Нарожная Н. В. Основания геометрии.
Издание третье, доработанное.
Аннотация.

Основными объектами в данной работе являются точки, фигуры и геометрические преобразования. На основании только собственных основных понятий построена Евкидова геометрия (не зависимая от теорий множеств и действительного числа). Аксиома параллельности исключена как не проверяемая в бесконечности. Определение перемещения связано с понятием ориентации, т.е. стало идеализацией перемещения физического (зеркальное отображение уже не является частным случаем перемещения). Система аксиом является общей для трехмерного пространства.

Предисловие.

Во всех известных геометриях вопросы ориентации рассматриваются не из принятых основных положений, а на основе побочного (не имеющегося в основаниях) положении о движении часовой стрелки или винта или положения левой и правой руки. В данных основаниях эти вопросы исследуются на основании отношения «точка лежит слева (справа)».

Значительная часть аксиом в этой работе отражают взаимное расположение точек. Прямая и плоскость – определяемые (не аксиоматически) объекты и отношения между ними являются следствиями отношений между точками. Так геометрия углубляется до уровня простейших геометрических объектов-точек и отношений между ними, когда физика углубилась до уровня элементарных частиц и их взаимодействий. А углубление должно привести к новым результатом.

Большие возможности проявились уже в том, что данные основания работают без привлечения дополнительных аксиом из теории действительных чисел и других побочных положений (о движении часовой стрелки, аксиом фигуры, аксиом величины) в отличие от известных признанных оснований.

Построения в данных основаниях выполнены до того уровня, когда получены все утверждения (общие для геометрий с разными основаниями), на основе которых дальнейшие геометрические построения уже не зависят от аксиом. При этом не обнаружены противоречия в исходных положениях. Значит, данные основания являются полными и непротиворечивыми. Если же будет обнаружена избыточность, то это будет шагом вперед по усовершенствованию данных оснований.

Благодарю за ценные замечания заведующего кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания ГОУ ВПО МГПУ, профессора С. Л. Анатасяна и доцента, канд. физ. мат. наук В. И. Глизбурга. Буду также признательно всем читателям за критику настоящего издания.

За ценные замечания спасибо Sonic-участнику математического форума Math Help Planet, Sonic - 86 участнику форума e-science.ru, а также модератору этого форума AV 77 за большую помощь в подготовке данного издания.

1. Введение

На протяжении длительного времени «Начала» Евклида считались совершенными, единственно возможными и оставались неизменными. Начиная с XVIII в. они начинают осмысливаться на уровне требований того времени к основаниям наук. Аксиома параллельности (пятый постулат) [1] представлялась сложной и не очевидной, и её пытались доказать на основании других аксиом. Для этого пятый постулат заменяется его отрицанием или каким-либо определением, эквивалентным отрицанию. На основании измененной системы аксиом и постулатов доказываются всевозможные предложе ния, логически следующие из неё. Если пятый постулат действительно зависит от других аксиом и постулатов, то измененная система должна быть противоречива [2].

Исключив из оснований Евклида пятый постулат, Саккери (1733), Ламберт (1766) и Лежандр (1752-1833) получили, что только при введении предложений, эквивалентных пятому постулату, параллельные прямые остаются параллельными в их наглядном смысле. В других случаях результатом было противоречие или парадоксальные свойства в расположении прямых [2].

Лобачевский для доказательства независимости пятого постулата заменил его следующей аксиомой: *«Через точку вне прямой на плоскости проходят две прямые, не пересекающие данную»*, надеясь обнаружить противоречие в системе следствий. Но развив свою систему до объема «Начал», он не обнаружил в ней противоречия [2]. Этим была доказана возможность построения геометрий с аксиоматикой, отличной от Евклидовой. Несколько позже к таким же результатам пришел и Бойяи [3].

Результаты исследований по пятому постулату можно объяснить следующим образом. Общими областями выполнения первых четырех постулатов являются плоскость и трехмерное пространство. Пятый постулат выполняется на плоскости. Следовательно, общей областью выполнения всех пяти постулатов является плоскость. Каждое из утверждений, на которое заменяется пятый постулат, выполняется на плоскости или в пространстве или не выполним в этих областях. Соответственно, общей областью выполнения первых четырех постулатов и этого утверждения будет плоскость или трехмерное пространство или вместе они не выполнимы ни в какой области. В первом случае свойства Евклидовых параллельных - непересекающихся прямых в среде, определяемой пятью постулатами -, которые остаются по-прежнему на плоскости, соответствуют нашим представлениям о них. Во втором случае Евклидовы параллельные, оказавшись в трехмерном пространстве, не всегда остаются параллельными в нашем представлении, приводя в недоумение исследователя, который полагает их лежащими в одной плоскости. В третьем случае – не существования общей области выполнения исходных предложений – построение геометрии не возможно, что обнаруживается логическим противоречием.

Аксиома о параллельных прямых Лобачевского выполняется в трехмерном пространстве. Следовательно, общей областью выполнения первых четырех постулатов и этой аксиомы есть пространство. Отсюда необычные свойства Евклидовых параллельных прямых, соответствующие второму случаю.

После работ Лобачевского и Бойяи исчезло «недоверие» к аксиоме параллельности как необходимой, но осталось неудовлетворенность «в связи с невозможностью проверить с полной достоверностью, что две прямые не пересекаются» [3]. И если нельзя исключить аксиому параллельности из аксиоматики Евклида, то можно создать, как уже доказано, другую аксиоматику без этой аксиомы. Так появляются метрическая геометрия, использующая понятие действительного числа, которое сопоставляется расстоянию между двумя точками [3,5], и векторная аксиоматика Вейля на основе векторной алгебры [6]. Эти аксиоматики уже незамкнутые, неисчерпывающие [5], т.к. в них кроме правил грамматики, логики и понятия натурального числа подразумеваются известными также понятия из теории действительных чисел и векторной алгебры.

Со временем в геометрии Евклида была обнаружена недостаточная строгость доказательств, неполнота и избыточность основания, которая ликвидировалась исключением зависимого четвертого постулата [1]. Аксиоматика Евклида изменяется так, чтобы сделать возможными строгие доказательства. Для этого вводятся аксиомы, которые неявно использовались Евклидом и другие, в т.ч. аксиома Паша. Итоговой работой в этом направлении в 1899 г. стали «Основания геометрии» Гильберта. После замечания Пуанкаре автор дополнил их аксиомой полноты [5].

Понятие движения было положено в основания геометрии в работе Г.Гельмгольца (1868) «О фактах, лежащих в основаниях геометрии». Автор увидел основания геометрии в механическом движении, т.е. перемещении, твердых тел [4]. После Дж.Пеано предлагает аксиоматическое определение основного понятия «перемещение», вошедшее в основания геометрии его ученика М.Пиери (1899). В его аксиоматике было всего два основных понятия – точка и движение (перемещение), следствием чего явилась ее чрезмерная громоздкость. Затем следует основания геометрии с основным понятием наложения (перемещения, движения) немецкого математика Шура (1904) и др. [4].

В некоторых работах [5,7,8,9] понятие «движение» определяется как преобразование, сохраняющее расстояние (или эквивалентно ему), и равными называются фигуры, которые сопоставлены др. др. некоторым движением. Это повлекло за собой включение в группу движения (перемещения) и «зеркальное отображение», и равными оказались фигуры, которые соответствуют неодинаковым по форме предметам, например, сапогам – левому и правому (ведь мы не надеваем на левую ногу то левый, то правый сапог). Как точки и отрезки являются идеализацией некоторых реальных предметов, так и отношение равенства должно быть идеализацией отношения одинаковости предметов того мира, который мы воспринимаем как действительный.

В работе [4] вместо определения параллельных прямых и аксиомы параллельности вводится определение параллельных отрезков следующим образом: «Аксиома параллельных отрезков. Если отрезки AC, BD равны и идут в одну сторону от отрезка AB под прямым углом, то CD=AB. Отрезки AC, BD мы называем параллельными» В этой работе основными объектами являются точки и отрезки. Автор обосновывает преимущество отрезка по сравнению с прямой как основного объекта тем, что исторически первыми были понятия точки и отрезка (а не прямой) как абстракции колышков и натянутой веревки, используемых землемерами, а также тем, что отрезки и параллельные отрезки нагляднее, чем прямые и параллельные прямые. Можно было бы спорить о том, что принять основным объектом - отрезок или прямую, если бы не появилось осознание фигуры как основного объекта. В работах [4,5] приведено аксиоматическое определение фигуры с основными объектами – точки и фигуры. И если принять их основными объектами геометрии, то и отрезок, и прямая станут определяемыми фигурами.

Возникнув из практики земледелия [1], геометрия в своем начале имела основными объектами точки и ограниченные прямые (потом стали точки и прямые или точки и отрезки) – идеализации предметов, используемых землемерами [4]. Со временем она стала наукой, изучающей формы объектов физического мира и пространственные отношения между ними. Поэтому её основные объекты должны быть сопоставлены физическим объектам. Так в физике существуют такие понятия как частицы, материальные точки, а также тела вообще. В геометрии им могут соответствовать понятия точки как мысленного образа предельно точно определенного места, так что в нем уже не различаются разные места [4] или фигуры вообще. В физике имеется также понятие «взаимодействие»тел. Результатом его (не полным) является изменение положения тел в пространстве, их формы и размеров и вообще взаимного расположения частиц. В геометрии таким результатам могут соответствовать геометрические преобразования, которые сопоставляют точки с изменением положения образуемой этими точками фигуры, ее формы и размеров и вообще взаимного расположения точек. Таким образом, в аксиоматике той геометрии, которая может стать геометрической моделью физического мира, основными объектами должны быть точки и фигуры, и одним из основных отношений «преобразование сопоставляет».

Во всех известных основаниях определение перемещения не связано с понятием ориентации, следствием чего явилось равенство фигур левого и правого сапогов.

Таким образом, по мнению автора следует:

1) заменить определение параллельных прямых, основанное на непроверяемом в бесконечности отношении пересечения прямых;

2) исключить аксиому параллельности как неочевидную и не проверяемую в бесконечности, сохраняя прежнюю полноту;

3) ввести определение ориентации на основе принятых основных положений;

4) определить преобразование перемещение как идеализацию физического перемещения, т.е. зеркальное отображение не должно быть частным случаем перемещения;

5) считать основными и первичными объектами точки, которые образуют все фигуры, в т.ч. прямую и плоскость;

6) построить основания геометрии Евклида (геометрии перемещения) на единой системе исходных положений для трехмерного пространства (заменить древнее построение с последующими пристройками одним современным зданием).

Попытаемся построить основания, выполняя 1) – 6).

Примечание: Целью моей работы не было создание лучшей геометрии в методологическом плане. Одной из задач было создание геометрии не зависимой (использующий как собственные основные положения, так и положения теории действительного числа и теории множеств), а геометрии, основанной только на собственных основных понятиях: основных геометрических объектах и пространственных отношениях между ними.

2. Основные понятия и определения.

К основным понятиям отнесем основные объекты и отношения, приведенные ниже.

Основные объекты:

1) точки;
2) фигуры;
3) геометрическое преобразование (преобразование).

Основные отношения:

1) точка A принадлежит фигуре F;

2) точка B лежит между точками A, C (это же отношение можно формулировать: точка B лежит между точками C, A и обозначать A.B.C или C.B.A);

3) точка A лежит слева (справа) от точки B при точке зрения C;

4) геометрическое преобразование (преобразование) f сопоставляет точке A точку A_1;

5) фигура F_1 равна фигуре F_2;

Будем говорить:

1) *фигура* F_1 *принадлежит фигуре* F_2, или фигура F_2 содержит фигуру F_1, если каждая точка фигуры F_1 принадлежит фигуре F_2;

2) *фигуры* F_i (i = 1, 2…n) *образуют фигуру* F, если каждая из фигур F_i принадлежит фигуре F и у F нет точек, не принадлежащих хотя бы одной из фигур F_i;

3) *фигуры* F_1 и F_2 *различны*, если существует хотя бы одна точка, принадлежащая только одной из этих фигур;

4) *фигуры* F_1 и F_2 *– одна и та же фигура, или фигуры* F_1, F_2 *тождественны* (обозначая $F_1 \equiv F_2$), если они образованны одними и теми же точками;

5) *фигура существует*, если существует каждая точка этой фигуры.

6)

3. Аксиомы, постулат, определения.

3.1. Определения. Постулат и аксиомы, не зависимые от вида преобразования.

3.1.1. *Аксиомы существования и принадлежности.*

Аксиома I_1. *Существуют по крайней мере две точки. Каждой фигуре принадлежит по крайней мере одна точка. Точка есть фигура. Она принадлежит себе и никакие другие точки ей не принадлежат.* [4]

Аксиома I_2. *(аксиома двух точек). Для любых двух точек A,B, существует по крайней мере одна точка C, лежащая между точками A,B (A.C.B) и точки D,E такие, что точка A лежит между точками D,B (D.A.B), а также точка G такая, что никакая из точек A,B,G не лежит между двумя из этих точек.*

3.1.2. *Определения и аксиомы взаимного расположения точек.*

Будем говорить, что *три точки связаны отношением «лежит между»*, если одна из них лежит между двумя другими из этих точек и не связаны этим отношением, если ни одна из них не лежит между двумя другими данными точками.

Если одну из двух точек полагаем первой, или начальной, а другую-второй, или конечной, то такие две точки называем *упорядоченной парой точек*, которая задает направление из первой точки во вторую (из начальной в конечную). Упорядоченную пару точек A, B, как и соответствующее ей направление будем обозначать A.B (на первом месте – обозначение начальной точки).

Будем говорить:

1) *точки* B,C *лежат в противоположных направлениях при точке зрения* A (направления A.B и A.C – противоположные, или точки B,C противолежат при точке зрения A), если точка A лежит между точками B,C (обозначаем как и отношение «лежит между» B.A.C или C.A.B);

2) *точки* B,C *лежат в одном направлении при точке зрения* A (обозначаем A→B.C или A→C.B) или точка B (C) лежит в направлении A.C (A.B) или A.B и A.C – одно и то же направление или точка B (C) лежит в том же направлении, что и точка C (B) при точке зрения A, если точка A связана отношением «лежит между» с точками B, C и не лежит между ними.

Фигуру, образованную точками, лежащими между точками А.В будем называть *промежутком* АВ или ВА и обозначать (АВ) или (ВА). Точки А,В называют *граничными точками* этого промежутка.

Отрезком АВ или ВА назовём фигуру, образованную точками А,В и точками, лежащими между ними. Точки А,В называются концами или крайними точками отрезка АВ. Отрезок АВ обозначаем [АВ] или *а*, *в*, …

Если концами отрезка является одна и та же точка А, то отрезок будем называть нулевым отрезком и обозначать А.

Если для отрезка АВ(*а*) определен такой порядок крайних точек, что точка А является первой или начальной, то такой отрезок будем называть *направленным отрезком* АВ, обозначая АВ(а). Точки А,В называют началом и концом отрезка АВ.

Прямой АВ или ВА назовём фигуру, образованную точками А,В и точками, связанными отношением «лежит между» с точками А,В. Прямую АВ будем обозначать АВ или *а, в…*

Лучом АВ назовём, обозначая [АВ или *а,в…* фигуру, образованную точками А,В и точками Х, лежащими в направлении А.В (то есть А→В.Х). Точка А называется началом луча.

Два луча с началом в точке О назовём *противолежащими*, если каждая точка одного из этих лучей противолежит каждой точке другого луча при точке зрения О.

II_1. *(Аксиома трех точек). Среди любых трех точек существует не более одной точки, лежащей между двумя другими из этих точек.*

II_2. *(Аскиома единственности противоположногонаправления). Если точки В,С противолежат точке А при точке зрения О, то точки В,С лежат в одном направлении при точке зрения О. (Если А.О.В и А.О.С, то О→В.С).*

II_3 *(Аксиома противолежания). Если точка А противолежит точке В при точке зрения О и точки В,С лежат в одном направлении при точке зрения О, то точка А противолежит также и точке С при точке зрения О. (Если А,О,В и О→В.С, то А.О.С).*

3.1.3. *Общие определения. Аксиомы плоскости.*

Углом называется фигура, образованная двумя лучами с общим началом. Лучи, образующие данный угол, называются сторонами этого угла, а общее начало этих лучей – вершинной угла. Угол, образованный лучами ОА (*а*) и ОВ (*в*) будем обозначать □АОВ (□*ав*) или □ ВОА (□ *ва*).

Угол, образованный тождественными лучами ОА и ОВ, будем называть *нулевым*, и обозначать □ АОВ или α.

Угол, стороны которого являются противолежащими лучами, называется *развернутым*.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие – противолежащие лучи.

Угол, равный своему смежному, называется *прямым*.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны каждого из этих углов являются противолежащими лучами для сторон другого угла.

Пусть точки А,В,С не связаны отношением «лежит между». *Каркасом* АВС назовём фигуру, образованную прямыми АВ, АС и ВС.

Плоскостью АВС назовём фигуру, образованную прямыми, имеющими по крайней мере две общие точки с каркасом АВС (обозначаем ÷АВС, также ÷α,÷,β..).

Будем говорить, что *точки* А,В *плоскости* α *лежат в противоположных сторонах от прямой а*∈α,если точка зрения, при которой точка А(В) противолежит точке В(А) принадлежит прямой *a* и *лежат по одну сторону от прямой a* если эта точка зрения не принадлежит прямой *a*.

Полуплоскостью ABC назовём фигуру, образованную прямой AB и точками плоскости ABC, лежащими по одному сторону с точкой C от прямой AB (обозначаем ⎮·ABC). Прямая AB называется граничной прямой полуплоскости ABC.

Фигуру, образованную точками полуплоскости ABC, не принадлежащими прямой AB, назовём *открытой полуплоскостью*.

Будем говорить, что *полуплоскости* α *и* α_1, ограниченные прямой *a лежат в противоположных сторонах от прямой a или являются противолежащими*, если каждая точка полуплоскости α и каждая точка полуплоскости α_1, не принадлежащие прямой *a*, лежат в противоположных сторонах от этой прямой.

Внутренней точкой фигуры, принадлежащей прямой, назовём точку, лежащую между двумя другими точками этой фигуры.

Будем говорить:

1) *две фигуры каждая, из которых принадлежит прямой, пересекаются*, если они имеют единственную общую внутреннюю точку;

2) *плоскость и фигура, принадлежащая прямой*, пересекаются, если одна внутренняя точка этой фигуры принадлежит данной плоскости;

3) *две плоскости пересекаются*, если они имеют единственную общую прямую;

4) *две пересекающиеся прямые перпендикулярны*, если лучи этих прямых с началом в точке пересечения образуют прямой угол;

5) *прямая перпендикулярна плоскости*, если она пересекает плоскость и перпендикулярна всякой прямой этой плоскости, содержащей точку пересечения;

6) *точка* M *лежит между лучами* OA и OB (OB и OA), обозначая [OA.M. [OB или [OB.M. [OA, если существуют точки $A_1\in$[OA и $B_1\in$[OB, для которых верно $A_1.M.B_1$;

7) *Луч* OM *лежит между лучами* OA и OB, обозначая [OA. [OM. [OB или [OB. [OM. [OA, если каждая точка луча OM, отличная от точки O, лежит между лучами OA и OB;

Аксиомы плоскости.

Аксиома III₁. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют также общую прямую, содержащую эту точку.* [4]

Аксиома III₂. *Если точки A,B,C не пренадлежащие одной прямой, принадлежат плоскости D,E,G, то плоскость D,E,G принадлежит плоскости A BC и плоскость* ABC *принадлежит плоскости* DEG.

Аксиома III₃: *Для каждой точки произвольной плоскости существует единственная прямая, содержащая эту точку, перпендикулярная данной плоскости.*

3.1.4.*Определения и аксиома ориентации.*

Если точка У лежит слева (справа) от точки X при точке зрения Z, то будем говорить также, *что точка У лежит слева (справа) при направлении зрения* Z.X (при направлении зрения из точки Z в точку X).

О точках, лежащих в направлении O.A будем говорить, что они лежат *спереди при направлении зрения* O.A; о точках, лежащих в направлении, противоположном направлению O.A – *лежат позади при том же направлении зрения.*

Пусть $OZ\perp OX_1$. *Направления зрения* Z.X *и* $Z.X_1$ будем называть *противоположными*, если верно $X.O.X_1$.

Направление зрения, заданные одной и той же парой точек с различным порядком, будем называть *взаимно обратными*.

IV₁ *Аксиома ориентации. Пусть OZ⊥÷ OXY. Тогда;*

1. *при направлении зрения Z.X каждая точка открытой полуплоскости ОХУ лежит слева (справа), а каждая точка противолежащей полуплоскости ОХУ - справа (слева);*
2. *если точка У лежит слева (справа) от точки X при точке зрения Z, то точка X лежит справа (слева) от точки У при точке зрения Z;*
3. *если точка У лежит слева (справа) при направлении зрения Z.X, то она лежит справа (слева) при направлении зрения, обратном или противоположном к Z.X.*

3.1.5 *Определения и аксиомы преобразования.*

Будем говорить, что *преобразование* f *сопоставляет фигуре* F *фигуру* F_1, если точки, сопоставленные этим преобразованием точкам фигуры F, образуют фигуру F′.

Если преобразование точке X (фигуре F) ставит в соответствие точку X′ (фигуру F'), то точку X′ (фигуру F′) называют *образом точки* X (фигуры F), а точку X (фигуру F) – *прообразом точки* X′ (*фигуры* F').

Преобразование, которое сопоставляет каждому образу преобразования f его прообраз, будем называть *обратным преобразованию* f и обозначать f^{-1}.

Преобразование, для которого существует обратное преобразование, называется *обратимым*.

Взаимно однозначным преобразованием назовём обратимое преобразование, если оно и обратное ему преобразование сопоставляют каждой точке единственную точку.

Если преобразование f сопоставляет каждой точке ту же точку, что преобразование q, то будем говорить, что *преобразование* f *равно преобразованию* q.

Если два преобразования сопоставляют хотя бы одной точке различные точки, то будем называть их *различными преобразованиями.*

Преобразование, которое сопоставляет каждой точке ту же точку, назовём *нулевым преобразованием*.

Будем говорить, что геометрическое преобразование, сопостовляющее точкам A,B,C точки A_1,B_1,C_1 соответственно, сохраняет взаимное расположение точек прямой, если отношение $A_1.B_1.C_1$ верно всегда при A.B.C.

Будем говорить, что геометрическое преобразование сохраняет непринадлежность трех точек одной прямой, если оно сопоставляет точкам, не принадлежащим одной прямой, точки, также не принадлежащие одной прямой.

V_1.(аксиома). *Для каждой существующей фигуры возможно любое преобразование. Образы преобразований ─ существующие фигуры.*

V_2. (постулат). *Каждое геометрическое преобразование является взаимно однозначным.*

V_3. (аксиома). *Если преобразование f сохраняет (не сохраняет) принадлежность (не принадлежность) трех точек одной прямой, то и обратное ему преобразование f^{1} сохраняет (не сохраняет) принадлежность (непринадлежность) трех точек одной прямой. Преобразования f и f^{1} относятся к одному виду (подвиду) преобразований.*

3.2. Определения. Аксиомы преобразования перемещения.

Аксиома VI_1. *От начала любого луча можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.* [11]

Аксиома VI_2. *На любом луче в данной полуплоскости можно отложить угол, равный данному, и притом только один.* [11]

Отрезком угла назовём отрезок, отложенный на луче данного угла.

Поперечиной угла назовём отрезок с концами на двух сторонах угла.

Поперечину угла α назовём *соответственной некоторой поперечине угла* β, если отрезки угла α, имеющие своим концом конец этой поперечины, равны соответственно отрезкам угла β, имеющими концом конец данной поперечины этого угла.

АксиомаVI₃. *Если поперечина угла* α, *равна соответственной поперечине угла* β, *то* α= β[8].

Пусть лучи ОХ, ОУ, OZ попарно образуют прямые углы и преобразование f сопоставляет точкам О,Х,У,Z точки O_1,X_1,$У_1$,Z_1 соответственно. Будем говорить, что *преобразование* f *сохраняет ориентацию*, если 1) при направлении зрения $Z_1.X_1$, точка $У_1$ лежит слева (справа) всегда, когда при направлении зрения Z.X точка У лежит слева (справа), и 2) точкам, лежащим спереди (позади) при направлении зрения О.Х сопоставляются точки, лежащие также спереди (позади) при направлении зрения $O_1.X_1$.

Замечание. Когда говорим точка У лежит слева (справа) при направлении зрения Z.X, то полагаем здесь и далее, что зритель стоит в точке О и смотрит из точки Z в точку Х не поворачивая головы прямо перед собой.

Если преобразование, сопоставляющее точке Х точку X_1, задано так, что преобразование f сопоставляет точке Х точку X′, а преобразование g – точке X′ точку X_1, то будем говорить, что последовательность (композиция) преобразований f, g, обозначаемая f_0g, сопоставляет точке Х точку X_1.

Будем говорить, что преобразование сохраняет расстояние если оно произвольным точкам Х,У сопоставляет такие точки X_1, $У_1$, что $ХУ=X_1У_1$.

Перемещением назовем преобразование, которое сохраняет расстояние ориентацию.

Аксиома VI₄. *Фигура* F_1 *равна фигуре* F_2, *если некоторое перемещение сопоставляет фигуре* F_2 *фигуру* F_1.

Аксиома VI₅. *Если* □ *ав =* □ *$а_1в_1$, то возможно два перемещения, сопоставляющих угол ав* углу *$а_1в_1$: первое составляет лучу а луч $а_1$ и лучу в луч $в_1$, второе* ─ *лучу а луч $в_1$ и лучу в луч $а_1$. Аналогично при $AB = A_1B_1$, возможно перемещение, сопоставляющее точке А точку A_1, точке В точку B_1 и перемещение, сопоставляющее точке А точку B_1 и точке В точку A_1.* [6].

Аксиома VI₆. *Если каждое из преобразований f_1, f_2 - перемещение, то и последовательность $f_1○f_2$ также есть пермещение.*

Аксиома VI₇. (гл. 9. Направленные отрезки).

4. Существование и принадлежность.

Следствием определений фигур и их существования, аксиом I_1 и I_2 является

Теорема 4.1 *Существует промежуток, отрезок, луч, прямая, угол, плоскость и полуплоскость.*

Теорема 4.2 *Если* $F_1 \in F_2$ и $F_2 \in F_3$, *то* $F_1 \in F_3$.

□ Пусть фигура F_1 образована точками X_i (i = 1,2…n). По определению образующих фигур $X_i \in F_1$.

Докажем, что $X_i \in F_2$. Из посылок «1. Каждая точка фигуры F_1 принадлежит фигуре F_2» и «2. X_i есть точка фигуры F_1» следует заключение: «$X_i \in F_2$» [10].

Аналогично из посылок «1. Каждая точка фигуры F_2 принадлежит фигуре F_3» и «2. X_i есть точка фигуры F_2» получим $X_i \in F_3$. Следовательно, $F_1 \in F_3$ по определению принадлежности фигур. □

Замечание. Здесь и далее « » обозначает начало и конец доказательства.

5. Фигуры прямой.

5.1. Точки, промежутки.

Теорема 5.1 (о расширении промежутка для одной точки). *Если* M ∈(AB) *и* M.B.D *или* A.B.D, *то* M ∈ (AD).

□Из M ∈ (AB) следует A.M.B. по определению промежутка. Рассмотрим случаи, когда верно M.B.D или A.B.D.

1) **M.B.D** по определению одного направления M→B.D. Из M→B.D. и A.M.B по аксиоме противолежания A.M.D, т.е. M ∈ (AD) по определению помежутка.

2) **A.B.D.** Из A.M.B. следует B→A.M. по определению одного направления. Из A.B.D и B→A.M следует M.B.D (аксиома противолежания). По доказанному в (1) M ∈ (AD).□

Следствие о не принадлежности точки промежуткам. Если M (AB) и A.C.B, то M (AC) и M (BC).

Предположив противное, получим по теореме M(AB), что противоречит условию.

Теорема 5.2 (о расширении промежутка для двух точек). *Если C(AB) и B(CD), то C(AD) и B(AD).*

Из C(AB) и B(CD) следует соответственно A.C.B и C.B.D по определению промежутка. Из A.C.B по определению одного направления получим BA.C, аналогично из C.B.D получим C B.D. Из A.C.B и C B.D по аксиоме противолежания (II_3) A.C.D, аналогично из C.B.D и B A.C – A.B.D. Из A.C.D и A.B.D по определению промежутка получим соответственно C(AD) и B(AD).

Теорема 5.3 (о сужении промежутка). *Если M(AB) и A.C.M, то M(BC).*

Из M(AB) следует A.M.B (определение промежутка), из A.C.M - M A.C (определение одного направления). Из A.M.B и M A.C получим C.M.B по аксиоме противолежания (II_3). Тогда M(BC) по определению промежутка.

Теорема 5.4 (одного направления). *Если O A.B и O B.C, то OA.C*

Отметим точку W такую, что верно W.O.A (аксиома двух точек I_2). Из W.O.B и OB.B поаксиоме противолежания (II_3) получим W.O.B, аналогично из W.O.A и O A.C - W.O.C. Из W.O.A и W.O.C по аксиоме единственности пртивоположного направления (II_2) получим *OA.C.*

Теорема 5.5 (о принадлежности точки одному промежутку). *Если M(AB) отлична от точки C и A.C.B, то M принадлежит одному, и только одному, из промежутков (AC) или (BC).*

Докажем, что M принадлежит по крайней мере одному из промежутков (AC) или (BC), т.е если M (AC), то M(BC*)*. Из M (AC) следует, что неверно A.M.C (определение промежутка). Из A.M.B (по определению промежутка) и A.C.B следует соответственно A M.B и A C.B по определению одного направления. Отсюда по теореме одного направления A M.C по определению одного направления A.M.C или A.C.M. Так как A.M.C неверно по условию, то верно A.C.M. Отсюда M A.C по определению одного направления. Из M A.C и A.M.B по аксиоме противолежания (II_4) получим C.M.B, следовательно M(BC*)* по определению промежутка.

Докажем, что M не может принадлежать двум промежуткам (AC) и (BC). Предположим, M(AC) и M(BC*)*. Отсюда A.M.C и B.M.C по определению промежутка. По аксиоме единственности противоположного направления (II_3) M A.B. По определению одного направления M.A.B или M.B.A. Отсюда и из A.M.B следует, что для трех точек существует более одной точки (A и M или B и M), лежащих между двумя другими из этих точек, что противоречит аксиоме трех точек (II_1).

Теорема 5.6 (о принадлежности промежутка). *Если C(AB) и D(AB), то и (CD) (AB).*

Пусть M – произвольная точка промежутка CD. Из M(CD), C(AB), D(AB) по определению промежутка следует соответственно C.M.D, A.C.B, A.D.B. Из A.C.B и A.D.B по определению одного направления получим соответственно AC.B и AD.B. По теореме одного направления AC.D. По определению одного направления A.C.D и A.D.C. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть верно A.C.D Из A.C.D и M(CD) по теореме о расширении промежутка получим M(AD). Аналогично из M(AD) и A.D.B следует M(AB).

2) Если верно A.D.C, то из A.D.C и M(CD) по теореме о расширении промежутка получим M(AC). Аналогично из M(AC) и A.C.B следует M(AB).

Так как каждая точка промежутка СД принадлежит промежутку AB по доказанному, то (CD) (AB) по определению принадлежности фигур.

Теорема 5.7 (об общем промежутке). *Если B(CD) и C(AB), то промежутки AB и CD содержат общий промежуток BC.*

Докажем, что произвольная точка M промежутка BC принадлежит каждому из промежутков AB и CD. Из B(CD) следует C.B.D по определению промежутка, аналогично из C(AB) - A.C.B. Из M(CB) и C.B.D по теореме о расширении промежутка получим M(CD). Аналогично из M(CB) и A.C.B следует M(AB). Следовательно, (BC)(CD) и (BC)(AB) по определению принадлежности фигур.

5.2 Отрезок. Луч. Прямая.

Теорема 5.8 (об образовании отрезка). *Если A.B.C, то отрезки AB и BC образуют отрезок AC и не имеют общей точки, отличной от точки B.*

Всякая точка, принадлежащая одному из промежутков AB или BC по теореме о расширении промежутка принадлежит и промежутку AC, следовательно, и отрезку AC (определение отрезка и промежутка). A[AC] и C[AC] по определению отрезка. Так как верно A.B.C, то B[AC] по определению. [AB][AC] и [BC][AC] по определению принадлежности фигур.

Докажем, что всякая точка отрезка AC принадлежит хотя бы одному из отрезков AB или BC. Всякая точка промежутка AC, отличная от точки B, принадлежит одному из промежутков AB или AC (теорема о принадлежности точки), следовательно, и отрезкам AB или AC (определение отрезка и промежутка). A[AB], B[AB], C[BC], B[BC] по определению отрезка.

Так как отрезки AB и BC принадлежат отрезку AC и у отрезка AC нет точек, не принадлежащих отрезкам AB и BC, то отрезки AB и BC образуют отрезок AC по определению образующих фигур.

Так как промежутки AB и BC не имеют общей точки (теорема о принадлежности точки одному промежутку), то отрезки AB и BC не имеют общей точки, кроме точки B (определение отрезка, аксиома I_1).

Теорема 5.9 (об образовании отрезка). *Если C[AB] и B[CD], то отрезки AB и CD образуют отрезок AD.*

Из C[AB] и B[CD] по определению отрезка следует A.C.B и C.B.D., т.е. по определению промежутка C(AB) и B(CD). Отсюда A.C.D и A.B.D по теореме о расширении промежутка для двух точек (п. 4)

Пусть M – произвольная точка промежутка AB, отличная от C. Из A.C.B по теореме о принадлежности точки следует M(AC) или M(BC). Если M(BC), то M(AD) по теореме о принадлежности промежутка и определению принадлежности фигур. Если M(AC), то из M(AC) и A.C.D по теореме о расширении промежутка для одной точки получим M(AD). Следовательно, M[AD] по определению отрезка и промежутка. A[AD] по определению отрезка. Так как верно A.B.D и A.C.D, то и B[AD], C[AD] по определению. Таким образом, каждая точка отрезка AB принадлежит отрезку AD. Аналогично каждая точка отрезка CD принадлежит отрезку AD. Следовательно, [AB][AD] и [CD][AD] по определению принадлежности фигур.

Докажем, что каждая точка отрезка AD принадлежит хотя бы одному из отрезков AB или CD. Пусть W – произвольная точка промежутка AD. Из A.B.D и W(AD*)* следует W(AB) или W(BD) (теорема о принадлежности точки одному промежутку). Если W(BD), то так как верно C.B.D, то W(CD) по теореме о расширении промежутка для одной точки. W[CD] по определению промежутка и отрезка. A[AB] и D[CD] по определению отрезка. Таким образом, каждая точка отрезка AD принадлежит отрезку AB или CD.

Так как отрезки AB и CD принадлежат отрезку AD и у отрезка AD нет точек, не принадлежащих отрезкам AB и CD, то отрезки AB и CD образуют отрезок AD по определению образующих фигур.

Фигуру, образованную точками X, для которых выполняется отношение X.A.B (A.B.X) будем называть *продолжением отрезка AB по прямой за конец A(B)* и обозначать B.A X (ABX).

Теорема 5.10 (о продолжении отрезка). *Продолжение отрезка за один из его концов и данный конец образуют луч с началом в этом конце данного отрезка.*

Пусть точки X,У лежат на продолжении отрезка AB за конец B, т.е. выполняется A.B.X и A.B.У. Отсюда BX.У (аксиома единственности противоположного направления, определение противолежания). Это значит по определению луча, что конец B отрезка AB и все точки продолжения отрезка за конец B образуют луч с началом B.

Теорема 5.11 (о трех точках прямой). *Любые три точки одной прямой связаны отношением «лежит между».*

Каждые три точки прямой AB, две из которых точки A, B, связаны отношением «лежит между» по определению прямой.

Докажем, что каждые три точки прямой AB связаны отношением «лежит между», если одна из них A (Если B доказательство аналогично)

Пусть точки X,У принадлежат прямой AB. По определению прямой и точек, связанных отношением «лежит между», верно:

X.A.B, A.X.B, A.B.X и

У.A.B, A.У.B, A.B.У

Рассмотрим все возможные сочетания расположений точек X,У, выполняя преобразования, исключающие точку B.

1) X.A.B и У.A.B. По определению противолежания и аксиоме единственности противоположного направления (II_2)

AУ.X (1)

2) X.A.B и A.У.B. Из A.У.B следует AУ.B по определению одного направления. Из X.A.B и AB.У получим по определению и аксиоме противолежания (II_3).

X.A.У (2)

3) Х.А.В и А.В.У. Из А.В.У следует АВ.У по определению одного направления. Из Х.А.В и АВ.У получим по определению и аксиоме противолежания (II_3).

Х.А.У (3)

4) А.Х.В и У.А.В. Из А.Х.В следует АХ.В по определению одного направления. Из У.А.В и АХ.В по определению и аксиоме противолежания (II_3) получим

У.А.Х (4)

5) А.Х.В и А.У.В. Из А.Х.В следует АХ.В по определению одного направления, аналогично из А.У.В–А У.В. Из АХ.В и АУ.В по теореме одного направления получим

АХ.У(5)

6) А.Х.В и А.В.У. Аналогично с (5) получим

АХ.У (6)

7) А.В.Х и У.А.В. Из А.В.Х следует АВ.Х по определению одного направления. Из У.А.В и АВ.Х по определению и аксиоме противолежания (II_3) получим

У.А.Х (7)

8) А.В.Х и А.У.В. По аналогии с (5) получим

АХ.У (8)

9) А.В.Х и А.В.У По аналогии с (5) следует

АХ.У (9)

Из отношений (1) – (9) видно, что произвольные две точки Х,У прямой АВ, отличные от А, В и точка А при всех возможных вариантах расположения связаны отношением «лежит между».

Докажем, что произвольные точки Х,У,Z прямой АВ, отличные от А,В, связаны отношением «лежит между».

Так как по доказанному любые две точки прямой АВ, отличные от А,В, связаны отношением «лежит между» с точкой А, то для точек Х,У и Х,Z отличных от А,В выполняются следующие отношения:

А.Х.У, А.У.Х, Х.А.У и

А.Х.Z, А.Z.Х, Х.А.Z

Рассмотрев все возможные сочетания расположений точек У,Z и выполнив преобразования, исключающие точку А, по аналогии с (1) – (9), получим, что точки Х,У,Z также связаны отношением «лежит между».

Теорема 5.12 (об определении прямой). *Прямая определяется любыми двумя принадлежащими ей точками.*

Пусть точки C,D принадлежат прямой АВ. Каждая точка прямой АВ связана отношением «лежит между» с точками C,D по теореме о трех точках прямой. Поэтому они принадлежат прямой CD по определению прямой.

Точки C,D прямой CD принадлежат прямой АВ по условию. Точки А,В, принадлежащие прямой CD по доказанному, принадлежат и прямой АВ по определению прямой. Остальные точки прямой CD связаны отношением «лежит между» с точками А,В по теореме о трех точках прямой. Поэтому они принадлежат прямой АВ по определению прямой.

Таким образом, каждая точка прямой АВ принадлежит прямой CD и каждая точка прямой CD принадлежит прямой АВ. Следовательно, прямые АВ и CD – одна и та же прямая, определяемая различными точками (определение тождественных фигур).

Теорема 5.13 (о точке прямой). *Каждая точка прямой лежит между двумя точками этой прямой.*

Пусть X – произвольная точка прямой AB, отличная от A,B. По определению прямой и отношения «лежит между» верно одно из отношений A.X.B, X.A.B, X.B.A. Первое отношение согласуется с утверждением теоремы.

Пусть X.A.B. Для точек X.A существует точка *C* такая, что C.X.A (аксиома двух точек I_2). Докажем, что CAB. Из C.X.A следует AC.X (определение одного направления). Из AC.X и X.A. B по аксиоме противолежания (II_4) получим C.A.B. Это значит, что CAB по определению прямой. Аналогично при X.B.A существует точка EAB такая, что E.X.B.

Точка A(B) также лежит между двумя точками прямой AB. Действительно для точек A,B существует такая точка У, что У.A.B (A.B.У). УAB по определению прямой.

Теорема 5.14 (об определении луча). *Каждый луч определяется точкой, являющейся его началом, и любой другой точкой, принадлежащей данному лучу.*

Пусть точка B принадлежит лучу OA. Для точки B и другой произвольной точки X[OA, отличной от O,A,B выполняется соответственно OA.B и OA.X по определению луча. Аналогично для произвольной точки У[OB, отличной от O,B верно OB.У (определение луча). Из OA.B и OB.У по теореме одного направления (п. 4) получим OA.У. Аналогично из OA.B и OA.X следует OB.X.

Из OA.B и OA.У следует, что каждая точка луча OB принадлежит лучу OA; из OA.B и OB.X – каждая точка луча OA принадлежит лучу OB по определению луча. Следовательно, луч OA и луч OB – один и тот же луч по определению тождественных фигур.

Теорема 5.15 (о принадлежности луча прямой). *Луч AB принадлежит прямой AB.*

Точки A,B луча AB принадлежат прямой AB по определению прямой. Для произвольной точки X луча AB, отличной от A,B верно AB.X по определению луча. Отсюда A.B.X или A.X.B по определению одного направления. Точка X связана отношением «лежит между» с точками A,B по определению. Поэтому XAB по определению прямой. [ABAB по определению принадлежности фигур.

Лемма о противолежащем луче. *Если A.O.B, то лучи OA и OB – противолежащие.*

Пусть X[OA и У[OB. По определению луча OA.X и OB.У. Из OB.У и B.O.A по аксиоме противолежания (II_4) получим У.O.A. Аналогично из OA.X и У.O.A следует У.O.X, из OA.X и A.O.B следует X.O.B. Таким образом, каждая точка луча OB противолежит каждой точке луча OA. Следовательно лучи OA и OB – противолежащие по определению.

Теорема 5.16 (о противолежащем луче). *Для каждого луча существует единственный противолежащий ему луч.*

Пусть дан луч OA. По аксиоме двух точек (I_2) существует точка B такая, что B.O.A. По лемме о противолежащем луче луч OB противолежит лучу OA.

Предположим, что существует еще луч OC, противолежащий лучу OA. Это значит по определению противолежащих лучей, что верно C.O.A. Из C.O.A и B.O.A по аксиоме единственности противоположного направления получим OC.B, т.е. C[OB по определению луча. Отсюда по теореме об определении луча следует, что луч OC и луч OB – тождественные лучи, определенные различными точками.

Теорема 5.17 (о точке прямой). *Каждая точка прямой является началом двух противолежащих лучей, образующих данную прямую и не имеющих общей точки, кроме их начала.*

Пусть точка О принадлежит прямой *a*. По теореме о точке прямой существуют точки А*a*, В*a* такие, что А.О.В. По лемме о противолежащих лучах лучи ОА и ОВ – противолежащие. Докажем, что они образуют прямую *a*.

По теореме о принадлежности луча прямой [ОАОА и [ОВОВ. По теореме об определении прямой ОА, ОВ, *a* – одна и та же прямая. Следовательно, [ОА *a* и [ОВ*a*. Пусть ХОА (*a*). По определению прямой верно одно из отношений О.Х.А, Х.А.О или Х.О.А. В первых двух случаях Х[ОА по определению луча и одного направления. Если Х.О.А, то отсюда и А.О.В по аксиоме единственности противоположного направления получим ОХ.В. Это значит по определению луча, что Х[ОВ. Так как каждый из этих лучей принадлежат прямой *a* и каждая точка прямой *a* принадлежит одному из лучей ОА и ОВ, то лучи ОА и ОВ образуют прямую *a* по определению образующих фигур.

Предположив, что лучи ОА и ОВ имеют дополнительно общую точку М, получим противоречие с аксиомой трех точек.

6. Преобразование. Перемещение. Равенство фигур.

6.1 *Теорема 6.1* (О сопоставлении преобразованием). *Если преобразование, сохраняющее взаимное расположение точек прямой, сопоставляет точкам* А,В *точки* А',В', *то оно также сопоставляет промежутку* АВ *промежуток* А'В', *отрезку* АВ *отрезок* А'В', *лучу* АВ *луч* А'В', *прямой* АВ *прямую* А'В'.

□ Преобразование *f,* сохраняя взаимное расположение точек прямой по условию, сопоставит каждой точке Х∈ (АВ) точку Х' такую, что А'.Х'.В'. Предположим, что точка У'∈ (А'В') оказалась не сопоставленной ни одной точке промежутка АВ. Тогда преобразование f^{1} (постулат V_2) сопоставит точке У' точку У (АВ), что противоречит аксиоме IV^3. Значит предположение не верно, и все точки промежутка А'В' составлены преобразованием *f* точкам промежутка АВ. Следовательно, преобразование *f* сопоставляет промежутку АВ промежуток А'В' по определению сопоставления фигур.

Аналогично преобразование *f* сопоставляет отрезку АВ отрезокА'В', лучу АВ луч А'В', прямой АВ прямую А'В'. □

***Теорема 6.2 (*о сохранении непринадлежности трёх точек прямой).** *Если преобразование сохраняет взаимное расположение точек прямой, то она сохраняет и непринадлежность трёх точек одной прямой.*

□ Пусть точкам А,В,С, не принадлежащим одной прямой, преобразование *f,* сохраняющее взаимное расположениеточек прямой, сопоставляет точки А',В',С'. Докажем, что и точки А',В',С' не принадлежат одной прямой.

Предположим, что точки А',В',С' связаны отношением «лежит между». Тогда преобразование f^{1} сопоставит точкам A_1,B_1,C_1 точки А,В,С в отношении А.В.С. (постулат V_2, акс. V_3, определение обратного преобразования). Это противоречит условию. Следовательно, верно не предположение, а утверждение теоремы. □

***Теорема 6.3* (о сопоставлении преобразованием).** *Если преобразование сохраняет взаимное расположение точек прямой, то оно сопоставляет плоскости плоскость, полуплоскости полуплоскость, углу угол.*

□ Пусть М ─ произвольная точка плоскости АВС, не принадлежащая каркасу АВС. Преобразование f, сохраняя непринадлежность трёх точек одной прямой (теорема о сохранении непринадлежности трх точек прямой), сопоставит точкам А,В,С точки

A',B',C' не принадлежащие одной прямой, прямым каркаса ABC прямые каркаса A'B'C'. Точка M по определениям плоскости и образовании фигур принадлежит прямой, имеющей две общие точки K,L с каркасом ABC. Точка M′, сопоставленная преобразованием f точке M, связана отношением «лежит между» с точками K′,L′ (образами точек K,L) каркаса A'B'C' (определение сохранения взаимного расположения трёх точек прямой). Следовательно, она принадлежит прямой K′L′ плоскости A'B'C' и, следовательно, ÷ A'B'C' по транзитивности принадлежности. Предположим, что точка N′ ∈÷ A'B'C' осталась несопоставленной точке плоскости ABC. Преобразование f^{-1} (постулат V_2) сопоставит точке N′точку N ÷ ABC, т. е, не связанную отношением «лежит между» с соответствующими точками каркаса ABC. Это противоречит аксиоме V_3 и определению сохранения взаимного расположения трех точек прямой. Следовательно, предположение не верно, и все точки плоскости A′B′C′ сопоставлены преобразованиемfточкам плоскости ABC. Плоскость A′B′C′ сопоставлена преобразованием f плоскости ABC по определению сопоставления фигур.

Аналогично преобразование f сопоставляет полуплоскости ABC полуплоскость A ′B′C′ и углу ABC угол BCD.

6.2 ***Теорема 6.4.*** *Перемещение сохраняет взаимное расположение точек прямой.*

□ Пусть перемещениеfсопоставляет точкам A,O,B в отношении A.O.B.точки A_1,O_1,B_1. Докажем, что A_1.O_1.B_1.

Из A.O.B следует по определению (п. 2.3), что при направлении зрения O.A точки луча OA лежат спереди, а точки луча OB — позади. Так как перемещение сохраняет ориентацию по определению, то точки луча O_1 A_1 лежат также спереди, а точки луча O_1 B_1 – позади при направлении зрения O_1.A_1 . Это значит по определению (п. 2.3) что точки A_1,B_1 принадлежат противолежащим лучам, исходящим из точки O_1 . Следовательно, верно A_1 .O_1 .B_1 по определению противолежащих лучей. □

Следствием определения перемещения и теорем этого пункта являются:

Теорема 6.5. *Каждое перемещение сохраняет непринадлежность точек одной прямой;*

Теорема 6.6. *Если перемещение f сопоставляет точкам A,B точки A_1 ,B_1, то оно также сопоставляет промежутку AB промежуток A_1 B_1, отрезку AB отрезок A,B, лучу AB луч A_1B_1, прямой AB прямую A_1 B_1;*

Теорема 6.7. *Перемещение сопоставляет плоскости плоскость, полуплоскости полуплоскость, углу угол.*

6.3 *Равенство фигур*

***Теорема 6.8.* (о симметричности равенства).** *Если фигура* F_1 *равна фигуре* F_2, *то и фигура* F_2 *равна фигуре* F_1 (если $F_1 = F_2$, то и $F_2 = F_1$).

□ Из $F_1 = F_2$ по аксиоме VI_4 следует, что некоторое перемещение f сопоставляет фигуру F_1 фигуре F_2. Из постулата V_2 и определению взаимнооднозначного преобразования следует, что возможно обратное преобразование f^{-1}, которое сопоставляет фигуру F_2 фигуре F_1. Согласно аксиоме IV_3 f^{-1} - также перемещение. Следовательно, $F_2 = F_1$ (акс.V_4).

***Теорема 6.9.* (о транзитивности равенства).** *Если* $F_1 = F_2$ и $F_2 = F_3$, то $F_1 = F_3$.

□ Из $F_1 = F_2$ следует, что перемещение f сопоставляет фигуру F_1 фигуре F_2 (акс.VI_4); из $F_2 = F_3$ – перемещение g сопоставляет фигуру F_2 фигуре F_3. По определению последовательности преобразований и аксиоме IV_4 следует, что и фигура F_1 сопоставляется фигуре F_3 перемещением. $F_1 = F_3$(акс.V_4).□

Теорема 6.10. *Если* $F_1 = F_3$ и $F_2 = F_3$, то $F_1 = F_2$

□ Из $F_2 = F_3$ по симметричности равенства $F_3 = F_2$.

Из $F_1 = F_3$ и $F_3 = F_2$ по транзитивности получим $F_1 = F_2$. □.

***Теорема 6.11 (*о рефлексивности равенства).** *Каждая фигура равна себе*.

□ Пусть фигура F_1 сопоставлена перемещением фигуре F_2(акс.V_1). Тогда $F_1 = F_2$ (акс V_4) . Тогда $F_1 = F_2$ по симметричности $F_2 = F_1$. Из $F_1 = F_2$ и $F_2 = F_1$ по транзитивности $F_1 = F_1$. Аналогично из $F_2 = F_1$ и $F_1 = F_2$ получим $F_2 = F_2$.□

***Теорема 6.12 (*о поперечине угла).** *Если* $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, *то поперечина* AC *угла* ABC *равна соответствующей поперечине угла* $A_1B_1C_1$.

На луче B_1A_1 отложим отрезок $B_1A_o = BA$, на луче $B_1 C_1$ - отрезок $B_1 C_0 = BC$. Поперечина AC соответствует поперечине A_oCпо определению. По аксиомеV_5 возможно перемещение, сопоставляющие лучу BA луч $B_1 A_1$ и лучу BC луч B_1C_1. Это перемещение сопоставит точке A точку A_0 , точке C точку C_0 (определение перемещения, аксиома V_1). $AC = A_0 C_0$по определению перемещения. □

7. Отношения между отрезками

Если A.B.C, то будем говорить, что *отрезок* AC составлен из *отрезков* AB и BC.

***Теорема 7.1 (*о составленных отрезках).** *Отрезки, составленные из равных отрезков, равны.*

□ Пусть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1,C_1$, и A. B. C, A_1. B_1.C_1. Докажем, что $AC = A_1C_1$.

Из $AB = A_1B_1$следует, что перемещение f сопоставляет отрезок AB отрезку $A_1 B_1$, точку A точке A_1, точку B точке B_1 (акс.VI_4,VI_5). Отсюда и так как перемещение сопоставляет каждой точке одну точку (постулат V_2, определение взаимно-однозначного соответствия) следует, что точки A,B,C соответствуют точкам A_1,B_1,C' (совпадающей с точкой C_1 или нет). Так как перемещение сохраняет взаимное расположение точек прямой (п. 6.2), то A_1.B_1.C'. Из A_1.B_1.C_1и A_1,B_1C' следует $B_{1\to} C_1$. C ′ (аксиома единственности противоположного направления). Это значит по определению луча, что $C' \in [B_1 C_1$. По определению перемещения $BC = B_1C'$. Так как по аксиоме V_1 от начала можно отложить только один отрезок равный данному, то отрезки B_1C_1 и B_1C' – один и тот же отрезок, C_1 и C' – одна и та же точка. Таким образом, перемещение f сопоставляет точки A, B, C точкам A_1, B_1, C_1 соответственно, $AC = A_1C_1$ по определению перемещения.□

***Теорема* 7.2 (о тождественных отрезках).** *Отрезок* AB *и* BA – *один и тот же отрезок.*

□Так как A.X.B и B.X.A – одно и то же отношение (п.2), то отрезки AB и BA образованы одними и теми же точками (определение отрезка, определение образующих фигур). Следовательно, отрезок AB и отрезок BA – один и тот же по определению тождественных фигур. □

Если на одном из продолжений отрезка, равному ненулевому отрезку *a*, отложим ненулевой отрезок, равный *в*, то любой отрезок, равный образованному отрезку, будем называть суммой отрезков *a*, *в* и обозначать *a*+ *в*.

Суммой любого отрезка a и нулевого отрезка назовем отрезок *a.*

Если n– натуральное число, то определяем $na = a+a+\ldots+a$ *n раз*[4].

***Теорема 7.3* (о сумме отрезков).** *Если* $a = a_1$, *в* $=$ *в*$_1$ *то* a + *в* $= a_1$ + *в*$_1$.

□ Отложим на луче AM отрезок AB = a и на его продолжении отрезок BC = *в*, а на луче $A_1 M_1$ – отрезок $A_1 B_1 = a_1$ и на его продолжении – отрезок B_1C_1 = *в*$_1$. AC = a +*в*, $A_1 C_1 = a_1$ + *в*$_1$ по определению суммы отрезков. A. B. C. и $A_1.B_1.C_1$ по определению продолжения отрезков. AB = A_1B_1, BC = $B_1 C_1$ по свойствам равенства. AC = A_1C_1 по теореме о составленных отрезках. Из AC = A_1C_1и $A_1 C_1 = a_1$ + *в*$_1$ по транзитивности следует AC = a_1 + *в*$_1$. Из AC = a_1 + *в*$_1$, и AC = a + *в* по свойствам равенства получим a + *в* = a_1 + *в*$_1$. □

Теорема 7.4 (***переместительный закон сложения отрезков*** **).** a + *в* = *в* + a .

□Отложим на луче AM отрезок AB = *а* и на его продолжении за конец B – отрезок BC = *в*. AC = a + *в* по определению суммы отрезков. A.B.C по определению продолжения отрезка. Из A.B.C. следует по определению также, что отрезок AB отложен на продолжении отрезка BC за конец B. Следовательно AC = *в*+ a по определению суммы. Из AC = *в* + a и AC = a + *в* по свойствам равенства следует a + *в* = *в* + a. □

Теорема 7.5 **(сочетательный закон сложения отрезков)** a + *в* + *с* = a + (*в* + *с*).

□ На луче AM отложим отрезок AB = a, на продолжении отрезка AB за конец B — отрезок BC = *в*. A.B.C по определению продолжения отрезка. AC = a + *в* по определению суммы отрезков на продолжении отрезка AC за конец C отложим отрезок CD = *с*. A.C.D по определению продолжения отрезка и AD= AC + CD по определению суммы отрезков. Из AD= AC + CD, AC, = a + *в*, CD= с по теореме о сумме отрезков *A*D= a + *в*+ *с.*

Из A.C. D (C$\in$ (AD)) и A.B.C. по теореме о сужении промежутка B.C.D. Из B.C.D по определению продолжения отрезка, суммы отрезков и теореме о сумме отрезков следует BD = *в* + *с*. Из A.B.C. и B.C.D по теореме о расширении промежутка следует A. B. D. Из A. B. D по определению продолжения отрезка и суммы отрезков получим AD = BD + AB. Отсюда по переместительному закону и транзитивности AD = AB + BD. Отсюда и AB = a, BD = *в* + *с* по теореме о сумме отрезков AD = a + (*в* + *с*). Из AD = a + *в* + *с* и AD = a + (*в* + *с*) по свойствам равенства получим a + *в* + *с* = a + (*в* + *с*).□

Если для отрезков a,*в* существует такой отрезок *с*, что a = *в* + *с*, то говорят, что a *больше в* или, что то же самое. *в меньше* a и пишут соответственно a>*в и в*<a.[4]

***Теорема 7.6* (о транзитивности отношения «больше»).** *Если* a >*в и в*> *с, то* a>*с* .

□Из a>*в* следует существование такого отрезка *в*$_1$, что a = *в* + *в*$_1$ (определение отношения «a >*в*»), аналогично из *в*>*с* – существование отрезка c_1 такого, что *в*=*с*+ c_1. Из a = *в* + *в*$_1$, *в* = *с* + c_1 *по* теореме о сумме отрезков, рефлексивности и транзитивности равенства следует a = *с* + c_1 + *в*$_1$. По сочетательному закону *с* + c_1 + *в*$_1$ = *с* + (c_1 + *в*$_1$). По транзитивности равенства a = *с* + (c_1+ *в*$_1$). Следовательно, a>*с* по определению.□

Говорят, что отрезок *с* есть разность отрезков a и *в* (получается, вычитаем *в* из a) и пишут *с* = a – *в*, если a = *в* + *с*[4].

***Теорема 7.7 (*о разности отрезков и отношении «больше»).** Если $a > в$ *и* $a_1 = a$, $в = в_1$, то $a_1 > в_1$ и $a_1 – в_1 = a – в$.

Из $a > в$ следует существование такого отрезка *с*, что $a = в + с$ (определение отношения «больше»). Из $в = в_1$ *(* по условию) и $с = с$ (по рефлексивности равенства) получим $в + с = в_1 + с$ (теорема о сумме отрезков). Из $a_1 = a$, $a = в + с$ по транзитивности следует $a_1 = в + с$. Аналогично из $a_1 = в + с$ и $в + с = в_1 + с$ получим $a_1 = в_1 + с$. По определению «больше» $a_1 > в_1$. Из $a = в + с$ и $a_1 = в_1 + с$ по определению разности следует $a – в = с$ и $a_1 – в_1 = с$. По свойствам равенства $a – в = a_1 – в_1$.□

***Теорема 7.8* (об отрезках).** *Для произвольных отрезков* a, $в$ *возможно одно из отношений:* $a = в$, $a > в$ или $a < в$.

□ Пусть a = ОА (акс.V_1, VI_4). На луче ОА отложим отрезок ОВ = $в$ (акс.VI_1). Возможен один из двух случаев: точки А,В различны или А,В – одна и та же точка. Если А, В – одна точка, то ОА = ОВ по рефлексивности, $a = в$ по свойствам равенства. Если А,В – различные точки, то О→А.В по определению луча. О.А.В и О.В.А по определению одного направления. По аксиоме трех точек верно только одно из этих отношений. В первом случае ОВ >ОА, во втором ОА>ОВ по определению. По теореме о разности и об отношении «больше» $в > a$ или $a > в$ соответственно. □

***Теорема* 7.9 (о равенстве всех точек).** *Все точки (нулевые отрезки) равны.*

□Пусть А,В произвольные точки, $\underline{a}$, $в$- ненулевые отрезки и $\underline{a} = в$. По определению суммы a + А= a и $в$ + В=$в$. Предположим А>В. Тогда А = В + $с$, a + А= $в$+В+$с$ (теорема о сумме отрезков). $в$ + В+ $с$ = $в$ + $с$ (теорема о сумме отрезков). По свойствам равенства и определению «больше» $a > в$, что вместе с $a = в$ (по условию) противоречит теореме об отрезках. Следовательно, А = В.□

Лемма о промежутке. *Каждый промежуток содержит, по крайней мере, две точки*.

□ Между точками А,В промежутка АВ лежит по крайней мере одна точка С (аксиома двух точек), т.е. верно А.С.В. Аналогично между точками А, С лежит точка D. Из А.D.С следует D∈(АС) по определению промежутка. Из D∈ (АС) и А.С.В. по теореме о расширении промежутка для одной точки следует D∈ (АВ). Таким образом, промежутку АВ принадлежат две точки (С и D). □

Теорема 7.10 (о двух отрезках). *Любые два отрезка, принадлежащие одной прямой, не пересекаются.*

□Пусть отрезки АВ и CD принадлежат одной прямой. Докажем, что промежутки АВ и CD не имеют ни одной общей точки или содержат не менее двух общих точек (определение пересечения отрезков).

Рассмотрим возможные расположения точек C,D относительно отрезка АВ, если все точки А, В, C, D различны.

1) Точки C,D принадлежат промежутку АВ. По теореме о принадлежности промежутка (CD)∈(АВ). По лемме о промежутке и транзитивности принадлежности промежутки АВ и CD имеет две общие точки.

2) Точки C,D не принадлежат (АВ). По теореме о трех точках прямой точки C,D принадлежат продолжению отрезка АВ.

а) Если точки C,D принадлежат одному продолжению (например, за конец В), то верно A. B. C. и A.B.D. Отсюда B →C.D по аксиоме единственности противоположного направления. Докажем, что если M∈(AB), то M(CD). Из M∈(AB) и A.B.C, A.B.D следует по теореме о расширении промежутка для одной точки M∈(AC) и M∈(AD). Из A.M.C и A.M.D (по определению промежутка) следует M →C.D (аксиома единственности противоположного направления). Это противоречит M∈ (CD) (аксиома трех точек). Следовательно, промежутки AB и CD не имеют ни одной общей точки.

б) Если точки C,D принадлежат двум продолжениям отрезка AB, то верно C.A.B и A.B.D (если A.B.C и D.A.B доказательство аналогичное). Из C.A.B следует A∈(CB) по определению промежутка. Из A∈(CB) и A.B.D по теореме о расширении промежутка для одной точки A∈(CD). Аналогично B∈(CD). По доказанному в (1) промежутки AB и CD имеют две общие точки.

3) Только одна из точек C,D (например C) принадлежит (AB). Так как точка D связана отношением «лежит между» с точками A, B (теорема с трех точках прямой), то верно A.B.D или D.A.B.

Пусть A.B.Д (аналогично, если D.A.B). Из A.C.B (по условию) следует B → A.C по определению одного направления. Из A.B.D и B →A.C по аксиоме противолежания C.B.D, т.е. B∈(CD) по определению промежутка. По теореме об общем промежутке (CB) ∈(AB) и (CB)∈(CD). По лемме о промежутке и транзитивности принадлежности AB и CD имеют две общие точки.

Рассмотрим случай, когда два отрезка AC и CB имеют один общий конец. По теореме о трех точках прямой возможноA.B.D, B.A.C или A.C.B. Если A.B.C, то каждая точка (AB) принадлежит и (AC) по теореме о расширении промежутка для одной точки. Аналогично, если B.A.C. Следовательно, промежутки AC и CB имеют две общие точки по лемме о промежутке. Пусть A. C. B. и M(AC). По теореме о принадлежности точки одному промежутку M(CB). Следовательно, (AC) и (BC) не имеют ни одной общей точки.

Рассмотрев все возможные расположения двух отрезков одной прямой, получили, что никакие два отрезка не имеют только одну общую точку. Следовательно, они не пересекаются по определению. □

8. Плоскость. Полуплоскость

***Теорема* 8.1 (о тождественных плоскостях).** *Если точки* A,B,C *не принадлежащие одной прямой, принадлежат плоскости* DEG, *то плоскости* ABC *и* DEG – *тождественны.*

□По аксиоме I_4 ÷ABC∈÷DEG и ÷DEG∈÷ABC. Плоскости ABC и DEG образованы одними и теми же точками по определению образованных фигур и тождественны по определению тождественных фигур. □

***Теорема* 8.2 (о принадлежности прямой плоскости).** *Прямая, имеющая две общие точки с некоторой плоскостью, принадлежит этой плоскости.*

□Пусть прямая a имеет общие точки A,B с плоскостью α. Отметим на плоскости α произвольную точку C AB. AB(<u>a</u>) ∈÷ABC по определению плоскости. Из a ∈÷ABC и ÷ABC∈α(акс.I_4) по транзитивности следует <u>*a*∈÷*α*</u>*.* □

***Теорема 8.3 (*о проведении плоскости через три точки).** *Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.*

□ Пусть точки A,B,C не принадлежат одной прямой. Плоскость ABC содержит точки A,B,C по определениям прямой, каркаса, плоскости и транзитивности принадлежности. Предположим, что и плоскость DEB содержит точки A,B,C. По теореме о тождественных плоскостях плоскости DEG и ABC – одна и та же плоскость. □

***Теорема 8.4* (о проведении плоскости через прямую и точку вне прямой).** *Через прямую и точку вне прямой можно провести плоскость и притом только одну.*

□ Пусть дана прямая a и точка Аa. Отметим точки B, C на прямой a. Через точки A,B,C можно провести единственную плоскость ABC (теорема о проведении плоскости через три точки), $a \div$ ABC (теорема о принадлежности прямой плоскости). Следовательно, ÷ABC — искомая плоскость.□

***Теорема 8.5* (о проведении плоскости через две пересекающиеся прямые).** *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

□ Пусть прямые a,*в* пересекаются в точке C, через точки Aa, B *в* и C можно провести единственную плоскость ABC. Прямые a и *в* принадлежат этой плоскости по теореме о принадлежности прямой плоскости. Следовательно, плоскость ABC — искомая. □

Теорема 8.6. *Каждая точка плоскости, кроме точек прямой ограничивающей полуплоскости, принадлежит только одной из этих плоскостей.*

□ Пусть прямая AB ограничивает противолежащие полуплоскости ABC и ABD, и E ∈│·ABC. Тогда E.O.D при O ϵ AB, по определению противолежащих полуплоскостей. O ϵ(ED) по определению промежутка. Отрезок ED и прямая AB пересекаются по определению.

Предположим, что точка E принадлежит к полуплоскости ABD. Тогда отрезок DE не пересекается с прямой AB (определения полуплоскости и пресечение фигур прямой), что противоречит доказанному. Следовательно, верно не предположение, а утверждение теоремы. □

Утверждение об отношении между двумя объектами называют *симметричным*, если его смысл не меняется от перестановки обозначений этих объектов (например, можно сказать «отрезки *а* и *в* пересекаются» и «отрезки *в* и *а* пересекаются»).

Отношение между двумя объектами считают *симметричным*, если оно выражено симметричным утверждением или несимметричным таким, что при его истинности (ложности) можно обосновать истиннность (ложность) этого утверждения с переставленными обозначениями этих объектов (например, фигура F равна фигуре F_1. [4]

Теорема 8.7 *Если точка D принадлежит открытой полуплоскости ABC, то полуплоскости ABC и ABD тождественны.*

□По симметричности понятия «точки D, C лежат по одну сторону от прямой AB» следует, что если точка D лежит по одну сторону с точкой C от прямой AB, то и точка C лежит по одну сторону с точкой D от прямой AB. Следовательно, C∈│·ABD по определению полуплоскости. Докажем, что произвольная точка E∈│· ABC принадлежит также и │· ABD, т.е. что точка E, лежащая по одну сторону с точкой C от прямой AB, лежит также по одну сторону с точкой D от прямой AB.

Предположим, что точки D, E лежат в противоположных сторонах от прямой AB. Тогда точка C, лежащая по одну сторону с точками D, E, оказывается принадлежащей двум полуплоскостям, т.е. граничной прямой, что противоречит условию. Следовательно, предположение не верно, и точка E лежит по одну сторону и с точкой D от прямой AB, т.е. принадлежит полуплоскости ABD. Это значит, что полуплоскости ABC и ABD образованы одними и теми же точками, т.е. являются тождественными по определению. □

Теорема 8.8 (о симметричности противолежания полуплоскостей). *Если полуплоскость α противолежит полуплоскости β, то и полуплоскость β противолежит полуплоскости α.*

□ Пусть $X_i \in \alpha$, $У_i \in \beta$ и не принадлежит граничной прямой a полуплоскостей α и β. По определению противолежания полуплоскостей верно X_i O_i $У_i$при $O_i \in a$. По симметричности противолежания точек, следующей из симметричности отношения «лежит между» (n.2) получим $У_i.O_i.X_i$. Следовательно, полуплоскость β противолежит полуплоскости α по определению.□

Теорема 8.9 (о принадлежности луча полуплоскости). *Если точка D принадлежит открытой полуплоскости ABC и O ∈ AB, то [OD∈│·ABC.*

□ Для произвольной точки X∈[OD верно O→D.X по определению луча. По определению одного направления O.D.X или O.X.D. Следовательно, точка X лежит по одну сторону с точкой D от прямой AB по определению; и X∈│· ABD по определению полуплоскости. Так как полуплоскости ABC и ABD тождественны (теорема о тождественных полуплоскостях), то X∈│· ABC. Следовательно [OD∈│· ABC по определению принадлежности фигур. □

Теорема 8.10 (о противолежании полуплоскостей). *Если D∈÷ ABC и C.O.D при O∈AB, то полуплоскости ABC и ABD ─ противолежащие.*

□ Пусть точка E принадлежит открытой полуплоскости ABC. Предположим, что ни одна точка прямой AB не лежит между точками E,D. Тогда точка E∈│· ABD по определению полуплоскости. Это противоречит теореме о принадлежности точки одной полуплоскости. Значит, существует точка O∈AB, лежащая между точками D,E, и точка E противолежит точке D при точке зрения O∈AB. Аналогично, каждая точка открытой полуплоскости ABD противолежит каждой точке открытой полуплоскости ABC. Следовательно, полуплоскости ABC и ABD - противолежащие по определению. □

Теорема 8.11 (о точке плоскости). *Каждая точка плоскости принадлежит полуплоскости данной плоскости.*

□ Пусть прямая a и точка Ma принадлежат плоскости α. Отметим на прямой a произвольные точки AB, вне прямой – точку C∈÷α, а также C_1, так, что C_1.A.C. Прямые AB,AC и BC образуют каркас плоскости α по определению. Точка M по определению плоскости принадлежит прямой ℓ, имеющей две общие точки с каркасом ABC. Прямые ℓ и AB могут иметь или не иметь единственную общую точку.

1) Пусть прямая ℓ не пересекает прямую AB. Тогда она пересекает прямую AC в точке K. Если K ∈[AC, то M∈│·ABC, если K∈[AC_1, то M∈│· ABC_1 (определения полуплоскости, противолежащих полуплоскостей, теорема о тождественных полуплоскостях).

2) Пусть прямая ℓ пересекает прямую AB в точке O. Тогда она пересекает и прямую AC или BC в точке K. Если K ∈[AC([BC), то M ∈│· ABC при O→M.K и M ∈│·ABC_1 при M.O.K; если K ∈[AC_1 ([BC_2) при C.B.C_2, то M ∈│·ABC при M.O.K и M ∈│·ABC_1 при O → K.M

(определения полуплоскости и противолежащих полуплоскостей, теоремы о тождественных полуплоскостях и о противолежании полуплоскостей). □

Теорема 8.12 (о противолежащих полуплоскостях). *Противолежащие полуплоскости образуют плоскость.*

□ Каждая точка противолежащих полуплоскостей ABC и ABC_1 принадлежит плоскости ABC по определению полуплоскости. Эти полуплоскости принадлежат плоскости ABC по определению принадлежности. Каждая точка плоскости ABC принадлежит хотя бы одной из полуплоскостей ABC или ABC_1 (теорема о точке плоскости). Следовательно, полуплоскости ABC и ABC_1 образуют плоскость ABC по определению образующих фигур.□

Теорема 8.13 (о существовании противолежащей полуплоскости). *Для каждой полуплоскости существует единственная противолежащая ей полуплоскость.*

□Пусть дана полуплоскость ABC. Для любой точки O∈ AB и точки C существует точка D такая, что D.O.C (акс. II_1). Полуплоскости ABC и ABD – противолежащие по теореме о противолежании полуплоскостей.

Предположим, что существует полуплоскость ABE, отличная от полуплоскости ABD и противолежащая полуплоскости ABC. Это значит по определению различных фигур, что существует некоторая точка К, которая принадлежит только одной из полуплоскостей ABE и ABD. Пусть К ∈│· ABD. Так как противолежащие полуплоскости ABC и ABD образуют плоскость ABC (теорема о противолежащих полуплоскостях), то К ∈÷ABC по определениям образующих фигур и принадлежности фигур. Противолежащие полуплоскости ABC и ABE также образуют плоскость ABC.

Получилось, что у плоскости, образованной противолежащими полуплоскостями ABC и ABE есть точка К, не принадлежащая ни одной из этих полуплоскостей. Это противоречит теореме о противолежащих полуплоскостях и определению образованной фигуры. Значит, предположение о существовании полуплоскости ABE отличной от │·ABD и противолежащей │·ABC
не верно. □

9. Направленные отрезки.

Два направленных отрезка, имеющие одни и те же крайние точки и отличающиеся их порядком, будем называть *взаимнообратными направленными отрезками.*

Направленный отрезок а будем называть *равнозначным направленному отрезку в*, обозначая ⇉, если:

1) отрезки *а*, *в* равны, принадлежат одной плоскости и не пересекаются;
2) отрезок, соединяющий концы направленных отрезков *а*,*в* равен отрезку, соединяющему их начала и не пересекаются с ним;
3) крайние точки данных отрезков попарно принадлежат одной прямой или не принадлежат одной прямой;
4) направленные отрезки , не являются взаимообратными.

Если от конца направленного отрезка, равнозначного *a*, отложим направленный отрезок, равнозначный , то направленный отрезок *c* , равнозначный направленному отрезку с началом отрезка, равнозначного *a* и с концом отрезка, равнозначного , будем называть суммой направленных отрезков *а, в*, обозначая $c = a + b$.

Следствием определений направленных отрезков и симметричных утверждений является

Теорема 9.1.*Если AB*□CD, то AC□BD, CA□DB и BA□DC, CD□AB.

Теорема 9.2 о рефлексивности равнозначности. *Каждый направленный отрезок равнозначен самому себе.*

□ Равнозначность следует из определения равнозначности, равенства нулевых отрезков, определения пересекающихся отрезков, рефлексивности равенства. □

Теорема 9.3 (о проведении равнозначного отрезка). *Из любой точки можно провести направленный отрезок, равнозначный данному.*

□ Пусть направленный отрезок AB принадлежит прямой AB и точка C AB. На луче CB отложим □BCD = □ ABCв полуплоскости, противолежащей полуплоскости BCA (акс. VI^2). На луче CD отложим отрезок CE=AB (акс. VI^1). AC=BE как соответствующие поперечины равных углов (теорема о поперечине угла). [AC] ∈ |·BCA как принадлежащей лучу CA (теорема о принадлежности луча полуплоскости, теорема о транзитивности принадлежности). Аналогично [BE] ∈ |· BCE. Так как полуплоскости BCA и BCE – противолежащие по построению, то отрезки BE и AC, а также AB и CE не пересекаются и принадлежат одной плоскости) теорема о противолежащих полуплоскостях, определение пересекающихся отрезков). Следовательно CE□AB по определению.

Пусть C ∈ AB и отлична от точек A,B. Точка C связана отношением «лежит между» с точками A,B (теорема о трёх точках прямой). Следовательно, верно одно из отношений C.A.B, A.C.B или A.B.C Построим направленный отрезок CD□AB для каждого из этих случаев. По определению равнозначных направленных отрезков D ∈AB.

C.A.B. На луче CA отложим отрезок CD=AB. По определению луча C→AD. Из C→A.D следует C.A.Dили C.D.A. Если C.A.D, то CD=CA+AD, CD>AD, AB >AD(теорема о разности и отношении «больше»).

По теореме о трёх точках прямой верно одно из отношений A.D.B, D.A.B и D.B.A. Если D.B.A, то AD> AB, что вместе с AB> AD по доказанному противоречит теореме о двух отрезках.Значит, не верно D.B.A. Из C.A.D и D.A.B следует A→B.C, что вместе C.A.B по условию противоречит аксиоме трёх точек. Следовательно, не верно и D.A.B. Значит, A.D.B. Из C.A.D и A.D.B следует соответственно CA=CD – AD и DB=AB — AD. Отсюда по теореме о разности и отношении «больше» и свойствам равенства получим CA = DB.

Если C.DA,то CA = DA + CD (1*). Определим верное отношение из отношений A.D.B, D.A.B и D.B.A. Из A.D.B и A.D.C (аналогично и A.B.D и A.D.C) следует A→ B.C (теорема одного направления), что вместе с C.A.B по условию противоречит аксиоме трёх точек. Следовательно, верно D.A.B. Тогда DB=DA+AB. Отсюда и (1*) по теореме о сумме отрезков и свойствам равенства получим CA=DB.

Если точки A и D совпадают, то также CA=DB.

A.C.B. Отложим отрезок CD = AB на луче CB. По определению луча C→ BD. Из A.C.B следует AB=AC+BC, AC=AB-BC и AB> CB. Отсюда и AB=CD (по построению)., CB=CB (по рефлексивности) получим CD> CB (теорема о разности отрезков и отношении «больше»). Из C→ BD по определнию одного направления следует C.B.D и C.D.B. Если C.D.B, то CB> CD,что вместе CD> CB по доказанному противоречит теореме о двух отрезках. Следовательно, верно C.B.D. Отсюда BD=CD-CB. AC=BD по теореме о разности отрезков и свойствам равенства.

A.B.C. Отложим отрезок CD=AB на луче, противолежащем лучу CB.

B.C.D по определению противолежащих лучей, BD=BC+CB по определению суммы отрезков. Аналогично из A.B.C следует AC=AB+BC. Отсюда и так как CD=AB (по построению), BC=BC (по рефлексивности) получим BC+CD=AB+BC (теорема о сумме отрезков). По свойствам равенства AC=BD.

Так как отрезки прямой не пересекаются, то CD□AB по определению равнозначных отрезков.

Направленным отрезком с началом A, равнозначным направленному отрезку AB будет сам отрезок AB по рефлексивности.

Построим направленный отрезок, равнозначный AB с началом в точке B. На луче, противолежащем лучу BA отложим отрезок BC=AB. BC□AB по определению.□

Теорема 9.4. *Из любой точки можно провести только один направленный отрезок, равнозначный данному.*

□ Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда из точки C, кроме отрезка CD□CD, можно провести и другой направленный отрезок CE□CD. По определнию равнозначных отрезков C = ED. Это значит по аксиоме V_4 и определению сопоставления фигур, что некоторое перемещение сопоставляет точке C более одной точки отрезка ED, что противоречит постулату V_2.□

Преобразование, которое сопоставляет произвольной точке X такую точку X_1, что XX1□AB, будем называть *переносом на направленный отрезок* AB.

Аксиома VI_7. *Если преобразование f-перенос на a, преобразование g-перенос на b, то последовательность преобразований f, g (fog) - перенос на c=a+b*

Теорема 9.5. *Если AB□CD, то перенос на AC* (BD) *сопоставляет точкам* A,B *точки* C,D *соответственно.*

□Перенос на AC по определнию сопоставляет точке A точку A', так, что AA'□AC, точке B точку B' так, что BB'□AC. Из AB□CD (по условию) следует AC□BD (т. 9.1). По симметричности BD□AC. Если A' и C –различные точки, как и B' и D', то получим, что точка A – начало двух отрезков AC и AA' равнозначных AC (T.2). B — начало двух отрезков BB' и BD, равнозначных AC (определение переноса, Т. 9.1.) Это противоречит Т. 9.4. Следовательно, A' и C (как и B' и D) – тождественные точки, как и B' и D, то получим, что точка A – начало двух отрезков AC и AA' равнозначных AC (T.2), B- начало двух отрезков BB' и BD, равнозначных AC (определение переноса, Т. 9.1). Это противоречит Т.9.4. Следовательно, A' и C (как и B' и D) – тождественные точки, и перенос на AC сопоставляет точкам A,B точки C,D соответственно.□

Теорема 9.6. *Каждый перенос сопоставляет произвольным двум точкам* X,У *точки* X',У', *соответственно такие, что* XУ □ X'У'.

□Пусть перенос на AB сопоставляет точкам X,У точки X',У'. По определению переноса XX'□AB и УУ'□AB. По симметричности AB□УУ'. Из XX'□AB и AB□УУ' по теореме 9.5 следует, что перенос *g* на XA сопоставляет точке X точку A, точке X' точку B, а перенос *ℓ на AУ*– точке A точку У и точке B точку У'. Композиция переносов $g_oℓ$ по определению сопоставляет точке X точку У и точке X' точку У' и является также переносом на направленный отрезок XУ = XA+AУ (акс.VI_7). По определению переноса XУ□XУ и X'У'□ XУ. Из X'У'□ XУ по симметричности следует XУ□X'У'.□

Теорема 9.7 (о трёх направленных отрезках). *Два направленных отрезка, равнозначных третьему, равнозначны.*

□Пусть AB□EGи CD□EG. Перенос на EG (акс. VI_1) по определению сопоставляет точкам A,C точки B,D соответственно так, что AB□EGи CD□EG. По теореме 9.6 AC□BD. По теореме 9.1 AB□CD. □

Теорема 9.8 (о транзитивности равнозначности).

Если a□и b□ c то a□c.

Из b□c по симметричности следует c□b .

Из a□b и c□b по теореме 9.7 получим a□c .□

Теорема 9.9 (о сумме направленных отрезов). *Если* c =a+b, c1 =a1+b1 *и* a = a1, b=b1, *то* c=c1 .

□Пусть AB□a, BC = b, AC = *c*, A1B1□a1, B1C1□b_1, A1C1= c_1. Из AB□A1B1, BC□B1C1 (по свойствам равнозначнности) следует соответственно AA1□BB1 и BB1□CC1, по теореме 9.1. По транзитивности AA1□CC1, по теореме 9.1 AC□A1C1. По свойствам равнозначности c□c1. □

Теорема 9.10. *Если преобразование сохраняет расстояние, то оно сохраняет и расположение трёх точек прямой.*

□Пусть преобразование *f* сопоставляет точкам A,B,C в отношении A.B.C точки A_1,B_1,C_1. Из A.B.C следует AC=AB+BC по определению суммы отрезков. Из AB=A_1B_1, BC=B_1C_1 (по условию) следует по теореме о сумме отрезков AB+BC=A_1B_1+B_1C_1. Отсюда и AC= A_1C_1 (по условию) по свойствам равенства получим A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1. Это значит по определению суммы, что верно A_1.B_1.C_1.□

Из теоремы 9.6 и определения равнозначных отрезков следует

теорема 9.11. *Перенос сохраняет расстояние.*

Из теоремы 9.10,9.11 следует

теорема 9.12. *Перенос сохраняет расположение трёх точек прямой.*

Из теорем 6.1,6.3 (о сопоставлении преобразованием), теоремы 9.12 следуют

теорема 9.13. *Перенос сопоставляет промежутку промежуток, отрезку отрезок, лучу луч и прямой прямую;*

теорема 9.14. *Перенос сохраняет непринадлежность трёх точек одной прямой;*

теорема 9.15. *Перенос сопоставляет плоскости плоскость, полуплоскости полуплоскость и углу угол.*

Из теоремы 9.11, 9.15 и аксиомы V_3 следует

теорема 9.16. *Перенос сопоставляет каждому углу равный ему угол.*

Будем говорить:

1. *прямая a параллельна прямой в* и обозначать *a*‖*в*, если она сопоставлена переносом прямой *в*;
2. луч O_1A_1 сонаправлен лучу OA и обозначать [O_1A_1↑↑ [OA, если он сопоставлен переносом на OO1 лучу OA;
3. *направленный отрезок AB сонаправлен направленному отрезку* CD, обозначая AB↑↑CD, если [AB↑↑ [CD;
4. *направленный отрезок* *AB* *и луч CD сонаправлены*, если лучи AB и CD сонаправлены;
5. *плоскость* *α* *параллельна плоскости* *β*, обозначая ÷α‖÷β, если она сопоставлена переносом плоскости β.

Из определений параллельной прямой и плоскости, сонаправленного луча и аксиомы V_1следует

Теорема 9.17. *Существуют прямая, параллельная данной прямой, плоскость, параллельная данной плоскости и луч, сонаправленный данному лучу.*

Теорема 9.18 (о принадлежности параллельной прямой плоскости). *Если прямая проходит через точку плоскости и параллельна прямой данной плоскости, то она принадлежит этой плоскости.*

□Пусть прямая *a* проходит через точку A∈÷αи *a*‖*в*, *в*∈÷*α* . Отметим произвольную точку A_1 на прямой a, отличную от точки A. Точки A и A_1 сопоставлены переносом на некоторый направленный отрезок CD точкам B и B_1 прямой *в*, т.е. BA□CD и B1A1□CD(определения параллельных прямых и переноса). Тогда BA□B1A1 по свойству равнозначности. По определению равнозначных отрезков точки B,A,B_1,A_1 принадлежат одной плоскости, т.е. A∈÷α и $A_{1\in\div\alpha}$.Тогда *a*∈÷*α,* как имеющая две общие точки с плоскостью α.□

Теорема 9.19 (о плоскости через параллельные прямые). *Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.*

□Пусть *a*║*в*. На прямой *в* отметим произвольную точку *B*. Через прямую *a* и точку *B* можно провести единственную плоскость α (теорема о проведении плоскости через прямую и точку вне прямой) *в*∈÷*α* по теореме 9.18. Следовательно, плоскость α – искомая.□

Теорема 9.20 (о симметричности сонаправленности и параллельности). *Если* [AB↑↑[CD,то [CD↑↑[AB. *Если* AB║CD, то CD║AB.

□ Из [AB↑↑[CD следует по определению сонаправленных лучей, что перенос *f* на AC сопоставляет лучу AB луч CD. По определению переноса AC□AC и BB'□AC при B'∈[CD. Значит, преобразование f^{-1} – перенос на CA – сопоставляет лучу CD луч AB по определению переноса. Следовательно, [CD↑↑[AB по определению.

Аналогично доказывается симметричность параллельности.□

Теорема 9.21 (о транзитивности сонаправленности и параллельности). *Если* [AB↑↑[CD, [CD↑↑[EG, *то* [AB↑↑[EG. *Если* AB║CD; CD║ EG,*то* AB║EG.

□ Из [AB↑↑[CD, [CD↑↑[EG следует по определению, что перенос *f* на AC сопоставляет луч AB лучу CD, а перенос g на CE – луч CD лучу EG. Последовательность переносов f_og – перенос на AE – сопоставляет луч AB лучу EG (акс.IV_5).Следовательно, [AB↑↑[EG по определению. Аналогично AB║EG.□

Теорема 9.22 (о рефлексивности сонаправленности и параллельности). [AB↑↑[AB. AB║AB.

□ Пусть [AB↑↑[CD (акс. V_1, определение сонаправленности лучей). По симметричности [CD↑↑[AB. Из [AB↑↑[CD и [CD↑↑[AB по транзитивности следует [AB↑↑[AB.

Аналогично AB║AB.□

Теорема 9.23 (о сонаправленности и параллельности).

Если [AB↑↑[CD *и* [EG↑↑[CD, *то* [AB↑↑[EG. *Если* AB║CD *и* EG║CD, *то* AB║EG.

□Из [EG↑↑[CD по симметричности следует [CD↑↑[EG. Из [AB↑↑[CD и [CD↑↑[EG по транзитивности получим [AB↑↑[EG.

Аналогично AB║EG.

Лемма. *Равнозначные направленные отрезки не могут принадлежать двум пересекающимся прямым.*

□Предположим, что равнозначные направленные отрезки AB и CD принадлежат прямым *a, c*, пересекающимся в точке O. Проведем отрезок OE□AB и отрезок OG□CD. E∈*a* и G∈*в* по определению равнозначных отрезков. По свойствам равнозначности

OE□OG, что противоречит теореме 9.4. Следовательно, верно не предположение, а утверждение леммы.□

Теорема 9.24 (о непересечении параллельных прямых. *Параллельные прямые не пересекаются.*

□Пусть $a \parallel в$, $X \in a$, $У \in в$. Точки X,У перенос на c сопоставляет точкам $X' \in в$ таким, что XX'□c и УУ'□c по определению переноса. По свойству равнозначности XX'□УУ'. ХУ□Х'У' (Т.9.1), $ХУ \in a$, $X'У' \in в$ (определения прямой, отрезка и принадлежности фигур). По лемме прямые *а, в* не пересекаются.□

Теорема 9.25 (о проведении параллельной прямой). *Через точку вне прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притом только одну.*

□Пусть точка В лежит вне прямой *а*. Отметим произвольную точку $A \in a$. Перенос на AB по определению точке $A_{1 \in} a$ сопоставит точку B_1 такую, что A1B1□AB. Точке А этот перенос сопоставит точку В, так как AB□AB по рефлексивности. $BB_1 \parallel a$ по определению параллельных прямых и теореме о сопоставлении переносом.

Предположим, что существует другая прямая $C \parallel a$ и содержащая точку В. Из $в \parallel a$ и $c \parallel a$ по теореме о параллельности и сонаправленности $в \parallel c$. Прямые *в* и *с* пересекаются по определению, что противоречит теореме о непересечении параллельных прямых.□

Теорема 9.26. *Если прямая плоскости, содержащая две параллельные прямые, пересекает одну из этих прямых, то она пересекает и другую прямую.*

□Пусть прямые *а,в,с* принадлежат плоскости α, $a \parallel в$ и *а,с* пересекаются в точке А. Отметим произвольные точки $C \in c$ и $D \in a$, отличные от точки А. Так как точки A,C,D принадлежат плоскости α по транзитивности принадлежности и не принадлежат одной прямой по построению, то прямая *в* плоскости α пересекает по крайней мере две прямые каркаса ACD (определение плоскости). Прямые *в* и *а* (AD) не пересекаются (теорема о непересечении параллельных прямых). Поэтому прямая *в* пересекает прямые AC (*с*) и CD.□

Теорема 9.27 (признак 1 параллельности прямых). *Если две прямые принадлежат одной плоскости и не пересекаются, то эти прямые параллельны.*

□Пусть прямые *а,в* не пересекаются и принадлежат одной плоскости. Предположим $в \nparallel a$. Проведем через точку $B \in в$ прямую $в' \parallel a$ (теорема о проведении параллельной прямой). Прямая *в*, пересекающая прямую *в'* в точке В, пересекает и прямую *а* (теорема 9.26), что противоречит условию. Следовательно, предположение не верно, и $a \parallel в$.□

Теорема 9.28 (признак 2 параллельности прямых).

Если AB□CD, *то* $AB \parallel CD$.

□Прямые AB и CD принадлежат одной плоскости и не пересекаются (определение равнозначных отрезков, лемма о непересечии прямых, содержащих равнозначные отрезки, теорема о принадлежности прямой плоскости). Следовательно, $AB \parallel CD$ по первому признаку параллельности прямых).□

Теорема 9.29 (признак 3 параллельности прямых). *Если* $[AB \uparrow\uparrow [CD$, *то* $AB \parallel CD$.

□Перенос на AC сопоставляет точке А точку С и точке В точку$B' \in [CD$ так, что BB'□AC (определения сонаправленных лучей и переноса). BA□B'C (теорема 9.1). $BA \parallel B'C$ по второму признаку параллельности прямых). $AB \parallel CD$ (теорема об определении прямой).□

Теорема 9.30. *Если* $a \parallel в$, *то перенос на любой направленный отрезок с концом на прямой а и началом на прямой в, сопоставляет прямую а прямой в.*

□Отметим произвольные точки A∈*а* и B∈*в*. Перенос на BA сопоставит точке B точку A по определению. Прямая, сопоставленная этим переносом, параллельна прямой *в* (определение параллельной прямой). Предположив, что эта прямая отлична от прямой *а*, получим, что через точку A проходят две прямые, параллельные прямой *в*. Это противоречит теореме 9.25.□

Теорема 9.31 (первый признак сонаправленности лучей). *Если два луча принадлежат параллельным прямым и одной полуплоскости, которая ограничена прямой, содержащей их начала, то они сонаправлены.*

□Пусть лучи MA и NB принадлежат параллельным прямым *а,в* и [NB∈|·MNA. Так как *а*‖*в*, то перенос на NM сопоставит произвольной точке B_i∈[NB, точку A_i ∈*а* (теорема 9.30). Предположив, что A_i принадлежит лучу, противолежащему [MA, получим противоречие с леммой о непрнадлежности равнозначных отрезков пересекающимся прямым. Следовательно, A_i∈[MA. Предположим, что некоторая точка A_K∈[MA оказалась не сопоставленной ни одной точке луча NB. Тогда перенос на MNсоставит точке A_K точку AK', принадлежащую лучу, противолежащему [NB,что противоречит доказанному. Следовательно, луч MA сопоставлен переносом на NM лучу NB по опрредеделению сопоставления фигур. [MA↑↑ [NB по определению.□

Теорема 9.32 (второй признак сонаправленности лучей). Если AB□CD, то [AB↑↑ [CD.

□Из AB□CD по теореме 9.5 перенос на AC сопоставляет точкам A,B точки C,D соответственно. По теореме о сопоставлении переносом перенос на AC сопоставляет лучу AB луч CD. [AB↑↑ [CD по определению.□

Теорема 9.33 (о сонаправленных лучах). *Сонаправленные лучи принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой, содержащей их начала.*

□Пусть [AB↑↑[CD. Тогда луч AB сопоставлен лучу CD переносом на CA (определение сонаправленных лучей). Точке D перенос на CA сопоставляет точку D'∈[AB (определение сопоставления фигур) такую, что DD'□CA (определение переноса). Точки A,D,D',C принадлежат одной плоскости (определение равнозначных отрезков, транзитивность принадлежности). Предположим D'|· ACD. Тогда точкаD' принадлежит полуплоскости, противолежащей |·ACD (теорема о прямой плоскости, определение образующих фигур) и D'.O.D при O∈ AC (определение противолежащих полуплоскостей). Это противоречит теореме о непересечении прямых, содержащих равнозначные отрезки. Следовательно, D'∈|·ACD (теорема о принадлежности луча полуплоскости).□

10. Отношения между фигурами одной плоскости.

Теорема 10.1 (о точке полуплоскости). *Если точка принадлежит лучу, исходящему из граничной прямой полуплоскости и пересекающему луч каркаса данной полуплоскости, то она принадлежит этой полуплоскости.*

□ Пусть M∈[DE и D∈AB, E∈[AC. [DE∈|· ABC по теореме о принадлежности луча полуплоскости. M∈|· ABC по транзитивности принадлежности.□

Теорема 10.2 (о точке полуплоскости). *Если точка принадлежит полуплоскости и не принадлежит каркасу этой полуплоскости, то существует по крайней мере один луч,* *исходящий из точки граничной прямой и пересекающий луч каркаса данной полуплоскости, которому принадлежит данная точка.*

□ Пусть М∈ $|\cdot$ АВС и не принадлежит полукаркасу АВС. Через точку М проведем прямую *а*‖ВС. Прямая *а* принадлежит плоскости АВС по теореме 9.18. По определению плоскости, она пересекает по крайней мере две прямые каркаса АВС. В нашем случае она пересекает прямые АВ и АС (теорема о непересечении параллельных прямых). Точки пересечения обозначим D,E соответственно. Предположив, что точка Е принадлежит лучу, противолежащему [АС, получим, что [DE, следовательно и точка М, принадлежит полуплоскости, противолежащей $|\cdot$ АВС. Это противоречит условию. Следовательно, прямая пересекает прямую АВ и луч АС. Так как М∈*а*(DE) по построению, то по теореме о трёх точках прямой верно одно из отношений D.M.E, D.E.M или E.D.M. Если E.D.M , то точка М принадлежит полуплоскости, противолежащей $|\cdot$ АВС (теорема о противолежании полуплоскостей), что противоречит условию. Значит, верно D.M.E или D.E.M, т.е. D→ E.M по определению луча.□

Теорема 10.3 (о точке полуплоскости). *Если точка принадлежит полуплоскости АВС и не принадлежит полукаркасу АВС, то существует луч, содержащий данную точку, исходящий из точки любого луча прямой АВ с началом А и пересекающий луч АС.*

□ Пусть точка D ∈ $|\cdot$ АВС и не принадлежит полукаркасу АВС. Отметимточку B_0 так, что B_0.A.B. По теореме 10.2 существуют точки B_i ∈АВ и C_i ∈[AC такие, что B_i→D.C_i. По теореме о точке прямой B_i ∈[AB или B_i ∈[AB_0. Пусть B_i ∈[AB. Докажем, что существуют точки $B_к$ ∈[AB_0 и $C_к$ ∈[AC такие, что $B_к$ →[D.$C_к$.

Из B_i→D.C_i по определению одного направления следует B_i.D.C_i или B_i.C_i.D. Рассмотрим эти случаи.

1) B_i.D.C_i. C_i→D.B_i по определению одного направления. По теореме 10.1 D ∈ $|\cdot$ АСВ. На луче АB_0 отметим произвольную точку $B_к$. По теореме о принадлежности луча [$B_к$D ∈ $|\cdot$ АВС. Так как точка $B_к$ противолежит точке D при точке зрения, принадлежащей прямой АС (теорема о противолежании полуплоскостей, определение противолежащих полуплоскостей), то отрезок $B_к$D пересекает прямую АС в точке $C_к$ ∈ $|\cdot$ АВС по транзитивности принадлежности. Предположив, что точка $C_к$ принадлежит лучу, противолежащему [АС, получим, что она принадлежит полуплоскости, противолежащей $|\cdot$ АВС, что противоречит доказанному. Значит, $C_к$ ∈ $|\cdot$ АС.

По определениям отрезка и пересечения его с прямой $B_к$.$C_к$.D. По определению одного направления $B_к$→ $C_к$.D. D∈[$B_к$$C_к$ по определению луча. Так как $C_к$ ∈[АС, то [$B_к$$C_к$ — искомый.

2) B_i.C_i.D. Через точку D проведем прямую d‖AC. Как принадлежащая плоскости АВС она пересечёт прямую АВ в точке D_0 ∈[AB_0 (определения плоскости и принадлежности двух точек одной полуплоскости).Отметим точку $B_к$ так, что $B_к$.D_0.A. Прямая $B_к$D пересекает прямую d (D_0D) в точкеD (определение пересечения прямых). значит, она пересекает и прямую АС (Т.9.2) в некоторой точке $C_к$. Предположим, что точка $C_к$ принадлежит лучу, противолежащему [АС. Тогда она принадлежит полуплоскости, противолежащей $|\cdot$ АВС (теорема о противолежании полуплоскостей). Отрезок D$C_к$ (следовательно и прямаяD$C_к$($B_к$D) пересекает прямую АВ в точке O∈AB, совпадающей с

тоочкой $B_к$ или отличной от неё. Если точка $B_к$ и точка O различны, то прямая $B_кD$ имеет две общие точки с прямой AB. Следовательно, прямые AB и $B_кD$ тождественны (теорема об определении прямой). Это противоречит тому, что точка D не принадлежит полукаркасу ABC по условию. Если точка $B_к$ и точка O – одна и та же точка, то $B_к \in$AC и совпадает с точкой A, что противоречит $B_к.D_0.A$ по построению. Следовательно, предположение не верно и $C_к \in$[AC.

Для трёх точек одной прямой $B_к$,D,$C_к$, верно одно из отношений $B_к.D.C_к$, $B_к.C_к.D$ или $C_к.B_к.D$. Если $C_к.B_к.D$, то точки $C_к$ и D принадлежат противолежащим полуллоскостям, что противоречит доказанному. Значит, верно одно из первых двух отношений, т.е. $D_{к\rightarrow}D.C_к$. Так как $C_к \in$[AC и $B_к \in$ [AB_0, то луч $B_кC_к$, содержащий точку D – искомый.□

Теорема 10.4. *Если прямая плоскости пересекает один из отрезков каркаса данной плоскости, то она пересекает и другой отрезокэтого каркаса.*

□Пусть прямая *a* плоскости ABC пересекает отрезок AC в точке D. По теореме 10.1 D∈│·BCA и D∈│·ABC. По определению плоскости прямая *a* пересекает по крайней мере одну из прямых AB или BC. Пусть она пересекает прямую BC (если – AB, доказательство аналогичное) в точке E. Тогда верно одно из отношений E.B.C, E.C.B или B.E.C. Докажем, что если не верно B.E.C, т.е. прямая *a* не пересекает отрезок BC, то она пересекает отрезок AB.

Из E.B.C следует, что точка E принадлежит полуплоскости ACB (теорема 10.1) и полуплоскости, противолежащей полуплоскости ABC (теорема о противолежании плосклостей). Отрезок DE пересекает прямую AB в некоторой точке G по определению противолежащих точек. Тогда верно одно из отношений G.A.B, A.BG или A.G.B. Из G.A.B следует, что точка G принадлежит полуплоскости, противолежащей │·ACB. Отрезок DE(значит и прямая *a*) пересекает прямую AC в некоторой точке K. Прямые AC и *a* - тождественны, как имеющие две общие точки, что противоречит условию. Значит, не верно G.A.B.

При A.B.G точка G принадлежит полуплоскости, противолежащей │·BCA по теореме о противолежании полуплоскостей. Отрезок DG(следовательно, и прямая *a*) пересекает прямую BC в некоторой точке K. Прямые *a* и BC – тождественны, как имеющие две общие точки, что противоречит условию. Следовательно, не верно и A.B.G. Значит, верно A.G.B и прямая *a* пересекает отрезок AB.

Пусть E.G.B. Существует точка M такая, что M.D.E (акс.I_2). M ∈│·ACB (теорема о противолежании полуплоскости), [DME│·ACB (теорема о принадлежности луча полуплоскости) и пересекает один из лучей AB или CB (Т.10.2). Предположив, что он пересекает луч CB, получим, что прямая *a* (DE) имеет две общие точки с прямой BC, т.е. тождественна с ней. Это противоречит тому, что прямая *a* имеет точку DBC. Следовательно, луч DM пересекает только луч AB в некоторой точке G. Тогда верно A.B.G или A.G.B. Если верно A.B.G, то точка G принадлежит полуплоскости, противолежащей │·BCA по теореме о противолежании полуплоскостей. Так как D ∈ │·BCA по доказанному, то отрезок DG (значит и прямая *a*) пересекает прямую BC в точке K по определению противолежащих полуплоскостей. Получилось, что прямая *a* имеет две общие точки E,K с прямой BC; следовательно, они тождественны (теорема об определении прямой). Это противоречит условию. Следовательно, верно A.G.B и луч DM (следовательно, и прямая *a*) пересекает отрезок AB.□

11. Углы.

11.1 Будем говорить, что луч *с* проходит внутри неразвернутого угла *ав*, если луч *с* лежит между лучами *а,в*.

Если угол развёрнутый, то говорим, что каждый луч, исходящий из вершины угла *ав* и не совпадающий с лучами *а,в,* проходит внутри угла *ав*.

Мы говорим, что угол *ав* составлен из углов *ас* и *вс*, если луч *с* проходит внутри угла *ав*. [4]

Теорема 11.1 (о составленных углах). *Если* $\angle$ *ав*= $\angle$ $a_1в_1$ *и* $\angle$ *вс*= $\angle$ $в_1c_1$, *то неразвёрнутый угол ас, составленный из углов ав и вс, равен углу* a_1c_1, *составленному из углов* $a_1в_1$ *и* $в_1c_1$.

□Пусть лучи *а,в,с* исходят из точки О, лучи $a_1,в_1,c_1$ – из точки O_1. По аксиоме V_5 возможно перемещение *f*, сопоставляющее лучу в луч $в_1$, лучу с луч c_1. Отметим произвольную точку В∈*в*. По определению междулежащего луча существуют точки А∈ *а* и С∈ *с* такие, что А.В.С. Сохраняя взаимное расположение трёх точек прямой, перемещение *f* сопоставит точке В точку $B_1 \in в_1$, точке С точку С $\in c_1$, точке А точку A_1, принадлежащую или не принадлежащую лучу a_1, такую, что $A_1.B_1.C_1$. Луч O_1A_1 принадлежит полуплоскости, противолежащей полуплоскости $O_1B_1C_1$ (теоремы о противолежании полуплоскостей и о принадлежности луча полуплоскости, $\angle$ АОВ= $\angle$ $A_1O_1B_1$ (акс.VI_4). Предположив, что $A_1[a_1$, получим, что на луче O_1B_1 в данной полуплоскости (теорема о единственности противолежащей полуплоскости) отложены два угла, равных данному. Это противоречит аксиоме VI_2. Следовательно, $A_1 \in [a_1$, $\angle$ ас=$\angle$ a_1c_1 (акс. VI_4), теорема об определении луча.). □

Теорема 11.2 (о точках луча). *Пусть три луча исходят из одной точки и никакие два луча не принадлежат одной прямой. Тогда, если одна точка луча лежит между двумя другими лучами, то и все другие точки этого луча, кроме начала, лежат между этими лучами.*

□Пусть точка B_1 луча ОВ лежит между лучами ОС и ОА. Это значит по определению,что существуют точки $A_1 \in$ [ОА и $C_1 \in$ [ОС такие, что $A_1.B_1.C_1$. Полуплоскости OB_1C и OB_1C_1 – противолежащие по теореме о противолежании полуплоскостей. Докажем, что для любой точки $B_i\in$ [ОВ найдутся такие точки $A_i \in$ [ОА и $C_i\in$[ОС, что $A_i.B_i.C_i$.

Точка B_i как принадлежащая лучу ОВ по условию принадлежит полуплоскости OC_1A_1 по транзитивности принадлежности. По теореме 10.3 $B_i\in$ [C_iA_i при $C_i \in$ [ОС и $A_i \in$ [ОА. Тогда $C_i{\to}B_i.A_i$, т.е. $C_i.B_i.A_i$ или $C_i.A_i.B_i$ по определению одного направления. Второе отношение противоречит противолежанию полуплоскостей OB_1A_1 и OB_1C_1 по доказанному. Следовательно, верно C_i. B_i. A_i.□

Теорема 11.3 (о противолежащем луче). *Если луч лежит между двумя лучами, то противолежащий ему луч лежит между лучами, противолежащими этим двум лучам.*

□Пусть [ОА.[ОВ.[ОС, лучи ОА и OA_1, ОВ и OB_1, ОС и OC_1 – попарно противолежащие. Точка B_1, принадлежит полуплоскости, противолежащей │·ОСА и полуплоскости, противолежащей │·ОАС (определение противолежащих полуплоскостей). Прямая ОВ, как прямая плоскости ОАС и тождественной ей ÷OA_1C_1 (определение междулежащего луча, теорема о принадлежности прямой плоскости) пересекает каркас OA_1C_1 в двух точках (определение плоскости). Следовательно, она пересекает прямую A_1C_1.

Предположив, что точка пересечения не принадлежит отрезку A_1C_1, получим, что $B_1 \in$ |·OAC или |·OCA. Это противоречит доказанному. Значит, луч OB пересекает отрезок A_1C_1. Следовательно, [OB_1 лежит между лучами OC_1 и OA_1 (теорема о точках луча, определение междулежащего луча).□

Если на луче OB(OA) угла AOB, равного ненулевому углу α в плоскости AOB в стороне, противоположной с точкой A(B) от OB(OA) отложим ∠ BOC(AOC), равный ненулевому углу β, то угол γ равный ∠ AOC(BOC), будем называть суммой углов α и β, обозначая $\gamma = \alpha+\beta$.

Суммой любого угла α и *нулевого угла* будем называть *угол* α.

Здесь и далее подразумевается, что лучи рассматриваемых углов принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой одного из этих лучей, не являющимся общим двух углов.

Лемма об общем луче двух углов. *Если* ∠ AOC= ∠ AOB+ ∠ BOC, *лучи* OA *и* OC *не принадлежат одной прямой, то луч* OB *лежит между лучами* OA *и* OC *(при ограничении этого пункта).*

□По определению суммы углов полуплоскости OBC и OBA - противолежащие. Следовательно, $A.B_0.C$ при $B_0 \in OB$ (определение противолежащих плоскостей).

Из $A.B_0.C$ следует $A \rightarrow B_0.C$ и $C \rightarrow B_0.C$ по определению одного направления. B_0 принадлежит полуплоскостям OAC и OCA (Т.10.1), а также лучу OB или противолежащему ему лучу OB_1 (теорема 2 о точке прямой, определение образующих фигур). Предположим $B_0 \in$ [OB. Тогда верно $B_0.O.B$ (теорема о трёх точках прямой). Из $B_0.O.B$ следует, что точка B и луч OB принадлежат полуплоскости, противолежащей полуплоскостям OAC и OCA (определение противолежащей полуплоскости, теорема о принадлежности луча полуплоскости). Луч OB не принадлежит полуплоскостям AOC и OCA (теорема о противолежащих полуплоскостях). Это противоречит принятому ограничению о принадлежности трёх лучей одной полуплоскости. Следовательно, $B_0 \in$ [OB. Любая точка B_i луча OB лежит между лучами OA и OC (Т.11.2). Следовательно, [OA. [OB.[OC по определению.□

Теорема 11.4 (о сумме углов). *Если* $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, *то* $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta 1$.

□На луче OA в произвольной полуплоскости отложим ∠ AOB= α, на луче OB в полуплоскости, противолежащей полуплоскости OBA — ∠ OBC= β (акс. V_2. теорема о единственности противолежащей полуплоскости). ∠ AOC= $\alpha+\beta$ по определению суммы углов, [OA. [OB. [OC по лемме об общем луче двух углов. ∠ AOC составлен из ∠ AOB и ∠ BOC по определению.

Аналогично на луче O_1A_1 откладываем ∠ $A_1O_1B_1=\alpha_1$ и на луче O_1B_1 — ∠ $B_1O_1C_1=B_1$, ∠ $A_1O_1C_1=\alpha 1+\beta 1$. Угол $A_1O_1C_1$ составлен из углов $A_1O_1B_1$ и $B_1O_1C_1$. Из ∠ $AOB=\alpha$, $\alpha=\alpha 1$, ∠ $A_1O_1B_1=\alpha 1$ по свойствам равенства следует
∠ AOB=∠ $A_1O_1B_1$. Аналогично ∠ BOC=∠ $B_1O_1C_1$. ∠ AOC=∠ $A_1O_1C_1$ (Т.11.1). Из ∠ AOC= $\alpha+\beta$, ∠ AOC=∠ $A_1O_1C_1$, ∠ $A_1O_1C_1=\alpha_1+\beta_1$ по свойствам равенства $\alpha+\beta=\alpha 1+\beta 1$.□

Теорема 11.5 (*переместительный закон сложения углов*). $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

□Пусть ∠ AOB= α. На луче OB в полуплоскости противолежащей |·OBA отложим ∠ BOC= β (акс.VI_2, теорема о единственности противолежащей полуплоскости). ∠ AOC= $\alpha+\beta$ по определению.

Пусть ∠ COB= β. На луче OB в полуплоскости, противолежащей полуплоскости OBC, т.е. полуплоскости OBA (теорема о симметричности противолежания полуплоскостей и единственности противолежащей полуплоскости) отложим ∠ BOA= α (акс. VI_2). ∠ AOC=

$\beta+\alpha$ по определению. Отсюда и ∠AOC= $\alpha+\beta$ по доказанному по свойствам равенства получим $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.□

Теорема 11.6 (о пересечении лучом отрезка). *Если два луча образуют неразвернутый угол, то каждый луч, исходящий из вершины этого угла и пересекающий один из отрезков с концами на лучах данного угла, пересекает также каждый из таких отрезков.*

□Пусть лучи *а,в*, исходящие из точки О, образуют неразвёрнутый угол, A $\in$*a*, B $\in$*в*, луч *c*, исходящий из точки О, пересекает отрезок AB в точке C.

Докажем, что он пересекает и отрезок A_1B_1 при $A_1 \in$ *a*, $B_1 \in$*в*. A.C.B при C $\in$*c* по определению пересечения луча и отрезка. Полуплоскости OCA и OCB – противолежащие по теореме о противоположности полуплоскостей. точка A_1 противолежит точке B_1 при точке зрения $C_1 \in$OC (теорема о принадлежности луча полуплоскости, транзитивность принадлежности, определение противолежащих полуплоскостей). Отрезок A_1B_1 (следовательно, и точка C_1) принадлежит полуплоскостям OAB и OBA (Т.10.1). Предположив, что точка C_1 принадлежит лучу, противолежащему [OC, получим, что она принадлежит полуплоскостям, противолежащим |·OAB и |·OBA. Это противоречит доказанному. Следовательно, $C_1 \in$[OC.□

Теорема 11.7 (сочетательный закон сложения углов).

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

□Отложим на произвольном луче OA в произвольной полуплоскости ∠AOB=α, в полуплоскости, противолежащей полуплоскости OBA, на луче OB — ∠BOC=β в полуплоскости, противолежащей полуплоскости COA, на луче OC — ∠COD=γ. По определению суммы углов ∠AOC=$\alpha+\beta$ и ∠AOD=∠AOC+∠COD. По теореме о сумме углов и свойствам равенства ∠AOD= $\alpha+\beta+\gamma$.

Луч OC лежит между лучами OA и CD (лемма об общем луче двух углов) и пересекает отрезок AD в точке C_1 (теорема 11.6). По определению отрезка и промежутка A.C_1.D и $C_1 \in$(AD). Аналогично луч OB лежит между лучами OA и OC и пересекает отрезок AC, в точке B_1. По определению отрезка и промежутка A.B_1.C_1 и $B_1 \in(AC_1)$.

Из $C_1 \in$(AD) и A.B_1.C_1 по теореме о сужении промежутка $C_1 \in(DB_1)$, т.е. D.C_1.B_1 по определению промежутка. Полуплоскость OCB_1 противолежит полуплоскости OCD по теореме о противолежании полуплоскостей. ∠BOD=$\beta+\alpha$ по определению суммы углов.

Из $B_1 \in(AC_1)$ и D.C_1.B_1 по теореме о расширении промежутка $B_1 \in$(AD), т.е. A.B_1.D по определению промежутка. Полуплоскость OBD противолежит полуплоскости OBA по теореме противолежания полуплоскостей. ∠AOD= ∠AOB+ ∠BOD по определению суммы углов. ∠AOD= $\alpha+(\beta+\gamma)$ по теореме о сумме углов и свойствам равенства. Из ∠AOD = $\alpha+\beta+\gamma$ и ∠AOD= $\alpha+(\beta+\gamma)$ по свойствам равенства получим $\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.□

Назовём разностью углов α и β такой угол γ, обозначая $\gamma=\alpha-\beta$, что $\alpha=\beta+\gamma$, если есть такой угол γ. Также определяется $\alpha>\beta$, если есть такой угол γ, что $\alpha=\beta+\gamma$. [4]

Как и для отрезков, аналогично доказывается **теорема** о разности и отношении «больше» для углов. Если $\alpha>\beta$ и $\alpha1=\alpha$, $\beta1=\beta$, то $\alpha1>\beta1$ и $\alpha1-\beta1=\alpha-\beta$.

Теорема 11.8 (о двух углах). *Для произвольных двух углов α и β верно одно из отношений $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$ или $\alpha<\beta$.*

□Пусть ∠AOB =α (акс.IV_1.V_4). На луче OA в полуплоскости AOB отложим ∠AOC=β (акс. V_5).

Если [OB и [OC – один и тот же луч, то $\angle AOB = \angle AOC$ по рефлексивности, $\alpha=\beta$ по свойствам равенства.

Пусть [OB и [OC – различные лучи. По теореме 10.3 для произвольной точки $C_1 \in$[OC существуют точки $A_1 \in$[OA и $B_1 \in$[OB такие, что $A_1 \rightarrow B_1.C_1$, т.е. $A_1.B_1.C_1$ или $A_1.C_1.B_1$ (определение одного направления). Тогда [OC.[OB.[OA или [OA.[OC.[OB (Т.11.2, определение междулежащего луча). Отсюда по определению суммы углов и отношению «больше» для углов получим $\alpha>\beta$ и $\alpha<\beta$.□

Теорема 11.9 (о развёрнутых углах). *Все развёрнутые углы равны.*

□Пусть *ав и $a_1 в_1$* – развёрнутые углы с вершинами O и O_1 соответственно. На лучах *а,в,a_1,$в_1$* отложим отрезки OA, OB, OA_1, OB_1, равные данному (акс.VI_1). По определению противолежащих лучей A.O.B и $A_1.O_1.B_1$.

$AB=AO+OB$ и $A_1B_1=A_1O_1+O_1B_1$ по определению суммы отрезков. По теореме о сумме отрезков и свойствам равенства $AB=A_1B_1$. По аксиоме V_4 возможно перемещение *f*, сопоставляющее отрезку AB отрезок A_1B_1. Сохраняя взаимное расположение трёх точек прямой перемещение *f* сопоставит точкам A,B точки A_1,B_1 точке O точку O' так, что $A_1.O'.B_1$. Так как $A_1O_1=A_1O'$ (определение перемещения и свойства равенства), то O_1 и O' – одна и та же точка (акс.VI_1). Перемещение *f*, сопоставляя точкам A,O,B точки A_1,O_1,B_1 по доказанному, сопоставляет также и лучам OA, OB лучи O_1A_1, O_1B_1 (теорема п.6.2). Следовательно, перемещение *f* углу *ав* сопоставляет угол *$a_1 в_1$* (определение сопоставления фигур, теорема об определении луча), $\angle$ *ав*=$\angle$ *$a_1 в_1$* по аксиоме VI_4. □

Теорема 11.10.*Вертикальные углы равны*.

□Пусть противолежащие лучи OA и OB, OC и OD образуют вертикальные углы AOC и DOB, AOD и BOC. По определению противолежащих лучей A.O.B и C.O.D $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB$, $\angle COD = \angle AOD$ $\angle AOC$ по определению суммы углов. По определению разности углов $\angle DOB = \angle AOB - \angle AOD$ и $\angle AOC = \angle COD - \angle AOD$. $\angle AOC = \angle DOB$ (теоремы о развёрнутых углах и о разности углов, свойство равенства). Аналогично $\angle AOD = \angle BOC$.□

Теорема 11.11.*Все прямые углы равны.*

□Пусть $\alpha1$ и $\beta1$ – прямые углы, $\alpha2$ и $\beta2$ – смежные углы с углами $\alpha1$ и $\beta1$ соответственно. Предположим, что $\angle\alpha1 > \angle\beta1$. Это значит по определению отношения «больше», что существует такой угол γ, что $\alpha1 = \beta1+\gamma$. Тогда и $\alpha2=\beta1+\gamma$ (определение прямого угла, симметричность и транзитивность равенства). Обозначив развёрнутые углы, составленные из углов $\alpha1$ и $\alpha2$, β_1 и β_2 через α и β соответственно, получим $\alpha=\alpha1+\alpha2$ и $\beta=\beta1+\beta2$ по определению суммы углов. Из $\alpha1=\beta1+\gamma$, $\alpha2=\beta1+\gamma$ по теореме о сумме углов следует $\alpha1+\alpha2=\beta1+\gamma+(\beta1+\gamma)$; $\beta1+\gamma+\beta1+\gamma=\beta1+\gamma+(\gamma+\beta1)$ $=\beta1+2\gamma+\beta1=\beta1+\beta1+2\gamma=2\beta1+2\gamma$ (переместительный и сочетательный законы сложения углов). По транзитивности $\alpha=2\beta+2\gamma$. Из $\beta=\beta_1+\beta_2$ и $\beta_1=\beta_2$ (по определению прямого угла) следует $\beta=2\beta2$ (теорема о сумме углов, свойства равенства, определение суммы углов). Аналогично из $\alpha=2\beta1+2\gamma$ и $\beta=2\beta1$ следует $\alpha=\beta+2\gamma$, т.е. $\alpha>\beta$ по определению. Отношения $\alpha>\beta$ и $\alpha=\beta$ (теорема о развёрнутых углах) противоречат теореме о двух углах. Следовательно, предположение о неравенстве прямых углов не верно.□

Принято общее обозначение прямого угла – *d*.

Теорема 11.12. *Всякий развёрнутый угол равен 2d как представляющий сумму двух прямых углов.*

Теорема 11.13. *Угол, равный развёрнутому, ─ развёрнутый.*

□Пусть ∠ AOB – развёрнутый, ∠ $A_1O_1B_1$= ∠ AOB. Докажем, что ∠ $A_1B_1C_1$ – развёрнутый.

Сохраняя взаимное расположение трёх точек прямой, перемещение *f* (акс.VI_4) точкам в отношении A.O.B (определение развёрнутого угла) сопоставит точки в отношении $A_1.O_1.B_1$. Следовательно, ∠ $A_1O_1B_1$ ─ развёрнутый по определению.□

Теорема 11.14. Угол, равный прямому, ─ прямой.

□Пусть ∠ ABC=∠ $A_1B_1C_1$ и ∠ $A_1B_1C_1$ – прямой. Докажем, что ∠ ABC также прямой.

Перемещение *f*, сопоставляющее угол ABC углу $A_1B_1C_1$ (акс.VI_4), сохраняя взаимное расположение трёх точек, сопоставляет также ∠ ABC_0, смежный с ∠ ABC, углу $A_1B_1C_0'$, смежному с углом $A_1B_1C_1$. По определению прямого угла и свойствам равенства, получим ∠ ABC=ABC_0, Следовательно, ∠ ABC ─ прямой по определению.□

Теорема 11.15 (об углах при пересекающихся прямых).

Если один из углов, образуемых лучами прямых, исходящими из точки их пересечения, ─ прямой, то углы, образуемые другими лучами этих прямых, также прямые.

□Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O при A.O.B, C.O.D и ∠ AOC – прямой. Углы AOD и COD – смежные с углом AOC по определению и, следовательно, прямые как равные прямому углу (Т.11.14, определение прямого угла, свойства равенства). Аналогично прямой и ∠ BOD.□

Теорема 11.16 (о перпендикуляре через точку прямой).

Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую в данной плоскости и притом только одну.

□Пусть прямая AB принадлежит плоскости α. На плоскости α отметим произвольную точку CAB. На луче AB в полуплоскости ABC отложим ∠ BAD=*d* (акс.VI_2). Угол BAD – прямой как равный прямому (Т.11.14). Следовательно DA⊥AB по определению.

Предположив возможность другого перпендикуляра к прямой AB в точке A на плоскости α, получим противоречие с аксиомой VI_2.□[7]

Углы, образованные двумя лучами с прямой, содержащей их начала, будем называть *соответственными*, если эти лучи принадлежат одной полуплоскости, ограниченной этой прямой, а лучи этих углов, принадлежащие данной прямой, сонаправлены.

Если один из двух соответственных углов заменим на вертикальный угол, то получим *накрест лежащие углы*, если – на смежный с ним в той же полуплоскости, что и соответственный углы, то – *углы односторонние*.

Теорема 11.17 (третий признак сонаправленности лучей).

Если луч исходит из конца направленного отрезка и содержит точки, лежащие на продолжении отрезка за этот конец, то он сонаправлен лучу, исходящему из начала данного отрезка и содержащему этот отрезок.

□Пусть точка P лежит на продолжении отрезка MN за конец N, т.е. верно M.N.P по определению продолжения отрезка. Докажем, что [MN⇈[NP.

Отметим точку X луча NP такую, что NX=MN (акс.VI_1). N→XP по определению луча. Из P.N.M и N→X.P по аксиоме противолежания следует M.N.X. MN□NX по определению.

$[MN \upuparrows [NX$ по второму признаку сонаправленности лучей. Так как $[NX$ и $[NP$ – один и тот же луч по теореме об определении луча, то $[MN \upuparrows NP$.□

Теорема 11.18 (о соответственных углах). *Если прямая пересекает две параллельные прямые, то соответственно углы равны.*

□Пусть прямая с пересекает параллельные прямые *а,в* в точках M,N соответственно. Отметим точки $K \in a$, $L \in в$ в одной полуплоскости, ограниченной прямой с, и точку $P \in$ с, так что P.N.M. $[MN \upuparrows [NP$ по третьему признаку сонаправленности лучей. $[MK \upuparrows [NL$ по первому признаку сонаправленности лучей. Углы KMN и PNL – соответственные по определению. Лучи MK и NL, MN и NP сопоставлены переносом на MN по определению. По теореме 9.16 ∠PNL=∠NMK.□

Теорема 11.19 (о перпендикуляре к параллельной прямой). *Если прямая, пересекающая две параллельные прямые, перпендикулярна к одлной из параллельных прямых, то она также перпендикулярна к другой прямой.*

□Пусть прямая *с* пересекает парплллельные прямые *а,в* в точках M,N соответственно и $c \perp a$. На прямой с отметим точку P так, что M.N.P., на прямых *а,в* – точки A,B соответственно, принадлежащие одной полуплоскости, ограниченной прямой *с*. ∠AMN – прямой (определение перпендикулярности прямых, Т.11.15). Углы AMN и BNP – соответственные (определение, Т.11.17). ∠BNP ─ прямой как равный прямому (Т.11.18, Т.11.14). Следовательно, $в \perp c$ по определению.□

Теорема 11.20 (4-й признак параллельности прямых). *Если при пересечении двух прямых одной плоскости третьей прямой, соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.*

□Пусть прямые *а,в*, принадлежащие одной плоскости, пересекаются прямой *с* в точках M,N соответственно, $A \in a$ и $B \in в$ принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой *с* и M.N.C. Углы CMA и M.N.B - соотвественные (определение и третий признак сонаправленности лучей).

Предположим $a \nparallel в$. Через точку M проведём прямую $c' \parallel в$ (Т.9.25). Углы CMA' (при $A' \in a'$ и $A' \in |\cdot MCA$) и MNB – соответственные по определению и равны (Т.11.18). Получилось, что на луче MC в полуплоскости MCA отложены два угла, равных ∠MNB, что противоречит акс. V_2. Следовательно, предположение не верно, и $a \parallel в$.□

Можно доказать

теорему 11.21. *Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.*

и теорему 11.22. *Если сумма двух односторонних углов равна 2d, то прямые параллельны.*

Теорема 11.23 (о двух перпендикулярах). *Две прямые одной плоскости, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.*

□Пусть прямые *а,в* в одной плоскости пересекаются прямой *с* в точках M,N соответственно. Отметим точки $A \in a$ и $B \in в$ в одной полуплоскости, ограниченной прямой *с* и точку C такую, что N.M.C. Так как один из углов при вершине M прямой по условию, то по теореме 11.15 и все эти углы прямые. Аналогично прямые все углы при вершине N. Углы CMA и MNB равны как прямые углы (Т.11.11). Так как они соответственные по определению, то $a \parallel$в по признаку параллельности прямых (Т.11.20).□

Теорема 11.24 (о перпендикуляре через точку вне прямой). *Через точку вне прямой можно провести прямую, перпендикулярную к данной прямой, и притом только одну.*

□Пусть точка B лежит вне прямой a. Через точку B можно провести единственную прямую $в \parallel a$ (Т.9.25) и единственную прямую $c \perp в$ (Т.11.16). По теореме 9.26 прямая c пересекает и прямую a. Из $c \perp в$ по теореме о перпендикулярах к параллельной прямой $c \perp a$. Тогда $c \parallel c'$ по теореме о двух перпендикулярах и прямые c, c' пересекаются по определению пересечения прямых. Это противоречит теореме о непересечении параллельных прямых. Следовательно, через точку вне прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой.□

11.2 *Треугольником* назовём фигуру, которая образована тремя точками, не лежащими на одной прямой и называемыми вершинами, и точками лежащими между каждыми вершинами.

Отрезок, образованный двумя вершинами и точками, лежащими между ними, будем называть *стороной* треугольника.

Углом треугольника назовём фигуру, образованную лучами, исходящими из вершины треугольника и содержащими стороны этого треугольника.

Будем говорить, что сторона треугольника *лежит против данного угла треугольника*, а *угол против стороны*, если она является поперечиной этого угла.

Теорема 11.25. *Сумма углов треугольника равна 2d.* [11]

Теорема 11.26. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.*[11]

Теорема 11.27 (об отношениях в треугольнике). *В треугольнике 1) против равных сторон лежат равные углы; 2) против большей стороны лежит больший угол; 3) против равных углов лежат равные стороны; 4) против большего угла лежит большая сторона; 5) каждая сторона меньше суммы двух других сторон.*

□1) Пусть в Δ ABC AB=AC. Докажем, что ∠ C= ∠ B. Отрезками угла B являются по определению стороны AB и BC, поперечиной – сторона AC, аналогично отрезки угла C – стороны AC и BC, поперечина – сторона AB.
Так как AB=AC по условию, BC=BC по рефлексивности, то поперечины AC и AB углов B и C – соответственные по определению. Так как они равны, то ∠ B=∠ C (акс.VI_3).

2) Пусть в Δ ABC AB>AC. Докажем, что ∠ C> ∠ B. Отложим на луче AB отрезок AD=AC. Из AB>AC (по условию). AD=AC (по построению). AB=AB (по рефлексивности) следует AB>AD (теорема о разности и отношении «больше» для отрезков). A→D.B по определению луча. A.B.D или A.D.B по определению одного направления. Предположив A.B.D, получим AD>AB (определения суммы и отношения «больше»). Отношения AD>AB и AB>AD противоречат теореме о двух отрезках. Следовательно, верно A.D.B. Из определения суммы углов и отношения «больше» для углов следует ∠ BCA> ∠ DCA. ∠ ADC – внешний угол ΔBDC (по определению). Поэтому ∠ ADC>∠ B (Т.11.26). ∠ ACD=∠ ADC по доказанному в (1). Таким образом, ∠ BCA>∠ DCA, ∠ DCA=∠ ADC, ∠ CDA>∠ B. Из первых двух отношений по теореме о разности и отношении «больше» для углов следует ∠ BCA>∠ ADC. Отсюда и ∠ ADC>∠ B по транзитивности отношения «больше» следует ∠ C>∠ B.

3) Пусть в Δ ABC ∠ B=∠ C. Докажем, что AC=AB. Предположим, что AC≠AB. Тогда по теореме о двух отрезках AB>AC или AB<AC. По доказанному в (2) ∠ C>∠ B или ∠ C< ∠ B. Это (так как по условию ∠ B= ∠ C) противоречит теореме о двух углах. Следовательно, предположение не верно и AB=AC.

4) Пусть в Δ ABC ∠ C> ∠ B. Докажем, что AB>AC. Предположим,что не верно AB>AC. Тогда по теореме о двух отрезках AB=AC или AB=AC. В первом случае по доказанному в (1) ∠ C=∠ B, во втором случае по доказанному в (2) ∠ C<∠ B, что вместе с

отношением ∠ C<∠ B (по условию) противоречит теореме о двух углах. Следовательно, AB>AC.

5) Докажем в Δ ABC AB<AC+BC. На продолжении отрезка AC за конец C отложим отрезок CD=CB. ∠ CDB=∠ CBD по доказанному в (1). AD=AC+CD по определению суммы отрезков. ∠ ABD=∠ ABC+∠ CBD по определению суммы углов. ∠ ABD>∠ CBD (определение «больше» для углов). По теореме о разности и отношении «больше» ∠ ABD>∠ CDB (ADB). AD>AB как сторона, противолежащая большему углу. По теореме о сумме отрезков AC+CD=AC+CB. Отсюда и AD=AC+CD по свойствам равенства AD=AC+CB. По теореме о разности и отношении «больше» для отрезков AC+CB>AB.□

Теорема 11.28 (об отношениях в равных треугольниках). *В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов – равные стороны.*

□Пусть Δ ABC=Δ DEG и перемещение *f*, сопоставляющее Δ ABC треугольнику DEG, сопоставляет точкам A,B,C точки D,E,G соответственно (акс.VI_4. п.6.2). Тогда AB=DE, BC=EG, AC=DG по определению перемещения. Угол C, противолежащий стороне AB равен углу G, противолежащему стороне DE как имеющий поперечину AB равную соответствующей поперечине DE угла G.

Аналогично ∠ A=∠ D, ∠ B=∠ E.

Обратно, если ∠ C=∠ G, то противолежащие им стороны AB и DE равны, как соответствующие поперечины равных углов.□

Теорема 11.29 (первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

□Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ∠ ABC=∠ $A_1B_1C_1$, AB=A_1B_1, BC=B_1C_1. По аксиоме VI_5 возможно перемещение *f*,сопоставляющее лучу BA луч B_1A_1, лучу BC луч B_1C_1. Это перемещение сопоставит точкам A,B,C точки A_1,B_1,C_1 соответственно (определение перемещения, акс.V_1.) и, следовательно, отрезкам AB, BC, AC отрезки A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 (п.6.2). Треугольник ABC сопоставляется треугольнику $A_1B_1C_1$ по определению. Следовательно, Δ ABC=Δ $A_1B_1C_1$ (акс.VI_4).□

Теорема 11.30 (второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилегающих к ней угла одного треугольника равны стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

□Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, AB=A_1B_1, ∠ BAC=∠ $B_1A_1C_1$, ∠ ABC=∠ $A_1B_1C_1$. Предположим, что BC≠B_1C_1. На луче B_1C_1 отложим отрезок B_1C'=BC (акс.VI_1). ΔABC=ΔA_1B_1C' по первому признаку равенства треугольников. Углы $C'A_1B_1$ и CAB равны, как лежащие против равных сторон в равных треугольниках. Получилось, что на луче A_1B_1 в полуплоскости $A_1B_1C_1$ отложены два угла, равных ∠ BAC, что противоречит аксиоме VI_2. Следовательно, BC=B_1C_1 и ΔABC=Δ$A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников.□

Теорема 11.31 (третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника, то такие реугольники равны.*

□Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ AB=A_1B_1, BC=B_1C_1, AC=A_1C_1. Углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны как имеющие равные соответственные поперечины. ΔABC=Δ$A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников.□

12. Точка плоскости.
Перпендикулярность прямой и плоскости.

Теорема 12.1 **(**о точке плоскости).*Если две пересекающиеся прямые и точка вне этих прямых принадлежат одной плоскости, то эта точка лежит между двумя лучами данных прямых с началом в точке пересечения.*

□Пусть прямые *а,в* пересекающиеся в точке О, и точка М вне этих прямых принадлежат одной плоскости. Отметим произвольные точки А$\in$*а* и В$\in$*в*, а также точки A_1B_1 так, что $A.O.A_1$ и $B.O.B_1$. По теореме о прямой плоскости точка М принадлежит │·OBA или │·OBA_1. Пусть М$\in$│·OBA. По теореме 10.3 найдутся точки $B_0\in$[OB и $A_0\in$[OA такие, что $B_0{\to}M.A_0$. По определению одного направления $B_0.M.A_0$ или $B_0.A_0.M$. Если $A_0.M.B_0$, то [OA.M.[OB (определение точки, лежащей между двумя лучами). Пусть $B_0.A_0.M$. Точка М принадлежит полуплоскости, противолежащей │·AOB, т.е. │·AOB_1 (теорема о противолежании полуплоскостей). По теореме 10.3 найдутся точки $A_2\in$[OA и $B_2\in$[OB_1 такие, что $B_2{\to}M.A_2$, т.е. $B_2.M.A_2$ или $B_2.A_2.M$. Если $B_2.M.A_2$, то [OB_1.M.[OA по определению. Пусть $B_2.A_2.M$. Тогда точка М принадлежит полуплоскости, противолежащей │·OAB_1, т.е. │·AOB, что противоречит доказанному. Значит, верно $B_2.M.A_2$ и [OA.M.[OB_1. Таким образом, если точка М принадлежит полуплоскости OBA, то она лежит между лучами OA и OB или OA и OB_1.

Аналогично, если точка М принадлежит полуплоскости OBA_1, то она лежит между лучами OB и OA_1 или OB_1 и OA_1.□

Теорема 12.2 (признак перпендкулярности прямой и плоскости). *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна данной плоскости.*[9]

□Пусть прямая *а* пересекает плоскость α в точке О и перпендикулярна двум прямым *в* и *с*, проходящим в плоскости α через точку О. Нужно доказать, что прямая *а* перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей через точку О в плоскости α. Возьмем любую такую прямую *d,* отличную от *в* и *с*.

Отметим произвольную точку D прямой *d*, отличную от точки О. D$\in$÷α по транзитивности принадлежности. По теореме 12.1 точка D лежит между лучами прямых *в* и *с*. По определению междулежащей точки и транзитивности принадлежности существуют точки В$\in$*в* и С$\in$*с* такие, что B.D.C. Отметим точки B_1 и D_1 прямых *в,с* так, что $B.O.B_1$ и $C.O.C_1$, $OB_1=OB$, $OC_1=OC$.

Луч, противолежащий лучу OD, пересекает отрезок B_1C_1 в точке D_1 (теорема о противолежащем луче). Докажем, что $OD_1=OD$. $B_1C_1=BC$ как соответственные поперечины равных углов. $\Delta OBC=\Delta OB_1C_1$ по третьему (первому) признаку равенства треугольников, $\Delta OD_1C_1=\Delta ODC$ по второму признаку. $OD_1=OD$ как стороны, противолежащие равным углам в равных треугольниках. Аналогично $C_1D_1=CD$.

На прямой *а* отметим произвольную точку А, отличную от точки О. $AB=AB_1$ и $AC=AC_1$ как соответственные поперечины равных углов. $\Delta AB_1C_1=\Delta ABC$ по третьему признаку равенства треугольников. ∠ ACB (ACD)= ∠ AC_1B_1 (AC_1D_1) как противолежащие равным сторонам в равных треугольниках. $\Delta ADC=\Delta AD_1C_1$ (Т.11.29). $AD=AD_1$ (Т.11.28). $\Delta AOD=A_1OD_1$ по трём сторонам. ∠ AOD=∠ AOD_1 (Т.11.28), ∠ AOD – прямой, как равный своему смежному (определение прямого угла). Следовательно, *а*⊥α по определению.□

Теорема 12.3 (о плоскости, перпендикулярной прямой). *Через каждую точку прямой проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.* [9]

Теорема 12.4 (о перпендикулярности прямой и плоскости). *Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.* [7]

Теорема 12.5 *Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.* [7]

Теорема 12.6 (о прямой, перпендикулярной плоскости). *Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.*[9]

13 Свойства преобразований.

13.1 Теоремы об ориентации.

Теорема 13.1. *Пусть* OZ⊥÷OXY. *Если две точки плоскости* OXY *лежат слева (справа) при направлении зрения* Z.X, *то они принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой* OX *и принадлежащей плоскости* OXY.

□Пусть точки A,B плоскости OXY лежат слева при напрвлении зрения Z.X. Предположим, что B│·OXA. Тогда она принадлежит полуплоскости, противолежащей │·OXA (теорема о прямой плоскости). По аксиоме $III_{1:1}$ она лежит справа при направлении зрения Z.X, что противоречит условию. Следовательно, верно не предположение, а утверждение теоремы.□

Теорема 13.2.*Пусть* OZ⊥÷OXY. *Если одна из двух точек плоскости* OXY *лежит слева, а другая справа при направлении зрения*Z.X, *то они принадлежат противолежащим полуплоскостям плоскости* OXY, *ограниченными прямой* OX.

□Пусть точка A∈÷OXY лежит слева при направлении зрения Z.X, а точкаB∈÷OXY – справа. Предположим, что точка B не принадлежит полуплоскости, противолежащей │·OXA. Тогда она принадлежит │·OXA (теорема о прямой плоскости). Получилось, что точки A,B полуплоскости OXA лежат слева и справа,что противоречит аксиоме $IV_{1.1}$. Следовательно, верно не предположение, а утверждение теоремы.□

Теорема 13.3. *Пусть лучи* OX, OУ, OZ *попарно образуют прямые углы. Тогда, если точка* У *лежит слева (справа) от точки* X *при точке зрения*Z, *то она лежит также слева (справа) от точки* X *при любой точке зрения, отличной от точки* O *и принадлежащей лучу* OZ.

□Пусть Z_1∈[OZ. Точка У лежит справа (слева) при напр. зр. X.Z (акс.$IV_{1.3}$). Точка Z лежит слева (справа) при напр. зр. X.У. (акс.$IV_{1.2}$). Точка Z_1 лежит слева (справа) при напр.зр. X.У (акс.$IV_{1.1}$). Точка У лежит справа (слева) при напр. зр. X.Z_1 (акс.$IV_{1.2}$). Точка У лежит слева (справа) при напр. зр. Z_1.X (акс.$IV_{1.3}$).□

Теорема 13.4. *Пусть лучи* OX, OУ, OZ *попарно образуют прямые углы.Тогда, если точка* У *лежит слева (справа) от точки* X *при точке зрения* Z, *то она лежит справа (слева) при точке зрения, принадлежащей лучу, противолежащему лучу* OZ.

□Пусть точка Z_1, принадлежит лучу, противолежащему [OZ. Тогда Z.O.Z_1 по определению. Точка У лежит справа (слева) при напр. зр. X.Z (акс.$III_{1.3}$). и слева (справа) при напр. зр. X.Z_1 (акс.$III_{1.3}$) и справа (слева) при напр.зр. Z_1.X (акс.$III_{1.3}$).□

Теорема 13.5. *Пусть* OZ⊥÷ OXY *и точка* У *лежит слева (справа) при направлении зрения* Z.X. *Тогда при направлении зрения* Z.X_1 *точка* У *лежит также слева (справа), если* O→X.X_1 *и справа (слева) если* X.O.X_1.

□Точка X лежит справа (слева) при напр. зр. Z.У (акс.$III_{1.2}$). Точка X_1 лежит также справа (слева) при напр. зр. Z.У если O→X.X_1 и слева (справа) если X.O.X_1 (акс.$IV_{1.1}$, определения полуплоскости и противолежащей полуплоскости). Тогда точка У лежит слева (справа) при напр. зр. $Z.X_1$, если $O\rightarrow X.X_1$ и справа (слева), если $X.O.X_1$. (акс.$IV_{1.2}$).□

13.2 Поворот и перенос.

Пусть прямая а пересекает данную плоскость под прямым углом в точке О. *Поворотом на неразвернутый угол* α *вокруг центра* О *в данной плоскости* (или поворотом плоскости на неразвёрнутый угол вокруг прямой *а*) *в положительном (отрицательном) направлении*, будем называть преобразование, которое сопоставляет каждой точке прямой *а* ту же точку, произвольной точке А данной плоскости, отличной от точки О, точку А′ этой плоскости так, что ∠ АОА′ = α, ОА=ОА′ и точка А′ лежит слева (справа) от точки А при точке зрения Z∈*а. Поворотом на развёрнутый угол вокруг точки* О назовём преобразование, которое сопоставляет точке А точку А′ так, что А.О.А′ и ОА=ОА′.

Поворотом на неразвернутый угол α в положительном (отрицательном) направлении вокруг прямой *а* назовём преобразование, которое сопоставляет каждой точке Аi точку A'_i так, что:

1) точка A'_1 принадлежит плоскости γ_i, препендикулярной прямой *а* и содержащей точку A_i;

2) точка А′i соответствует точке A_i для поворота в положительном (отрицательном) направлении вокруг центра O_i, являющимся точкой пересечения плоскости γ_i и прямой *а*.

При этом точку зрения полагаем такой, что любые две точки пересечения прямой *а* и плоскости γ_i , перпендикулярной прямой *а*, лежат в одном направлении от точки зрения Z∈*а*, т.е. верно $Z\rightarrow O_i.O$.

Поворотом на развернутый угол вокруг прямой а назовём преобразование, которое сопоставляет каждой точке прямой *а* ту же точку и каждой точке A_i, не принадлежащей прямой *а*, точку A'_1 так, что $A_i.\ O_i.$ Ai

, где O_i - точка пересечения прямой *а* и прямой, перпендикулярной к ней и содержащей точку A_i.Свойства поворота.

Лемма о повороте. *Если поворот на угол* α *в данной плоскости вокруг центра* О *сопоставляет точкам* Х,У *точки* Х′,У′ *и точки* О,Х,У *не принадлежат одной прямой, то* ∠ ХОУ=∠ Х′ОУ′.

□Пусть *f*– поворот на угол α в положительном направлении, OO_1 - видимый луч прямой, перпендикулярной данной плоскости, точка Х лежит слева при напр. зр. O_1.У (в другом случае доказательство аналогичное) и точки О,Х,У не связаны отношением «лежит между».

Рассмотрим оба возможных случая: ∠ ХОУ=α и ∠ ХОУ ≠α.

1. ∠ ХОУ=α. Лучи ОХ и ОУ′ - один и тот же луч (акс VI_2). ∠ Х′ОХ=∠ Х′ОУ (определение тождественных фигур, рефлексивность равенства). Аналогично ∠ ХОУ=∠ УОУ′. ∠ ХОХ′=∠ УОУ′ по определению поворота и свойству равенства. По свойствам равенства ∠ ХОУ=∠ Х′ОУ′.

2. ∠ ХОУ≠α . Точки Х,У′, как лежащие слева от точки У, принадлежат одной полуплоскости (Т.13.1). Предположив Х ∈[ОУ[1], получим∟ХОУ=α, что противоречит условии. Предположив Х.О.У, получим, что точки Х,У′ принадлежат противолежащим полуплоскостям, ограниченным прямой ОУ, что противоречит доказанному. Следовательно, Х ОУ′.

По теореме о прямой плоскости Х ∈│· OY_1У или полуплоскости, противолежащей │·OY_1У.

а) Пусть верно второе. ∠ ХОУ=∠ УОУ$_1$ +∠ У$_1$ОХ по определению суммы углов. Из «У$_1$ лежит слева при напр.зр. О.У» следует «У лежит справа при напр. зр. О.У$_1$ (акс.IV$_{1.2}$). Из принятого условия следует «Х лежит слева при напр. зр. О.У$_1$» (акс.IV$_{1.1}$). Тогда «У$_1$ лежит справа при напр. зр. О.Х» (акс.IV$_{1.2}$). Отсюда и «Х$_1$ слева при напр. зр. О.Х» (определение поворота в положительном направлении) следует, что точки Х$_1$, У$_1$ принадлежат противолежащим полуплоскостям, ограниченным прямой ОХ (Т.13.2). Следовательно, ∠ Х$_1$ОУ$_1$= ∠ У$_1$ОХ+ ∠ ХОХ$_1$. По теореме о сумме углов и свойствам равенства ∠ ХОУ=∠ Х$_1$ОУ$_1$.

б) Пусть Х ∈│·ОУ$_1$У. Точка Х лежит справа при напр. зр. О.У$_1$ (акс.III$_{1.1}$). Точка У$_1$ лежит слева при напр. зр. О.Х (акс.III$_{1.2}$). Полуплоскости ОХУ и ОХУ′ ─ противолежащие. (Т.13.2). ∠ **ХОУ+**∠ **ХОУ′=**∠ **УОУ′(1*)** по определению суммы углов. Из «У$_1$ и Х$_1$ лежат слева при напр. зр. О.Х» следует Х$_{1}$∈│·ОХУ$_1$ (Т.13.1). Один из лучей ОХ$_1$ и ОУ^1 - междулежащий (Т.10.3, определение междулежащего луча).

Предположим [ОУ$_1$.[ОХ$_1$.[ОХ. Тогда ∠ ХОУ$_1$+∠ ХОХ$_1$+∠ Х$_1$ОУ$_1$. Отсюда ∠ ХОХ$_1$≡∠ ХОУ$_1$ ─ ∠ Х$_1$ОУ$_1$, ∠ ХОХ$_1$< ∠ ХОУ$_1$. Из (1*) следует ∠ УОУ′>∠ ХОУ′. По транзитивности ∠ УОУ′> ∠ ХОХ$_1$, что противоречит определению поворота. Следовательно, предположение не верно и [ОХ.[ОУ$_1$.[ОХ$_1$. Тогда ∠ ХОХ$_1$= ∠ ХОУ$_1$+ ∠ У$_1$ОХ$_1$. Отсюда ∠ У$_1$ОХ$_1$=∠ ХОХ$_1$ - ∠ ХОУ$_1$. Из (1*) ∠ ХОУ=∠ УОУ$_1$ – ХОУ$_1$. По теореме о разности углов и отношении «больше» и свойствам равенства ∠ ХОУ=∠ Х$_1$ОУ$_1$.□

Теорема 13.6. *Поворот вокруг точки в данной плоскости сохраняет расстояние.*

□Пусть поворот вокруг точки О в плоскости α сопоставляет точкам Х,У точки Х′,У′. Докажем, что ХУ=Х'У′.

Рассмотрим все возможные расположения точек Х,У,О: точки Х,О,У не принадлежат одной прямой; точки Х,О,У принадлежат одной прямой и одному лучу, т.е. верно О.Х.У или О.У.Х; точки Х,О,У принадлежат одной прямой и противолежащим лучам, т.е. верно Х.О.У.

В первом случае по лемме о повороте ∠ ХОУ=∠ Х'ОУ'. ХУ=Х'У' как соответствующие поперечины раных углов.

Во втором случае верно О→Х'У'. Действительно, предположив противное, получим противоречие с аксиомой V$_2$. Из О→ Х'У' следует О.Х'.У' или О.У'.Х'. Предположим, что точкам в отношении О.Х.У сопоставляются точки в отношении О.У'.Х'. Тогда ОУ=ОХ+ХУ и ОУ>ОХ; ОХ'=ОУ'+У'Х и ОУ′<ОХ'. Из ОУ′<ОХ' и ОУ'=ОУ, ОХ'=ОХ следует ОУ<ОХ. Отношения ОУ<ОХ и ОУ>ОХ противоречат теореме о двух отрезках. Следовательно, предположение не верно и точкам в отношении О,Х,У сопоставляются точки в отношении О.Х'.У'. Аналогично точкам в отношении О.У.Х сопоставляются точки в отношении О.У'.Х'. ХУ=ОУ- ОХ, Х'У'=ОУ'- ОХ'. По теореме о разности двух отрезков и свойствам равенства ХУ=Х'У'.

Пусть теперь верно Х.О.У. По определению поворота Х' слева от Х и У' слева от У. По аксиоме III$_{1.3}$точка У' лежит справа от точки Х. Следовательно Х' и У' принадлежат противолежащим полуплоскостям, ограниченным прямой ОХ (Т.13.2). ∠ ХОУ=∠ ХОХ'+∠ Х'ОУ, ∠ Х'ОУ'=∠ Х'ОУ+∠ УОУ' по определению. По теореме о сумме углов и свойствам равенства ∠ ХОУ=∠ Х'ОУ'. ∠ Х'ОУ' – развернутый как равный развёрнутому углу. Следовательно, верно Х'.О.У'. Тогда Х'У'=Х'О+ОУ', ХУ=ОХ+ОУ. По теореме о сумме отрезков и свойствам равенства ХУ=Х'У'.□

Из теорем 9.10 и 13.6 следует

теорема 13.7. *Поворот вокруг точки в данной плоскости сохраняет взаимное расположение трёх точек прямой.*

Теорема 13.8. *Поворот вокруг точки в данной плоскости сохраняет ориентацию.*

□Пусть лучи ОХ,ОУ,OZ попарно образуют прямые углы. Точка У лежит слева при напрвлении зрения Z.X, *f*–поворот на неразвернутый угол α в положительном направлении (если – в отрицательном или У справа от Х доказательство аналогично) вокруг центра О в плоскости ОХУ – сопоставляет точкам О.Х.У точкам О.X_1.$У_1$ соответственно. Докажем, то точка $У_1$ лежит также слева от точки X_1 при точке зрения Z.

Рассмотрим все возможные отношения между углами α и ХОУ.

1)α=∠ ХОУ. [ОУ, [ОX_1 –один и тот же луч (акс VI_2), т.е. верно О→У.X_1 по определению луча. Отсюда и «точка $У_1$ лежит слева при напр. зр. Z.У (определение поворота в положительном направлении) следует «точка У1 лежит слева при напр. зр. Z_1X_1». (Т.13.5).

2) α< ∠ ХОУ. Так как точки X_1,У принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой ОХ (Т.13.1), то один из лучей ОУ или ОX_1 - междулежащий (Т.10.3). Предположив, что [ОХ. [ОУ. [ОX_1, получим противоречие с условием α< ∠ ХОУ. Следовательно, [ОУ. [ОX_1.[ОХ. Тогда точка У лежит слева при направлении зрения Z.X_1 (акс.$IV_{1.1}$). ∠ ХОУ=∠ ХОX_1+∠ X_1ОУ по определению суммы углов. По теореме о сумме углов и свойствам равенства получим ∠ X_1О$У_1$=∠ УОУ'+∠ УОХ'. Значит, [О$У_1$.[ОУ.[ОX_1 (определение суммы углов и междулежащего луча). $У_1$∈|·ОX_1У (определение полуплоскости). Следовательно, точка $У_1$, как и точка У лежит слева при направлении зрения Z.X_1.

3) ∠ α> ∠ ХОУ. По доказанному в (2) [ОХ. [ОУ. [ОX_1. Точка X_1 лежит слева при направлении зрения Z.У (1^x) (акс.$IV_{1.1}$). ∠ ХОX_1=∠ ХОУ+∠ УОX_1 по определению. По теореме о сумме углов и свойствам равенства ∠ $У_1$ОУ=∠ X_1О$У_1$+∠ УОX_1. [О$У_1$. [ОX_1.[ОУ (2^*) (определение суммы углов и междулежащего луча). Из (1^*) следует, что точка У лежит справа при направлении зрения Z.X_1 (акс.$IV_{1.2}$). Отсюда и (2^*) получим, что точка $У_1$ лежит слева при направлении зрения Z.X_1 (акс.$IV_{1.1}$).□

Двугранным углом называют фигуру, образованную двумя полуплоскостями (его гранями), имеющими общую граничную прямую (ребро) и не лежащими в одной плоскости.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум лучам (акс.III_1).

Угол, образованный этими лучами, называется *линейным углом* двугранного угла. (7)

Все *линейные углы одного двугранного угла равны*, так как сопоставляются переносом. (Т.9.16)

Теорема 13.9. *Если прообразы для повороты вокруг прямой а принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой а, то и образы данного поворота также принадлежат одной полуплоскости, ограниченной этой прямой.*

□Пусть поворот *f* вокруг прямой *а* сопоставляет точкам Х,У точки X_1,$У_1$ и точки Х,У принадлежат одной полуплоскости, ограниченной прямой α. Докажем, что и точки X_1,$У_1$ принадлежат одной полуплоскости, ограниченной этой прямой.

Обозначим точки пересечения прямой а и плоскостей, содержащих точки Х,У и перпендикулярных этой прямой, соответственно A_x и A_y.

Полуплоскости A_xA_y Х и A_xA_y X_1 образуют двугранный угол по определению. ∠ ХA_x X_1 и ∠ УA_xУ' (при У' ∈|·A_xA_y X_1 и A_yУ'⊥α) - линейные углы этого двугранного угла.

Предположив, что точки $У_1$ и У'- различные, получим противоречие с аксиомой VI_2 (теорема о равенстве линейных углов, определение поворота, акс.III_1). Следовательно, предположение не верно, и точка $У_1$ принадлежит полуплоскости A_xA_y X_1.□

Лемма. *Если поворот вокруг прямой а сопоставляет точкам* Х,У *точки* Х',У' *и* ХУ║*a*, *то* ХУ=Х'У' *и* Х'У'║*a*.

□Точки пересечения перпендикуляров через точки Х,У к прямой *a* обозначим соответственно $Х_a$,$У_a$. ∠ $УХУ_a$=∠ $ХУ_aХ_a$ как накрест лежащие при параллельных прямых. ∠ $УХХ_a$ – прямой (теорема о прямой параллельной к перпендикуляру к данной прямой). ∠ $Х_aХУ_a$=∠ $ХУ_aУ$ (определение разности и теорема о разности двух углов). $\Delta ХХ_aУ_a=\Delta ХУУ_a$ по второму признаку равенства треугольников. $Х_aУ_a$=ХУ $ХХ_a=УУ_a$ как стороны, лежащие против равных углов в равных треугольниках. $Х_1Х_a$║$У_1У_a$ как имеющие равные соответственные углы с вершинами $Х_a$,$У_a$. Тогда ∠ $Х_aХ_1У_a$=∠ $Х_1У_aУ_1$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых. $Х_aХ_1=У_aУ_1$ следует из $ХХ_a=УУ_a$, по определению поворота и свойствам равенства. $\Delta Х_aХ_1У_a=\Delta Х_1У_aУ_1$ по первому признаку равенства треугольников. $Х_aУ_a=Х_1У_1$ как стороны, лежащие против равных углов в равных треугольниках. ХУ=$Х_1У_1$ по свойствам равенства.□

Теорема 13.10. *Поворот вокруг прямой сохраняет расстояние между точками.*

□Пусть поворот *f* вокруг прямой *a* на угол γ сопоставляет точкам Х,У точки $Х_1$,$У_1$.

Если точки Х,У принадлежат одной плоскости, перпендикулярной прямой *a*, то ХУ=$Х_1$,$У_1$ (Т.13.6, определение поворота вокруг прямой).

Пусть точки Х,У принадлежат соответственно плоскостям α_1 и α2, перпендикулярным прямой *a* и пересекающим её в точках $Х_a$,$У_a$. Рассмотрим оба возможных расположения точек Х,У: ХУ║*a* и ХУ╫ *a*.

ХУ║*a*. По лемме ХУ=$Х_1$,$У_1$.

ХУ╫*a*. Через точку У проведём прямую, перпендикулярную плоскости α1 и пересекающую её в точке У'; *a*║УУ' (теорема о параллельности перпендикуляров). Поворот *f* по лемме сопоставит точкам У,У' точки $У_1$,У1' такие, что УУ'=$У_1$,У1' и $У_1$,У1'║*a*. Точкам У',Х поворот вокруг точки $Х_a$ на угол α в плоскости γ сопоставляет точки У1', $Х_1$ такие, что ХУ'=$Х_{1У1'}$ (определение поворота вокруг прямой, (Т.13.6). ХУ=$Х_1У_1$ как соответственные поперечины равных углов ХУУ и $Х_{1У1'}У_1$.□

Из теорем 13.10 и 9.10 следует

теорема 13.11. *Поворот сохраняет взаимное расположение точек прямой.*

Из теоремы 13.11 и теорем 1,2 о сопоставлении преобразованием следуют

Теорема 13.12. *Поворот сопоставляет промежутку промежуток,отрезку отрезок, лучу луч и прямой прямую.*

Теорема 13.13. *Поворот сохраняет непринадлежность точек прямой.*

Теорема 13.14. *Поворот сопоставляет плоскости плоскость, полуплоскости полуплоскость, углу, равный ему угол.*

Теорема 13.15. *Если* ХОУ *и* $Х_1О_1У_1$ *– линейные углы одного двугранного угла*, $Х_{1\in}$│·$ОО_1$Х, $У_{1\in}$│·$ОО_1$У, *точка* У *лежит слева (справа) при направлении зрения*Z.Х *и* Z→О.$О_1$, *то точка* $У_1$ *также лежит слева (справа) при направлении зрения*Z.$Х_1$.

□На луче ОУ отметим точку У' так, что ОУ'=ОХ. Точке Х можно сопоставить точку У' поворотом *f* в положительном направлении вокруг прямой $ОО_1$ на угол равный ∠ ХОУ по определению поворота. Поворот *f* сопоставляет полуплоскости $ОО_1$Х полуплоскость $ОО_1$У' (Т.13.14), точке $Х_1$ точку У1'∈[$ОУ_1$ такую, что $О_{1У1'}=О_1Х_1$ (акс.VI_1. VI_2). Точка У1' лежит слева (справа) при напр. зр. Z.$Х_1$ по определению поворота. Точка $Х_1$ лежит справа (слева) при направлении зрения Z.У1' (акс.$IV_{1.2}$) и при направлении зрения Z.$У_1$ (Т.13.5). Точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр. зр. Z.$Х_1$ (акс.$III_{1.2}$).□

Теорема 13.16. *Если* ХОУ и $X_1O_1У_1$ *– линейные углы одного двугранного угла, точка* У *лежит слева (справа) при направлении зрения*Z.X *и* O.Z.O_1, *то точка* $У_1$*лежит справа (слева) при направлении зрения*Z.X_1.

□ Отметим точку Z_0 так, что $Z_0.O_1.O$. По теореме 13.3 точка У также лежити слева (справа) при напр. зр. Z_0.X. По теореме 13.5 точка $У_1$ также лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_0.X_1$. Из O.Z.O_1 (O_1→O.Z) и $Z_0.O_1$.O по аксиоме противолежания получим $Z_0.O_1$.Z. По теореме 13.4 точка $У_1$ лежит справа (слева) при напр. зр. Z.X_1.□

Теорема 13.17.*Перенос сохраняет ориентацию.*

□ Пусть лучи ОХ, ОУ, OZ образуют попарно прямые углы, точка У лежит слева (справа) при направлении зрения Z.X и перенос на AB сопоставляет точкам O,X,У,Z точки $O_1,X_1,У_1,Z_1$ соответственно. Докажем, что $У_1$ также лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$.

Рассмотрим все возможные варианты переноса на AB: отрезок, исходящий из точки О и равнозначный AB:

– принадлежит одной из прямых ОХ,ОУ,OZ, т.е. AB сонаправлен одному из лучей прямых ОХ,ОУ,OZ с началом О;

– не принадлежит ни одной из прямых ОХ, ОУ, OZ, но принадлежит одной из плоскостей ОХУ, OXZ, OУZ;

– не принадлежит ни одной из плоскостей ОХУ,OXZ,OУZ.

1) $O_1 \in$OZ. По определению равнозначных отрезков и $Z_1 \in$OZ.

а) $O_1 \in$OZ. O→O_1.Z по определению луча. Предположим, Z.O.Z_1. Тогда O_1.O.Z_1 по аксиоме противолежания. Из Z.O.Z_1 и O_1.O.Z_1 по определению суммы и свойствам равенства получим AB=OZ+OZ_1 и OZ=AB+OZ_1. Тогда AB>OZ и AB<OZ по определению отношения «больше». Это противоречит теореме о двух отрезках. Значит, не верно Z.O.Z_1. Следовательно, $Z_1 \in$[OZ. O→Z.Z_1 по определению луча. Из O→Z_1.Z и O→O_1.Z по теореме одного направления O→$Z_1.O_1$, т.е. O.$O_1.Z_1$ или O.$Z_1.O_1$. Если O.$Z_1.O_1$, то получим противоречие с условием сонаправленности AB и [OZ. Следовательно, верно O.$O_1.Z_1$. Из «У слева при напр. зр. Z.X» и $Z_1 \in$[OZ следует по теореме 13.3 «У слева при напр. зр. Z_1.X». Отсюда и O.$O_1.Z_1$ по теореме 13.15 следует, что точка $У_1$ лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$».

б) Пусть O_1 принадлежит лучу, противолежащему [OZ, т.е. O_1.O.Z. Так как $Z_1 \in$OZ(OO_1) по доказанному, то верно одно из отношений Z_1.O.O_1, O.$Z_1.O_1$ или O.$O_1.Z_1$. Предположим, верно O.$O_1.Z_1$. AB<OZ_1 по определению. Из O.$O_1.Z_1$ и Z.O.O_1 по теореме о расширении промежутка получим Z.O.Z_1, т.е. AB> OZ_1, что противоречит теореме о двух отрезках. Значит, предположение не верно. Тогда верно Z_1.O.O_1 или O.$Z_1.O_1$.

Если Z_1.O.O_1, то $Z_1 \in$[OZ (теорема о единственности противолежащего луча). По теореме 13.3 точка У лежит слева (справа) при напр. зр. Z_1.X. По теореме 13.15 точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр. зр. $Z_1.X_1$.

Если O.$Z_1.O_1$, то точка Z_1 принадлежит лучу, противолежащему [OZ по определению, т.е. верно Z.O.Z_1. Тогда точка У лежит справа (слева) при напр. зр. Z_1.X (Т.13.4), а точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр. зр. $Z_1.X_1$ (Т.13.16).

2) $O_1 \in$OX. Точка У лежит справа (слева) при напр. зр. X.Z(акс.$IV_{1.3}$). По доказанному в (1) точка $У_1$ лежит справа (слева) при напр. зр. $X_1.Z_1$ и слева (справа) при напр. зр. $Z_1.У_1$ (акс.$IV_{1.3}$).

3) $O_1 \in$OУ.Точка X лежит справа (слева) при напр. зр. Z.У (акс.$IV_{1.2}$) и слева (справа) при напр. зр. У.Z (акс.$IV_{1.3}$). По доказанному в (1) точка X_1 лежит слева (справа) при напр.

зр. $У_1.Z_1$ и справа (слева) при направлении зрения $Z_1.У_1$ (акс.$IV_{1.3}$). Точка У лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$ (акс.$IV_{1.2}$).

4) $O_{1\in\div}$OXУ и не принадлежит ни одной из прямых OX,OУ,OZ. Через точку O_1 проведем прямую, пересекающую прямую OX под прямым углом в точке O_2 (теорема о проведении перпендикуляра из точки вне прямой). Перенос на OO2 сопоставит точкам O,X,У,Z точки $O_2,X_2,У_2,Z_2$ соответственно (акс.V_1, постулат V_2). $У_2$ лежит слева при направлении зрения $Z_2.X_2$ по доказанному в (2). Перенос на O2O1 сопоставит точкам $O_2,X_2,У_2,Z_2$ точки $O_1,X_1,У_1,Z_1$ (определение последовательности преобразований, акс.V_5). Точка $У_1$ лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$ по доказанному в (3).

Аналогично точка $У_1$ лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$, если$O_{1\in\div}$OZX или $O_1\in$OZ У.

5) Пусть точка O_1 не принадлежит ни одной из плоскостей OXУ, OXZ,OУZ. На плоскость OXУ из точки O_1 опустим перпендикуляр (теорема о перпендикуляре к плоскости. Точку пересечения обозначи O_2. Перенос на OO2 сопоставит точкамO,X,У,Z точки $O_2,X_2,У_2,Z_2$ так, что $У_2$ будет слева (справа) при направлении зрения $Z_2.X_2$ по доказанному в (4). Перенос на O2O1 сопоставит точкам$O_2,X_2,У_2,Z_2$ точки $O_1,X_1,У_1,Z_1$ (акс.V_1,VI_7).Точка $У_1$ лежит слева (справа) при направлении зрения $Z_1.X_1$ по доказанному в (1),

Так как перенос, сопоставляющий точкам O,X точки O_1,X_1 сопоставляет лучу OX луч O_1X_1 (теорема 1 о сопоставлении преобразованием), то точкам, лежащим спереди при направлении зрения O.X, оказываются сопоставленными точки, лежащие спереди при направлении зрения $O_1.X_1$ по определению, а точкам, лежащим позади при направлении зрения O.X – точки, лежащие позади при направлении зрения O_1,X_1.

Следовательно, перенос сохраняет ориентацию по определению.□

Теорема 13.18. *Перенос есть перемещение.*

□Так как перенос сохраняет расстояние (Т.9.11) и ориентацию (Т.13.17), то он является перемещением по определению. □

Теорема 13.19. *Поворот вокруг прямой сохраняет ориентацию.*

□Пусть лучи OX,OУ,OZ попарно образуют прямые углы, точка У лежит слева (справа) при направлении зрения Z.X и поворот *f* вокруг прямой *a* сопоставляет точкам O,X,У,Z точки $O_1,X_1,У_1,Z_1$ соответственно. Докажем, что точка $У_1$, также лежит слева (справа) при направлении зрения Z_1X_1.

Рассмотрим все возможные варианты расположения прямой *a*: *a* тождественна одной из прямых OX,OУ,OZ; *a* параллельна одной из этих прямых; *a* не тождественна и не параллельна ни одной из прямых OX,OУ,OZ (O∈*a*, O*a*).

1) *a*≡OZ. Так как точки X,У принадлежат одной плоскости OXУ, перпендикулярной прямой OZ (признак перпендикулярности прямой и плоскости), то точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр. зр. Z.X_1 (определение поворота вокруг прямой и вокруг точки, Т.13.8).

2) *a*≡OX. При напр. зр. X.Z точка У лежит справа (слева) (акс.$IV_{1.3}$). По доказанному в (1) точка $У_1$ лежит справа (слева) при напр. зр. $X_1.Z_1$ и слева (справа) при напр. зр. $Z_1.X_1$ (акс.$IV_{1.3}$).

3) *a*≡ OУ. При напр. зр. Z.У точка X лежит справа (слева) (акс.$IV_{1.2}$). При напр. зр. У.Z точка X лежит слева (справа) (акс.$IV_{1.3}$). По доказанному в (1) точка X_1 лежит слева (справа) при напр. зр. $У_1.Z_1$ и справа (слева) при напр. зр. $Z_1.У_1$(акс.$IV_{1.3}$). Точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр.зр. $Z_1.X_1$ (акс.$IV_{1.2}$).

4) $a \parallel OZ$. Плоскость, содержащая параллельные прямые a и OZ пересекает плоскость OXУ по прямой $в$ (акс.III_1). Прямые $ав$ пересекаются в точке B (теорема о перпендикуляре к параллельной прямой). Перенос на OB сопоставляет точкам O,X,У,Z точки B,X',У',Z' соответственно так, что лучи BX',BУ',BZ' образуют попарно прямые углы (Т.9.15., 9.16). Точка У' лежит слева (справа) при направлении зрения Z_1 X_1 (Т.13.17). Поворот вокруг прямой a (BZ') сопоставит точкам O,X,У,Z,B,X',У',Z' точки O_1,X_1,$У_1$,Z_1,B,X1',У1',Z' соответственно (акс.V_2). Точка У1' *лежит слева (справа) при направлении зрения Z1'.X1'* (1*) по доказанному в (1). Так как поворот сопоставляет плоскости плоскость,полуплоскости полуплоскость, отрезку равный ему отрезок, углу равный ему угол (Т.13.12, 13.14), то образы равнозначных отрезков оказываются также равнозначными по определению. Значит, точки X1',У1',Z'могут быть сопоставлены переносом f на O1B точкам X_1,$У_1$,Z_1. Перенос f-1 на BO1 сопоставит точкам X1',У1',Z' точки X_1,$У_1$,Z_1. Так как перенос сохраняет ориентацию, то из (1*) следует, что точка $У_1$ лежит слева (справа) при напр. зр. Z_1. X_1. Аналогично точка $У_1$ лежит слева (справа) при направлении зрения Z_1. X_1, если $a \parallel OX$ или $a \parallel OУ$.

5) Пусть прямая a не тождественна и не параллельна ни одной из прямых OX, OУ,OZ и $O \in a$. Через точку O проведем прямую p, перпендикулярную плоскости, содержащей прямую a и точку Z. Отметим произвольные точки $P \in p$ и $A \in a$ и пусть точка A лежит слева при направлении зрения P.Z. Поворот вокруг прямой p на угол ZOA в положительном направлении сопоставит точке Z точку $Z_{p} \in$[OA, точкам O,X,У точки O,X_p,$У_p$ соотвественно. Лучи OX_p, O$У_p$, OZ_p попарно образуют прямые углы (Т.13.14). Точка $У_p$ лежит слева (справа) при направлении зрения Z_p.X_p по доказанному в (1). □ XOX_p=□ ZOA, □ УO$У_p$=□ ZOA, □ ZOZ_p=□ ZOA; точка X_p ($У_p$,Z_p) лежит слева при напр. зр. P.X (P.У, P.Z) (1*) по определению поворота.

Поворот вокруг прямой a сопоставит точкам O, X_p, $У_p$, Z_p, P точки O,X_{p1}, $У_{p1}$, Z_p,P_1 соответственно так, что *точка* $У_{p1}$ *лежит слева при направлении зрения* Z_{p1}. X_{p1} (2*) по доказанному в (1) и точкам X,У,Z точки X_1,$У_1$,Z_1.

□ XOX_1=α, □ УO$У_1$=α, □ ZOZ_1=α, □ X_pOX_{p1}=α, □ $У_p$O$У_{p1}$=α, □ Z_pOZ_{p1}=α по определению поворота. Так как этот поворот сохраняет ориентацию по доказанному в (1), то из (1*) следует, что точка X_{p1} ($У_{p1}$, Z_{p1}) лежит слева при направлении зрения P_1.X_1 (P_1.$У_1$, P_1.Z_1).

По определению поворота, Т.13.14 и свойствам равенства □ X_1OX_{p1}=□ ZOA, □ $У_1$O$У_{p1}$=□ ZOA, □ Z_1OZ_{p1}=□ ZOA. Следовательно, поворот вокруг прямой OP_1 в отрицательном направлении на □ ZOA сопоставит точкамX_{p1}, $У_{p1}$, Z_{p1} точкиX_1,$У_1$,Z_1 соответственно. Тогда из (2*) по доказанному в (1) следует «точка $У_1$ лежит слева при напр. зр. Z_1.X_1».

6) Прямая a не тождественна и не параллельна ни одной из прямых OX, OУ, OZ, Oa.

Через точку O проведём прямую $a' \parallel a$. Плоскость β, проходящая через прямые a',a, пересекает плоскость OXУ (акс.III_1) по прямой $в$. Прямая $в$ пересекает прямую a в точке $A_в$ (теорема о пересечении параллельных прямых). Точка $A_в$ — точка пересечения прямой a и плоскости OXУ по определению.

Отметим точки X',У',Z' так, что УУ'□O$A_в$, XX'□O$A_в$, ZZ'□O$A_в$. Точки X',У',Z',$A_в$ сопоставлены точкам X,У,Z,O переносом на OAb по определению переноса. Поэтому точка У′ лежит слева при напр. зр. Z'.X' (Т.13.17). Лучи $A_в$X′, $A_в$У′, $A_в$Z′ попарно образуют прямые углы (Т.9.16). Поворот вокруг прямой a сопоставит точкам X',У',Z',$A_в$,X,У,Z,O точки X1',У1',Z1',$A_в$, X_1,$У_1$,Z_1,O_1 соответственно (акс.IV_1. IV_2). Точка *У11 лежит слева при направлении зрения Z1.X1'* по доказанному в (5) (1*).

Так как поворот вокруг прямой сопоставляет плоскости плоскость, полуплоскости полуплоскость, углу равный ему угол, отрезку равный ему отрезок, то образы точек сопоставленных переносом на $OA_в$, оказываются сопоставленными переносом на O1Ab. Тогда точки X_1,$У_1$,Z_1,O_1 могут быть сопоставлены переносом на AbO_1 точкам X1',У1',Z1',$A_в$. Из (1*) следует, что точка $У_1$ лежит слева при напр. зр. $Z_1.X_1$ (Т.13.17).

Так как поворот, сопоставляющий точкам O,X точки O_1,X_1 сопоставляет лучу OX луч O_1X_1, то точкам лежащим спереди при направлении зрения O.X оказываются сопоставленными точки лежащие спереди при направлении зорения $O_1.X_1$ по определению, а точкам, лежащим позади при направлении зрения O.X – точки, лежащие позади при направлении зрения $O_1.X_1$.

Таким образом, поворот сохраняет ориентацию по определению. □

Теорема 13.20. *Поворот есть перемещение.*

□Так как поворот сохраняет расстояние (Т.13.10) и ориентацию (Т.13.19), то он является перемещением по определению. □

14. Заключение

Все введенные мной «новые» понятия (отношения «лежит слева», «лежит между», определения преоброзования и фигуры) имеются в геометриях, начиная с Гильберта. Но все они были определены либо только пояснительно (понятия «слева», «преобразование»), либо аксиоматически, но не полно («лежит между» у Гильберта) или изолированно (система аксиом фигуры у Александрова). Я постаралась дать всем этим понятиям строгие аксиоматические определения. В результате Евклидова геометрия была построена только на собственных основных понятиях, т.е. стала не зависимой от теории действительного числа и теории множеств.

Приведенные в п. 2 основные объекты и отношения, кроме отношения равенства, а также связанные с ними аксиомы и предшествующие определения, кроме утверждений для перемещения и отношения равенства, справедливы не только для Евклидовой геометрии, но и для геометрий других групп преобразований. Поэтому эти основания могут стать и основаниями (с добавлением определений преобразований, отличных от перемещения и собственных групп аксиом) *общей геометрии трехмерного пространства*, включающий геометрии всех групп преобразований, в т.ч. Евклидову геометрию – геометрию перемещения.

В наиболее полных из известных работ по основаниям геометрии работах [4], [5] исходные понятия и утверждения Евклидовой геометрии содержатся в четырех системах: основаниях планиметрии, аксиомах стереометрии, аксиоматическом определении понятий фигуры и величины. Предлагаемая же работа может стать предпосылкой создания *общей геометрии с единой системой исходных понятий и утверждений*, в которой общие утверждения для всех групп преобразований образуют ствол, а собственные утверждения отдельных групп преобразований – ветви одного дерева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. История математики. Том первый с древнейших времен до начала нового времени. М.: «Наука», 1970-С. 109

2. Погорелов А.В. Основания геометрии. М.: «Наука», 1979.

3. Леннон-Ферран Ж. Основания геометрии М.: «Наука», 1989.

4. Александров А.Д. Основания геометрии М.: «Наука», 1987 – С 26-113.

5. Александров А.Д., Нецветаев Ю.А. Геометрия М.: «Наука», 1990.

6. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия М.: «Просвещение», 1985.

7. Погорелов А.В. Геометрия М.: «Просвещение», 1991. – С. 27, 137, 149.

8. Александров А.Д., Вернер А.П., Рыжик В.И. Геометрия М.: «Просвещение». 1991. – С. 292, 294.

9. Александров А.Д., Вернер А.П., Рыжик В.И. Стереометрия. Издательство «Alfa», 1998. – С. 34-480.

10. Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. М.: Инфра-М., 2000. – С. 166-172.

11. Анатасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В., Поздняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. М.: «Просвещение», 1992. – С. 66-67.

СОДЕРЖАНИЕ