n очевидно $f^m(x_n) = f \circ f \circ ... \circ f(x_n)$ и, следовательно,

$$[f^m(x_n)]' = f'(x_{n+m-1}) \cdot f'(x_{n+m-2}) \cdots f'(x_n) > 0.$$

Таким образом, каждая траектория $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1} = f(x_n)$ монотонна (при $x_0 > x_1$ имеем $x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_n$, а при $x_0 < x_1$ соответственно $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$) и сходится к одной из неподвижных точек. Для описания поведения траектории в случае монотонно возрастающей функции $f(x)$ достаточно знать множество $\mathrm{Fix}f = \{x \in I : x = f(x)\}$ неподвижных точек отображения f и, кроме того, $\mathrm{sign}(f(x) - x)$ на каждом интервале, дополнительном к множеству $\mathrm{Fix}f$: если $x_0 \in (a,b)$ и $a, b \in \mathrm{Fix}f$, $(a,b) \subset I \setminus \mathrm{Fix}f$, то $f^n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} a$, когда $\mathrm{sign}(f(x_0) - x_0) = -1$ и $f^n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} b$, когда $\mathrm{sign}(f(x_0) - x_0) = +1$. Таким образом, имеет место разбиение всего интервала на области устойчивых неподвижных точек. Так как

в последовательности $x_1^*,\ x_2^*, ..., x_k^*$ неподвижных точек устойчивые и неустойчивые точки чередуются, то для каждой устойчивой точки x_i^* интервал (x_{i-1}^*, x_{i+1}^*) будет ее областью притяжения (рис. 4.2). Бифуркации в динамической системе с монотонно возрастающей функцией обусловлены либо изменением характера устойчивости неподвижных точек, либо их рождением (исчезновением). В связи с этим отметим два случая, являющихся аналогом бифуркаций циклов в динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями.

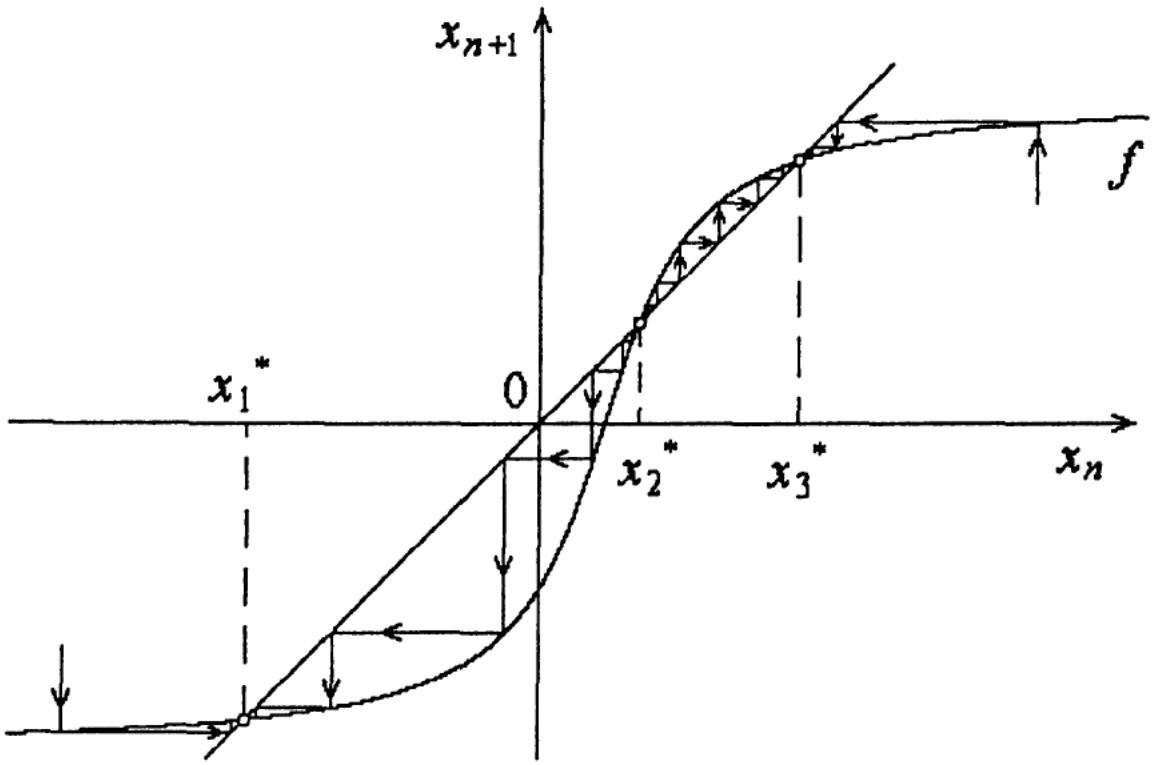

Рис. 4.2. Пример отображения с монотонно возрастающей функцией $f(x)$. Неподвижные точки x_1^* и x_3^* являются устойчивыми, а точка x_2^* – неустойчивой.

В первом случае график функции $f(x)$ касается биссектрисы $x_{n+1} = x_n$ (кривая 2 на рис. 4.3а). Эта ситуация соответствует бифуркации точечного отображения, в результате которой происходит либо слияние и исчезновение устойчивой и неустойчивой неподвижных точек, если переход осуществляется от кривой 1 к кривой 3, либо, наоборот, происходит рождение двух новых неподвижных точек (устойчивой и неустойчивой), если переход происходит от кривой 3 к кривой 1.

Во втором случае неподвижная точка функции $f(x)$ совпадает с точкой перегиба этой функции (кривая 2 на рис. 4.3б). В этом случае в результате бифуркации происходит смена устойчивости неподвижной точки и рождение (или исчезновение) двух других неподвижных точек. Если, например, первоначально устойчивая неподвижная точка

x_0^* вследствие бифуркации теряет устойчивость при переходе от кривой 3 к кривой 1, то при этом рождается пара новых устойчивых точек x_1^* и x_2^*. Переход в обратную сторону от кривой 1 к кривой 3 соответствует бифуркации исчезновения двух устойчивых неподвижных точек и изменению состояния равновесия с неустойчивого на устойчивое третьей неподвижной точки x_0^*.

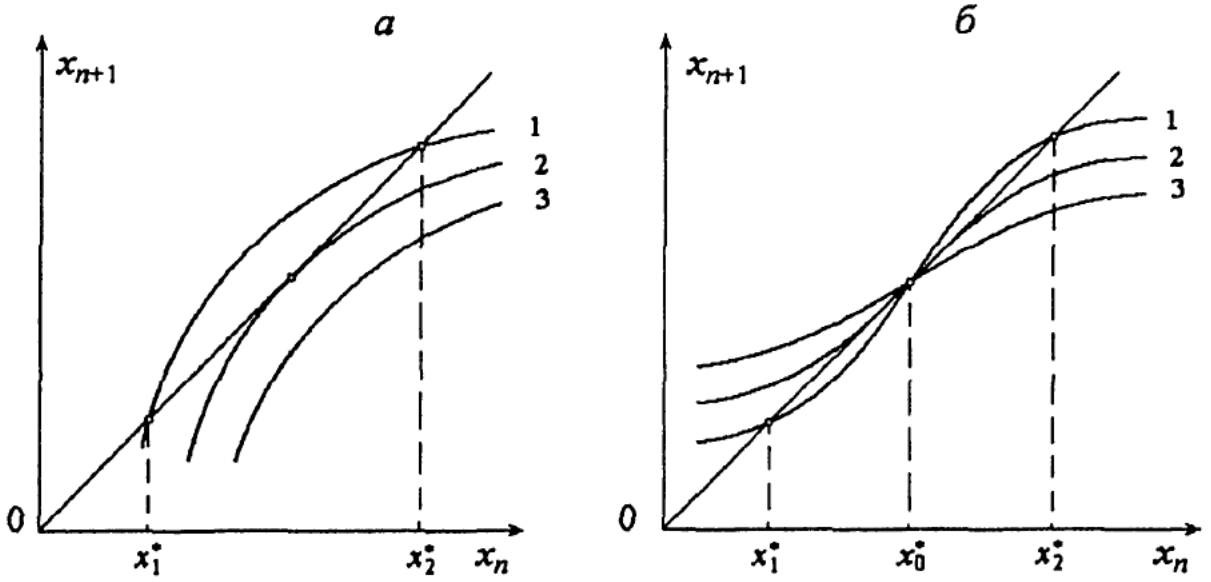

Рис. 4.3. а) Одновременное рождение (исчезновение) неустойчивой x_1^* и устойчивой x_2^* неподвижных точек; б) изменение устойчивости одной неподвижной точки x_0^* и одновременное рождение (исчезновение) пары устойчивых неподвижных точек x_1^* и x_2^*.

Если рассматривать точечное одномерное отображение как некоторое отображение Пуанкаре для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то первому случаю будет соответствовать седло-узловая бифуркация рождения или исчезновения в фазовом пространстве системы пары (устойчивого и неустойчивого) предельных циклов. Второму же случаю в системе дифференциальных уравнений отвечает ситуация, когда в результате бифуркации потери устойчивости одного предельного цикла рождается пара новых устойчивых предельных циклов.

В том случае, когда функция $f(x)$ строго монотонно убывает, то есть $f'(x) < 0$, вторая итерация $f^2(x) = f \circ f(x)$ имеет положительную производную

$$f^{2'}(x) = (f \circ f(x))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) > 0,$$

так как оба сомножителя в последнем выражении отрицательны. Следовательно, f^2 является строго монотонно возрастающей функцией. Легко видеть, что $\dfrac{df^{2k}(x)}{dx} > 0$, а $\dfrac{df^{2k+1}(x)}{dx} < 0$ и, следовательно,

каждая траектория отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ разбивается на две последовательности x_0, x_2, ..., x_{2k} и x_1, x_3, ..., x_{2k+1}, одна из которых возрастает, а другая убывает.

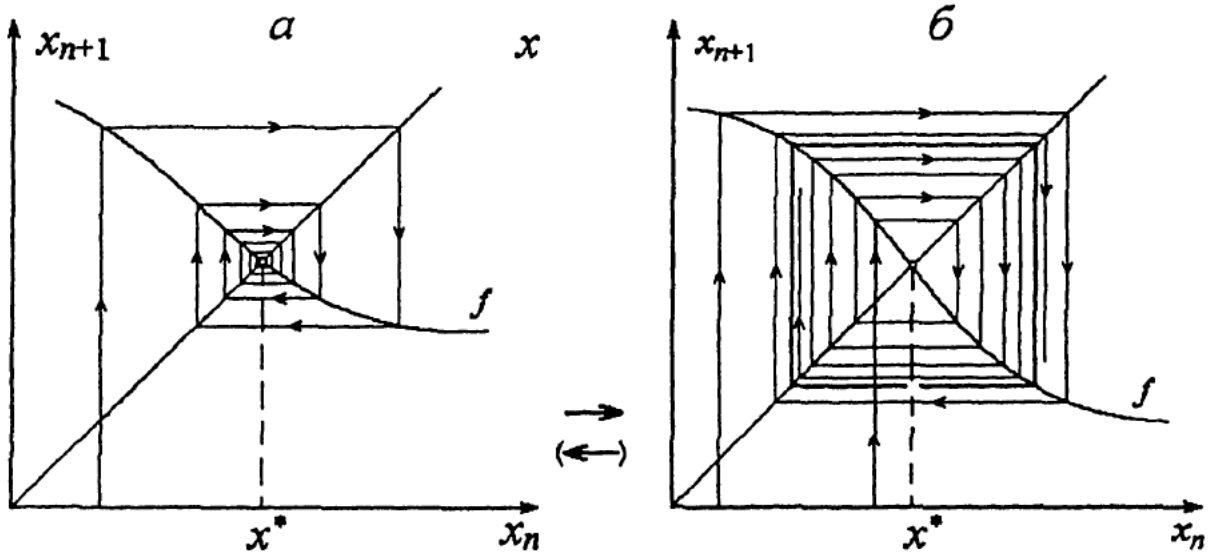

Рис. 4.4. Бифуркация потери устойчивости неподвижной точки x^* в случае отображения с монотонно убывающей функцией $f(x)$ (а) и рождение при этом цикла периода 2 (б).

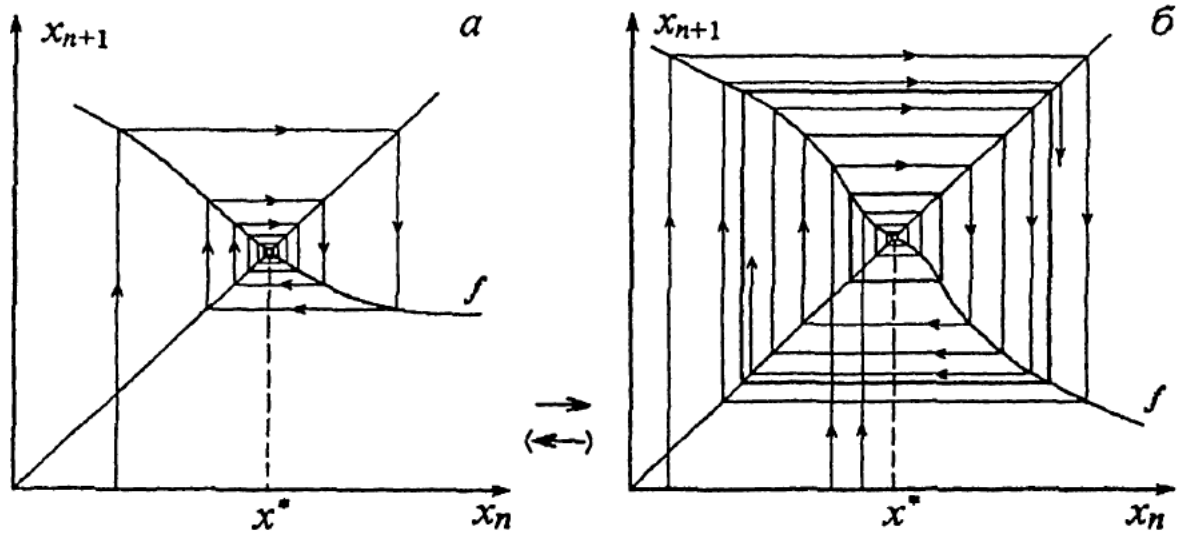

Рис. 4.5. Бифуркация рождения (исчезновения) пары циклов периода 2 точечного отображения с монотонно убывающей функцией $f(x)$ без изменения характера устойчивости неподвижной точки x^*.

Для описания динамической системы в случае монотонно убывающей функции $f(x)$ достаточно знать множество $\mathrm{Fix} f^2$. Это множество состоит из неподвижной точки x^* отображения $f(x)$, лежащей на пересечении графика функции $f(x)$ и биссектрисы $x_{n+1} = x_n$, и неподвижных точек x_i^* отображения $f^2(x)$, которым соответствуют

двукратные циклы отображения $f(x)$. Таким образом, весь интервал I разбивается на область притяжения неподвижной точки x^*, если последняя устойчива, и области притяжения циклов периода 2. Это разбиение по существу определяет и тип бифуркаций в динамической системе с монотонно убывающей функцией: либо изменение характера устойчивости неподвижной точки x^*, вследствие чего происходит рождение или исчезновение цикла периода 2 (рис. 4.4), либо рождение (исчезновение) пары циклов периода 2 без изменения состояния неподвижной точки x^* (рис 4.5).

В первом случае при потере устойчивости неподвижной точки должно, очевидно, выполняться условие $f'(x^*) = -1$. Таким образом, эта бифуркация точечных отображений аналогична бифуркации рождения цикла удвоенного периода в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений при прохождении мультипликатора цикла через точку -1 единичной окружности.

4.1.2. Немонотонные отображения. Для того, чтобы динамическая система, описываемая одномерным точечным отображением, могла быть устроена более сложно, необходимо, чтобы отображение $f: I \to I$, было немонотонным. Это позволит осуществить возвращение некоторых точек в начальное положение и, следовательно, получить периодические точки с любым периодом, а не только с периодом 1 или 2, как в случаях монотонно возрастающей или монотонно убывающей функции $f(x)$. Сложное поведение динамической системы с немонотонной функцией обусловлено неоднозначностью обратного отображения. Действительно, следуя [13], предположим, что обратное отображение $f^{-1}: x_{n+1} \mapsto x_n$ имеет p ветвей, то есть состоит из совокупности p обратимых отображений f_i^{-1}, $i = \overline{1,\ p}$. Запишем f_i^{-1} в виде

$$x_n = g_i(x_{n+1}),\ i = \overline{1,\ p},$$

и рассмотрим суперпозицию m обратимых отображений

$$G(x) = g_{i_m} \circ g_{i_{m-1}} \circ \ldots \circ g_{i_2} \circ g_{i_1}(x),\ m = 2, 3, \ldots,$$

где i_j – любые целые числа из множества $\{1, 2, ..., p\}$. Отображение $G(x)$ монотонно и имеет хотя бы одну неподвижную точку $x^*_{i_1 i_2 \ldots i_m}$. Но эта неподвижная точка является также неподвижной точкой отображения f^m, а неподвижной точке отображения f^m соответствует либо неподвижная точка отображения f, либо цикл отображения f определенной кратности. Первый случай возможен только тогда, когда $i_1 = i_2 = ... = i_m$. Так как можно взять любое положительное целое число m и произвольно выбрать числа i_1, i_2, ..., i_m от 1 до p, то немонотонное отображение может иметь бесчисленное множество циклов различной кратности и несчетное множество непериодических траекторий.

4.2. Каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода циклов одномерных отображений.

Аналитическая теория каскада бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода достаточно сложна и ее полное и последовательное изложение потребовало бы написания специальной монографии, посвященной рассмотрению как самой теории, так и многочисленных примеров из нелинейной динамики, где встречаются последовательности удвоения периодов. Цель нашей работы определена прежде всего задачами нелинейной динамики диссипативных систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением качественной стороны этой теории и приближенными оценками при определении универсальных постоянных Фейгенбаума.

4.2.1. Логистическое отображение. Изучение свойств логистического точечного отображения

$$f(x,\mu) = \mu x(1-x),\ x \in [0,\ 1],\ \mu \in [1,\ 4], \tag{4.2}$$

привело Фейгенбаума к пониманию механизма удвоения периода его циклов и к уравнению для определения значений параметра μ, при которых происходит удвоение периодов. Впоследствии оказалось, что сложное хаотическое поведение одномерной динамической системы не связано со своеобразием логистического отображения и имеет место во всех разностных уравнениях первого порядка вида $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$, в которых при соответствующем выборе масштаба одномерное отображение $f : \ I \mapsto I$ является унимодальным, то есть имеет на заданном интервале I единственный экстремум. Обратное отображение f^{-1} имеет при этом на интервале I две ветви.

Следуя Фейгенбауму, рассмотрим отображение (4.2) на интервале $x \in [0,\ 1]$. Это отображение имеет неподвижную точку $x^* = 1 - 1/\mu$, которая при увеличении значений параметра μ движется слева направо и достигает при $\mu = 2$ значения $x^* = 1/2$. При значении $\mu = 3$ неподвижная точка теряет устойчивость и в ее окрестности появляются две новые неподвижные точки, образующие устойчивый цикл периода 2. Эти две точки являются неподвижными точками отображения

$$f^2(x,\mu) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x)).$$

Фейгенбаум установил, что главной причиной удвоения периода является соотношение между производными функций f и f^2. Как уже отмечалось выше, если $x_2 = f(x_1,\mu) = f^2(x_0,\mu)$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$f^{2'}(x_0,\mu) = f'(x_1,\mu)\cdot f'(x_0,\mu) \tag{4.3}$$

и аналогично

$$f^{n'}(x_0,\mu) = f'(x_{n-1},\mu)\cdot f'(x_{n-2},\mu)\ldots f'(x_0,\mu). \tag{4.4}$$

Для неподвижной точки $x_0 = x^*$ отображения f соотношение (4.3) с учетом того, что $x_1 = x_2 = x^*$ дает

$$f^{2'}(x^*, \mu) = f'(x^*, \mu) \cdot f'(x^*, \mu) = [f'(x^*, \mu)]^2. \tag{4.5}$$

Для цикла отображение f периода n, когда

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu),\ k = \overline{0, n-2},\ x_0 = f(x_{n-1}, \mu),$$

соотношение (4.4) дает значение производной отображния f^n в любой точке цикла в виде

$$f^{n'}(x_k, \mu) = f'(x_{n-1}, \mu) \cdot f'(x_{n-2}, \mu) \ldots f'(x_0, \mu). \tag{4.6}$$

Кроме того, так как для отображения (4.2) $f'(1/2, \mu) = 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f^{n'}(1/2, \mu) = 0.$$

Из последнего соотношения также следует, что отображение f^2 имеет экстремумы (максимумы) в тех точках x_0, которые отображаются функцией f в точку $x = 1/2$, так как в этом случае $x_1 = f(x_0, \mu) = 1/2$, а $f^{2'}(x_0, \mu) = f'(x_1, \mu) \cdot f'(x_0, \mu) = 0$.

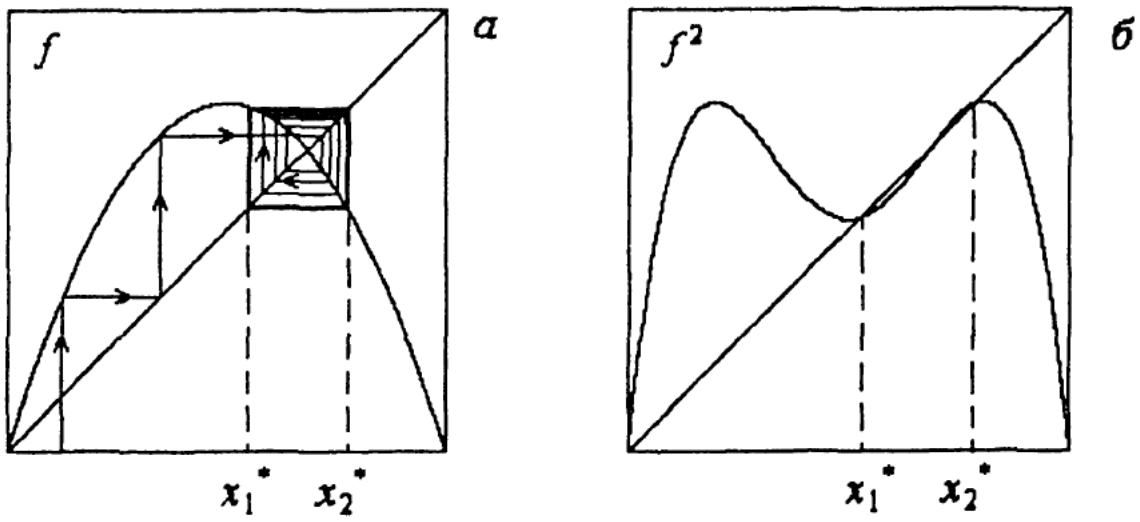

Рис. 4.6. Рождение устойчивого цикла периода 2 логистического отображения (4.2).

При значении $\mu \to \mu_1 = 3$ максимальное значение функции f стремится к $3/4$, значение $f'(x^*, \mu) \to -1$, а $f^{2'}(x^*, \mu) \to 1$. При значении параметра $\mu > 3$ имеем $|f'(x^*, \mu)| > 1$, $|f^{2'}(x^*)| > 1$ и у отображения $f^2 : I \to I$ появляются две новые неподвижные точки помимо неподвижной точки отображения f, то есть график f^2 пересекает

прямую $x_{n+1} = x_n$ в двух дополнительных точках (рис. 4.6 а и б соответственно для функций f и f^2 при $\mu = 3.14$). Новые неподвижные точки x_1^* и x_2^* отображения f^2 не являются неподвижными точками отображения f, которое преобразует одну точку в другую, то есть $x_2^* = f(x_1^*, \mu)$, а $x_1^* = f(x_2^*, \mu)$. Эта пара точек образует цикл периода 2 отображения f. Отметим, что производная отображения f^2 превосходит 1 в неподвижных точках отображения f (рис. 4.6б), которые, следовательно, являются неустойчивыми неподвижными точками отображения f^2. Напротив, тангенс угла наклона графика $f^2(x)$ к оси абсцисс в двух новых неподвижных точках меньше 1, то есть $f^{2'}(x_1^*, \mu) = f^{2'}(x_2^*, \mu) < 1$, эти точки являются устойчивыми и каждая двойная итерация функции f будет притягиваться либо к x_1^*, либо к x_2^*. При $n \to \infty$ последовательность x_0, x_1, x_2, x_3, ... будет приближаться к последовательности x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^*, ..., которая является устойчивым двойным циклом, или *аттрактором с периодом 2* отображения f.

Так как каждая точка цикла периода n отображения f является также неподвижной точкой отображения f^n, то из (4.6) следует, что все точки цикла теряют устойчивость одновременно — при одном и том же значении параметра μ. Это и служит причиной *бесконечной* последовательности удвоений периода. Так при дальнейшем увеличении значений параметра μ минимум функции f^2 при значении $x = 1/2$ понижается, а ее производная в неподвижных точках x_1^* и x_2^* возрастает. При некотором значении $\mu = \mu_1^*$ неподвижная точка x_1^* примет значение $1/2$. Одновременно с этим другая неподвижная точка x_2^* примет значение, соответствующее правому максимуму функции f^2 (рис. 4.7) и при этом в обеих точках двойного цикла будет иметь место равенство $f^{2'}(x_1^*, \mu) = f^{2'}(x_2^*, \mu) = 0$.

При дальнейшем увеличении значения параметра μ производные функции f^2 в точках x_1^* и x_2^* станут отрицательными, а при $\mu = \mu_2 = 1+\sqrt{6}$ производная в обеих неподвижных точках x_1^* и x_2^* станет равной -1. То есть ситуация для функции $f^2(x, \mu)$ в точке $\mu = \mu_2$ аналогична ситуации для функции $f(x, \mu)$ при значении $\mu = \mu_1 = 3$. Аналогично тому, как неподвижная точка отображения $f(x, \mu)$ при $\mu = \mu_1$ превращается в цикл периода 2, так и каждая неподвижная точка отображения $f^2(x, \mu)$ при $\mu = \mu_2$ образует цикл периода 2, то есть цикл периода 4 для функции f. Чтобы найти точки цикла периода 4, надо установить неподвижные точки функции f^4, которая может быть вычислена по функции f^2 аналогично тому, как функция f^2 была вычислена по функции f, то есть $f^4 = f^2 \circ f^2$. С этого момента можно забыть о функции f и считать f^2 основной функцией.

То обстоятельство, что функция f^2 есть вторая итерация отображения f, проявляется в равенстве значений ее производных в неподвижных точках. Поскольку это верно при любом числе итераций, то для отображения f^4 достаточно рассмотреть только ближайшую к

значению $1/2$ неподвижную точку, а поведение трех других неподвижных точек будет аналогичным. Так возникает рекуррентная процедура.

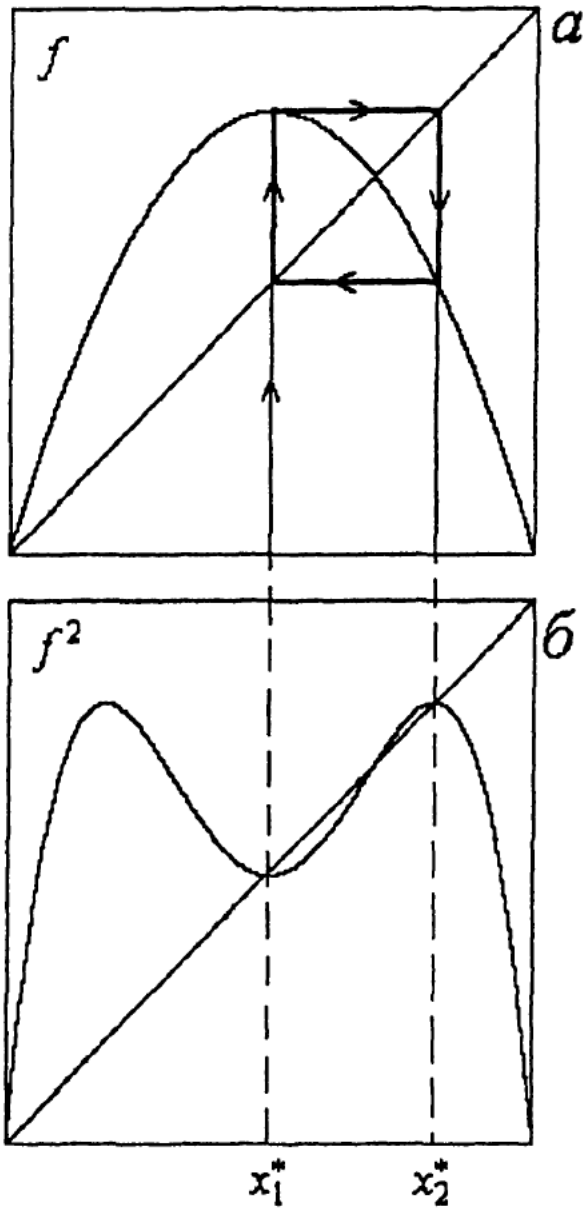

Рис. 4.7. Суперцикл периода 2 отображения (4.2) при $\mu = \mu_1^*$.

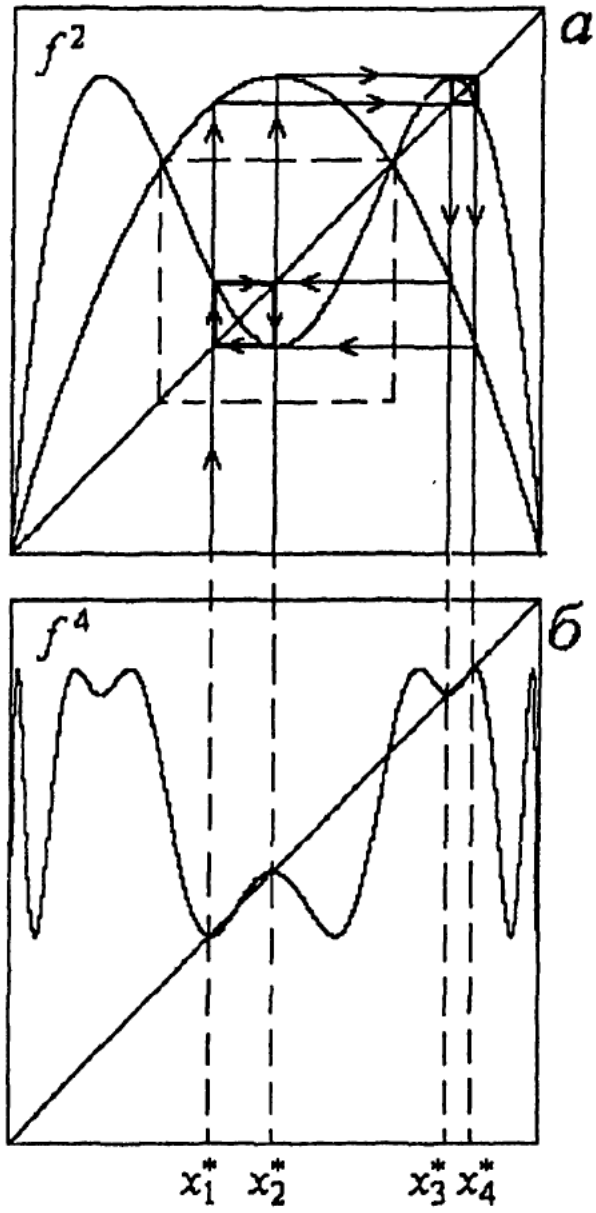

Рис. 4.8. Суперцикл периода 4 отображения (4.2) при $\mu = \mu_2^*$.

Снова увеличивая μ до значения μ_2^*, при котором одна из неподвижных точек примет значение $1/2$, а производные в неподвижных точках обратятся в нуль (рис. 4.8), получим наиболее устойчивый цикл периода 4 (так называемый *суперцикл*). При дальнейшем увеличении параметра μ производная в неподвижных точках снова станет отрицательной, а при $\mu = \mu_3$ она примет значение -1, и снова произойдет бифуркация удвоения периода, вследствие которой возникнет цикл периода 8. И снова получим $f^8 = f^4 \circ f^4$.

Таким образом, всегда имеет место

$$f^{2^{n+1}} = f^{2^n} \circ f^{2^n}, \tag{4.7}$$

то есть один и тот же механизм приводит к удвоению периода итерации f^{2^n}. Функция $f^{2^{n+1}}$ образуется из функции f^{2^n} по формуле (4.7). Аналогично функция $f^{2^{n+2}}$ образуется из функции $f^{2^{n+1}}$. Отсюда следует, что имеется определенный оператор, результат действия которого на функции f^{2^n} при значении параметра $\mu = \mu_n$ определяет функции $f^{2^{n+1}}$ при $\mu = \mu_{n+1}$. Так как, кроме того, мы рассматриваем функцию f^{2^n} лишь в некотором интервале, содержащем неподвижную точку со значением близким к $1/2$, и размер этого интервала с возрастанием значений параметра μ постоянно убывает, то отображение, образующее этот интервал, также сжимается в очень малую область кривой вблизи точки $x = 1/2$. Поведение отображения f вдали от точки $x = 1/2$ несущественно для свойства удвоения периода и в пределе при $n \to \infty$ важна только природа максимума функции f. Отсюда можно заключить, что в пределе бесконечного числа удвоений периода все функции с квадратичным экстремумом ведут себя одинаково. Следовательно, действующий на отображение оператор имеет устойчивую неподвижную точку в пространстве функций, которая является общим универсальным пределом для многократных итераций любой конкретной функции.

4.2.2. Оператор удвоения периода. Идея построения такого оператора заключается в следующем. Выделим на рис. 4. 8а прерывистой линией квадрат, содержащий часть функции f^2, которой мы снова воспользуемся в качестве примера при конструировании оператора удвоения. Затем этот квадрат мы инвертируем относительно точки $(1/2,\ 1/2)$, сравним этот квадрат со всем единичным квадратом на рис. 4.7а и растянем его так, чтобы квадрат, образованный циклом периода 2 с помощью отображения f^2 и показанный на рис.4.8а сплошной линией, совпал с аналогичным квадратом цикла периода 2, полученным с помощью отображения f и изображенным на рис. 4.7а. В обоих квадратах окажутся кривые с одинаковым типом максимума при значении $x = 1/2$ и обращающиеся в нуль в правом нижнем углу. Так же как функция f определяет при возрастании μ от значения μ_1 до μ_2 соответствующую часть отображения f^2, так и f^2 определяет соответствующую часть отображения f^4 после необходимого растяжения и инверсии. Фейгенбаумом была вычислена получающаяся в результате такой процедуры совокупность первых пяти таких функций. Различие между значениями функций трех последних кривых оказалось настолько мало, что они практически совпали [86]. Отметим, что изменение масштаба отображения f^4, определяемое при аналогичном преобразовании по функции f^2, основывается только на свойствах композиции функций. Поэтому, если описанные кривые для f^{2^n} и $f^{2^{n+1}}$ сходятся к одному пределу при $n \to \infty$, то величина изменения масштаба (скейлинга) в каскаде бифуркаций удвоения при переходе от одного уровня к другому также сойдется к определенному значению.

Обратим внимание, что сторона каждого квадрата, образуемого циклом при каждой следующей итерации удвоения, равна расстоянию d_n между значением $x = 1/2$ и неподвижной точкой x^* отображения f^{2^n}, ближайшей к $x = 1/2$ и удовлетворяющей условию $f^{2^{n'}}(x^*) = 0$ (рис. 4.9), которое определяет, как отмечалось выше, так называемые суперциклы – циклы с наибольшей устойчивостью. Отсюда следует, что асимптотическое расстояние, разделяющее соседние элементы аттрактора, уменьшается при удвоении периода в постоянное число раз. Кроме того, при каждом последующем удвоении периода ближайший к точке $x = 1/2$ элемент аттрактора перемещается с одной стороны от точки $x = 1/2$ на другую. Таким образом, переход к циклу периода 2^{n+1} при $\mu = \mu_{n+1}$ осуществляется сжатием масштаба приблизительно в α раз, то есть

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \approx -\alpha. \tag{4.8}$$

Из рис. 4.9 также следует, что величина d_n есть расстояние между

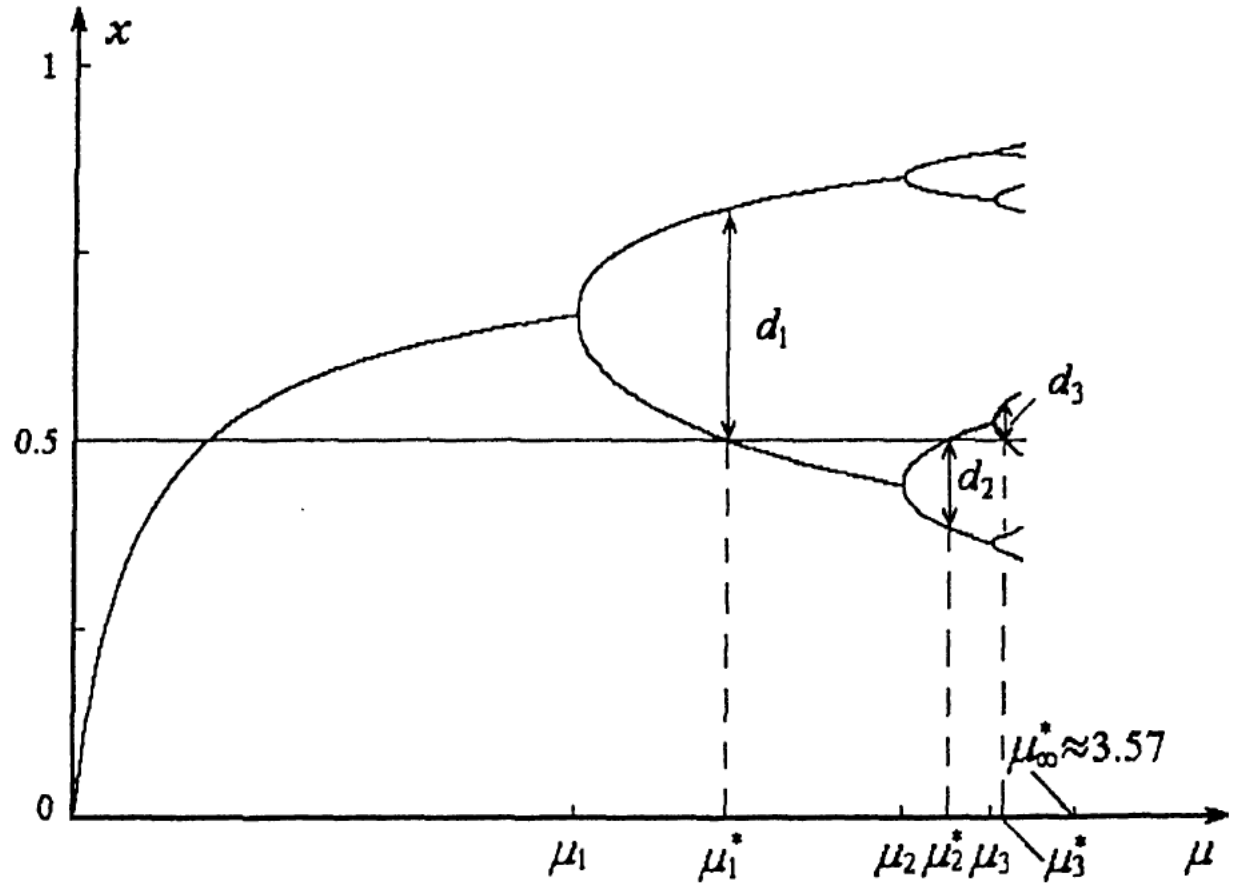

Рис. 4.9. Бифуркационная диаграмма каскада Фейгенбаума для логистического отображения (4.2).

значением $x = 1/2$ и ближайшим к этой точке элементом цикла периода 2^n при $\mu = \mu_n^*$, где μ_n^* – значение параметра μ, соответствующее суперциклу периода 2^n. Этот ближайший элемент есть 2^{n-1} итерация

точки $x = 1/2$ и поэтому

$$d_n = f^{2^{n-1}}(1/2, \mu_n^*) - 1/2. \tag{4.9}$$

Для дальнейшего изложения сделаем преобразование сдвига $x + 1/2 \to x$. Тогда выражение (4.9) примет вид

$$d_n = f^{2^{n-1}}(0, \mu_n^*).$$

Принимая во внимание соотношение (4.8), получаем, что имеет место предел

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d. \tag{4.10}$$

С учетом (4.9) получаем, что последовательность масштабированных итераций $f^{2^n}(0, \mu_{n+1}^*)$ сходится, то есть

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n f^{2^n}(0, \mu_{n+1}^*) = d. \tag{4.11}$$

Приведенные выше рис. (4.7) – (4.8) иллюстрируют более сильное утверждение, а именно, растянутая в $(-\alpha)^n$ раз функция f^{2^n} сходится к некоторой вполне определенной функции и соотношение (4.11) есть предел этой функции при $x = 0$. Следовательно, соотношение (4.11) можно обобщить на весь интервал, и тогда предельная функция, обозначенная как $g_1(x)$, будет иметь вид

$$g_1(x) = \lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n f^{2^n}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}, \mu_{n+1}^*\right). \tag{4.12}$$

При многократных итерациях ($n \to \infty$) существенными остаются все меньшие части кривой f вблизи максимума (см. например, рис. 4.8) и, следовательно, функция $g_1(x)$ определяется поведением функции $f^{2^n}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}, \mu_{n+1}^*\right)$ лишь вблизи точки $x = 0$. Поэтому функция $g_1(x)$ должна быть универсальной для всех функций f с квадратичным экстремумом.

Обобщая соотношение (4.12), определим *семейство* универсальных функций

$$g_i(x) = \lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n f^{2^n}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}, \mu_{n+i}^*\right), \; i = 0, \; 1, \; \ldots . \tag{4.13}$$

Нетрудно видеть, что

$$g_{i-1}(x) = \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^n}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}, \mu^*_{n+i-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^{n-1} f^{2^{n-1}+1}\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^{n-1}}, \mu^*_{n+i-1}\right) = \lim_{m\to\infty}\Bigg[(-\alpha)\times$$

$$\times (-\alpha)^m f^{2^m}\left(\frac{1}{(-\alpha)^m}(-\alpha)^m f^{2^m}\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^m}, \mu^*_{m+i}\right), \mu^*_{m+i}\right)\Bigg] =$$

$$= -\alpha g_i\left(g_i\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) = Tg_i(x), \quad (4.14)$$

где T – оператор удвоения. Таким образом, все функции семейства (4.13) связаны между собой *преобразованием удвоения*

$$g_{i-1}(x) = -\alpha g_i\left(g_i\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \equiv Tg_i(x),$$

Обозначим

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)$$

и получим, что

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (4.15)$$

то есть функция $g(x)$ является неподвижной точкой оператора удвоения T.

4.2.3. Универсальность Фейгенбаума. Уравнение (4.15) в принципе позволяет найти универсальную постоянную α. Положив, например, $x = 0$, получим уравнение

$$g(0) = -\alpha g(g(0)). \quad (4.16)$$

Однако, в решении функционального уравнения (4.15) имеются, по крайней мере, две существенные особенности. Первая из них состоит в том, что уравнение (4.15) является инвариантным относительно масштабирования самой функции $g(x)$. Действительно, подставив в уравнение (4.15) вместо функции $g(x)$ функцию $\lambda g(x/\lambda)$, получим

$$\lambda g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\alpha\lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\lambda g\left(-\frac{x}{\alpha\lambda}\right)\right),$$

или

$$g(u) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{u}{\alpha}\right)\right),$$

где $u = x/\lambda$, то есть при любом $\lambda \neq 0$ функция $\lambda g(x/\lambda)$ является решением уравнения (4.15) с тем же самым значением α. Поскольку

теория позволяет выбрать масштабный коэффициент λ любым образом, то его можно зафиксировать, положив, например, $g(0) = 1$.

Другая особенность заключается в том, что пока неизвестны методы точного решения функционального уравнения вида (4.15). Для приближенного решения мы выберем функцию $g(x)$ из класса гладких функций с квадратичным экстремумом (максимумом) в нуле, то есть представим решение в виде ряда по четным степеням переменной x:

$$g(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_n x^{2n} + \ldots \qquad (4.17)$$

и воспользуемся двумя членами этого ряда для приближенной оценки как самой функции $g(x)$, так и универсальной константы α. Тогда уравнение неподвижной точки (4.15) примет вид

$$1 + a_1 x^2 = -\alpha(1 + a_1) - \left(\frac{2a_1^2}{\alpha}\right) x^2 + O(x^4).$$

Решая систему уравнений

$$\alpha + 2a_1 = 0,$$
$$1 + \alpha(1 + a_1) = 0,$$

относительно неизвестных α и a_1, находим $a_1 = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. В связи с тем, что функция $g(x)$ имеет в нуле максимум, выбираем $a_1 = (-1 - \sqrt{3})/2 \approx -1.366$, тогда $\alpha = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$. Эти приближенные оценки примерно на 10% отличаются от численных результатов, полученных Фейгенбаумом при использовании четырех членов ряда (4.17)

$$g(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6.$$

При этом $\alpha = 2.502907875$.

Полученная универсальная постоянная α определяет скейлинг переменной x в отображении $f(x, \mu)$. Рассмотрим теперь, имеет ли отношение к скейлингу другая переменная – μ. Заметим, что значение параметра $\mu = \mu_n^*$ определяется из условия существования суперциклов и соответствует таким значениям μ, при которых имеет место $\left.\frac{d}{dx} f^{2^n}(x, \mu_n^*)\right|_{x_0^*} = 0$. Это говорит о том, что суперциклы в качестве своего элемента содержат неподвижную точку $x_0^* = 1/2$. Поэтому имеем $f^{2^n}(1/2, \mu_n^*) = 1/2$, а после сдвига $x + 1/2 \to x$ получаем уравнение для определения величин μ_n^*

$$f^{2^n}(0, \mu_n^*) = 0. \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.18) имеет бесконечное множество решений, поскольку ему удовлетворяют также суперциклы, имеющие место в окнах хаотического режима. Чтобы выделить значения μ_n, имеющие отношение

к каскаду удвоения периода, то есть к последовательности

$$\mu_1 < \mu_1^* < \mu_2 < \mu_2^* < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \mu_n^* < \ldots, \tag{4.19}$$

уравнение (4.18) надо решать, начиная с $n = 0$ и упорядочивая μ_n в соответствии с (4.19).

Очевидно, числа μ_n показывают, как быстро происходит приближение к μ_∞, соответствующему завершению каскада удвоения и появлению аттрактора Фейгенбаума. Покажем, что по переменной μ также имеет место скейлинг

$$\mu_n^* - \mu_\infty \sim \delta^{-n}, \tag{4.20}$$

где δ – другая универсальная постоянная Фейгенбаума, а с учетом (4.19) справедливо также

$$\mu_n - \mu_\infty \sim \delta^{-n}.$$

Разложим функцию $f(x, \mu)$ в ряд в окрестности точки μ_∞

$$f(x,\mu) \approx f(x,\mu_\infty) + \left.\frac{\partial f(x,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu_\infty} (\mu - \mu_\infty) = \\ = f_0(x) + (\mu - \mu_\infty) f_1(x) \tag{4.21}$$

и применим к (4.21) оператор удвоения T (в случае логистического отображения в (4.21) можно поставить знак равенства).

$$Tf(x,\mu) = T(f_0(x) + (\mu - \mu_\infty) f_1(x)) = \\ = Tf_0(x) + (\mu - \mu_\infty)\delta T_{f_0} f_1(x). \tag{4.22}$$

Принимая во внимание вид оператора удвоения (4.15), найдем

$$\delta T_{f_0} u(x) = T(f_0(x) + u(x)) - Tf_0(x) = \\ = -\alpha(f_0 + u)\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + u\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) + \alpha f_0\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \\ = \alpha\Big[(f_0+u)\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + u\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) - f_0\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)+u\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)+ \\ + f_0\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + u\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) - f_0\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\Big] = \\ = -\alpha\left[f_0'\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\cdot u\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + u\left(f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\right] + o(u) = \\ = L_{f_0} u + o(u), \tag{4.23}$$

где L – линейный несамосопряженный оператор вида

$$L_f u = -\alpha\left[f'\left(f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\cdot u\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + u\left(f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\right],$$

определяемый по отношению к функции f, $o(u)$ – малые величины высшего порядка малости по сравнению с u. После n-кратного применения оператора удвоения T к функции $f(x,\mu)$, будем иметь

$$T^n f(x,\mu) = T^n(f_0) + (\mu-\mu_\infty)L_{T^{n-1}f_0(x)}\ldots L_{f_0(x)}f_1 + \\ + o((\mu-\mu_\infty)f_1(x)). \quad (4.24)$$

Как отмечалось выше, оператор $T^n f_0(x)$ сходится к неподвижной точке, то есть

$$\lim_{n\to\infty} T^n f(x,\mu_\infty) = \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^n}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n},\mu_\infty\right) = \lim_{i\to\infty} g_i(x) = g(x).$$

Тогда (4.24) принимает вид

$$T^n f(x,\mu) \approx g(x) + (\mu-\mu_\infty)L_g^n f_1(x). \quad (4.25)$$

Разложим функцию $f_1(x)$

$$f_1(x) = \sum_k c_k\varphi_k(x),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad (4.26)$$

по собственным функциям $\varphi_k(x)$ оператора L_g

$$L_g\varphi_k(x) = \lambda_k\varphi_k(x),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad (4.27)$$

и получим

$$L_g^n f_1(x) = \sum_k c_k\lambda_k^n\varphi_k(x),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad (4.28)$$

Фейгенбаум установил, что только лишь одно собственное значение оператора L_g больше единицы, то есть $\lambda_0 > 1$, а $\lambda_k < 1$, $k \neq 0$. Позднее это было доказано аналитически Колле, Экманом, Лэнфордом [89]. Не останавливаясь здесь на аналитическом доказательстве этого факта, рассмотрим данное утверждение с качественной стороны. Однопараметрическое семейство функций $f(x,\mu)$ является линией в пространстве функций. Для каждой из функций в этом пространстве имеется изолированное значение параметра μ_∞, при котором эта функция при многократном применении оператора удвоения T сходится к $g(x)$. Заполним пространство функций линиями, соответствующими функциям $f(x,\mu)$. Множество точек в пространстве функций,

соответствующих различным функциям $f(x, \mu_\infty)$, определяет поверхность, повторное применение к точкам которой оператора удвоения T дает функции, сходящиеся к $g(x)$. Это есть устойчивое многообразие g оператора T. Но через каждую точку этой поверхности проходит соответствующая линия, которая параметризуется *одним* числом μ. Поэтому в пространстве функций имеется только *одно* направление, определяемое собственным вектором с собственным значением, большим единицы, или, другими словами, собственной функцией φ_0 оператора L_g с соответствующим собственным значением $\lambda_0 > 1$.

Поэтому в выражении (4.27) при $n \to \infty$, ограничиваясь вкладом только от λ_0, получим

$$L_g^n f_1(x) \approx c_0 \lambda_0^n \varphi_0(x). \tag{4.29}$$

Тогда (4.25) примет вид

$$T^n f(x, \mu) \approx g(x) + (\mu - \mu_\infty)\delta^n c_0 \varphi_0(x), \tag{4.30}$$

где введено обозначение $\delta = \lambda_0$. Действительно, легко показать,что собственное значение λ_0 совпадает с универсальной постоянной δ Фейгенбаума. Положим $\mu = \mu_n^*$ и $x = 0$. Тогда из (4.30) получим

$$T^n f(0, \mu_n^*) \approx g(0) + (\mu_n^* - \mu_\infty)\delta^n c_0 \varphi_0(0). \tag{4.31}$$

Принимая во внимание, что $g(0) = 1$ и то, что согласно условию (4.18)

$$T^n f(0, \mu_n^*) = (-\alpha)^n f^{2^n}(0, \mu_n^*) = 0, \tag{4.32}$$

приходим к искомому результату

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n^* - \mu_\infty)\delta^n = -\frac{1}{c_0 \varphi_0(0)} = \text{const}. \tag{4.33}$$

Численное значение универсальной постоянной δ можно получить из уравнения на собственные значения оператора L_g

$$L_g \varphi_0(x) = \delta \varphi_0(x),$$

или

$$-\alpha\left[g'\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot \varphi_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + \varphi_0\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\right] = \delta \varphi_0(x). \tag{4.34}$$

Для приближенного решения уравнения (4.34) воспользуемся только первым членом $\varphi_0(0)$ из степенного разложения функции $\varphi_0(x)$. В этом случае получаем алгебраическое выражение для оценки δ

$$\delta = -\alpha[g'(1) + 1]. \tag{4.35}$$

Значение $g'(1)$ для функции с квадратичным экстремумом ($g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$) можно вычислить, если дважды продифференцировать уравнение для неподвижной точки (4.15)

$$g''(x) = -\frac{1}{\alpha}\Big[g''\Big(g\Big(-\frac{x}{\alpha}\Big)\Big)\cdot\Big(g'\Big(-\frac{x}{\alpha}\Big)\Big)^2 + \\ + g'\Big(g\Big(-\frac{x}{\alpha}\Big)\Big)g''\Big(-\frac{x}{\alpha}\Big)\Big].$$

Подставляя в последнее выражение $x = 0$, получим

$$g'(1) = -\alpha. \tag{4.36}$$

Таким образом, (4.35) принимает вид

$$\delta = \alpha^2 - \alpha. \tag{4.37}$$

Используя найденное выше значение $\alpha \approx 2.732$, находим, что $\delta \approx 4.732$. Полученное значение δ отличается от вычисленного с большей точностью результата Фейгенбаума ($\delta \approx 4.6692016$) примерно на 1%.

4.2.4. Размерность аттрактора Фейгенбаума. Рассмотрим важный вопрос о размерности нерегулярного аттрактора точечного отображения, который рождается при завершении каскада бифуркаций Фейгенбаума. Назовем этот аттрактор аттрактором Фейгенбаума. В любой окрестности любой его точки содержатся точки, принадлежащие какому-либо неустойчивому циклу. Поэтому аттрактор Фейгенбаума является, очевидно, нигде не плотным множеством точек, и использование обычного понятия геометрической размерности для определения размерности этого аттрактора непригодно. Наиболее приемлемым, по-видимому, является в данном случае использование фрактальной размерности (см. п.1.4.4).

Оценка сверху фрактальной размерности d_F суперцикла периода 2^n при $n \to \infty$ может быть вычислена следующим образом. Чтобы покрыть все точки суперцикла периода 2^n отрезками длины ε требуется $N(\varepsilon) = 2^n$ отрезков. Средняя минимальная длина отрезков ε_n для покрытия всех точек суперцикла периода 2^n при $n \to \infty$ согласно оценкам [15] равна

$$\varepsilon_n = \Big(\frac{\alpha+1}{2\alpha^2}\Big)^n. \tag{4.38}$$

Подставляя эти значения в формулу (1.9) получаем

$$d_F = \frac{\ln 2}{\ln \frac{2\alpha^2}{\alpha+1}} \approx 0.543. \tag{4.39}$$

Таким образом, аттрактор Фейгенбаума точечного унимодального одномерного отображения является, по всей видимости, фракталом и

имеет дробную размерность со значением меньшим единицы. В то же время значение, приведенное в (4.39) является оценкой сверху. Поэтому, как нам кажется, данный вопрос требует дополнительного изучения.

4.3. Субгармонический каскад бифуркаций Шарковского циклов одномерных отображений.

Порядок Шарковского, установленный в работе [76], является не менее важным, чем универсальность Фейгенбаума, открытием, свидетельствующим о сложности структуры одномерных динамических систем.

4.3.1. Теорема Шарковского. Из теоремы Шарковского, переоткрытой Ли и Йорке [88], следует, что усложнение структуры циклов итераций одномерных унимодальных отображений может не заканчиваться каскадом бифуркаций Фейгенбаума, а продолжаться некоторым другим, более сложным каскадом бифуркаций в соответствии с порядком, установленным в теореме.

Определение. Порядком Шарковского называется упорядочение в множестве натуральных чисел, имеющее вид

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3. \quad (4.40)$$

Теорема 4.1 (теорема Шарковского [76]). *Если непрерывное отображение $I \to I$ имеет цикл периода n, то оно имеет также циклы каждого порядка n' такого, что $n' \lhd n$ в смысле порядка Шарковского.*

Следствие. Если отображение f имеет периодическую точку периода 3, то оно имеет периодические точки всех периодов.

Доказательство теоремы Шарковского основано на нескольких утверждениях, рассмотренных ниже. В начале заметим, что каково бы ни было отображение $f \in C^0(I,\ I)$, если оно имеет цикл периода $n > 1$, то в силу непрерывности у данного отображения есть и неподвижная точка. Более того, если I – ограниченный интервал, то неподвижная точка на I есть всегда. Теперь последовательно рассмотрим утверждения, согласно которым определяется порядок следования циклов в одномерных отображениях.

Лемма 1. *Если отображение $I \to I$ непрерывно, то между любыми двумя точками цикла периода $n > 1$ лежит хотя бы одна точка некоторого цикла периода $n' < n$.*

Доказательство. Пусть $a < b$ – точки цикла периода n и n_a, n_b – количество точек этого цикла, лежащих левее точек a и b соответственно. Очевидно, $0 \leq n_a < n_b < n$. Существует n_b различных целых

чисел s_i, $i = 1, ..., n_b$, меньших n и таких, что $f^{s_i}(b) < b$, где s_i – длительность перехода в итерациях из точки b в одну из точек цикла, расположенную левее b. Так как $n_a < n_b$, то найдется целое положительное число $s_{i'}$, $1 \le i' \le n_b$, такое, что $f^{s_{i'}}(b) < b$, $f^{s_{i'}}(a) > a$. Следовательно, существует точка $x_0 \in (a, b)$, для которой будет иметь место $f^{s_{i'}}(x_0) = x_0$, т.е. x_0 – точка цикла периода $n' \le s_{i'} < n$.

Лемма 2. *Если непрерывное отображение имеет цикл периода $n > 2$, то у этого отображения есть и цикл периода 2.*

Следуя Шарковскому, докажем более общее утверждение, из которого следует лемма 2, а именно: если непрерывное отображение имеет цикл периода $n > 2$, то у этого отображения есть и цикл меньшего периода $2 \le n' < n$.

Доказательство. Если между какими-либо двумя точками цикла периода n нет неподвижных точек, то данное утверждение непосредственно следует из леммы 1.

Теперь допустим, что между двумя точками цикла есть неподвижные точки. Возьмем произвольную точку c, принадлежащую циклу и отличную от наименьшей точки a и от наибольшей точки b. Для определенности положим $f(c) > c$. Пусть k – наименьшее число итераций, за которое точка с переходит в точку a, т.е. $f^k(c) = a$, $\quad 2 \le k < n$. По предположению между точками a и c есть неподвижные точки. Выберем одну из них, ближайшую к точке c и обозначим через d. Так как $f(d) = d$ и $f(c) > c$, то $\forall x \in (d, c)$ справедливо неравенство $f(x) > x$. Следовательно, для функции $y = f^k(x)$ имеем $f^k(d) = d$ и, более того, существует окрестность точки d, где $f^k(x) > x$ при $x > d$. Но так как $f^k(c) = a < c$, то на интервале (d, c) есть точка x^*, для которой $f^k(x^*) = x^*$. Таким образом, поскольку на интервале (d, c) нет неподвижных точек, то x^* – это периодическая точка отображения f, период которой $n' \ge 2$ и $n' \le k < n$.

Следствие 1. Если отображение f имеет цикл периода 2^l, $l \ge 1$, то у этого отображения есть циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, ..., l-1$.

Следствие 2. Если отображение f имеет цикл периода, неравного 2^i, $i = 0, 1, 2, ...$, то у этого отображения есть циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, ...$

Для доказательства существования у данного отображения f цикла периода 2^k применим лемму 2 к отображению $g = f^{2^{k-1}}$. Тогда периодическая точка отображения f периода $2^l m$, $m > 1$ и нечетно, является для отображения g периодической точкой периода $2^{l-k+1}m$, если $k \le l$ и периода m в противном случае. Согласно лемме 2 отображение g имеет периодическую точку периода 2, которая для отображения f является, очевидно, периодической точкой периода 2^k.

Таким образом, часть утверждения теоремы, касающаяся циклов периода 2^i, $i = 0, 1, 2, ...$, содержится уже в следствии 1. Следствие 2 также содержит часть утверждения теоремы. Оно говорит о том, что

отображение, которое имеет цикл, не равный периоду 2^i, $i = 0, 1, 2, ...$, например, периода $n = 3$, имеет по крайне мере счетное множество циклов $2^i \lhd n$, $i \geq 0$, среди которых есть циклы сколь угодно большого периода.

Для завершения доказательства теоремы привлечем некоторые соображения, связанные с символической динамикой.

Пусть I' и I'' – два интервала. Будем говорить, что интервал I' f-накрывает интервал I'', если $f(I') \supset I''$, т.е. образ интервала I' содержит в себе интервал I''. В таком случае найдется подинтервал $K \subset I'$, для которого $f(K) = I''$ и $f(\partial K) = \partial I''$, т.е. образ подинтервала K точно совпадает с интервалом I'', включая их границы. Подинтервал K называют h-интервалом, если не существует другого подинтервала $K' \subset K$ с теми же свойствами. Говорят, что интервал I' f-накрывает интервал I'' n раз, если существуют n попарно не пересекающихся h-интервалов $K_1, K_2, ..., K_n$, $K_j \subset I'$, таких, что $f(K_j) = I''$.

Всякому циклу можно поставить в соответствие циклическую подстановку π, ориентированный граф и (или) матрицу перехода P. Если точки цикла B периода n упорядочить $x_1^* < x_2^* < \cdots < x_n^*$, $f(x_i^*) = x_{s_i}^*$, где $1 \leq s_i \leq n$, $i = 1, ..., n$, то циклическая подстановка имеет вид

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Данные точки создают разбиение отрезка I на интервалы $I_s = [x_{s-1}^*, x_s^*]$. Ориентированный граф переходов задается вершинами $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ и ориентированными ребрами, соединяющими I_i и I_j, если $f(I_i) \supset I_j$. При этом принято писать $I_i \to I_j$, когда интервал I_i f-накрывает интервал I_j. Число стрелок из I_i в I_j равно числу h-интервалов $I_{ik} \subset I_i$, для которых $f(I_{ik}) = I_j$.

Граф переходов назовем, следуя Шарковскому, B-графом цикла. Матрица допустимых переходов (точек интервалов I_i) определяется следующим образом

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(I_i) \not\supset I_j, \\ 1, & \text{если} \quad f(I_i) \supset I_j. \end{cases}$$

Например, отображение, приведенное на рис. 4.10а, имеет цикл периода 3, образованный точками x_1^*, x_2^*, x_3^*. Для этого цикла $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f(I_1) \supset I_2$, $f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$, матрица переходов $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а B-граф имеет вид, показанный на рис. 4.10б.

Теперь рассмотрим, как связаны накрывающие друг друга интервалы, образующие замкнутый путь, и периодические точки цикла.

Лемма 3. *Если в B-графе есть замкнутый путь $I_{s_0} \to I_{s_1} \to I_{s_2} \to \cdots \to I_{s_{k-1}} \to I_{s_0}$ $(1 \leq s_i \leq n-1)$, то существует и периодиче-*

ская точка x^*, такая что

$$f^i(x^*) \in I_{s_i}, \quad i = 0, 1, ..., k-1, \quad f^k(x^*) = x^*.$$

Более того, в качестве x^* можно взять периодическую точку периода k – наименьшего периода последовательности $s_0, s_1, ..., s_{k-1}, s_0$.

Доказательство. Так как f^i определяет непрерывное отображение, то существует h-интервал, такой что $I' \subset I_{s_0}, f^i(I') \subset I_{s_i}$, $i = 1, .., k-1$ и $f^k(I') = I_{s_0}$. Следовательно, существует точка $x^* \in I'$, для которой $f^k(x^*) = x^*$.

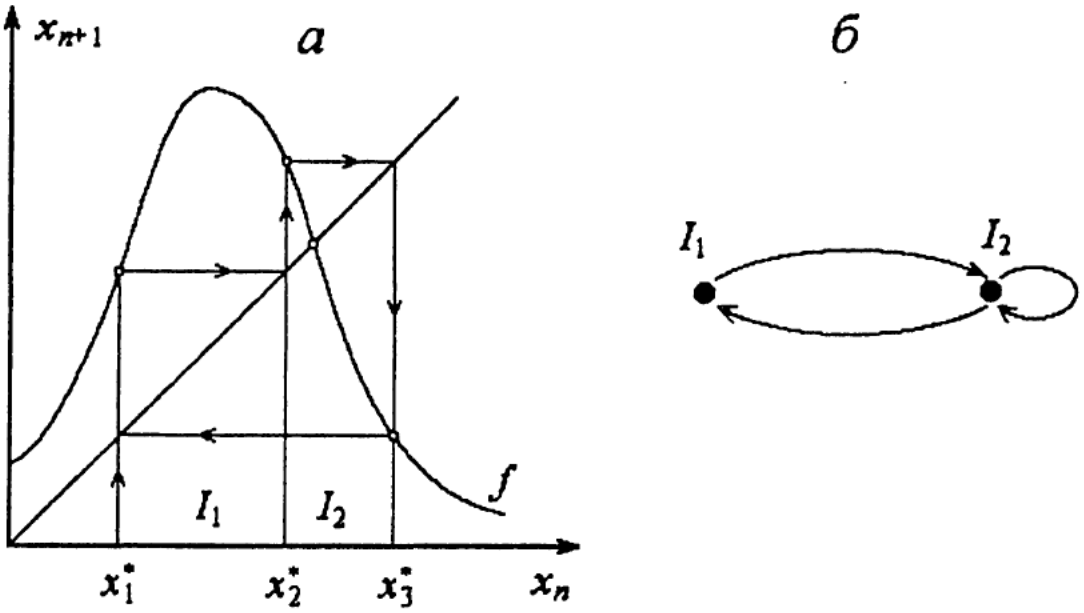

Рис. 4.10. Отображение, имеющее цикл периода 3 и его граф переходов.

Рассмотрим теперь лемму относительно отображения, имеющего цикл периода 3.

Лемма 4. *Если непрерывное отображение имеет цикл периода 3, то оно имеет циклы всех периодов.*

Доказательство. B-граф цикла $B = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$ периода 3 имеет вид, представленный на рис. 4.10 и содержит всего два интервала. Каково бы ни было n всегда по B-графу этого цикла можно составить периодическую последовательность

$$I_1 \to \underbrace{I_2 \to \ldots \to I_2}_{n-1} \to I_1 \to \underbrace{I_2 \to \ldots}_{n-1},$$

которой, согласно лемме 3, соответствует цикл периода n, точки которого проходят интервалы I_1, I_2 в указанном порядке.

Заметим, что одним из важных свойств B-графа, имеющего цикл периода $n > 2$ является существование такого натурального числа

$1 \le s^* \le n-1$, что имеет место $I_{s^*} \to I_{s^*}$, т.е. интервал I_{s^*} f-накрывает самого себя. Действительно, положим $s^* = \max\{i : \ f(x_i^*) > x_i^*\}$. Так как $f(x_n^*) < x_n^*$, то $s^* < n$, а поскольку $f(x_{s^*+1}^*) < x_{s^*+1}^*$, то $f(I_{s^*}) \supset I_{s^*}$ или $I_{s^*} \to I_{s^*}$. Более того, так как каждая точка B-графа имеет образ и прообраз, то для любого $1 \le i \le n-1$ существуют i_1 и i_2 $(1 \le i_1, i_2 < n)$, такие что $I_{i_1} \to I_i \to I_{i_2}$. Следовательно, B-граф цикла периода $n > 2$ содержит подграф $I_{s^*} \to \ldots \to I_s$ для любого $1 \le s \le n-1$.

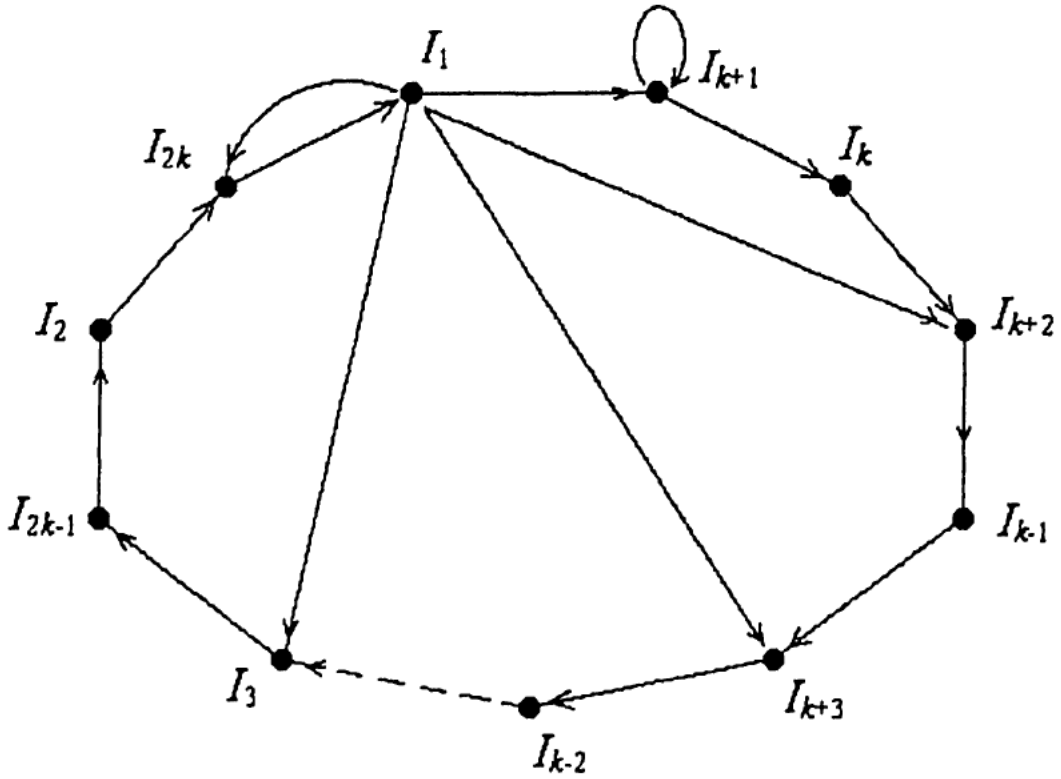

Рис. 4.11. Подграф цикла нечетного периода $n = 2k+1$.

Лемма 5. *Если непрерывное отображение f имеет цикл нечетного периода $n = 2k+1$, $k > 1$ и не имеет других циклов периода $2k-1$, то B-граф цикла периода n содержит подграф, изображенный на рис. (4.11), или получаемый из него заменой I_i на I_{n-i}.*

Доказательство. Значение $s^* = \max\{i : \ f(x_i^*) > x_i^*\}$ разбивает все множество B точек цикла на два подмножества: $B^- = \{x^* \in B : \ x^* \le x_{s^*}^*\}$ и $B^+ = \{x^* \in B : \ x^* > x_{s^*}^*\}$. Так как n нечетно, то B^- и B^+ содержат различное число точек цикла. Пусть для определенности их больше в B^-. Тогда существуют точки $x^* \in B^-$, для которых $f(x^*) \in B^-$. Пусть $s = \max\{i < s^* : \ f(x_i^*) \le x_{s^*}^*\}$. Поскольку $x_{s+1}^* \in B^-$, то $f(x_{s+1}^*) \ge x_{s^*+1}^*$. Следовательно, $f(I_s) \supset I_{s^*}$ или $I_s \to I_{s^*}$. С другой стороны, как отмечалось выше, всегда существует подграф $I_{s^*} \to \ldots \to I_s$. Таким образом, получаем замкнутый граф $I_{s^*} \to \ldots \to I_s \to I_{s^*}$.

Можно считать этот путь кратчайшим. Тогда его длина равна n. В противном случае применив лемму 3 к одному из замкнутых путей

$I_{s^*} \to \ldots \to I_s \to I_{s^*}$ или $I_{s^*} \to \ldots \to I_s \to I_{s^*} \to I_{s^*}$ получим на интервале I_{s^*} периодическую точку нечетного периода n', $1 < n' < n$, что противоречит условиям леммы.

Если путь $I_{s^*} \to \ldots \to I_s \to I_{s^*}$ – кратчайший, то в нем каждый из интервалов I_i, $i = 1, \ldots, n-1$, за исключением I_{s^*}, встречается только один раз, так как длина пути равна n. Обозначив $s^* = s_1$, а индексы интервалов, следующих за интервалом I_{s^*}, через s_2, s_3, $\ldots$, s_{n-1}, получим путь $I_{s_1} \to I_{s_2} \to \ldots \to I_{s_{n-1}} \to I_{s_1}$. Так как этот путь кратчайший, то B-граф цикла не содержит ребер, идущих из интервала I_{s_i} в интервал I_{s_j} при $j > i+1$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Покажем теперь, что с точностью до ориентации элементы B-графа располагаются на отрезке I в порядке $I_{s_{n-1}}, I_{s_{n-3}}, \ldots, I_{s_4}, I_{s_2}, I_{s_1}, I_{s_3}, I_{s_{n-4}}, I_{s_{n-2}}$.

При $n = 3$ мы имеем только два интервала и здесь утверждение о расположении интервалов на отрезке очевидно. Положим $n > 3$ и рассмотрим интервал $I_{s_1} = [a, b]$. Тогда $f(a) \geq b$, $f(b) \leq a$. Оба равенства одновременно не могут выполняться, поскольку в этом случае точка a будет либо неподвижной, либо периодической точкой периода 2. Но одно из них выполнено всегда. Пусть $f(a) = b$, $f(b) = a_2 < a$ и $I_{s_2} = [a_2, a]$. Ясно, что $f(I_{s_1}) \supset I_{s_1} \cup I_{s_2}$.Если $f(a_2) < a$, то тогда $f(I_{s_2}) \supset I_{s_1}$, и мы имеем подграф, показанный на рис. 4.10б, из которого следует существование цикла периода 3 и, следовательно, циклов любого нечетного периода $n' < n$, что противоречит условиям леммы.

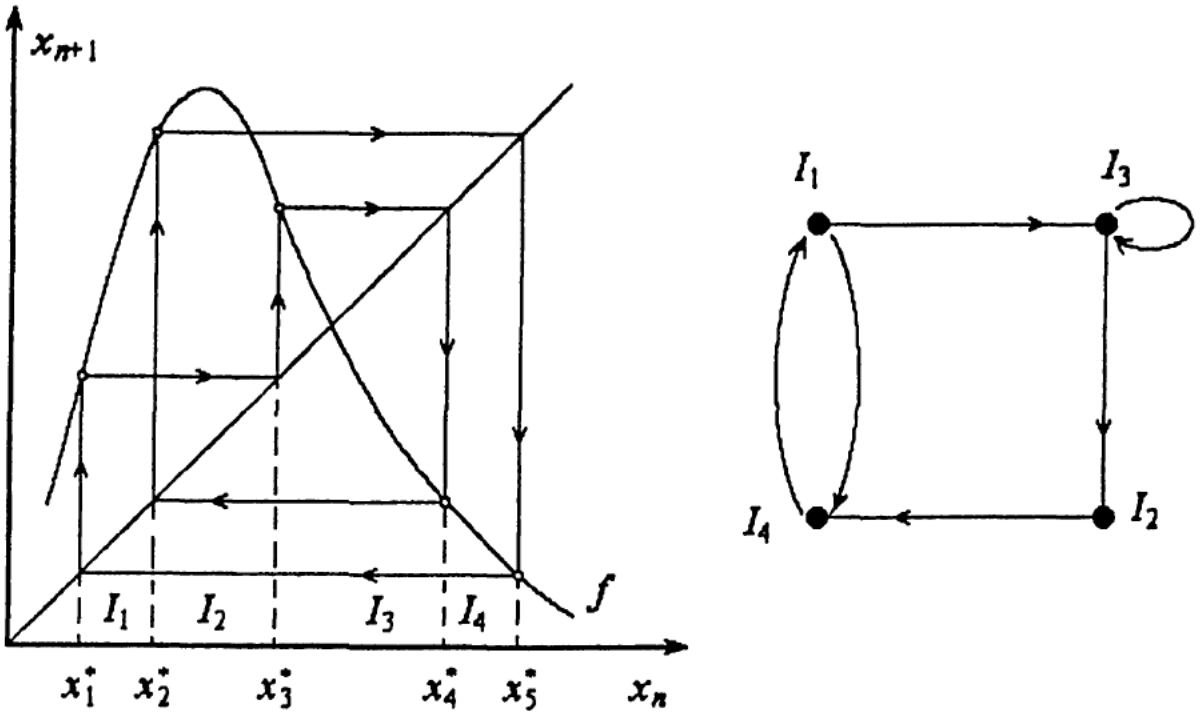

Рис. 4.12. Отображение с циклом периода 5 и его граф переходов.

Таким образом, точка $f(a_2)$ лежит справа от точки b и $f(I_{s_2}) = I_{s_3}$ есть интервал, который примыкает к интервалу I_{s_1} справа, в отличие

от интервала I_{s_2}, примыкающего I_{s_1} слева. Это соответствует тому, что для любой точки $x^* \in B^-$, кроме $x^*_{s_{n-1}}$ ее образ $f(x^*) \in B^+$ и наоборот, для любого значения $x^* \in B^+$, $f(x^*) \in B^-$. Это означает, что интервал I_{s_2} будет смежным с интервалом I_{s_1}, интервал I_{s_3} является смежным с интервалом $I_{s_1} \cup I_{s_2}$ и примыкает к интервалу I_{s_1}, интервал I_{s_4} будет смежным с интервалом $I_{s_2} \cup I_{s_1} \cup I_{s_3}$ и будет примыкать к интервалу I_{s_2} и т.д. Таким образом, возможны только два расположения интервалов на отрезке I: либо $I_{s_{n-1}}$, $I_{s_{n-3}}, \ldots I_{s_4}$, I_{s_2}, I_{s_1}, I_{s_3}, $I_{s_{n-4}}$, $I_{s_{n-2}}$, либо в обратном порядке. В первом случае имеем $s_{n-1} = 1$, $s_{n-3} = 2, \ldots$, $s_1 = k+1, \ldots$, $s_{n-2} = 2k$, (рис 4.12 при $n = 5$), а во втором – $s_{n-1} = 2k$, $s_{n-3} = 2k-1, \ldots$. В *обоих случаях* $I_1 \to I_{k+1}$ и $I_2 \to I_{2k}$ и поэтому $I_1 \to I_{k+i}$, $i = 1, ..., k$. Доказательство леммы завершено.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать следующее утверждение.

Лемма 6. *Если непрерывное отображение f имеет цикл нечетного периода $n > 1$, то оно имеет циклы любого нечетного периода, большего n, а также циклы любого четного периода.*

Положим, что $n = 2k+1$ – наименьший нечетный период, больший 1. При любом четном $n' < n$ согласно лемме 5 B-граф цикла периода n содержит замкнутый путь $I_1 \to I_{2k+1-n'/2} \to I_{n'/2} \to \ldots \to I_2 \to I_{2k} \to I_1$, применяя к которому лемму 3 сразу получаем доказательство утверждения для случая $n' < n$. Если же $n' > n$, то лемму 3 следует применить к замкнутому пути $I_{k+1} \to I_k \to I_{k+2} \ldots \to I_1 \to I_{k+1} \ldots \to I_{k+1}$.

Используя лемму 6 докажем последнее утверждение теоремы: если непрерывное отображение имеет цикл периода $2^l(2k+1)$, $k \geq 1$, то оно имеет и циклы периодов $2^l(2r+1)$ и $2^{l+1}s$, $r > k$, $s \geq 1$. Действительно, если отображение f имеет цикл периода $2^l(2k+1)$, то отображение f^{2^l} имеет цикл периода $2k+1$. Из леммы 6 также вытекает, что отображение f^{2^l} содержит цикл периода $2s$ с любым значением $s \geq 1$ и, таким образом, f имеет цикл периода $2^{l+1}s$. Кроме того, из леммы 6 следует, что отображение f^{2^l} имеет цикл периода $2r+1$, точки которого для f являются периодическими периода $2^l(2r+1)$. На этом доказательство теоремы Шарковского завершено.

Отметим, что условие о замкнутости B-графа в лемме 3 является существенным. Рассмотрим, например, цикл периода 4. Если использовать теорему Шарковского о существовании циклов, то можно лишь утверждать, что существуют циклы периодов 2 и 1. Однако, как легко видеть, циклу периода 4 можно поставить в соответствие две различных циклических подстановки

$$\pi_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \pi_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

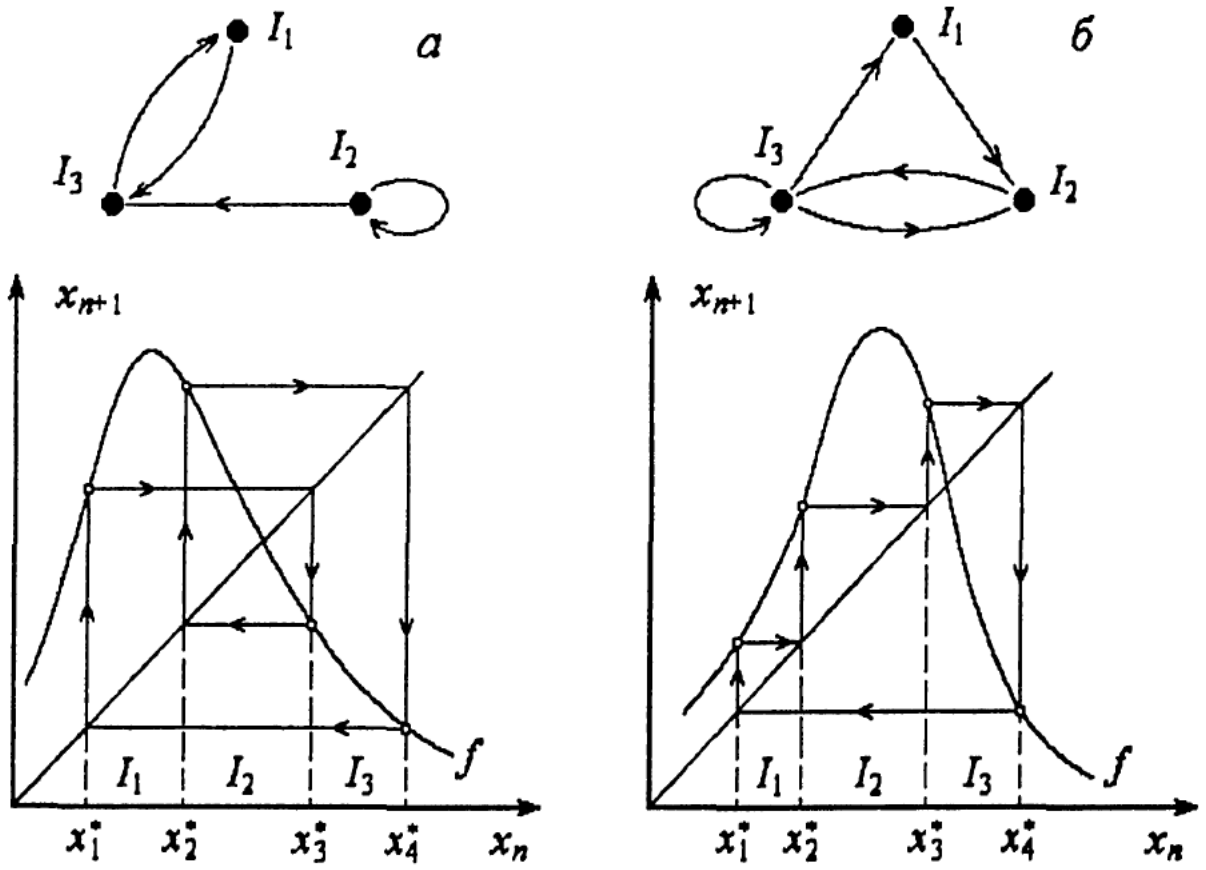

Рис. 4.13. Два отображения с циклами периода 4 и их графы переходов.

Подстановка $\pi_4^{(1)}$ соответствует такому отображению f, когда $f(I_1) \supset I_3$, $f(I_3) \supset I_1$, $f(I_2) \supset I_2 \cup I_3$, и B-граф цикла не имеет замкнутого пути длины, большей двух. (рис. 4.13а). В этом случае, действительно возможны только циклы периодов 2 и 1. Если же отображение f имеет цикл, соответствующий циклической подстановке $\pi_4^{(2)}$, то $f(I_1) \supset I_2$, $f(I_2) \supset I_3$, $f(I_3) \supset I_3 \cup I_2 \cup I_1$, и B-граф цикла (рис. 4.13б) имеет замкнутый путь длины 3. В этом случае согласно лемме 3 отображение имеет цикл периода 3 и, следовательно, имеет циклы любого периода.

4.3.2. За каскадом Фейгенбаума. В теореме Шарковского ничего не говорится об устойчивости циклов одновременно существующих в одномерных непрерывных отображениях в соответствии с порядком (4.40). Однако, многочисленные примеры, в том числе и логистическое отображения (4.2), показывают, что рождение различных устойчивых циклов одномерного унимодального отображения $f(x, \mu)$ при изменении значений некоторого бифуркационного параметра μ происходит именно в последовательности, задаваемой порядком (4.40). Сначала при $\mu_0 < \mu < \mu_\infty$ происходит каскад бифуркаций удвоения периода изначально устойчивого простого цикла. При этом на интервале $\mu_n < \mu < \mu_{n+1}$ отображение f имеет единственный устойчивый цикл периода 2^n и семейство неустойчивых циклов всех периодов 2^i, $i = 0, 1, ..., n-1$. При значении $\mu = \mu_\infty$ отобра-

жение $f(x,\mu)$ имеет непериодическую полуустойчивую траекторию – аттрактор Фейгенбаума, в любой окрестности любой точки которой лежат точки счетного множества неустойчивых циклов всех периодов 2^n, $n = 0, 1, \ldots$. Таким образом, каскад бифуркаций Фейгенбаума происходит в соответствии с порядком Шарковского и является начальной стадией субгармонического каскада, описываемого этим порядком.

Весь интервал изменения значений параметра μ при $\mu > \mu_\infty$ состоит из бесконечного числа подинтервалов (окон) периодичности $\mu_\alpha < \mu < \mu_{\alpha+1}$, разделенных изолированными значениями параметра μ, при которых отображение имеет сингулярные нерегулярные аттракторы – полуустойчивые непериодические траектории. В каждом окне периодичности устойчивым является либо основной цикл периода k в порядке Шарковского, либо один из циклов периода $2^l \cdot k$, $l = 1, 2, \ldots$, соответствующий каскаду бифуркаций удвоения периода основного цикла. При этом отображение имеет также неустойчивые циклы всех периодов, удовлетворяющих условию $m \triangleleft 2^l k$. В случае логистического отображения (4.2) самое большое окно периодичности имеет цикл периода три (рис. 4.14), рождающийся при значении $\mu \approx 3.828$.

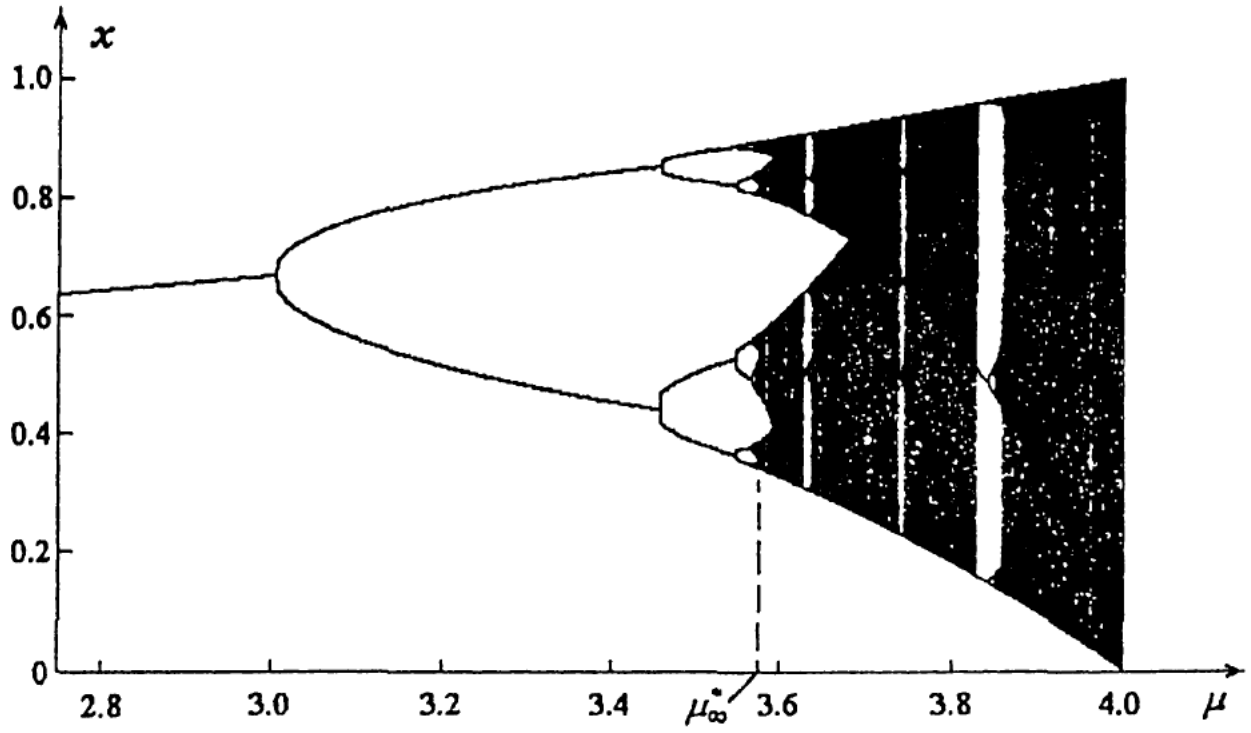

Рис. 4.14. Полная бифуркационная диаграмма логистического отображения при $\mu \leq 4$.

С ростом значений параметра при $\mu > \mu_\infty$ возрастает сложность нерегулярных непериодических аттракторов, так как, во-первых, растет количество присутствующих в системе неустойчивых циклов, а во-вторых, как показывают численные эксперименты, после каждого каскада бифуркаций удвоения периода некоторого цикла происходит

бифуркация связанности, т.е. объединение различных частей предыдущего нерегулярного аттрактора. Есть основания полагать, что нигде не плотным множеством на отрезке является только множество точек самого простейшего сингулярного аттрактора – аттрактора Фейгенбаума. Точки всех более сложных сингулярных субгармонических аттракторов плотны на некоторых, пусть даже сколь угодно малых интервалах, совокупная длина которых растет с ростом значений параметра μ, покрывая в конечном итоге весь отрезок. Подчеркнем, однако, что вопросы мощности, размерности и меры множеств точек, принадлежащих различным субгармоническим сингулярным аттракторам одномерных отображений исследованы пока еще недостаточно. Некоторые связанные с этими проблемами результаты можно найти, например, в [4, 90], где в частности показано, что динамика логистического отображения (4.2) при $\mu = 4$ обладает свойствами эргодичности и перемешивания.

4.4. Регулярные и сингулярные устойчивые и седловые циклы трехмерных автономных систем. Особые точки типа "ротор".

Рассмотрим гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu),\ x \in M \subset \mathbb{R}^3,\ \mu \in I \subset \mathbb{R},\ F \in C^\infty, \qquad (4.41)$$

заданных в трехмерном фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от значений скалярного системного параметра μ, лежащих в интервале I вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для того, чтобы понять природу сингулярных аттракторов семейства систем (4.41) и их связь с сингулярными аттракторами одномерных отображений, рассмотрим сначала понятия регулярных и сингулярных устойчивых и седловых предельных циклов.

4.4.1. Регулярные и сингулярные предельные циклы. Пусть предельный цикл $x_0(t, \mu)$, имеющий период $T = T(\mu)$, является решением семейства систем (4.41) при всех $\mu \in I$. Линеаризуя семейство (4.41) в окрестности цикла, получим зависящую от параметра систему неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической матрицей линейной части

$$\dot{y} = A(t, \mu)y + O(|y|^2),\ A(t, \mu) = D_x F(x_0(t, \mu), \mu) = \\ = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0(t, \mu), \mu) \right\},\ i, j = 1, 2, 3, \qquad (4.42)$$

где $y(t) = x(t) - x_0(t, \mu)$, а $A(t + T, \mu) = A(t, \mu)$. При этом вектор $y = 0$ является решением системы (4.42) для всех $\mu \in I$.

Как следует из теории Флоке, каждое фундаментальное матричное решение линейной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{y} = A(t,\mu)y,\ A(t+T,\mu) = A(t,\mu) \tag{4.43}$$

представимо в виде $Y(t,\mu) = P(t,\mu)V(t,\mu)$, где $P(t,\mu)$ — некоторая, вообще говоря, комплексная T-периодическая матрица, а матрица $V(t,\mu) = \exp(B(\mu)t)$ является фундаментальной матрицей решений линейной системы уравнений с постоянными, вообще говоря, комплексными коэффициентами.

Преобразование $P(t,\mu)$, таким образом, осуществляет приведение линейной системы (4.43) с периодическими коэффициентами к линейной системе с постоянными коэффициентами. При этом устойчивость (неустойчивость) периодического решения определяется собственными значениями матрицы B — показателями Флоке исходного цикла или, что равносильно, собственными значениями действительной матрицы $C = \exp(BT)$ — мультипликаторами цикла. Один показатель Флоке, соответствующий движению вдоль цикла, всегда равен нулю, и, если цикл устойчив при всех $\mu < 0$, то остальные два показателя имеют отрицательные вещественные части (один простой мультипликатор имеет значение $+1$, а остальные два мультипликатора имеют модули, меньшие 1, то есть лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного).

Пусть при $\mu = 0$ цикл теряет устойчивость в результате бифуркации, связанной с пересечением одного из показателей Флоке мнимой оси слева направо или, что равносильно, с пересечением единичной окружности одним из мультипликаторов, лежащих внутри единичного круга при $\mu < 0$. Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Заменой переменных $y(t) = Q(t,\mu)z(t)$ с T-периодической матрицей $Q(t,\mu)$ упростим анализ системы (4.41) переходом к системе координат, связанной с циклом. В такой системе одним из координатных векторов является вектор $\dot{x}_0(t)$, касательный к циклу, другим – вектор цикла $x_0(t)$. Циклу соответствует точка $(0,0,0)$. Так как мультипликатор цикла, соответствующий вектору $\dot{x}_0(t)$, всегда равен единице, а показатель Флоке — нулю и не является бифуркационным, то координаты нормальной формы бифуркации заведомо лежат в плоскости S, трансверсальной вектору $\dot{x}_0(t)$ и задаваемой последними двумя компонентами вектора $z(t)$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать первую компоненту вектора $z(t)$ тождественно равной нулю. Тогда анализ возможных бифуркаций цикла сводится к анализу в плоскости S решений двумерной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u}(t) = D(t,\mu)u(t) + H(u, Q(t,\mu), \mu) \tag{4.44}$$

относительно второй и третьей компонент вектора $z(t)$, где матрица $D(t,\mu)$ получается из матрицы

$$L(t,\mu) = Q^{-1}(t,\mu)A(t,\mu)Q(t,\mu) - Q^{-1}(t,\mu)\dot{Q}(t,\mu)$$

вычеркиванием ее первой строки и первого нулевого столбца, а разложение функции H по компонентам вектора $u(t)$ в особой точке $O(0,0)$ системы (4.44), соответствующей циклу, начинается с членов второго порядка. Линейная часть системы (4.44) имеет те же показатели Флоке, за исключением нулевого, что и линеаризованная система (4.43).

Возможны два принципиально различных случая: случай постоянной матрицы $D(t,\mu) = D(\mu)$ и случай переменной T-периодической матрицы $D(t,\mu)$. Первый случай означает, что матрицы $Q(t,\mu) = P(t,\mu)$ и $L(t,\mu) = B(\mu)$ действительны, а показателями Флоке цикла, отличными от нулевого, являются собственные значения матрицы $D(\mu)$. Другими словами, первый случай означает, что переход преобразованием $Q(t,\mu)$ к системе координат, связанной с циклом, уже осуществляет приведение системы (4.43) с периодическими коэффициентами к системе с постоянными вещественными коэффициентами. Во втором случае имеет место существенно более сложная ситуация. Рассмотрим отдельно два описанных выше случая.

Случай постоянной матрицы $D(t,\mu) = D(\mu)$. В этом случае бифуркации цикла соответствует либо переход одного вещественного собственного значения, либо двух комплексно сопряженных собственных значений матрицы $D(\mu)$ через мнимую ось слева направо (переход одного мультипликатора через точку $+1$ единичной окружности либо двух комплексно сопряженных мультипликаторов через единичную окружность). В результате такой бифуркации либо рождается пара новых устойчивых предельных циклов, либо происходит обмен устойчивостью между циклами, либо цикл исчезает вместе с таким же неустойчивым циклом, либо из него рождается устойчивый двумерный тор. Соответствующая циклу нулевая особая точка двумерной системы (4.44) в плоскости S, трансверсальной циклу, при $\mu < 0$ является устойчивым узлом или фокусом, а при $\mu > 0$ – неустойчивым фокусом или седлом, имеющим одномерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия. Такой цикл назовем *регулярным устойчивым циклом*, а рождающийся из него в результате какой-либо из описанных выше бифуркаций седловой цикл назовем *регулярным седловым циклом*. В любом случае бифуркации такого цикла не приводят к появлению хаотической динамики в трехмерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Случай переменной T-периодической матрицы $D(t,\mu)$. Этот случай означает, что переход преобразованием $Q(t,\mu)$ к системе координат, связанной с циклом, осуществляет приведение системы (4.43) с периодическими коэффициентами к системе (4.44) меньшей размерности, но имеющей также T-периодические вещественные коэффициенты. В этом случае, как следует из теории Флоке, фундаментальное матричное решение линейной части системы (4.44) представимо в виде

$$U(t,\mu) = R_1(t,\mu)\exp(E_1(\mu)t),$$

где $R_1(t,\mu)$ – некоторая T-периодическая комплексная матрица такая,

что $R_1(0,\mu) = I$, а $E_1(\mu)$ – некоторая постоянная комплексная матрица, собственные значения которой являются показателями Флоке исходного цикла. Принципиально важным является то, что в этом случае система имеет комплексные, но не комплексно сопряженные показатели Флоке. Устойчивый цикл, имеющий такие показатели Флоке, назовем *сингулярным устойчивым циклом.* Бифуркации сингулярного цикла $x_0(t,\mu)$ соответствует переход через мнимую ось слева направо его одного комплексного показателя Флоке $\alpha_1(\mu)$ при $\mu = 0$. Рождающийся при этом седловой цикл назовем *сингулярным седловым циклом.* При этом соответствующий вещественный мультипликатор цикла при $\mu = 0$ имеет вид $\lambda = \exp(\alpha_1(0)T) = \exp(i\pi) = -1$.

4.4.2. Особые точки типа ротор. Из теории Флоке также следует, что фундаментальное матричное решение линейной части системы (4.44) представимо в виде произведения

$$U(t,\mu) = R(t,\mu)e^{E(\mu)t} = R(t,\mu)\begin{pmatrix} e^{\beta_1(\mu)t} & 0 \\ 0 & e^{\beta_2(\mu)t} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

с вещественной $2T$-периодической матрицей $R(t,\mu)$, $R(0,\mu) = I$ и диагональной вещественной матрицей $E(\mu)$, одно собственное значение которой $\beta_1(\mu) = \mathrm{Re}\alpha_1(\mu)$ переходит при $\mu = 0$ в правую полуплоскость вдоль вещественной оси, а второе собственное значение $\beta_2(\mu)$ остается при этом отрицательным. Поэтому соответствующая сингулярному циклу нулевая особая точка O двумерной неавтономной системы (4.44) в плоскости S, трансверсальной циклу, не имеет аналога среди особых точек автономных вещественных двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Из (4.45) следует, что $R(t,\mu) = R_1(t,\mu)\exp(i\mathrm{Im}\alpha_1(\mu)t)$, а $\mathrm{Im}\alpha_2(\mu) = \mathrm{Im}\alpha_1(\mu)$, то есть мнимые части показателей Флоке сингулярного цикла совпадают.

Определение. Особую точку двумерной вещественной системы с периодической главной линейной частью, имеющей комплексные показатели Флоке с одинаковыми мнимыми и разными отрицательными вещественными частями, назовем *устойчивым ротором*, а с отрицательной и положительной вещественными частями – *неустойчивым ротором.*

Простейшим примером системы, в которой имеется особая точка типа ротор, является линейная двумерная неавтономная система

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 2(\mu - 1 + \cos t)u_1 + (2\sin t - 1/2)u_2, \\ \dot{u}_2 &= (2\sin t + 1/2)u_1 + 2(\mu - 1 - \cos t)u_2 \end{aligned}$$

с нулевой особой точкой. Заменой переменных

$$u(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+e^{-it}}{2} & -\dfrac{1-e^{-it}}{2i} \\ \dfrac{1-e^{-it}}{2i} & \dfrac{1+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} v(t)$$

последняя система сводится к линейной системе с постоянной диагональной комплексной матрицей, имеющей своими диагональными элементами показатели Флоке $\beta_1 = i/2 + 2\mu$ и $\beta_2 = i/2 + 2\mu - 4$ исходной системы. Поэтому при $\mu < 0$ ротор устойчив, а при $\mu > 0$ – неустойчив.

Ниже будет показано, что уже двумерные неавтономные системы с особыми точками типа ротор могут иметь сколь угодно сложную хаотическую динамику, следствием чего и является наличие хаотической динамики в трехмерных автономных системах.

При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu = 0$ исходный сингулярный устойчивый цикл $x_0(t, \mu)$ становится сингулярным седловым циклом, а нулевая особая точка O плоскости S, соответствующая исходному циклу, становится неустойчивым ротором. Сингулярный цикл, естественно, имеет при этом двумерное инвариантное неустойчивое многообразие W^u. Структура этого многообразия локально достаточно проста, но глобально может быть чрезвычайно сложной. Так как преобразованием (4.45) система (4.44) сводится к системе, особая точка которой является локально седлом, имеющим одномерное инвариантное неустойчивое многообразие, то последнее многообразие локально вращается в плоскости S вокруг ротора O с периодом $2T$. Одновременно оно вращается вместе с плоскостью S в трехмерном фазовом пространстве M с периодом T, описывая тем самым, как нетрудно видеть, лист Мёбиуса, являющийся вращающимся сечением двумерных торов, окружающих исходный цикл. Фазы этих двух вращений (по циклу и вокруг цикла) однозначно связаны. Поэтому рождение из сингулярного исходного цикла $x_0(t, \mu)$ устойчивого цикла удвоенного периода при $\mu > 0$ происходит достаточно просто: в двумерной плоскости S вокруг неустойчивого ротора O рождается простой устойчивый цикл удвоенного периода, не имеющий самопересечений. Последнее означает рождение в трехмерном фазовом пространстве устойчивого цикла удвоенного периода, лежащего одновременно на некотором резонансном торе вокруг исходного сингулярного цикла и на двумерной поверхности G, являющейся замыканием неустойчивого инвариантного многообразия W^u исходного цикла. Сепаратрисы исходного цикла, раскручиваясь по листу Мёбиуса, стремятся к родившемуся устойчивому циклу удвоенного периода изнутри содержащего его тора.

Как показывают многочисленные примеры [29–33], именно бифуркация удвоения периода сингулярного устойчивого цикла, являющаяся как началом каскада бифуркаций удвоения периода устойчивых циклов, так и началом субгармонического и гомоклинического каскадов бифуркаций, приводит к появлению в системе хаотической динамики. Однако уже бифуркация учетверения периода исходного сингулярного цикла не может быть описана локальными методами и требует применения других подходов.

4.5. Природа сингулярных аттракторов трехмерных автономных систем.

В этом пункте будет показано, что основополагающую роль во всех каскадах бифуркаций исходного сингулярного цикла, начиная с бифуркации учетверения его периода, и в образовании всех сингулярных аттракторов играет сдвиг фазы. Именно он дает возможность траекториям автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений лежать на двумерных многолистных поверхностях, чему соответствует существование в двумерной плоскости S не взаимнооднозначных непрерывных одномерных отображений. Последнее приводит к возможности существования в таких системах сколь угодно сложной хаотической динамики. Заметим, что ни в каком сечении Пуанкаре, трансверсальном к исходному циклу, такая ситуация просто невозможна, так как она будет противоречить теореме единственности решения автономной системы. Таким образом, отображение Пуанкаре неприменимо к анализу систем дифференциальных уравнений, так как игнорирует фазу периодических решений.

4.5.1. Структура двумерной сепаратрисной поверхности седлового сингулярного цикла. Итак, пусть сингулярный предельный цикл $x_0(t,\mu)$ периода T является устойчивым решением семейства систем (4.41) при всех $\mu < 0$, а при $\mu = 0$ происходит рассмотренная выше бифуркация удвоения его периода. На самом деле предельный цикл описывается не одной траекторией $x_0(t,\mu)$, а бесконечным семейством таких траекторий $x_0(t+\varphi,\mu)$, зависящих от фазы φ. Изложенным выше методом перейдем к анализу решений семейства двумерных неавтономных систем (4.44) с T-периодической матрицей $D(t+\varphi,\mu)$ в плоскости S, вращающейся трансверсально к исходному циклу. При этом матрица Q в (4.44) также зависит от аргумента $t+\varphi$. Пусть особая точка $O(0,0)$ неавтономной системы (4.44) является неустойчивым ротором при всех $0 < \mu < \mu^*$.

Лемма 1. *При любом* $0 < \mu < \mu^*$ *траектории* $x(t+\varphi,\mu) = x_0(t+\varphi,\mu)+Q(t+\varphi,\mu)(0,\ u_1(t),\ u_2(t))^T$ *системы* (4.41) *и только они при всех* $0 \le \varphi < 2T$ *являются сепаратрисами сингулярного цикла* $x_0(t,\mu)$, *стремящимися к нему при* $t \to -\infty$, *где вектор* $u(t)$ *является решением системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода*

$$u(t) = R(t+\varphi,\mu)\begin{pmatrix} e^{\beta_1(\mu)t} \\ 0 \end{pmatrix} + R(t+\varphi,\mu)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} e^{E(\mu)(t-\tau)} R^{-1}(\tau+\varphi,\mu) H(u(\tau), Q(\tau+\varphi,\mu),\mu)d\tau. \quad (4.46)$$

Доказательство. Так как любое решение автономной системы стремится к циклу с некоторой асимптотической фазой, то искомыми

сепаратрисами цикла будут те и только те решения системы (4.41), порожденные решениями $u(t)$ семейства (4.44), для которых при некотором φ имеет место $u(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Из представления (4.45) следует, что общее решение системы уравнений (4.44) в плоскости S может быть записано в виде

$$u(t) = R(t+\varphi,\mu)e^{E(\mu)t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + R(t+\varphi,\mu)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} e^{E(\mu)(t-\tau)}R^{-1}(\tau+\varphi,\mu)H(u(\tau),Q(\tau+\varphi,\mu),\mu)d\tau, \quad (4.47)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Так как $\beta_2(\mu) < 0$ при всех $0 < \mu < \mu^*$, то из условия $u(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ необходимо следует, что $C_2 = 0$. Далее, ввиду вращения вектора $u(t)$ вокруг ротора O можно считать без ограничения общности, что $C_1 > 0$, но при этом интервал изменения фазы, охватывающий всю область определения сепаратрисной поверхности цикла будет $0 \le \varphi < 2T$. Представим теперь $C_1 \exp(\beta_1 t)$ как $\exp(\beta_1 s)$, где $s = t + (ln C_1)/\beta_1 = t + a$, и перепишем систему уравнений (4.47) в виде

$$u(s-a) = R(s-a+\varphi)\begin{pmatrix} e^{\beta_1 s} \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ R(s-a+\varphi)\int_{-\infty}^{s} e^{E(s-\eta)}R^{-1}(\eta-a+\varphi)H(u(\eta-a),Q(\eta-a+\varphi))d\eta,$$

опустив параметр μ. Из последнего представления ввиду T-периодичности функции Q и $2T$-периодичности функции R следует, что решение $u(t)$ системы (4.47) с константой $C_1 > 0$ ($C_2 = 0$) и фазой $0 \le \varphi < 2T$ в момент t является также и решением системы (4.46) с фазой $(\varphi - a) \bmod (2T)$, взятым в момент $s = t + a$. Таким образом, без ограничения общности можно положить в (4.47) $C_1 = 1$. Следовательно, сепаратрисная поверхность сингулярного цикла $x_0(t,\mu)$ семейства систем (4.41) состоит из решений, порожденных решениями двумерной системы интегральных уравнений (4.46) при всех $0 \le \varphi < 2T$. Лемма доказана.

Следствие. Так как все функции непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и, следовательно, непрерывно дифференцируемы по фазе φ, то построенная в лемме 1 сепаратрисная поверхность сингулярного цикла является его непрерывно дифференцируемым двумерным инвариантным неустойчивым многообразием W^u.

Замечание. Результат леммы 1 и выводы следствия к ней остаются, очевидно, справедливыми и в общем случае, когда координата $z_1 \neq 0$ в преобразовании

$$x(t+\varphi,\mu) = x_0(t+\varphi,\mu) + Q(t+\varphi,\mu)z(t).$$

При этом двумерная сепаратрисная поверхность будет задаваться решениями системы трех интегральных уравнений Вольтера 2-го рода.

Теорема 4.2. *Любой регулярный аттрактор (устойчивый предельный цикл), любой неустойчивый цикл и любой сингулярный аттрактор семейства систем* (4.41) *в трехмерном фазовом пространстве M при всех $0 < \mu < \mu^*$ принадлежит двумерной поверхности G – замыканию двумерного неустойчивого инвариантного многообразия W^u исходного сингулярного цикла $x_0(t,\mu)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала произвольное периодическое устойчивое или неустойчивое решение $x(t)$ системы (4.41) при некотором $0 < \mu < \mu^*$. Пусть некоторая точка x_0 его замкнутой в фазовом пространстве M траектории не принадлежит поверхности G, т.е. $\mathrm{dist}(x_0, G) > 0$. Выберем последовательность моментов времени $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такую, что $x(t_n) = x_0$, и, следовательно, $\mathrm{dist}(x(t_n), G) = \mathrm{const} > 0$. Но с другой стороны, любое решение системы (4.41), в частности, цикл $x(t)$, порождено одним из решений двумерной неавтономной системы (4.44), имеющим вид (4.47). Так как $\beta_2(\mu) < 0$, то такое решение при $t \to \infty$ стремится к некоторому решению, порожденному решением системы (4.47), с константой $C_2 = 0$, и некоторой константой C_1. Но как было показано в лемме 1, любое такое решение системы (4.47) можно представить как решение системы (4.46) с некоторой другой фазой и взятое в некоторый другой момент времени. Поэтому, любая траектория семейства систем (4.41) необходимо сближается с некоторой сепаратрисой цикла, принадлежащей поверхности G. Следовательно, необходимо должно выполняться условие $\mathrm{dist}(x(t_n), G) \to 0$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что любой цикл принадлежит поверхности G. Из этого вытекает, что и любой сингулярный аттрактор принадлежит поверхности G, так как он содержит в любой своей окрестности неустойчивый предельный цикл. Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет принципиальное значение для понимания существа хаотических процессов, происходящих в трехмерных автономных системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Из нее вытекает два важных следствия.

Следствие 1. Фрактальная размерность любого сингулярного аттрактора семейства систем (4.41) не может превышать величины 2.

Следствие 2. Любой сингулярный аттрактор семейства систем (4.41), являясь замыканием полуустойчивой непериодической траектории, лежащей на двумерной поверхности G, имеет один отрицательный и два нулевых показателя Ляпунова.

4.5.2. Механизм рождения сингулярных аттракторов. Каскады бифуркаций Фейгенбаума и Шарковского. Рассмотрим теперь механизм рождения сингулярных аттракторов автономных трехмерных систем дифференциальных уравнений в результате последовательных бифуркаций изначально устойчивого сингулярного цикла. Как уже было показано выше, сначала при $\mu > 0$ происходит рождение из сингулярного исходного цикла $x_0(t, \mu)$ устойчивого цикла удвоенного периода, что соответствует рождению в двумерной плоскости S вокруг неустойчивого ротора O неавтономной двумерной системы (4.44) простого устойчивый цикла удвоенного периода, не имеющего самопересечений. Так как в плоскости S происходит вращение траекторий решений $u(t)$ системы (4.44) вокруг ротора O, то это дает возможность определить монотонно убывающее непрерывное отображение N отрезка одномерной прямой (например, отрезка $c \le u_1 \le d$ прямой $u_2 = 0$ такого, что $c < 0,\ d > 0$) в себя за полуоборот вокруг ротора O. Одномерное отображение $N(u_1)$ имеет, очевидно, неустойчивую неподвижную точку $u_1 = 0$ и устойчивый цикл (c, d), соответствующий устойчивому циклу удвоенного периода системы (4.44), родившемуся в плоскости S.

С ростом значений параметра $\mu > 0$ величина интервала (c, d) увеличивается. Однако, этот процесс не может продолжаться бесконечно ввиду диссипативности исходной системы дифференциальных уравнений. Поэтому, начиная с некоторого значения параметра μ устойчивый цикл удвоенного периода также становится сингулярным устойчивым циклом, а сходящиеся к нему траектории двумерного многообразия W^u исходного цикла начинают закручиваться вокруг него. Этому соответствует начало закручиваний и самопересечений траекторий двумерной системы (4.44) вокруг ее устойчивого цикла в плоскости S. В терминах одномерного отображения $N(u_1)$ этому соответствует появление точки максимума на его графике в области $u_1 < 0$, что приводит к появлению двузначности его обратного отображения $N^{-1}(u_1)$. Замечательным является тот факт, что потеря однозначности решений системы (4.44) в плоскости S не приводит к потере однозначности решений исходной трехмерной автономной системы. Траекториям системы (4.44), проходящим в S через одну точку, соответствуют траектории исходной системы (4.41), проходящие через разные точки трехмерного пространства, отличающиеся своими фазами φ при их вращении вокруг исходного цикла! При этом двум ветвям отображения $N^{-1}(u_1)$ соответствуют два листа двумерной поверхности G трехмерного фазового пространства M системы (4.41).

Теорема 4.3. *Пусть в семействе автономных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений* (4.41) *при* $\mu = 0$ *происходит бифуркация удвоения периода устойчивого при* $\mu < 0$ *сингулярного цикла. Тогда первые стадии сценария перехода к хаосу в семействе систем* (4.41) *при возрастании положительных значений*

бифуркационного параметра μ совпадают со стадиями перехода к хаосу при итерациях непрерывного отображения единичного отрезка в себя, имеющего обратное двузначное отображение. Сначала реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода родившегося устойчивого предельного цикла, а затем – субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского (4.40).

Доказательство теоремы вытекает из проведенных выше построений непрерывного одномерного отображения $N(u_1)$ отрезка в себя, имеющего двузначное обратное отображение $N^{-1}(u_1)$, и из результатов Фейгенбаума [86] и Шарковского [76], изложенных в пп 4.2 и 4.3 настоящей главы, относительно итераций таких отображений. При этом периодической или непериодической траектории одномерного отображения $N(u_1)$ однозначно соответствует периодическая или непериодическая траектория системы (4.41), лежащая на двумерной двулистной поверхности G фазового пространства. Все устойчивые циклы рождаются либо в результате бифуркаций удвоения периода предыдущих устойчивых циклов каскада, либо парами с точно такими же неустойчивыми циклами в результате бифуркаций сингулярных аттракторов, а затем претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода, становясь неустойчивыми. Неустойчивые циклы не исчезают, а остаются в системе.

Следствие. Существует бесконечное множество интервалов значений параметра μ, при которых семейство систем (4.41) имеет регулярные аттракторы (асимптотически орбитально устойчивые периодические траектории пусть даже очень большого периода). Сингулярные аттракторы (замыкания непериодических полуустойчивых траекторий) семейство систем (4.41) имеет в бесконечном числе точек накопления различных бесконечных субкаскадов бифуркаций удвоения периодов различных циклов. Простейшим из таких аттракторов является, очевидно, аттрактор Фейгенбаума – первый непериодический аттрактор, существующий в семействе систем (4.41) при $\mu = \mu_\infty$, где значение μ_∞ соответствует пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла.

4.5.3. Гомоклинический и более сложные каскады бифуркаций. Как показывают многочисленные примеры (см. следующий пункт настоящей главы, а также статьи [29–33]), субгармонический каскад бифуркаций Шарковского не исчерпывает всей сложности перехода к хаосу в трехмерных автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Он может быть продолжен как минимум гомоклиническим каскадом бифуркаций. Переход к двумерной плоскости S дает возможность четко определить конец субгармонического каскада. После рождения устойчивого цикла периода три в плоскости S (цикла периода шесть в трехмерном фазовом простран-

стве) и каскада бифуркаций удвоения его периода при дальнейшем увеличении значений параметра μ происходит приближение витков сингулярных аттракторов к ротору O, что в терминах отображения $N(u_1)$ означает стремление $N(c)$ к нулю. Но $N(u_1)$ не может пересечь линию $u_2 = 0$ ни в какой другой точке, отличной от точки $u_1 = 0$, так как это означало бы существование траектории, отличной от исходного цикла, но переходящей в него за половину оборота вокруг точки O с некоторым сдвигом фазы. Последнее невозможно для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому найдется значение параметра μ_c такое, что при $\mu > \mu_c$ в отображении $N^{-1}(u_1)$ появляется третья ветвь! Здесь заканчивается субгармонический каскад бифуркаций. Дальнейшие бифуркации не описываются теорией Шарковского.

В трехмерном фазовом пространстве при стремлении μ к μ_c ленты сингулярных аттракторов сходятся к исходному неустойчивому циклу $x_0(t, \mu)$, а при $\mu > \mu_c$ поверхность G может стать трехлистной, причем траектории на третьем листе имеют более, чем на период сдвинутые фазы относительно траекторий на первом листе. Таким образом, дальнейший каскад бифуркаций устойчивых циклов может продолжаться уже на трехлистной двумерной поверхности. Для теоретического анализа таких каскадов бифуркаций необходимо создание теории одномерных отображений, имеющих многозначные обратные отображения. В рассмотренных в следующем пункте примерах как двулистные, так трехлистные и многолистные поверхности субгармонических, гомоклинических и более сложных аттракторов отчетливо наблюдаются как в плоскости S, так и в исходном трехмерном фазовом пространстве M.

Все известные классические аттракторы трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, включая системы Лоренца, Ресслера, Чуа и другие, являются полными или неполными субгармоническими или гомоклиническими сингулярными аттракторами (см. [29—33]). Поэтому все они расположены на двумерных двулистных или трехлистных поверхностях в фазовом пространстве. Однако существуют и более сложные аттракторы трехмерных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие системы должны иметь сингулярный цикл, но не иметь особой точки типа седло-фокус. Усложнение структуры двумерного неустойчивого многообразия цикла в них может сопровождаться появлением любого конечного, а возможно, и бесконечного числа листов. В следующем пункте будет приведен пример системы, поверхность G которой имеет по крайней мере пять листов. Все они отчетливо наблюдаются и в плоскости S, и в трехмерном фазовом пространстве.

Как следует из доказанных выше результатов, существует бесконечное множество значений параметра μ, при которых семейство систем (4.41) имеет различные сингулярные аттракторы, отличающиеся мощностью множества принадлежащих им неустойчивых циклов,

предельных к полуустойчивой непериодической траектории. Сложность сингулярных аттракторов возрастает с ростом значений бифуркационного параметра. В семействе систем (4.41) имеется по крайней мере один аттрактор, являющийся предположительно фракталом и имеющий размерность, меньшую двух, – это простейший аттрактор Фейгенбаума, не содержащий неустойчивых предельных циклов. Вместе с тем, как следует из теории одномерных отображений, в системе имеются также достаточно сложные аттракторы с размерностью, предположительно равной двум. Несомненно, проблема классификации хаотических аттракторов по мощности множества составляющих их траекторий, по их размерности или мере представляет большой интерес, но в данной книге не рассматривается.

4.6. Некоторые примеры систем с сингулярными аттракторами.

Так как уравнения циклов конкретных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть известны только в исключительных случаях, то при анализе таких систем основная трудность состоит в построении преобразования $x(t+\varphi,\mu) = x_0(t+\varphi,\mu) + Q(t+\varphi,\mu)z(t)$ и в переходе с его помощью к системе координат, связанной с циклом. Первый из рассмотренных ниже трех примеров допускает построение такого преобразования в явном виде с вектором $z(t) = (0,\ u_1(t),\ u_2(t))^{\mathrm{T}}$. Поэтому он является полной наглядной иллюстрацией всей изложенной выше теории образования сингулярных аттракторов трехмерных нелинейных автономных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Второй и третий примеры иллюстрируют отдельные характерные черты теории.

Пример 1. Рассмотрим автономную систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\nu x_2 + x_1 h(x_1, x_2, \mu, \nu), \\ \dot{x}_2 &= \nu x_1 + x_2 h(x_1, x_2, \mu, \nu), \\ \dot{x}_3 &= (x_2 + \nu/4)((x_1^2 + x_2^2) - 1) + 2(\mu - 1 - x_1)x_3, \end{aligned} \tag{4.48}$$

где

$$h(x_1, x_2, \mu, \nu) = ((\mu - 1)\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1)(x_1^2 + x_2^2 - 1) + (2x_2 - \nu/2)x_3.$$

При $\mu < 1$ система (4.48) имеет особую точку $(0, 0, \nu/8(\mu - 1))$ и предельный цикл $x_0(t,\mu) = (\cos\nu t, \sin\nu t, 0)^{\mathrm{T}}$, лежащий в плоскости переменных (x_1, x_2) и имеющий период $T = 2\pi/\nu$. Сделаем замену переменных

$$x(t+\varphi,\mu) = x_0(t+\varphi,\mu) + Q(t+\varphi,\mu)(0,\ u_1(t),\ u_2(t))^{\mathrm{T}}$$

с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $Q(t+\varphi,\mu)$:

$$Q(t)=\left(\dot{x}_0(t),x_0(t),(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}-\nu\sin\nu t & \cos\nu t & 0\\ \nu\cos\nu t & \sin\nu t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Во избежание длинных выкладок фазу φ в дальнейших вычислениях будем опускать. Указанной заменой приведем систему (4.48) к связанным с циклом координатам, т.е. непосредственно к двумерной неавтономной системе (4.44) с $2\pi/\nu$-периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned}\dot{u}_1&=2(\mu-1+\cos\nu t)u_1+(2\sin\nu t-\nu/2)u_2+h_1(u,t,\nu,\mu),\\ \dot{u}_2&=(2\sin\nu t+\nu/2)u_1+2(\mu-1-\cos\nu t)u_2+h_2(u,t,\nu,\mu),\end{aligned}\qquad(4.49)$$

где $u=(u_1,\ u_2)^{\mathrm{T}}$,

$$\begin{aligned}h_1&=(\mu-1+\cos\nu t)((2u_1+u_1^2)^2+u_1^2)+((2u_1+4)\sin\nu t-\nu/2)u_1u_2,\\ h_2&=(2\sin\nu t+(u_1+1)\sin\nu t+\nu/4)u_1^2-2u_1u_2\cos\nu t.\end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что главная линейная часть системы (4.49) имеет фундаментальную матрицу решений вида

$$U(t)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\nu t}{2} & -\sin\dfrac{\nu t}{2}\\ \sin\dfrac{\nu t}{2} & \cos\dfrac{\nu t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(2\mu t) & 0\\ 0 & \exp(2(\mu-2)t)\end{pmatrix}.\qquad(4.50)$$

Следовательно, при $\mu<0$ нулевое решение системы (4.49) и, соответственно, цикл $x_0(t)$ системы (4.48) устойчивы. При $\mu>0$ в системе (4.49) появляется устойчивое решение с частотой $\nu/2$ или же с удвоенным периодом $4\pi/\nu$. Представление (4.49) является представлением решения линейной системы с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $D(t,\mu)$ в виде произведения $4\pi/\nu$-периодической вещественной матрицы на вещественную матрицу $\exp(E(\mu)t)$, одно собственное значение которой выходит из единичного круга при $\mu=0$ через точку $+1$. Для того, чтобы перейти к представлению Флоке, запишем (4.50) в виде произведения $2\pi/\nu$-периодической комплексной матрицы на комплексную матрицу $\exp(E_1(\mu)t)$

$$U(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1+e^{-i\nu t}}{2} & -\dfrac{1-e^{-i\nu t}}{2i}\\ \dfrac{1-e^{-i\nu t}}{2i} & \dfrac{1+e^{-i\nu t}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(i\nu/2+2\mu)t} & 0\\ 0 & e^{(i\nu/2+2\mu-4)t}\end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы $\beta_1=i\nu/2+2\mu$ и $\beta_2=i\nu/2+2\mu-4$ матрицы $E_1(\mu)$ являются показателями Флоке цикла $x_0(t)$ исходной системы

(4.48). При $\mu = 0$ первый из них переходит слева направо через мнимую ось, а второй остается в левой полуплоскости. Соответствующие показателям Флоке мультипликаторы равны:

$$\lambda_1 = \exp((i\nu/2 + 2\mu)2\pi/\nu) = \exp(i\pi + 4\pi\mu/\nu),$$
$$\lambda_2 = \exp((i\nu/2 + 2\mu - 4)2\pi/\nu) = \exp(i\pi + 4\pi(\mu - 2)/\nu).$$

При $\mu = 0$ первый мультипликатор, очевидно, пересекает границу единичной окружности в точке -1. Второй мультипликатор при этом равен $-\exp(-8\pi/\nu)$ и остается лежащим на вещественной оси внутри единичного круга. Таким образом, при переходе бифуркационного параметра μ через значение $\mu_1 = 0$ сингулярный устойчивый цикл $x_0(t)$ системы (4.48) становится сингулярным седловым циклом, а вокруг него рождается устойчивый цикл удвоенного периода. Особая точка O(0,0) двумерной неавтономной системы (4.49) является ротором.

Все дальнейшие бифуркации цикла можно наблюдать как в трехмерном фазовом пространстве переменных (x_1, x_2, x_3), так и в плоскости S переменных (u_1, u_2), вращающейся вместе с траекторией цикла. Можно также легко получить график одномерного отображения $N(u_1)$ отрезка прямой $u_2 = 0$ в себя за половину оборота траектории системы (4.49) вокруг ротора O. Можно также в плоскости S и в любом сечении Пуанкаре фазового пространства плоскостью $\varphi = \text{const}$ отчетливо наблюдать различные листы двумерной поверхности G, на которой лежат все аттракторы системы (4.48) и к которой притягиваются все ее траектории.

Интегрируя систему (4.48) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, нетрудно установить, что при росте положительных значений параметра μ при фиксированном значении параметра ν в системе (4.48) сначала реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода исходного устойчивого предельного цикла, затем – субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, при $\nu = 4$ в системе (4.48) рождается устойчивый цикл учетверенного периода при $\mu_2 \approx 0.079$, периода 8 – при $\mu_3 \approx 0.0917$, периода 16 – при $\mu_4 \approx 0.095$, периода 32 – при $\mu_5 \approx 0.0951$, периода 64 – при $\mu_6 \approx 0.09517$. Значение μ_∞, соответствующее пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла, приближенно равно, очевидно, 0.0952. Здесь в системе (4.48) рождается аттрактор Фейгенбаума. При $\mu \approx 0.09523$ в системе (4.48) уже имеется устойчивый цикл периода 80, что соответствует циклу $5 \cdot 2^4$ в порядке Шарковского, при $\mu \approx 0.09526$ – устойчивый цикл периода $48 = 3 \cdot 2^4$. Цикл периода $20 = 5 \cdot 2^2$ рождается при $\mu \approx 0.0962$, цикл периода $12 = 3 \cdot 2^2$ рождается при $\mu \approx 0.0969$, цикл периода $10 = 5 \cdot 2$ при $\mu \approx 0.09986$, цикл периода 6 – при $\mu \approx 0.10295$. Рождение последнего цикла означает рождение устойчивого цикла периода три в порядке Шарковского в плоскости S переменных (u_1, u_2).

Субгармонический каскад бифуркаций заканчивается при $\mu \approx 0.1132$, когда глаза сингулярных аттракторов системы (4.49) в плоскости S стремятся к нулю. Все родившиеся к этому моменту циклы и сингулярные аттракторы системы (4.48) лежат на двумерной двулистной поверхности (рис. 4.15б), а обратное к $N(u_1)$ отображение является двузначным (рис. 4.15 а). Дальнейшие бифуркации устойчивых ци-

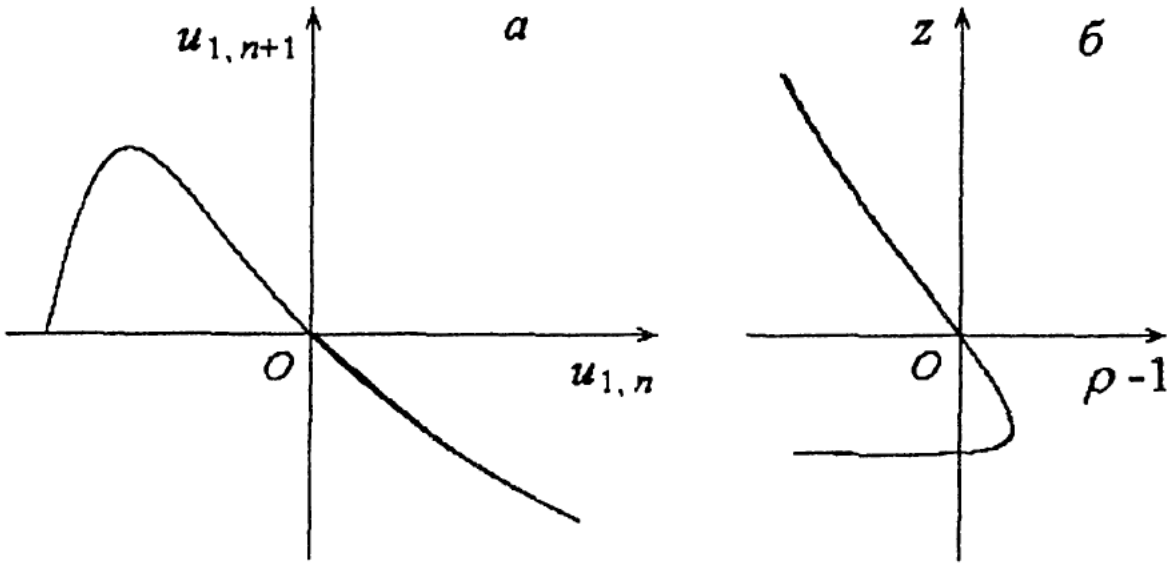

Рис. 4.15. Отображение $N(u_1)$ (а) и отображение Пуанкаре (б) в плоскости $\varphi = 1.3\pi$ для системы (4.48) при значениях $\nu = 4$ и $\mu = 0.1132$; $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

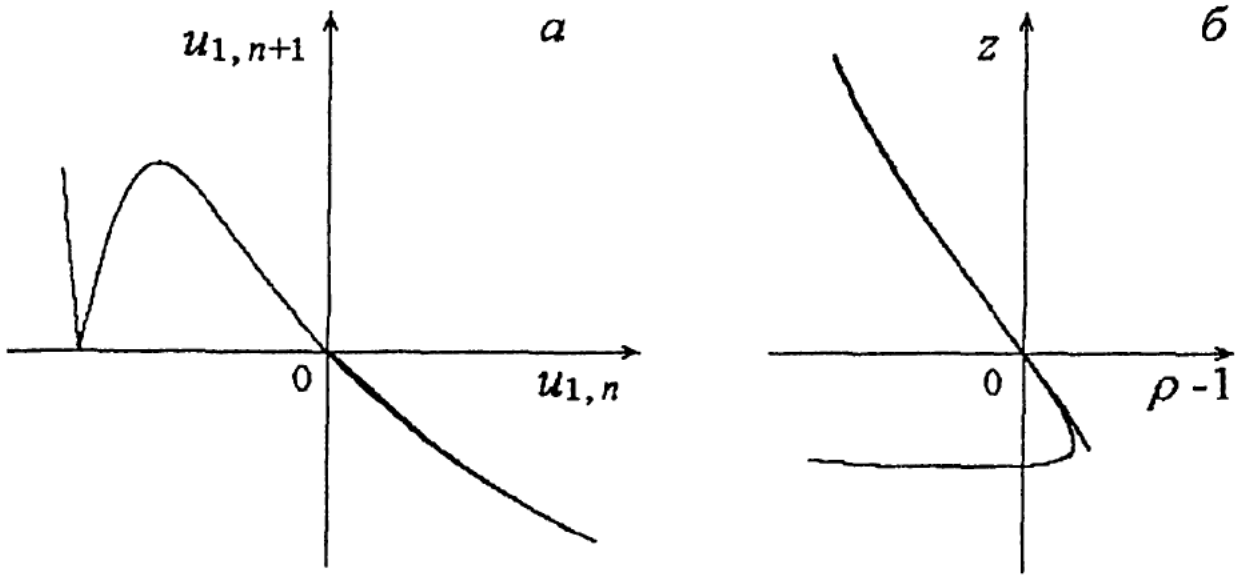

Рис. 4.16. Отображение $N(u_1)$ (а) и отображение Пуанкаре в плоскости $\varphi = 1.3\pi$ (б) для системы (4.48) при значениях $\nu = 4$ и $\mu = 0.127$.

клов и сингулярных аттракторов системы (4.48) при $\nu = 4$ и увеличении значений параметра μ происходят уже на двумерной трехлистной поверхности, а обратное к $N(u_1)$ отображение становится

трехзначным (рис. 4.16). В системе (4.48) реализуется неполный гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов C_n, сходящихся к гомоклиническому контуру – петле сепаратрисы особой точки. Но на достаточно большом расстоянии от седло-фокуса при $\mu = \mu^* \approx 0.1274$ система (4.48) перестает быть диссипативной, и ее аттракторы разрушаются. Сама особая точка, как легко установить, является в данном случае седло-фокусом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, так как матрица линеаризации системы (4.48) в ней имеет собственные значения:

$$\lambda_1 = 2(\mu - 1) < 0, \ \lambda_{2,3} = \frac{-\nu^2}{16(\mu - 1)} \pm i\nu.$$

При $\nu = 2$ в системе (4.48) при увеличении значений параметра μ реализуется уже полный гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру, который в этом случае существует в системе при $\mu = \mu^* \approx 0.0625$. Так, например, устойчивый цикл учетверенного периода рождается при $\mu_2 \approx 0.0248$, периода 8 – при $\mu_3 \approx 0.0302$, периода 16 – при $\mu_4 \approx 0.0315$, периода 32 – при $\mu_5 \approx 0.0318$. Значение μ_∞, соответствующее пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла, приближенно равно 0.032. Здесь в системе рождается аттрактор Фейгенбаума. При $\mu \approx 0.034$ в системе (4.48) рождается устойчивый цикл периода $10 = 5 \cdot 2$, а при $\mu \approx 0.0355$ – цикл периода 6. Субгармонический каскад бифуркаций заканчивается при $\mu \approx 0.0415$. Устойчивый цикл C_5 гомоклинического каскада существует в системе при $\mu \approx 0.05198$, а цикл C_7 – при $\mu \approx 0.053$.

При стремлении μ к μ^* , как показывают численные эксперименты, отображение $N^{-1}(u_1)$ становится многозначным (например, при $\mu \approx 0.0519$ – четырехзначным), но поверхность G при этом остается трехлистной, то есть достаточно простой. Это можно объяснить возможностью касания неустойчивого двумерного инвариантного многообразия W^u исходного сингулярного цикла и неустойчивого двумерного инвариантного многообразия седло-фокуса.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - \nu x_2 - x_1^2 x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= \nu x_1 + \mu x_2 - x_1 x_2 x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sigma x_3, \end{aligned} \tag{4.51}$$

зависящую от трех системных параметров μ, $\nu > 0$ и $\sigma > 0$. Система (4.51) по своим характеристикам более близка к реальным автономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, чем

модельная система (4.48). Она имеет нулевую особую точку, являющуюся устойчивым фокусом при $\mu < 0$, и седло-фокусом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями при $\mu > 0$. Одновременно при $\mu > 0$ в системе (4.51) в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый сингулярный предельный цикл, характеристики которого нам неизвестны. Такие системы обладают наиболее простыми сепаратрисными поверхностями своих сингулярных циклов.

Интегрируя систему (4.51) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, нетрудно установить, что при росте положительных значений параметра μ при фиксированных значениях параметров ν и σ в системе (4.51), как и в системе (4.48), сначала реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода родившегося устойчивого предельного цикла, а затем – субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, при $\nu = 1$, $\sigma = 5$, в системе (4.51) рождается устойчивый цикл удвоенного периода при $\mu_1 \approx 0.02445$, учетверенного периода – при $\mu_2 \approx 0.02618$, периода 8 – при $\mu_3 \approx 0.0265$, периода 16 – при $\mu_4 \approx 0.02657$, периода 32 – при $\mu_5 \approx 0.02658$, периода 64 – при $\mu_6 \approx 0.0265805$. Значение μ_∞, соответствующее пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла, приближенно равно, очевидно, 0.026581. Здесь в системе (4.51) рождается аттрактор Фейгенбаума. При $\mu \approx 0.0265829$ в системе (4.51) уже имеется устойчивый цикл периода 48, что соответствует циклу $3 \cdot 2^4$ в порядке Шарковского. Цикл периода $12 = 3 \cdot 2^2$ рождается при $\mu \approx 0.026623$, цикл периода $10 = 5 \cdot 2$ при $\mu \approx 0.0267$, цикл периода 6 – при $\mu \approx 0.02678$. Субгармонический каскад бифуркаций, соответствующий порядку Шарковского, заканчивается приблизительно при $\mu \approx 0.0273$.

При дальнейшем увеличении значений параметра μ в системе (4.51) реализуется полный гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов C_n, сходящихся к гомоклиническому контуру. Цикл C_3 периода три гомоклинического каскада рождается при $\mu \approx 0.0276$, цикл C_4 при $\mu \approx 0.02814$, цикл C_5 при $\mu \approx 0.02841$, цикл C_6 – при $\mu \approx 0.028571$ и т.д. Гомоклинический контур в системе (4.51) существует при $\mu = \mu^* \approx 0.0289659$ ($\nu = 1$, $\sigma = 5$).

Не зная уравнений цикла, мы не имеем возможности перейти к вращающейся плоскости S, трансверсальной циклу. Тем не менее, так как система (4.51) допускает сведение к двумерной системе

$$\dot{r} = \mu r - z^2 r^2 \cos(\nu t + \varphi), \ \dot{z} = r^2 - \sigma z + z^2$$

заменой

$$x_1 = r(t)\cos(\nu t + \varphi), \ x_2 = r(t)\sin(\nu t + \varphi), \ x_3 = z(t),$$

то все ее сингулярные аттракторы могут отчетливо наблюдаться в сечениях Пуанкаре, проходящих через ось z трансверсально к исход-

ному циклу, а также в двумерной плоскости $\tilde{S}$, задаваемой переменными (r, z) (рис. 4.17а). Численные эксперименты показывают, что все сингулярные аттракторы системы (4.51) лежат на двулистной поверхности. Начальный устойчивый цикл лежит на нижнем листе. При бифуркации удвоения периода один виток цикла остается лежащим на нижнем листе, а другой виток переходит на верхний лист. Цикл периода 4 имеет по два витка, лежащих на нижнем и верхнем листах, и т.д. Все витки гомоклинических циклов при раскручивании из окрестности седло-фокуса лежат на нижнем листе поверхности G и только последний, поднимаясь по поверхности, переходит на ее верхний лист и по нему опускается почти вертикально вниз в окрестности устойчивого одномерного многообразия седло-фокуса O, и затем переходит опять на нижний лист. Таким образом, наиболее простую структуру имеют сингулярные аттракторы систем, в которых сингулярный цикл рождается из устойчивого фокуса в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Они лежат на двумерных двулистных поверхностях. Причина такой простоты заключается в совпадении неустойчивого двумерного инвариантного многообразия W^u сингулярного цикла и неустойчивого двумерного инвариантного многообразия седло-фокуса. Для сравнения на рис 4.17б показано отображение Пуанкаре более сложного трехлистного классического аттрактора Лоренца в координатах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z.

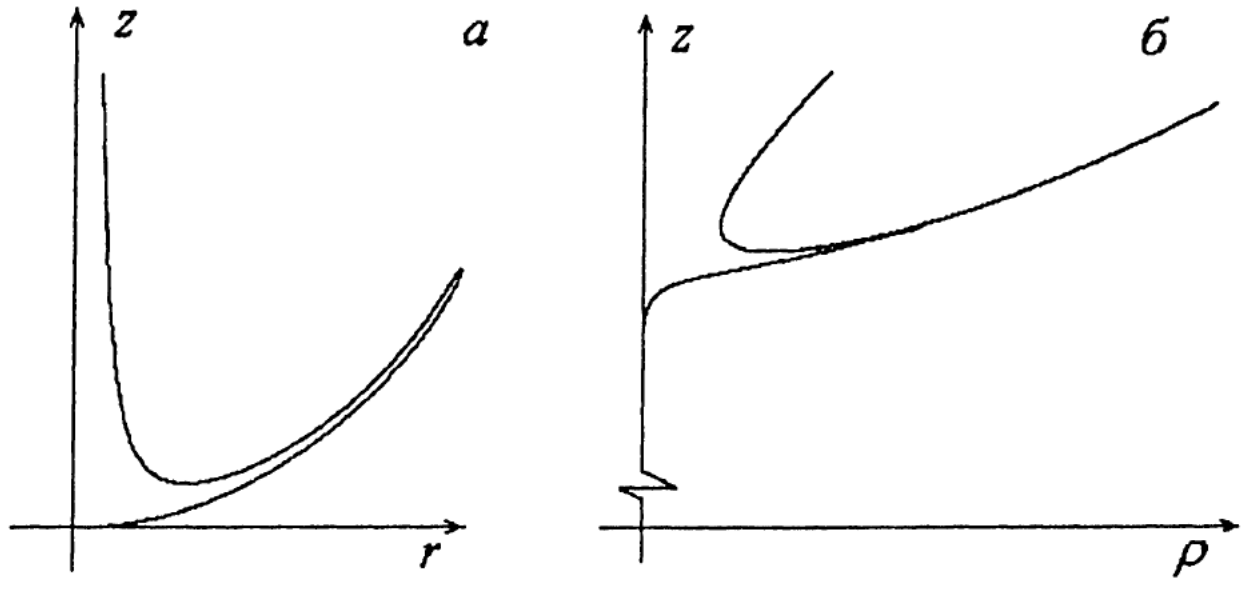

Рис. 4.17. Отображение Пуанкаре для системы (4.51) в плоскости $\varphi = 0$ при $\mu = \mu^*$ (а) и для системы Лоренца (3.1) в плоскости $\varphi = 0.3\pi$ при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ (б).

Пример 3. Покажем, что могут существовать трехмерные автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие очень сложную структуру сепаратрисной поверхности своего сингулярного цикла. Рассмотрим автономную систему трех диффе-

ренциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\nu x_2 - \nu x_1 x_3/2 - ((\mu-1)x_1 + 1 - 8x_3^2)(1 - x_1^2 - x_2^2),\\
\dot{x}_2 &= \nu x_1 + 2x_3(1 - \nu x_2/4) - (\mu - 1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2,\\
\dot{x}_3 &= 2(\mu - 1 - x_1)x_3 - (x_2 + \nu/4)(1 - x_1^2 - x_2^2).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Система (4.52), как и система (4.48) примера 1, имеет предельный цикл $x_0(t) = (\cos\nu t,\ \sin\nu t,\ 0)^{\mathrm{T}}$, устойчивый при $\mu < 0$ и лежащий в плоскости переменных (x_1, x_2). При $\mu = \mu_1 = 0$ происходит бифуркация удвоения его периода. Линеаризованная на цикле система имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 2\cos\nu t((\mu - 1)\cos\nu t + 1)y_1 +\\
&\qquad + (2((\mu - 1)\cos\nu t + 1)\sin\nu t - \nu)y_2 - \frac{\nu}{2}(\cos\nu t)y_3 + f,\\
\dot{y}_2 &= (\nu + 2(\mu - 1)\cos\nu t \sin\nu t)y_1 +\\
&\qquad + 2(\mu - 1)(\sin^2\nu t)y_2 + 2(1 - \frac{\nu}{4}\sin\nu t)y_3 + g,\\
\dot{y}_3 &= 2\cos\nu t\Big(\frac{\nu}{4} + \sin\nu t\Big)y_1 +\\
&\qquad + 2\sin\nu t\Big(\frac{\nu}{4} + \sin\nu t\Big)y_2 + 2(\mu - 1 - \cos\nu t)y_3 + h,
\end{aligned}$$

где разложения функций $f(y_1, y_2, y_3)$, $g(y_1, y_2, y_3)$ и $h(y_1, y_2, y_3)$ в ряды в точке $(0, 0, 0)$ начинаются с членов второго порядка. Заменой $y(t) = Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$-периодической матрицей $Q(t)$, описанной в примере 1, приведем последнюю систему к связанным с циклом координатам

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\frac{2}{\nu}(\sin\nu t)z_2 + \frac{2}{\nu}(\cos\nu t)z_3 + \tilde{f}(z_1, z_2, z_3),\\
\dot{z}_2 &= 2(\mu - 1 + \cos\nu t)z_2 - \Big(\frac{\nu}{2} - 2\sin\nu t\Big)z_3 + \tilde{g}(z_1, z_2, z_3),\\
\dot{z}_3 &= \Big(\frac{\nu}{2} + 2\sin\nu t\Big)z_2 + 2(\mu - 1 - \cos\nu t)z_3 + \tilde{h}(z_1, z_2, z_3).
\end{aligned}$$

Как видно из последней системы, предельный цикл $x_0(t)$ является сингулярным, и анализ всех его бифуркаций сводится к анализу бифуркаций решений неавтономной двумерной системы с той же линейной частью, что и у системы (4.49) первого примера. Отличие заключается только в том, что система (4.52) не имеет особой точки типа седло-фокус и соответствующего гомоклинического контура. Последнее ведет к чрезвычайному усложнению структуры неустойчивого двумерного инвариантного многообразия W^u исходного сингулярного цикла. Она становится многолистной. При разных наборах значений параметров ν и $\mu > 0$ система (4.52) дает большое число

разнообразных многолистных аттракторов и многозначных отображений $N^{-1}(u_1)$, включая весьма экзотические. Все они могут отчетливо наблюдаться в сечениях Пуанкаре, трансверсальных исходному циклу, а также в двумерной плоскости , асимптотически близкой к S и задаваемой переменными $(\rho - 1, z)$.

При фиксированном значении параметра ν и при росте положительных значений параметра μ в системе (4.52), как и в системах (4.48) и (4.51), сначала реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода родившегося устойчивого предельного цикла, а затем – субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, при $\nu = 4$ в системе (4.52) рождается устойчивый цикл учетверенного периода при $\mu_2 \approx 0.1135$, периода 8 – при $\mu_3 \approx 0.1305$, периода 16 – при $\mu_4 \approx 0.134$, периода 32 – при $\mu_5 \approx 0.1346$. Значение μ_∞, соответствующее пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла, приближенно равно 0.135. Здесь в системе (4.52) рождается аттрактор Фейгенбаума. При $\mu \approx 0.1406$ в системе (4.52) уже имеется устойчивый цикл периода $10 = 5 \cdot 2$ в порядке Шарковского, а при $\mu \approx 0.1445$ – цикл периода 6. Субгармонический каскад бифуркаций, соответствующий порядку Шарковского, заканчивается приблизительно при $\mu \approx 0.155$. При дальнейшем увеличении значений параметра μ в системе (4.52) реализуется отличный от гомоклинического более сложный каскад бифуркаций устойчивых циклов (рис. 4.18). Отображение $N^{-1}(u_1)$ становится многозначным (например, при $\mu \approx 0.22$ оно пятизначно, а при $\mu \approx 0.26$ – семизначно). Поверхность G при этом становится многолистной (при $\mu \approx 0.22$ она четырехлистна, а при $\mu \approx 0.26$ – пятилистна).

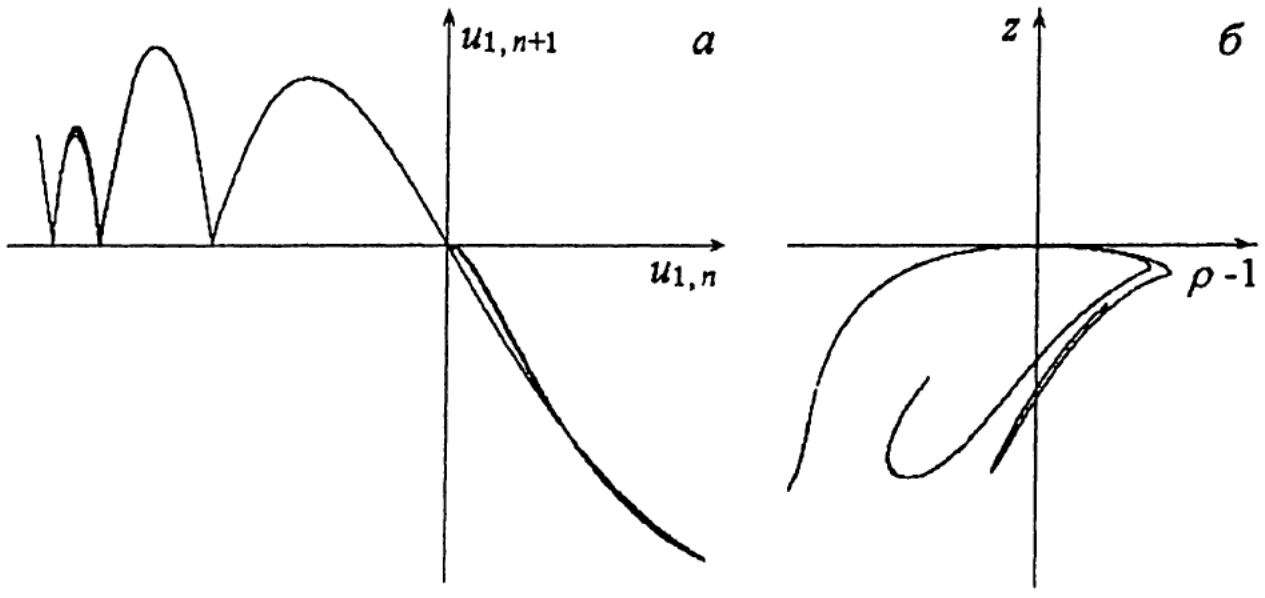

Рис. 4.18. Отображение $N(u_1)$ (а) и отображение Пуанкаре в плоскости $\varphi = 0$ для системы (4.52) при значениях $\nu = 4$ и $\mu = 0.26$.

Следовательно, в трехмерных автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений возможно существование значительно более структурно сложных аттракторов, чем аттракторы известных классических систем, включая системы Лоренца и Чуа. Аттракторы систем (4.48), (4.51) и (4.52) показаны на рисунках 4.19а, 4.19б и 4.19в соответственно.

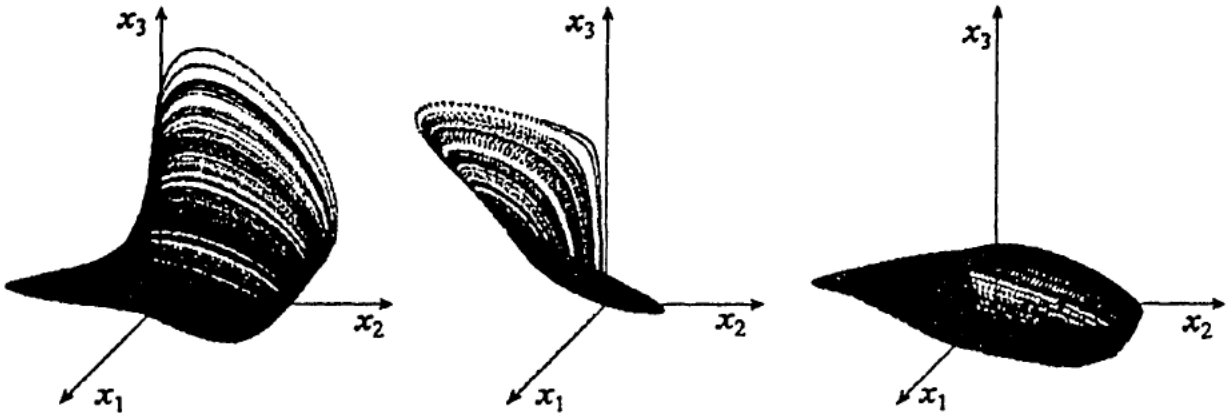

Рис. 4.19. Сингулярные аттракторы: а) — системы (4.48), б) — системы (4.51), в) — системы (4.52).

4.7. Заключительные замечания и выводы.

В настоящей главе доказано, что переход к хаосу в широком классе трехмерных автономных нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется в соответствии со следующими основными принципами: а) любой аттрактор системы (периодический или сингулярный) лежит на двумерной, в общем случае многолистной, поверхности G, являющейся замыканием двумерного инвариантного неустойчивого многообразия (сепаратрисной поверхности) ее сингулярного седлового цикла; б) хаотическая динамика в системе возникает благодаря сдвигу фаз между траекториями, образующими сепаратрисную поверхность сингулярного цикла, что приводит к возможности появления в трансверсальной к циклу двумерной вращающейся плоскости непрерывных одномерных отображений, имеющих многозначные обратные отображения; в) любым сингулярным аттрактором системы является замыкание некоторой, принадлежащей G, полуустойчивой непериодичекой траектории; г) любой сингулярный аттрактор не имеет положительных показателей Ляпунова, а его фрактальная размерность не превышает величины два; д) во всех системах класса реализуется один и тот же сценарий перехода к хаосу, начинающийся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов и продолжающийся затем субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского рождения устойчивых циклов любого периода и, при наличии в системе петли сепаратрисы

седло-фокуса, – гомоклиническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру.

Таким образом, во всех системах рассмотренного в главе класса автономных трехмерных систем в процессе перехода к хаосу рождаются, как правило, полные или неполные субгармонические или гомоклинические аттракторы (за исключением более сложных аттракторов рассмотренного в примере 3 типа). Эти же сценарии перехода к хаосу характерны и для всех известных классических трехмерных автономных диссипативных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, включая системы уравнений Лоренца, Рёсслера, Чуа и др. (см.[29–33] и главу 3). Поэтому весьма правдоподобной выглядит гипотеза об универсальности описанного в главе способа возникновения хаотической динамики в трехмерных диссипативных системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава 5. Динамический хаос в бесконечномерных системах дифференциальных уравнений

Рассмотренные в предыдущих главах книги хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются во многих случаях конечномерными аппроксимациями бесконечномерных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Подтверждением сказанного является классическая система уравнений Лоренца, полученная методом Галеркина в виде конечномерных аппроксимаций систем уравнений в частных производных Навье-Стокса, неразрывности и теплопроводности [15, 17, 91]. Поэтому естественно предположить, что сложные нерегулярные режимы поведения присущи не только конечномерным, но также и бесконечномерным нелинейным системам дифференциальных уравнений.

В настоящее время теория динамического хаоса в бесконечномерных нелинейных системах дифференциальных уравнений практически не разработана. Среди немногих результатов, полученных в этом направлении, следует выделить результаты А. Самарского, С. Курдюмова и их учеников о возникновении нестационарных, пространственно неоднородных и непериодических решений (диффузионного хаоса) в уравнении Курамото-Цузуки, описывающем поведение решений системы уравнений "реакция - диффузия" в окрестности ее стационарного однородного состояния [16, 92, 93]. Ряд результатов, касающихся сценариев возникновения динамического хаоса в системе уравнений, описывающей рыночную экономику, в системах уравнений реакция - диффузия и в системах дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом получен недавно авторами в работах [64, 94, 95]. Ниже показано, что во всех рассмотренных случаях при переходе от бесконечномерных систем дифференциальных уравнений к их маломодовым (трехмерным) аппроксимациям механизм образования в них хаотической динамики описывается теорией и методами, изложенными в главах 3 и 4 настоящей книги. При переходе к аппроксимациям большей размерности ситуация становится менее ясной, так как в сценариях перехода к хаосу начинают принимать участие не только циклы, но и торы. Кроме того, показано, что сложность хаотической динамики существенно зависит также и от размеров пространственной области.

В построенной модели рыночной экономики получены более сложные, чем в системах уравнений реакция-диффузия и в уравнении Курамото-Цузуки, хаотические режимы. Показано, что уже однородные пространственные решения системы уравнений в частных производных, описывающие изменения макропоказателей экономической системы, обладают хаотической динамикой, переход к которой также происходит в соответствии с изложенными в главах 3 и 4 сценария-

ми. По тем же сценариям происходит переход к хаосу и в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

5.1. Регулярная динамика и диффузионный хаос в системах уравнений реакция-диффузия.

Огромный класс физических, химических и биологических сред, широко изучающихся нелинейной и хаотической динамикой, описывается системой уравнений в частных производных реакция-диффузия

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 u_{xx} + f(u, v, \mu), \\ v_t &= D_2 v_{xx} + g(u, v, \mu), \\ 0 &\le x \le l, \end{aligned} \tag{5.1}$$

зависящих от скалярного параметра μ. В системах вида (5.1) по одной из переменных существует, как правило, положительная обратная связь. Такая переменная называется активатором. Вторая переменная, которая замедляет нарастание (развитие) активатора, называется ингибитором.

При изучении систем уравнений реакция-диффузия наибольший интерес представляет анализ таких краевых задач, для которых при всех значениях скалярного системного параметра $\mu \le \mu_0$ система (5.1) имеет устойчивое стационарное и однородное по пространству решение (U, V), называемое *термодинамической ветвью*. При $\mu > \mu_0$ термодинамическая ветвь теряет устойчивость, а поведение решений определяется спектром линеаризованной на термодинамической ветви краевой задачи в окрестности точки бифуркации μ_0.

Если при значении $\mu = \mu_0$ у линеаризованной на решении (U, V) задачи одно простое собственное значение оператора линеаризации проходит через нуль, а остальной спектр остается лежащим в левой полуплоскости, то в системе возникают пространственно-неоднородные стационарные решения (стационарные диссипативные структуры). Такая бифуркация впервые была обнаружена А.Тьюрингом при исследовании математической модели морфогенеза и носит его имя [96]. Если при $\mu = \mu_0$ у линеаризованной на термодинамической ветви задачи два комплексно сопряженных собственных значения оператора линеаризации проходят слева направо через мнимую ось, а остальной спектр остается лежащим в левой полуплоскости, то происходит бифуркация рождения цикла Андронова-Хопфа [45 ,46]. В этом случае при $\mu > \mu_0$ термодинамическая ветвь теряет устойчивость, а точки отрезка $[0, l]$ начинают совершать периодические колебания.

Бифуркации Тьюринга и Андронова-Хопфа имеют очевидные аналоги среди рассмотренных в главе 2 бифуркаций положений равновесия (неподвижных или особых точек) нелинейных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это бифуркация типа вилки и бифуркация рождения устойчивого

цикла. Рассмотрим бифуркации Тьюринга и Андронова-Хопфа более подробно на примере первой краевой задачи для классической системы уравнений вида (5.1), предложенной впервые брюссельской школой И. Пригожина в качестве модели некоторой автокаталитической химической реакции с диффузией и названной *брюсселятором* [46, 97]. Доказательства теорем общего вида со сведением бесконечномерной системы уравнений (5.1) на двумерное или одномерное центральное многообразие можно найти в работах [45, 46].

Рассматриваемая на отрезке $[0, l]$, система уравнений брюсселятора имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 u_{xx} + A - (\mu+1)u + u^2 v, \\ v_t &= D_2 v_{xx} + \mu u - u^2 v, \\ &0 \le x \le l. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что стационарным пространственно однородным решением (термодинамической ветвью) системы (5.2) является решение $u = A,\ v = \mu/A$. Поэтому первая краевая задача для брюсселятора должна удовлетворять граничным условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = A,\ v(0,t) = v(l,t) = \mu/A. \tag{5.3}$$

Линеаризуем задачу (5.2) – (5.3) на термодинамической ветви, положив $p = u - A,\ q = v - \mu/A$. Получим

$$\begin{aligned} p_t &= D_1 p_{xx} + (\mu-1)p + A^2 q + h(p,q), \\ q_t &= D_2 q_{xx} - \mu p - A^2 q - h(p,q), \end{aligned} \tag{5.4}$$

с граничными условиями $u(0,t) = u(l,t) = v(0,t) = v(l,t) = 0$, где $h(p,q) = (\mu/A)p^2 + 2Apq + p^2 q$.

Оператор линейной части системы (5.4), действующий в пространстве Соболева $H^2[0,l]$ с нулевыми граничными значениями, можно представить в виде $L = K + D\Delta$, где

$$K = \begin{pmatrix} \mu-1 & A^2 \\ -\mu & -A^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Оператор Δ имеет собственные значения $-\pi^2 n^2/l^2$ $(n = 1, 2...)$, отвечающие собственным функциям $\sin(\pi n x/l)$. Разложим по этим функциям компоненты собственного вектора Ψ оператора L, отвечающего его собственному числу λ. Тогда

$$L\Psi = (K + D\Delta)\Psi = \lambda\Psi$$

или

$$\sum \left[K \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \left(\frac{-\pi^2 n^2}{l^2} \right) \right] \sin \frac{\pi n x}{l} = \lambda \sum \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Следовательно,

$$[K - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} D] \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, ...$$

Поэтому собственные числа оператора L являются собственными числами матриц $G_n = K - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} D$, которые в свою очередь удовлетворяют уравнениям $\lambda^2 - \mathrm{tr} G_n + \det G_n = 0$, где

$$\mathrm{tr} G_n = \mu - 1 - A^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}(D_1 + D_2),$$

$$\det G_n = A^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}(A^2 D_1 + D_2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} D_1 D_2 - \mu D_2).$$

Для того, чтобы при некотором значении μ произошла бифуркация рождения цикла, необходимо, чтобы имелась пара чисто мнимых собственных значений $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$. То есть для одной из матриц G_n ее след должен обратиться в нуль, а определитель при этом должен оставаться положительным. При этом все другие собственные значения оператора L должны иметь отрицательные вещественные части. Другими словами, при некотором $n = m$ необходимо должно выполняться

$$\mu = 1 + A^2 + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}(D_1 + D_2).$$

Если $m > 1$, то найдется $n < m$ такое, что

$$\mathrm{tr} G_n = (m^2 - n^2)\frac{\pi^2}{l^2}(D_1 + D_2) > 0.$$

Тогда по крайней мере одно собственное значение оператора L, соответствующее этому номеру n, будет иметь положительную вещественную часть. Следовательно, необходимо $m = 1$ и

$$\mu = \mu_0 = 1 + A^2 + \frac{\pi^2}{l^2}(D_1 + D_2).$$

При этом

$$\det G_n = A^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\left(A^2(D_1 - D_2) + \frac{\pi^2}{l^2} D_2 (n^2 D_1 - D_1 - D_2)\right).$$

Из последнего выражения нетрудно заключить, что если коэффициенты диффузии D_1 и D_2 системы (5.2) удовлетворяют условию $D_1 \geq D_2 + \frac{\pi^2}{l^2}(D_2/A)^2$, то $\det G_n > \det G_1 = \omega_0^2 \geq A^2$ для всех $n > 1$.

Таким образом, условия теоремы Андронова - Хопфа на спектр оператора L выполнены при $\mu = \mu_0$. Более детальный анализ показывает [46], что рождающиеся при этом устойчивые периодические пространственно неоднородные решения системы (5.2) имеют следующие асимптотические представления при малых $\varepsilon = (\mu - \mu_0)^{1/2}$:

$$u(x,t) = A + \varepsilon \cos\omega(\varepsilon)t \cdot \sin\frac{\pi x}{l} + O(\varepsilon^2),$$

$$v(x,t) = \frac{\mu}{A} + \varepsilon\gamma \cos\omega(\varepsilon)t \sin\frac{\pi x}{l} + \varepsilon\delta \sin\omega(\varepsilon)t \cdot \sin\frac{\pi x}{l} + O(\varepsilon^2),$$

где $\omega(\varepsilon) = \omega_0(1 + O(\varepsilon^2))$, γ и δ – некоторые постоянные, а вид пространственных гармоник определяется краевыми условиями задачи, т.е. в данном случае собственными функциями оператора Δ при $n = 1$. Точки отрезка совершают колебания с одинаковой частотой и постоянным градиентом фазы. Создается эффект бегущей по отрезку "волны". Заметим, что при малых коэффициентах диффузии условие рождения в системе (5.2) периодических решений может быть грубо записано в виде $D_1 > D_2$, что можно интерпретировать как взаимодействие в брюсселяторе дальнодействующего активатора и короткодействующего ингибитора.

Изменение характера граничных условий существенно меняет вид рождающихся в результате бифуркации Андронова-Хопфа периодических решений системы (5.2). Так, например, если рассмотреть вторую краевую задачу для отрезка с граничными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0,$$

то собственными функциями оператора Δ будут уже функции $\cos(\pi n x/l)$, $n = 0, 1, 2...$, а наименьшим собственным значением – ноль. Поэтому бифуркационным значением параметра μ будет величина $\mu_0 = 1 + A^2$, а рождающиеся при $\mu > \mu_0$ в случае $D_1 > D_2$ периодические решения будут пространственно однородными.

Рассмотрим опять первую краевую задачу для системы (5.2). Для того чтобы при некотором значении параметра μ в системе произошла бифуркация Тьюринга, необходимо, чтобы для одной из матриц G_n ее определитель обратился в нуль, а след матрицы при этом должен оставаться отрицательным. При этом все другие собственные значения оператора L должны иметь отрицательные вещественные части. Поэтому следы всех матриц G_n должны быть отрицательными, откуда вытекает, что $\mu < \mu^* = 1 + A^2 + (\pi^2/l^2)(D_1 + D_2)$. Пусть $\mu = \mu^* - \theta$, $\theta > 0$. Тогда

$$\det G_n = A^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\left(A^2(D_1 - D_2) + \frac{\pi^2}{l^2}D_2(n^2 D_1 - D_1 - D_2) + \theta D_2\right).$$

Обозначим

$$y_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \alpha = A^2(D_1 - D_2) - \frac{\pi^2}{l^2}D_2(D_1 + D_2) + \theta D_2.$$

Тогда $\det G_n = D_1 D_2 y_n^2 + \alpha y_n + A^2$. Поэтому надлежащим выбором значения величины $\alpha < 0$ можно добиться того, что при некоторых $\theta > 0$ и $m \geq 1$ будет выполнено $\det G_m = 0$, а $\det G_n > 0$ при всех $n \neq m$. Таким образом, условия теоремы Тьюринга на спектр оператора L будут выполнены при $\mu = \mu_0 = \mu^* - \theta$. Более детальный анализ показывает, что рождающиеся при этом устойчивые пространственно неоднородные диссипативные структуры системы (5.2) имеют следующие асимптотические представления при малых $\varepsilon = (\mu - \mu_0)^{1/2}$:

$$u(x,t) = A + \varepsilon \sin \frac{\pi m x}{l} + O(\varepsilon^2),$$
$$v(x,t) = \frac{\mu}{A} + O(\varepsilon) \sin \frac{\pi m x}{l} + O(\varepsilon^2),$$

где вид пространственной структуры также определяется краевыми условиями задачи. Заметим, что при малых коэффициентах диффузии условие рождения в системе (5.2) стационарных неоднородных пространственных структур может быть грубо записано в виде $D_1 < D_2$, что можно интерпретировать в этом случае как взаимодействие короткодействующего активатора и дальнодействующего ингибитора.

Проведенный выше простой линейный анализ системы (5.2) уже наглядно демонстрирует сложность систем типа реакция- диффузия, на поведение решений которых существенное влияние оказывают значения коэффициентов диффузии и соотношение между ними, форма пространственной области и ее размеры, а также вид граничных условий. При бифуркации термодинамической ветви в таких системах может наблюдаться рождение периодических пространственно однородных и неоднородных решений и стационарных диссипативных структур. Численные эксперименты показывают, что при дальнейшем увеличении значений бифуркационного параметра в системах реакция-диффузия наблюдаются также и пространственно неоднородные непериодические решения – диффузионный хаос. Однако теория перехода к хаосу в таких системах в настоящее время практически не разработана.

Рассмотрим здесь только один аспект этой сложной проблемы — рождение хаотических режимов в системе (5.2) при увеличении параметра l - длины пространственной области. Тот факт, что сложность решений системы (5.2) при увеличении длины пространственной области должна возрастать, уже вытекает из проведенного выше линейного анализа. При увеличении l уменьшается частота и, следовательно, растет период и сложность рождающихся периодических решений, растет также величина m и, следовательно, сложность рождающихся стационарных диссипативных структур. Кроме того, для разложения решения в ряд Фурье с заданной точностью требуется большее число гармоник, и, следовательно, возрастает размерность любой конечномерной аппроксимации бесконечномерной системы (5.2).

В результате численных экспериментов, проведенных в работе [98]

со второй краевой задачей в кольце для системы (5.2), удалось обнаружить несколько типов аттракторов при различных значениях длины области l. Сначала после потери устойчивости термодинамической ветви наблюдались пространственно однородные колебания. При увеличении l колебания становились пространственно неоднородными, однако проекции траекторий конечномерной сеточной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей систему (5.2), на двумерную плоскость оставались замкнутыми кривыми. При дальнейшем увеличении длины области образовывался устойчивый двумерный тор, заполняемый траекторией всюду плотно (рис. 5.1а). Проекция его сечения Пуанкаре на двумерную плоскость имела вид замкнутой кривой. При больших значениях l возникали аттракторы, имеющие более сложную структуру, что свидетельствовало о наличии в системе (5.2) диффузионного хаоса (рис. 5.1б).

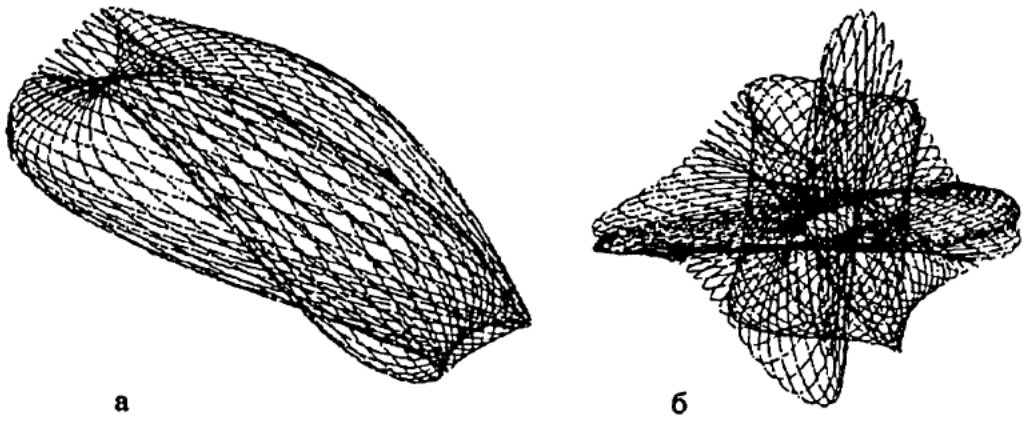

Рис. 5.1. Устойчивые двумерные торы (а) и более сложные решения (б) в модели брюсселятора.

Таким образом, изложенное в настоящем пункте дает основания утверждать о наличии сложных нестационарных непериодических решений (диффузионного хаоса) в системах уравнений реакция-диффузия вида (5.1). Есть также веские основания предположить, что в сценарии перехода к хаосу участвуют двумерные торы и, вполне вероятно, весь субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов подобно тому, как это имеет место в пятимерной системе уравнений Лоренца (см. п.3.2). Присутствуют ли в сценариях перехода к хаосу каскады бифуркаций устойчивых циклов или каскады бифуркаций многомерных торов остается пока неизвестным. Структура нерегулярных (хаотических) аттракторов системы (5.1) и механизмы их рождения тоже пока остаются невыясненными. Возможные подходы к решению поставленных проблем заключаются в переходе к анализу некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся либо маломодовой аппроксимацией системы (5.1), либо системой, полученной в результате удачной автомодельной замены переменных.

5.2. Переход к хаосу в маломодовом приближении для уравнения Курамото-Цузуки

В работе [99] было показано, что любое решение системы уравнений реакция-диффузия (5.1), возникающее в окрестности термодинамической ветви в результате ее бифуркации при $\mu > \mu_0$, может быть выражено через комплекснозначную функцию $W(r,\tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$W_\tau = W + (1+ic_1)W_{rr} - (1+ic_2)W|W|^2, \qquad (5.5)$$

где $r = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon^2 t$, c_1 и c_2 - действительные постоянные, значения которых определяются по коэффициентам D_1, D_2, функциям $f(u,v,\mu)$, $g(u,v,\mu)$ и их производным, вычисленным на термодинамической ветви, а $\varepsilon = (\mu - \mu_0)^{1/2}$ – малый параметр. Уравнение (5.5), называемое *уравнением Курамото-Цузуки* или зависящим от времени *уравнением Гинзбурга-Ландау*, играет важную роль в изучении и понимании процессов, происходящих в нелинейных диссипативных средах диффузионного типа. Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что для произвольной фазы φ функция $W(\tau) = \exp(-i(c_2\tau + \varphi))$ является однородным по пространству решением уравнения (5.5). Следовательно, каждый элемент среды (5.5) совершает в установившемся режиме гармонические колебания с частотой c_2, причем этот режим является устойчивым в некоторой большой области изменения параметров c_1 и c_2. Такие среды принято называть автоколебательными.

Для нахождения пространственно неоднородных решений обычно рассматривается вторая краевая задача для уравнения (5.5). В цикле работ А. Самарского, С. Курдюмова и их учеников [16, 92, 93] показано что в некоторой области изменения параметров c_1 и c_2 устойчивым является автомодельное решение вида $W(r,\tau) = F(r)\exp(i(\omega\tau + a(r))$. При $a(r) = kr$ колебания соседних элементов среды происходят с постоянным сдвигом по фазе, что соответствует движению по пространству фазовой волны. В двумерном случае уравнение (5.5) допускает решения в виде ведущих центров - последовательности разбегающихся концентрических фазовых волн, и спиральных волн. В работах [92–93] были найдены также области изменения параметров c_1 и c_2, в которых вторая краевая задача для уравнения (5.5) на отрезке $[0,R]$ с условиями

$$W_r(0,\tau) = W_r(R,\tau) = 0,\ W(r,0) = W_0(r),\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \tau < \infty,$$

имеет нестационарные непериодические и неоднородные по пространству решения – *диффузионный хаос*. Идея получения решений такого вида состоит в использовании Галеркинских *маломодовых аппроксимаций*

$$W(r,\tau) \approx \xi^{1/2}(\tau)\exp(i\theta_1(\tau)) + \eta^{1/2}(\tau)\exp(i\theta_2(\tau))\cos kr,\ k = \pi/R,$$

для сведения уравнения (5.5) к более простой конечномерной (трехмерной) системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно перменный ξ, η и $\theta = \theta_2 - \theta_1$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi+\eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2\sin\theta),\\
\dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2\eta, \qquad (5.6)\\
\dot{\theta} &= c_2(2\xi - \eta/2) + (2\xi+\eta)\sin\theta + c_2(2\xi-\eta)\cos\theta + 2c_1k^2.
\end{aligned}$$

Было показано, что когда длина области невелика ($R \sim \pi$), так что коэффициенты Фурье решений быстро убывают с ростом их номера, то между решениями исходного уравнения (5.5) и двухмодовой системы (5.6) есть не только качественное, но и количественное соответствие. Причем это относится не только к простейшим регулярным (периодическим), но и к нерегулярным аттракторам и к сценариям их возникновения при изменении параметров c_1 и c_2. Это позволило сначала найти область динамического хаоса в упрощенной трехмерной системе (5.6) обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем достаточно просто обнаружить и область диффузионного хаоса в уравнении Курамото-Цузуки (5.5).

В работах [92, 93] определены области существования устойчивых особых точек, простых устойчивых циклов и циклов удвоенного периода системы (5.6) в пространстве параметров (c_1, c_2). Все более сложные регулярные (периодические) и нерегулярные аттракторы системы (5.6) просто отнесены к одному классу, которому соответствуют оставшиеся области пространства параметров. Поэтому подход, предложенный в работах [92, 93], не дает возможности объяснить механизмы и определить сценарии возникновения хаотической динамики как в упрощенной системе (5.6), так и в исходном уравнении Курамото - Цузуки (5.5). Покажем, что все нерегулярные аттракторы упрощенной системы (5.6) являются сингулярными в смысле введенного в главе 1 определения, а переход к хаосу и усложнение структуры аттракторов системы (5.6) происходят по тому же сценарию, что и в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренных в главах 3 и 4 настоящей книги. То есть переход к хаосу в системе (5.6) происходит сначала через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода сингулярного предельного цикла, а затем через каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского. Далее возможны более сложные каскады бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с теорией, изложенной в главе 4.

Действительно, положим, например, $k = 1$, $c_1 = 1.3$ и рассмотрим сценарий перехода к хаосу в системе (5.6) при изменении значений параметра c_2. Аттракторы системы (5.6) будем наблюдать в трехмерном фазовом пространстве с координатами $x = \xi\cos\theta$, $y = \xi\sin\theta$, $z = \eta$. Интегрируя систему (5.6) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, нетрудно установить, что при уменьшении отрицательных значений

параметра c_2 в системе (5.6), как и во всех системах, рассмотренных в главах 3 и 4, сначала реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода сингулярного устойчивого предельного цикла, существующего в системе при $c_2 = -5$, а затем – субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, устойчивый цикл удвоенного периода рождается в системе (5.6) при $c_2 \approx -6.782$, учетверенного периода – при $c_2 \approx -7.92$, периода 8 – при $c_2 \approx -8.15$, периода 16 – при $c_2 \approx -8.2$, периода 32 - при $c_2 \approx -8.21$, периода 64 – при $c_2 \approx -8.211$. Аттрактор Фейгенбаума рождается в системе (5.6) при значении $c_2 \approx -8.2111$. При $c_2 \approx -8.2155$ в системе (5.6) уже имеется устойчивый цикл периода 40, что соответствует циклу $5 \cdot 2^3$ в порядке Шарковского. Цикл периода $20 = 5 \cdot 2^2$ рождается при $c_2 \approx -8.2509$, цикл периода $14 = 7 \cdot 2$ рождается при $c_2 \approx -8.2754$, цикл периода $10 = 5 \cdot 2$ при $c_2 \approx -8.2949$, цикл периода $6 = 3 \cdot 2$ - при $c_2 \approx -8.348$. Рождение последнего цикла означает рождение устойчивого цикла периода три в некоторой двумерной плоскости, трансверсальной исходному циклу. Субгармонический каскад бифуркаций, соответствующий порядку Шарковского, заканчивается приблизительно при $c_2 \approx -8.4$. При $c_2 \approx -8.564$ в системе (5.6) рождается устойчивый цикл периода 7, при $c_2 \approx -8.668$ – устойчивый цикл периода 5, а при $c_2 \approx -9.0$ – устойчивый цикл периода 3. Со всеми родившимися устойчивыми циклами происходят свои каскады бифуркаций удвоения их периодов.

Важно отметить, что в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z) системы (5.6) при некоторых значениях параметров может существовать одновременно несколько различных устойчивых циклов, имеющих свои области притяжения. Каждый такой цикл может порождать свой каскад бифуркаций и свое семейство полных или неполных сингулярных субгармонических аттракторов. Фиксируем, например, значение параметра $c_2 = -9.0$ и будем менять значения параметра c_1. Нетрудно установить, что существующий в системе (5.6) при $c_1 = 1.3$ устойчивый цикл периода 3 является порождением субгармонического каскада бифуркаций изначально устойчивого сингулярного цикла при уменьшении значений параметра c_1 от значения $c_1 = 1.43$. Проекция этого исходного цикла на плоскость (y, z) имеет четыре оборота вокруг некоторого условного центра. Устойчивый цикл периода 8 рождается в системе при $c_1 \approx 1.425$, цикл периода 6 – при $c_1 \approx 1.366$, цикл периода 5 - при $c_1 \approx 1.33$. При $c_1 \approx 1.282$ в системе (5.6) рождается другой устойчивый цикл периода 6, являющийся циклом удвоенного периода для цикла периода 3. Далее при уменьшении значений параметра c_1 имеет место каскад бифуркаций удвоения его периода.

Вместе с тем при увеличении значений параметра c_1 от значения $c_1 \approx 1.21$ в системе (5.6) реализуется другой субгармонический каскад бифуркаций, начинающийся простым устойчивым сингулярным циклом. Области притяжения этого цикла принадлежит, например,

начальная точка $\xi = 0.1$, $\eta = 0.01$, $\theta = -0.2$. Каскад продолжается устойчивым циклом удвоенного периода при $c_1 \approx 1.215$, учетверенного периода – при $c_1 \approx 1.232$, периода 8 – при $c_1 \approx 1.237$, периода 16 – при $c_1 \approx 1.2375$ и т.д. Аттрактор Фейгенбаума рождается здесь при значении $c_1 \approx 1.238$. Далее, при $c_1 \approx 1.2415$ в системе рождается устойчивый цикл периода 6, при $c_1 \approx 1.252$ – периода 5, при $c_1 \approx 1.255$ – новый устойчивый цикл периода 3, а затем при росте значений параметра c_1 идет каскад бифуркаций удвоения его периода. В области $1.26 \leq c_1 \leq 1.28$ существует большое число сингулярных аттракторов, не описываемых порядком Шарковского, но являющихся предельными для своих каскадов бифуркаций устойчивых циклов. Некоторые из этих циклов (периодов 22, 14 и 12) удалось обнаружить при значениях параметра c_1 соответственно равных 1.268, 1.273, и 1.279. Сингулярный субгармонический аттрактор системы (5.6) при $c_1 = 1.27$ изображен на рис.5.2а. Заметим, что при $c_1 = 1.21$ в окрестности исходного устойчивого цикла каскада лежит другой устойчивый цикл удвоенного периода, области притяжения которого принадлежит, например, начальная точка $\xi = 0.1$, $\eta = 0.01$, $\theta = 0$. Этот цикл не порождает сингулярных аттракторов.

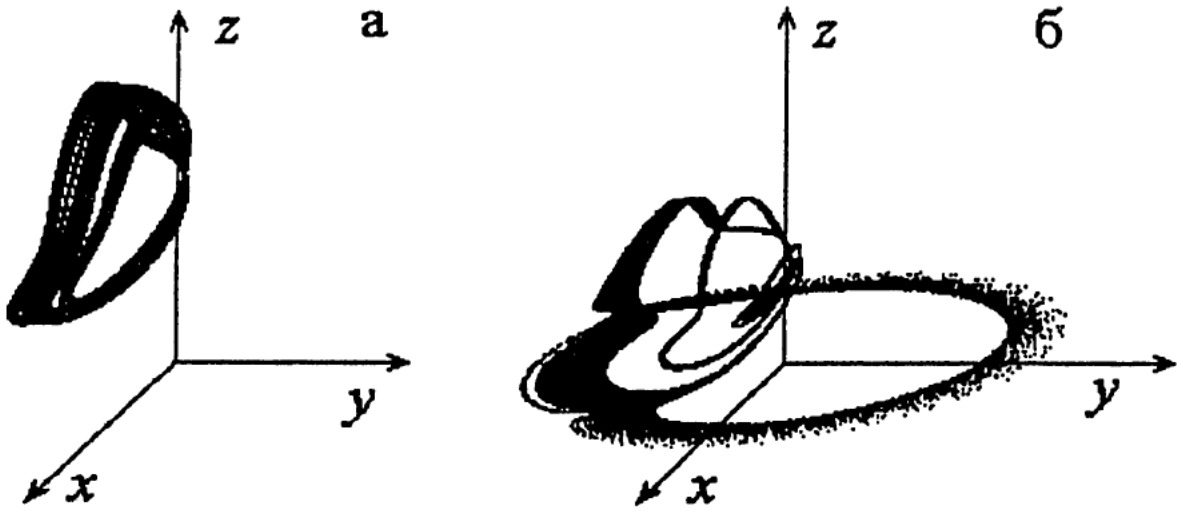

Рис. 5.2. Сингулярные аттракторы системы (5.6) в координатах (x, y, z) при $c_2 = -9.0$ и $c_1 = 1.27$ (а), $c_1 = 1.57$ (б).

Третий субгармонический каскад бифуркаций порождает устойчивый при $c_1 = 1.43$ цикл, но уже при росте значений параметра c_1. Здесь устойчивый цикл удвоенного периода рождается при $c_1 \approx 1.52$, учетверенного периода - при $c_1 \approx 1.5581$ и т.д. Семейство нерегулярных субгармонических аттракторов, порожденных этим циклом, наблюдается примерно в области $1.56 \leq c_1 \leq 1.59$. Четвертый и пятый субгармонические каскады бифуркаций порождают при $c_1 = 1.81$ два устойчивых простых цикла как с уменьшением так и с увеличением значений параметра c_1. В области притяжения первого цикла находится, например, начальная точка $\xi = 0.1$, $\eta = 0.01$, $\theta = 20$. Устойчивый цикл удвоенного периода рождается здесь при $c_1 \approx 1.802$,

учетверенного – при $c_1 \approx 1.7875$ и т.д. Семейство сингулярных субгармонических аттракторов, порожденных этим циклом, наблюдается примерно в области $1.76 \lesssim c_1 \lesssim 1.77$. В области притяжения второго цикла лежит, например, точка $\xi = 0.1$, $\eta = 0.01$, $\theta = -0.2$. Здесь устойчивый цикл удвоенного периода рождается при $c_1 \approx 10.35$, учетверенного – при $c_1 \approx 11.67$ и т.д. Семейство сингулярных субгармонических аттракторов, порожденных этим циклом, наблюдается примерно в области $12 \lesssim c_1 \lesssim 15$. Сингулярные аттракторы системы (5.6) при $c_1 = 1.765$ и $c_1 = 13$ изображены на рис.5.3.

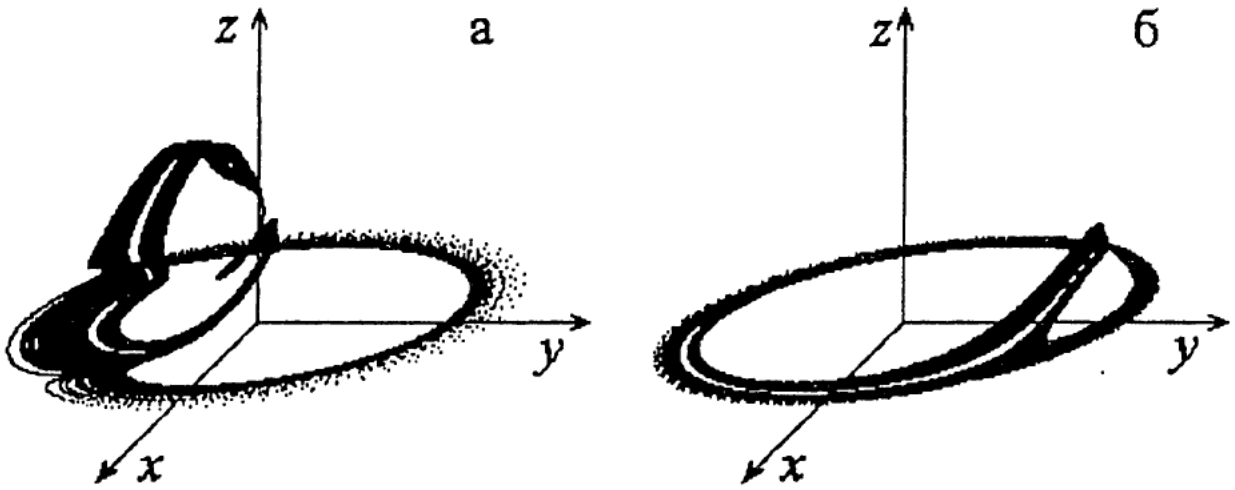

Рис. 5.3. Сингулярные аттракторы системы (5.6) в координатах (x, y, z) при $c_2 = -9.0$, $c_1 = 1.765$ (а) и $c_1 = 13$ (б).

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что в трехмерных системах маломодовых Галеркинских аппроксимаций для бесконечномерных систем дифференциальных уравнений в частных производных сценарии перехода к хаосу не отличаются от рассмотренных в главах 3 и 4 настоящей книги. Тем не менее это не позволяет сделать однозначный вывод о тождественности хаотической динамики бесконечномерной системы и ее трехмерных маломодовых приближений. Действительно, как следует из результатов главы 3, трехмерная система уравнений Лоренца, являющаяся маломодовым приближением для систем уравнений Навье-Стокса и теплопроводности, обладает сложным сценарием перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода устойчивых циклов, субгармонический и затем гомоклинический каскады бифуркаций. В то же время пятимерная комплексная система уравнений Лоренца обладает уже совершенно иным сценарием перехода к хаосу через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов. Таким образом, повышение размерности маломодовых аппроксимаций может привести с одной стороны к усложнению структуры регулярных аттракторов, участвующих в сценариях перехода к хаосу (появлению устойчивых торов вместо циклов), а с другой стороны - к упрощению каскадов бифуркаций и структуры рождающихся при этом сингулярных аттракторов (переход к хаосу заканчива-

ется субгармоническим каскадом). Поэтому проблема тождественности диффузионного хаоса систем уравнений в частных производных и динамического хаоса их маломодовых приближений требует дополнительного исследования.

5.3. Динамический хаос в дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом.

В настоящем разделе будет показано, что одним из основных сценариев перехода к хаосу в бесконечномерных нелинейных дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом также является субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\tau)),\ t \geq 0, \tag{5.7}$$

где $x(t)$, $f(\cdot)$ - скалярные функции, $\tau > 0$ - постоянное запаздывание. Начальным условием для уравнения (5.7) является некоторая непрерывная функция $\varphi(\vartheta)$, заданная на интервале $-\tau \leq \vartheta \leq 0$.

Параметр τ в уравнении (5.7) может быть бифуркационным, то есть при его изменении может происходить усложнение структуры аттракторов уравнения (5.7) вплоть до возникновения в нем хаотической динамики. Простые регулярные аттракторы, такие как устойчивые стационарные состояния и периодические решения, можно наблюдать непосредственно при численном интегрировании уравнения (5.7), например, методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Однако для анализа более сложных регулярных и, тем более, нерегулярных аттракторов уравнения (5.7) требуется переход к какому-либо конечномерному фазовому пространству. Одной из возможностей такого перехода является представление уравнения (5.7) в виде конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого поделим интервал $[-\tau; 0]$ на m одинаковых частей и обозначим

$$x_t(0) = y_0,\ x_t(-\tau) = y_m,\ x_t(-i\tau/m) = y_i,\ i = \overline{1, m-1},$$

где $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$. Тогда, используя, например, разностную аппроксимацию производной, получим

$$\dot{y}_0 = f(y_0, y_m, \tau),\ \dot{y}_i = (m/\tau)(y_{i-1} - y_i),\ i = \overline{1, m}. \tag{5.8}$$

Таким образом, уравнение (5.7) сводится к $(m+1)$-мерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = F(y, \tau), \tag{5.9}$$

вектор которой $y = (y_0(t),\ y_1(t), \ldots, y_m(t))$ определяет вектор-функцию

$$\varphi_t^{[m]}(\vartheta) = y_i + \frac{(y_{i-1} - y_i)m}{\tau}\vartheta,\ \frac{-\tau i}{m} \leq \vartheta \leq \frac{-\tau(i-1)}{m},\ i = \overline{1, m}.$$

Каждая координата этой вектор-функции линейно аппроксимирует функцию $x_t(\vartheta)$ на отрезке длиной $h = \vartheta_{i-1} - \vartheta_i$ по двум значениям функции в узлах y_i и y_{i-1} с погрешностью, не превышающей $O(h^2)$ [41]. Очевидно, что при достаточно высоком порядке m функция $\varphi_t^{[m]}(\vartheta)$ будет сколь угодно мало отличаться от $x_t(\vartheta)$ на отрезке $[-\tau; 0]$. При этом решению $x(t)$ уравнения (5.7) соответствуют значения координаты $y_0(t)$ системы (5.9), а траектории в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times C[-\tau; 0]$ уравнения (5.7) соответствует траектория в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ системы (5.9).

Заметим, что погрешность аппроксимации уравнения (5.7) системой (5.9) определяется, главным образом, точностью вычисления производных $\dot{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$ в узлах сеточной функции $y_i = x_t(-im/\tau)$, $i = 1, \ldots, m$. В работе [95] показано, что если принять разностную схему вычисления производной первого порядка (5.8), то для получения погрешностей аппроксимации, сравнимых с точностью метода численного интегрировании Рунге-Кутта 4-го порядка при приемлемых шагах интегрирования, порядок системы (5.9) должен быть равным $m \approx 10^3$. Существенное уменьшение порядка системы до $m = 20 - 50$ может быть достигнуто при использовании интерполяции функции $x_t(\vartheta)$ на отрезке $[-\tau, 0]$ кубическими сплайнами. Но в любом случае уравнение (5.7) не сводится к маломерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем интереснее представляется задача сравнения сценариев перехода к хаосу в уравнении с запаздывающим аргументом (5.7) и в аппроксимирующей его многомерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (5.9). В качестве модельного примера рассмотрим широко известное уравнение Мэкки-Гласса, описывающее процесс кроветворения [100]:

$$\dot{x} = -ax(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tau)}{\theta^n + x^n(t-\tau)}, \tag{5.10}$$

где a, β_0, θ и n – положительные константы, выбранные так, что $\beta_0 > a > 0$, $nB > 2$, $6aB > \beta_0$, $B = (\beta_0 - a)/\beta_0$. Уравнение (5.10) имеет единственное стационарное состояние $x = \theta \sqrt[n]{\dfrac{\beta_0 - a}{a}}$, которое при значении $\tau > \dfrac{\arccos(-a/b)}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, где $b = a(nB - 1)$, теряет устойчивость в результате бифуркации рождения предельного цикла. В нашем примере приняты следующие значения параметров в уравнении (5.10): $a = 1$, $\beta_0 = \theta = 2$, $n = 10$. Для данных значений параметров и $0 < \tau < 0.4708$ уравнение (5.10) имеет стационарное устойчивое решение $x = 2$, при $\tau = 0.4708$ происходит бифуркация рождения устойчивого периодического решения (или, в расширенном фазовом пространстве - предельного цикла), а при дальнейшем увеличении τ наблюдаются бифуркации удвоения периода. Так при $\tau \approx 1.32$ рождается устойчивый цикл удвоенного периода, при $\tau \approx 1.57$ - уче-

тверенного периода и т.д. При этом каждая следующая бифуркация приводит к потере устойчивости предыдущего цикла. При $\tau > 1.608$ решение уравнения (5.10) имеет хаотическое поведение. Затем при значении параметра $\tau \approx 1.677$ рождается цикл периода 6, при значении $\tau \approx 1.766$ – цикл периода 5, при $\tau \approx 1.874$ – цикл периода 3.

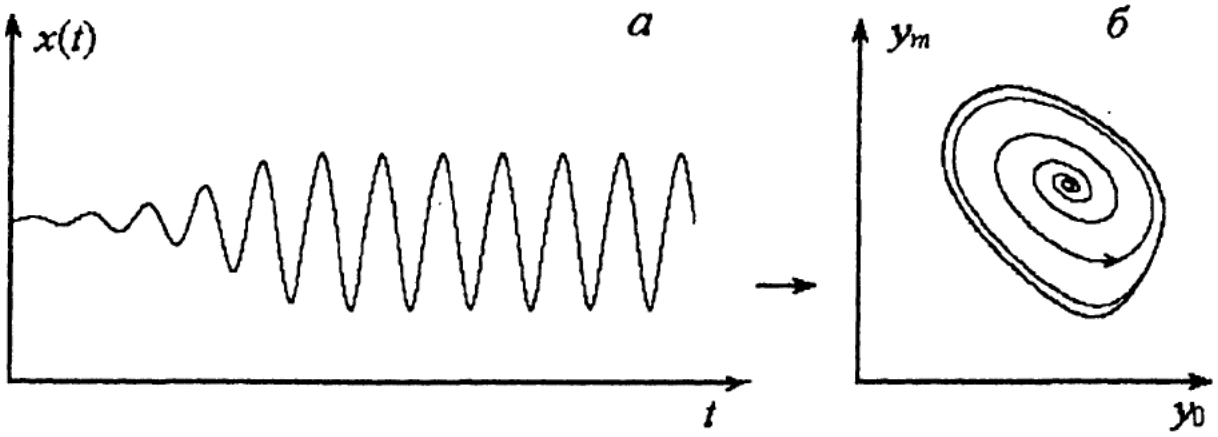

Рис. 5.4. Устойчивое периодическое решение (а) уравнения (5.10) и проекция устойчивого предельного цикла системы (5.9) при $\tau = 0.745$ (б).

Уравнение (5.10) было аппроксимировано 20-ти мерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (5.9), и рассматривались проекции фазовых портретов различных аттракторов последней системы на плоскость (y_0, y_m). Было установлено, что и в системе (5.9) при росте значений параметра τ реализуется субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов, причем начальные бифуркационные значения параметра для системы (5.9) и уравнения (5.10) практически совпадают (рис.5.4). Так, например, устойчивый цикл в системе (5.10) рождается в результате бифуркации Андронова-Хопфа при $\tau \approx 0.47$, цикл удвоенного периода – при $\tau \approx 1.32$, а цикл учетверенного периода – при $\tau \approx 1.57$.

Практически совпадают также и значения параметра τ, при которых в системе (5.9) и в уравнении (5.10) наблюдаются и другие устойчивые периодические решения, рождающиеся в результате бифуркаций различных сингулярных аттракторов (рис.5.5).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что одним из возможных сценариев перехода к хаосу в системах уравнений с запаздывающим аргументом, а также в конечномерных системах большой размерности является рассмотренный в главах 3 и 4 настоящей книги сценарий перехода к хаосу в трехмерных нелинейных диссипативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений через каскад бифуркаций Фейгенбаума и субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов. Вопрос о том, возможен ли переход к хаосу в системах уравнений с запаздывающим аргументом через субгармонический каскад бифуркаций двумерных или многомерных торов, остается открытым.

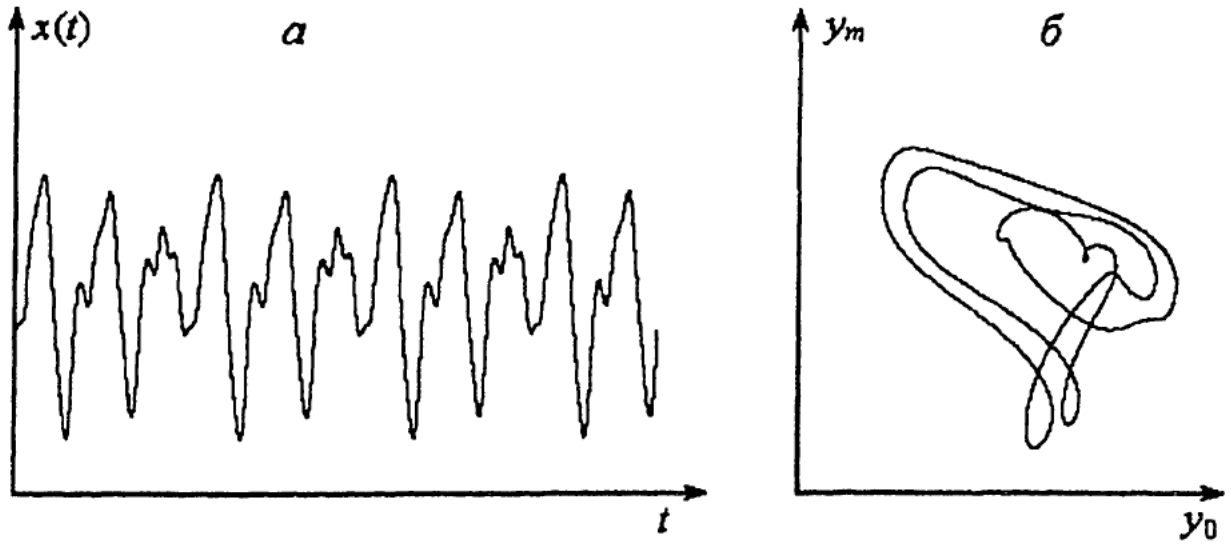

Рис. 5.5. Устойчивое периодическое решение (а) уравнения (5.10) и проекция устойчивого цикла периода 3 системы (5.9) при $\tau = 1.874$ (б).

5.4. Циклы и хаос в распределенных экономических системах.

Другим, принципиально отличным примером формирования диффузионного хаоса в нелинейной среде является распределенная модель рыночной экономики, предложенная одним из авторов в [63] и развитая затем в [64]. Модель является системой трех нелинейных дифференциальных уравнений, два из которых описывают изменение и интенсивность движения (диффузию) капитала и спроса в пространстве технологий под воздействием изменения нормы прибыли. Последнее описывается третьим обыкновенным дифференциальным уравнением. Полученная система обладает многими замечательными свойствами. Одним из них является наличие в ней последовательности бифуркаций рождения устойчивых периодических однородных пространственных решений произвольного периода, формирующих однородный по пространству, но хаотический во времени аттрактор. Последнее невозможно как для системы уравнений реакция-диффузия, так и для уравнения Курамото-Цузуки. Причем переход к хаосу осуществляется опять же рассмотренным в главах 2 — 4 субгармоническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов. Поэтому наличие в экономической системе еще и диффузионных процессов должно приводить к существованию в ней более сложных режимов диффузионного хаоса по сравнению с рассмотренными в предыдущих пунктах главы режимами. Предложенная авторами распределенная модель саморазвивающейся рыночной экономики является пока единственной экономико-математической моделью, обладающей такими свойствами. Поэтому мы подробно остановимся на выводе и анализе ее уравнений и на вытекающих из этого анализа интересных результатах, важных как с точки зрения математики, так и с точки зрения их различных экономических приложений.

5.4.1 Описание модели саморазвивающейся рыночной экономики. В модели рассматривается неструктурированная замкнутая экономическая система, процесс развития которой происходит в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называемом пространством технологий. Каждая точка с пространства $\mathbb{R}^n$ соответствует определенной технологии производства некоторого продукта и имеет своими координатами затраты $c_i, (i = 1, 2, ..., n)$ ресурса i на единицу выпускаемого продукта. Для описания основных характеристик экономической системы используются следующие функции:

– $\widetilde{K}(t, c)$ - плотность распределения капитала в момент t в пространстве технологий, то есть стоимость капитала (суммарная стоимость производительного, товарного и денежного капитала), задействованного предпринимателями в момент t в производстве некоторого потребительского продукта по технологии (по затратам) c и в производстве средств производства этого продукта;

– $C_T(t, c)$ - плотность распределения производительного (постоянного $K(t, c)$ и переменного $H(t, c)$) капитала предпринимателей;

– $Y(t, c)$ - плотность распределения товарного капитала предпринимателей, равная товарным запасам в момент t произведенного с затратами c потребительского продукта и средств для его производства;

– $M(t, c)$ - плотность распределения денежного капитала предпринимателей (платежеспособный спрос предпринимателей на средства производства и рабочую силу для производства продукции по технологии c);

– $D_1(t, c)$, $D_2(t, c)$ и $D_3(t, c)$ - платежеспособный спрос соответственно предпринимателей, трудящихся и государства на произведенный по технологии c потребительский продукт;

– $u(t, c)$ - распределение нормы прибыли в момент t в пространстве технологий;

– $\rho_{C_T}(t, c, \cdot)$ и $\rho_M(t, c, \cdot)$ - векторы плотности потока соответственно производительного и денежного капитала, то есть количество капитала, прошедшего через единицу поверхности некоторого объема пространства технологий $\mathbb{R}^n$ в единицу времени;

– $\rho_{D_1}(t, c, \cdot)$, $\rho_{D_2}(t, c, \cdot)$ и $\rho_{D_3}(t, c, \cdot)$ - векторы плотности потока платежеспособного спроса соответственно предпринимателей, трудящихся и государства на потребительские товары, определяемые как количество денежных средств, прошедших через единицу поверхности некоторого объема пространства технологий $\mathbb{R}^n$ в единицу времени;

– $R_1(t, c)$, $R_2(t, c)$ и $R_3(t, c)$ - текущее потребление соответственно предпринимателями, трудящимися и государством потребительских товаров, произведенных по технологии c.

Так как норма прибыли в производстве товаров однозначно определяет норму прибыли в производстве средств производства этих товаров, то этим оправдано введение в рассмотрение одной функции $u(t, c)$ для каждого вектора технологического пространства.

Согласно теории прибавочной стоимости К. Маркса, основанной на строгих законах экономического развития, справедливых и в наше время, саморазвитие рыночной экономики осуществляется за счет движения и самовозрастания капитала, которое в свою очередь, происходит в процессе кругооборота последнего посредством создания трудящимися прибавочной стоимости.

Рассмотрим подробно процесс кругооборота капитала, принимая его длительность за единицу. Первая стадия кругооборота капитала происходит в сфере обращения. Денежный капитал предпринимателей M затрачивается на покупку средств производства (постоянного капитала ΔK) и рабочей силы (переменного капитала ΔH). Соединение предпринимателем постоянного и переменного капитала означает их производительное потребление и дает начало следующей стадии кругооборота капитала - производству стоимости и прибавочной стоимости. Капитал, сменив денежную форму M на форму производительного капитала ($C_T = K + H$) продолжает движение в сфере производства. При этом стоимость производительного капитала уменьшается на часть стоимости переменного капитала ωH, которая выплачивается трудящимся в виде заработной платы и на часть стоимости μK постоянного капитала вследствие выбытия оборотного капитала, а также физического и морального износа постоянного капитала. Одновременно в технологическом пространстве возникают потоки производительного капитала $\rho_T(t, c, \cdot)$ из мест с менее высокой в места с более высокой нормой прибыли. Следовательно, для произвольного объема v пространства $\mathbb{R}^n$ уравнение, описывающее изменение производительного капитала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v C_T(t,c)dv = \int_v (-\omega H - \mu K + \Delta K + \Delta H)dv - \int_S \rho_T(t,c,\cdot)dS.$$

Переходя в последнем интеграле к интегрированию по объему и в силу произвольности объема интегрирования v получаем

$$\frac{\partial C_T(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_T(t,c,\cdot) + \Delta K - \mu K + \Delta H - \omega H. \qquad (5.11)$$

В результате производства капитал приобретает товарную форму, причем стоимость вновь произведенных товаров складывается из амортизации νK и вновь созданной трудящимися стоимости, которая состоит из стоимости переменного капитала ωH и прибавочной стоимости uC_T. Произведенные по технологии c товары покупаются предпринимателями R_1, трудящимися R_2 и государством R_3. Таким образом, уравнение изменения товарного капитала имеет вид

$$\frac{\partial Y(t,c)}{\partial t} = \nu K + \omega H + uC_T - (R_1 + R_2 + R_3). \qquad (5.12)$$

Продавая произведенные товары на рынке, предприниматель реализует в деньгах заключенную в них стоимость. Капитал меняет товарную форму на денежную, причем источником прироста денежного капитала предпринимателей является идущая на накопление часть I средств, вырученных от продажи потребительских товаров, а стоком – стоимость вновь авансированного производительного капитала $\Delta K + \Delta H$. Вместе с тем, в технологическом пространстве возникают потоки денежного капитала $\rho_M(t, c, \cdot)$, направленные в места с более высокой нормой прибыли. Это означает стремление ссудных капиталистов вкладывать свои деньги в развитие таких производств, которые обеспечивают получение наибольшей прибыли и, следовательно, большего процента на ссудный капитал . Таким образом, применяя тот же подход, что и в уравнениях (5.11) – (5.12), получаем уравнение движения денежного капитала

$$\frac{\partial M(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_M(t, c, \cdot) + I - \Delta H - \Delta K. \qquad (5.13)$$

Сложив уравнения (5.11) – (5.13), получим уравнение движения капитала в виде

$$\frac{\partial \widetilde{K}(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho(t, c, \cdot) + (\nu - \mu)K + uC_T + I - R, \qquad (5.14)$$

где $R = R_1 + R_2 + R_3$, $\rho = \rho_T + \rho_M$, $\widetilde{K} = C_T + Y + M$.

Уравнение (5.14) описывает стремление капитала к самовозрастанию. Если производство прибыльно, то капитал возрастает, производство расширяется, растет постоянный и переменный капитал. Но этот процесс не может происходить бесконечно. Существуют факторы, которые по мере роста капитала способствуют снижению нормы прибыли, что в конечном счете ведет к свертыванию производства, безработице, кризису. Такими факторами являются: периодическое превышение предложения над спросом на потребительские товары, невозможность реализовать произведенную продукцию на рынке из-за недостатка платежеспособного спроса; периодическое превышение спроса на средства производства над ограниченным предложением денежного капитала и спроса на рабочую силу над ее ограниченным предложением на стадиях подъема и расширения масштабов производства [101]. Эти факторы можно формализовать, используя функцию платежеспособного спроса.

Как отмечено выше, часть I денежных средств R, вырученных предпринимателями от продажи потребительских товаров, идет на накопление капитала. Другие же части C_K и G являются источниками формирования платежеспособного спроса D_1 и D_3 предпринимателей и государства на потребительские товары, произведенные по технологии c. Стоком платежеспособного спроса D_1 и D_3 в точке c

пространства $\mathbb{R}^n$ является стоимость купленных ими товаров R_1 и R_3. Вместе с тем в технологическом пространстве возникают потоки $\rho_{D_1}(t,c,\cdot)$ и $\rho_{D_2}(t,c,\cdot)$ платежеспособного спроса соответственно предпринимателей и государства, стремящиеся распределить его по всему пространству в соответствии с потребительскими стоимостями товаров, выпускаемых по различным технологиям. Поэтому уравнения движения платежеспособного спроса предпринимателей и государства на потребительские товары имеют вид:

$$\frac{\partial D_1(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_{D_1}(t,c,\cdot) + C_K - R_1, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial D_3(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_{D_3}(t,c,\cdot) + G - R_3. \tag{5.16}$$

Источником платежеспособного спроса трудящихся C_L в точке c является их заработная плата ωH ($C_L = \omega H$), а стоком - стоимость купленных ими потребительских товаров R_2. Таким образом,

$$\frac{\partial D_2(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_{D_2}(t,c,\cdot) + C_L - R_2. \tag{5.17}$$

Складывая уравнения (5.15) – (5.17), получим уравнение движения платежеспособного спроса в виде

$$\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\rho_D(t,c,\cdot) + C_L + C_K + G - R, \tag{5.18}$$

где $\rho_D = \rho_{D_1} + \rho_{D_2} + \rho_{D_3}$.

Перепроизводство не означает, что товары вообще не могут быть проданы и потреблены. Но они не могут быть проданы по ценам, обеспечивающим предпринимателям определенную норму прибыли. Поэтому превышение предложения потребительских товаров и рабочей силы $Y+H$ над платежеспособным спросом D и денежным капиталом M ведет к уменьшению цен, увеличению нормы ссудного процента и, следовательно, в конечном итоге, к снижению нормы прибыли

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha((D+M) - (Y+H)). \tag{5.19}$$

Таким образом, система уравнений саморазвивающейся рыночной экономики может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{K}(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}\rho(t,c,\cdot) + (\nu-\mu)K + uC_T + I - R,\\
\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}\rho_D(t,c,\cdot) + C_L + C_K + G - R,\\
\frac{\partial u(t,c)}{\partial t} &= \alpha((D+M) - (Y+H)),\\
\tilde{K} &= C_T + Y + M,\ C_T = K + H,\ R = C_K + G + I.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Если проинтегрировать уравнения системы (5.20) по положительному ортанту технологического пространства, то, учитывая, что

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} \mathrm{div}\rho(t,c,\cdot)dc = \int_{\mathbf{R}^n_+} \mathrm{div}\rho_D(t,c,\cdot)dc = 0,$$

можно получить систему уравнений, описывающих изменение макропоказателей рыночной экономики во времени:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde{K}(t,c)}{dt} = (\nu-\mu)K + uC_T + I - R,\\
&\frac{dD(t,c)}{dt} = C_L + C_K + G - R,\\
&\frac{du(t,c)}{dt} = \alpha(D + M - Y - H),\\
&\widetilde{K} = C_T + Y + M,\ C_T = K + H,\ R = C_K + G + I.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Заметим, что если сложить первые два уравнения системы (5.21), то получим уравнение изменения стоимости всех элементов, участвующих в экономическом развитии

$$\frac{d(\widetilde{K}(t,c) + D(t,c))}{dt} = (\nu-\mu)K + C_L + uC_T - R,$$

где $\nu K + C_L + uC_T$ – совокупный общественный продукт, а $C_L + uC_T$ – национальный доход.

Системы (5.20), (5.21) являются недоопределенными, так как содержат шесть уравнений (три из которых дифференциальные) и двенадцать переменных плюс потоки капитала и спроса. Доопределить системы (5.20) или (5.21) можно различными поведенческими уравнениями (связями), имеющими наглядную экономическую интерпретацию в терминах рыночной экономики. Предлагается следующий (безусловно, не единственный) способ доопределения системы (5.20), а следовательно, и (5.21).

Предположение 1. Вектор плотности потока капитала пропорционален градиенту нормы прибыли, причем коэффициент пропорциональности не является постоянным, а зависит как от точки c пространства технологий, так и от самой нормы прибыли

$$\rho(t,c,\cdot) = \kappa_1(c,\widetilde{K},u)\mathrm{grad}u(t,c). \tag{5.22}$$

Процесс диффузии капитала определяется коэффициентом диффузии $\kappa_1(c,\widetilde{K},u)$, который характеризует свойства экономической среды. В зависимости от вида κ_1 (в общем случае κ_1 - тензор) среда может быть однородной или неоднородной, изотропной или анизотропной.

Различные экономические механизмы переноса капитала могут давать разные, в том числе нелинейные, зависимости κ_1 от $\widetilde{K}$ и u.

Предположение 2. Так как за уменьшением нормы прибыли стоит прежде всего уменьшение спроса на товар, то можно предположить, что вектор плотности потока платежеспособного спроса на потребительские товары пропорционален градиенту нормы прибыли, а коэффициент пропорциональности зависит от точки c пространства технологий, величины платежеспособного спроса и от самой нормы прибыли

$$\rho_D(t, c, \cdot) = \kappa_2(c, D, u)\mathrm{grad}u(t, c). \tag{5.23}$$

Коэффициент $\kappa_2(c, D, u)$ определяет процесс диффузии платежеспособного спроса на потребительские товары и характеризует экономическую среду со стороны потребительских свойств выпускаемых по различным технологиям товаров, их качества, престижности и моды на эти товары.

Предположение 3. Стоимость приобретенных на рынке потребительских товаров пропорциональна как стоимости товарного капитала, так и платежеспособному спросу на потребительские товары

$$R = \beta Y D. \tag{5.24}$$

Предположение 4. Денежные средства G, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса государства, являются частью всех средств, вырученных предпринимателями от продажи потребительских товаров (налоги, акцизы, пошлины и т.д.)

$$G = \delta R. \tag{5.25}$$

Так как $C_L \leq (1 - \delta)R$, то $0 < \delta \leq \delta_0 < 1$.

Предположение 5. Денежные средства C_K, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей, составляют часть прибавочной стоимости, полученной в процессе производства и оставшейся после расчетов с государством

$$C_K = \varepsilon(1 - \widetilde{\delta})uC_T, \ \varepsilon < 1. \tag{5.26}$$

Полагая в (5.26) $\sigma = \varepsilon(1 - \delta)$ и $\widetilde{\delta} = \delta$, получим $C_K = \sigma u C_T$, где $\sigma < 1 - \delta$.

Наконец, в уравнения (5.20) – (5.26) удобно ввести величины, характеризующие органическое $\gamma = K/H$, производительное $\theta = C_T/M$ и товарное $\eta = Y/M$ строение капитала. С учетом этих предположе-

ний система (5.20) примет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{K}(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}(\kappa_1(c,\widetilde{K},u)\mathrm{grad}u) + \frac{\gamma\theta(\nu-\mu)\widetilde{K}}{(\gamma+1)(1+\theta+\eta)} + \\
&+ \frac{\theta(1-\sigma)\widetilde{K}u}{1+\theta+\eta} - \frac{\beta\delta\eta\widetilde{K}D}{1+\theta+\eta}, \\
\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}(\kappa_2(c,D,u)\mathrm{grad}u) + \frac{\omega\theta\widetilde{K}}{(1+\gamma)(1+\theta+\eta)} + \\
&+ \frac{\sigma\theta\widetilde{K}u}{1+\theta+\eta} - \frac{\beta(1-\delta)\eta\widetilde{K}D}{1+\theta+\eta}, \\
\frac{\partial u(t,c)}{\partial t} &= \alpha\Big(D - \frac{\theta+(\eta-1)(\gamma+1)}{(1+\theta+\eta)(\gamma+1)}\widetilde{K}\Big).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Отметим, что система уравнений (5.27) является частным случаем систем с многокомпонентной диффузией, где активатором – переменной, по которой осуществляется положительная обратная связь, является капитал, а ингибитором – переменной, подавляющей процесс нарастания капитала – платежеспособный спрос населения. Причем, процесс взаимодействия активатора и ингибитора происходит под управлением еще одной переменной – нормы прибыли, а коэффициенты диффузии в общем случае нелинейно зависят от свойств экономической среды. Это позволяет предположить существование у системы (5.27) сложных нелинейных структур, таких как предельные циклы, торы, автоволны, диссипативные структуры. Наличие трех уравнений дает основание для существования в системе хаотических режимов поведения и диффузионного хаоса.

Введем новые переменные

$$x = \frac{\beta\eta}{1+\theta+\eta}\widetilde{K},\ y = \frac{\beta\eta(1+\gamma)}{\omega\theta}D,\ z = \frac{1+\gamma}{\omega}u$$

и, положив в общем случае $\nu = \mu$, сведем систему (5.27) к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}(d_1(c,x,z)\mathrm{grad}z) + bx((1-\sigma)z - \delta y), \\
\frac{\partial y(t,c)}{\partial t} &= -\mathrm{div}(d_2(c,y,z)\mathrm{grad}z) + x(1-(1-\delta)y + \sigma z), \\
\frac{\partial z(t,c)}{\partial t} &= a(y - dx),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

где

$$b = \frac{\omega\theta}{(1+\theta+\eta)(1+\gamma)},\ a = \frac{\alpha\theta}{\beta\eta},\ d = \frac{\theta+(\eta-1)(1+\gamma)}{\omega\theta}. \tag{5.29}$$

Аналогично система (5.21), описывающая изменение макроэкономических показателей, в предположениях 1 – 5 может быть сведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bx((1-\sigma)z - \delta y), \\ \dot{y}(t) &= x(1-(1-\delta)y + \sigma z), \\ \dot{z}(t) &= a(y - dx). \end{aligned} \tag{5.30}$$

5.4.2. Исследование поведения макроэкономических показателей. В данном разделе мы остановимся на исследовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.30), являющейся первой системой, решения которой, с одной стороны, имеют хаотическое поведение, а с другой – наглядную экономическую интерпретацию. Фиксируем параметры γ, θ, η, определяющие соответственно органическое, производительное и товарное строение капитала, а также параметры α, β и ω. Положим, например, $\gamma = 1$, $\theta = 12$, $\eta = 2$, $\beta = 6\alpha/7$, $\omega = 1$ и рассмотрим влияние двух параметров σ и δ на качественное поведение решений системы (5.30) при фиксированных значениях остальных трех параметров: $a = 7$, $b = 0.4$, $d = 1.17$. Заметим, что при всех значениях параметров σ и δ, удовлетворяющих соотношению $\sigma < 1 - \delta$, система (5.30) имеет стационарное решение (неподвижную точку) с положительными координатами

$$O^*(x^*, y^*, z^*) = \Big(\frac{1-\sigma}{d(1-\delta-\sigma)},\ \frac{1-\sigma}{1-\delta-\sigma},\ \frac{\delta}{1-\delta-\sigma}\Big). \tag{5.31}$$

Тогда собственные значения матрицы Якоби правой части системы (5.30)

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} b((1-\sigma)z - \delta y) & -b\delta x & b(1-\sigma)x \\ 1-(1-\delta)y + \sigma z & -(1-\delta)x & \sigma x \\ -ad & a & 0 \end{pmatrix},$$

вычисленные в точке O^*, удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + (1-\delta)x^*\lambda^2 + ax^*(bd(1-\sigma) - \sigma)\lambda + ab(1-\sigma)x^* = 0. \tag{5.32}$$

Используя условия Рауса-Гурвица

$$(1-\delta)x^* > 0,\ ax^{*2}(1-\delta)(bd(1-\sigma) - \sigma) > abx^*(1-\sigma) > 0,$$

определяющие устойчивость многочлена (5.32), найдем область устойчивости G^s точки O^*, в которой все три корня характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части: $G^s = G_1^s \cup G_2^s$, где $G_1^s = \{\sigma | \sigma < 0\} \cap \{(b,d,\delta) | bd < (1-\delta)/\delta\}$, $G_2^s =$

$= \{\sigma|\sigma > 0\} \cap \{(b,d,\delta)|bd > (1-\delta)/\delta\}$. Оставшаяся часть области параметров $\{(\sigma,\delta)|\sigma < 1-\delta,\ 0 < \delta \le \delta_0 < 1\}$ является областью неустойчивости G^u точки O^* и состоит также из двух подобластей: $G^u = G_1^u \cup G_2^u$, где $G_1^u = \{\sigma|\sigma < 0\} \cap \{(b,d,\delta)|bd > (1-\delta)/\delta\}$, $G_2^u = \{\sigma|\sigma > 0\} \cap \{(b,d,\delta)|bd < (1-\delta)/\delta\}$. Области G^s и G^u плоскости параметров (σ,δ) показаны на рис. 5.6, где $(1-\delta^*)/\delta^* = bd = 0.468$ и, следовательно, $\delta^* \approx 0.681$, а $\delta_0 = 0.8$.

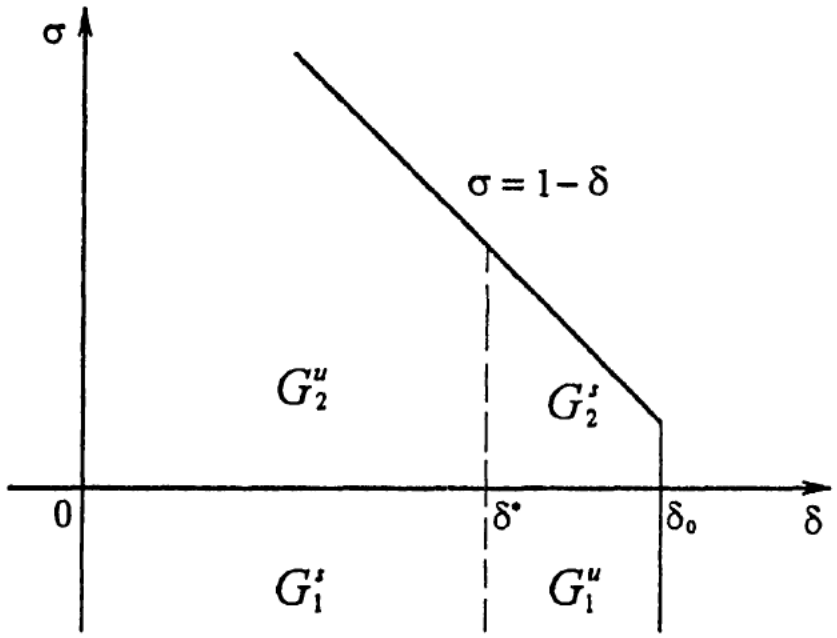

Рис. 5.6. Области устойчивости (G_1^s и G_2^s) и неустойчивости (G_1^u и G_2^u) неподвижной точки O^* системы (5.30).

Рассмотрим несколько наиболее естественных и интересных сценариев экономического развития при изменении параметров σ и δ.

Сценарий 1: $\sigma < 0$. Этот сценарий соответствует государству с чрезвычайно сильной командно-административной системой управления экономикой, когда государственные органы заставляют предпринимателей всю полученную ими прибыль отдавать государству. Если "давление" государства на бизнес велико ($\delta > \delta^*$, $(\delta,\sigma) \in G_1^u$), то такая экономика может существовать некоторое время с низкими уровнями капитализации и потребления, а затем разрушается путем уменьшения до нуля платежеспособного спроса населения (рис. 5.7а).

При уменьшении δ и при неизменном значении $\sigma = -1$ происходит переход в пространстве параметров из области G_1^u в G_1^s и при $\delta < \delta^*$ неподвижная точка O^* системы (5.30) становится устойчивой неподвижной точкой (фокусом), окруженной неустойчивым седловым циклом. Это значит, что при уменьшении "давления" государства на бизнес командно-административная экономика может существовать в практически стационарном (по существу, застойном) состоянии с низким уровнем капитализации и потребления, не разрушаясь при этом длительное время (рис. 5.7 б).

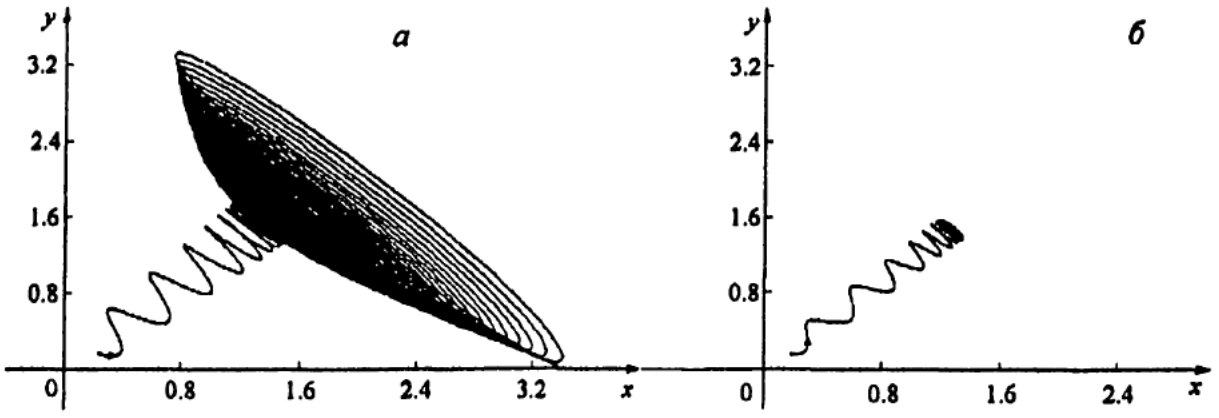

Рис. 5.7. Проекция на плоскость (x, y) – (капитал, платежеспособный спрос) решения системы (5.30) при $\delta = 0.7$ и $\sigma = -1$ (а) и при $\delta = 0.65$ и $\sigma = -1$ (б).

Сценарий 2: $\delta < \delta^*$. Рассмотренный выше случай $\sigma < 0$ соответствует чрезмерно сильному командно-административному стилю управления экономикой. При переходе параметра σ через границу $\sigma = 0$ из области G_1^s в область параметров G_2^u происходит бифуркация жесткой смены устойчивости неподвижной точки и окружающего ее предельного цикла: точка O^* становится неустойчивой, а цикл – устойчивым. Математически эта бифуркация связана с переходом двух комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (5.30) через мнимую ось слева направо. Третий корень имеет при этом отрицательную вещественную часть. Действительно, при $\sigma = 0$ характеристическое уравнение (5.32) принимает вид

$$(\lambda + (1-\delta)x^*)(\lambda^2 + abdx^*) = 0$$

и, следовательно, имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{abdx^*},\ \lambda_3 = -(1-\delta)x^* = -1/d < 0.$$

Дифференцируя характеристическое уравнение (5.32) по параметру σ, найдем, что

$$\mathrm{Re}\frac{d\lambda(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\substack{\sigma=0\\ \lambda=\lambda_1}} = \frac{a\delta}{2(1-\delta)(abd^2+1-\delta)}\left(\frac{1-\delta}{\delta} - bd\right) > 0,$$

так как $(1-\delta)/\delta > bd$ при значениях $\delta < \delta^*$.

Заметим, что выполнение перечисленных выше условий недостаточно для того, чтобы в системе произошла бифуркация Андронова-Хопфа – бифуркация "мягкого" рождения предельного цикла из устойчивой неподвижной точки [45, 46]. Достаточным является выполнение еще и дополнительного условия, состоящего в том, что при $\sigma = 0$ неподвижная точка O^* должна оставаться устойчивым фокусом. В нашем же случае при $\sigma = 0$ точка O^* является центром.

С экономической точки зрения данная бифуркация осуществляет переход от экономики с административно-командным стилем управления к экономике рыночного типа. При $\sigma > 0$ появляется относительно независимый от государства класс предпринимателей, которые могут позволить себе тратить полученную ими прибыль по своему усмотрению в том числе и на личное потребление. Развитие такой экономики в рассматриваемом нами случае ($\delta < \delta^*$) может происходить исключительно циклическим образом. При этом сложность периодических колебаний капитала и платежеспособного спроса возрастает с увеличением σ (при фиксированном δ) вплоть до появления хаотических колебаний, а при фиксированном значении σ с ростом величины параметра δ вид колебаний становится более простым. Примечательным является тот факт, что при каждом значении $\delta < \delta^*$ всегда найдется значение $\sigma < 1 - \delta$ такое, что экономика будет со временем разрушаться в результате глобального кризиса, сопровождающегося уменьшением вплоть до нуля и капитала и платежеспособного спроса населения. Например, при значении $\delta = 0.4$ в модели (5.30) существует единственный устойчивый цикл при $0 < \sigma < 0.05$ (рис. 5.8 а), который разрушается при $\sigma > 0.05$. При значении $\delta = 0.65$ с ростом

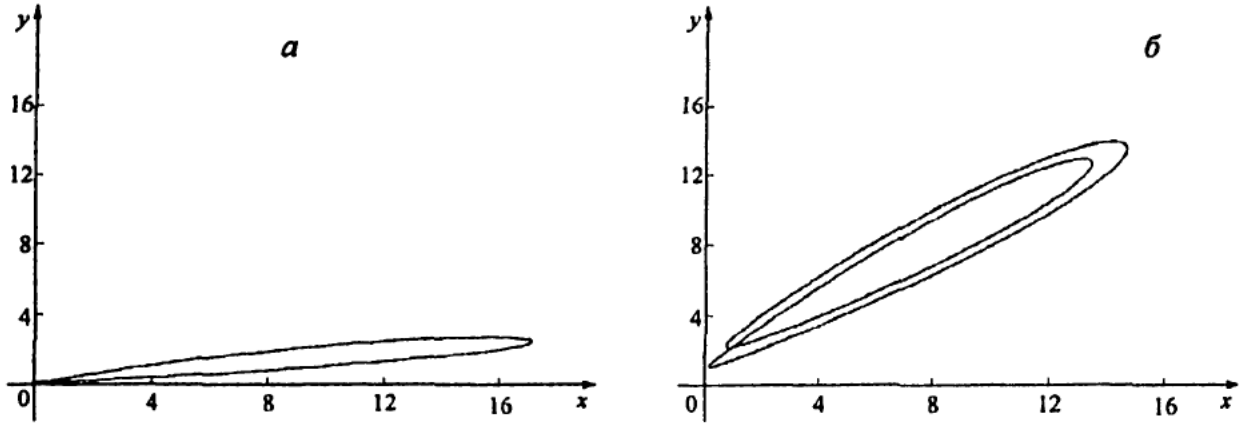

Рис. 5.8. Цикличность экономики при $\delta = 0.4$ и $\sigma = 0.05$ (а) и при $\delta = 0.65$ и $\sigma = 0.266$ (б).

σ в модели (5.30) реализуется субгармонический каскад бифуркаций перехода к хаосу. Так при $\sigma = 0.266$ возникает цикл удвоенного периода (рис. 5.8б), при $\sigma = 0.275$ – цикл учетверенного периода (рис. 5.9а), при $\sigma = 0.278$ – аттрактор Фейгенбаума, завершающий бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 5.9б). При значении $\sigma = 0.2802$ возникает цикл периода 5 (рис. 5.10а), а за ним следует очередной каскад бифуркаций удвоения периода, после чего при значении $\sigma = 0.284$ рождается символический цикл периода 3 (рис. 5.10б), наличие которого свидетельствует, согласно теореме Шарковского (см. главу 4), о существовании в системе (5.30) циклов любого периода. При значениях $\sigma > 0.284$ отмечается разрушение циклического поведения в экономической системе и ее распад.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что неконтроли-

руемый рост личного потребления предпринимателей, которому в модели (5.30) соответствует увеличение параметра σ, неминуемо ведет к хаосу в экономике и в конечном итоге к ее разрушению. Наглядной иллюстрацией к полученным строгим математическим результатам являются, с одной стороны, тяжелые последствия десятилетнего периода "дикого" капитализма в России вследствие непродуманных реформ Ельцина-Гайдара, с другой стороны – успехи экономики Китая, где рыночные отношения в тот же период развивались под контролем и управлением государства.

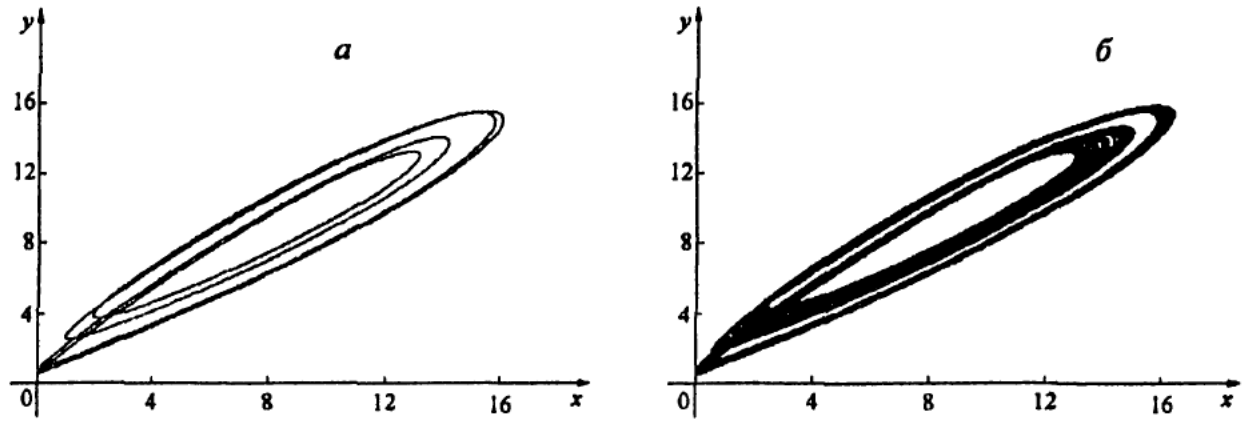

Рис. 5.9. Проекция на плоскость (x, y) цикла периода четыре при $\delta = 0.65$, $\sigma = 0.276$ (а) и нерегулярного аттрактора при $\delta = 0.65$ и $\sigma = 0.278$ (б).

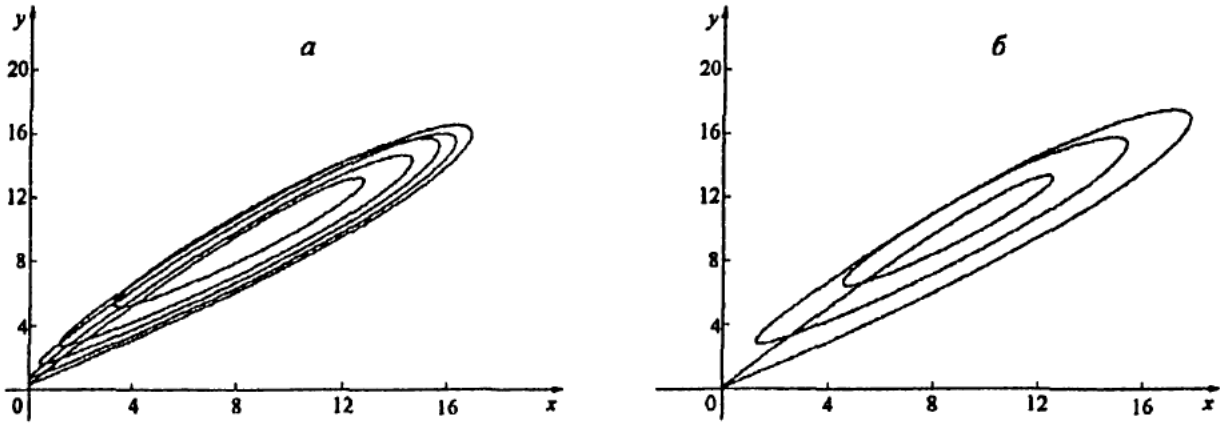

Рис. 5.10. Проекция на плоскость (x, y) цикла периода пять при $\delta = 0.65$, $\sigma = 0.2802$ (а) и цикла периода три при $\delta = 0.65$ и $\sigma = 0.284$ (б).

Сценарий 3: $\sigma > 0$. Как уже было отмечено выше, при фиксированном значении σ сложность периодических колебаний капитала и платежеспособного спроса убывает с ростом величины параметра δ и возрастает при ее уменьшении. Поэтому при малых значениях δ экономика также разрушается, как и при больших значениях σ. Если взять, например, $\sigma = 0.284$, то при всех значениях параметра $\delta < 0.65$ экономика разрушается в результате глобального кризиса. При значении $\delta = 0.65$, как уже отмечалось выше, в системе (5.30) существует

цикл периода 3 (рис. 5.10б), а при значениях $\delta > 0.65$ имеет место каскад бифуркаций, обратный тому, что был описан в сценарии 2, а именно: сначала возникает хаос, затем при $\delta = 0.656$ — цикл периода 4, при значении $\delta = 0.657$ — цикл периода 2 и, наконец, при значении $\delta = 0.662$ решением системы (5.30) является простой устойчивый предельный цикл (рис. 5.11а). Когда величина параметра δ возрастает до значения $\delta^* = 0.681$, этот предельный цикл стягивается в точку и исчезает в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа (рис. 5.11б).

Последний сценарий позволяет сделать второй важный вывод о том, что более высокий платежеспособный спрос государства на потребительские товары обеспечивает и более устойчивое развитие рыночной экономики, ее меньшую подверженность различным кризисным явлениям. Напротив, малый платежеспособный спрос государства разрушает экономическую систему. Иллюстрацией к сформулированному строгому математическому выводу является с одной стороны кризис и банкротство многих российских предприятий, не обеспеченных заказами, а сдругой стороны решения президента Дж. Буша о выходе из договора по ПРО и о начале войны в Ираке, продиктованные чисто экономическими соображениями — необходимостью обеспечить государственными заказами оказавшуюся в кризисе экономику США.

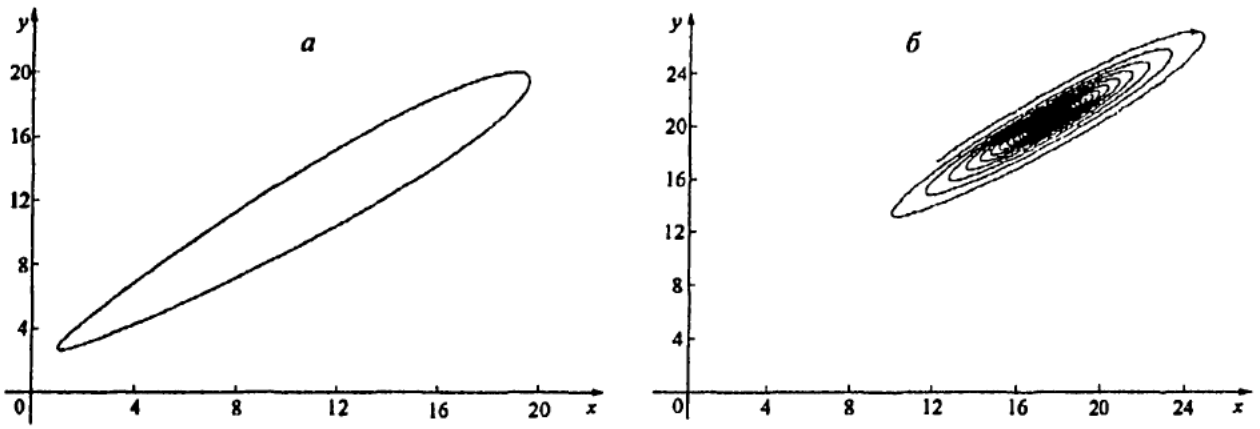

Рис. 5.11. Проекция на плоскость (x, y) предельного цикла при $\delta = 0.662$ и $\sigma = 0.284$ (а) и неподвижной точки при $\delta = \delta^* = 0.681$, $\sigma = 0.284$ (б).

Этот же вывод, как видно из модели (5.30), относится и к платежеспособному спросу трудящихся, который определяется в основном их заработной платой и характеризуется коэффициентом γ, отражающим органическое строение капитала. Таким образом, некорректными являются утверждения том, что трудящиеся смогут получать достойную зарплату только тогда, когда экономика по-настоящему заработает. Дело обстоит как раз наоборот: экономика заработает по-настоящему тогда и только тогда, когда люди начнут получать достойную зарплату и тем самым обеспечат устойчивый платежеспособный спрос на потребительские товары, ею производимые.

5.4.3. Некоторые аспекты поведения экономических показателей при наличии диффузии капитала и платежеспособного спроса

Рассмотрим вторую краевую задачу на отрезке для системы уравнений (5.28) с постоянными положительными коэффициентами диффузии капитала и платежеспособного спроса при $\sigma > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x(t,c)}{\partial t} = -d_1 \frac{\partial^2 z}{\partial c^2} + bx((1-\sigma)z - \delta y),\\
&\frac{\partial y(t,c)}{\partial t} = -d_2 \frac{\partial^2 z}{\partial c^2} + x(1-(1-\delta)y + \sigma z),\\
&\frac{\partial z(t,c)}{\partial t} = a(y - dx),\\
&0 \le c \le l,\ 0 \le t < \infty,\\
&x(0,c) = x_0(c),\ y(0,c) = y_0(c),\ z(0,c) = z_0(c),\\
&\frac{\partial x(t,0)}{\partial c} = \frac{\partial x(t,l)}{\partial c} = \frac{\partial y(t,0)}{\partial c} = \frac{\partial y(t,l)}{\partial c} =\\
&= \frac{\partial z(t,0)}{\partial c} = \frac{\partial z(t,l)}{\partial c} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Очевидно, что любое устойчивое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.30), найденное в предыдущем разделе и продолженное однородно на весь отрезок $[0,l]$, будет являться устойчивым решением и краевой задачи (5.33) при однородных начальных условиях. В таком случае естественно возникает вопрос об устойчивости этих решений относительно малых пространственных возмущений однородных начальных условий.

Начнем с анализа устойчивости термодинамической ветви системы (5.33), которая является однородным и стационарным решением $x(t,c) = x^*$, $y(t,c) = y^*$, $z(t,c) = z^*$ этой системы. Линеаризуем задачу (5.33) в окрестности термодинамической ветви, положив

$$
u(t,c) = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}} = (x(t,c) - x^*, y(t,c) - y^*, z(t,c) - z^*)^{\mathrm{T}}.
$$

Тогда

$$
\dot{u} = Lu + O(\| u \|^2),
$$

где оператор L имеет вид

$$
\begin{aligned}
L &= J(x^*, y^*, z^*) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial c^2} =\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b\delta x^* & b(1-\sigma)x^* \\ 0 & -(1-\delta)x^* & \sigma x^* \\ -ad & a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial c^2}.
\end{aligned}
$$

Так как оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial c^2}$ с краевыми условиями второго рода на отрезке $[0,l]$ имеет собственные значения $\nu_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n = 0,1,\ldots$, то, раскладывая собственные функции оператора L по собственным функциям $\cos\dfrac{\pi n}{l}c$ оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial c^2}$, получим, что собственными значениями λ_n оператора L являются собственные значения матриц

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & -b\delta x^* & b(1-\sigma)x^* + d_1\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2} \\ 0 & -(1-\delta)x^* & \sigma x^* + d_2\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2} \\ -ad & a & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0,1,\ldots,$$

которые удовлетворяют характеристическим уравнениям

$$\lambda^3 + (1-\delta)x^*\lambda^2 + a\Big[bdx^*(1-\sigma) - \sigma x^* + (dd_1 - d_2)\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big]\lambda + \\ + ax^*\Big[b(1-\sigma) + d((1-\delta)d_1 - b\delta d_2)\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big] = 0, \ n = 0,1,\ldots. \quad (5.34)$$

Выпишем условия Рауса-Гурвица устойчивости характеристических уравнений (5.34)

$$(1-\delta)x^* > 0,$$

$$(1-\delta)x^* a\Big[bdx^*(1-\sigma) - \sigma x^* + (dd_1 - d_2)\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big] > \\ ax^*\Big[b(1-\sigma) + d((1-\delta)d_1 - b\delta d_2)\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big],$$

$$ax^*\Big[b(1-\sigma) + d((1-\delta)d_1 - b\delta d_2)\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big] > 0, \ n = 0,1,\ldots.$$

Первое условие всегда выполнено, так как $x^* > 0$, $\delta < 1$. Второе условие может быть записано в виде

$$ax^*\Big[bdx^*(1-\sigma)(1-\delta) - \sigma x^*(1-\delta) - b(1-\sigma) + \\ + d_2\delta\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big(bd - \frac{1-\delta}{\delta}\Big)\Big] > 0, \ n = 0,1,\ldots,$$

или

$$ax^*\delta\Big(bd - \frac{1-\delta}{\delta}\Big)\Big(\frac{\sigma(1-\sigma)}{d(1-\delta-\sigma)} + d_2\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\Big) > 0, \ n = 0,1,\ldots. \quad (5.35)$$

Таким образом, второе условие выполнено при всех $n \geq 0$ в области $\delta > \delta^*$ и не выполнено ни при каких n в области $\delta < \delta^*$.

Третье условие выполнено при всех n только в случае

$$(1-\delta)d_1 - b\delta d_2 \geq 0. \tag{5.36}$$

В противном случае всегда найдется номер n такой, что третье условие не будет выполнено. Условие (5.36) можно записать в виде

$$bd \leq k\frac{1-\delta}{\delta}, \text{ где } k = \frac{dd_1}{d_2}. \tag{5.37}$$

Следовательно, в области $\delta < \delta^*$ термодинамическая ветвь задачи (5.33) всегда неустойчива, а в области $\delta > \delta^*$ она устойчива только в случае $k \geq 1$ или $d_1 \geq d_2/d$.

Так как в области $\delta > \delta^*$ задача (5.33) не имеет никаких других однородных решений, кроме термодинамической ветви, то большая инерционность, "неповоротливость" капитала, его медленное движение по технологическому пространству вследствие несовершенного законодательства, криминализации бизнеса, трудностей с получением кредитов и других причин приводят к неустойчивости экономической системы и к ее разрушению при значениях $\delta > \delta^*$. При значениях $\delta < \delta^*$ в задаче (5.33) кроме неустойчивой термодинамической ветви существуют и другие однородные периодические по времени или хаотические решения (см. рис. 5.8–5.10), анализ устойчивости которых относительно малых пространственных возмущений является сложной малоизученной математической проблемой. Численные расчеты, однако, показывают, что по крайней мере некоторые из этих решений (циклы при $\delta \lesssim \delta^*$), являясь неустойчивыми по отношению к малым пространственным возмущениям при $d_1 < d_2/d$, остаются устойчивыми к ним при $d_1 > d_2/d$.

Проведенный выше математический анализ позволяет сделать третий важный вывод о том, что инерционность капитала, его неповоротливость также неминуемо приводит к разрушению экономической системы. Другими словами, капитал должен не только находиться в движении, но еще и достаточно быстро реагировать на все изменения платежеспособного спроса на различные потребительские товары, производимые экономической системой.

Таким образом, из анализа уравнений модели следуют важные выводы о том, что:

а) неконтролируемый рост личного потребления предпринимателей неминуемо ведет к хаосу в экономике и, в конечном счете, к ее разрушению;

б) малый платежеспособный спрос со стороны государства (государственные заказы, государственная поддержка бизнеса и т.д.) и трудящихся (заработная плата) также неминуемо ведет к хаосу в экономике и к ее разрушению;

в) инерционность капитала, его медленное реагирование на изменения нормы прибыли и платежеспособного спроса также делает экономическую систему неустойчивой и в конечном итоге ведет к ее разрушению.

В заключение отметим еще одно важное направление в изучении поведения решений системы (5.33) — исследование бегущих волн, связанных с перераспределением капитала и платежеспособного спроса в пространстве технологий. Первые результаты численных экспериментов, подтверждающие существование таких волн в системе (5.33), приведены в работе [102].

Дальнейшие исследования решений полученной системы уравнений в более общих случаях, учитывающих многомерное пространственное распределение переменных и отличные от постоянных коэффициенты диффузии капитала и платежеспособного спроса, несомненно приведут и к другим интересным результатам, важным для понимания как общих законов эволюции экономических систем, так и происходящих в них хаотических процессов.

Глава 6. Управление хаосом в системах дифференциальных уравнений

Присутствие хаоса является неотъемлемой частью большинства нелинейных динамических систем, описывающих достаточно сложные физические, химические, биологические и социальные процессы и явления. Хаотические системы характеризуются повышенной чувствительностью к малым возмущениям системных параметров и начальных условий, вследствие чего в течение многих лет поведение таких систем считалось непредсказуемым и неуправляемым. Существовало мнение, что достигнуть желаемого поведения системы можно только подавив в ней хаос пусть даже большими и дорогостоящими изменениями в самой системе, ведущими к изменению ее динамики в целом. Поставленная задача сводилась к выбору управляющих воздействий либо в разомкнутой форме (*программное управление*), либо в виде *обратной связи* по состоянию или выходу с целью приведения решения системы к заданному периодическому виду или с целью *синхронизации* решения системы с решением некоторой другой системы, обладающей нужными регулярными свойствами (см. многочисленные ссылки в [103] и в обзорах [104–105]). Другими словами, решалась задача *стабилизации* заданной или желаемой траектории в системе с хаотическим поведением.

Однако в последние годы пришло понимание особой роли хаоса в самоорганизации различных природных явлений [11–16, 103–108]. Было осознано, что хаос не только не мешает, а скорее является непременным условием работоспособности сложных систем, таких, например, как человеческий мозг [107–109]. Только благодаря наличию хаотического аттрактора, содержащего, как правило, бесконечное число неустойчивых периодических траекторий (циклов), можно добиться качественного изменения динамики системы (переходя из окрестности одного цикла в окрестность другого) малыми возмущениями системных параметров.

В связи с этим в проблеме управления хаосом естественным образом появилась задача стабилизации не априори заданных или желаемых траекторий хаотических динамических систем, а именно тех неустойчивых периодических траекторий, бесконечное число которых вплетено в паутину хаотического (нерегулярного) аттрактора. Причем, какая-либо информация о положении этих траекторий в фазовом пространстве, о периоде и амплитуде их колебаний практически отсутствует. В настоящей главе рассмотрены методы решения именно этой последней и наиболее интересной, с нашей точки зрения, задачи, которая сводится к локализации (обнаружению) и стабилизации неустойчивых периодических траекторий (в частности, стационарных состояний) хаотических динамических систем (в том числе и хаотических отображений).

В п. 6.1 представлены наиболее известные и широко цитируемые в современной литературе методы решения поставленной задачи. Это, в первую очередь, OGY-метод, основанный на линеаризации отображения Пуанкаре, и метод Пирагаса, опирающийся на построение обратной связи с запаздыванием, близким к периоду существующего неустойчивого периодического решения. В п. 6.2 изложен метод Магницкого, заключающийся в построении обратной связи в расширенном фазовом пространстве, т.е. в построении в пространстве большей размерности некоторой динамической системы, для которой искомая неустойчивая периодическая траектория исходной хаотической системы является проекцией некоторой ее асимптотически (орбитально асимптотически) устойчивой периодической траектории. Область применения последнего метода оказалась чрезвычайно широкой: хаотические отображения, хаотические динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, распределенные хаотические динамические системы, динамические системы с запаздывающим аргументом [110–115]. В п. 6.3 рассмотрена часто связанная с проблемой управления хаотическими системами задача реконструкции хаотической системы по траектории нерегулярного аттрактора.

6.1. Методы Отта-Гребоджи-Йорке и Пирагаса.

Метод Отта-Гребоджи-Йорке (OGY-метод), предложенный и развитый, в основном, в работах [116–117], заключается в стабилизации неустойчивого периодического решения хаотической системы обыкновенных дифференциальных уравнений путем применения дискретных управляющих воздействий в виде обратной связи в некотором сечении Пуанкаре в окрестности неподвижной точки отображения Пуанкаре, соответствующей искомому циклу. Вид обратной связи определяется линеаризацией отображения Пуанкаре в неподвижной точке. Метод, предложенный Пирагасом в [118], использует обратную связь с запаздыванием, причем время запаздывания должно быть близким к периоду искомого неустойчивого периодического решения.

6.1.1. OGY-метод. Рассмотрим гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu),\ x \in M \subset \mathbb{R}^m,\ \mu \in L \subset \mathbb{R}^k,\ F \in C^\infty, \qquad (6.1)$$

заданных в фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства $\mathbb{R}^k$. Пусть неустойчивый предельный цикл $x^*(t, \mu^*)$ является искомым решением семейства систем (6.1), которое при том же значении параметра $\mu = \mu^*$ имеет регулярный или сингулярный аттрактор. Построим сечение Пуанкаре S, проходящее

через точку $x_0 = x^*(0, \mu^*)$ цикла $x^*(t, \mu^*)$ трансверсально к нему. Рассмотрим управляемое отображение Пуанкаре $x \to P(x, \mu)$, в котором $P(x, \mu)$ есть точка первого возвращения на поверхность S траектории системы (6.1), начинающейся в точке x при значении вектора параметров μ, являющегося в этом случае вектором управляющих параметров. (Для сложного цикла, имеющего несколько оборотов, необходимо рассматривать соответствующую итерацию отображения). Применяя последовательность таких управляемых отображений, получим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = P(x_n, \mu_n), \tag{6.2}$$

где $x_n = x(t_n)$, t_n – момент времени n-го пересечения поверхности S, а μ_n – значение вектора управляющих параметров на промежутке между t_n и t_{n+1}.

Заменим теперь отображение (6.2) близким к нему линеаризованным в точке (x_0, μ^*) отображением

$$y_{n+1} = Ay_n + Bu_n, \; A = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, \mu^*), \; B = \frac{\partial P}{\partial \mu}(x_0, \mu^*), \tag{6.3}$$

где $y_n = x_n - x_0$, $u_n = \mu_n - \mu^*$. Для линейной системы (6.3) выберем стабилизирующее управление u_n в виде линейной обратной связи по состоянию: $u_n = -Cy_n$. Тогда из (6.3) получим, что

$$y_{n+1} = (A - BC)y_n. \tag{6.4}$$

Таким образом, неподвижная точка x_0 отображения Пуанкаре и, следовательно, искомый неустойчивый цикл $x^*(t, \mu^*)$ системы (6.1) будут стабилизированы, если определить матрицу C так, чтобы матрица $(A - BC)$ имела собственные значения по модулю меньше единицы.

Преимуществом OGY-метода является то, что стабилизация неподвижной точки отображения Пуанкаре и предельного цикла системы дифференциальных уравнений достигается в нем малыми управляющими воздействиями в дискретные моменты времени. Однако, большим недостатком является то, что неподвижная точка отображения Пуанкаре неустойчива. Поэтому для применимости метода необходимо не только точно знать матрицу A (что для систем дифференциальных уравнений возможно только численно), но также и ее собственные значения и собственные векторы, соответствующие устойчивому и неустойчивому многообразиям неподвижной точки отображения Пуанкаре. Траекторию при этом необходимо на каждой итерации корректировать в сторону устойчивого многообразия неподвижной точки. Большой проблемой является также выбор начальной точки. В OGY-методе неявно предполагается, что система (6.1) имеет хаотический аттрактор в том смысле, что он является замыканием всех содержащихся в нем периодических траекторий, откуда следует, что любая

траектория с любым начальным условием со временем обязательно попадет в некоторую малую окрестность искомого цикла. Но это далеко не так. Многие сингулярные аттракторы, рассмотренные в настоящей книге, этим свойством не обладают. Простейший пример — аттрактор Фейгенбаума, сосуществующий вместе с бесконечным числом неустойчивых циклов и лежащий на конечном расстоянии от каждого из них. Многочисленные ссылки на работы, посвященные развитию OGY-метода и различным его модификациям можно найти в обзорах [104, 105].

6.1.2. Метод Пирагаса. Рассмотрим гладкое семейство нелинейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu, u),$$

$$x \in M \subset \mathbb{R}^m,\ \mu \in L \subset \mathbb{R}^k,\ u \in U \subset \mathbb{R}^n,\ F \in C^\infty, \qquad (6.5)$$

зависящих от вектора управляющих параметров u. Пусть требуется стабилизировать неустойчивый предельный цикл $x^*(t, \mu^*)$ периода T, являющийся решением системы семейства (6.5) при $u = 0$ и $\mu = \mu^*$. Пусть при тех же значениях параметров $u = 0$ и $\mu = \mu^*$ семейство (6.5) имеет регулярный или сингулярный аттрактор. Тогда задача стабилизации цикла $x^*(t, \mu^*)$ может быть решена в некоторых случаях выбором простого закона обратной связи с запаздыванием вида

$$u(t) = K(x(t) - x(t - T)), \qquad (6.6)$$

где K — матрица коэффициентов передачи. Если начальное условие $x(0)$ выбирать лежащим в достаточно малой окрестности орбиты цикла, то решение $x(t)$ системы

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \mu^*, K(x(t) - x(t - T))) \qquad (6.7)$$

с обратной связью (6.6) при $\mu = \mu^*$ может сходиться к искомому неустойчивому циклу $x^*(t, \mu^*)$.

Аналитическое исследование асимптотических свойств решений замкнутой системы (6.7) является довольно трудной задачей. Поэтому до недавнего времени были известны исключительно численные и экспериментальные результаты, относящиеся к свойствам и области применимости метода Пирагаса (см. литературу в обзоре [105]). Проблема нахождения достаточных условий, гарантирующих применимость метода, до сих пор остается нерешенной. Кроме того, большим недостатком закона управления (6.6) является его чувствительность к выбору времени запаздывания. Так что, если период T искомого цикла заранее неизвестен, а именно эта ситуация типична для хаотических систем дифференциальных уравнений, то получить требуемую сходимость можно только в исключительных случаях, удачно оценив величину периода какими-либо эвристическими методами.

6.2. Метод Магницкого.

Рассмотрим подробно метод Магницкого локализации и стабилизации неустойчивых особых точек и периодических решений хаотических систем дифференциальных уравнений и дискретных хаотических динамических систем, предложенный в работах [119–122] и развитый затем в [110– 115, 123]. Метод основан на построении координатно-параметрической обратной связи в расширенном пространстве, что делает возможным поиск устойчивых (в отличие от OGY-метода) неподвижных точек или асимптотически орбитально устойчивых (в отличие от метода Пирагаса) периодических траекторий. Кроме того метод не имеет проблем с выбором начального приближения и, в отличие от OGY-метода и метода Пирагаса, применим к хаотическим системам дифференциальных уравнений и в случае отсутствия какой-либо информации о величине периода и положении искомого неустойчивого цикла в фазовом пространстве. Областью применимости метода являются хаотические отображения, хаотические системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а также уравнения с запаздывающим аргументом. Все алгоритмы применимости метода теоретически обоснованы и аналитически доказаны.

6.2.1. Локализация и стабилизация неустойчивых неподвижных точек и циклов хаотических отображений. Рассмотрим семейство m-мерных нелинейных гладких отображений

$$z_{n+1} = F(z_n, \mu), \quad z \in \mathbb{R}^m, \tag{6.8}$$

где μ — скалярный параметр, F — гладкая по совокупности переменных векторная функция. Пусть точки $z_1^*(\mu)$, $z_2^*(\mu)$, ..., $z_k^*(\mu)$ являются k-периодическими точками отображения (6.8), для которых имеет место

$$z_2^*(\mu) = F(z_1^*(\mu), \mu),\ z_3^*(\mu) = F(z_2^*(\mu), \mu),\ \ldots$$
$$\ldots,\ z_1^*(\mu) = F(z_k^*(\mu), \mu). \tag{6.9}$$

При $k = 1$ точка $z_1^*(\mu)$ является неподвижной точкой отображения (6.8). Обычно существует критическое значение μ_k^* системного параметра такое, что цикл (6.9) является устойчивой периодической траекторией отображения (6.8) в области $\mu \le \mu_k^*$, а в области $\mu > \mu_k^*$ цикл (6.9) является неустойчивой периодической траекторией отображения (6.8), которое имеет в этом случае другие регулярные или нерегулярные аттракторы. Задача состоит в том, чтобы локализовать (определить местоположение) и стабилизировать неустойчивую периодическую траекторию (6.9) отображения (6.8) в области $\mu > \mu_k^*$ малыми возмущениями системного параметра μ. Заметим, что каждая точка $z_i^*(\mu)$, $i = 1, \ldots, k$, цикла (6.9) является устойчивой неподвижной точкой отображения F^k в области $\mu \le \mu_k^*$. Однако в области

$\mu > \mu_k^*$ каждая точка $z_i^*(\mu)$ является неустойчивой неподвижной точкой отображения F^k.

Рассмотрим $(m+1)$-мерное отображение

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= F^k(z_n, \mu) + \varepsilon(q_n - \mu), \\ q_{n+1} &= Q(z_n, \mu) + \beta(q_n - \mu) + \mu, \end{aligned} \tag{6.10}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}$, $Q(z_i^*(\mu), \mu) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Ясно, что если цикл (6.9) является периодической траекторией отображения (6.8), то каждая точка $(z_i^*(\mu), \mu)$, $i = 1, \ldots, k$, является неподвижной точкой отображения (6.10). Вычислим матрицу Якоби отображения (6.10) в точке $(z_i^*(\mu), \mu)$

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} \partial F^k/\partial z & \varepsilon \\ \partial Q/\partial z & \beta \end{pmatrix}.$$

Все собственные значения матрицы $J(\mu)$ в точке μ_k^* равны нулю тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{C_{m+1}^l} J_{li}(\mu_k^*) = 0, \quad l = 1, \ldots, m+1, \tag{6.11}$$

где $J_{li}(\mu)$ есть i-й главный минор порядка l матрицы $J(\mu)$. Поэтому значения управляющих параметров β и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)^{\mathrm{T}}$ в (6.10) должны удовлетворять системе из $m+1$ линейных уравнений (6.11). В частности, очевидно, что один из управляющих параметров β отображения (6.10) может быть вычислен непосредственно из первого уравнения $\mathrm{tr}J(\mu_k^*) = 0$ системы (6.11)

$$\beta = -\mathrm{tr}J_0(\mu_k^*) = -\mathrm{tr}\left\{ \frac{\partial F^k(z_i^*(\mu_k^*), \mu_k^*)}{\partial z} \right\}.$$

Таким образом, исходя из гладкости отображения F, можно утверждать, что если система (6.11) имеет решение, то существует область $\mu_k^* \le \mu \le \mu_{k1}^*$ такая, что для каждого $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ абсолютные величины всех собственных значений матрицы $J(\mu)$ будут меньше единицы. Отсюда вытекает

Теорема 6.1. *Если определитель D системы линейных уравнений* (6.11) *не равен нулю, тогда существует значение $\mu_{k1}^* > \mu_k^*$ системного параметра такое, что для каждого $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ точка $(z_i^*(\mu), \mu)$ является асимптотически устойчивой неподвижной точкой отображения* (6.10) *и она может быть локализована и стабилизирована в области $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ с помощью итерационного процесса* (6.10) *с начальными условиями $q_0 = \mu$, $z_0 = z_i^*(\mu_k^*)$. Любая другая*

k-периодическая точка $z_j^*(\mu)$, $j \neq i$ *отображения* (6.8) *также может быть локализована и стабилизирована в области* $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ *с помощью уравнений* (6.9).

Используя значение μ_{k1}^* в качестве нового критического значения системного параметра и вычисляя новую матрицу Якоби $J(\mu_{k1}^*)$, можно скорректировать значения управляющих параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \beta$ в (6.10) и вновь локализовать и стабилизировать точку $z_i^*(\mu)$ цикла (6.9) в новой области $\mu \in [\mu_{k1}^*, \mu_{k2}^*]$. Этот процесс может быть продолжен на весь интервал существования периодической траектории (6.9) отображения (6.8).

Отображение $Q(z, \mu)$ в (6.10) можно выбрать, в частности, в виде

$$Q(z, \mu) = a_1(F_1^k(z, \mu) - z_1) + \ldots + a_m(F_m^k(z, \mu) - z_m),$$

где параметры a_i, $i = 1, \ldots, m$, выбираются равными нулю или единице с тем, чтобы обеспечить выполнение условия $D \neq 0$ для определителя D линейной системы (6.11).

Общий подход, изложенный выше, может быть конкретизирован в случае, когда отображение F в (6.8) является одно- или двумерным.

Теорема 6.2. *Пусть* $z_i^*(\mu)$ *— k-периодическая точка одномерного хаотического отображения* (6.8) *и пусть* μ_k^* *— критическое значение системного параметра такое, что*

$$\nu = \partial F^k(z_i^*(\mu_k^*), \mu_k^*)/\partial z \neq 1.$$

Тогда существует $\mu_{k1}^* > \mu_k^*$ *такое, что для любого* $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ *точка* $(z_i^*(\mu), \mu)$ *является асимптотически устойчивой неподвижной точкой двумерного отображения*

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= F^k(z_n, \mu) + \varepsilon(q_n - \mu), \\ q_{n+1} &= F^k(z_n, \mu) - z_n + \beta(q_n - \mu) + \mu, \end{aligned} \tag{6.12}$$

где $\beta = -\nu$, $\varepsilon = \nu^2/(1 - \nu)$.

Заметим, что величина

$$\nu = \frac{\partial F}{\partial z}(z_1^*(\mu_k^*), \mu_k^*) \times \ldots \times \frac{\partial F}{\partial z}(z_k^*(\mu_k^*), \mu_k^*)$$

является одной и той же для всех точек $z_i^*(\mu)$ цикла (6.9) отображения (6.8).

Рассмотрим в качестве примера логистическое отображение

$$z_{n+1} = \mu z_n(1 - z_n), \quad 3 < \mu \leq 4. \tag{6.13}$$

Неподвижная точка $z^*(\mu) = 1 - 1/\mu$ отображения (6.13) является неустойчивой стационарной точкой в области $\mu > \mu^* = 3$. Более того,

если $\mu > 3.57$, то отображение (6.13) имеет хаотическое поведение. Численные эксперименты показали, что можно локализовать и стабилизировать неподвижную точку $z^*(\mu)$ отображения (6.13) на интервале $3 < \mu \leq 3.6$ итерационным процессом (6.12) с $\beta = -F_z = 1$ и $\varepsilon = 0.5$, вычисленными в точке $\mu^* = 3$. Затем можно локализовать и стабилизировать неподвижную точку на интервале $3.6 < \mu \leq 4.25$ параметрами $\beta = 1.6$ и $\varepsilon = 1$, вычисленными в точке $\mu_1^* = 3.6$.

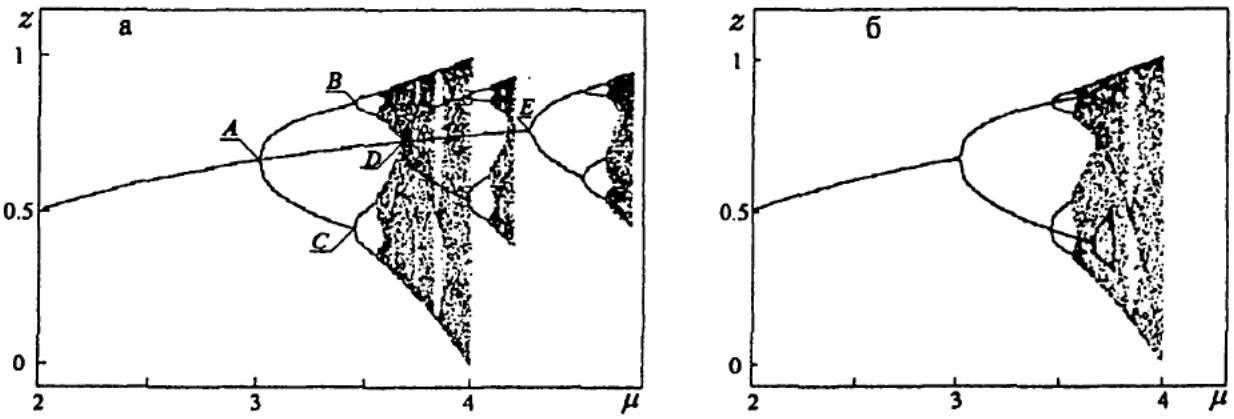

Рис. 6.1. Бифуркационная диаграмма логистического отображения (6.13) и стабилизирующей его системы (6.12) при $k = 1(а)$ и при $k = 2(б)$. Точки A,B,C соответствуют бифуркациям удвоения периода отображения (6.13), а точки D,E — бифуркациям удвоения периода стабилизирующего отображения (6.12). Участки траектории $A - D$ и $D - E$ получены соответственно при первой и второй итерациях процесса стабилизации отображения (6.12) соответственно на интервалах $3 \leq \mu \leq 3.6$ и $3.6 \leq \mu \leq 4.25$.

На последнем интервале отображение (6.13) имеет хаотическое поведение. На рис. 6.1а изображены бифуркационная диаграмма уравнения (6.13) и системы (6.12) в случае $k = 1$ при выборе отмеченных выше двух наборов управляющих параметров β и ε.

Точки

$$z_1^*(\mu) = \frac{(\mu+1)-\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}, \qquad z_2^*(\mu) = \frac{(\mu+1)+\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \tag{6.14}$$

являются точками неустойчивого цикла периода 2 отображения (6.13) при $\mu > \mu^* = 1 + \sqrt{6}$.

Численные эксперименты показали, что можно локализовать и стабилизировать двукратный цикл (6.14) отображения (6.13) на интервале $\mu^* < \mu \leq 3.58$ с помощью итераций (6.12) при $k = 2$ с $\beta = -\nu = 1$, $\varepsilon = 0.5$, вычисленными в точке μ^* (рис. 6.1б). Напомним, что отображение (6.13) имеет хаотическое поведение вблизи правого конца этого интервала (при $\mu > 3.57$).

Стабилизация изложенным методом неустойчивых циклов логистического отображения большого периода проведена в работе [124]. В работе [125] метод применен для поиска и стабилизации неустойчивых

циклов системы Лоренца, лежащих в окрестности петли сепаратрисы седло-узла (гомоклинической бабочки), а в работе [126] — для поиска и стабилизации седловых циклов в системе Лоренца и в системе Чуа.

Теорема 6.3. *Пусть* $(x_i^*(\mu), y_i^*(\mu))$ *— k-периодическая точка двумерного хаотического отображения* (6.8) *с* $F = \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_n, \mu) \\ f_2(x_n, y_n, \mu) \end{pmatrix}$ *и пусть* μ_k^* *— критическое значение системного параметра такое, что определитель*

$$D \equiv [a_1^2 f_{1y}^k - a_1 a_2 (f_{1x}^k - f_{2y}^k) - a_2^2 f_{2x}^k](1 - \mathrm{tr} J_0 + \det J_0) \neq 0,$$

где $J_0 = D_z F^k$ *— матрица Якоби отображения* F^k, *а* f_{1x}^k, f_{1y}^k, f_{2x}^k, f_{2y}^k *— частные производные отображения* $F^k = (f_1^k, f_2^k)^{\mathrm{T}}$ *в точке* $\left(x_i^*(\mu_k^*), y_i^*(\mu_k^*)\right)$. *Тогда существует* $\mu_{k1}^* > \mu_k^*$ *такое, что для любого* $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ *точка* $(x_i^*(\mu), y_i^*(\mu), \mu)$ *является асимптотически устойчивой неподвижной точкой трехмерного отображения*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1^k + \varepsilon_1(q_n - \mu), \\ y_{n+1} &= f_2^k + \varepsilon_2(q_n - \mu), \\ q_{n+1} &= a_1[f_1^k - x_n] + a_2[f_2^k - y_n] + \beta(q_n - \mu) + \mu, \end{aligned} \tag{6.15}$$

где $\beta = -\mathrm{tr} J_0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = -\{&[a_1 f_{1y}^k - a_2 f_{1x}^k + a_2(\mathrm{tr} J_0 - 1)]\mathrm{tr} J_0 \det J_0 \\ &+ (a_1 f_{1y}^k - a_2 f_{1x}^k + a_2 \det J_0)[\det J_0 - (\mathrm{tr} J_0)^2]\}/D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \{&[a_2 f_{2x}^k - a_1 f_{2y}^k + a_1(\mathrm{tr} J_0 - 1)]\mathrm{tr} J_0 \det J_0 \\ &+ (a_2 f_{2x}^k - a_1 f_{2y}^k + a_1 \det J_0)[\det J_0 - (\mathrm{tr} J_0)^2]\}/D. \end{aligned}$$

Равенство $c \equiv 1 - \mathrm{tr} J_0 + \det J_0 = 0$ означает, что одно или два собственных значения матрицы Якоби отображения F^k равны $+1$ в точке $\mu = \mu^*$. Если $c \neq 0$ и $f_{1y}^k \neq 0$ или $f_{2x}^k \neq 0$, то можно выбрать в отображении (6.15) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ или $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, соответственно. Если $c \neq 0$ и $f_{1y}^k = f_{2x}^k = 0$, а $f_{1x}^k \neq f_{2y}^k$, тогда можно взять в (6.15) $a_1 = a_2 = 1$.

В качестве примера рассмотрим отображение Хенона

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu + 0.3 y_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Неподвижная точка $x^*(\mu) = y^*(\mu) = -0.35 + \sqrt{0.1225 + \mu}$ отображения (6.16) является неустойчивой стационарной точкой в области

$\mu > \mu^* = 0.3675$. При $\mu = \mu^*$ ни одно из собственных значений Якобиана отображения (6.16) не равно $+1$, а так как $k = 1$ и $f_{2x} \equiv 1$, то можно положить в (6.15) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Отображение (6.16) получается из отображения (1.7) главы 1 заменой $ax_n \to x_n$; $ay_n/b \to y_n$; $a \to \mu$. Поэтому, как отмечено в главе 1, при $\mu = 1.4$ оно имеет странный хаотический аттрактор. Численный эксперимент показал, что, используя итерационный процесс (6.15), можно локализовать и стабилизировать неподвижную точку $\big(x^*(\mu), y^*(\mu)\big)$ отображения (6.16) на интервале $\mu^* < \mu \leq 0.75$ при

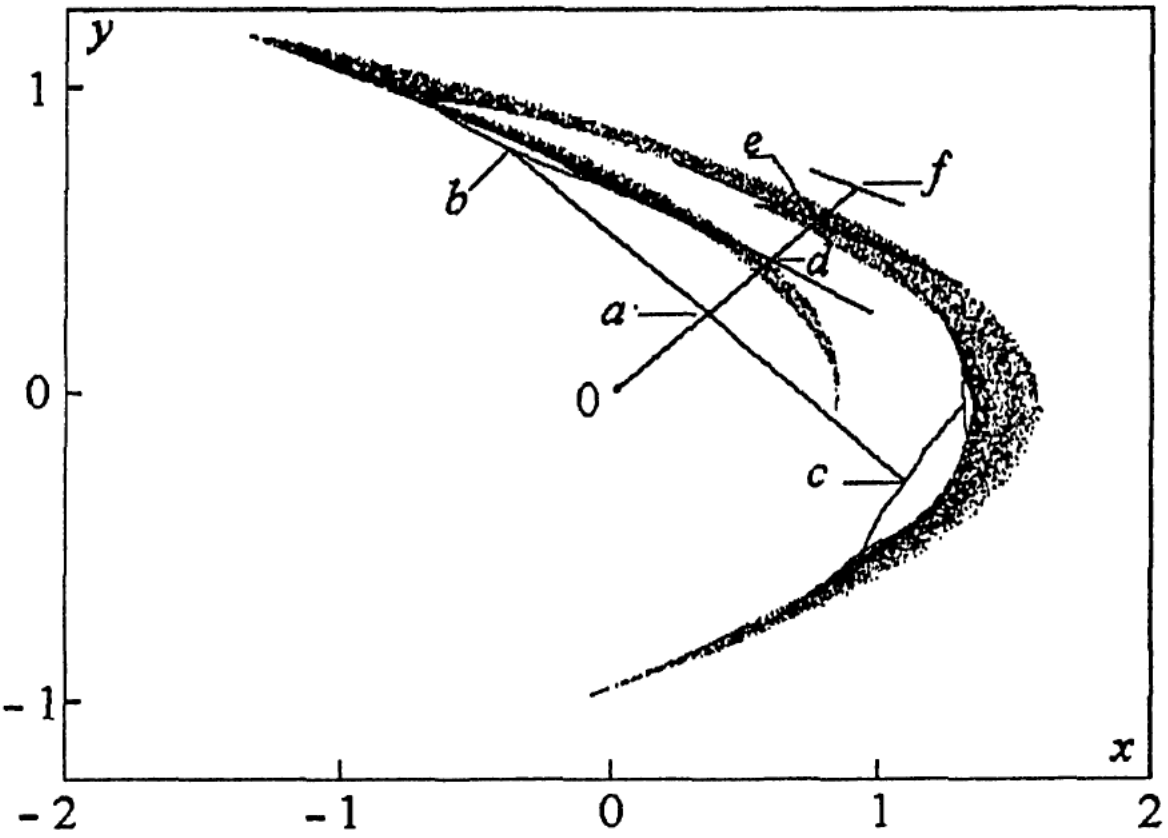

Рис. 6.2. Двумерная бифуркационная диаграмма отображения Хенона (6.16) и стабилизирующей его системы (6.15). В точках a, b, c наблюдаются бифуркации удвоения периода отображения (6.16), а в точках d, e, f — бифуркации удвоения периода стабилизирующего отображения (6.15).

$\beta = 0.7$, $\varepsilon_1 = -0.376$, $\varepsilon_2 = 0.414$, вычисленных в точке μ^*. Затем с помощью итерационного процесса (6.15) можно стабилизировать неподвижную точку отображения (6.16) на интервале $0.75 < \mu \leq 1.1$ с новыми управляющими параметрами $\beta = 1.168$, $\varepsilon_1 = -0.964$, $\varepsilon_2 = 0.7$, вычисленными в точке $\mu_1^* = 0.75$. Наконец, можно локализовать и стабилизировать неподвижную точку $\big(x^*(\mu), y^*(\mu)\big)$ отображения Хенона (6.16) на интервале $1.1 < \mu \leq 1.43$, используя итерационный процесс (6.15) с новыми управляющими параметрами $\beta = 1.512$, $\varepsilon_1 = -1.622$, $\varepsilon_2 = 0.96$, вычисленными в точке $\mu_2^* = 1.1$. Последний интервал содержит значение $\mu = 1.4$ параметра системы, при котором отображение Хенона имеет хорошо известный странный аттрактор (см., например,

главу 1, а также [11, 15, 127]). На рис. 6.2 изображена двумерная бифуркационная диаграмма отображения Хенона (6.16) и стабилизирующей его системы (6.15) при $k = 1$.

Точки

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0.35 + \sqrt{\mu - 0.3675}, \quad y_1^* = 0.35 - \sqrt{\mu - 0.3675}, \\ x_2^* &= 0.35 - \sqrt{\mu - 0.3675}, \quad y_2^* = 0.35 + \sqrt{\mu - 0.3675} \end{aligned} \tag{6.17}$$

образуют неустойчивый цикл периода 2 отображения Хенона в области $\mu > \mu^* = 0.9125$. Если $\mu = \mu^*$, то ни одно из собственных значений Якобиана отображения F^2 не равно $+1$. Так как $f_{2x}^2 \neq 0$, то можно положить в (6.15) при $k = 2$ значения $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Численные эксперименты показали, что можно локализовать и стабилизировать цикл (6.17) отображения (6.16) в интервале $\mu^* < \mu \leq 0.97$ итерациями (6.15) при значениях управляющих параметров β, ε_1, ε_2, вычисленных в точке μ^*. Аналогично можно стабилизировать цикл (6.17) отображения (6.16) в интервале $0.97 < \mu \leq 1.1$ итерациями (6.15) с новыми значениями управляющих параметров β, ε_1, ε_2, вычисленными в точке $\mu_1^* = 0.97$. Последний интервал содержит значения параметра μ, при которых отображение Хенона уже имеет странный аттрактор.

Интересной иллюстрацией к излагаемому методу может служить пример стабилизации неподвижной точки в упрощенной двумерной модели газа Лоренца. Эта модель описывает траекторию материальной точки при упругих столкновениях с неподвижными дисками и является частным случаем рассевающего биллиарда Синая [128–129]. В биллиарде Синая близкие вначале траектории с течением времени быстро расходятся, а угол между соседними траекториями первоначально параллельного пучка возрастает после каждого отражения от границы. Поскольку биллиардная область конечна, траектории начинают со временем многократно пересекаться, что и приводит к хаосу.

Для упрощенной плоской модели газа Лоренца, в которой движение материальной точки рассматривается внутри области, ограниченной тремя касающимися друг друга кругами единичного радиуса, уравнения, описывающие траекторию частицы после n ее столкновений с границей, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \psi_n - \pi/6 + \arcsin(2\cos(\varphi_n + \psi_n) - \cos\psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \pi/2 + \arcsin(2\cos(\varphi_n + \psi_n) - \cos\psi_n), \end{aligned} \tag{6.18}$$

где φ — угловое расстояние от точки столкновения частицы с диском до точки касания дисков, ψ — угол, который образует траектория до столкновения с траекторией после столкновения с диском. Очевидно, что углы φ_n и ψ_n однозначно определяют положение частицы внутри области после n-го столкновения. Неподвижная точка $z^* = (\varphi^*, \psi^*) = (\pi/6, \pi/3)$ является неустойчивой. Важно отметить, что отображение (6.18) не содержит никаких параметров, и положение точки z^* является независимым.

Для решения задачи стабилизации такой неподвижной точки введем искусственно в систему (6.18) некоторые параметры μ и r и рассмотрим отображение

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \psi_n - \pi/6 + \\ &\quad + \arcsin\big((1+\mu)\cos(\varphi_n+\psi_n) - \mu\cos\psi_n + r(\mu-1)\big), \\ \psi_{n+1} &= \pi/2 + \\ &\quad + \arcsin\big((1+\mu)\cos(\varphi_n+\psi_n) - \mu\cos\psi_n + r(\mu-1)\big).\end{aligned} \tag{6.19}$$

Очевидно, что при $\mu = 1$ отображение (6.19) полностью совпадает с исходным (6.18). Отметим, что при $\mu_0 = 0$ и $r_0 = 0.5 + \sqrt{13}/4$ неподвижная точка $z^* = (\alpha(\mu_0),\ \pi/3)$ является устойчивой неподвижной точкой отображения (6.19), причем существует значение $0 < \mu_1^* < 1$ такое, что данная точка устойчива при $\mu \in [0, \mu_1^*]$ и неустойчива при $\mu > \mu_1^*$. Фиксируем значение $r = r_0$. Тогда задача состоит в том, чтобы стабилизировать неподвижную точку $z^* = (\alpha(\mu),\ \pi/3)$ отображения (6.19) при $\mu = 1$, где

$$\alpha(\mu) = \arccos\frac{(\mu-1)(0.5-r)}{\mu+1} - \pi/3.$$

Используя итерационный процесс (6.15), численно показано, что при значении управляющих параметров $\varepsilon_1 = 0.014$, $\varepsilon_2 = 0.67$, $\beta = 1.29$, вычисленных при $\mu_1^* = 0.2863$, можно локализовать и стабилизировать неподвижную точку на отрезке [0.2863; 0.51]. Затем при $\varepsilon_1 = 0.236$, $\varepsilon_2 = 1.127$, $\beta = 1.82$, вычисленных при $\mu_2^* = 0.51$, неподвижная точка будет стабилизирована на интервале [0.51; 0.77], а значения $\varepsilon_1 = 0.493$, $\varepsilon_2 = 1.54$, $\beta = 2.29$, определенные при $\mu_3^* = 0.77$, обеспечивают устойчивость неподвижной точки z^* отображения (6.19) при $\mu \in [0.77; 1]$.

6.2.2. Локализация и стабилизация неустойчивых неподвижных точек хаотических динамических систем. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{6.20}$$

задаваемую семейством гладких по совокупности переменных отображений F. Пусть $x^*(\mu)$ — неподвижная точка системы (6.20), где μ — скалярный параметр. Как и в п. 6.2.1 будем предполагать, что существует критическое значение μ^* системного параметра такое, что точка $x^*(\mu)$ является устойчивой неподвижной точкой системы (6.20) при $\mu \le \mu^*$, а при $\mu > \mu^*$ точка $x^*(\mu)$ становится неустойчивой неподвижной точкой системы (6.20), которая в этом случае имеет другие регулярные или хаотические аттракторы. Проблема также состоит в локализации и стабилизации неустойчивой неподвижной точки $x^*(\mu)$

системы (6.20) при значениях $\mu > \mu^*$ с помощью малых возмущений параметра μ.

Рассмотрим $(m+1)$-мерную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,\mu) + \varepsilon(q-\mu), \\ \dot{q} &= Q(x,\mu) + \beta(q-\mu), \end{aligned} \tag{6.21}$$

где $Q(x_*(\mu),\mu) = 0$, а $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)^{\mathrm{T}}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — управляющие параметры системы. Ясно, что если точка $x^*(\mu)$ является неподвижной точкой системы (6.20), то точка $(x^*(\mu),\mu)$ будет неподвижной точкой системы (6.21). Вычислим Якобиан правой части отображения (6.21) в точке $(x^*(\mu),\mu)$

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x & \varepsilon \\ \partial Q/\partial x & \beta \end{pmatrix}_{x=x^*(\mu),\, q=\mu}.$$

Характеристический полином матрицы $J(\mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(\lambda,\mu) &= \det[J(\mu) - \lambda E] = \\ &= (-\lambda)^{m+1} + b_1(-\lambda)^m + \ldots + b_m(-\lambda) + b_{m+1}, \end{aligned} \tag{6.22}$$

где $b_k = \sum\limits_{i=1}^{C_{m+1}^k} J_{ki}(\mu)$, J_{ki} — главный минор порядка k матрицы $J(\mu)$. В частности, $b_1 = \mathrm{tr}J(\mu)$, $b_{m+1} = \det J(\mu)$.

Потребуем, чтобы полином (6.22) имел в точке μ^* все корни λ равными некоторому отрицательному значению $d < 0$. В этом случае $P(\lambda,\mu^*) = (d-\lambda)^{m+1}$, а $b_k = C_{m+1}^k d^k$, $k = 1,\ldots,m+1$. Тогда управляющие параметры ε_1, ..., ε_m, β должны удовлетворять системе из $m+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{C_{m+1}^k} J_{ki}(\mu^*) = C_{m+1}^k d^k, \quad k = 1,\ldots,m+1. \tag{6.23}$$

В частности, управляющий параметр β определяется непосредственно из уравнения $\mathrm{tr}J(\mu) = (m+1)d$:

$$\beta = -\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial F(x^*(\mu^*),\mu^*)}{\partial x}\right\} + (m+1)d = -\mathrm{tr}J_0 + (m+1)d.$$

Исходя из гладкости семейства F в (6.20), можно утверждать, что имеет место

Теорема 6.4. *Если определитель D системы линейных уравнений (6.23) отличен от нуля, то существует область $\mu^* \le \mu \le \mu_1^*$*

такая, что для любого $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ *действительные части всех собственных значений матрицы* $J(\mu)$ *отрицательны, и точка* $(x^*(\mu), \mu)$ *является асимптотически устойчивой неподвижной точкой системы* (6.21). *Следовательно, неподвижная точка* $x^*(\mu)$ *динамической системы* (6.20) *может быть локализована и стабилизирована при значениях* $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ *с помощью решения системы* (6.21) *с начальными условиями* $x_0 = x^*(\mu^*)$, $q_0 = \mu$.

Используя μ_1^* в качестве нового критического значения системного параметра и вычисляя новый Якобиан $J(\mu_1^*)$, можно скорректировать значения управляющих параметров $\beta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ в (6.21) и снова локализовать и стабилизировать неподвижную точку $x^*(\mu)$ системы (6.20) при новых значениях $\mu \in [\mu_1^*, \mu_2^*]$. Этот процесс можно продолжить на весь интервал существования неподвижной точки системы (6.20).

В частном случае отображение $Q(x, \mu)$ в (6.21) может иметь вид

$$Q(x, \mu) = a_1 F_1(x, \mu) + \ldots + a_m F_m(x, \mu),$$

где коэффициенты $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, m$, выбираются из условия отличия от нуля определителя D системы $m + 1$ линейных уравнений (6.23) для управляющих параметров.

Замечание. Условие $\det J_0 \neq 0$ является необходимым условием применимости системы (6.21) для локализации и стабилизации неподвижных точек системы (6.20). Это следует из последнего уравнения $\det J(\mu^*) = d^{m+1}$ системы (6.23), которое можно представить в виде

$$\det J_0 \left(\beta - \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_i \right) = d^{m+1}.$$

Действительно, если $\det J_0$ равен нулю, то определитель D линейной системы (6.23) также обращается в нуль.

Для иллюстрации метода рассмотрим хаотическую динамическую систему Рёсслера (см.главы 1–3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - \mu). \end{aligned} \tag{6.24}$$

При $a = 0.5$ и $b = 0.75$ неподвижная точка $x^*(\mu)/a = -y^*(\mu) = z^*(\mu) = \mu/2 - \sqrt{\mu^2/4 - ab}$ системы (6.24) является неустойчивой при значениях $\mu > \mu^* = 1.375$, а при $\mu > 2.35$ система (6.24) имеет нерегулярный аттрактор, хорошо известный как аттрактор Рёсслера. Локализуем и стабилизируем неподвижную точку системы (6.24) с

помощью системы

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -(y+z) + \varepsilon_1(q-\mu),\\
\dot{y} &= x + ay + \varepsilon_2(q-\mu),\\
\dot{z} &= b + z(x-\mu) + \varepsilon_3(q-\mu),\\
\dot{q} &= -a_1(y+z) + a_2(x+ay) + a_3\big(b+z(x-\mu)\big) + \beta(q-\mu),
\end{aligned} \tag{6.25}$$

где можно положить $d=-1$, $a_1=1$, $a_2=a_3=0$. Численный эксперимент показал, что при значениях параметров $\beta=-5$, $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=7/3$, $\varepsilon_3=1/6$, вычисленных в точке μ^*, система (6.25) дает возможность локализовать и стабилизировать неподвижную точку системы (6.24) на интервале $\mu^* < \mu \le 4$, покрывающем всю область хаотического поведения системы Рёсслера.

6.2.3. Локализация и стабилизация неустойчивых циклов хаотических динамических систем. Данная задача является одной из важнейших задач, составляющих проблему управления хаосом. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = F(x,\mu), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{6.26}$$

задаваемую семейством гладких отображений F. Пусть $x^*(t,\mu)$ — замкнутая периодическая траектория (предельный цикл) системы (6.26), зависящая от системного параметра μ. Положим без ограничения общности, что существует критическое значение системного параметра μ^* такое, что траектория $x^*(t,\mu)$ является асимптотически орбитально устойчивым циклом системы (6.26) при $\mu \le \mu^*$, а при $\mu > \mu^*$ траектория $x^*(t,\mu)$ является неустойчивым циклом системы (6.26). Сама же система (6.26) в этом случае может иметь в качестве аттракторов другие устойчивые предельные циклы различных периодов, устойчивые торы, а при дальнейшем увеличении значений параметра μ возможно появление и нерегулярных аттракторов, свидетельствующих о хаотической динамике системы.

Задача состоит в локализации и стабилизации неустойчивого цикла $x^*(t,\mu)$ системы (6.26) малыми возмущениями системного параметра μ в области $\mu > \mu^*$ хаотического поведения траекторий системы при почти полном отсутствии информации о самом цикле $x^*(t,\mu)$. Основная идея метода решения данной задачи остается прежней — построение динамической системы в пространстве большей размерности, для которой неустойчивый цикл $x^*(t,\mu)$ системы (6.26) является проекцией некоторого ее асимптотически орбитально устойчивого в области $\mu > \mu^*$ предельного цикла.

Пусть цикл $x^*(t,\mu)$ системы (6.26) имеет период $T = T(\mu)$. Отметим, что при $\mu > \mu^*$ период цикла $x^*(t,\mu)$ также неизвестен, и определить его по решениям системы (6.26) невозможно. Рассмотрим

$(m+k+1)$-мерную систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y,\mu) + Z(y,t,\mu)E(q-\mu e), \\ \dot{q} &= DQ(y,s,t,\mu) + \beta(q-\mu e), \\ \dot{s} &= C^{\mathrm{T}}Q(y,s,t,\mu), \end{aligned} \tag{6.27}$$

где $s(t)$ — скалярная функция, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $q(t) \in \mathbb{R}^k$ — векторные функции, $1 \le k < m$; $D_{k\times m}$ и $E_{m\times k}$ — постоянные матрицы, вектор $e = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}^m$ — постоянный вектор, $\beta \in \mathbb{R}$. Отображения $Q(y,s,t,\mu)$ и $Z(y,t,\mu)$ определим следующим образом:

$$Q(y,s,t,\mu) = x(s,\mu) - x(0,\mu), \quad Z(y,t,\mu) = \frac{\partial y}{\partial x(0,\mu)}, \tag{6.28}$$

где $x(\tau,\mu)$ – решение системы (6.26) в момент τ при условии $x(t,\mu)=y$. Так как матрица $Z(y,t,\mu)$ в (6.28) представляет собой производную от решений системы (6.26) по начальным условиям, то $Z(y,t,\mu) = Z\big(x(t,\mu)\big)$, где $Z\big(x(\tau,\mu)\big)$ есть решение неавтономного матричного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{V}(\tau) = A\big(x(\tau,\mu)\big)V(\tau), \quad V(0) = I, \tag{6.29}$$

где $A\big(x(\tau,\mu)\big) = D_x F\big(x(\tau,\mu)\big)$. Таким образом, для любой точки $(y,t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ матрица $Z(y,t,\mu)$ в (6.27) может быть вычислена как решение матричного неавтономного уравнения (6.29) в момент t, взятое вдоль траектории $x(\tau,\mu)$ системы (6.26) такой, что $x(t,\mu) = y$.

Очевидно, что для всех t и для всех μ отображение $Q(x^*(t,\mu), T(\mu), t, \mu) = 0$. Следовательно, при любом μ (и, в частности, при $\mu > \mu^*$) вектор $u^*(t,\mu) = \big(x^*(t,\mu), \mu e, T(\mu)\big)^{\mathrm{T}}$ есть периодическое решение (цикл) расширенной системы (6.27). Теперь достаточно выбрать в (6.27) матрицы управляющих параметров E и D, вектор C и скаляр β так, чтобы цикл $u^*(t,\mu)$ стал асимптотически орбитально устойчивым предельным циклом системы (6.27) в некоторой окрестности параметра $\mu^* \le \mu \le \mu_1^*$. При этом вектор $y(t)$, представляющий первые m координат решения $u(t,\mu)$ системы (6.27) с начальными условиями, например,

$$u(0,\mu) = \big(y(0,\mu),\, q(0,\mu),\, s(0,\mu)\big)^{\mathrm{T}} = \big(x^*(0,\mu^*),\, \mu^* e,\, T(\mu^*)\big)^{\mathrm{T}}$$

будет стремиться к неустойчивому предельному циклу $x^*(t,\mu)$ системы (6.26) при всех $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$.

Теорема 6.5. *Существуют постоянные матрицы E и D управляющих параметров, вектор C, скаляр β, а также значение системного параметра $\mu_1^* > \mu^*$ такие, что цикл $u^*(t,\mu)$ является асимптотически орбитально устойчивым предельным циклом системы* (6.27) *при всех значениях параметра $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$.*

Доказательство. Линеаризуем систему (6.27) в окрестности решения $u^*(t,\mu)$, и пусть $K(t,\mu)$ — матрица линеаризации. Так как

$$\left.\frac{\partial Q(y,s,t,\mu)}{\partial y}\right|_{u^*(t,\mu)} = \left[Z(x^*(T,\mu)) - I\right] Z^{-1}\left(x^*(t,\mu)\right),$$

$$\left.\frac{\partial Q(y,s,t,\mu)}{\partial s}\right|_{u^*(t,\mu)} = \dot{x}^*(T,\mu),$$

то $K(t,\mu) =$

$$= \begin{pmatrix} A\left(x^*(t,\mu)\right) & Z\left(x^*(t,\mu)\right)E & 0 \\ D\left(Z(x^*(T,\mu)) - I\right)Z^{-1}\left(x^*(t,\mu)\right) & \beta I & D\dot{x}^*(T,\mu) \\ C^T\left(Z(x^*(T,\mu)) - I\right)Z^{-1}\left(x^*(t,\mu)\right) & 0 & C^T\dot{x}^*(T,\mu) \end{pmatrix}.$$

Линейная система первого приближения в окрестности решения $u^*(t,\mu)$ системы (6.27) примет вид

$$\dot{w}(t) = K(t,\mu)w(t), \tag{6.30}$$

где $w(t) = u(t,\mu) - u^*(t,\mu)$.

Так как матрица $Z\left(x^*(t,\mu)\right)$ является фундаментальной матрицей периодической линейной системы (6.29), то, как следует из теории Флоке, она имеет представление $Z\left(x^*(t,\mu)\right) = R(t)e^{Bt}$, где $R(t)$ — периодическая матрица периода $T = T(\mu)$ и $R(0) = R(T) = I$. Обозначим $\Lambda = \Lambda(\mu)$ жорданову форму матрицы B, так что $B = P\Lambda P^{-1}$. При любом значении системного параметра μ, лежащем в окрестности μ^*, матрица Λ имеет одно нулевое собственное значение. Кроме того, так как точка μ^* лежит на границе области устойчивости цикла $x^*(t,\mu)$ системы (6.26), то матрица Λ имеет по крайней мере еще одно собственное значение λ, пересекающее мнимую ось слева направо при $\mu = \mu^*$. Без ограничения общности будем считать, что этому условию удовлетворяют последние k $(1 \le k < m)$ собственных значений матрицы Λ. Следовательно, при $\mu = \mu^*$ имеем $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1,\ldots,m-k-1)$, $\lambda_{m-k} = 0$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ $(i = m-k+1,\ldots,m)$. Число k определяет порядок $(m+k+1)$ системы (6.27) и линеаризованной системы (6.30).

Предположим также, что матрица $e^{\Lambda T}$ имеет только одно собственное значение, равное единице при $\mu = \mu^*$ (мультипликатор цикла $x^*(t,\mu^*)$ системы (6.26)), так что $\lambda_i \neq 0$, $i = m-k+1,\ldots,m$. Представим решение $w(t)$ линейной системы (6.30) в виде

$$w(t) = \begin{pmatrix} R(t)P & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\overline{\Lambda}t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega(t) = G(t,\mu)\omega(t), \tag{6.31}$$

где $\overline{\Lambda}$ — матрица, совпадающая с правым нижним $k \times k$-квадратом матрицы Λ (матрица $e^{\overline{\Lambda}T}$ не имеет собственных значений, равных $+1$).

По построению матрица $G(t,\mu)$ является периодической при $\mu=\mu^*$ и ограниченной при $t\to\infty$ в некоторой окрестности $\mu>\mu^*$ матрицей. Подставив (6.31) в (6.30), после несложных преобразований найдем, что $\dot\omega(t)=L(t,\mu)\omega(t)$, а $L(t,\mu)=$

$$=\begin{pmatrix} P^{-1}R^{-1}(t)[A(t)R(t)P-\dot R(t)P] & P^{-1}R^{-1}(t)Z(t)Ee^{-\overline{\Lambda}t} & 0\\ e^{-\overline{\Lambda}t}D[Z(t)-I]Z^{-1}(t)R(t)P & \beta I+\overline{\Lambda} & e^{-\overline{\Lambda}t}D\dot x^*(T,\mu)\\ C^T[Z(T)-I]Z^{-1}(t)R(t)P & 0 & C^T\dot x^*(T,\mu)\end{pmatrix},$$

где $A(t)=A\big(x^*(t,\mu)\big)$, $Z(t)=Z\big(x^*(t,\mu)\big)$. Так как

$$Z(t)=R(t)Pe^{\Lambda t}P^{-1},\quad Z(T)=Pe^{\Lambda T}P^{-1},$$
$$P^{-1}R^{-1}(t)[A(t)R(t)P-\dot R(t)P]=\Lambda,\quad Z^{-1}(t)=Pe^{-\Lambda t}P^{-1}R^{-1}(t),$$

то

$$\dot\omega(t)=\begin{pmatrix} \Lambda & e^{\Lambda t}P^{-1}Ee^{-\overline{\Lambda}t} & 0\\ e^{\overline{\Lambda}t}DP[e^{\Lambda T}-I]e^{-\Lambda t} & \beta I+\overline{\Lambda} & e^{\overline{\Lambda}t}D\dot x^*(T,\mu)\\ C^TP[e^{\Lambda T}-I]e^{-\Lambda t} & 0 & C^T\dot x^*(T,\mu)\end{pmatrix}\omega(t). \quad (6.32)$$

Выберем матрицы E, D и вектор C следующим образом

$$E=P\begin{pmatrix}0\\F\end{pmatrix},\quad D=(0\quad H)\,P^{-1},\quad C^{\mathrm T}=(0\quad c\quad 0)\,P^{-1},$$

где $H_{k\times k}$ — единичная матрица, F — матрица, коммутирующая с матрицей $\overline{\Lambda}$, которая определена ниже, вектор C имеет единственный отличный от нуля элемент c в $(m-k)$-м столбце. При этом

$$e^{\Lambda t}P^{-1}Ee^{-\overline{\Lambda}t}=\begin{pmatrix}0\\F\end{pmatrix},\quad e^{\overline{\Lambda}t}DP[e^{\Lambda T}-I]e^{-\Lambda t}=\begin{pmatrix}0 & e^{\overline{\Lambda}T}-I\end{pmatrix},$$
$$C^{\mathrm T}P[e^{\Lambda T}-I]e^{-\Lambda t}=0.$$

Далее заметим, что вектор $\dot x^*(t,\mu)$ является решением линейной системы (6.29). Поэтому существует вектор $s=\dot x^*(0,\mu)=\dot x^*(T,\mu)$ такой, что $\dot x^*(t,\mu)=V(t)s=R(t)Pe^{\Lambda t}P^{-1}s$. Следовательно, $P^{-1}s=$ $=e^{\Lambda T}P^{-1}s$, откуда вытекает, что вектор $P^{-1}s$ имеет только одну отличную от нуля $(m-k)$-ю координату. Обозначим ее через r. Таким образом,

$$e^{\overline{\Lambda}t}D\dot x^*(T,\mu)=\begin{pmatrix}0 & e^{\overline{\Lambda}(t+T)}\end{pmatrix}P^{-1}s=0,$$

$$C\dot x^*(T,\mu)=(0\quad c\quad 0)\,P^{-1}s=cr.$$

Положим теперь $c = -\operatorname{sign}(r)$, $F = \operatorname{diag}(a_i)$, где диагональная матрица F имеет одинаковые диагональные элементы в каждой клетке, соответствующей жордановой клетке матрицы $\overline{\Lambda}$. Представим матрицу Λ в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda} \end{pmatrix},$$

где матрица $\overline{A}$ совпадает с верхним левым $(m-k)\times(m-k)$-квадратом матрицы Λ. Тогда (6.32) примет вид

$$\dot{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda} & F & 0 \\ 0 & e^{\overline{\Lambda}T} - I & \beta I + \overline{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|r| \end{pmatrix} \omega(t) = N(\mu)\omega(t). \tag{6.33}$$

Покажем, что всегда можно выбрать диагональные элементы a_i матрицы F так, что матрица $N(\mu)$ при $\mu = \mu^*$ будет иметь только одно нулевое собственное значение, а все остальные собственные значения матрицы $N(\mu)$ будут иметь отрицательные вещественные части. Для этого достаточно выбрать a_i так, чтобы все $2k$ собственных значений матрицы

$$U = \begin{pmatrix} \overline{\Lambda} & F \\ e^{\overline{\Lambda}T} - I & \beta I + \overline{\Lambda} \end{pmatrix}$$

имели отрицательные вещественные части. Рассмотрим жорданову клетку $\widetilde{\Lambda}$ матрицы $\overline{\Lambda}$ кратности j, соответствующую собственному значению λ_i. Тогда собственные значения ν матрицы U удовлетворяют уравнению

$$\det(U - \nu I) = \prod_i \det \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda} - \nu I & a_i I \\ e^{\widetilde{\Lambda}T} - I & \beta I + \widetilde{\Lambda} - \nu I \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0. \tag{6.34}$$

В свою очередь каждый из определителей, входящих в уравнение (6.34), обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\left[(\lambda_i - \nu)(\beta + \lambda_i - \nu) - a_i(e^{\lambda_i T} - 1)\right]^j = 0.$$

Последнее уравнение имеет два j-кратных корня, удовлетворяющих квадратному уравнению

$$\nu^2 - \nu(\beta + 2\lambda_i) + (\beta + \lambda_i)\lambda_i - a_i(e^{\lambda_i T} - 1) = 0. \tag{6.35}$$

Выберем параметры β и a_i следующим образом:

$$\beta = -2d, \quad a_i = \frac{-d^2}{e^{\lambda_i T} - 1}, \quad d > 0. \tag{6.36}$$

При этом каждое из уравнений (6.35) будет иметь два одинаковых корня $\nu_i = -d + \lambda_i$ с отрицательной вещественной частью в некоторой окрестности $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ значения системного параметра μ^*. Таким образом, при всех $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ фундаментальная матрица $W(t, \mu)$ линейной системы (6.30) первого приближения представима в виде $W(t, \mu) = G(t, \mu)e^{N(\mu)t}$, где матрица $G(t, \mu)$ ограничена при $t \to \infty$, а матрица $N(\mu)$ имеет ровно одно нулевое собственное значение, соответствующее единичному мультипликатору периодического решения $u^*(t, \mu)$ системы (6.27). Все другие $m + k$ собственных значений матрицы $N(\mu)$ имеют отрицательные вещественные части при любых $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$, откуда и вытекает асимптотическая орбитальная устойчивость периодического решения $u^*(t, \mu)$ системы (6.27) при всех $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$. Теорема 6.5 доказана.

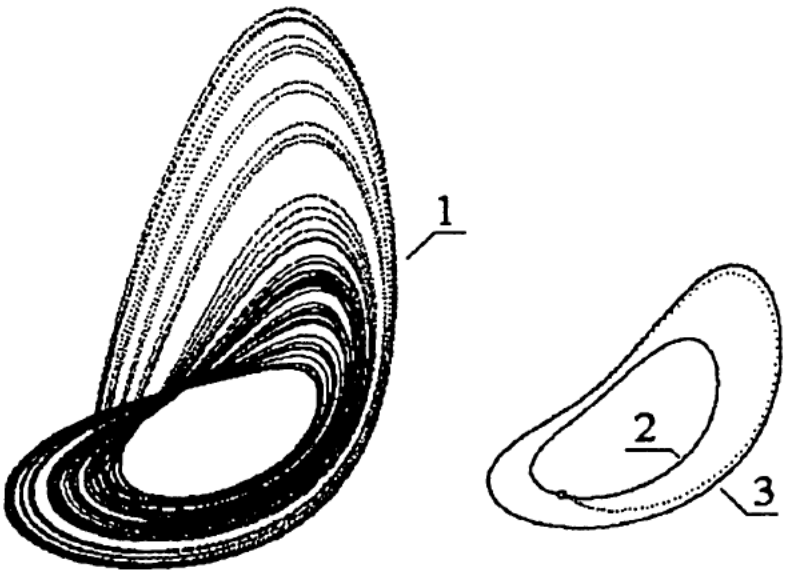

Рис. 6.3. Стабилизация неустойчивого предельного цикла нелинейной динамической системы Рёсслера.

В качестве примера рассмотрим динамическую систему Рёсслера (6.24). При $\mu > 1.88$ предельный цикл системы (6.24) теряет устойчивость, а при $\mu = 2.35$ в системе появляется нерегулярный аттрактор. Локализуем и стабилизируем предельный цикл системы (6.24) с помощью системы

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -(y + z) + (z_{11}\varepsilon_1 + z_{12}\varepsilon_2 + z_{13}\varepsilon_3)(q - \mu),\\
\dot{y} &= x + ay + (z_{21}\varepsilon_1 + z_{22}\varepsilon_2 + z_{23}\varepsilon_3)(q - \mu),\\
\dot{z} &= b + z(x - \mu) + (z_{31}\varepsilon_1 + z_{32}\varepsilon_2 + z_{33}\varepsilon_3)(q - \mu),\\
\dot{q} &= a_1\big(x(s) - x(0)\big) + a_2\big(y(s) - y(0)\big) + a_3\big(z(s) - z(0)\big) + \beta(q - \mu),\\
\dot{s} &= c_1 a_1\big(x(s) - x(0)\big) + c_2 a_2\big(y(s) - y(0)\big) + c_3 a_3\big(z(s) - z(0)\big),
\end{aligned}
\qquad (6.37)
$$

где $\big(x(0),\ y(0),\ z(0)\big)^{\mathrm{T}}$ — вектор начальных данных системы (6.24) при условии, что ее траектория каждый момент времени совпадает с проекцией траектории системы (6.37) на $\mathbb{R}^3$.

На рис. 6.3 показано: 1 — хаотическая траектория динамической системы Рёсслера при $\mu = 2.4$; 2 — устойчивый предельный цикл системы Рёсслера при критическом значении $\mu^* = 1.85$; 3 — проекция предельного цикла системы (6.37), стабилизирующей неустойчивый предельный цикл системы Рёсслера (6.24) при $\mu = 2.4$.

6.2.4. Управление хаосом в уравнениях с запаздывающим аргументом. Рассмотрим нелинейную автономную систему с запаздывающим аргументом

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m), \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ 0 \equiv \tau_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_m,\end{gathered} \tag{6.38}$$

где $F(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m), \mu)$ — непрерывная и гладкая по совокупности переменных вектор-функция. Пусть $x^*(\mu)$ — неподвижная точка системы (6.38), зависящая от скалярного параметра μ, в качестве которого, в частности, может быть выбран один из запаздывающих аргументов. Как и выше, положим, что существует критическое значение параметра μ^* такое, что неподвижная точка является устойчивой при $\mu \le \mu^*$, а при $\mu > \mu^*$ решение $x^*(\mu)$ становится неустойчивым либо, если система (6.38) остается диссипативной, в ней могут появиться другие аттракторы, например, устойчивые предельные циклы различной кратности и даже нерегулярные аттракторы, свидетельствующие о хаотической динамике системы при $\mu > \mu^*$. Особенностью уравнений с запаздывающим аргументом является возможность наличия всех указанных типов аттракторов даже в случае, когда система (6.38) содержит только одно единственное уравнение, так как это уравнение имеет бесконечное число степеней свободы.

Для решения задачи локализации и стабилизации неподвижной неустойчивой точки $x^*(\mu)$ системы (6.38) при $\mu > \mu^*$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m), \mu) + \varepsilon(q(t) - \mu), \\ \dot{q} &= G(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m), \mu) + \beta(q(t) - \mu),\end{aligned} \tag{6.39}$$

где скалярная функция $G(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m), \mu) = 0$ в неподвижной точке $(x^*(\mu), \mu)$, а $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — управляющие параметры системы (6.39). Очевидно, что если точка $x^*(\mu)$ является стационарной точкой системы (6.38), то точка $(x^*(\mu), \mu)$ будет стационарной точкой системы (6.39). Определим значения управляющих параметров ε и β в системе (6.39), при которых стационарная точка $(x^*(\mu), \mu)$ будет устойчивой. Перейдем к новым переменным $u_i(t) = x_i(t) - x_i^*$,

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, $u_{n+1}(t) = q(t) - \mu$ и в окрестности стационарной точки $u^* = 0$ выделим линейную часть системы (6.39)

$$\dot{u}(t) = \sum_{l=0}^{m} A_l(\mu) u(t - \tau_l), \quad 0 \equiv \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_m, \tag{6.40}$$

где

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F(\cdot)}{\partial u(t)} & \varepsilon \\ \dfrac{\partial G(\cdot)}{\partial u(t)} & \beta \end{pmatrix}_{u^*=0}, \quad A_l(\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F(\cdot)}{\partial u(t-\tau_l)} & 0 \\ \dfrac{\partial G(\cdot)}{\partial u(t-\tau_l)} & 0 \end{pmatrix}_{u^*=0}$$

$$l = 1, \ldots, m.$$

Согласно критерию устойчивости по первому приближению неподвижная точка системы (6.39) будет устойчива, если все корни характеристического уравнения

$$\det\left(\sum_{l=0}^{m} A_l e^{-\lambda\tau_l} - \lambda E\right) = 0 \tag{6.41}$$

имеют отрицательные действительные части. Левая часть уравнения (6.41) представляет собой квазиполином

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{l=0}^{M} a_{kl} \lambda^k e^{-\lambda\tau_l}, \quad M \geq \max\{n, m\}, \tag{6.42}$$

где коэффициенты a_{kl} выражаются через суммы всех главных миноров матриц A_l. Квазиполином обычно имеет бесконечное множество нулей, однако в случае уравнений с запаздывающим аргументом (т. е. $a_{n+1,0} \neq 0$, $a_{n+1,l} = 0$, $l = 1, \ldots, M$) все корни квазиполинома лежат в левой полуплоскости: $\mathrm{Re}\lambda_i < d$. Это обстоятельство позволяет в принципе решить задачу стабилизации неустойчивого стационарного решения путем выбора управляющих параметров таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия $d < 0$. Для определения границ области устойчивости квазиполиномов применим следующую теорему

Теорема 6.6 (теорема Руше [130]). *Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфные в области D и непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции. Если для любой точки $z \in \Gamma$ имеет место неравенство $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$, то функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ имеют в D одно и то же число корней.*

Представим квазиполином (6.42) в виде

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{M} a_{kl} \lambda^k e^{-\lambda \tau_l} = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$$

и выберем контур Γ, состоящим из отрезка мнимой оси $[-iR; iR]$ и полуокружности радиуса R с центром в начале координат, лежащей в правой полуплоскости. Применяя теорему Руше к функциям

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \lambda^k, \ \psi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{M} a_{kl} \lambda^k e^{-\lambda \tau_l},$$

отметим, что при достаточно большом радиусе R полуокружности, входящей в состав контура, справедливость неравенства $|\varphi(\lambda)| > |\psi(\lambda)|$ на этой полуокружности очевидна. Остается потребовать выполнения неравенства

$$|\varphi(i\omega)| > |\psi(i\omega)| \tag{6.43}$$

на мнимой оси при $\lambda = i\omega$. Отметим, что

$$|\psi(i\omega)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{M} a_{kl} (i\omega)^k e^{-i\omega\tau_l} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{M} \left| e^{-i\omega\tau_l} \right| \left| \sum_{k=0}^{n} a_{kl} (i\omega)^k \right| = \sum_{l=1}^{M} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{kl} (i\omega)^k \right|.$$

Поэтому неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^{n+1} a_k (i\omega)^k \right| > \sum_{l=1}^{M} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{kl} (i\omega)^k \right| \tag{6.44}$$

гарантирует выполнение условия (6.43) на мнимой оси. Решение (6.44) совместно с требованием отсутствия корней с неотрицательной действительной частью многочлена $\varphi(\lambda)$ дает возможность определить границы области параметров ε и β, при которых обеспечивается устойчивость квазиполинома $P(\lambda)$, а следовательно, и асимптотическая устойчивость неподвижной точки системы (6.39), стабилизирующей неустойчивую неподвижную точку системы (6.38).

В качестве примера рассмотрим стабилизацию неустойчивой неподвижной точки в нелинейном уравнении Мэкки–Гласса (см. [100] и главу 5)

$$\dot{x} = -ax(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tau)}{\theta^n + x^n(t-\tau)}, \tag{6.45}$$

где β_0, θ и n — положительные константы, выбранные так, что $\beta_0 > a > 0$ и $nB > 2$, $6aB > \beta_0$, $B = (\beta_0 - a)/\beta_0$. Уравнение (6.45) имеет единственное стационарное состояние $x^* = \theta \sqrt[n]{\dfrac{\beta_0 - a}{a}}$, которое при значении

$$\tau > \tau^* = \frac{\arccos(-a/b)}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

где $b = a(nB - 1)$, теряет устойчивость [46]. При этом сначала рождается устойчивый предельный цикл. При дальнейшем увеличении τ происходит последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла, а затем наблюдается и хаотическая динамика (см. п. 5.3 главы 5). Для стабилизации неустойчивой стационарной точки x^* уравнения (6.45) при $\tau > \tau^*$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t-\tau)}{\theta^n + x^n(t-\tau)} + \varepsilon(q(t) - \tau), \\ \dot{q}(t) &= -a(x(t) - x^*) + \beta(q(t) - \tau). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Покажем, что для любого значения запаздывания τ можно выбрать такие значения управляющих параметров ε и β в (6.46), что неустойчивая неподвижная точка уравнения (6.45) будет стабилизирована. Рассмотрим линейную часть уравнения (6.46) в окрестности стационарной точки (x^*, τ)

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -au_1(t) - bu_1(t-\tau) + \varepsilon u_2(t), \\ \dot{u}_2(t) &= -au_1(t) + \beta u_2(t), \end{aligned}$$

где $u_1(t) = x(t) - x^*$, $u_2(t) = q(t) - \tau$, а соответствующий ей характеристический квазиполином имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a - \beta) + a(\varepsilon - \beta) + be^{-\lambda\tau}(\lambda - \beta). \tag{6.47}$$

Положим

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a - \beta) + a(\varepsilon - \beta), \quad \psi(\lambda) = be^{-\lambda\tau}(\lambda - \beta).$$

Для нашего частного случая $M = n = 1$ согласно (6.44) имеем

$$|-\omega^2 + a(\varepsilon - \beta) + i\omega(a - \beta)| > |b||i\omega - \beta|,$$

что равносильно неравенству

$$\omega^4 + \omega^2(a^2 - b^2 + \beta^2 - 2a\varepsilon) + a^2(\varepsilon - \beta)^2 - b^2\beta^2 > 0.$$

Необходимыми и достаточными условиями справедливости последнего неравенства для промежутка $\omega^2 \in \mathbb{R}_+$ являются

$$a^2 - b^2 + \beta^2 - 2a\varepsilon > 0, \quad a|\varepsilon - \beta| > b|\beta|,$$

которые совместно с условиями

$$a - \beta > 0, \quad \varepsilon - \beta > 0,$$

соответствующими отсутствию корней функции $\varphi(\lambda)$ в правой полуплоскости, дают совместную систему неравенств

$$\begin{gathered} \beta^2 - b^2 + a^2 - 2\varepsilon a > 0, \\ -\frac{a\varepsilon}{b-a} < \beta < \frac{a\varepsilon}{b+a}, \\ \beta < \varepsilon, \quad \beta < a \end{gathered} \tag{6.48}$$

для определения области пространства параметров ε и β, обеспечивающих устойчивость квазиполинома (6.47), а следовательно, и асимптотическую устойчивость решения уравнения (6.46) при любых τ. На рис. 6.4а показано решение уравнения (6.45) при значениях $a = 0.75$, $\beta_0 = 1.5$, $\theta = 2$, $n = 8$ и значении бифуркационного параметра $\tau = 5$, соответствующего хаотическому поведению, а на рис. 6.4б — решение системы (6.46) при тех же значениях a, β_0, θ, n и при значениях управляющих параметров $\varepsilon = 12$, $\beta = -5$, взятых из области решений системы неравенств (6.48).

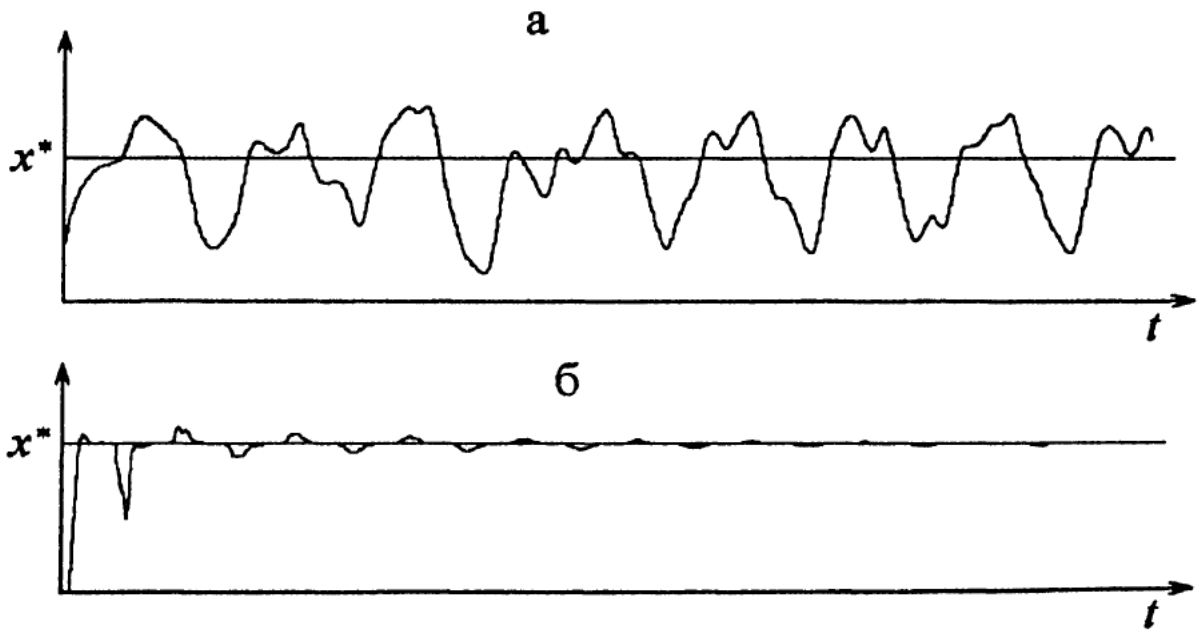

Рис. 6.4. Решения уравнения Мэкки–Гласса (6.45) (а) и стабилизирующей его системы (6.46) (б) при значении бифуркационного параметра $\tau = 5$, где x^* — стационарное решение.

Рассмотрим теперь задачу локализации и стабилизации неустойчивой периодической траектории в нелинейных уравнениях с запаздывающим аргументом, имеющих хаотическое поведение

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\tau), \mu), \ t \geq 0, \tag{6.49}$$

где $x(t)$, $f(\cdot)$ - скалярные функции, $\tau > 0$ - постоянное запаздывание.

Пусть $x^*(t, \mu)$ - периодическая траектория (предельный цикл) уравнения (6.49) с периодом $T(\mu)$. Как правило, существует критическое значение параметра μ^* такое, что цикл $x^*(t, \mu)$ асимптотически орбитально устойчив при $\mu \leq \mu^*$ и неустойчив при $\mu > \mu^*$. Проблема состоит в том, чтобы локализовать и стабилизировать этот цикл при $\mu > \mu^*$, включая значения параметра μ, при которых уравнение (6.49) имеет хаотическое поведение.

Покажем, что для решения задачи может быть использован подход, предложенный в п.6.2.3 настоящей главы. Пусть $C[-\tau; 0]$ — пространство непрерывных вещественных функций $\varphi(\cdot)$, задающих на интервале $[-\tau; 0]$ начальные условия уравнения (6.49).

Обозначим $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$ и представим уравнение (6.49) в виде конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого поделим интервал $[-\tau; 0]$ на m одинаковых частей и обозначим

$$x_t(0) = y_0, \ x_t(-\tau) = y_m, \ x_t\left(\frac{-i\tau}{m}\right) = y_i, \ \ i = \overline{1, m-1}. \tag{6.50}$$

Тогда, используя разностную аппроксимацию производной, получим

$$\dot{y}_0 = f(y_0, y_m, \mu), \ \dot{y}_i = \frac{m}{\tau}(y_{i-1} - y_i), \ i = \overline{1, m}. \tag{6.51}$$

Таким образом, уравнение (6.49) сводится к $(m+1)$-мерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = F(y, \mu, \tau), \tag{6.52}$$

вектор решений которой $y = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_m(t))$ определяет вектор-функцию

$$\varphi_t^{[m]}(\vartheta) = y_i + \frac{(y_{i-1} - y_i)m}{\tau}\vartheta, \ \frac{-\tau i}{m} \leq \vartheta \leq \frac{-\tau(i-1)}{m}, \ i = \overline{1, m}.$$

Каждая координата этой вектор-функции линейно аппроксимирует функцию $x_t(\vartheta)$ на отрезке длиной $h = \vartheta_{i-1} - \vartheta_i$ по двум значениям функции в узлах y_i и y_{i-1} с погрешностью, не превышающей $O(h^2)$. Очевидно, что при достаточно высоком порядке m функция $\varphi_t^{[m]}(\vartheta)$ будет сколь угодно мало отличаться от $x_t(\vartheta)$ на отрезке $[-\tau; 0]$. При

этом решению $x(t,\mu)$ уравнения (6.49) соответствуют значения координаты $y_0(t,\mu)$ системы (6.52), а траектории в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}\times C[-\tau;0]$ уравнения (6.49) соответствует траектория в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ системы (6.52). Следовательно, задача стабилизации неустойчивого периодического решения $x(t,\mu)$ уравнения с запаздыванием (6.49) сводится к задаче стабилизации соответствующей неустойчивой периодической траектории $y(t,\mu)$ системы (6.52). К решению последней задачи может быть применен метод, изложенный в п. 6.2.3 настоящей главы. В соответствии с этим методом стабилизация периодического решения системы (6.52) может быть осуществлена решением расширенной системы (6.27) настоящей главы.

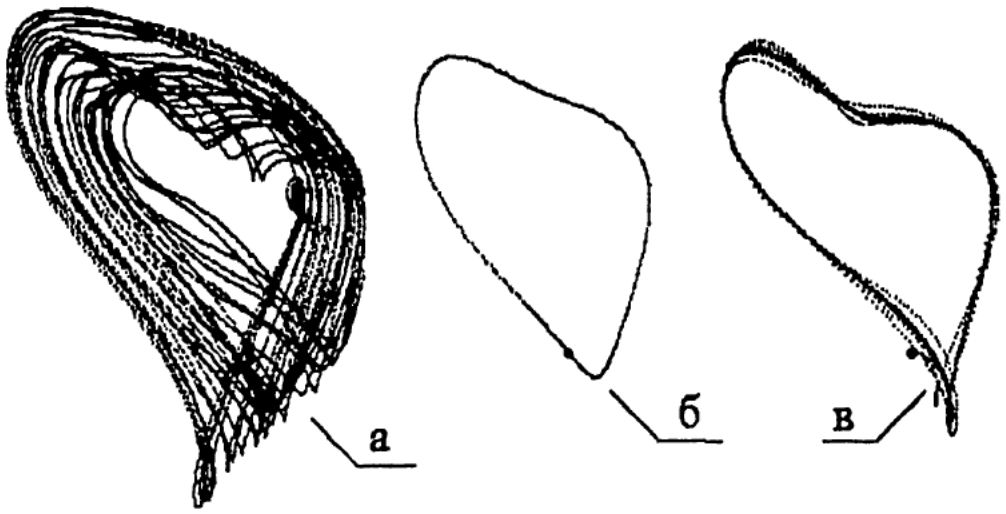

Рис. 6.5. Стабилизация неустойчивого периодического решения уравнения Мэкки-Гласса (6.45).

В качестве примера рассмотрим уравнение Мэкки-Гласса (6.45), в котором бифуркационным параметром является величина запаздывания τ. Для решения задачи локализации и стабилизации его неустойчивого периодического решения при значениях τ, соответствующих хаотическим колебаниям, преобразуем уравнение (6.45) к конечномерной системе

$$\dot{y}_0 = f_0(y_0, y_m, \tau),\ \dot{y}_i = f_i(y_0, y_1, \ldots, y_m, \tau),\ i = 1, \ldots, m, \qquad (6.53)$$

где функция $f_0(y_0, y_m, \tau)$ совпадает в соответствии с принятыми в (6.51) обозначениями с правой частью уравнения (6.45), а функции $f_i(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ зависят от принятого способа аппроксимации уравнения (6.49) системой (6.53). Для понижения порядка аппроксимирующей системы мы использовали интерполяцию функции $x_t(\vartheta)$ на отрезке $[-\tau;0]$ кубическим сплайном. При этом, как было отмечено в п. 5.3

главы 5, порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.53), аппроксимирующей уравнение (6.45), может быть принят равным $m = 20$. На рис. 6.5 показаны результаты численного эксперимента по стабилизации неустойчивого периодического решения системы уравнений (6.53) при значении параметра $\tau = 1.8$, соответствующем хаотическим колебаниям: а — проекция фазового портрета нерегулярного аттрактора на плоскость (y_0, y_m) для системы (6.53) или, соответственно, на плоскость $(x(0), x(-\tau))$ для уравнения (6.45) при $\tau = 1.8$; б — аналогичная проекция фазового портрета предельного цикла системы (6.53) (и, соответственно, уравнения (6.45)) при $\tau = 1.2$; в — проекция на плоскость (y_0, y_m) (в случае аппроксимирующей системы (6.53)) и, соответственно, на плоскость $(x(0), x(-\tau))$ (в случае исходного уравнения (6.45)) фазового портрета неустойчивого предельного цикла, стабилизированного системой (6.27) при $\tau = 1.8$.

6.2.5. Стабилизация термодинамической ветви в системах уравнений "реакция-диффузия". В п. 5.1 главы 5 настоящей книги было отмечено, что одной из наиболее важных и широко используемых моделей при исследовании большого круга процессов и явлений в физике, химии, биологии, экологии и во многих других областях являются системы уравнений типа реакция-диффузия (5.1). В зависимости от значений параметра μ, а также от коэффициентов диффузии D_1 и D_2, от формы и размеров пространственной области и от граничных условий система (5.1) после потери устойчивости термодинамической ветви имеет большое количество качественно различных решений, включая периодические решения, пространственно однородные и неоднородные диссипативные структуры, а также неоднородные непериодические решения, которые получили название диффузионного хаоса (см. главу 5).

В связи с этим проблема управления диффузионным хаосом в широком смысле может быть сформулирована следующим образом: необходимо локализовать (обнаружить) и стабилизировать неустойчивую периодическую или диссипативную структуру, являющуюся решением системы (5.1) при тех значениях параметра μ, при которых система (5.1) обладает пространственно неоднородными непериодическими решениями. В узком смысле проблему управления диффузионным хаосом будем понимать как задачу стабилизации неустойчивой термодинамической ветви системы (5.1) в случае, когда последняя обладает пространственно неоднородными непериодическими решениями. Здесь мы рассматриваем проблему управления диффузионным хаосом исключительно в узком смысле.

Как показано в главе 5 эта проблема может быть сведена к задаче стабилизации абсолютно неустойчивого нулевого решения уравнения Курамото-Цузуки в случае, когда оно обладает непериодическими пространственно неоднородными решениями.

В случае краевых условий второго рода задача управления диффузионным хаосом в узком смысле сводится к стабилизации нулевого

решения краевой задачи

$$\begin{gathered} W_t = W + (1+ic_1)W_{xx} - (1+ic_2)W|W|^2, \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty, \\ W(x,0) = W_0(x), \quad W_x(0,t) = W_x(l,t) = 0. \end{gathered} \tag{6.54}$$

Учитывая, что $W(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$, перепишем краевую задачу (6.54) в виде

$$\begin{gathered} u_t = u + u_{xx} - c_1 v_{xx} - (u^2+v^2)(u - c_2 v), \\ v_t = v + c_1 u_{xx} + v_{xx} - (u^2+v^2)(u + c_2 v), \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \\ u_x(0,t) = v_x(0,t) = u_x(l,t) = v_x(l,t) = 0. \end{gathered} \tag{6.55}$$

Из (6.55) следует, что

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{6.56}$$

Здесь линейный оператор L представим в виде

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -c_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ c_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = I + C\Delta = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -c_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{6.57}$$

где I — единичная матрица, а оператор Δ на отрезке $[0,l]$ с краевыми условиями второго рода имеет собственные значения, равные $-\pi^2 n^2/l^2$ $(n = 0,1,\ldots)$, которым отвечают собственные функции $\cos\dfrac{\pi n}{l}x$. Вычислим собственные значения оператора L. Пусть λ — такое собственное значение. Ему отвечает собственная функция $\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \cos\dfrac{\pi n}{l}x$. Тогда

$$L\varphi = (I + C\Delta)\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\cos\frac{\pi n}{l}x = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - C\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\right]\cos\frac{\pi n}{l}x = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\cos\frac{\pi n}{l}x.$$

Следовательно,

$$\left(I - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} C\right) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, собственными числами оператора L являются собственные значения $1 - \pi^2 n^2/l^2 \pm i c_1 (\pi^2 n^2/l^2)$ матриц

$$B_n = I - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} C.$$

Очевидно, что при малых размерах области ($l < \pi$) только два собственных числа оператора L, соответствующие гармоникам нулевого порядка, лежат в правой полуплоскости, что определяет наличие у уравнения (6.54) однородных по пространству автоколебаний ($W = e^{-ic_2(t+\theta)}$). С ростом l количество лежащих в правой полуплоскости собственных чисел оператора L возрастает, что ведет к появлению у уравнения (6.54) неоднородных по пространству автоколебаний и более сложных диссипативных структур.

Идея метода стабилизации нулевого решения краевой задачи (6.54) состоит в построении такой расширенной системы, для которой все собственные значения оператора линеаризованной на нулевом решении задачи лежат в левой полуплоскости независимо от того, какие параметры c_1, c_2 имеет исходное уравнение (6.54) и какова степень неустойчивости его нулевого решения.

Отметим, что при $n = 0$ матрица B_0 совпадает с единичной матрицей I, т. е. имеет диагональную форму с кратными собственными значениями. Покажем, что в этом случае для стабилизации нулевого решения краевой задачи (6.54) к ее уравнениям необходимо добавить два новых уравнения. Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}
u_t = u + u_{xx} - c_1 v_{xx} - (u^2 + v^2)(u - c_2 v) + \varepsilon\varphi, \\
v_t = v + c_1 u_{xx} + v_{xx} - (u^2 + v^2)(u + c_2 v) + \varepsilon\psi, \\
\varphi_t = u + \beta\varphi, \quad \psi_t = v + \beta\psi, \\
0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \\
u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\
v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \\
\varphi_x(0,t) = \varphi_x(l,t) = 0, \\
\psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0.
\end{gathered} \tag{6.58}$$

Теорема 6.7. *Для любых значений параметров c_1, c_2, l задачи* (6.54) *найдутся значения управляющих параметров ε, β такие, что нулевое решение краевой задачи* (6.58) *равномерно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Перепишем уравнения краевой задачи (6.58) в виде

$$\frac{dz}{dt} = Lz + F(z,t), \tag{6.59}$$

где $z(x,t) = \big(u(x,t),\, v(x,t),\, \varphi(x,t),\, \psi(x,t)\big)^{\mathrm{T}}$, а линейный оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -c_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \varepsilon & 0 \\ c_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 1+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

с условиями на концах отрезка, определяемыми второй краевой задачей. Для доказательства теоремы достаточно выбрать значения управляющих параметров ε, β такие, что спектр оператора L будет лежать в левой полуплоскости [49]. Нетрудно показать, аналогично тому, как это было сделано выше относительно спектра оператора L краевой задачи (6.55), что оператор L имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений матриц

$$B_n = \begin{pmatrix} 1-k_n & c_1k_n & \varepsilon & 0 \\ -c_1k_n & 1-k_n & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad k_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Характеристическое уравнение для матрицы B_n имеет вид

$$\big[(\beta-\lambda)(1-k_n-\lambda)-\varepsilon\big]^2 + (\beta-\lambda)^2 c_1^2 k_n^2 = 0,$$

корни которого являются корнями двух квадратных уравнений

$$\lambda^2 - \lambda(\beta+1-k_n \mp ic_1k_n) + \beta(1-k_n \mp ic_1k_n) - \varepsilon = 0.$$

Из соответствующих выражений для комплексных корней последнего уравнения нетрудно получить достаточные условия отрицательности их вещественных частей:

$$\begin{gathered} \beta < -1, \\ \beta c_1^2 k_n^2 (k_n - 1) + (\beta + 1 - k_n)^2 (\beta k_n + \varepsilon - \beta) < 0. \end{gathered} \tag{6.60}$$

При малой длине области ($l \le \pi$) имеем $k_n \ge 1$ для всех $n \ge 1$. Поэтому условия (6.60) выполнены для всех n при $\varepsilon < \beta < -1$. Если $l > \pi$, то для

некоторых $n = 1, \ldots, n_0$ будет иметь место $k_n < 1$ и, следовательно, выбор ε будет зависеть от значения параметра c_1:

$$\varepsilon < \min_{0 \le n \le n_0} \left\{ \frac{\beta(1-k_n)[c_1^2 k_n^2 + (\beta + 1 - k_n)^2]}{(\beta + 1 - k_n)^2} \right\}.$$

В любом случае управляющие параметры ε, β могут быть выбраны таким образом, что спектр оператора L будет лежать в левой полуплоскости. Теорема 6.7 доказана.

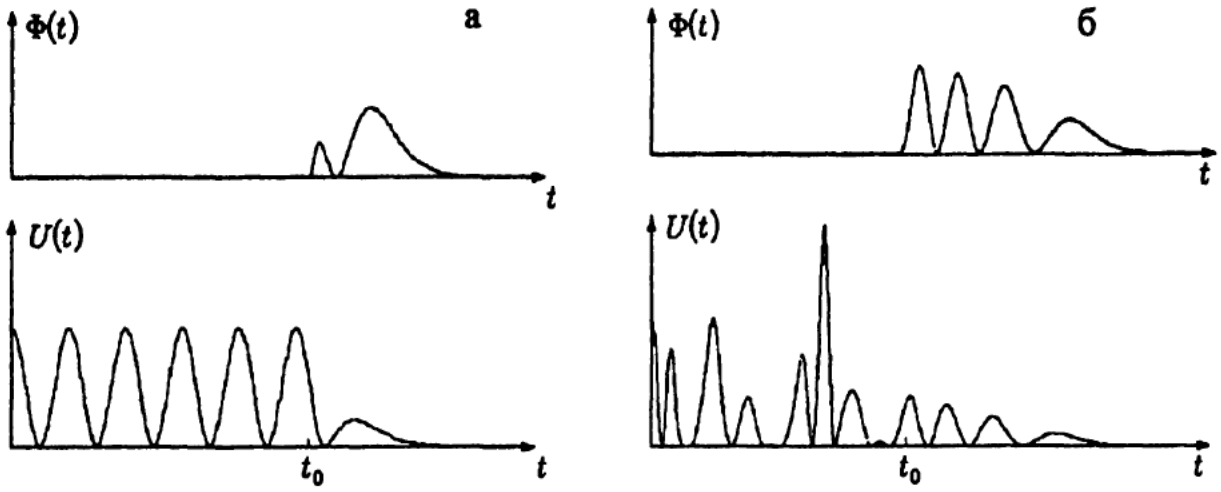

Рис. 6.6. Стабилизация нулевого решения задачи (6.55) в случае, когда ее решением является а) устойчивый пространственно однородный автоколебательный режим ($l = \pi$, $c_1 = 5$ $c_2 = -2$, $\varepsilon = -4$, $\beta = -3$) и б) при наличии в ней диффузионного хаоса ($l = \pi$, $c_1 = 5$ $c_2 = -5$, $\varepsilon = -4$, $\beta = -3$).

Для наглядного представления поведения решений задач (6.55) и (6.58) удобно пользоваться величинами $U(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx$ и $\Phi(t) = \int_0^l \varphi^2(x,t)\,dx$. На рис. 6.6 изображены зависимости от времени функций $U(t)$ и $\Phi(t)$, соответственно, для следующих случаев: 1) $c_1 = 5$, $c_2 = -2$, $l = \pi$ (задача (6.55) имеет пространственно однородный устойчивый автоколебательный режим); 2) $c_1 = 5$, $c_2 = -5$, $l = \pi$ (задача (6.55) имеет пространственно неоднородные непериодические решения — диффузионный хаос). До момента $t = t_0$ на рисунках изображено решение исходной задачи (6.55), а при $t > t_0$ показано решение задачи (6.58), стабилизирующей нулевое решение исходной задачи при значениях управляющих параметров $\varepsilon = -4$, $\beta = -3$. В обоих случаях нулевое решение задачи (6.55) стабилизируется первыми двумя координатами u и v решения задачи (6.58).

В случае краевых условий первого рода поставленная задача управления диффузионным хаосом в узком смысле сводится к стабилизации нулевого решения первой краевой задачи для уравнения Курамото–

Цузуки:

$$W_t = W + (1+ic_1)W_{xx} - (1+ic_2)W|W|^2,$$
$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty, \tag{6.61}$$
$$W(x,0) = W_0(x), \quad W(0,t) = W(l,t) = 0.$$

Задача (6.61) может быть записана в виде (6.55) или (6.56) с нулевыми краевыми условиями на концах отрезка. Оператор Δ в этом случае имеет собственные числа $-\pi^2 n^2/l^2$, $(n = 1,2,\ldots)$, которым отвечают собственные функции $\sin\dfrac{\pi n}{l}x$. При этом оператор L имеет только различные собственные числа $1 - \pi^2 n^2/l^2 \pm ic_1(\pi^2 n^2/l^2)$, $(n = 1,2,\ldots)$. Кроме того, при малой длине области $(l < \pi)$ все собственные числа оператора L имеют отрицательные вещественные части. В этом случае нулевое решение первой краевой задачи (6.61) равномерно и асимптотически устойчиво. При $l \ge \pi$ для стабилизации нулевого решения краевой задачи (6.61) можно было бы воспользоваться системой четырех уравнений, аналогичной системе (6.58). Однако, ввиду того, что оператор L в данном случае имеет только различные собственные значения, результат теоремы 6.7 может быть значительно усилен. А именно, рассмотрим расширенную систему следующего вида

$$u_t = u + u_{xx} - c_1 v_{xx} - (u^2+v^2)(u - c_2 v) + \varepsilon_1\varphi,$$
$$v_t = v + c_1 u_{xx} + v_{xx} - (u^2+v^2)(u + c_2 v) + \varepsilon_2\varphi,$$
$$\varphi_t = u + v + \beta\varphi,$$
$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty, \tag{6.62}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x),$$
$$u(0,t) = u(l,t) = v(0,t) = v(l,t) = \varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0.$$

Теорема 6.8. *Для любых значений параметров c_1, c_2, l задачи* (6.61) *найдутся значения управляющих параметров ε_1, ε_2, β такие, что нулевое решение задачи* (6.62) *равномерно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Перепишем уравнения краевой задачи (6.62) в виде (6.59), где $z(x,t) = \big(u(x,t), v(x,t), \varphi(x,t)\big)^{\mathrm{T}}$, а линейный оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -c_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \varepsilon_1 \\ c_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \varepsilon_2 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \tag{6.63}$$

с условиями на концах отрезка, определяемыми первой краевой задачей. Для доказательства теоремы достаточно выбрать значения управляющих параметров ε_1, ε_2, β так, чтобы спектр оператора L лежал в левой полуплоскости. Очевидно, что оператор L имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений матриц

$$B_n = \begin{pmatrix} 1-k_n & c_1k_n & \varepsilon_1 \\ -c_1k_n & 1-k_n & \varepsilon_2 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad k_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$
$$k_1 \le 1, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{6.64}$$

Характеристическое уравнение для матрицы B_n имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(\beta + 2 - 2k_n) + \lambda(2\beta(1-k_n) + (1-k_n)^2 + c_1^2k_n^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) -$$
$$- \left[\beta\left((1-k_n)^2 + c_1^2k_n^2\right) - (1-k_n)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + c_1k_n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right] = 0. \tag{6.65}$$

Согласно критерию Рауса–Гурвица необходимыми и достаточными условиями отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения (6.65) являются

$$-(\beta + 2 - 2k_n) > 0,$$
$$0 < -[\beta d_n - (1-k_n)\gamma_1 + c_1k_n\gamma_2] < \tag{6.66}$$
$$< -(\beta + 2 - 2k_n)[2\beta(1-k_n) + d_n - \gamma_1],$$

где $d_n = (1-k_n)^2 + c_1^2k_n^2$, $\gamma_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\gamma_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Найдем условия, достаточные для выполнения системы неравенств (6.66) при всех $n \ge 1$. Параметры β, γ_1, γ_2 будем искать в виде: $\beta < -2(1-k_1) < 0$; $\gamma_2 < 0$; $\gamma_1 = 2\beta(1-k_1) - d_1 < 0$. Предположим также, что $k_1(1+c_1^2) \ge 1$. В этом случае $d_{n+1} > d_n$ при $n \ge 1$. Тогда

$$-\beta d_n + (1-k_n)\gamma_1 - c_1k_n\gamma_2 \ge -\beta d_1 + (1-k_1)\gamma_1 - c_1k_1\gamma_2 =$$
$$= -\beta d_1 + 2\beta(1-k_1)^2 - (1-k_1)d_1 - c_1k_1\gamma_2.$$

Следовательно, первое из неравенств системы (6.66) выполнено при любых $n \ge 1$, а достаточным условием выполнения левой части второго неравенства при любых $n \ge 1$ является

$$d_1(\beta + 1 - k_1) < 2\beta(1-k_1)^2 - c_1k_1\gamma_2.$$

Последнее условие выполнено при любом $\beta < -2(1-k_1)$, если $\gamma_2 \le (2\beta(1-k_1)^2)/(c_1k_1)$. При этом правая часть второго неравенства системы (6.66) принимает вид

$$\beta d_n - 2\beta(1-k_n)(1-k_1) + (1-k_n)d_1 + \frac{2\beta k_n(1-k_1)^2}{k_1} >$$
$$> \left[\beta + 2(1-k_n)\right]\left[2\beta(k_1-k_n) + d_1 + d_n\right] =$$
$$= 2\beta^2(k_1-k_n) + 4\beta(k_1-k_n)(1-k_n) + \beta(d_1+d_n) + 2(1-k_n)(d_1+d_n),$$

что эквивалентно неравенству

$$2\beta^2(k_n-k_1)+4\beta(k_n-k_1)\left(1-k_n+\frac{1-k_1}{2k_1}\right)- \\ -\beta d_1-(1-k_n)(d_1+2d_n)>0. \quad (6.67)$$

Из последнего выражения при $n=1$ вытекает, что

$$\beta<-3(1-k_1).$$

Пусть при $n\geq n_0$ имеем $k_n\geq 1$. Тогда достаточным условием выполнения неравенства (6.67) при всех $n\geq n_0$ является

$$\beta+\frac{1-k_1}{k_1}<0.$$

Остается найти условие выполнения конечного числа неравенств (6.67) при $2\leq n<n_0$, если $n_0>2$. Достаточным условием для выполнения всех этих неравенств является

$$\beta^2+2\beta\left(1-k_2+\frac{1-k_1}{2k_1}\right)-\frac{3(1-k_1)c_1^2}{k_2-k_1}>0,$$

которое, очевидно, выполняется при всех

$$\beta<-\left(1-k_2+\frac{1-k_1}{2k_1}\right)-\sqrt{\left(1-k_2+\frac{1-k_1}{2k_1}\right)^2+\frac{3(1-k_1)c_1^2}{k_2-k_1}}<-\frac{1-k_1}{k_1}.$$

Теорема 6.8 доказана.

Во многих математических моделях большой интерес представляет решение системы уравнений типа реакция диффузия (5.1) в двумерном случае. Такая система может иметь в окрестности точки первой бифуркации как пространственно однородные автоколебательные решения, так и более сложные диссипативные структуры, такие как ведущие центры, спиральные волны, двухчастотные автомодельные решения и диффузионный хаос [16, 92, 93]. Задача стабилизации термодинамической ветви такой системы, заданной в прямоугольной области с краевыми условиями второго рода, сводится к стабилизации нулевого решения двумерного уравнения Курамото–Цузуки:

$$W_t=W+(1+ic_1)(W_{xx}+W_{yy})-(1+ic_2)W|W|^2, \\ 0\leq x\leq l_1,\quad 0\leq y\leq l_2,\quad 0\leq t<\infty, \\ W(x,y,0)=W_0(x,y), \\ W_x(0,y,t)=W_x(l_1,y,t)=W_y(x,0,t)=W_y(x,l_2,t)=0. \quad (6.68)$$

Аналогично предыдущему, представим краевую задачу (6.68) в виде (6.56), где линейный оператор L имеет вид

$$L = I + C\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -c_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Оператор Δ в прямоугольнике $[0, l_1] \times [0, l_2]$ с краевыми условиями второго рода имеет собственные значения

$$k_{nm} = -(\pi^2 n^2 / l_1^2 + \pi^2 m^2 / l_2^2),\ n, m = 0, 1, \ldots,$$

которым отвечают собственные функции $\cos\left(\frac{\pi n}{l_1} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{l_2} y\right)$. Следовательно, собственными числами оператора L являются собственные значения $1 - k_{nm} \pm i c_1 k_{nm}$ матриц

$$B_{nm} = I - k_{nm} C. \tag{6.69}$$

Из (6.69) видно, что при $l_1 > \pi$ и $l_2 > \pi$ количество собственных чисел оператора L, лежащих в правой полуплоскости, значительно больше, чем в одномерном случае, что ведет к появлению у уравнения (6.68) сложных диссипативных структур, включая диффузионный хаос, даже при небольших размерах прямоугольной области.

Для стабилизации нулевого решения краевой задачи (6.68) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u + u_{xx} + u_{yy} - c_1(v_{xx} + v_{yy}) - (u^2 + v^2)(u - c_2 v) + \varepsilon\varphi, \\ v_t &= v + c_1(u_{xx} + u_{yy}) + v_{xx} + v_{yy} - (u^2 + v^2)(u + c_2 v) + \varepsilon\psi, \\ \varphi_t &= u + \beta\varphi, \\ \psi_t &= v + \beta\psi, \\ 0 \le x \le l_1, &\quad 0 \le y \le l_2, \quad 0 \le t < \infty, \end{aligned} \tag{6.70}$$

с условиями Неймана на границе прямоугольника и с произвольными начальными условиями.

Теорема 6.9. *Для любых значений параметров c_1, c_2, l_1, l_2 задачи* (6.68) *найдутся значения управляющих параметров ε, β такие, что нулевое решение краевой задачи* (6.70) *равномерно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы 6.9 аналогично доказательству теоремы 6.7. Уравнения краевой задачи (6.70) могут быть представлены в виде (6.59) с оператором L, имеющим дискретный спектр, состоящий из собственных значений матриц

$$B_{nm} = \begin{pmatrix} 1 - k_{nm} & c_1 k_{nm} & \varepsilon & 0 \\ -c_1 k_{nm} & 1 - k_{nm} & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

Достаточным условием отрицательности вещественных частей собственных значений всех матриц B_{nm} являются условия, аналогичные условиям (6.60):

$$\beta < -1,$$

$$\beta c_1^2 k_{nm}^2 (k_{nm} - 1) + (\beta + 1 - k_{nm})^2 (\beta k_{nm} + \varepsilon - \beta) < 0.$$

Ясно, что эти условия выполнены при любых n, m таких, что $k_{nm} \geq 1$ при $\varepsilon < \beta < -1$. Для конечного набора n, m таких что $k_{nm} < 1$ выбор ε будет зависеть от значения параметра c_1, аналогично тому, как это имело место в теореме 6.7. Теорема 6.9 доказана.

Замечание. Нулевое решение первой краевой задачи для двумерного уравнения Курамото–Цузуки может быть стабилизировано либо системой уравнений (6.70) с краевыми условиями первого рода, либо двумерной краевой задачей типа (6.62).

Наличие хаоса во многих случаях может рассматриваться как достоинство динамической системы, позволяющее качественно менять ее динамику малыми возмущениями системных параметров. При этом для систем с сосредоточенными параметрами возникает необходимость в локализации и стабилизации их неустойчивых, особенно периодических траекторий, вплетенных в паутину сингулярного аттрактора. Для систем с распределенными параметрами, имеющих пространственно неоднородные, непериодические решения (диффузионный хаос), возникает необходимость в локализации и стабилизации их различных неустойчивых диссипативных структур. В настоящей главе предложен метод, позволяющий успешно осуществлять эти процедуры как для хаотических отображений, так и для конечномерных и бесконечномерных сосредоточенных и распределенных хаотических динамических систем.

6.3. Реконструкция динамической системы по траектории нерегулярного аттрактора.

В ряде случаев, в том числе и в проблеме управления хаосом, необходимо решать задачу восстановления системы дифференциальных уравнений исходя из заданного множества точек в фазовом пространстве, принадлежащих аттрактору системы. Для решения этой задачи использовались как методы синхронизации, так и прямые методы (см., например, [131–134]). Методы синхронизации основаны на использовании однонаправленной связи двух хаотических систем. При сильной связи амплитуды колебаний связанных систем идентичны и изменяются одинаково хаотически. Параметры синхронизирующей системы подбираются таким образом, чтобы ее колебания совпадали с колебаниями неизвестной системы, решения которой заданы исходным множеством точек. Прямые методы основаны на аппроксимации производных, вычисляемых приближенно по заданному множеству точек, некоторыми функциями, чаще всего полиномами. Как следует из

работ [133, 134], эти методы дают достаточно хорошие результаты, если известен вид правой части системы и задача является линейной по неизвестным параметрам. Если же правая часть системы дифференциальных уравнений неизвестна, то такой подход, как показали наши исследования, не позволяет решить задачу, так как решения определенной таким образом системы не совпадают с решениями для заданного множества точек. Здесь мы представляем прямой метода решения указанной задачи, свободный от отмеченных недостатков.

Множество точек, определяющее отрезок траектории нерегулярного аттрактора в пространстве $\mathbb{R}^m$, задает некоторую кривую, которая может быть описана, например, параметрически $x_i(t_k)$, $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$, n — множество значений независимой переменной t (или количество точек в заданном множестве). Положим также, что случайные погрешности, с которыми заданы точки множества, некоррелированны и имеют нулевое математическое ожидание. Множество $x_i(t_k)$ фактически определяет значения x_{ik} сеточных функций, заданных на сетке $\tau = \{t_k : k = 1, 2, ..., n\}$. Последние задают в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ некоторую сеточную траекторию $x(t_k)$. Аппроксимируем множество значений x_{ik}, $i = 1, ..., m, k = 1, ..., n$, сеточной функции $x(t_k)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ решением $x(t, \theta) = (x_1(t, \theta), ..., x_m(t, \theta))^{\mathrm{T}}$ системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \theta),\ x \in \mathbb{R}^m,\ \theta \in \mathbb{R}^p \tag{6.71}$$

на промежутке $t \in [0, t_n]$ с начальным условием $x(0) = x_0$, где $\theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p)^{\mathrm{T}}$ — вектор параметров, p — размерность пространства параметров. Из множества решений системы (6.71) необходимо выбрать такое $x(t, \theta)$, траектория которого в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наиболее близка к заданной сеточной функции $x(t_k)$. Для оценки близости используем функционал

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \big(x_{ik} - x_i(t_k, \theta)\big)^2. \tag{6.72}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение вектора параметров θ^*, при котором функционал (6.72) будет иметь наименьшее значение. Необходимое условие экстремума функционала

$$\frac{\partial \Phi(x, \theta)}{\partial \vartheta_j} = 0,\ j = \overline{1, p},$$

равносильно системе из p уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \big(x_{ik} - x_i(t_k, \theta)\big) \cdot \frac{\partial x_i(t_k, \theta)}{\partial \vartheta_j} = 0,\ j = \overline{1, p}, \tag{6.73}$$

нелинейных относительно неизвестного вектора параметров $\theta^* = (\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \ldots, \vartheta_p^*)^{\mathrm{T}}$. Для численного решения системы (6.73) с помощью итерационного процесса разложим решение $x(t,\theta)$ системы (6.71) в ряд Тейлора в некотрой точке θ^0

$$x(t_k,\theta) = x(t_k,\theta^0) + \sum_{l=1}^{p} \left.\frac{\partial x(t_k,\theta)}{\partial \vartheta_l}\right|_{\theta=\theta^0} \cdot (\theta_l - \theta_l^0) + O(|\theta-\theta^0|^2) \qquad (6.74)$$

и отбросим величины второго порядка малости. Тогда, подставляя (6.74) в (6.73), получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\left[\frac{\partial x_i(t_k,\theta)}{\partial \vartheta_j}\cdot\frac{\partial x_i(t_k,\theta)}{\partial \vartheta_l}\right]_{\theta=\theta^0}(\theta_l-\theta_l^0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\bigl(x_{ik} - x_i(t_k,\theta^0)\bigr)\cdot\left.\frac{\partial x_i(t_k,\theta)}{\partial \vartheta_j}\right|_{\theta=\theta^0},\ j=\overline{1,p},$$

линейную относительно приращений $\delta_l^0 = \theta_l - \theta_l^0$. В векторной форме последняя система имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} U^{\mathrm{T}}(t_k,\theta^0)U(t_k,\theta^0)\delta^0 = \sum_{k=1}^{n} U^{\mathrm{T}}(t_k,\theta^0)\bigl(x_k - x(t_k,\theta^0)\bigr), \qquad (6.75)$$

где $U_{m\times p}(t_k,\theta^0)$ — матрица с элементами $u_{ij} = \partial x_i(t_k,\theta)/\partial\theta_j$ при значении $\theta = \theta^0$, $\delta^0 = \theta - \theta^0$, x_k — вектор $(x_{1k},\ x_{2k},\ \ldots,\ x_{mk})^{\mathrm{T}}$ сеточной функции $x(t_k)$ в точке с номером k в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $x(t_k,\theta^0)$ — решение уравнения (6.71) в моменты времени $t = t_k$ при значении $\theta = \theta^0$. Матрица U является решением дифференциального матричного линейного неоднородного уравнения

$$\dot{U} = PU + Q$$

с начальным условием $U(0) = O_{m\times p}$, где $O_{m\times p}$ — нулевая матрица, а матрицы $P_{m\times m}$ и $Q_{m\times p}$ — производные от правой части системы (6.71) соответственно по переменным x и θ:

$$P = D_x F(x,\theta), \quad Q = D_\theta F(x,\theta).$$

Таким образом, все необходимые составляющие для решения системы (6.75) линейных алгебраических уравнений находятся из решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,\theta^0), \\ \dot{U} &= P^0 U(t,\theta^0) + Q^0(x). \end{aligned} \qquad (6.76)$$

на отрезке $t \in [0, t_n]$ при указанных выше начальных условиях. Матрицы P^0 и Q^0 в (6.76) вычисляются при значении вектора $\theta = \theta^0$ и $x = x(t, \theta^0)$.

Найденное при решении системы (6.75) значение δ^0 минимизирует сумму квадратов

$$\Phi^0(x, \theta) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x(t_k, \theta^0) - U(t_k, \theta^0)\delta^0|^2$$

и является в фазовом m-мерном пространстве оценкой наименьших квадратов для вектора $\delta = \theta - \theta^0$. Поэтому величина $\theta^1 = \theta^0 + \delta^0$ будет являться уточненной по отношению к θ^0 оценкой вектора параметров θ и далее может использоваться для последующего улучшения решения, если в приведенном выше алгоритме вместо значения θ^0 положить θ^1. Таким образом, начиная с некоторого значения θ^0 найдем последовательность векторов $\{\theta^\nu\}$

$$\theta^\nu = \theta^{\nu-1} + \delta^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2 \ldots,$$

где ν — номер итерации. Предел этой последовательности при $\nu \to \infty$ есть решение θ^* нашей задачи.

В качестве примера нами рассмотрена задача восстановления динамической системы Рёсслера по заданному отрезку траектории, созданному в результате численного решения системы (6.24) при следующих значениях параметров: $a = 0.5$, $b = 0.75$, $\mu = 2.4$. Для аппроксимации заданного множества использовалась система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = a_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ijk} x_j x_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

с квадратичным полиномом в правой части, содержащим 30 неизвестных параметров a_i, a_{ij}, a_{ijk}. Разработанный нами метод позволил решить подобную задачу при нулевом приближении начального вектора θ^0.

Было установлено, что точность в определении параметров зависит, главным образом, от погрешности, с которой заданы точки исходного множества. В нашем случае последняя определялась ошибками численного интегрирования исходной системы методом Рунге-Кутта и ошибками округления. Поэтому погрешность в определении значений параметров оказалась настолько малой, что полученные ненулевые значения: $a_{12} = a_{13} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0.5$, $a_3 = 0.75$, $a_{33} = -2.4$, $a_{313} = 1$ полностью совпали с параметрами системы (6.24) при неуменьшаемом значении функционала $\Phi \sim 10^{-10}$.

Список литературы

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.– Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1967, N 90, 210 с.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1978, 304 с.
3. Итоги науки техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы.–М.: ВИНИТИ, 1985, т. 1, 243 с., т. 2, 312 с.
4. *Синай Я. Г.* Современные проблемы эргодической теории. – М.: Физматлит, 1995, 202 с.
5. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы //Успехи мат. наук, 1970, т. 25, N 1, с. 113–185.
6. *Рюэль Д. Такенс Ф.* О природе турбулентности. Странные аттракторы.– М.: Мир, 1981, с. 117–151.
7. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.– М.: Мир, 1975, 302 с.
8. *Guckenheimer J. and Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. — N.-Y.: Springer, 1983, 453 p.
9. *Hirsch M. and Smale S.* Differential equations, dynamical systems and linear algebra.– Academic Press, N.-Y., 1974, 358 p.
10. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометричская теория динамических систем.– М.: Мир, 1986, 302 с.
11. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2002, 360 с.
12. *Хакен Г.* Синергетика.– М.: Мир, 1985, 423 с.
13. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику.– М.: Наука, 1990, 272 с.
14. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе.– М.: Меркурий Пресс, 2000, 366 с.
15. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение. – М.: Мир, 1988, 240 с.
16. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос.– М.: Наука, 1992, 541 с.
17. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130–141.
18. *Guckenheimer J. and Williams R.F.* Structural stability of Lorenz attractors//Publ. Math. IHES, 1979, 50, p. 59–72.
19. *Гукенхеймер Дж.* Странный, странный аттрактор. Кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Гл. 12.– М.: Мир, 1980, с. 284–293.

20. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца. Кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Добавление II.– М.: Мир, 1980, с. 317–335.
21. *Шильников Л.П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб., 1970, 81(123), N 1, с. 92–103.
22. *Williams R.F.* The structure of the Lorenz attractors //Publ. Math. IHES, 1979, 50, p. 321–347.
23. *Yorke J.A. and Yorke E.D.* Metastable chaos: the transition to sustained chaotic oscillations in a model of Lorenz// J. Stat. Phys., 1979, 21, p. 263–277.
24. *Sparrow C.* The Lorenz equations: Bifurcations, chaos and strange attractors.– Springer Verlag, N.-Y. 1982.
25. *Rychlik M.* Lorenz attractors through a Shil'nikov-type bifurcation, Part 1. Ergodic theory dynamical systems, 1989, 10, p. 793–821.
26. *Robinson C.* Dynamical Systems, 2nd ed.–CRC Press, N.-Y., 1995.
27. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem// Found. Comput. Math., 2002, 2, p. 53–117.
28. *Смейл С.* Математические проблемы следующего столетия. Кн.: Современные проблемы хаоса и нелинейности. – Ижевск: ИКИ, 2002, с. 280–303.
29. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новый взгляд на аттрактор Лоренца // Дифференциальные уравнения, 2001, т.37, N 11, с. 1494–1506.
30. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Переход к хаосу в системе Лоренца через полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 2: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: Физматлит, 2002, с. 179–194.
31. *Калошин Д. А., Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* О некоторых особенностях перехода к хаосу в системе уравнений Лоренца. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 3: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: Физматлит, 2003.
32. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* Actual Problems of Chaotic Dynamics in Dissipative Systems of Nonlinear Ordinary Differential Equations // Dynamics of Nongenerous Systems, 2003, No.7.
33. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* О сценариях перехода к хаосу в нелинейных динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 3: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.:Физматлит, 2003.
34. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* О переходе к хаосу в нелинейных динамических системах через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов // Дифференциальные уравнения, 2002, т. 38, N 12, с. 1606–1610.

35. *Магницкий Н.А.* О природе хаотических аттракторов нелинейных диссипативеных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 4: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: Физматлит, 2004
36. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: ИЛ, 1958, 474 с.
37. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.– М.: Мир, 1970, 720 с.
38. *Понтрягин Л. С.*Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982, 331с.
39. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3. – М.: ВИНИТИ, 1985, с. 5–304.
40. *Заславский Г.М.*Стохастичность динамических систем.– М.: Наука, 1984, 272 с.
41. *Самарский А.А. Гулин А.В.*Численные методы. – М.: Наука, 1989, 430 с.
42. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1979, 285 с.
43. *Былов Б.Ф.,Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова.– М.:Наука, 1966, 576 с.
44. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения.– М.: Наука, 1966, 530 с.
45. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980, 368 с.
46. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла.– М.: Мир, 1985, 280 с.
47. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.– М.: Мир, 1973,166 с.
48. *Магницкий Н.А.* Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем.– М.: Наука, 1992, 160с.
49. *Далецкий Ю.Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970, 534 с.
50. *Анищенко В. С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.– Саратов, 1999, 368 с.
51. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors// Rev. Mod. Phys., 1985, 57, N3, p. 617–656.
52. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос.– М.: Физматлит, 2001, 296 с.
53. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания.–М.: Наука, 1987, 424 с.
54. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of Nature. – Freeman, San Francisco, 1982.
55. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы// Докл. АН СССР, 1937, 14, 247–251.

56. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.– М.: Наука, 1990, 488 с.
57. *Smale S.* Structurally stable systems are not dense// Amer. J. Math., 1966, v. 88.
58. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A, 1976, v. 57, N 5, p. 397–398.
59. *Магницкий Н.А.* Бифуркация Хопфа в системе Рёсслера // Дифференциальные уравнения, 1995, т. 31, N3, с.538-541.
60. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family// IEEE Trans. Circuits and Syst. CAS-33, 1986, pt. 1,2, p. 1073–1118.
61. Chua's circuit: A paradigm for chaos. Ed. by Madan R.N.– Singapore: World scientific, 1993.
62. *Shil'nikov L.P.* Chua's circuit: rigorous results and future problems // Int. J. Bifurcation and Chaos, 1994, v. 4, No 3, p. 489–519.
63. *Магницкий Н.А.* Математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики. – Тр. ВНИИСИ АН СССР, 1991, с.16–22.
64. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Распределенная модель саморазвивающейся рыночной экономики. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 2: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.– М.: Физматлит, 2002, с. 243–262.
65. *Гиббон Дж.* Дисперсионные неустойчивости в нелинейных системах: вещественные и комплексные уравнения Лоренца. Кн.: Синергетика. – М.: Мир, 1984, с. 164–179.
66. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations// J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 25–52.
67. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. – Кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1986, т. 5, с. 5–218.
68. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. - Кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1986, т. 5, с. 219–284.
69. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т.1 – М.: Мир, 1984, 350 с.
70. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980, 608 с.
71. *Shil'nikov A.L., Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* Normal forms and Lorenz attractors // Int. J. Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3, No 5, p. 1123–1139.
72. *Грибов А.Ф., Крищенко А.П.* Аналитические условия существования гомоклинической петли в цепях Чуа. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.– М.: Физматлит, 2001, с. 263–268.
73. *Chen X.* Lorenz equations. Part I: Existence and nonexistence of homoclinic orbits // SIAM J. Math. Anal., 1996, v. 27, No 4, p. 1057–1069.

74. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* О нахождении гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, N 11, с. 1511–1520.

75. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.– М.: Наука, 1987, 368 с.

76. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн., 1964, т. 26 No 1, с. 61–71.

77. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on T^m, $m \geq 3$ // Comm. Math. Phys., 1979, v. 64, N 1, p. 35–40.

78. *Калошин Д.А.* О построении бифуркационной поверхности гомоклинической бабочки в системе Лоренца//Дифференциальные уравнения, 2003, т.39, N 11.

79. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции.– М.: Мир, 1986, 250 с.

80. *Vallis G.K.* Conceptual models of El Nino // J. Geophys. Res., 1988, v. 93, p. 13979–13991.

81. *Vallis G. K.* A chaotic dynamical system// Science, 1986, v.232, p. 243-245.

82. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны.– М.: Наука, 1997.

83. *Кук А., Робертс П.* Система двухдискового динамо Рикитаки. Странные аттракторы.– М.: Мир, 1981, с. 164–192.

84. *Новиков М.Д., Павлов Б.М.* Об одной нелинейной модели со сложной динамикой //Вестник МГУ, сер. "Вычисл. мат. и кибернет.", 2000, N2.

85. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* // ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 617–629.

86. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН, 1983, т. 141, в. 2, с. 343–374.

87. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Ю.Е.* Разностные уравнения и их приложения.– Киев: Наукова думка, 1986, 280 с.

88. *Li T.Y., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly, 1975,v. 82, No 10, p. 982–985.

89. *Collet P., Eckmann J.P., Lanford O.E.* Universal properties of maps of an interval // Comm. Math. Phys., 1980, v. 76, p. 211–254.

90. *Jakobson M.V.* Absolutely continuous measures for one parameter families of one-dimensional maps // Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, No 1, p. 39–88.

91. *Saltzman B.* Finite amplitude free convection as an initial value problem // J. Atmos. Sci., 1981, 19, p. 329.

92. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А.* О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации. Современные проблемы математики. Итоги науки итехники, т. 28. – М.: ВИНИТИ, 1986, с. 207–313.
93. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А.* Двухкомпонентные динамические системы в окрестности точки бифуркации. Математическое моделирование. – М.: Наука, 1986, с. 7–59.
94. *Магницкий Н.А., Сидоров С. В.* Некоторые подходы к управлению диффузионным хаосом // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 5, с. 664–669.
95. *Магницкий Н.А., Сидоров С. В.* Стабилизация неустойчивых периодических решений в уравнениях с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36, N 11, с. 1488–1492.
96. *Turing A.* On the chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1952, Ser. A, 237, p. 37–52.
97. *Lefever R., Prigogine I.* Symmetry-breaking instabilities in dissipative systems // J. Chem. Phys., 1968, 48, p. 1695–1700.
98. *Дернов А. В.* Регулярная динамика и диффузионный хаос в модели брюсселятор // Дифференциальные уравнения, 2001, т. 37, N 11, с. 1554–1556.
99. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // Progr. Theor. Phys., 1975, v. 54, No 3, p. 687–699.
100. *Mackey M., Glass L.* Oscillations and chaos in physiological control systems // Sciense, 1977, v. 197, p.287–289.
101. *Попов В.В.* Экономический цикл и норма прибыли в США.– М.: Наука, 1989, 176 с.
102. *Дернов А.В.* Диффузия капитала и спроса в модели саморазвивающейся рыночной экономики. В сб . Нелинейная динамика и управление. Вып. 2: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: Физматлит, 2002, с. 233–242.
103. *Chen G., Dong X.* From chaos to order: perspectives, methodologies and applications. – World Scientific, Singapore, 1998, 743 p.
104. *Лоскутов А.Ю.* Хаос и управление динамическими системами. В сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.– М.: Физматлит, 2001, с. 163–216.
105. *Андриевский Б. Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика, 2003, 5, с. 3–45.
106. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979, 512 с.
107. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.– М.: УРСС, 2003, 312 с.

108. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант.– М.: УРСС, 2003, 240 с.
109. *Sepulchre J., Babloyantz A.* Controlling chaos in a network of oscillators // Phys. Rev., v. E48(2), 1994, p. 119-125.
110. *Magnitskii N.A.* Stabilization of unstable periodic orbits of chaotic maps // Computers Math. Applic., 1997, v. 34, No.2–4, p. 369–372.
111. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Управление хаосом в нелинейных динамических системах// Дифференциальные уравнения, 1998, т.34, N 11, с. 1501–1509.
112. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* О некоторых подходах к проблеме управления диффузионным хаосом// Дифференциальные уравнения, 1999, т.35, N 5, с. 664–669.
113. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* Nonlinear Dynamics on the Life and Social Science. – IOS Press, NATO Science Series. Ser. A. Life Science, 2001, v.320, p.p.33–44.
114. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Стабилизация неустойчивых периодических решений в уравнениях с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, N 11, с. 1488–1492.
115. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Локализация и стабилизация неустойчивых решений хаотических динамических систем. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: Физматлит, 2001, с. 217–246.
116. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett., 1990, v. 4, p. 1196–1199.
117. *Shinbort T., Grebogi C., Yorke J.A.* Using small perturbations to control chaos // Nature, 1993, v. 363, No 3, p. 411–417.
118. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A., 1992, v. 170, p. 421–428.
119. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений// Доклады РАН, 1996, т. 351, N 2, с. 175–177.
120. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических динамических систем// Доклады РАН, 1997, т. 352, N 5, с. 610–612.
121. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неустойчивых циклов хаотических отображений// Доклады РАН, 1997, т. 355, N 6, с. 747–749.
122. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неустойчивых предельных циклов двумерных динамических систем. Методы анализа нелинейных систем. – М.: Диалог-МГУ, 1997, с. 84–87.
123. *Князев Е.А., Магницкий Н. А., Сидоров С.В.* Стабилизация неустойчивых стационарных точек в уравнениях с запаздывающим аргументом. Нелинейная динамика. Сб. трудов ИСА РАН.– М.: УРСС, 1999, с. 133–141.
124. *Дернов А.В.* Стабилизация неустойчивых периодических орбит одномерных хаотических отображений. Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.– М.: Физматлит, 2001, с. 247–252.

125. *Калошин Д.А.* Поиск и стабилизация неустойчивых седловых циклов в системе Лоренца // Дифференциальные уравнения, 2001, т.37, N 11, с. 1559–1561.
126. *Дернов А.В.* О новых подходах к проблеме управления хаосом. Сб. трудов ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова.– М.: Диалог МГУ, 2002 в. 1, с. 31.
127. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor// Comm. Math. Phys., 1976, v. 50, p. 69.
128. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отображениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов// Успехи математических наук, 1970, т. 25, 2, с. 141–192.
129. *Machta J.* Power low decay of correlation in a billiard problem// J. of Stat Phys., 1983, v. 32, No 3, p. 555–564.
130. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1 – М.: Наука, 1985, 336 с.
131. *Brawn R., Rulkov N.F., and Tracy E.R.* Modelling and synchronizing chaotic systems from time-series data // Phys. Rev. E, 1994, v. 49, p. 3784.
132. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., and Abarbanel H.D.* Generalized synchronization of chaos in directional coupled chaotic systems// Phys. Rev. E, 1995, v. 51(2), p. 980–994.
133. *Baker C.L., Collub J.P., Blackburn J.A.* Inverting chaos: Extracting system parameters from experimental data// Chaos, 1996, No 4, p. 528–533.
134. *Parlitz U.* Estimating model parameters from time series by autosynchronization // Phys. Rev. Lett., 1996, v. 76, p. 1232.
135. *Сидоров С.В.* Восстановление параметров динамической системы. Математика, компьютер, образование . V Междунар. конф.,– Дубна, 26-31 янв. 1998, с. 183.
136. *Сидоров С.В., Сидоров С.С.* О реконструкции динамической системы с хаотическим поведением. Математика, компьютер, образование. VII Междунар. конф.,– Дубна, 24-29 янв. 2000, с. 296.

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Пригожин И. **От существующего к возникающему.**
Малинецкий Г. Г. **Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент.**
Табор М. **Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике.**
Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. **Физика процессов эволюции.**
Галимов Э. М. **Феномен жизни. Происхождение и принципы эволюции.**
Олемской А. И., Кацнельсон А. А. **Синергетика конденсированной среды.**
Милованов В. П. **Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация.**
Москальчук Г. Г. **Структура текста как синергетический процесс.**
Евин И. А. **Искусство и синергетика.**
Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. **Гравитация.**
Розенталь И. Л., Архангельская И. В. **Геометрия, динамика, Вселенная.**
Капитонов И. М. **Введение в физику ядра и частиц.**
Ляпунов А. М. **Работы по теории потенциала.**
Иванов Б. Н. **Законы физики.**
Эддингтон А. **Пространство, время и тяготение.**
Гамов Г. **Мистер Томпкинс в Стране Чудес, или истории о c, G и h.**
Гамов Г. **Мистер Томпкинс исследует атом.**
Вайнберг С. **Мечты об окончательной теории.**

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Трубецков Д. И. **Введение в синергетику.**
Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. **Современные проблемы нелинейной динамики.**
Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. **Синергетика и прогнозы будущего.**
Баранцев Р. Г. **Синергетика в современном естествознании.**
Баранцев Р. Г. и др. **Асимптотология — путь к целостной простоте.**
Чернавский Д. С. **Синергетика и информация (динамическая теория информации).**
Пригожин И., Стенгерс И. **Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.**
Пригожин И., Стенгерс И. **Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.**
Пригожин И., Николис Г. **Познание сложного. Введение.**
Пригожин И., Гленсдорф П. **Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.**

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс **(095) 135–42–16, 135–42–46**
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *Интернет-магазине:* http://URSS.ru

Издательство УРСС
Научная и учебная литература