НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРАКТИКУМ

Д. Г. ОРЛОВСКИЙ

Д. Г. ОРЛОВСКИЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРАКТИКУМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2006

ББК 22.161.1
О 66

Орловский Д. Г.

О 66 Неопределенный интеграл. Практикум: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2006. — 432 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0605-3

Учебное пособие посвящено методам вычисления неопределенных интегралов. Техника вычисления интегралов наряду с техникой дифференцирования является важной составной частью фундаментального образования математиков и физиков-теоретиков. Поэтому наличие пособий по данной тематике представляется актуальным. Особенностью данного пособия является то, что все рассматриваемые задачи приводятся с решениями, поэтому оно может быть использовано для самостоятельного изучения.

Настоящее пособие предназначено для студентов университетов, технических и педагогических вузов, вузов с углубленным изучением математики. Оно может быть также использовано преподавателями при проведении семинарских занятий по рассматриваемой в пособии теме.

ББК 22.161.1

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой учебное пособие по технике вычисления неопределенного интеграла для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений и университетов. За основу взят известный задачник Б. П. Демидовича, являющийся основным задачником по рассматриваемой теме. Особенностью данного пособия является решение всех примеров задачника, составляющих его третью главу. В связи с этим автор решил сохранить нумерацию задач, принятую в задачнике Б. П. Демидовича, поэтому первая задача в пособии имеет номер 1628. Помимо примеров из указанного выше задачника, в тексте присутствуют задачи, облегчающие понимание дальнейшего материала. Они имеют свою нумерацию (задача 1, задача 2 и т. д.), и их решения (или ответы к ним) приведены в конце книги. В пособии нет теоретического материала (теорем и доказательств), упор делается на практическую сторону вопроса. Умение вычислять интегралы важно не только для будущих математиков, но и для будущих физиков-теоретиков.

Пособие будет полезно не только студентам и преподавателям, но и всем тем, кто просто интересуется высшей математикой. Что касается теоретического материала, то он достаточно подробно изложен во многих учебниках по математическому анализу. Ссылки на эти учебники, а также на пособия, аналогичные данному, приведены в конце книги в списке литературы. Однако нужно отметить, что настоящее пособие достаточно автономно, и для тех, кто ставит своей целью только научиться интегрировать, дополнительная литература не требуется. Все необходимые сведения в пособии имеются.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1.1. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Неопределенным интегралом называется совокупность всех первообразных. Первообразной данной функции f на некотором промежутке I называется такая функция F, производная которой F' на всем промежутке I равна данной функции f. Можно показать, что разные первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину. Таким образом, если мы знаем одну из первообразных F заданной функции f, то неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Эту формулу можно также записать в другом виде:

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

из которого следует, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Можно предположить (и это подтверждается на практике), что хорошо интегрировать будет тот, кто умеет хорошо дифференцировать.

Так же как техника дифференцирования опирается на знание таблицы производных, так и вычисление интегралов невозможно без знания таблицы основных интегралов. Эта таблица фактически является переписанной наоборот (с небольшими изменениями) таблицей производных.

1. $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$
5. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$
10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$
13. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C.$
14. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C.$
15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

Относительно приводимой таблицы можно сделать следующие замечания. Полезно запомнить распространенный частный случай формулы 3 при $a = e$:

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$$

В восьмой формуле можно пользоваться любым из выражений, стоящих справа (прозводные функций $y = \arcsin x$

и $y = -\arccos x$ равны). То же самое замечание относится и к девятой формуле (производные функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = -\operatorname{arcctg} x$ также равны между собой). Последние четыре формулы относятся к так называемым гиперболическим функциям ($\operatorname{sh} x$ — гиперболический синус, $\operatorname{ch} x$ — гиперболический косинус, $\operatorname{th} x$ — гиперболический тангенс, $\operatorname{cth} x$ — гиперболический котангенс). Этим функциям в учебной литературе обычно уделяется незначительное внимание, хотя в приложениях они используются довольно часто. Следующий раздел будет посвящен гиперболическим функциям, что компенсирует имеющийся пробел в учебниках. Наконец приведем известную задачу Л. Д. Ландау, которую он давал на экзамене по теоретическому минимуму для отбора физиков-теоретиков в свои группы. Она относится к самому первоначальному понятию и обозначению неопределенного интеграла.

Задача 1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{dx}$.

§ 1.2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Приведем определение гиперболических функций.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Свойства гиперболических функций во многом напоминают свойства соответствующих тригонометрических функций. Приведем некоторые формулы и тождества, которым они удовлетворяют.

Основные тождества:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Формулы суммы и разности:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y, \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y, \quad \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}y}{1+\operatorname{th}x\operatorname{th}y}, \qquad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th}x - \operatorname{th}y}{1-\operatorname{th}x\operatorname{th}y},$$

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{\operatorname{cth}x\operatorname{cth}y + 1}{\operatorname{cth}x + \operatorname{cth}y}, \quad \operatorname{cth}(x-y) = \frac{1-\operatorname{cth}x\operatorname{cth}y}{\operatorname{cth}x - \operatorname{cth}y}.$$

Свойство четности:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}x,$$
$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th}x, \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth}x.$$

Формулы умножения:

$$2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y),$$
$$2\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y),$$
$$2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y).$$

Формулы сложения:

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{th}x+\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}, \qquad \operatorname{th}x-\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x-y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y},$$

$$\operatorname{cth}x+\operatorname{cth}y=\frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}, \qquad \operatorname{cth}x-\operatorname{cth}y=\frac{\operatorname{sh}(y-x)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}.$$

Формулы двойных углов:

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x, \quad \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=2\operatorname{ch}^2x-1=1+2\operatorname{sh}^2x,$$

$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}, \quad \operatorname{cth}2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2x}{2\operatorname{cth}x}.$$

Формулы тройных углов:

$$\operatorname{sh}3x = 3\operatorname{sh}x + 4\operatorname{sh}^3x, \quad \operatorname{ch}3x = 4\operatorname{ch}^3x - 3\operatorname{ch}x,$$

$$\operatorname{th}3x = \frac{3\operatorname{th}x + \operatorname{th}^3x}{1+3\operatorname{th}^2x}, \quad \operatorname{cth}3x = \frac{3\operatorname{cth}x + \operatorname{cth}^3x}{1+3\operatorname{cth}^2x}.$$

«Замечательные» формулы:

$$\operatorname{ch}2x + 1 = 2\operatorname{ch}^2x, \quad \operatorname{ch}2x - 1 = 2\operatorname{sh}^2x.$$

«Универсальная» подстановка:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}.$$

Формула Муавра:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx.$$

Нетрудно показать, что гиперболический синус является строго возрастающей на всей числовой прямой функцией. Отсюда следует, что эта функция имеет обратную. Эта обратная функция называется гиперболическим ареасинусом (обозначается $\operatorname{Arsh} x$). Нужно сказать, что имя этой обратной функции сегодня практически исчезло из употребления. Это связано с тем, что гиперболический ареасинус довольно просто выражается через элементарные функции:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

и теперь эта функция называется просто «длинный логарифм».

Гиперболический косинус не является монотонной функцией на всей числовой прямой и не имеет обратной. Гиперболический тангенс монотонно возрастает и имет своей областью значений интервал $(-1\,;1)$. Обратная функция называется гиперболическим ареатангенсом (обозначается $\operatorname{Arth} x$). Это название также вышло из употребления по той же самой причине. Гиперболический ареатангенс выражается через элементарные функции следующим образом:

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Гиперболический котангенс не является монотонной функцией на всей числовой прямой, но обратную имеет. Обратная функция (гиперболический ареакотангенс) определена при $|x| > 1$ и выражается формулой

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

По этой причине имя этой обратной функции также вышло из употребления. Две последние формулы можно объединить в одну:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \begin{cases} \operatorname{Arth} x, & |x| < 1; \\ \operatorname{Arcth} x, & |x| > 1. \end{cases}$$

При этом функция, стоящая в левой части, получила название «высокий логарифм».

Рассмотрим на плоскости xOy окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Она задается уравнением $x^2+y^2=1$. Пусть точка M с декартовыми координатами x и y лежит на этой окружности, а точка E имеет координаты $(1,0)$ (рис. 1).

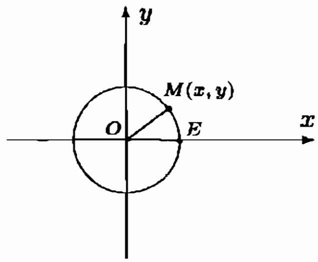

Рис. 1

Известно, что если величина t равна удвоенной площади сектора MOE (или радианной мере дуги EM), то координаты x и y точки M равны соответственно $\cos t$ и $\sin t$. Аналогичную интерпретацию можно дать и гиперболическим функциям. Рассмотрим гиперболу $x^2-y^2=1$ и точку M с декартовыми координатами x и y на правой ветви этой гиперболы. Пусть точка E имеет координаты $(1,0)$ (рис. 2).

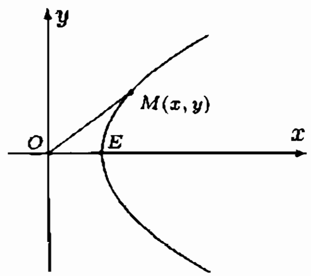

Рис. 2

Можно показать, что если величина t равна удвоенной площади сектора MOE, то координаты x и y точки M равны соответственно $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$.

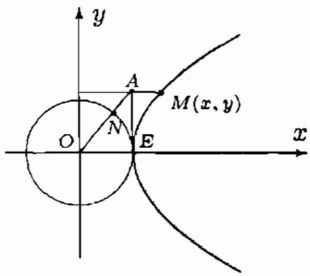

Рис. 3

Представляет интерес и совместная геометрическая интерпретация тригонометрических и гиперболических функций. Рассмотрим одновременно окружность $x^2+y^2=1$ и правую ветвь гиперболы $x^2-y^2=1$. Проведем через точку M прямую, параллельную оси абсцисс, а через точку E — прямую, параллельную оси ординат. Точку пересечения этих прямых обозначим A. Проведем также прямую, проходящую через точки O и A, пересечение этой прямой с окружностью даст точку N (рис. 3).

Ранее было отмечено, что координаты точки M равны $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$, где параметр t равен удвоенной площади сектора OEM. Величина γ дуги EN, выраженная в радианах, называется гиперболической амплитудой числа t (или гудерманианом):

$$\gamma = \operatorname{amph}(t).$$

Гиперболическая амплитуда измеряется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Между тригонометрическими функциями угла γ и гиперболическими функциями параметра t существуют следующие соотношения:

$$\operatorname{sh} t = \operatorname{tg}\gamma, \quad \operatorname{ch} t = \frac{1}{\cos\gamma}, \quad \operatorname{th} t = \sin\gamma, \quad \operatorname{th}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Термин «гиперболическая амплитуда» в настоящее время также не используется в связи с тем, что эта функция довольно просто выражается через элементарные функции:

$$\operatorname{amph}(t) = 2\operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{2}.$$

Задача 2. Доказать тождество

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Задача 3. Доказать тождество

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x.$$

Задача 4. Доказать тождества:

$$\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1, \quad \operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x.$$

Задача 5. Доказать тождество

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Задача 6. Доказать тождества:

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Задача 7. Вывести формулы умножения:

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y),$$
$$2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y).$$

Задача 8. Доказать тождество

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Задача 9. Доказать тождество

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

§ 1.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

В процессе решения задач часто возникают такие интегралы, которые уже были вычислены ранее. В этом случае естественно не вычислять их заново, а воспользоваться уже существующим ответом. В этой связи мы приведем новый список интегралов, которые используются довольно часто. Этот список приводится во многих пособиях и обычно называется дополнительной таблицей интегралов. Тем, кто хочет продвинуться в технике вычисления, этот список необходимо запомнить так же, как и основную таблицу интегралов. Не все приводимые здесь интегралы будут вычислены в рассматриваемых далее задачах, однако все формулы легко проверяются с помощью дифференцирования.

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|a^2+x^2\right| + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|a^2-x^2\right| + C.$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C \quad (a > 0).$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (a > 0).$
8. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C \quad (a > 0).$
9. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C \quad (a > 0).$
10. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0).$
11. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C \quad (a>0).$
12. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (a>0).$

Задача 10. Доказать первую формулу дополнительной таблицы.

§ 1.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ЧЕТНОСТИ

В некоторых случаях решение задачи можно упростить, используя четность или нечетность подынтегральной функции. Известно, что при дифференцировании четной функции получается нечетная функция, а после дифференцирования нечетной функции в результате получается четная функция. Это свойство можно использовать для упрощения вычислений интегралов от четных или нечетных функций. Для этого нужно вычислить интеграл при положительных значениях аргумента

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

и затем продолжить функцию $F(x)$ четным (если f нечетна) или нечетным (если f четна) образом.

Если функция f непрерывна на всей числовой прямой, то у нее существует первообразная, также непрерывная на всей числовой прямой. В этом случае вычисление интеграла от четной функции требует чуть большей аккуратности, чем вычисление интеграла от нечетной функции. Для того чтобы нечетное продолжение функции F было непрерывно всюду, необходимо выбирать первообразную F так, чтобы выполнялось равенство $F(0) = 0$.

Задача 11. Вычислить интеграл

$$\int |x|\,\mathrm{d}x.$$

Глава 2

ПРОСТЕЙШИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 2.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

Непосредственное использование таблицы основано на свойстве линейности неопределенного интеграла:

$$\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = \\ = c_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из этого свойства следует, что если нам удалось представить подынтегральную функцию в виде линейной комбинации функций, интегралы от которых известны, то интеграл от этой функции равен линейной комбинации соответствующих табличных интегралов. Рассмотрим применение этого метода на примерах.

1628. $\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x.$

$$\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\,\mathrm{d}x = \\ = 27\int \mathrm{d}x - 27\int x^2\mathrm{d}x + 9\int x^4\mathrm{d}x - \int x^6\mathrm{d}x = \\ = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$$

1629. $\int x^2(5 - x)^4\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^2(5-x)^4\,\mathrm{d}x = \int x^2(625 - 500x + 150x^2 - 20x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C.$$

1630. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx.$

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx = \int (1-3x+2x^2)(1-3x)\,dx =$$
$$= \int (1-6x+11x^2-6x^3)\,dx = x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C.$$

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C = x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + C.$$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right) dx =$$
$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

1635. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx =$$
$$= \int \left(x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right) dx =$$
$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C.$$

1636. $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1-x^{-2}\right)x^{\frac{3}{4}}\,dx =$$
$$= \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right) dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C = \frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$$

1637. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,dx.$

$$\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,dx = \int \left(2-2\sqrt{2}\sqrt[3]{3}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right) dx =$$
$$= 2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$$

1638. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx.$

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}\,dx =$$
$$= \int \frac{x^2+x^{-2}}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4}+C.$$

1639. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

1640. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{1-x^2}\,dx =$$
$$= \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

1641. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx.$

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{(x^2-1)+4}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 - 4\frac{1}{1-x^2}\right) dx =$$
$$= x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

1642. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx =$$
$$= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

1643. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx =$$
$$= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

1644. $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2\,dx.$

$$\int (2^x+3^x)^2\,dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)\,dx =$$
$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

1645. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C.$$

1646. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^x)^3+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left((e^x)^2 - e^x + 1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(e^{2x} - e^x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$$

Замечание. Нетрудно догадаться, что e^{2x} является производной от функции $e^{2x}/2$, следовательно,

$$\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

1647. $\displaystyle\int (1+\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int (1+\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x = x - \cos x + \sin x + C.$$

1648. $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x.$$

На участке $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ выполнено неравенство $\cos x \geqslant \sin x$, следовательно, $|\sin x - \cos x| = \cos x - \sin x$ и первообразная подынтегральной функции $F(x) = \sin x + \cos x + C_1$.

На участке $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi$ имеем $\cos x \leqslant \sin x$ и поэтому $|\sin x - \cos x| = \sin x - \cos x$, следовательно, первообразная подынтегральной функции $F(x) = -\cos x - \sin x + C_2$. Из условия непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = \pi/4$ находим соотношение между постоянными C_1 и C_2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + C_2,$$

т. е. $C_2 = C_1 + 2\sqrt{2}$. Опуская индекс у константы C_1, получаем следующий ответ:

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \begin{cases} \sin x + \cos x + C, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 2\sqrt{2} - \sin x - \cos x + C, & \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

1651. $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)\, dx.$

$$\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)\, dx = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + C.$$

1652. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx.$

$$\int \operatorname{th}^2 x\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx.$

$$\int \operatorname{th}^2 x\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{cth} x + C.$$

§ 2.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Формула линейной замены переменной составляет содержание следующей задачи.

1654. Доказать, что если

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

По условию $F'(x) = f(x)$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b),$$

что доказывает утверждение задачи.

Решение задач 1655–1673 основано на применении формулы из задачи 1654.

1655. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$, то согласно формуле задачи 1654:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

1656. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$.

Так как $\displaystyle\int x^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}x^{11} + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C.$$

1657. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

Так как $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}(1-3x)^{4/3} + C.$$

1658. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C.$$

1659. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{5/2}} = \int x^{-5/2}\,dx = -\tfrac{2}{3}x^{-3/2} + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}} = \frac{2}{15(5x-2)^{3/2}} + C.$$

1660. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{(1-x)}\,dx$.

Так как $\displaystyle\int x^{-3/5}\,dx = \tfrac{5}{2}x^{2/5} + C$, то, используя задачу 1654, имеем:

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{(1-x)} = \int \frac{\sqrt[5]{(1-x)^2}}{1-x}\,dx =$$

$$= \int (1-x)^{-3/5}\,dx = -\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2} + C.$$

1661. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\frac{3}{2}x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

1662. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{2-3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right| + C.$$

1663. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

1664. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x + \sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right| + C_1.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\sqrt{2},$$

и полагая $C = C_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\sqrt{2}$, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right| + C.$$

1665. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx.$

Так как $\int e^x\,dx = e^x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx = -\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+C.$$

1666. $\int(\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx.$

Так как $\int\sin x\,dx = -\cos x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x - x(\sin 5\alpha) + C.$$

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

Так как $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}.$

Так как $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int\frac{dx}{1+\cos x} = \int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

1669. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C.$$

1670. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Согласно решению задачи 1668, интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$, поэтому с учетом формулы задачи 1654 имеем

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C.$$

1671. $\displaystyle\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)]\,dx$.

Так как

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C,$$

то согласно задаче 1654:

$$\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)]\,dx = \frac{1}{2}\,[\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C.$$

1672. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2\operatorname{th}\frac{x}{2} + C.$$

1673. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$.

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, то согласно задаче 1654:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2\operatorname{cth}\frac{x}{2} + C.$$

§ 2.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Решение следующей группы задач (1674–1720) основано на применении формулы замены переменной, которую можно записывать в одном из двух видов:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Bigg|_{u=u(x)}$$

или

$$\int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du \Bigg|_{u=u(x)}.$$

Эту формулу следует понимать так: сначала нужно вычислить интеграл, стоящий в правой части равенства, считая u независимой переменной, а затем заменить переменную u на функцию $u(x)$.

1674. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}\Bigg|_{u=1-x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

1675. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}\,d(1+x^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/3}\,du\Bigg|_{u=1+x^3} =$$

$$= \frac{1}{4}u^{4/3} + C = \frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

1676. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u}\Bigg|_{u = 3 - 2x^2} = -\frac{1}{4}\ln|3 - 2x^2| + C.$$

1677. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}\Bigg|_{u = 1 + x^2} = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

1678. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4+x^4}.$

$$\int \frac{x\,dx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{4+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{4+u^2}\Bigg|_{u = x^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$$

1679. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2}.$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 - 2} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 - 2}\Bigg|_{u = x^4} =$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$$

1680. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\int \frac{du}{1+u^2}\Bigg|_{u = \sqrt{x}} =$$
$$\text{rctg}\sqrt{x} + C.$$

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

$$\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \sin\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\int \sin u\, du \Big|_{u=1/x} = \cos u + C = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Если $x > 0$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}\Big|_{u=1/x} = -\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

Последнее выражение представляет четную функцию переменной x. Следовательно, ее производная является нечетной функцией. Так как подынтегральная функция также нечетна, то полученный результат сохраняет силу и при отрицательных значениях переменной x.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Если $x > 0$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_{u=1/x} = -\arcsin u + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Так как подынтегральная функция нечетна, то для получения результата интегрирования при $x < 0$ достаточно взять четное продолжение последнего выражения. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

1684. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Если $x > 0$, то

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-3/2} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,du\,\Bigg|_{u=1+1/x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + C = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Полученный результат с точностью до постоянного слагаемого является нечетной функцией, следовательно, ее производная представляет собой четную функцию. Подынтегральная функция также является четной. Поэтому полученный результат сохраняет свою силу и при $x < 0$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

1685. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}}\,\Bigg|_{u=x^2-1} =$$

$$= -u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$$

1686. $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{2/3}}.$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{2/3}} = \frac{1}{24}\int \frac{\mathrm{d}(8x^3+27)}{(8x^3+27)^{2/3}} = \frac{1}{24}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{2/3}}\bigg|_{u=8x^3+27} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{u}+C = \frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C.$$

1687. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}.$

Область определения подынтегральной функции является объединением двух промежутков: $(-\infty;-1)$ и $(0;+\infty)$. Если $x>0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\bigg|_{u=\sqrt{x}} = 2\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C = 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C = 2\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

Если $x<-1$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x(-1-x)}} = -2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{-x})}{\sqrt{(\sqrt{-x})^2-1}} = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}\bigg|_{u=\sqrt{-x}} = -2\ln|u+\sqrt{u^2-1}|+C = -2\ln|\sqrt{-x}+\sqrt{-x-1}|+C = -2\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

Объединяя оба случая в один, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = 2(\operatorname{sgn}x)\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

1688. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Область определения подынтегральной функции является интервалом $(0;1)$. Следовательно, под интегралом величина $x > 0$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_{u=\sqrt{x}} = 2\arcsin u + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

1689. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$.

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\int e^u\,du\Bigg|_{u=-x^2} = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

1690. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x}$.

$$\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x} = \int \frac{d\,(2+e^x)}{2+e^x} = \int \frac{du}{u}\Bigg|_{u=2+e^x} = \ln|u| + C = \ln(2+e^x) + C.$$

1691. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d\,(e^x)}{(e^x)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1}\Bigg|_{u=e^x} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

1692. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} =$$
$$= -\int \frac{d\left(e^{-x}\right)}{\sqrt{\left(e^{-x}\right)^2+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}\Bigg|_{u=e^{-x}} =$$
$$= -\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| + C =$$
$$= -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right) + C.$$

1693. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x\,d(\ln x) =$$
$$= \int u^2\,du\Bigg|_{u=\ln x} = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

1694. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

$$\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} =$$
$$= \int \frac{du}{u}\Bigg|_{u=\ln(\ln x)} =$$
$$= \ln|u| + C = \ln\left|\ln(\ln x)\right| + C.$$

1695. $\displaystyle\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx$.

$$\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx = \int \sin^5 x\,d(\sin x) =$$
$$= \int u^5\,du\Bigg|_{u=\sin x} = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

1696. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x = -\int (\cos x)^{-3/2}\,\mathrm{d}(\cos x) =$$

$$= -\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u \Bigg|_{u=\cos x} = \frac{2}{\sqrt{u}} + C = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

1697. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \Bigg|_{u=\cos x} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

1698. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \Bigg|_{u=\sin x} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.$$

1699. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt[3]{u}} \Bigg|_{u=\sin x - \cos x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C.$$

1700. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx.$

Если $|a| \neq |b|$, то

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{du}{\sqrt{u}}\Bigg|_{u = a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\sqrt{u}}{a^2-b^2} + C = \frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2} + C.$$

Если $|a| = |b|$, то

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx = \frac{1}{|a|}\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{|a|}\int \sin x\, d(\sin x)\frac{1}{|a|}\int u\,du\Bigg|_{u=\sin x} = \frac{1}{|a|}\frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2|a|} + C.$$

1700.1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{2}}}\Bigg|_{u=\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{2}}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2\cos^2 x - 1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2} + C_1.$$

Полагая $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2} + C_1$, получаем

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2\cos^2 x - 1} \right| + C =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x} \right| + C.$$

1700.2. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx.$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{1 - 2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2} \sin x\right)}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{2} \sin x\right)^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \Bigg|_{u = \sqrt{2} \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin u + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2} \sin x\right) + C.$$

1700.3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx.$

Согласно решению задачи 4, имеет место тождество

$$\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1,$$

поэтому

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{2}}} \Bigg|_{u = \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{2}} \right| + C_1 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} u + \sqrt{2u^2 - 1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2} + C_1.$$

Полагая $C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2} + C_1$ и учитывая, что $u = \operatorname{ch} x$, получаем

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{2\operatorname{ch}^2 - 1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}\right| + C.$$

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-1/4}\,d(\operatorname{ctg} x) =$$
$$= -\int u^{-1/4}\,du\Bigg|_{u=\operatorname{ctg} x} = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{u^3} + C = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C.$$

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} =$$
$$= \int \frac{du}{u^2+2}\Bigg|_{u=\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{du}{1-u^2}\Bigg|_{u=\cos x} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \int \frac{du}{1-u^2}\Bigg|_{u=\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

Используя свойства гиперболических функций, получаем

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}^2 x - 1} = -\int \frac{du}{1-u^2}\Bigg|_{u=\operatorname{ch} x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\right) + C = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Согласно решению задачи 1691:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg} e^x + C,$$

следовательно (заменяя $2C$ на C):

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

1707. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}\, dx.$

Преобразуя выражение под знаком корня и используя свойства гиперболических функций, получаем

$$\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2 + 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x =$$
$$= 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 2x}{2} = 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 2x - 1}{2} = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}. \quad (1)$$

Следовательно,

$$\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}\, dx = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\operatorname{ch} 2x)}{\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \Bigg|_{u = \operatorname{ch} 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) + C_1 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}\right) + C_1 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\sqrt{2} + C_1.$$

Снова используя равенство (1) и полагая $C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\sqrt{2} + C_1$, получим

$$\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}\right) + C.$$

1708. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}.$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{th} x)}{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int u^{-2/3}\, du \Bigg|_{u = \operatorname{th} x} =$$
$$= 3u^{1/3} + C = 3\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C.$$

1709. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) = \int u\,du\,\Bigg|_{u=\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C.$$

1710. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}.$

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2}\,\Bigg|_{u=\arcsin x} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$$

1711. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx.$

Рассмотрим функцию $\operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. (Она является обратной функции $y = \operatorname{sh} x$ (см. решение задачи 8). Эта функция является табличным интегралом от функции $1/\sqrt{1+x^2}$, поэтому

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Используя эту функцию, получаем

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{Arsh} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \int (\operatorname{Arsh} x)^{1/2}\,d(\operatorname{Arsh} x) = \int u^{1/2}\,du\,\Bigg|_{u=\operatorname{Arsh} x} =$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\operatorname{Arsh} x)^{3/2} + C = \frac{2}{3}\ln^{3/2}(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

1712. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+2}\bigg|_{u=x-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$$

1713. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx.$

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} =$$

$$= -\int \frac{du}{2-u^2}\bigg|_{u=x+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C.$$

1714. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}.$

$$\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{(x^5+1)^4} = \frac{1}{5}\int u^{-4}\,du\bigg|_{u=x^5+1} =$$

$$= -\frac{1}{15u^3}+C = -\frac{1}{15(x^5+1)^3}+C.$$

1715. $\displaystyle\int \frac{x^{n/2}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

$$\int \frac{x^{n/2}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} = \frac{2}{n+2}\int \frac{d\left(x^{(n+2)/2}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{(n+2)/2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2}{n+2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}\Bigg|_{u=x^{(n+2)/2}} = \frac{2}{n+2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C = \frac{2}{n+2}\ln\left(x^{(n+2)/2}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$$

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

Рассмотрим функцию $\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. (Она является обратной функции $y = \operatorname{th} x$ (см. решение задачи 9). Эта функция определена при $|x| < 1$ и для этих значений аргумента является табличным интегралом от функции $1/(1-x^2)$, поэтому

$$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Используя эту функцию, получаем

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 2\int\frac{1}{1-x^2}\operatorname{Arth} x\,dx = 2\int \operatorname{Arth} x\, d(\operatorname{Arth} x) = 2\int u\,du\Bigg|_{u=\operatorname{Arth} x} = u^2+C = (\operatorname{Arth} x)^2 + C = \frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$$

1717. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{\frac{3}{2}-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{3}{2}-u^2}}\Bigg|_{u=\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}u\right)+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$$

1718. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx.$

$$\int\frac{\sin\,x\,\cdot\,\cos\,x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^4 x+1)}=\int\frac{\mathrm{tg}\,x\,d(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}^4 x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\mathrm{tg}^2 x)}{(\mathrm{tg}^2 x)^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}\Bigg|_{u=\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,u+C=$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x)+C.$$

1719. $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx.$

$$\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{(2/3)^x}{1-(2/3)^{2x}}dx=\frac{1}{\ln(2/3)}\int\frac{d(2/3)^x}{1-((2/3)^x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\ln(2/3)}\int\frac{du}{1-u^2}\Bigg|_{u=(2/3)^x}=\frac{1}{2\ln(2/3)}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\ln(3/2)}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{1-(2/3)^x}{1+(2/3)^x}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

1720. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)+(1+x^2)^{3/2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u+u^{3/2}}}\Bigg|_{u=1+x^2}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1).

$$\int\frac{du}{\sqrt{u+u^{3/2}}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}=2\int\frac{d(1+\sqrt{u})}{\sqrt{1+\sqrt{u}}}=$$

$$=2\int\frac{dv}{\sqrt{v}}\Bigg|_{v=1+\sqrt{u}}=4\sqrt{v}+C=4\sqrt{1+\sqrt{u}}+C. \qquad (2)$$

Из первого и второго выражений получаем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{u}}+C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Задачи 1721–1777 решаются с использованием обоих методов: замены переменной и разложения в сумму табличных интегралов.

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int x^2(4-12x^2+9x^4)\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7 + C.$$

1721.1. $\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x = \int ((1-x)-1)(1-x)^{10}\,\mathrm{d}(1-x) = \\ = \int (u-1)u^{10}\,\mathrm{d}u\,\Big|_{u=1-x} = \int (u^{11}-u^{10})\,\mathrm{d}u = \\ = \frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(1-x)^{12}}{12} - \frac{(1-x)^{11}}{11} + C.$$

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-1)+2}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-1-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \\ = -x-2\ln|x-1|+C = -x-2\ln|1-x|+C.$$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-1)+1}{1+x}\mathrm{d}x = \int \left((x-1)+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \\ = \int (x-1)\,\mathrm{d}(x-1) + \int \frac{\mathrm{d}(1+x)}{1+x} = \frac{(x-1)^2}{2} + \ln|1+x| + C.$$

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx.$

$$\int \frac{x^3}{3+x}\,dx = \int \frac{x^2(3+x) - 3x(3+x) + 9(3+x) - 27}{3+x}\,dx =$$
$$= \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C.$$

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$

$$\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= x + \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x + \ln(1+x^2) + C.$$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx.$

$$\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx = \int \frac{4-4x+x^2}{2-x^2}\,dx = \int \frac{6-4x+(x^2-2)}{2-x^2}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{6}{2-x^2} - \frac{4x}{2-x^2} - 1\right) dx =$$
$$= 6\int \frac{dx}{2-x^2} + 2\int \frac{d(2-x^2)}{2-x^2} - \int dx =$$
$$= \frac{6}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + 2\ln|2-x^2| - x + C =$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + 2\ln|2-x^2| - x + C.$$

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx = \int \frac{((1-x)-1)^2}{(1-x)^{100}}\,dx =$$

$$= \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}\, dx =$$

$$= -\int (1-x)^{-98}\, d(1-x) +$$

$$+ 2\int (1-x)^{-99}\, d(1-x) - \int (1-x)^{-100}\, d(1-x) =$$

$$= \frac{1}{97}(1-x)^{-97} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{99}(1-x)^{-99} + C =$$

$$= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C.$$

1728. $\displaystyle\int \frac{x^5}{x+1}\, dx.$

$$\int \frac{x^5}{x+1} dx =$$

$$= \int \frac{x^4(x+1) - x^3(x+1) + x^2(x+1) - x(x+1) + (x+1) - 1}{x+1} dx =$$

$$= \int \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C.$$

1729. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\, d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\, d(x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\right] + C.$$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int\left(-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right)\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}(2-5x) =$$

$$= -\frac{1}{5}\int\left(-\frac{1}{5}u+\frac{2}{5}\right)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{u=2-5x} =$$

$$= \frac{1}{25}\int u^{3/2}\,\mathrm{d}u - \frac{2}{25}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{2}{125}u^{5/2} - \frac{4}{75}u^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{125}(2-5x)^{5/2} - \frac{4}{75}(2-5x)^{3/2} + C =$$

$$= -\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2} + C.$$

1731. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{3}(1-3x)+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{1-3x}}\,\mathrm{d}(1-3x) =$$

$$= \frac{1}{9}\int\left(u^{2/3}-u^{-1/3}\right)\mathrm{d}u\Bigg|_{u=1-3x} =$$

$$= \frac{1}{15}u^{5/3} - \frac{1}{6}u^{2/3} + C = \frac{1}{15}(1-3x)^{5/3} - \frac{1}{6}(1-3x)^{2/3} + C =$$

$$= -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{2/3} + C.$$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int((1+x^2)-1)\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int(u-1)\sqrt[3]{u}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{u=1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{4/3}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{14}u^{7/3} - \frac{3}{8}u^{4/3} + C =$$
$$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3} + C.$$

1733. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{4}\int \frac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

1734. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

1735. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

1736. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^2+3)-(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+3)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2-2} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+3} =$$
$$= -\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| - \frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right| - \frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1737. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

$$\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)} = \int \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+2)(x+3)}\,dx =$$
$$= 3\int \frac{dx}{x+3}\,dx - 2\int \frac{dx}{x+2}\,dx =$$
$$= 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C = \ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C.$$

1738. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3x^2+2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3u+2}\Bigg|_{u=x^2} \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1).

$$\int \frac{du}{u^2+3u+2} = \int \frac{(u+2)-(u+1)}{(u+1)(u+2)}\,du = \int \frac{du}{u+1} - \int \frac{du}{u+2} =$$
$$= \ln|u+1| - \ln|u+2| + C = \ln\left|\frac{u+1}{u+2}\right| + C. \qquad (2)$$

С помощью первого и второго выражений получаем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}\right| + C.$$

1739. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$

Для вычисления интеграла воспользуемся следующим тождеством:

$$1 = \frac{[(x+a)-(x+b)]^2}{(a-b)^2} =$$
$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[(x+a)^2+(x+b)^2-2(x+a)(x+b)\right] \quad (1)$$

С помощью первого тождества интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2} =$$
$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}\right]. \quad (2)$$

Вычислим интегралы, входящие во второе равенство:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C_1,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b} + C_2,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x+b} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right] = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C_3.$$

Подставляя эти выражения во вторую формулу и полагая

$$C = (C_1+C_2-2C_3)/(a-b)^2,$$

получаем после простейших преобразований

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = -\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \\ + \frac{2}{(a-b)^3} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C.$$

1740. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2).$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{(x^2+a^2)-(x^2+b^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \\ = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\int \frac{dx}{x^2+b^2} - \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right) = \\ = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$$

Замечание. Приводимый в задачнике Демидовича ответ предполагает, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Поэтому мы также ограничиваемся этим случаем.

1741. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx.$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1742. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx.$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1743. $\displaystyle\int \sin x \cdot \sin(x+\alpha)\,dx.$

$$\int \sin x \cdot \sin(x+\alpha)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos(2x+\alpha)\right) dx = \\ = \frac{x}{2}\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin(2x+\alpha) + C.$$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx.$

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

1745. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \, dx.$

$$\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos \frac{x}{6} + \frac{1}{2}\cos \frac{5x}{6}\right) dx =$$
$$= 3\sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin \frac{5x}{6} + C.$$

1746. $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$

$$\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{10}\cos\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + C.$$

1747. $\int \sin^3 x \, dx.$

$$\int \sin^3 x \, dx = -\int \sin^2 x \, d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x) \, d(\cos x) =$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

1748. $\int \cos^3 x \, dx.$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \, d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) =$$
$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

1749. $\int \sin^4 x\,dx$.

Так как

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,$$

то

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1750. $\int \cos^4 x\,dx$.

Так как

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,$$

то

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,dx =$$
$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,d(\cos x) = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos^3 x}\right) d(\cos x) =$$
$$= \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, и полагая $C = C_1 + 1/2$, получаем

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

1753. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x\,dx$. Согласно формулам тригонометрии:

$$\sin^2 3x \cdot \sin^3 2x = \frac{1-\cos 6x}{2}\left(\frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x\right) =$$
$$= \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{8}\cos 6x \cdot \sin 2x + \frac{1}{8}\cos 6x\,\sin 6x =$$
$$= \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}(\sin 8x - \sin 4x) + \frac{1}{16}\sin 12x =$$
$$= \frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 8x + \frac{1}{16}\sin 12x. \quad (1)$$

Используя равенство (1), получаем

$$\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 8x + \frac{1}{16}\sin 12x\right) dx =$$
$$= -\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x + C.$$

1754. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

1755. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = \int \frac{du}{u^2(1 - u^2)}\Bigg|_{u = \sin x}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл в правой части первого равенства.

$$\int \frac{du}{u^2(1 - u^2)} = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1 - u^2}\right) du =$$
$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + C. \qquad (2)$$

Из первого и второго выражений получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}\right| + C =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}\right| + C =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

1756. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^3 x} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\cdot \cos^3 x} = \int \frac{du}{(u^2-1)u^3}\Bigg|_{u=\cos x}. \quad (1)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (1):

$$\int \frac{du}{(u^2-1)u^3} = -\int \frac{(u^4-1)-u^4}{(u^2-1)u^3}\, du =$$

$$= -\int \left(\frac{u^2+1}{u^3} - \frac{u}{u^2-1}\right) du =$$

$$= \int \left(\frac{u}{u^2-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right) du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2-1)}{u^2-1} - \ln|u| + \frac{1}{2u^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u^2-1| - \ln|u| + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u^2}{u^2}\right| + \frac{1}{2u^2} + C. \quad (2)$$

Из первого и второго выражений получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

1757. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\, dx$.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\, d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{(1-u^2)\, du}{u}\Bigg|_{u=\sin x} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - u\right) du = \ln|u| - \frac{1}{2}u^2 + C = \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

1758. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \int (1+u^2)\,\mathrm{d}u \Bigg|_{u=\operatorname{tg} x} =$$
$$= u + \frac{1}{3}u^3 + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

1759. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x} =$$
$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

1760. $\displaystyle\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int \mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2} = x + 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

1761. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{sh}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.$$

1762. $\displaystyle\int \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C.$$

1763. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sh} x(2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\int \operatorname{sh}^2 x\,\mathrm{d}(\operatorname{sh} x) = \frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x + C.$$

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx.$

По свойству произведения гиперболических функций (см. решение задачи 7)

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x). \qquad (1)$$

Используя выражение (1), получаем

$$\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + C.$$

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$

Так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}\, dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x + C.$$

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx.$

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx = -\int ((1-x)-1)^2 \sqrt[3]{1-x}\, d(1-x) =$$
$$= -\int (u-1)^2 \sqrt[3]{u}\, du \Bigg|_{u=1-x} = -\int (u^2 - 2u + 1)\sqrt[3]{u}\, du =$$
$$= -\int (u^{7/3} - 2u^{4/3} + u^{1/3})\, du =$$
$$= -\frac{3}{10}u^{10/3} + \frac{6}{7}u^{7/3} - \frac{3}{4}u^{4/3} + C =$$
$$= -\frac{3}{140}(14u^2 - 40u + 35)u^{4/3} + C =$$
$$= -\frac{3}{140}\left(14(1-x)^2 - 40(1-x) + 35\right)(1-x)^{4/3} + C =$$
$$= -\frac{3}{140}(14x^2 - 12x + 9)(1-x)^{4/3} + C.$$

1767. $\displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}x=-\int\frac{-(1-5x^2)+1}{5}(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}\left(\frac{1-5x^2}{10}\right)=$$

$$=-\frac{1}{50}\int(u^{10}-u^{11})\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=1-5x^2}=-\frac{1}{50}\left(\frac{u^{11}}{11}-\frac{u^{12}}{12}\right)+C=$$

$$=-\frac{12-11u}{6600}u^{11}+C=-\frac{12-11(1-5x^2)}{6600}(1-5x^2)^{11}+C=$$

$$=-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+C.$$

1768. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{((2-x)-2)^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}(2-x)=$$

$$=-\int\frac{(u-2)^2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=2-x}=-\int\frac{u^2-4u+4}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=$$

$$=-\int\left(u^{3/2}-4u^{1/2}+4u^{-1/2}\right)\mathrm{d}u=-\left(\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{8}{3}u^{3/2}+8u^{1/2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{15}(6u^2-40u+120)\sqrt{u}+C=$$

$$=-\frac{1}{15}(6(2-x)^2-40(2-x)+120)\sqrt{2-x}+C=$$

$$=-\frac{2}{15}(3x^2+8x+32)\sqrt{2-x}+C.$$

1769. $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{((1-x^2)-1)^2\,\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=1-x^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{u^2-2u+1}{\sqrt{u}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(u^{3/2}-2u^{1/2}+u^{-1/2}\right)\mathrm{d}u=$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{15}(3u^2 - 10u + 15)\sqrt{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{15}(3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15)\sqrt{1-x^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{15}(3x^4 + 4x^2 + 8)\sqrt{1-x^2} + C.$$

1770. $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,\mathrm{d}x = \int x^3(2-5x^3)^{2/3}\,x^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(2-5x^3)-2}{-5}(2-5x^3)^{2/3}\,\frac{\mathrm{d}(2-5x^3)}{-15} =$$

$$= \frac{1}{75}\int (u-2)u^{2/3}\,\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=2-5x^3} =$$

$$= \frac{1}{75}\int \left(u^{5/3} - 2u^{2/3}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{75}\left(\frac{3}{8}u^{8/3} - \frac{6}{5}u^{5/3}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{1000}(5u-16)u^{5/3} + C = \frac{1}{1000}(5(2-5x^3)-16)(2-5x^3)^{5/3} + C =$$

$$= -\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3} + C.$$

1771. $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^2\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) =$$

$$= \int (1-u^2)^2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=\sin x} = \int (1-2u^2+u^4)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int \left(u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2}\right)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{4}{7}u^{7/2} + \frac{2}{11}u^{11/2} + C =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}u^2 + \frac{2}{11}u^4\right)u^{3/2} + C =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x} + C.$$

1772. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{\cos^3 x\,d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = \\ = -\int \frac{u^3\,du}{1+u^2}\Bigg|_{u=\cos x}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части первого равенства:

$$\int \frac{u^3\,du}{1+u^2} = \int \frac{u(1+u^2)-u}{1+u^2}\,du = \int \left(u - \frac{u}{1+u^2}\right) du = \\ = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C_1. \qquad (2)$$

Из соотношений первой и второй формул получаем (обозначив $C = -C_1$)

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \frac{1}{2}u^2 - C_1 = \\ = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

1773. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx.$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d(\operatorname{tg} x) = \\ = \int u^2(1+u^2)\,du\Bigg|_{u=\operatorname{tg} x} = \int (u^2+u^4)\,du = \\ = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

1774. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}}\Bigg|_{u=\ln x} =$$

$$= \int \frac{(1+u)-1}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}(1+u) - \int \frac{\mathrm{d}(1+u)}{\sqrt{1+u}} =$$

$$= \frac{2}{3}(1+u)^{3/2} - 2(1+u)^{1/2} + C = \frac{2}{3}(u-2)\sqrt{1+u} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + C.$$

1775. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^{x}}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^{x}} = -2\int \frac{\mathrm{d}\left(e^{-x/2}\right)}{1+e^{x/2}} = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{-1}}\Bigg|_{u=e^{-x/2}} =$$

$$= -2\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u} = -2\int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= -2u + 2\ln|1+u| + C = -2e^{-x/2} + 2\ln\left(e^{-x/2}+1\right) + C =$$

$$= -2e^{-x/2} + 2\ln\left(\left(1+e^{x/2}\right)e^{-x/2}\right) + C =$$

$$= -2e^{-x/2} + 2\ln\left(1+e^{x/2}\right) - x + C.$$

1776. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{x}}}.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{x}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}\sqrt{e^{-x}+1}} = -2\int \frac{\mathrm{d}\left(e^{-x/2}\right)}{\sqrt{1+\left(e^{-x/2}\right)^{2}}} =$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^{2}}}\Bigg|_{u=e^{-x/2}} = -2\ln\left(u+\sqrt{u^{2}+1}\right) + C =$$

$$= -2\ln\left(e^{-x/2} + \sqrt{e^{-x}+1}\right) + C =$$

$$= 2\ln e^{x/2} - 2\ln\left(\left(e^{-x/2}+\sqrt{e^{-x}+1}\right)e^{x/2}\right) + C =$$

$$= x - 2\ln\left(1+\sqrt{1+e^{x}}\right) + C.$$

1777. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = 2\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, d\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2 + C.$$

Некоторые интегралы вычисляются с помощью тригонометрических подстановок $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\sin^2 t$ и т. п. Рассмотрим задачи на эту тему (задачи 1778–1785). Параметры в этих задачах положительны.

1778. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Областью определения подынтегральной функции является интервал $(-1;1)$ и можно положить $t = \arcsin x$. В этом случае $x = \sin t$. Кроме того, так как величина $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos t > 0$. Следовательно, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$. Таким образом

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C =$$
$$= \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Замечание. Быстрее этот интеграл можно вычислить с помощью подстановки Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}, \quad 1-x^2 = \frac{1}{1+t^2}.$$

Применяя эту подстановку, получаем

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int dt = t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

1779. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Для вычисления интеграла воспользуемся гиперболической подстановкой. Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Положительная полуось пересекается с областью определения подынтегральной функции по промежутку $(\sqrt{2};+\infty)$. На этом участке можно сделать замену $x = \sqrt{2}\operatorname{ch} t$, считая величину t положительной. В этом случае

$$dx = \sqrt{2}\operatorname{sh} t\, dt, \quad \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}\operatorname{sh} t.$$

Для нахождения обратной подстановки нужно решить уравнение

$$x = a\frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (a = \sqrt{2}).$$

Полагая $z = e^t$ и учитывая, что $e^{-t} = 1/z$, сведем это уравнение к квадратному: $az^2 - 2xz + a = 0$. Решая квадратное уравнение и учитывая, что $t = \ln z$, находим два значения

$$t = \ln\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

В силу четности функции $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ эти значения отличаются знаком и нам необходимо выбрать большее из них:

$$t = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}.$$

Используя (1), имеем

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int\frac{2\,\mathrm{ch}^2 t\,\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t\,dt}{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t} = \int 2\,\mathrm{ch}^2 t\,dt =$$
$$= \int(\mathrm{ch}\,2t + 1)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t + t + C_1 = \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + t + C_1.$$

Учитывая равенства $\mathrm{sh}\,t = \sqrt{x^2 - 2}/\sqrt{2}$, $\mathrm{ch}\,t = x/\sqrt{2}$ и соотношение (2), получаем

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2} + \ln\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}} + C_1 =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2} + \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}\right| + C_1. \quad (3)$$

Функции $f_1(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$ и $f_2(x) = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}\right|$ нечетны. Для $f_1(x)$ это очевидно, проверим нечетность $f_2(x)$:

$$f_2(-x) = \ln\left|\frac{-x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}\right| = \ln\left|\frac{(-x + \sqrt{x^2 - 2})(x + \sqrt{x^2 - 2})}{\sqrt{2}(x + \sqrt{x^2 - 2})}\right| =$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{x + \sqrt{x^2 - 2}}\right| = -\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}\right| = -f_2(x).$$

Так как подынтегральная функция четна, а левая часть (3) отличается от нечетной функции на константу, то результат (3) сохраняет свою силу и при $x < 0$. Кроме того,

$$\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| = \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| - \ln\sqrt{2}.$$

Полагая $C = C_1 - \ln\sqrt{2}$, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C. \tag{4}$$

Замечание. Если быть упорным, то данный интеграл можно взять и тригонометрической подстановкой. Из соображений четности достаточно получить формулу (4) при $x > 0$. В этом случае положим $x = \sqrt{2}/\sin t$. Выполняя данную подстановку, получим

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^3 t}. \tag{5}$$

Преобразуем интеграл в правой части равенства (5):

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^3 t} = \int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin^4 t} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{(1-\cos^2 t)^2} =$$
$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}\Bigg|_{u=\cos t}. \tag{6}$$

Остается вычислить интеграл в правой части равенства (6). Для этого можно воспользоваться методом интегрирования по частям.

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = \int \frac{(1-u^2)+u^2}{(1-u^2)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} + \int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} + \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-u^2}\right) = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} + \frac{u}{2(1-u^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} =$$
$$= \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C_1. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^3 t} = -\frac{\cos t}{2\sin^2 t} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + C_2, \tag{8}$$

Наконец, с учетом соотношения (5), имеем

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + C_3, \tag{9}$$

где $C_3 = -2C_2$.

Остается выразить выражение в правой части равенства (9) через переменную x. Для этого отметим, что

$$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{x}, \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x},$$

а также

$$\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| = \ln\left|\frac{1+\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}}{1-\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}}\right| = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-2})^2}{(x-\sqrt{x^2-2})(x+\sqrt{x^2-2})}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-2})^2}{2}\right| = 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| - \ln 2.$$

Подставляя полученные выражения в (9), получаем

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C,$$

где $C = C_3 - \frac{1}{2}\ln 2$.

1780. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Областью определения подынтегральной функции является отрезок $[-1;1]$ и на нем можно положить $t = \arcsin x$. Так как в этом случае $t \in [-\pi/2;\pi/2]$, то $\cos t \geqslant 0$. Следовательно,

$$x = \sin t, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

1781. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

Рассмотрим случай $x \geqslant 0$. Сделаем подстановку $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Тогда

$$x = a\operatorname{tg} t, \quad x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt.$$

Отметим также, что величина $t \in [-\pi/2; \pi/2]$ и поэтому

$$\cos t \geqslant 0, \quad \sin t = \operatorname{tg} t/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos^3 t}{a^3}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{1}{a^2}\frac{x/a}{\sqrt{1+(x/a)^2}} + C =$$
$$= \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C. \quad (1)$$

Функция, стоящая в правой части первого равенства, отличается от нечетной на постоянную, а подынтегральная функция четна. Таким образом, результат первого равенства сохраняет свою силу и при $x < 0$. Окончательно имеем при всех значениях x

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

Замечание. Быстрее этот интеграл можно вычислить с помощью подстановки Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad x = \frac{at}{\sqrt{1-t^2}},$$
$$dx = \frac{a\,dt}{(1-t^2)^{3/2}}, \quad a^2 + x^2 = \frac{a^2}{1-t^2}.$$

Применяя эту подстановку, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int dt = \frac{t}{a^2} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

Областью определения подынтегральной функции является промежуток $[-a; a)$ и на нем можно положить $t = \arccos\frac{x}{a}$. Тогда величина $t \in [0; \pi]$ и поэтому $\sin t \geqslant 0$. Таким образом,

$$x = a\cos t, \quad dx = -a\sin t\,dt, \quad \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Учитывая, что $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, имеем неравенства $\sin\frac{t}{2} \geqslant 0$, $\cos\frac{t}{2} \geqslant 0$.

Отсюда получаем

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}\,a(-\sin t)\,dt =$$

$$= -a\int \sqrt{\frac{2\cos^2(t/2)}{2\sin^2(t/2)}}\,\sin t\,dt =$$

$$= -2a\int \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(t/2)\cos(t/2)dt = -a\int 2\cos^2(t/2)dt =$$

$$= -a\int (1+\cos t)\,dt = -at - a\sin t + C_1 =$$

$$= -a\arccos\frac{x}{a} - a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C_1 =$$

$$= -a\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2} + C_1 =$$

$$= a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C_1 - \pi a/2.$$

Полагая $C = C_1 - \pi a/2$, получаем окончательно

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$.

Областью определения подынтегральной функции является промежуток $[0; 2a)$. Положим

$$t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}},$$

тогда $x = 2a\sin^2 t$, величина $t \in [0; \pi/2]$ и

$$\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}, \quad \cos t = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}}, \quad \operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}},$$

следовательно,

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = \int (2a\sin^2 t)\ \operatorname{tg} t\,(2a\cdot 2\sin t\cdot\cos t)\,dt = \\ = 8a^2\int \sin^4 t\,dt. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1749:

$$\int \sin^4 t\,dt = \frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C. \quad (2)$$

Так как

$$\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t = 2\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)},$$

$$\sin 4t = 2\sin 2t\cdot\cos 2t = 4\sin t\cdot\cos t\,(1-2\sin^2 t) = \\ = 4\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}\left(1-\frac{x}{a}\right) = \frac{2(a-x)}{a^2}\sqrt{x(2a-x)},$$

то из (1) и (2) получаем

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 8a^2\left(\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right) + C = \\ = \frac{a^2}{4}(12t - 8\sin 2t + \sin 4t) + C = \\ = \frac{a^2}{4}\left(12\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{8}{a}\sqrt{x(2a-x)} + \frac{2(a-x)}{a^2}\sqrt{x(2a-x)}\right) + C = \\ = 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

1784. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Областью определения подынтегральной функции является либо интервал $(a; b)$ либо интервал $(b; a)$. В любом случае можно сделать замену

$$x = a + (b-a)\sin^2 t,$$

где $0 < t < \pi/2$.

При этом

$$x-a=(b-a)\sin^2 t, \quad b-x=(b-a)\cos^2 t,$$
$$dx=2(b-a)\sin t\cdot\cos t\,dt, \quad t=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}.$$

Выполняя указанную подстановку, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int dt=2t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C.$$

1785. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx.$

Воспользуемся подстановкой задачи 1784:

$$x=a+(b-a)\sin^2 t, \quad t=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}},$$

Для этой подстановки:

$$x-a=(b-a)\sin^2 t,$$
$$b-x=(b-a)\cos^2 t,$$
$$dx=2(b-a)\sin t\cdot\cos t\,dt.$$

Производя вычисления, получаем

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=\int 2(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t\,dt=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)dt=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\cdot\cos 2t\right)+C=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left[t-\sin t\cdot\cos t(\cos^2 t-\sin^2 t)\right]+C=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left[\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\sqrt{\frac{b-x}{b-a}}\frac{a+b-2x}{b-a}\right]+C=$$
$$\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

Аналогичным образом можно использовать гиперболические подстановки $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ и т. п. Задачи 1786–1790 можно решить с помощью этих подстановок (параметры в этих задачах положительны).

1786. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

Положим $x = a\,\mathrm{sh}\,t$. Для нахождения обратной подстановки обозначим $z = e^t$, тогда получаем $x = \frac{a}{2}(z - 1/z)$ и, решая квадратное уравнение

$$az^2 - 2xz - a = 0,$$

находим $z = (\pm\sqrt{x^2 + a^2})/a$. Так как $z > 0$, то нужно оставить корень только со знаком «+». Таким образом,

$$t = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad \mathrm{d}x = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

и

$$\mathrm{sh}\,t = \frac{x}{a}, \quad \mathrm{ch}\,t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}, \tag{3}$$

следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int a\,\mathrm{ch}\,t(a\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int \mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t + 1)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2t + t\right) + C_1 = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + \frac{a^2 t}{2} + C_1 =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C_1 =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \frac{a^2}{2}\ln a + C_1.$$

Обозначая $C = C_1 - \frac{a^2}{2}\ln a$, получаем

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

1787. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$

Воспользуемся подстановкой $x = a\operatorname{sh} t$ задачи 1786. Используя формулы (1)–(3) этой задачи, получаем

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{a^2\operatorname{sh}^2 t\, a\operatorname{ch} t\,dt}{a\operatorname{ch} t} = a^2\int \operatorname{sh}^2 t\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int(\operatorname{ch}2t-1)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t - t\right) + C_1 =$$
$$= \frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - t) + C_1 =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} - \ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) + C_1 =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \frac{a^2}{2}\ln a + C_1.$$

Обозначая $C = C_1 - \frac{a^2}{2}\ln a$, получаем

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

1788. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx.$

Область определения подынтегральной функции является объединением двух промежутков $(-\infty;-a)$ и $[a;+\infty)$. Рассмотрим случай $x \geqslant a$. Сделаем подстановку

$$x = a\operatorname{ch} t, \tag{1}$$

считая величину t положительной.

Для нахождения обратной замены положим $z = e^t$, тогда получаем $x = \frac{a}{2}(z + 1/z)$. Решая квадратное уравнение $az^2 - 2xz + a = 0$ и учитывая, что $t = \ln z$, находим два значения

$$t = \ln\frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

В силу четности функции $x = a\operatorname{ch} t$ эти значения отличаются знаком и нам необходимо выбрать большее из них:

$$t = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}. \tag{2}$$

При этом (учитывая, что при $t > 0$ величина $\operatorname{sh} t > 0$)

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{sh}^2(t/2)}{2\operatorname{ch}^2(t/2)}} = \operatorname{th}\frac{t}{2}. \qquad (3)$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}. \qquad (4)$$

Используя равенства (1)–(4), получаем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = \int \left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right) a\operatorname{sh} t\,dt =$$
$$= \int \frac{\operatorname{sh}(t/2)}{\operatorname{ch}(t/2)}\, a(2\operatorname{sh}(t/2)\operatorname{ch}(t/2))\,dt =$$
$$= a\int 2\sin^2(t/2)\,dt = a\int(\operatorname{ch} t - 1)\,dt =$$
$$= a(\operatorname{sh} t - t) + C_1 = \sqrt{x^2-a^2} - a\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C_1.$$

Так как

$$\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \ln a =$$
$$= \ln(2x + 2\sqrt{x^2-a^2}) - \ln 2 - \ln a =$$
$$= \ln((x-a)+(x+a)+2\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}) - \ln 2a =$$
$$= \ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})^2 - \ln 2a =$$
$$= 2\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) - \ln 2a,$$

то, полагая $C = C_1 + a\ln 2a$, получаем, что при $x \geqslant a$

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) + C.$$

Рассмотрим случай $x < -a$. Здесь можно воспользоваться подстановкой $x = -a\operatorname{ch} t$, считая величину t положительной. В этом случае в формуле (2) нужно заменить x на $-x$:

$$t = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}.$$

Далее,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}t+1}{\operatorname{ch}t-1}}=\sqrt{\frac{2\operatorname{ch}^2(t/2)}{2\operatorname{sh}^2(t/2)}}=\operatorname{cth}\frac{t}{2},$$

$$\operatorname{ch}t=-\frac{x}{a},\quad \operatorname{sh}t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx=-\int\left(\operatorname{cth}\frac{t}{2}\right)a\operatorname{sh}t\,dt=$$

$$=-a\int\frac{\operatorname{ch}(t/2)}{\operatorname{sh}(t/2)}(2\operatorname{sh}(t/2)\operatorname{ch}(t/2))\,dt=$$

$$=-a\int 2\operatorname{ch}^2(t/2)\,dt=-a\int(\operatorname{ch}t+1)\,dt=-a\operatorname{sh}t-at+C_1=$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}+C_1.$$

Так как

$$\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}=\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)-\ln a=$$

$$=\ln(2\sqrt{x^2-a^2}-2x)-\ln 2-\ln a=$$

$$=\ln(2\sqrt{-x+a}\sqrt{-x-a}+(-x+a)+(-x-a))-\ln 2a=$$

$$=\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})^2-\ln 2a=$$

$$=2\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})-\ln 2a,$$

то, полагая $C=C_1+a\ln 2a$, получаем, что при $x<-a$

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx=-\sqrt{x^2-a^2}-$$

$$-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})+C, & x\geqslant a,\\ -\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C, & x<-a.\end{cases}$$

Замечание. В приводимом ответе задачника Демидовича имеется опечатка. Для случая $x < -a$ перед логарифмом ошибочно указан другой знак.

1789. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

Предположим, что $a \neq b$. Так как интеграл не меняется при перестановке параметров a и b, то для определенности будем считать, что $a < b$. В этом случае область определения подынтегральной функции состоит из двух промежутков $(-\infty; -b)$ и $(-a; +\infty)$. Рассмотрим случай $x > -a$ и положим

$$x = -a + (b-a)\operatorname{sh}^2 t \quad (t > 0). \tag{1}$$

Непосредственно из равенства (1) получаем

$$x + a = (b-a)\operatorname{sh}^2 t, \quad x + b = (b-a)\operatorname{ch}^2 t,$$

в частности

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t. \tag{2}$$

Из равенства (1) также следует, что $\operatorname{sh} t = \sqrt{(x+a)/(b-a)}$. В задаче 1786 — формула (1) — показано, что обратной к функции $y = \operatorname{sh} t$ является функция $t = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Таким образом,

$$t = \ln\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} + \sqrt{\frac{x+a}{b-a} + 1}\right) = \\ = \ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) - \ln\sqrt{b-a}. \tag{3}$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \int \frac{2(b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t}{(b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} = 2\int \mathrm{d}t = 2t + C_1.$$

Подставляя сюда t из равенства (3) и обозначая $C = C_1 - 2\ln\sqrt{b-a}$, приходим к следующему результату:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) + C. \tag{4}$$

Перейдем к случаю $x < -b$. Здесь сделаем подстановку:

$$x = -b + (a-b)\operatorname{sh}^2 t \quad (t > 0).$$

Аналогично предыдущему получаем

$$x + b = (a-b)\operatorname{sh}^2 t, \quad x + a = (a-b)\operatorname{ch}^2 t$$

и соответственно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \int \frac{2(a-b)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\, dt}{|a-b|\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} = \\ = -2\int dt = -2t + C_1. \quad (5)$$

Из формулы замены следует, что $\operatorname{sh} t = \sqrt{(x+b)/(a-b)}$ и поэтому

$$t = \ln\left(\sqrt{\frac{x+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{x+b}{a-b} + 1}\right) = \\ = \ln\left(\sqrt{-x-b} + \sqrt{-x-a}\right) - \ln\sqrt{b-a}.$$

Подставляя это в (4) и обозначая $C = C_1 + 2\ln\sqrt{b-a}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) + C. \quad (6)$$

Пусть теперь $a = b$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \int \frac{dx}{|x+a|} = \begin{cases} \ln(x+a)+C, & x > -a, \\ -\ln(-x-a)+C, & x < -a. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данный результат с точностью до константы совпадает с формулами (4) и (6). Окончательно приходим к следующему результату:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \\ = \begin{cases} 2\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) + C, & x > \max\{-a,-b\}, \\ -2\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) + C, & x < \min\{-a,-b\}. \end{cases}$$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x.$

Вычисление интеграла проводится по той же схеме, что и в задаче 1789. Пусть $a \neq b$. Так как интеграл не меняется при перестановке параметров a и b, то можно считать, что $a < b$. В этом случае область определения подынтегральной функции состоит из двух промежутков $(-\infty; -b)$ и $(-a; +\infty)$. Рассмотрим случай $x > -a$ и сделаем ту же подстановку, что и в задаче 1789:

$$x = -a + (b-a)\,\mathrm{sh}^2 t \quad (t > 0).$$

Тогда

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a)\,\mathrm{sh}\,t\;\mathrm{ch}\,t,$$

и

$$t = \ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right) - \ln\sqrt{b-a}.$$

Выполняя подстановку, получаем

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = 2(b-a)^2 \int \mathrm{sh}^2 t\;\mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int \mathrm{sh}^2 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}(b-a)^2 \int (\mathrm{ch}\,4t - 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,4t - t\right) + C_1.$$

Так как $\mathrm{sh}\,4t = 2\,\mathrm{sh}\,2t \cdot \mathrm{ch}\,2t = 4\,\mathrm{sh}\,t \cdot \mathrm{ch}\,t(\mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t)$, а из формулы замены следует, что

$$\mathrm{sh}\,t = \sqrt{\frac{x+a}{b-a}}, \quad \mathrm{ch}\,t = \sqrt{\frac{x+b}{b-a}},$$

то

$$\mathrm{sh}\,4t = 4\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\sqrt{\frac{x+b}{b-a}}\left(\frac{x+b}{b-a} + \frac{x+a}{b-a}\right) =$$

$$= \frac{4}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)}(2x+a+b).$$

Полагая $C = \frac{1}{4}(b-a)^2 \ln\sqrt{b-a} + C_1$, получим теперь, что

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right) + C. \tag{1}$$

Рассмотрим случай $x < -b$. Так же, как и в задаче 1789, здесь сделаем подстановку:

$$x = -b + (a-b)\,\mathrm{sh}^2 t \quad (t > 0).$$

Теперь

$$t = \ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) - \ln\sqrt{b-a}, \mathrm{sh}\, t = \sqrt{\frac{x+b}{a-b}},$$
$$\mathrm{ch}\, t = \sqrt{\frac{x+a}{a-b}}, \mathrm{sh}\, 4t = -\frac{4}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)}(2x+a+b).$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(b-a)^2 \int \mathrm{sh}^2 2t\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{4}(b-a)^2 \int (\mathrm{ch}\, 4t - 1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}\, 4t - t\right) + C_1 =$$
$$= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} =$$
$$= \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) + C, \tag{2}$$

где $C = C_1 - \frac{1}{4}(b-a)^2 \ln\sqrt{b-a}$.

Если $a = b$, то

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \int |x+a|\,\mathrm{d}x =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(x+a)^2 + C, & x > -a, \\ \cdot\ \frac{1}{2}(x+a)^2 + C, & x < -a. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данный результат совпадает (с той же постоянной C) с формулами (1) и (2). Окончательно приходим к следующему результату:

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)+C, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x > \max\{-a,-b\} \\ \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right)+C, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x < \min\{-a,-b\}. \end{cases}$$

§ 2.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Мощное средство для вычисления интегралов дает формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

или (в другой форме)

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

С помощью этой формулы вычисляются интегралы следующего вида:

$$\int x^n \sin bx\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \cos bx\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n a^x\,\mathrm{d}x.$$

Если записать эти интегралы в виде

$$\int x^n \mathrm{d}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right), \quad \int x^n \mathrm{d}\left(\frac{\sin bx}{b}\right), \quad \int x^n \mathrm{d}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)$$

и воспользоваться формулой интегрирования по частям, то получатся интегралы такого же вида, но содержащие не x^n, а x^{n-1}. Следовательно, применяя формулу интегрирования по частям n раз, мы получим в результате табличные интегралы.

Иногда, применяя интегрирование по частям, можно получить формулу, в которой рассматриваемый интеграл снова возникает в другой части равенства. Это приводит к алгебраическому уравнению относительно данного интеграла. Решая полученное уравнение, находим сам интеграл. Таким способом, например, решаются задачи 1818–1820, 1828, 1829. Применение формулы интегрирования по частям показано на решении задач 1791–1810.

1791. $\int \ln x \, dx$.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d(\ln x) = x \ln x - \int dx = \\ = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

1792. $\int x^n \ln x \, dx \quad (n \neq -1)$.

$$\int x^n \ln x \, dx = \int \ln x \, d\left(x^{n+1}/(n+1)\right) = \\ = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \\ = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\int \ln^2 x \, d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \\ = -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\int \ln x \, d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} = \\ = -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C.$$

1794. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx.$

$$\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx = \int \ln^2 x\,d\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = \\ = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int (\ln x)\sqrt{x}\,dx = \\ = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \ln x\,d\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = \\ = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{3/2}\ln x + \frac{8}{9}\int \sqrt{x}\,dx = \\ = \frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C.$$

1795. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx.$

$$\int xe^{-x}\,dx = \int x\,d(-e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \\ = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

1796. $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,dx.$

$$\int x^2e^{-2x}\,dx = \int x^2 d\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx = \\ = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \int x d\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \\ = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \\ = -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

1797. $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx.$

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int ue^{-u}du\,\Bigg|_{u=x^2} \qquad (1)$$

Согласно решению задачи 1795:

$$\int ue^{-u}\,\mathrm{d}u = -(u+1)e^{-u} + C. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем (учитывая, что постоянная C произвольна)

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(u+1)e^{-u} + C = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2} + C.$$

1798. $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$

1799. $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) =$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\sin 2x) =$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.$$

1800. $\displaystyle\int x\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x.$

$$\int x\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{ch}x) = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + C.$$

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x \, dx.$

$$\int x^3 \operatorname{ch} 3x \, dx = \int x^3 d\left(\frac{\operatorname{sh} 3x}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \operatorname{sh} 3x - \int x^2 \operatorname{sh} 3x \, dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{sh} 3x - \int x^2 d\left(\frac{\operatorname{ch} 3x}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{3}\int x \operatorname{ch} 3x \, dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{3}\int x \, d\left(\frac{\operatorname{sh} 3x}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{9}x \operatorname{sh} 3x - \frac{2}{9}\int \operatorname{sh} 3x \, dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right) \operatorname{ch} 3x + C.$$

1802. $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1803. $\int \arcsin x \, dx.$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

1804. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \int \operatorname{arctg} x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = -\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1805. $\int x^2 \arccos x\,dx.$

$$\int x^2 \arccos x\,dx = \int \arccos x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)-1}{3}\cdot\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{6}\int \left(u^{1/2} - u^{-1/2}\right) du\,\Bigg|_{u=1-x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} - 2(1-x^2)^{1/2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + C.$$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

Пусть $x > 0$, тогда

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\int \arcsin x\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x^2\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right)} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) + C =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} + C.$$

Так как подынтегральная функция нечетна, то для получения результата на всей числовой прямой нужно взять четное продолжение полученного выражения. Таким образом,

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx = -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C.$$

1807. $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx.$

$$\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx = x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} + C.$$

1808. $\int x \ln\frac{1 + x}{1 - x}\, dx.$

$$\int x \ln\frac{1 + x}{1 - x}\, dx = \int \ln\frac{1 + x}{1 - x}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} - \int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \int \frac{(1 - x^2) - 1}{1 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} + \int \left(1 - \frac{1}{1 - x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} + x - \frac{1}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} + C = x + \frac{x^2 - 1}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

1809. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x} =$$
$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - -\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x+1) - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} =$$
$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} =$$
$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C =$$
$$= -\sqrt{x} + (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

1810. $\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}x = \int\ln(\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}(-\cos x) =$$
$$= -\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x) + \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}. \qquad (1)$$

Согласно решению задачи 1703:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}x = -\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x) + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

В задачах 1811–1835 используются все рассмотренные выше методы интегрирования.

1811. $\int x^5e^{x^3}\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^5e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x^3e^{x^3}\,\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}\int ue^u\,\mathrm{d}u\Bigg|_{u=x^3}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, входящий в правую часть равенства (1). Для этого воспользуемся методом интегрирования по частям.

$$\int ue^u\,du = \int u\,d(e^u) = ue^u - \int e^u du =$$
$$= ue^u - e^u + C = (u-1)e^u + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и заменяя $\frac{1}{3}C$ на C (это возможно в силу произвольности C), получаем

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3} + C.$$

1812. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

$$\int (\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x\,d(\sqrt{1-x^2}) =$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx =$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

1813. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \int (\operatorname{arctg} x)^2 d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 -$$
$$-\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x\,dx + \int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x). \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1802:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \\ - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C = \\ = \frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1814. $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$

Область определения подынтегральной функции есть интервал $(-1;1)$. Учитывая это, получаем

$$\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx = \int \ln\frac{1-x}{1+x}\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \\ = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \\ = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\int\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}\,dx = \\ = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \\ = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\int x\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \\ = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln(1-x^2) + C.$$

1815. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

$$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d(\sqrt{1+x^2}) = \\ = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int dx = \\ = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C.$$

1816. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x\,d\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1817. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

Согласно ответу, приведенному в задачнике Демидовича, подразумевается, что величина $a \neq 0$. Ограничимся также этим случаем. Имеем

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx. \quad (1)$$

Вычислим интегралы, входящие в правую часть равенства (1).

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_1. \quad (2)$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \int x\,d\left(-\frac{1}{2(a^2+x^2)}\right) = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_2. \quad (3)$$

Положим $C = (C_1 - C_2)/a^2$. Тогда из (1), (2) и (3) получаем

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

1818. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

Обозначим искомый интеграл через I. Используя интегрирование по частям, получаем

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int x \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Таким образом,

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой линейное уравнение относительно искомого интеграла I. Решая его, находим

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (2)$$

Так как

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(x/|a|)}{\sqrt{1 - (x/|a|)^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C_1,$$

то обозначив $C = \frac{a^2}{2} C_1$, находим из (2)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$$

Замечание. В проделанных выкладках предполагалось, что величина $a \neq 0$. При $a = 0$ область определения подынтегральной функции состоит из одной точки $x = 0$ и говорить об интеграле от такой функции не приходится.

1819. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x.$

Обозначим искомый интеграл через I. Используя интегрирование по частям, получаем

$$I = \int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a} -$$

$$- \int x\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x + a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - I + a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Таким образом,

$$I = x\sqrt{x^2+a} - I + a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой линейное уравнение относительно искомого интеграла I. Решая его, находим

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}. \qquad (2)$$

Так как

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{\mathrm{d}(x/\sqrt{|a|})}{\sqrt{(x/\sqrt{|a|})^2 + \operatorname{sgn} a}} =$$

$$= \ln\left|(x/\sqrt{|a|}) + \sqrt{\left(x/\sqrt{|a|}\right)^2 + \operatorname{sgn} a}\right| + C_1 =$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| - \ln\sqrt{|a|} + C_1,$$

то полагая $C = \frac{a}{2}\left(C_1 - \ln\sqrt{|a|}\right)$, получаем из (2)

$$\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C. \qquad (3)$$

Замечание. В проделанных выкладках предполагалось, что величина $a \neq 0$. Нетрудно убедиться, что формула (3) сохраняет свою силу также и при $a = 0$.

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

Введем следующие обозначения:

$$I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x, \quad J = \int (a^2 + x^2)^{3/2}\mathrm{d}x.$$

Так как

$$I = \int \left((a^2 + x^2) - a^2\right) \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \int (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x - a^2 \int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = J - a^2 \int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x,$$

а согласно решению задачи 1819 (с заменой a на a^2):

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C,$$

то

$$I - J = -\frac{a^2 x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C_1. \quad (1)$$

С другой стороны, интегрируя по частям, получаем

$$I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}\left((a^2 + x^2)^{3/2}\right) = \\ = \frac{x(a^2 + x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\int (a^2 + x^2)^{3/2}\mathrm{d}x = \frac{x(a^2 + x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}J.$$

Таким образом,

$$I + \frac{1}{3}J = \frac{x(a^2 + x^2)^{3/2}}{3} + C_2. \quad (2)$$

Решая систему линейных уравнений (1), (2), находим оба интеграла. В частности

$$I = \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.$$

Так как величина $x+\sqrt{a^2+x^2}$ неотрицательна при всех x, знак модуля можно опустить. Следовательно,

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$$

1821. $\displaystyle\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

$$\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x - \\ - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_1. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и обозначая $C = -\frac{1}{2}C_1$, имеем

$$\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

1822. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

Для вычисления интеграла сделаем замену $t=\sqrt{x}$, тогда

$$x = t^2, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

Интегрируя после замены по частям, имеем

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int te^t\,\mathrm{d}t = 2\int t\,\mathrm{d}\left(e^t\right) =$$
$$= 2te^t - 2\int e^t\,\mathrm{d}t = 2te^t - 2e^t + C = 2(t-1)e^t + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

1823. $\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

Для вычисления интеграла сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда

$$x = t^2, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

Выполняя замену и затем интегрируя по частям, имеем

$$\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int t^3\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int t^3\,\mathrm{d}(\cos t) =$$
$$= -2t^3\cos t + 6\int t^2\cos t\,\mathrm{d}t = -2t^3\cos t + 6\int t^2\,\mathrm{d}(\sin t) =$$
$$= -2t^3\cos t + 6t^2\sin t - 12\int t\sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= -2t^3\cos t + 6t^2\sin t + 12\int t\,\mathrm{d}(\cos t) =$$
$$= -2t^3\cos t + 6t^2\sin t + 12t\cos t - 12\int \cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= -2t^3\cos t + 6t^2\sin t + 12t\cos t - 12\sin t + C =$$
$$= 2(6-t^2)t\cos t - 6(2-t^2)\sin t + C =$$
$$= 2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6(2-x)\sin\sqrt{x} + C.$$

1824. $\int \dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

Для вычисления интеграла сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$, тогда

$$x = \operatorname{tg} t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\cos^2 t.$$

Выполняя указанную замену, получаем

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (1). Обозначим его через I. Интегрируя два раза по частям, получаем

$$I = \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int e^t\,\mathrm{d}(\cos t) = -e^t\cos t + \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= -e^t\cos t + \int e^t\,\mathrm{d}(\sin t) =$$
$$= -e^t\cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= e^t(\sin t - \cos t) - \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t,$$

т. е.

$$I = e^t(\sin t - \cos t) - I. \tag{2}$$

Решая уравнение (2), находим

$$\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin t - \cos t}{2}\,e^t + C. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin t - \cos t}{2}\,e^t + C.$$

Осталось вернуться к исходной переменной. Учитывая, что

$$t \in [-\pi/2; \pi/2],$$

имеем

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

1825. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

Для вычисления интеграла сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$, тогда

$$x = \operatorname{tg} t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\cos^2 t.$$

Выполняя указанную замену, получаем

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (1). Обозначим его через I. Интегрируя по частям, получаем

$$I = \int e^t \cos t\,\mathrm{d}t = \int e^t d(\sin t) = e^t \sin t - \int e^t \sin t\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Интеграл, входящий в правую часть равенства (2) вычислен в задаче 1824 (формула (3)):

$$\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin t - \cos t}{2}\,e^t + C.$$

Подставляя последнее выражение в (2) и переобозначая $-C$ снова через C, получим

$$\int e^t \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin t + \cos t}{2}\,e^t + C. \tag{3}$$

Используя равенства (1) и (3) находим

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin t + \cos t}{2}\,e^t + C. \tag{4}$$

Учитывая, что $t \in [-\pi/2; \pi/2]$, имеем

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (4), получаем окончательный результат:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

1826. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

Делая замену $t = \ln x$, получаем

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \int e^t \sin t\,dt. \tag{1}$$

Интеграл, входящий в правую часть равенства (1), вычислен в задаче 1824 (формула (3)):

$$\int e^t \sin t\,dt = \frac{\sin t - \cos t}{2}\,e^t + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\,(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

1827. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

Делая замену $t = \ln x$, получаем

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int e^t \cos t\,dt. \tag{1}$$

Интеграл, входящий в правую часть равенства (1), вычислен в задаче 1825 (формула (3)):

$$\int e^t \sin t\,dt = \frac{\sin t + \cos t}{2}\,e^t + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\,(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

1828. $\int e^{\alpha x} \cos bx\,dx.$

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Обозначим искомый интеграл через I. Интегрируя два раза по частям, получаем

$$I = \int e^{\alpha x} \cos bx\,dx = \frac{1}{\alpha} \int \cos bx\,d\left(e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos bx + \frac{b}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin bx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos bx + \frac{b}{\alpha^2} \int \sin bx \, d(e^{\alpha x}) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos bx + \frac{b}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin bx -$$

$$- \frac{b^2}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} \cos bx \, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos bx + \frac{b}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin bx - \frac{b^2}{\alpha^2} I.$$

Таким образом, для величины I получается линейное уравнение

$$I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos bx + \frac{b}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin bx - \frac{b^2}{\alpha^2} I.$$

Решая это уравнение, находим

$$\int e^{\alpha x} \cos bx \, dx = \frac{\alpha \cos bx + b \sin bx}{\alpha^2 + b^2} e^{\alpha x} + C.$$

Нетрудно видеть, что эта формула остается справедливой и в случае $\alpha = 0$, $b \neq 0$. В случае, когда $\alpha = 0$ и $b = 0$ подынтегральная функция равна 1 и интеграл равен $x + C$. Таким образом, окончательно имеем

$$\int e^{\alpha x} \cos bx \, dx = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cos bx + b \sin bx}{\alpha^2 + b^2} e^{\alpha x} + C, & \alpha^2 + b^2 \neq 0, \\ x + C, & \alpha^2 + b^2 = 0. \end{cases}$$

1829. $\int e^{\alpha x} \sin bx \, dx.$

Пусть $\alpha \neq 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int e^{\alpha x} \sin bx \, dx = \int \sin bx \, d\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin bx - \frac{b}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos bx \, dx. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1828:

$$\int e^{\alpha x} \cos bx \, dx = \frac{\alpha \cos bx + b \sin bx}{\alpha^2 + b^2} e^{\alpha x} + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем после элементарных преобразований

$$\int e^{\alpha x} \sin bx \, dx = \frac{\alpha \sin bx - b \cos bx}{\alpha^2 + b^2} e^{\alpha x} + C.$$

Полученный результат, как легко проверить, сохраняет свою силу также и при $a = 0$, $b \neq 0$. В случае когда $a = 0$ и $b = 0$, подынтегральная функция равна 0 и интеграл равен постоянной. Таким образом, окончательно имеем

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C, & a^2+b^2 \neq 0, \\ C, \quad a^2+b^2 = 0. \end{cases}$$

1830. $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

$$\int e^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int e^{2x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1828:

$$\int e^{2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2\cos 2x + 2\sin 2x}{8}\,e^{2x} + C_1. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и обозначая $C = -C_1/2$, получаем после преобразований

$$\int e^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x) + C.$$

1831. $\displaystyle\int (e^x - \cos x)^2\,\mathrm{d}x.$

$$\int (e^x - \cos x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(e^{2x} - 2e^x\cos x + \cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \int e^{2x}\mathrm{d}x - 2\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} - 2\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Согласно решению задачи 1828:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{\cos x + \sin x}{2} e^x + C,$$

следовательно,

$$\int (e^x - \cos x)^2 \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

1832. $\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x} \, dx.$

Положим $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = dt/t$ и

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x} \, dx = \int \frac{\operatorname{arcctg} t}{t^2} \, dt. \tag{1}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} t}{t^2} \, dt = -\int \operatorname{arcctg} t \, d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\operatorname{arcctg} t}{t} - \int \frac{dt}{t(1+t^2)}. \tag{2}$$

Далее

$$\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2) - t^2}{t(1+t^2)} \, dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t \, dt}{1+t^2} = \ln|t| - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \ln|t| - \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) + C. \tag{3}$$

Используя (1), (2), (3) и переобозначая $-C$ на C, имеем

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x} \, dx = -\frac{\operatorname{arcctg} t}{t} - \ln|t| + \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x} \, dx = -e^{-x} \operatorname{arcctg} e^x - x + \frac{1}{2} \ln\left(1+e^{2x}\right) + C.$$

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \ln(\sin x)\mathrm{d}(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1751:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x - x + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем после элементарных преобразований

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\left(x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e\,\sin x)\right) + C.$$

1834. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1697:

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем (заменяя $-C$ на C)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

1835. $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int xe^x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{x}{x+1}e^x + \int e^x \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{x}{x+1}\,e^x + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

Следующая группа задач использует дополнительную таблицу интегралов. Эта таблица была приведена во главе 1. Отметим также, что решение большинства задач использует формулу выделения из квадратного трехчлена полного квадрата

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Перейдем к примерам.

1836. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a + bx^2}$ $(ab \neq 0)$.

Если $ab > 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + bx^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{a}{b} + x^2} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C =$$
$$= \frac{\operatorname{sgn} b}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Если $ab < 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + bx^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{b}{a}x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{-\frac{a}{b}}\int \frac{\mathrm{d}\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)}{1 - \left(\sqrt{-\frac{b}{a}}x\right)^2} =$$
$$= \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{1 + x\sqrt{-\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{-\frac{b}{a}}}\right| + C = \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}}\right| + C.$$

1837. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

1838. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$.

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}}{\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}}\right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right| + C_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + \frac{1}{4}\ln 3 + C_1.$$

Полагая $C = C_1 + \frac{1}{4}\ln 3$, получаем окончательно

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C.$$

1839. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$.

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2 - 2x^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - 2u - 1}\Bigg|_{u = x^2}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (1).

$$\int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} = \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2 - 2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u - 1 - \sqrt{2}}{u - 1 + \sqrt{2}}\right| + C_1. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и полагая $C = \frac{1}{2}C_1$, получаем

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)}{x^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)}\right| + C.$$

1840. $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}\,dx.$

$$\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1841. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

Если $\alpha = 2\pi n$, n — целое, то $\cos\alpha = 1$ и интеграл принимает вид

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2} = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\,d(x-1) =$$
$$= \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Если $\alpha = \pi + 2\pi n$, n — целое, то $\cos\alpha = -1$ и интеграл принимает вид

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,d(x+1) =$$
$$= \int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} =$$
$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Если $\alpha \neq \pi n$, n — целое, то

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 2\cos\alpha) + \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + \cos\alpha \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \cos\alpha \int \frac{\mathrm{d}(x - \cos\alpha)}{(x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} + C.$$

1842. $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 2}$.

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 2} = \int \frac{\frac{1}{4}(4x^3 - 2x) + \frac{1}{2}x}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4 - x^2 + 2)}{x^4 - x^2 + 2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{1}{4}\ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u + 2}\bigg|_{u = x^2}.$$

Так как, согласно решению задачи 1837,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u + 2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2u - 1}{\sqrt{7}} + C,$$

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{1}{4}\ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

1843. $\displaystyle\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6 - x^3 - 2}$.

$$\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6 - x^3 - 2} = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^5 - 3x^2) + \frac{1}{2}x^2}{x^6 - x^3 - 2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(x^6 - x^3 - 2)}{x^6 - x^3 - 2} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2 - x^3 - 2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x^6 - x^3 - 2| + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u - 2}\bigg|_{u = x^3} =$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|+\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|+$$

$$+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}\right|+C=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x^3-2}{x^3+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|(x^3-2)(x^3+1)|+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x^3-2}{x^3+1}\right|+C=$$

$$=\ln|x^3-2|^{\frac{1}{6}}|x^3+1|^{\frac{1}{6}}|x^3-2|^{\frac{1}{18}}|x^3+1|^{-\frac{1}{18}}+C=$$

$$=\ln|x^3+1|^{\frac{1}{9}}|x^3-2|^{\frac{2}{9}}+C=\frac{1}{9}\ln\left(|x^3+1|(x^3-2)^2\right)+C.$$

1844. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2x-8\sin x\cdot\cos x+5\cos^2x}.$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2x-8\sin x\cdot\cos x+5\cos^2x}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{3\,\mathrm{tg}^2x-8\,\mathrm{tg}\,x+5}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,x)}{3\,\mathrm{tg}^2x-8\,\mathrm{tg}\,x+5}=\int\frac{\mathrm{d}u}{3u^2-8u+5}\Bigg|_{u=\mathrm{tg}\,x}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-\frac{8}{3}u+\frac{5}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(u-\frac{4}{3}\right)}{\left(u-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(u-\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{3}}{\left(u-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}}\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3u-5}{3(u-1)}\right|+C_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3u-5}{u-1}\right|-\frac{1}{2}\ln 3+C_1.$$

Обозначая $C=C_1-\frac{1}{2}\ln 3$ и возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2x-8\sin x\cdot\cos x+5\cos^2x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\,\mathrm{tg}\,x-5}{\mathrm{tg}\,x-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$$

1845. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) + 3(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5)(2\cos^2\frac{x}{2})} =$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2 + 2u + 5}\Bigg|_{u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 2\int \frac{d(u+1)}{(u+1)^2 + 4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{u+1}{2} + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C.$$

1846. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}$.

Если $b > 0$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{a}{b}}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{a}{b}}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\frac{x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}}{\sqrt{b}}\right) + C_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}) + C,$$

где $C = C_1 - \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\sqrt{b}$.

Если $b < 0$ и $a > 0$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{b}{a}x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{-\frac{a}{b}}\int \frac{d\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{-\frac{b}{a}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right) + C.$$

1847. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

1848. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

1849. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x-\frac{1}{4})}{\sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right) + C.$$

Решение задач 1846–1849 обобщает формула из задачи 1850.

1850. Доказать, что если

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right| + C \quad \text{при } a > 0$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \quad \text{при } a < 0.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$, тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\mathrm{d}(x + \frac{b}{2a})}{\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax + b}{2} + \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| - \frac{1}{\sqrt{a}} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C,$$

где $C = C_1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln a$.

Пусть теперь $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$ (в случае, когда $a < 0$, $b^2 - 4ac \leqslant 0$ область определения подынтегральной функции пуста или состоит из одной точки), тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\mathrm{d}(x + \frac{b}{2a})}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - (x + \frac{b}{2a})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

1851. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5 + x - x^2}}$.

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5 + x - x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}(1 - 2x) + \frac{1}{2}}{\sqrt{5 + x - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(5 + x - x^2)}{\sqrt{5 + x - x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5 + x - x^2}} =$$

$$= -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{21}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} =$$

$$= -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{21}} + C.$$

1852. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$$

1853. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-3x^2-2(x^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-3u-2u^2}}\Bigg|_{u=x^2}.$$

Согласно решению задачи 1850:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-3u-2u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{3+4u}{\sqrt{17}} + C_1.$$

Возвращаясь к переменной x и обозначая $C = C_1/2$, получаем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}} + C.$$

1853.1. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}.$

Делая замену $u = \sin x$ и используя результат задачи 1850, получаем

$$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{1+\sin x+1-\sin^2 x}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2+u-u^2}} = \arcsin\frac{2u-1}{3} + C = \arcsin\frac{2\sin x-1}{3} + C.$$

1854. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \int \frac{\frac{1}{4}(4x^3-4x)+x}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-2x^2-1)}{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2-2x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-2u-1}}\Bigg|_{u=x^2}.$$

Согласно результату задачи 1850:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-2u-1}} = \ln\left|u-1+\sqrt{u^2-2u-1}\right| + C_1.$$

Возвращаясь к переменной x и обозначая $C = C_1/2$, получаем

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right| + C.$$

1855. $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$.

$$\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{4}(-4x^3+2x)+\frac{3}{2}x}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d(1+x^2-x^4)}{\sqrt{1+x^2-x^4}} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}}\Bigg|_{u=x^2}.$$

Согласно результату задачи 1850:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}} = \arcsin\frac{2u-1}{\sqrt{5}} + C_1.$$

Возвращаясь к переменной x и обозначая $C = \frac{3}{4}C_1$, получаем

$$\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} + C.$$

1856. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Пусть $x > 0$, тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1+(1/x)+(1/x)^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1+u+u^2}}\Bigg|_{u=1/x}.$$

Согласно решению задачи 1850:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u+u^2}} = \ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right| + C_1.$$

Возвращаясь к переменной x и обозначая $C = \ln 2 - C_1$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right| - C_1 = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + \ln 2 - C_1 = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

Если $x < 0$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1+(1/x)+(1/x)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u+u^2}}\Bigg|_{u=1/x} = \ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + \ln 2 + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{(x+2)^2-4(x^2+x+1)}{x\left((x+2)+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}\right| + \ln 2 + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{3x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \ln 2 + C_1 =$$

$$= \ln 3 - \ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + \ln 2 + C_1 =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C,$$

где $C = \ln 3 + \ln 2 + C_1$.

Таким образом, независимо от знака x

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

Замечание. Если заранее знать ответ, то для проверки справедливости формулы (полученной для положительных значений аргумента) при отрицательных значениях x можно просто продифференцировать полученный результат и сравнить с подынтегральной функцией. Заметим, однако, что тождественные преобразования, которые необходимо проделать на этом пути, определяют объем работы, больший, чем при непосредственном вычислении интеграла.

1857. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

Пусть $x > 0$, тогда, с учетом решения задачи 1850, имеем

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}} = -\int \frac{\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u-u^2}}\bigg|_{u=1/x} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(1-2u)-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+u-u^2}}du = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u-u^2)}{\sqrt{1+u-u^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}} =$$

$$= \sqrt{1+u-u^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2u-1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}} + C.$$

Если $x < 0$, то

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u-u^2}}\Bigg|_{u=1/x} =$$

$$= -\sqrt{1+u-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2u-1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}} + C.$$

Объединяя эти два случая, получаем окончательно

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{|x|\sqrt{5}} + C.$$

1858. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Делая замену $u = x+1$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u+2}}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (1) при $u > 0$ с помощью замены $v = 1/u$:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u+2}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{2v^2-2v+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-v+\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(v-\frac{1}{2})}{\sqrt{(v-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|v-\frac{1}{2}+\sqrt{v^2-v+\frac{1}{2}}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-u+\sqrt{2u^2-4u+4}}{2u}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-u+\sqrt{2u^2-4u+4}}{u}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2 + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-u+\sqrt{2u^2-4u+4}}{u}\right| + C,$$

где $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln 2 + C_1$.

Если же $u < 0$, то та же замена дает

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u+2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{2v^2-2v+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - v + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(v-\frac{1}{2})}{\sqrt{(v-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| v - \frac{1}{2} + \sqrt{v^2 - v + \frac{1}{2}} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 - u - \sqrt{2u^2 - 4u + 4}}{2u} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{(2-u)^2 - (2u^2 - 4u + 4)}{2u(2 - u + \sqrt{2u^2 - 4u + 4})} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u}{2(2 - u + \sqrt{2u^2 - 4u + 4})} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 - u + \sqrt{2u^2 - 4u + 4}}{u} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 - u + \sqrt{2u^2 - 4u + 4}}{u} \right| + C,$$

где $C = C_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2$.

Таким образом, при любом знаке u

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 2u + 2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 - u + \sqrt{2u^2 - 4u + 4}}{u} \right| + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $u = x + 1$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right| + C.$$

1859. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

Делая замену $u = x - 1$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2u-1}}. \quad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1), с помощью замены $v = 1/u$. Пусть $u > 0$, используя решение задачи 1850, находим

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2u-1}} = -\int \frac{d(1/u)}{\sqrt{1+(2/u)-(1/u^2)}} =$$

$$-\int \frac{dv}{\sqrt{1+2v-v^2}} = -\arcsin\frac{2(v-1)}{\sqrt{8}} + C = \arcsin\frac{u-1}{u\sqrt{2}} + C.$$

Для случая $u < 0$, как нетрудно видеть, у результата надо изменить знак. Таким образом, при любом u

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2u-1}} = \arcsin\frac{u-1}{|u|\sqrt{2}} + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $u = x - 1$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}} + C.$$

1860. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

Делая замену $u = x + 2$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-2u-5}}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1) с помощью замены $v = 1/u$. Пусть $u > 0$, используя решение задачи 1850, находим

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-2u-5}} = -\int \frac{(1/u)d(1/u)}{\sqrt{1-(2/u)-(5/u^2)}} =$$

$$= -\int \frac{v\,dv}{\sqrt{1-2v-5v^2}} = \int \frac{\frac{1}{10}(-10v-2)+\frac{1}{5}}{\sqrt{1-2v-5v^2}}\,dv =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d(1-2v-5v^2)}{1-2v-5v^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{1-2v-5v^2}} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{1-2v-5v^2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{2+10v}{\sqrt{24}} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{u^2-2u-5}}{u} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{u+5}{u\sqrt{6}} + C.$$

Нетрудно видеть, что в случае $u < 0$ первое слагаемое в окончательном результате остается неизменным, а второе меняет знак:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-2u-5}} = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{1-2v-5v^2}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{1-2v-5v^2} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{2+10v}{\sqrt{24}} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{u^2-2u-5}}{u} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{u+5}{u\sqrt{6}} + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-2u-5}} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{u^2-2u-5}}{u} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{u+5}{|u|\sqrt{6}} + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $u = x + 2$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} +$$

$$+ \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}} + C.$$

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx.$

$$\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C.$$

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx.$

$$\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\right)+C=$$
$$\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)+C.$$

1863. $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,\mathrm{d}x.$

$$\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{u^2+2u-1}\,\mathrm{d}u\,\Bigg|_{u=x^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(u+1)^2-2}\,\mathrm{d}(u+1)=\frac{1}{2}\int\sqrt{v^2-2}\,\mathrm{d}v\,\Bigg|_{v=u+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{v}{2}\sqrt{v^2-2}-\ln\left|v+\sqrt{v^2-2}\right|\right]+C=$$
$$=\frac{u+1}{4}\sqrt{u^2+2u-1}-\frac{1}{2}\ln\left|u+1+\sqrt{u^2+2u-1}\right|+C=$$
$$=\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right|+C.$$

1864. $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}-$$
$$-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}. \quad (1)$$

Преобразуем последний интеграл в правой части формулы (1).

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-\frac{1}{2}(-2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x-x^2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=$$
$$=-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} - \sqrt{1+x-x^2}. \quad (3)$$

Согласно задаче 1850:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C_1. \quad (4)$$

Для вычисления другого интеграла предположим сначала, что $x > 0$, тогда, используя решение задачи 1850, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}(1/x)}{\sqrt{(1/x)^2+(1/x)-1}} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u-1}}\Bigg|_{u=1/x} = -\ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u-1}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right| + C_2 = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{2x}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + \ln 2 + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 + \ln 2$.

При $x < 0$ та же замена дает

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(1/x)}{\sqrt{(1/x)^2+(1/x)-1}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u-1}}\Bigg|_{u=1/x} = \ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u-1}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{1+x-x^2}}{2x}\right| + C_2 = \ln\left|\frac{(x+2)^2-4(1+x-x^2)}{2x(x+2+2\sqrt{1+x-x^2})}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{5x}{2(x+2+2\sqrt{1+x-x^2})}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + \ln\frac{5}{2} + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 + \ln(5/2)$.

Следовательно, независимо от знака x:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C_3. \qquad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3) и используя нечетность арксинуса, находим

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} -$$

$$- \ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C,$$

где $C = C_3 - \frac{1}{2}C_1$.

1865. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx.$

Рассмотрим случай $x > 0$. Используя решение задачи 1850, находим

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} =$$

$$= \int\frac{du}{\sqrt{u^2+2}}\Bigg|_{u=x-\frac{1}{x}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right| + C = \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

В правой части получилась четная функция, а под интегралом стоит нечетная функция. Отсюда следует, что полученный результат сохраняет свою силу и при $x < 0$. Следовательно, при всех x

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx = \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

Глава 3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 3.1. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то такая функция называется правильной дробью, в противном случае — неправильной. Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена («целой части») и правильной дроби. Это разложение легко получить методом деления «уголком». Процедура деления многочленов аналогична процедуре деления целых чисел, она достаточно проста и ее можно проиллюстрировать примером. Выделим целую часть и правильную дробь из рациональной функции

$$R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 9x + 2}{x^2 - x + 3}.$$

Для этого запишем процедуру деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 \quad - x^2 + 9x + 2 & x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3 - 2x^2 + 6x \qquad} & 2x + 1 \\
x^2 + 3x + 2 & \\
\underline{x^2 \quad - x + 3} & \\
4x - 1 &
\end{array}$$

На первом шаге сравниваем «старшие разряды» делимого и делителя. Они равны соответственно $2x^3$ и x^2. Делим $2x^3$ на x^2, получаем первую «цифру» частного $2x$. Затем умножаем $2x$ на делитель $x^2 - x + 3$ и результат записываем под делимым. После вычитания получаем первый остаток $x^2 + 3x + 2$.

На следующем шаге делим полученный остаток. Сравниваем «старшие разряды», теперь это x^2 и для делимого и для делителя. Их отношение равно 1. Записываем это число как вторую «цифру» частного. Снова умножаем 1 на $x^2 - x + 3$ и результат записываем под первым остатком. После вычитания получаем $4x - 1$. Степень этого многочлена меньше степени делителя, поэтому процедура деления заканчивается. В результате мы получили в частном $2x + 1$ и в остатке $4x - 1$. Следовательно,

$$R(x) = 2x + 1 + \frac{4x - 1}{x^2 - x + 3}.$$

Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и правильной дроби. Интегрирование многочлена не представляет труда, поэтому достаточно рассмотреть методы интегрирования правильной дроби. Основной метод, применяемый для вычисления интегралов от правильных дробей, это метод неопределенных коэффициентов. Он основан на том, что любую правильную дробь можно разложить в сумму простейших дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

с неопределенными коэффициентами A, B, C.

Вычисление интеграла, таким образом, сводится к написанию разложения правильной дроби на простейшие, нахождению неопределенных коэффициентов и интегрированию простейших дробей. Рассмотри эти этапы подробнее. Для того чтобы найти вид разложения правильной дроби

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

на простейшие, нужно разложить на множители знаменатель

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l \ldots (x^2 + px + q)^m (x^2 + rx + s)^n \ldots$$

(множители $x - a$, $x - b$, $\ldots$, а также $x^2 + px + q$, $x^2 + rx + s$, $\ldots$ должны быть различными, а дискриминанты квадратных трехчленов отрицательны). В этом случае каждому множителю вида $(x-a)^k$ отвечает группа слагаемых

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

а каждому множителю вида $(x^2+px+q)^m$ соответствует аналогичная группа

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

После того как разложение с неопределенными коэффициентами написано, в полученном равенстве освобождаются от знаменателя. Получается равенство многочленов с заданными и неопределенными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получают линейную систему уравнений. Если разложение выписано без ошибок, то эта система всегда имеет решение и притом единственное. Решив полученную систему, мы найдем все неопределенные коэффициенты.

Последний этап состоит в вычислении интегралов от простейших дробей. Интеграл с линейной функцией в знаменателе вычисляется без труда:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C, & n\neq 1,\\ A\ln|x-a|+C, & n=1.\end{cases}$$

Для вычисления интеграла от дроби другого вида сначала в числителе выделяют слагаемое, содержащее производную квадратного трехчлена:

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{B}{2}(2x+p)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}.$$

Первый из полученных интегралов вычисляется с помощью замены $t = x^2 + px + q$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-n)t^{n-1}} + C, & n \neq 1, \\ \ln|t| + C, & n = 1. \end{cases}$$

При $n = 1$ второй интеграл с помощью метода выделения полного квадрата сводится к табличному

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2},$$

где $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

При $n > 1$ для рассматриваемого интеграла можно вывести рекуррентное соотношение

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \frac{2x+p}{(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}} + \\ + \frac{2(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{n-1}},$$

применяя которое можно последовательно понижать степень квадратного трехчлена и свести вычисление интеграла к случаю $n = 1$. Вывод рекуррентного соотношения приведен в решении задачи 1921 (желающие могут прочитать решение этой задачи сейчас).

Метод неопределенных коэффициентов в принципе решает проблему интегрирования рациональных функций. Однако на практике часто встречаются ситуации, когда разложение на простейшие дроби содержит достаточно много коэффициентов. В этом случае решение получающихся систем становится утомительным занятием. Во многих разбираемых ниже задачах приводятся некоторые приемы, позволяющие уклониться от прямого решения систем и получить значения неопределенных коэффициентов более простым путем. Здесь мы только отметим интересную задачу Л. Д. Ландау для физиков-теоретиков на экзамене по теоретическому минимуму.

Задача 12. Пусть a, b, c — три различных числа. Вычислить устно интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Перейдем к применению метода неопределенных коэффициентов на практике. С помощью этого метода решаются задачи 1866–1889.

1866. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x.$

Равенство

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

дает

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2).$$

Полагая $x = 2$, $x = -5$, получаем $7 = 7A$, $-7 = -7B$, откуда $A = 1$, $B = 1$. Из разложения

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}$$

получаем

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

1867. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

Равенство

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

дает

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

Полагая $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, получаем $-1 = 2A$, $-2 = -B$, $-3 = 2C$, откуда $A = -1/2$, $B = 2$, $C = -3/2$. Из разложения

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}$$

получаем

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + C.$$

1868. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx.$

Выделяя целую часть рациональной функции, получаем

$$\frac{x^{10}}{x^2+x-2} = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 -$$

$$- 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x+342}{x^2+x-2}. \quad (1)$$

Равенство

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

дает

$$-341x + 342 = A(x-1) + B(x+2).$$

Полагая $x = -2$, $x = 1$, получаем $1024 = -3A$, $1 = 3B$, откуда $A = -1024/3$, $B = 1/3$.

Из разложения (1) и разложения

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2} = -\frac{1024}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} \quad (2)$$

находим

$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{3}{7}x^7 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{11}{5}x^5 - \frac{21}{4}x^4 +$$

$$+ \frac{43}{3}x^3 - \frac{85}{2}x^2 + 171x + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right| + C.$$

1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$

Выделяя целую часть рациональной функции, получаем

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}. \quad (1)$$

Равенство

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

дает

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

Полагая в этом равенстве последовательно $x=0$, $x=2$, $x=3$, получаем $1=6A$, $9=-2B$, $28=3C$, откуда $A=1/6$, $B=-9/2$, $C=28/3$. Из разложения (1) и разложения

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)} \tag{2}$$

получаем

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

1870. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

Выделяя целую часть рациональной функции, получаем

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}. \tag{1}$$

Равенство

$$\frac{5u+4}{u^2+5u+4}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u+4}$$

дает

$$5u+4=A(u+4)+B(u+1).$$

Полагая $u=-1$, $u=-4$, получаем $-1=3A$, $-16=-3B$, откуда $A=-1/3$, $B=16/3$. Следовательно,

$$\frac{5u+4}{u^2+5u+4}=-\frac{1}{3(u+1)}+\frac{16}{3(u+4)}.$$

Заменяя u на x^2, получаем

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}=-\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{16}{3(x^2+4)}. \tag{2}$$

Из разложений (1) и (2) находим

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = x + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{8}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$$

1871. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

Разложение знаменателя подынтегральной функции на множители имеет вид $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. Равенство

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

дает

$$x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2.$$

Полагая $x=1$, $x=-2$, получаем $1=3B$, $-2=9C$, откуда $B=1/3$, $C=-2/9$. Полагая $x=0$, находим $0=-2A+2B+C$, следовательно, $A=(2B+C)/2=2/9$. Из разложения

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)}$$

получаем

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}\,dx = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

1872. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

Равенство

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

дает

$$x^2+1 = A(x^2-1) + B(x-1) + C(x+1)^2.$$

Полагая $x=1$, $x=-1$ получаем $2=4C$, $2=-2B$, откуда $C=1/2$, $B=-1$. Полагая $x=0$, находим $1=-A-B+C$, следовательно, $A=-B+C-1=1/2$. Из разложения

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}$$

получаем

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C.$$

1873. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x.$

Подынтегральная функция

$$\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Равенство

$$\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

дает

$$x^2 = A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^2.$$

Полагая $x = 1$, $x = 2$, получаем $1 = B$, $4 = D$, откуда $B = 1$, $D = 4$. Полагая $x = 0$, $x = 3$, находим $0 = -4A + 4B - 2C + D$, $9 = 2A + B + 4C + 4D$, что дает

$$\begin{cases} 2A + C = 4, \\ A + 2C = -4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $A = 4$, $C = -4$. Из разложения

$$\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 = \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

получаем

$$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x = 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C =$$
$$= -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C.$$

1874. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Равенство

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \\ + \frac{D}{x+3} - \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3} \quad (1)$$

дает

$$1 = A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3 + \\ + D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2.$$

Полагая $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, получим $1 = 8A$, $1 = -C$, $1 = -2F$, откуда $A = 1/8$, $C = -1$, $F = -1/2$. Для определения других коэффициентов можно использовать степенную асимптотику подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

при $x \to -3$. Имеем

$$f_1(x) = f(x) - \frac{F}{(x+3)^3} = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} + \\ + \frac{1}{2(x+3)^3} = \frac{x^2+2x+2}{2(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^2+2x+2}{2(x+1)(x+2)^2} = -\frac{5}{4},$$

то

$$f_1(x) \sim -\frac{5}{4(x+3)^2}.$$

С другой стороны, из равенства (1) следует, что $f_1(x) \sim E/(x+3)^2$. Сравнивая эти асимптотики, находим величину $E = -5/4$.

Аналогично находится величина D, для этого надо учесть следующий член асимптотики. В самом деле:

$$f_2(x) = f(x) - \frac{E}{(x+3)^2} - \frac{F}{(x+3)^3} = f_1(x) - \frac{E}{(x+3)^2} =$$
$$= \frac{x^2+2x+2}{2(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)^2} =$$
$$= \frac{5x^2+12x+8}{4(x+1)(x+2)^2(x+3)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to-3} \frac{5x^2+12x+8}{4(x+1)(x+2)^2} = -\frac{17}{8},$$

то

$$f_2(x) \sim -\frac{17}{8(x+3)}.$$

С другой стороны, из равенства (1) следует, что $f_2(x) \sim$ $\sim D/(x+3)$. Сравнивая эти асимптотики, находим величину $D = -17/8$.

Осталось найти коэффициент B. Для этого можно использовать асимптотику $f(x)$ при $x \to -2$, но быстрее это можно сделать другим способом. Из явного вида подынтегральной функции следует, что

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = 0,$$

с другой стороны, из формулы (1) получаем

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = A + B + D.$$

Следовательно, $A + B + D = 0$, откуда находим $B = -A -$ $- D = 2$.

Из разложения

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} -$$
$$- \frac{17}{8(x+3)} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3}$$

получаем

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} -$$

$$- \frac{17}{8}\ln|x+3| + \frac{5}{4(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2} + C =$$

$$= \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C.$$

1875. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4-3x^3-2x^2+x+1}$.

Разложение знаменателя подынтегральной дроби имеет вид

$$x^5+x^4-3x^3-2x^2+x+1 = (x+1)^3(x-1)^2.$$

Поэтому подынтегральная функция $f(x)$ допускает разложение

$$f(x) = \frac{1}{x^5+x^4-3x^3-2x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}. \qquad (1)$$

Для определения коэффициентов разложения (1) можно использовать асимптотику подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}.$$

Так как при $x \to -1$ функция $f(x) \sim \dfrac{1}{4(x+1)^3}$, то $C = 1/4$, а так как при $x \to 1$ функция $f(x) \sim \dfrac{1}{8(x-1)^2}$, то $E = 1/8$.

Найдем два следующих члена асимптотики при $x \to -1$.

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{4(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^3} =$$

$$= \frac{-x^2+2x+3}{4(x+1)^3(x-1)^2} = \frac{3-x}{4(x+1)^2(x-1)^2} \sim \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

Отсюда получаем $B = 1/4$. Далее

$$f(x) - \frac{1}{4(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^2} = f_1(x) - \frac{1}{4(x+1)^2} =$$

$$= \frac{3-x}{4(x+1)^2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{x-2}{4(x+1)(x-1)^2} \sim \frac{3}{16(x+1)}.$$

Это дает $A = 3/16$.

Осталось определить один коэффициент D. Для этого вместо вычисления асимптотики проще положить в равенстве (1) $x = 0$, что дает $1 = A + B + C - D + E$ или $D = A + B + C + E - 1 = -3/16$. Из разложения

$$\frac{1}{x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3}{16(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} - \frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2}$$

получаем

$$\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{3}{16}\ln|x+1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} - \frac{3}{16}\ln|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + C =$$

$$= \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3x^2 + 3x - 2}{8(x-1)(x+1)^2} + C.$$

1876. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Разложение знаменателя подынтегральной дроби имеет вид

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4).$$

Поэтому подынтегральная функция $f(x)$ допускает разложение

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Это дает

$$(Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1) = x^2 + 5x + 4.$$

Полагая $x = i$, получим равенство $3(Ai + B) = 3 + 5i$. Отделяя здесь вещественную и мнимую части, находим $A = 5/3$, $B = 1$. Далее полагая $x = 2i$, получим $-3(2Ci + D) = 10i$, отделяя в этом равенстве вещественную и мнимую части, находим $C = -5/3$, $D = 0$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{5}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{5}{6}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \frac{5}{6}\ln(x^2+4) + C = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4} + C.$$

1877. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Равенство

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

дает

$$A(x^2 + 1) + (Bx + D)(x + 1) = 1.$$

Полагая $x = -1$, получим $2A = 1$, откуда $A = 1/2$. Полагая затем $x = 0$, находим соотношение $A + D = 1$, из которого вычисляем величину $D = 1 - A = 1/2$. Учитывая, что функция $xf(x)$ имеет нулевой предел на бесконечности, получаем равенство $A + B = 0$, следовательно, $B = -A = -1/2$ и

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C.$$

1878. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

Полагая $u = x^2 - 4x + 4$, находим, что

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{u(u+1)} =$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+5}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4} - \int \frac{dx}{x^2-4x+5} =$$
$$= \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} - \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} = -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

1879. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

Разложение

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

дает

$$A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2 = x. \quad (1)$$

Полагая $x = 1$, находим $5B = 1$ или $B = 1/5$. Число $x = i - 1$ является корнем уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, поэтому подстановка $x = i - 1$ в (1) дает

$$(C(i-1)+D)(i-2)^2 = i-1,$$
$$((D-C)+Ci)(3-4i) = -1+i,$$
$$(C+3D)+(7C-4D)i = -1+i.$$

Отсюда находим $C + 3D = -1$, $7C - 4D = 1$, что дает $C = -1/25$, $D = -8/25$. Положим в (1) $x = 0$, получим равенство

$$-2A + 2B + D = 0,$$

из которого находим $A = B + D/2 = 1/25$. Следовательно,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \\ - \frac{1}{25}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Интеграл

$$\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+7}{x^2+2x+2} = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 7\,\mathrm{arctg}(x+1) + C_1. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем окончательно

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = -\frac{1}{5(x-1)} + \\ + \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25}\,\mathrm{arctg}(x-1) + C.$$

1880. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

Пусть

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$$

Разложение

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x+x^2} \quad (1)$$

дает

$$A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(1+x) = 1. \quad (2)$$

Полагая в (2) последовательно $x = 0$ и $x = -1$, находим $A = 1$, $B = -1$. Из определения функции f следует, что

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0.$$

С другой стороны, из (1) получаем, что этот предел равен $A+B+C$. Таким образом, $A+B+C=0$ и $C=-A-B=0$. Подставляя в (2) $x=1$, приходим к равенству $6A+3B+2C+$ $+2D=1$, которое дает $D=-1$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} =$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2} =$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1881. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Пусть

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

Равенство $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ позволяет написать разложение

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}, \tag{1}$$

которое дает тождество

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1. \tag{2}$$

При $x=-1$ из этого тождества получаем $3A=1$, что дает $A=1/3$. Из определения функции f следует, что

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0.$$

С другой стороны, из (1) получаем, что этот предел равен $A+B$. Таким образом $A+B=0$ и $B=-A=-1/3$. Полагая в (2) $x=0$, получаем равенство $A+C=1$, из которого находим $C=1-A=2/3$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx. \tag{3}$$

Так как

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} -$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

то из (3) находим

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1882. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

Равенство $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ позволяет написать разложение

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

которое дает тождество

$$(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C = x.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0 \end{cases}$$

находим $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=1/3$. Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Так как

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} -$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

то

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1883. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$.

Имеем цепочку равенств

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x^2+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Отсюда находим интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1884. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

С помощью формулы квадрата разности получаем цепочку равенств

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x) =$$
$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Это позволяет написать разложение

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

и получить тождество

$$(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1) = 1,$$

которое после приведения подобных членов принимает вид

$$(A+C)x^3 + (B+D+\sqrt{2}(C-A))x^2 + \\ + (A+C+\sqrt{2}(D-B))x + (B+D) = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D+\sqrt{2}(C-A)=0, \\ A+C+\sqrt{2}(D-B)=0, \\ B+D=1, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx.$$

Вычислим оставшиеся интегралы:

$$\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + C_1.$$

$$\int \frac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right) + C_2.$$

Таким образом, искомый интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) \right) + C.$$

Полученый ответ можно упростить, если использовать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab} + \pi k, \qquad (1)$$

где $k = 0$, если $ab < 1$; $k = 1$, если $ab > 1$ и $a > 0$, $b > 0$; $k = -1$, если $ab > 1$ и $a < 0$, $b < 0$. Из этой теоремы следует, что

$$\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C_3.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

Замечание. Если отвлечься от метода неопределенных коэффициентов, то результат можно получить быстрее. В самом деле:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx - \int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx \right),$$

а интегралы, входящие в правую часть последнего равенства, вычислены в задачах 1712 и 1713.

1885. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

С помощью формулы квадрата разности получаем цепочку равенств

$$x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x) = \\ = (x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Это позволяет написать разложение

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

и получить тождество

$$(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)=1,$$

которое после приведения подобных членов принимает вид

$$(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+(B+D)=1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A+B+C+D=0, \\ A-B+C+D=0, \\ B+D=1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2}, \quad D=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Вычислим оставшиеся интегралы:

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Таким образом, искомый интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Полученый ответ можно упростить, если использовать теорему вычитания арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+ab} + \pi k, \qquad (1)$$

где $k = 0$, если $ab > -1$; $k = 1$, если $ab < -1$ и $a > 0$, $b < 0$; $k = -1$, если $ab < -1$ и $a < 0$, $b > 0$.

Из этой теоремы следует, что

$$\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C_3.$$

Последнее выражение также можно преобразовать:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C_3 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C_3 =$$

$$= -\operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C_3 + \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C_4 =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}} + C_5 =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C_5,$$

где $C_4 = C_3 + \pi/2$.

Окончательно получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C.$$

1886. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

Разложение на элементарные дроби удобно провести, вводя промежуточную переменную $u = x^2$ и используя разложение задачи 1881:

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{1}{3(u+1)} - \frac{u-2}{3(u^2-u+1)} =$$
$$= \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

Разложение на множители многочлена $x^4 - x^2 + 1$ можно получить, используя формулу разности квадратов:

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - 3x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{3}x)^2 =$$
$$= (x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x) = (x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1).$$

Теперь находим разложение

$$\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Приводя слагаемые к общему знаменателю, получим

$$(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1) = x^2 - 2.$$

После приведения подобных членов приходим к равенству

$$(A+C)x^3 + (-A\sqrt{3} + B + C\sqrt{3} + D)x^2 +$$
$$+ (A - B\sqrt{3} + C + D\sqrt{3})x + (B+D) = x^2 - 2,$$

которое дает систему

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -A\sqrt{3} + B + C\sqrt{3} + D = 1, \\ A - B\sqrt{3} + C + D\sqrt{3} = 0, \\ B + D = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$A = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad D = -1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{x\sqrt{3}+2}{6(x^2+x\sqrt{3}+1)} - \frac{x\sqrt{3}-2}{6(x^2-x\sqrt{3}+1)}.$$

Так как

$$\int \frac{x\sqrt{3}+2}{x^2+x\sqrt{3}+1}\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d(x^2+x\sqrt{3}+1)}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x^2+x\sqrt{3}+1) + \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + C_1$$

и

$$\int \frac{x\sqrt{3}-2}{x^2-x\sqrt{3}+1}\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d(x^2-x\sqrt{3}+1)}{x^2-x\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x^2-x\sqrt{3}+1) - \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) + C_2,$$

то

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln(x^2+x\sqrt{3}+1) +$$
$$+ \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln(x^2-x\sqrt{3}+1) +$$
$$+ \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) + C_3, \quad (1)$$

где $C_3 = (C_1 - C_2)/6$.

Полученное выражение можно упростить, используя теорему сложения арктангенсов (см. решение задачи 1884). Согласно этой теореме:

$$\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2} + C_4. \quad (2)$$

Используя теорему вычитания арктангенсов (см. решение задачи 1885, формула (1)), получаем

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}-\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}x^3+C_5. \tag{3}$$

Используя (1), (2) и (3), находим

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+$$

$$+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})+C_3=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}+C_4\right)+C_3=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}+C_4\right)+C_3=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}-\operatorname{arctg}x\right)+\frac{1}{6}C_4+C_3=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}(\operatorname{arctg}x^3+C_5)+\frac{1}{6}C_4+C_3.$$

Полагая $C=C_3+(C_5+C_6)/6$, окончательно имеем

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C.$$

1887. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

Обозначим

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$$

По формуле суммы кубов $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$, поэтому

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)=(1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2),$$

следовательно,

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \\ + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{1-x+x^2}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем тождество

$$A(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2) + B(1+x^2)(1-x+x^2) + \\ + (Cx+D)(1+x)^2(1-x+x^2) + \\ + (Ex+F)(1+x)^2(1+x^2) = 1. \quad (1)$$

Полагая в равенстве (1) $x = -1$, находим $B = 1/6$, а подставляя значение $x = i$, получаем соотношение $2(Ci + D) = 1$. Отделяя здесь вещественную и мнимую части, получаем $C = 0$ и $D = 1/2$. Для нахождения коэффициента A можно поступить следующим образом. Величина A определяет первый член асимптотики функции $f(x)$ при $x \to -1$, а величина B — второй член асимптотики этой функции. Вычитая из функции f известный второй член, получаем, что при $x \to -1$

$$f(x) - \frac{1}{6(1+x)^2} = \frac{-x^3+2x^2-4x+5}{6(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2)} \sim \frac{1}{3(1+x)}$$

и в силу единственности коэффициента степенной асимптотики величина $A = 1/3$. Из определения функции f непосредственно следует, что

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0.$$

С другой стороны, из вида разложения $f(x)$ в сумму элементарных дробей следует, что этот предел равен $A + C + E$. Это дает соотношение $A + C + E = 0$, из которого находим $E = -A - C = -1/3$. Наконец, положив в равенстве (1) $x = 0$, получаем $A + B + D + F = 1$. Таким образом, $F = 1 - A - B - D = 0$ и все коэффициенты разложения f в сумму элементарных дробей определены:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{6}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{3}, \quad F = 0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6(1+x)} + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{1-x+x^2}.$$

Вычислим оставшийся интеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{1-x+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{1-x+x^2} = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x+x^2)}{1-x+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \\ = \frac{1}{2}\ln(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln(1-x+x^2) = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2},$$

и обозначая $C = -C_1/3$, получаем окончательно

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = -\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1888. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Выделяя множитель $x-1$, получаем

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^4+x^2+1).$$

Согласно решению задачи 1885:

$$x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

поэтому

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Это позволяет написать разложение

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Из этого разложения получаем тождество

$$(A+B+D)x^4 + (-2B+C+E)x^3 + (A+2B-2C)x^2 + \\ + (-B+2C-D)x + (A-C-E) = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ -2B+C+E=0, \\ A+2B-2C=0, \\ -B+2C-D=0, \\ A-C-E=1, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1889. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

Найдем разложение знаменателя в произведение двух квадратных трехчленов:

$$x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Так как

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+\\ +(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd,$$

то для нахождения разложения необходимо решить систему:

$$\begin{cases} a+c=3, \\ b+ac+d=\dfrac{9}{2}, \\ bc+ad=3, \\ bd=1. \end{cases}$$

Исключим с помощью первого и последнего уравнения переменные c и d, подставляя $c=3-a$ и $d=1/b$ во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} 2b^2+6ab-2a^2b+2-9b=0, \\ 3b^2-ab^2+a-3b=0. \end{cases}$$

Группируя во втором уравнении первое слагаемое с последним, а второе с третьим, получаем $3b(b-1)=a(b^2-1)$. Это соотношение показывает, что возможны два случая: 1) $b=1$ и 2) $3b=a(b+1)$. В первом случае первое уравнение системы дает $2a^2-6a+5=0$. Дискриминант полученного уравнения отрицателен, и оно решений не имеет. Во втором случае получаем соотношение $a=3b/(b+1)$. Исключая с его помощью a из первого уравнения, получаем для b уравнение четвертой степени:

$$2b^4-5b^3+4b^2-5b+2=0.$$

Это симметрическое уравнение имеет корни $b=2$ и $b==1/2$, что позволяет разложить левую часть уравнения на множители и получить уравнение

$$(b-2)(2b-1)(b^2+1)=0.$$

Таким образом, $b = 2$, или $b = 1/2$. В результате получаем два решения:

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = \frac{1}{2}$$

и

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 2, \quad d = 2.$$

Оба они отвечают одному разложению

$$x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1 = (x^2 + 2x + 2)\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right).$$

Теперь можно написать представление подынтегральной функции в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{x^2}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + \frac{1}{2}}.$$

Из этого представления получаем тождество

$$(Ax + B)\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2) = x^2$$

и после приведения подобных членов — систему уравнений

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A + B + 2C + D = 1, \\ A + 2B + 4C + 4D = 0, \\ B + 4D = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = \frac{12}{5}, \quad C = -\frac{4}{5}, \quad ,D = -\frac{3}{5}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} =$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int \frac{4x + 3}{x^2 + x + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Вычислим оставшиеся интегралы.

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\,\mathrm{arctg}(x+1) + C_1.$$

$$\int \frac{4x+3}{x^2+x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2x+1)+1}{x^2+x+\frac{1}{2}} =$$
$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+\frac{1}{2})}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} =$$
$$= 2\ln(x^2+x+\frac{1}{2}) + 2\,\mathrm{arctg}(2x+1) + C_2.$$

Обозначая $C = (4C_1 - C_2)/5$, окончательно имеем

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1} = \frac{2}{5}\ln(x^2+2x+2) + \frac{8}{5}\mathrm{arctg}(x+1) -$$
$$- \frac{2}{5}\ln(x^2+x+\frac{1}{2}) - \frac{2}{5}\mathrm{arctg}(2x+1) + C =$$
$$= \frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{2}{5}\mathrm{arctg}(2x+1) + C.$$

§ 3.2. МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО

Метод Остроградского, с помощью которого решаются задачи 1890–1902, представляет собой разновидность метода неопределенных коэффициентов. Он эффективен в том случае, когда знаменатель рациональной функции имеет кратные корни. Рассмотрим правильную дробь

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

и разложение знаменателя

$$Q(x) = (x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+rx+s)^n\ldots$$

По многочлену $Q(x)$ составляем два других многочлена. У первого из них $Q_1(x)$ все множители имеют степень на 1 меньше, чем в $Q(x)$:

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}(x-b)^{l-1}\dots(x^2+px+q)^{m-1}(x^2+rx+s)^{n-1}\dots$$

(если некоторый множитель входит в многочлен $Q(x)$ в первой степени, то в многочлен $Q_1(x)$ он входить не будет). Второй многочлен $Q_2(x)$ содержит те же множители, но в первой степени каждый:

$$Q_2(x)=(x-a)(x-b)\dots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\dots$$

Можно показать, что справедливо разложение

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — некоторые многочлены, степени которых на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно.

Метод Остроградского заключается в том, что мы записываем многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами. Затем вычисляем эти неопределенные коэффициенты и интеграл, стоящий в правой части равенства. В этом последнем интеграле стоит более простая рациональная функция, чем в исходном интеграле, и поэтому его вычислять проще.

Для нахождения неопределенных коэффициентов можно продифференцировать написанное равенство. В результате мы приходим к следующему тождеству:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1'(x)Q_1(x)-P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Приводя обе части этого равенств к общему знаменателю и освобождаясь от него, мы приходим к равенству двух многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (как и в случае обычного метода неопределенных коэффициентов), мы получаем линейную систему уравнений для определения неизвестных величин. Решая эту систему, находим сами неопределенные коэффициенты.

Так как в знаменателе дроби, стоящей под интегралом, все множители многочлена $Q_2(x)$ входят только в первой степени, то обычно удобнее вместо дроби $P_2(x)/Q_2(x)$ (с неопределенными коэффициентами в многочлене $P_2(x)$) сразу записывать ее разложение на простейшие:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)} + \frac{Ex+F}{(x^2+rx+s)} + \ldots\right)\mathrm{d}x.$$

Вопрос интегрирования простейших дробей изучался в самом начале главы. Там было показано, что в рассматриваемом нами случае интеграл дает функции, выражающиеся исключительно через логарифмы и арктангенсы. Поэтому слагаемое $P_1(x)/Q_1(x)$ представляет собой то, что называют рациональной частью первоначального интеграла. В этой связи метод Остроградского часто называют методом выделения рациональной (алгебраической) части интеграла. В частности, метод Остроградского позволяет ответить на вопрос, будет ли интеграл от рациональной функции также являться рациональной функцией. Для этого достаточно определить только коэффициенты, относящиеся к дроби $P_2(x)/Q_2(x)$, и проверить, равны они нулю или нет.

1890. При каком условии интеграл

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя метод Остроградского, найдем разложение:

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2(x-1)} + \int \frac{Ax+B}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получим тождество

$$Ax^4+(-A+B-\alpha)x^3+(-B-2\beta)x^2+(\beta-3\gamma)x+2\gamma = ax^2+bx+c.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A = 0, \\ -A + B - \alpha = 0, \\ -B - 2\beta = a, \\ \beta - 3\gamma = b, \\ 2\gamma = c, \end{cases}$$

находим

$$A = 0, \quad B = -a - 2b - 3c, \quad \alpha = -a - 2b - 3c,$$
$$\beta = \frac{3c}{2} + b, \quad \gamma = \frac{c}{2}.$$

Условие рациональности интеграла состоит в системе равенств

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 0 \end{cases}$$

и, следовательно, равносильно условию $a + 2b + 3c = 0$.

Ответ: $a + 2b + 3c = 0$.

Применяя метод Остроградского, найти интегралы:

1891. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Найдем разложение

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1} \right) dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$(D+E)x^4 + (2D-A)x^3 + (A-2B-2E)x^2 + \\ + (B-2A-3C-2D)x + (C+E-B-D) = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} D + E = 0, \\ 2D - A = 0, \\ A - 2B - 2E = 0, \\ B - 2A - 3C - 2D = 1, \\ C + E - B - D = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A = -\frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = -\frac{1}{16}, \quad E = \frac{1}{16}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\ln|x-1| + \frac{1}{16}\ln|x+1| + C =$$
$$= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

1892. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, то, согласно методу Остроградского, ищем разложение:

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+1} + \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right) dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$(A+B)x^5 + (B-A+C-a)x^4 + (A+C-2b)x^3 +$$
$$+ (A+B-3c)x^2 + (B-A+C+2a)x + (A+C+b) = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получаем систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B-A+C-a=0, \\ A+C-2b=0, \\ A+B-3c=0, \\ B-A+C+2a=0, \\ A+C+b=1. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = 0, \quad A = \frac{2}{9}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{4}{9}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Интеграл

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Полагая $C = -2C_1/9$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} +$$

$$+ \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1893. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

В соответствии с методом Остроградского, ищем разложение:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,dx.$$

Из четности подынтегральной функции следует, что $B = 0$, $D = 0$, $E = 0$. Это позволяет упростить разложение:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Cx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{F}{x^2+1}\,dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$(F-A)x^4+(3A-3C+2F)x^2+(C+F)=1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получаем систему

$$\begin{cases} F-A=0, \\ 3A-3C+2F=0, \\ C+F=1. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A=\frac{3}{8},\quad C=\frac{5}{8},\quad F=\frac{3}{8}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

1894. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Ищем разложение

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\int\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Дифференцируя и освобождаясь от знаменателя, получаем

$$Cx^3+(D-A+2C)x^2+(2D-2B+2C)x+(2A-2B+2D)=x^2.$$

Это дает систему

$$\begin{cases} C=0, \\ D-A+2C=1, \\ 2D-2B+2C=0, \\ 2A-2B+2D=0 \end{cases}$$

с решением

$$A=0,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=1.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

1895. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

Ищем разложение

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1} + \int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Из четности подынтегральной функции следует, что коэффициенты $B=0$, $D=0$, $a=0$, $c=0$. Поэтому разложение можно переписать в более простом виде:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2} = \frac{Ax^3+Cx}{x^4+1} + \int \frac{bx^2+d}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$(b-A)x^6 + (d-3C)x^4 + (3A+b)x^2 + (C+d) = 1,$$

которое приводит к системе

$$\begin{cases} b-A=0,\\ d-3C=0,\\ 3A+b=0,\\ C+d=1. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A=0, \quad C=\frac{1}{4}, \quad b=0, \quad d=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, искомый интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$

Согласно решению задачи 1884:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \\ + \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

1896. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\, dx.$

Ищем разложение:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\, dx = \\ = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \left(\frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \right) dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$(C+D)x^4 + (2C+E-A)x^3 + (A-2B+3C)x^2 + \\ + (A+B+2C-D)x + (B-A+C-E) = x^2+3x-2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C+D=0, \\ 2C+E-A=0, \\ A-2B+3C=1, \\ A+B+2C-D=3, \\ B-A+C-E=-2, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{5}{3}, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=\frac{2}{9}, \quad D=-\frac{2}{9}, \quad E=\frac{11}{9}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \\ + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\int \frac{2x-11}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Вычислим оставшийся интеграл:

$$\int \frac{2x-11}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2x+1)-12}{x^2+x+1} = \\ = \int \frac{2x-11}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - 12\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \\ = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 12\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \\ = \ln(x^2+x+1) - \frac{24}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Искомый интеграл:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \\ + \frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1897. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

Ищем разложение:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3} = \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^4-1)^2} + \\ + \int\left(\frac{ax+b}{x^2-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$$

Из четности подынтегральной функции следует, что

$$B=0,\quad D=0,\quad F=0,\quad a=0,\quad c=0.$$

Это упрощает разложение, и оно принимает следующий вид:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{Ax^5+Cx^3+Ex}{(x^4-1)^2} + \int \left(\frac{b}{x^2-1} + \frac{d}{x^2+1}\right) dx.$$

Дифференцируя разложение и приводя подобные члены, получаем

$$(b+d)x^{10} + (b-d-3A)x^8 + (-2b-2d-5C)x^6 +$$
$$+(-2b+2d-7E-5A)x^4 + (b+d-3C)x^2 + (b-d-E) = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} b+d=0, \\ b-d-3A=0, \\ -2b-2d-5C=0, \\ -2b+2d-7E-5A=0, \\ b+d-3C=0, \\ b-d-E=1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{7}{32}, \quad C=0, \quad E=-\frac{11}{32}, \quad b=\frac{21}{64}, \quad d=-\frac{21}{64}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{64}\int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{21}{64}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg} x + C.$$

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

1898. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx.$

Согласно методу Остроградского, ищем разложение:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} +$$
$$+\int \frac{ax^3+bx^2+c+d}{x^4+x^2+1}\,dx.$$

Внеинтегральный член этого разложения представляет искомую алгебраическую часть интеграла. Из четности подынтегральной функции следует, что

$$B = 0, \quad D = 0, \quad a = 0, \quad c = 0.$$

Таким образом, разложение упрощается:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^3+Cx}{x^4+x^2+1} + \int \frac{bx+d}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Дифференцируя и приводя подобные члены, получаем

$$(b-A)x^6+(b+d+A-3C)x^4+(d+b-C+3A)x^2+(d+C) = x^2+1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} b-A=0, \\ b+d+A-3C=0, \\ d+b-C+3A=1, \\ d+C=1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{1}{6}, \quad C=\frac{1}{3}, \quad b=\frac{1}{6}, \quad d=\frac{2}{3}.$$

Ответ: **алгебраическая часть интеграла равна**

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$$

1899. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

Согласно методу Остроградского, ищем разложение:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2} + \\ + \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Внеинтегральный член этого разложения представляет искомую алгебраическую часть интеграла. Для нахождения коэффициентов разложения продифференцируем написанное равенство и приведем слагаемые к общему знаменателю. Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем

$$ax^8+(b-A)x^7+(c+2a-2B)x^6+(2b-3C+3A+2a)x^5+$$
$$+(a+2b+2c+2B-4D+5A)x^4+(b+2a+2c+4B+C-5E)x^3+$$
$$+(a+2b+c+3C+6F)x^2+(b+2c-E+2D)x+(c+E-2F)=1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a=0, \\ b-A=0, \\ c+2a-2B=0, \\ 2b-3C+3A+2a=0, \\ a+2b+2c+2B-4D+5A=0, \\ b+2a+2c+4B+C-5E=0, \\ a+2b+c+3C+6F=0, \\ b+2c-E+2D=0, \\ c+E-2F=1, \end{cases}$$

находим

$$A=-\frac{243}{65},\quad B=\frac{357}{130},\quad C=-\frac{81}{13},\quad D=-\frac{63}{26},$$
$$E=\frac{12}{5},\quad F=\frac{224}{65},$$
$$a=0,\quad b=-\frac{243}{65},\quad c=\frac{357}{65}.$$

Ответ: алгебраическая часть интеграла равна

$$-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x-448}{130(x^3+x+1)^2}.$$

1900. $\displaystyle\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

Согласно методу Остроградского, ищем разложение:

$$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+$$
$$+\int\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^5+x+1}\,dx.$$

После дифференцирования, отбрасывания знаменателя и приведения подобных членов получаем

$$ax^9 + (b-A)x^8 + (c-2B)x^7 + (d-3C)x^6 + (e+a-4D)x^5 +$$
$$+ (a+b+3A-5E)x^4 + (c+b+2B+4A)x^3 +$$
$$+ (d+c+C+3B)x^2 + (e+d+2C)x + (e+D-E) = 4x^5 - 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a = 0, \\ b - A = 0, \\ c - 2B = 0, \\ d - 3C = 0, \\ e + a - 4D = 4, \\ a + b + 3A - 5E = 0, \\ c + b + 2B + 4A = 0, \\ d + c + C + 3B = 0, \\ e + d + 2C = 0, \\ e + D - E = -1, \end{cases}$$

находим

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -1,$$
$$E = 0, \quad a = 0, \quad b = 0,$$
$$c = 0, \quad d = 0, \quad e = 0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\, dx = -\frac{x}{x^5 + x + 1} + C.$$

Ответ: алгебраическая часть интеграла равна

$$-\frac{x}{x^5 + x + 1}.$$

1901. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

Знаменатель подынтегральной функции является симметрическим многочленом. Используя это, можно получить его разложение на множители:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = x^2\left(x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= x^2\left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right) =$$

$$= x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right) =$$

$$= x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right) =$$

$$= x^2\left(\left((x + \frac{1}{x}\right) + 1\right)^2 = (x^2 + x + 1)^2.$$

В соответствии с методом Остроградского, можно написать разложение

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 2}\,dx.$$

Дифференцируя последнее равенство, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем

$$Cx^3 + (D + C - A)x^2 + (D + C - 2B)x + (A - B + D) = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C = 0, \\ D + C - A = 0, \\ D + C - 2B = 1, \\ A - B + D = 1, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

Так как

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \\ = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1902. При каком условии интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,\mathrm{d}x$$

представляет собой рациональную функцию?

Рассмотрим различные варианты:

1) $a=0$, $b=0$. В этом случае интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\alpha}{c^2}x^2+\frac{2\beta}{c^2}x+\frac{\gamma}{c^2}\right)\mathrm{d}x = \\ = \frac{\alpha}{3c^2}x^3+\frac{\beta}{c^2}x^2+\frac{\gamma}{c^2}x+C$$

и представляет рациональную функцию.

2) $a=0$, $b\neq 0$. Несложно проверить, что при этих условиях

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma = \lambda(2bx+c)^2+\mu(2bx+c)+\nu,$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha}{4b^2}, \quad \mu = \frac{2b\beta-\alpha c}{2b^2}, \quad \nu = \frac{4b^2\gamma-4\beta bc+\alpha c^2}{4b^2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\mathrm{d}x = \int\left(\lambda+\frac{\mu}{2bx+c}+\frac{\nu}{(2bx+c)^2}\right)\mathrm{d}x = \\ = \lambda x+\frac{\mu}{2b}\ln|2bx+c| - \frac{\nu}{2b(2bx+c)}+C,$$

и интеграл рационален тогда и только тогда, когда $\mu = 0$, т. е. $\alpha c = 2\beta b$.

3) $a \neq 0$, $b^2 - ac = 0$. В данном случае квадратный трехчлен в знаменателе является полным квадратом:

$$ax^2+2bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{ac}{a^2}\right)=$$
$$=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{(ax+b)^2}{a}.$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma=A(ax+b)^2+B(ax+b)+C,$$

где

$$A=\frac{\alpha}{a^2},\quad B=\frac{2(a\beta-b\alpha)}{a^2},\quad C=\frac{a^2\gamma+b^2\alpha-2ab\beta}{a^2}.$$

Таким образом, в данном случае, рассматриваемый интеграл

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx=\int\frac{a^2(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}{(ax+b)^4}\,dx=$$
$$=a^2\int\frac{A(ax+b)^2+B(ax+b)+C}{(ax+b)^4}\,dx=$$
$$=a^2\int\left(\frac{A}{(ax+b)^2}+\frac{B}{(ax+b)^3}+\frac{C}{(ax+b)^4}\right)dx=$$
$$=-\frac{aA}{ax+b}-\frac{aB}{2(ax+b)^2}-\frac{aC}{3(ax+b)^3}+\mathrm{const}$$

является рациональной функцией.

1. $a \neq 0$, $b^2 - ac \neq 0$. Применяя метод Остроградского, найдем разложение

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx=\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}+\int\frac{\mu x+\nu}{ax^2+2bx+c}\,dx.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем

$$\mu ax^3+(\nu a+2b\mu-Aa)x^2+(2b\nu+c\mu-2Ba)x+$$
$$+(\nu c+Ac-2bB)=\alpha x^2+2\beta x+\gamma.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \mu = 0, \\ \nu a + 2b\mu - Aa = \alpha, \\ 2b\nu + c\mu - 2Ba = 2\beta, \\ \nu c + Ac - 2bB = \gamma, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{2ab\beta - a^2\gamma - 2b^2\alpha + ac\alpha}{2a(b^2 - ac)}, \quad B = \frac{2ac\beta - ab\gamma - bc\alpha}{2a(b^2 - ac)},$$

$$\mu = 0, \quad \nu = \frac{2b\beta - a\gamma - c\alpha}{2(b^2 - ac)}.$$

Рассматриваемый интеграл представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда $\mu = 0$ и $\nu = 0$, что равносильно условию $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$.

Ответ: интеграл является рациональной функцией в следующих случаях:

1. $a = 0$, $b = 0$.
2. $a = 0$, $b \neq 0$, $c\alpha = 2b\beta$.
3. $a \neq 0$, $b^2 - ac = 0$.
4. $a \neq 0$, $b^2 - ac \neq 0$, $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$.

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:

1903. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx.$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx = \int \frac{((x-1)+1)^3}{(x-1)^{100}}\,dx =$$

$$= \int \frac{(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^{100}}\,dx =$$

$$= \int \left((x-1)^{-97} + 3(x-1)^{-98} + 3(x-1)^{-99} + (x-1)^{-100}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.$$

1904. $\displaystyle\int \frac{x}{x^8 - 1}\,dx.$

Делая замену $u = x^2$, получаем

$$\int \frac{x}{x^8 - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^4 - 1}.$$

Согласно решению задачи 1883:

$$\int \frac{du}{u^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C,$$

Подставляя x^2 вместо u и заменяя $C/2$ на C, получаем

$$\int \frac{x}{x^8-1}\,dx = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

1905. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$.

Делая замену $u = x^4$, получаем

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \\ = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}} + C.$$

1906. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$.

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2dx}{x^6+1} + \int \frac{x\,dx}{x^6+1}.$$

В первом интеграле сделаем замену $u = x^3$:

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C_1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C_1.$$

Во втором интеграле сделаем замену $v = x^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^3+1}.$$

Согласно решению задачи 1881:

$$\int \frac{dv}{v^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(v+1)^2}{v^2-v+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{x\,dx}{x^6+1} = \frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}C_2.$$

Обозначая $C = C_1 + C_2/2$, получаем окончательно

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + \\ + \frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1907. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \\ = \int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)}. \quad (1)$$

В первом интеграле делаем замену $u = x^4$:

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3u+2} = \\ = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\ln|u+1| - \ln|u+2|) + C_1 = \\ = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u+2}\right| + C_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{x^4+2} + C_1. \quad (2)$$

Перейдем теперь ко второму интегралу. С помощью промежуточной переменной $t \doteq x^4$ получаем разложение на множители:

$$x^8 + 3x^4 + 2 = t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2) = (x^4+1)(x^4+2).$$

Аналогично получаем разложение на элементарные дроби функции:

$$\frac{1}{x^8+3x^4+2} = \frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{x^4+1} - \frac{1}{x^4+2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)} = \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^4+1} - \frac{1}{x^4+2}\right)\mathrm{d}x = \\ = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+2)}. \quad (3)$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (3). В первом интеграле делаем замену $u = 1/x^4$:

$$\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = \int \frac{dx}{x^5(1+\frac{1}{x^4})} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|u+1| + C_2 = -\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^4}{x^4} + C_2.$$

Во втором интеграле делаем аналогичную замену $v = 2/x^4$:

$$\int \frac{dx}{x(x^4+2)} = \int \frac{dx}{x^5(1+\frac{2}{x^4})} = -\frac{1}{8}\int \frac{dv}{1+v} =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|v+1| + C_3 = -\frac{1}{8}\ln\frac{x^4+2}{x^4} + C_3.$$

С помощью (1), (2) и (3) получаем окончательно

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{x^4+2} + \frac{3}{4}\ln\frac{x^4+1}{x^4} -$$

$$-\frac{3}{8}\ln\frac{x^4+2}{x^4} + C = \frac{1}{8}\ln\frac{(x^4+1)^8}{(x^4+2)^5x^{12}} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x^{20}}{(x^4+2)^5} : \frac{x^{32}}{(x^4+1)^8}\right) + C =$$

$$= \frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2} - \ln\frac{x^4}{x^4+1} + C.$$

1908. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$.

Делая замену $u = x^5$, получаем

$$\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{(u^2-10)^2}. \qquad (1)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства (1), применим метод Остроградского. Найдем разложение

$$\int \frac{du}{(u^2-10)^2} = \frac{Au+B}{u^2-10} + \int \frac{Cu+D}{u^2-10}\,du.$$

После дифференцирования и упрощений получаем тождество

$$Cu^3 + (D-A)u^2 + (-2B-10C)u + (-10A-10D) = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C = 0, \\ D - A = 0, \\ -2B - 10C = 0, \\ -10A - 10D = 1, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{20}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{20}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{du}{(u^2-10)^2} = \frac{u}{20(10-u^2)} + \frac{1}{20}\int \frac{du}{10-u^2} =$$

$$= \frac{u}{20(10-u^2)} + \frac{1}{40\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\sqrt{10}+u}{\sqrt{10}-u}\right| + C_1.$$

Подставляя полученный результат в (1), учитывая равенство $u = x^5$ и полагая $C = C_1/5$, находим

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{10-x^{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x^5+\sqrt{10}}{x^5-\sqrt{10}}\right|\right) + C.$$

1909. $\displaystyle\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

После замены $u = x^4$ получаем

$$\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2} = \frac{1}{4}\int \frac{u^2 du}{u^2+3u+2}.$$

Выделяя из подынтегральной функции целую часть, находим

$$\frac{u^2}{u^2+3u+2} = 1 - \frac{3u+2}{u^2+3u+2}.$$

Знаменатель дроби $u^2 + 3u + 2 = (u+1)(u+2)$, поэтому разложение на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$\frac{3u+2}{u^2+3u+2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и упрощая, имеем тождество

$$(A+B)u + (2A+B) = 3u + 2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 2A + B = 2, \end{cases}$$

находим

$$A = -1, \quad B = 4.$$

Следовательно,

$$\int \frac{u^2 \mathrm{d}u}{u^2 + 3u + 2} = \int \left(1 + \frac{1}{u+1} - \frac{4}{u+2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= u + \ln|u+1| - 4|u+2| + C_1 = u + \ln\left|\frac{u+1}{(u+2)^4}\right| + C_1.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, учитывая, что $u = x^4$ и полагая $C = C_1/4$, имеем окончательно

$$\int \frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8 + 3x^4 + 2} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4} + C.$$

1910. $\displaystyle\int \frac{x^9 \mathrm{d}x}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}.$

Делая замену $u = x^5$, получаем

$$\int \frac{x^9 \mathrm{d}x}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2 + 2u + 2)^2}.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства, применим метод Остроградского. Записываем разложение:

$$\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2 + 2u + 2)^2} = \frac{Au + B}{u^2 + 2u + 2} + \int \frac{Cu + D}{u^2 + 2u + 2}\,\mathrm{d}u.$$

После дифференцирования и упрощения получаем тождество

$$Cu^3 + (2C + D - A)u^2 + (2C + 2D - 2B)u + (2A - 2B + 2D) = u.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C = 0, \\ 2C + D - A = 0, \\ 2C + 2D - 2B = 1, \\ 2A - 2B + 2D = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2+2u+2)^2}=-\frac{u+2}{2(u^2+2u+2)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2u+2}=$$

$$=-\frac{u+2}{2(u^2+2u+2)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u+1)}{(u+1)^2+1}=$$

$$=-\frac{u+2}{2(u^2+2u+2)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(u+1)+C_1$$

Возвращаясь к исходному интегралу и полагая $C=C_1/5$, имеем

$$\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{(x^{10}+2x^5+2)^2}=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)+C.$$

1911. $\displaystyle\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x.$

1) $n\neq 0$. Делая замену $u=x^n+1$, находим

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{[(x^n+1)-1]x^{n-1}\mathrm{d}x}{x^n+1}=$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{(u-1)\,\mathrm{d}u}{u}=\frac{1}{n}(u-\ln|u|)+C_1=$$

$$=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C,$$

где $C=C_1+1/n$,

2) $n=0$. В этом случае интеграл принимает следующий вид:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

Ответ:

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C, & n\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln|x|+C, & n=0.\end{cases}$$

1912. $\displaystyle\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

1) $n\neq 0$. Делая замену $u=x^n$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u=$$

$$= -\frac{1}{2n}\int u\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{u^2+1}\right) = -\frac{1}{2n}\left(\frac{u}{u^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right) =$$

$$-\frac{1}{2n}\left(\frac{u}{u^2+1} - \operatorname{arctg} u\right) + C = \frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg} u - \frac{u}{u^2+1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg} x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1}\right) + C,$$

2) $n = 0$. В этом случае интеграл принимает следующий вид:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x} = \frac{1}{4}\ln|x| + C.$$

Ответ:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg} x^n - \dfrac{x^n}{x^{2n}+1}\right) + C, & n \neq 0, \\ \dfrac{1}{4}\ln|x| + C, & n = 0. \end{cases}$$

1913. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$.

Делая замену $u = 1/x^{10}$, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\left(1 + \dfrac{2}{x^{10}}\right)} = -\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u} =$$

$$= -\frac{1}{20}\ln|1+2u| + C = \frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2} + C.$$

1914. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

Выполняя последовательные замены $u = 1/x^{10}$ и $v = u + 1$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}x^{10}\left(1 + \dfrac{1}{x^{10}}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{10}\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -\frac{1}{10}\int \frac{v-1}{v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{10}\left(\int \frac{\mathrm{d}v}{v} - \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\ln|v| + \frac{1}{v}\right) + C_1 = -\frac{1}{10}\left(\ln|u+1| + \frac{1}{u+1}\right) + C_1 =$$

$$= -\frac{x^{10}}{10(x^{10}+1)} - \frac{1}{10}\ln\frac{1+x^{10}}{x^{10}} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{10(x^{10}+1)} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\ln\frac{1+x^{10}}{x^{10}} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{10(x^{10}+1)} + \frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{1+x^{10}} + C,$$

где $C = C_1 - 1/10$.

1915. $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

Сделаем замену $u = 1/x^7$:

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx = \int \frac{1-x^7}{\left(\frac{1}{x^7}+1\right)}\frac{dx}{x^8} = -\frac{1}{7}\int \frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)}{u+1}\,du =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du. \quad (1)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части (1), воспользуемся разложением подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}.$$

Отбрасывая общий знаменатель и приводя подобные члены, получим

$$(A+B)u + A = u - 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A = -1, \end{cases}$$

находим

$$A = -1, \quad B = 2.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{u-1}{u(u+1)} = -\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{du}{u+1} = -\ln|u| + 2\ln|u+1| + C_1.$$

Полагая $C = -C_1/7$, получаем из (1)

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx = \frac{1}{7}\ln|u| - \frac{2}{7}\ln|u+1| + C = \frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2} + C.$$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx.$

Здесь удобнее сначала разложить подынтегральную функцию на промежуточные дроби, отвечающие множителям

$$x, \quad x^4-5, \quad x^5-5x+1.$$

Множителю x отвечает обычная элементарная дробь A/x. Объединяя дроби, отвечающие элементарным дробям для множителя x^4-5, получаем правильную дробь со знаменателем x^4-5. Аналогично, объединяя правильные дроби, отвечающие множителю x^5-5x+1, получаем правильную дробь со знаменателем x^5-5x+1. Таким образом, можно написать разложение

$$\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^4-5} + \\ + \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^5-5x+1}.$$

Освобождаясь здесь от общего знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B+a)x^9+(C+b)x^8+(D+c)x^7+(E+d)x^6+ \\ +(e-10A-5B-5a)x^5+(A-5C+B-5b)x^4+(C-5D-5c)x^3+ \\ +(D-5d-5E)x^2+(E-5e+25A)x-5A = x^4-1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B+a=0, \\ C+b=0, \\ D+c=0, \\ E+d=0, \\ e-10A-5B-5a=0, \\ A-5C+B-5b=1, \\ C-5D-5c=0, \\ D-5d-5E=0, \\ E-5e+25A=0, \\ -5A=-1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{1}{5}, \quad B=\frac{4}{5}, \quad C=0, \quad D=0, \quad E=0,$$
$$a=-1, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=0, \quad e=1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{4x^3\mathrm{d}x}{x^4-5} - \int \frac{x^4-1}{x^5-5x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x| + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(x^4-5)}{x^4-5} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1} =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x| + \frac{1}{5}\ln|x^4-5| - \frac{1}{5}\ln|x^5-5x+1| + C =$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right| + C.$$

1917. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

Разделив числитель и знаменатель на x^2, получаем

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C.$$

1918. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, сделаем замену $u = x + 1/x$:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u-1} =$$

$$= \int \frac{d(u+\frac{1}{2})}{(u+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - (u+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{5}}{2} + (u+\frac{1}{2})} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x^2 + (1-\sqrt{5})x + 2}{2x^2 + (1+\sqrt{5})x + 2} \right| + C.$$

1919. $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1}\, dx.$

Делая замену $u = x^2$, получаем

$$\int \frac{x^5 - x}{x^8+1}\, dx = \int \frac{(x^4-1)x\, dx}{x^8+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(u^2-1)\, du}{u^4+1}.$$

Согласно решению задачи 1713:

$$\int \frac{(u^2-1)\, du}{u^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{u^2 - u\sqrt{2} + 1}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} + C_1.$$

Полагая $C = C_1/2$, получаем отсюда

$$\int \frac{x^5 - x}{x^8+1}\, dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2 - u\sqrt{2} + 1}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4 - x^2\sqrt{2} + 1}{x^4 + x^2\sqrt{2} + 1} + C.$$

1920. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}\, dx.$

Введем промежуточную переменную $u = x^2$, тогда

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{u^2+1}{u^3+1}. \qquad (1)$$

Согласно формуле суммы кубов, $u^3+1 = (u+1)(u^2-u+1)$. Поэтому подынтегральная функция допускает разложение:

$$\frac{u^2+1}{u^3+1} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1}. \qquad (2)$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A + B)u^2 + (B - A + C)u + (A + C) = u^2 + 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=1, \\ B-A+C=0, \\ A+C=1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{2}{3}, \quad B=\frac{1}{3}, \quad C=\frac{1}{3}.$$

Теперь из (1) и (2) получаем

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x. \quad (3)$$

Вычислим оставшийся интеграл. Для этого разделим числитель и знаменатель подынтегральной функции на x^2, получим

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2-1+\dfrac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} + C_1. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и полагая $C_2 = C_1/3$, получаем

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} + C_2.$$

Полученное выражение можно упростить с помощью теоремы вычитания арктангенсов (см. решение задачи 1885, формула (1)). Согласно этой теореме

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x^3}\right) + \mathrm{const} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \mathrm{const} = -\operatorname{arcctg}(x^3) + \mathrm{const} = \operatorname{arctg}(x^3) + \mathrm{const}.$$

Поэтому

$$\frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} = \operatorname{arctg} x + \\ + \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) = \\ = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$$

и искомый интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C.$$

1921. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Пользуясь этой формулой, вычислить

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^3}.$$

Для вывода рекуррентной формулы воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2). \qquad (1)$$

Введем обозначение $\Delta = 4ac - b^2$. Тогда из тождества (1) следует, что

$$\frac{4a(ax^2+bx+c) - (2ax+b)^2}{\Delta} = 1,$$

поэтому

$$I_n = \frac{1}{\Delta}\int \frac{4a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{4a}{\Delta}I_{n-1} - \frac{1}{\Delta}\int (2ax+b)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, находим

$$I_n = \frac{4a}{\Delta} I_{n-1} + \frac{2ax+b}{\Delta(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \\ - \frac{1}{\Delta}\int \frac{2a\,\mathrm{d}x}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} = \left(\frac{4a}{\Delta} - \frac{2a}{\Delta(n-1)}\right) I_{n-1} + \\ + \frac{2ax+b}{\Delta(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} = \frac{2a}{\Delta}\frac{2n-3}{n-1} I_{n-1} + \\ + \frac{2ax+b}{\Delta(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

Таким образом, искомая рекуррентная формула имеет следующий вид:

$$I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{(n-1)\Delta} I_{n-1}, \qquad (2)$$

где $\Delta = 4ac - b^2$.

При $n = 3$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ имеем $\Delta = 3$ и по формуле (2)

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + I_2.$$

Применяя еще раз формулу (2) для $n = 2$, находим

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} I_1.$$

Так как

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1, \qquad (3)$$

то для I_3 получаем следующее выражение:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \\ + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1922. Применить подстановку $t = \dfrac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

(m и n — натуральные числа).

Пользуясь этой подстановкой, найти

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

Из формулы замены $t = \dfrac{x+a}{x+b}$ находим

$$x = \frac{a-bt}{t-1}, \quad x+a = \frac{(a-b)t}{t-1}, \quad x+b = \frac{a-b}{t-1},$$

$$dx = \frac{b-a}{(t-1)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}\,dt. \tag{1}$$

При $a = -2$, $b = 3$, $m = 2$, $n = 3$ получаем

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{625} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t\right) dt = \frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{1}{2}t^2\right) + C,$$

где $t = (x-2)/(x+3)$.

1923. Вычислить

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

если $P_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x.

По формуле Тейлора для многочлена

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

и поэтому интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} \int (x-a)^{k-n-1}\mathrm{d}x =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C.$$

1924. Пусть $R(x) = R^*(x^2)$, где R^* — рациональная функция. Какими особенностями обладает разложение функции $R(x)$ на рациональные дроби?

Разложим $R^*(t)$ в сумму многочлена $P(t)$ и правильной дроби $R_1^*(t)$. Тогда $R(x) = P(x^2) + R_1^*(x^2)$.

1. Пусть $x = 0$ является корнем знаменателя $R(x)$, тогда $t = 0$ является корнем знаменателя $R^*(x)$ и часть разложения $R^*(t)$ в сумму элементарных дробей, отвечающая $t = 0$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{t^k},$$

поэтому часть разложения $R(x)$, отвечающая $x = 0$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x^{2k}}.$$

2. Пусть знаменатель $R(x)$ имеет ненулевые вещественные корни $x = \pm a$ (так как $R(x) = R^*(x^2)$, то корни знаменателя расположены симметрично относительно нуля). Это равносильно тому, что знаменатель $R^*(t)$ имеет корень $t = a^2$. Рассмотрим часть разложения $R_a(t)$ функции $R^*(t)$, отвечающую этому корню. Тогда часть разложения функции $R(x)$, отвечающая обоим корням $x = \pm a$, равна $R_a(x^2)$. Пусть

$$R_a(x^2) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{A_k}{(a-x)^k} + \frac{B_k}{(a+x)^k} \right).$$

Заменяя в этом тождестве x на $-x$, получаем

$$R_a(x^2) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{B_k}{(a-x)^k} + \frac{A_k}{(a+x)^k} \right).$$

В силу единственности коэффициентов разложения на элементарные дроби при всех k справедливо равенство $A_k = B_k$.

Обратно, пусть часть разложения функции $R(x)$, отвечающая паре корней $x = \pm a$, имеет вид

$$R_{\pm a}(x) = \sum_{k=1}^{s} A_k \left(\frac{1}{(a-x)^k} + \frac{1}{(a+x)^k} \right).$$

Числитель дроби

$$\frac{1}{(a-x)^k} + \frac{1}{(a+x)^k} = \frac{(a+x)^k + (a-x)^k}{(a^2-x^2)^k}$$

не меняется при замене x на $-x$ (в результате такой замены меняются местами слагаемые числителя) и поэтому является четным многочленом. Отсюда следует, что функция $R_{\pm a}(x)$ является некоторой рациональной функцией, зависящей только от x^2.

3. Пусть знаменатель $R(x)$ имеет невещественные корни, которым отвечает множитель $x^2 + px + q$ с отрицательным дискриминантом. Противоположным корням отвечает множитель $x^2 - px + q$. Рассмотрим часть разложения $R_{p,q}(t)$ функции $R^*(t)$, отвечающую квадратам этих корней. Тогда часть разложения функции $R(x)$, отвечающая рассматриваемым множителям $x^2 + px + q$ и $x^2 - px + q$, равна $R_{p,q}(x^2)$. Пусть

$$R_{p,q}(x^2) = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{A_k + B_k x}{(x^2+px+q)^k} + \frac{C_k + D_k x}{(x^2-px+q)^k} \right).$$

Заменяя в этом тождестве x на $-x$, получаем

$$R_{p,q}(x^2) = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{C_k - D_k x}{(x^2+px+q)^k} + \frac{A_k - B_k x}{(x^2-px+q)^k} \right).$$

В силу единственности коэффициентов разложения на элементарные дроби при всех k справедиво равенство $C_k = A_k$ и $D_k = -B_k$.

Обратно, пусть часть разложения функции $R(x)$ отвечающая паре множителей $x^2 + px + q$ и $x^2 - px + q$, имеет вид

$$R_{p,q}(x) = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{A_k + B_k x}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{A_k - B_k x}{(x^2 - px + q)^k} \right).$$

Числитель дроби

$$\frac{A_k + B_k x}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{A_k - B_k x}{(x^2 - px + q)^k} =$$
$$= \frac{(A_k + B_k x)(x^2 - px + q)^k + (A_k - B_k x)(x^2 + px + q)^k}{((x^2 + q)^2 - p^2 x^2)^k}$$

не меняется при замене x на $-x$ (в результате такой замены меняются местами слагаемые числителя) и поэтому является четным многочленом. Отсюда следует, что функция $R_{p,q}(x)$ является некоторой рациональной функцией, зависящей только от x^2.

Подводя итоги, получаем, что рациональная функция $R(x)$ является рациональной функцией от x^2 тогда и только тогда, когда ее разложение на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x^{2k}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s_i} B_{ki} \left(\frac{1}{(a_i - x)^k} + \frac{1}{(a_i + x)^k} \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{C_{ki} + D_{ki} x}{(x^2 + p_i x + q_i)^k} + \frac{C_{ki} - D_{ki} x}{(x^2 - p_i x + q_i)^k} \right).$$

1925. Вычислить

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^{2n}},$$

где n — целое положительное число.

Знаменатель имеет комплексные корни

$$x_k^{\pm} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты разложения

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^+}{x - x_k^+} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^-}{x - x_k^-} \tag{1}$$

легко находятся с помощью теории вычетов функций комплексной переменной

$$A_k^{\pm} = \operatorname*{res}_{z=x_k^{\pm}} \frac{1}{1+z^{2n}}.$$

Функция $f(z) = 1/(1+z^{2n})$ имеет в каждой особой точке полюс первого порядка и вычет можно найти по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

где $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = 1 + z^{2n}$. Учитывая равенство $\psi'(z) = 2nz^{2n-1}$ и уравнение $z^{2n} + 1 = 0$ для точек $z = x_k^{\pm}$, получаем, что

$$A_k^{\pm} = -\frac{x_k^{\pm}}{2n}.$$

Если не предполагать знания теории функций комплексной переменной, то можно просто воспользоваться схемой вывода формулы для вычета в применении к функции (1). Пусть

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + g(x), \tag{2}$$

где $g(x)$ непрерывна при $x = a$. Умножая (2) на $x - a$ и переходя к пределу, получаем

$$A = \lim_{x\to a}((x-a)f(x)). \tag{3}$$

Если $f(x) = 1/g(x)$, где $g(x)$ дифференцируемая функция, причем $g(a) = 0$, то предел (3) можно вычислить по правилу Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{g(x)} = \frac{1}{g'(a)}. \tag{4}$$

Применяя формулу (4) к функции $f(x) = 1/(1 + x^{2n})$, получаем тот же результат, что и раньше:

$$A_k^{\pm} = \frac{1}{2n(x_k^{\pm})^{2n-1}} = -\frac{x_k^{\pm}}{2n}.$$

Объединяя в разложении (1) комплексно сопряженные корни, получим

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^+}{x - x_k^+} + \frac{x_k^-}{x - x_k^-}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x(x_k^+ + x_k^-) - 2|x_k^{\pm}|^2}{x^2 - x(x_k^+ + x_k^-) + |x_k^{\pm}|^2} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int\frac{2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - 2\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\frac{2\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2n} - 2}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\int\frac{d\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} - \right.$$

$$\left. -2\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}\int\frac{d\left(x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\left(x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^2 + \sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right) + C.$$

Глава 4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 4.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Основным методом интегрирования функций, содержащих радикалы, является отыскание такой замены переменной, которая приводит к интегралу от рациональной функции. Если такая замена определена, то интегрирование сводится к вычислению интеграла от рациональной функции (вычисление таких интегралов рассмотрено в предыдущей главе).

В простейшем случае подынтегральная функция рационально выражается через независимую переменную x и некоторое количество радикалов от одной и той же дробно-линейной функции (так называется отношение двух линейных функций):

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right) \mathrm{d}x.$$

Обозначим через N наименьшее общее кратное показателей корней от дробно-линейной функции $N = \text{НОК}(n, k, \dots)$. В этом случае все радикалы будут степенями функции

$$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Выражая отсюда x, находим

$$x = \frac{b - \mathrm{d}t^N}{ct^N - a}.$$

Отсюда следует, что замена x на t приводит к интегралу от рациональной функции. Перейдем теперь к примерам.

1926. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Делая замену $t = \sqrt{x}$ ($x = t^2$, $dx = 2t\,dt$), получаем

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\,dt}{1+t} = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$
$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

1927. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Делаем замену $t = \sqrt[6]{x}$, получаем $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$ и интеграл

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{dt}{t(1+t^2+2t^3)} =$$
$$= 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}. \quad (1)$$

Разложение рациональной функции имеет следующий вид:

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}. \quad (2)$$

Коэффициенты A и B легко определяются из асимптотик функции $f(t)$ при $t \to 0$ и $t \to -1$:

$$f(t) \sim \frac{1}{t} \quad \text{при } t \to 0, \qquad f(t) \sim -\frac{1}{4(t+1)} \quad \text{при } t \to -1.$$

Отсюда следует, что $A = 1$ и $B = -1/4$. Оставшуюся дробь в (2) находим вычитанием

$$\frac{Ct+D}{2t^2-t+1} = f(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{4(t+1)} = \frac{1-6t}{4(2t^2-t+1)}.$$

Таким образом,

$$\int f(t)\,dt = \ln|t| - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\int \frac{6t-1}{2t^2-t+1}\,dt. \quad (3)$$

Вычислим оставшийся интеграл в (3):

$$\int \frac{6t-1}{2t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{6t-1}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{3(2t-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2})}{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(t - \frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C_1 =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(2t^2 - t + 1) - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C_1 =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(2t^2 - t + 1) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C_2,$$

где $C_2 = C_1 - (3\ln 2)/2$. Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} = \frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

1928. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x.$

Сделаем замену $t = \sqrt[3]{x+2}$. Находим $x = t^3 - 2$, $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\mathrm{d}x = 3\int \frac{(t^3-2)t^3\mathrm{d}t}{t^3+t-2} = 3\int \frac{(t^3-2)t^3}{(t-1)(t^2+t+2)}\mathrm{d}t.$$

Выделяем из неправильной дроби целую часть:

$$\frac{(t^3-2)t^3}{(t-1)(t^2+t+2)} = t^3 - t + \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}.$$

Ищем разложение правильной части на элементарные дроби:

$$\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2}.$$

Освобождаясь от общего знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)t^2 + (A-B+C)t + (2A-C) = t^2 - 2t.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A - B + C = -2, \\ 2A - C = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Далее вычисляем интеграл

$$\int \frac{Bt+C}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{5t-2}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{5}{2}(2t+1)-\frac{9}{2}}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{5}{8}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+t+2)}{t^2+t+2} - \frac{9}{8}\int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{5}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{9}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C_1.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| +$$

$$+ \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{2+x}$.

1929. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Делаем замену $t = \sqrt[6]{x+1}$. Находим $x = t^6 - 1$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, $\sqrt{x+1} = t^3$, $\sqrt[3]{x+1} = t^2$.

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{-t^8+t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Выделяем целую часть

$$\frac{-t^8+t^5}{1+t^2} = -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{t^2+1}.$$

Вычисляем интеграл

$$\int \frac{t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + C_1.$$

Следовательно, исходный интеграл

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t +$$

$$+ 3\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \sqrt[6]{x+1}$.

1930. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

После замены $t = \sqrt[4]{x}$ получаем $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} = \int \frac{4t^3dt}{(1+t)^3t^2} = 4\int \frac{t\,dt}{(1+t)^3}.$$

Полагая $u = t+1$, находим

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}} = 4\int \frac{(u-1)\,du}{u^3} = 4\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du =$$

$$= -\frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} + C = \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

1931. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

После замены $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ находим

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{4t\,dt}{(t^2-1)^2},$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{\sqrt{(x+1)/(x-1)}-1}{\sqrt{(x+1)/(x-1)}+1}\,dx =$$

$$= -4\int \frac{t-1}{t+1}\frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt = -4\int \frac{t\,dt}{(t-1)(t+1)^3}. \qquad (1)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (1) применим метод Остроградского. Для этого находим разложение

$$\int \frac{t\,dt}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{At+B}{(t+1)^2} + \int \frac{Ct+D}{t^2-1}\,dt.$$

После дифференцирования, освобождения от знаменателя и приведения подобных членов, получаем тождество

$$Ct^3 + (D-A+2C)t^2 + (2A-2B+2D+C)t + (2B-A+D) = t.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C = 0, \\ D - A + 2C = 0, \\ 2A - 2B + 2D + C = 1, \\ 2B - A + D = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Поэтому

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = -\frac{t}{(t+1)^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{t}{(t+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

Замечание. Полученный результат можно получить более простым путем: после уничтожения иррациональности в знаменателе сразу получаются табличные интегралы

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \int (x - \sqrt{x^2-1})\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

1932. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

После замены $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ находим

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx = -\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}, \quad x-1 = \frac{2}{t^3-1},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}(x-1)^2} =$$

$$= -6\int \frac{t^2dt}{(t^3-1)^2\,t^2\dfrac{4}{(t^3-1)^2}} = -\frac{3}{2}\int dt =$$

$$= -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

1933. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$.

После замены $t = \sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x}}$ находим

$$x = \frac{a}{t^4+1}, \quad dx = -\frac{4at^3dt}{(t^4+1)^2},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = \int \frac{-4at^3\,dt}{(t^4+1)^2 t} = -4a\int \frac{t^2\,dt}{(t^4+1)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим метод Остроградского и найдем разложение

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^4+1)^2} = \frac{at^3+bt^2+ct+d}{t^4+1} + \int \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{t^4+1}. \tag{1}$$

Учитывая четность подынтегральной функции, сразу находим $b=0$, $d=0$, $A=0$, $C=0$. После этого, дифференцируя разложение (1), освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(B-a)t^6 + (D-3c)t^4 + (B+3a)t^2 + (D+c) = t^2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} B-a=0, \\ D-3c=0, \\ B+3a=1, \\ D+c=0, \end{cases}$$

находим

$$a=\frac{1}{4}, \quad c=0, \quad B=\frac{1}{4}, \quad D=0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^4+1)^2} = \frac{t^3}{4(t^4+1)} + \frac{1}{4}\int \frac{t^2dt}{t^4+1}.$$

Для вычисления последнего интеграла можно воспользоваться решением задач 1712 и 1713:

$$\int \frac{t^2dt}{t^4+1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt + \int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + C_1.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = -\frac{at^3}{t^4+1} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} +$$

$$+ \frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}} + C,$$

где $t = \sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x}}$.

1934. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$.

Делая замену $t = \sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}$, находим

$$x = \frac{at^n - b}{t^n - 1}, \quad dx = \frac{n(b-a)t^{n-1}dt}{(t^n-1)^2},$$

$$x - a = \frac{a-b}{t^n-1}, \quad x - b = \frac{(a-b)t^n}{t^n-1},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}}(x-a)^2} =$$

$$= \int \frac{n(b-a)t^{n-1}dt}{(t^n-1)^2 t^{n-1}\frac{(b-a)^2}{(t^n-1)^2}} = \frac{n}{b-a}\int dt =$$

$$= \frac{n}{b-a}t + C = \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

1935. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Замена $u = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ дает

$$x = \left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2, \quad dx = \frac{(u^4-1)du}{2u^3}, \quad x+1 = \left(\frac{u^2+1}{2u}\right)^2,$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{(u^4-1)du}{2u^3(1+u)} =$$

$$= \int \frac{(u+1)(u^3-u^2+u-1)du}{2u^3(1+u)} = \frac{1}{2}\int \frac{u^3-u^2+u-1}{u^3}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)du = \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2u} + \frac{1}{4u^2} + C_1 =$$

$$= \frac{u^2-1}{2u} - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{4u^2} + C_1 =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) + \frac{1}{4(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} + C_1.$$

Преобразуем полученное выражение, переводя иррациональность из знаменателя в числитель. Так как

$$\frac{1}{4(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{4} =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} + \frac{1}{4},$$

то, полагая $C = C_1 + 1/4$, получаем окончательно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+C.$$

1936. Доказать, что интеграл

$$\int R(x, (x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n})\,\mathrm{d}x,$$

где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если

$$p+q=kn,$$

где k — целое число.

После замены $t = \sqrt[n]{\dfrac{x-a}{x-b}}$ имеем

$$x = \frac{bt^n - a}{t^n - 1}, \quad x - a = \frac{(b-a)t^n}{t^n-1},$$

$$x - b = \frac{b-a}{t^n-1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{(b-a)nt^{n-1}\mathrm{d}t}{(t^n-1)^2},$$

$$(x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n} = \frac{t^p}{(t^n-1)^{(p+q)/n}} = \frac{t^p}{(t^n-1)^k}$$

(так как $p+q=kn$). Полученные формулы показывают, что после замены получается интеграл от рациональной функции переменной t. Это доказывает утверждение задачи.

§ 4.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

Часто приходится вычислять интегралы, содержащие квадратный корень из квадратного трехчлена. С помощью подстановок Эйлера, которые мы рассмотрим в следующем разделе, такие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Однако часто применение этих подстановок приводит к довольно громоздким интегралам. Поэтому представляют интерес и другие способы вычисления рассматриваемых интегралов. Эти способы мы сейчас и рассмотрим.

В общем случае функцию, которая рационально зависит от x и от квадратного корня из $y = ax^2 + bx + x$, можно записать в виде отношения

$$R(x, \sqrt{y}) = \frac{P_1(x) + P_2(x)\sqrt{y}}{P_3(x) + P_4(x)\sqrt{y}},$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ и $P_4(x)$ — многочлены.

Умножая числитель и знаменатель этой дроби на сопряженное к знаменателю выражение $P_3(x) - P_4(x)\sqrt{y}$, получим

$$R(x, \sqrt{y}) = \frac{P_1(x)P_3(x) - P_2(x)P_4(x)y}{P_3^2(x) - yP_4^2(x)} + \\ + \frac{P_2(x)P_3(x) - P_1(x)P_4(x)}{P_3^2(x) - yP_4^2(x)}\sqrt{y} = R_1(x) + R_2(x)\sqrt{y},$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции. Интегрированию рациональных функций посвящена предыдущая глава, поэтому достаточно рассмотреть вопрос об интегрировании второго слагаемого, которое можно привести к виду

$$R_2(x)\sqrt{y} = \frac{R_2(x)y}{\sqrt{y}} = \frac{R_3(x)}{\sqrt{y}},$$

где $R_3(x)$ — также рациональная функция.

Выделим из рациональной функции $R_3(x)$ многочлен $P(x)$ (целую часть) и правильную дробь, а затем разложим правильную дробь на сумму простейших. В результате получим сумму интегралов следующего вида:

I. $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x.$

II. $\displaystyle\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x - \alpha)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$

III. $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x.$

При этом в интеграле третьего типа дискриминант квадратного трехчлена $a_1x^2 + b_1x + c_1$ отрицателен.

Рассмотрим простейший интеграл первого вида:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Для него можно получить рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{na}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{(2n-1)b}{2na} I_{n-1} - \frac{(n-1)c}{na} I_{n-2}. \quad (1)$$

Задача 13. Доказать соотношение (1).

С помощью соотношения (1) интеграл первого типа в принципе сводится к одному интегралу I_0. Однако непосредственное применение этого соотношения довольно утомительно. Существует более эффективный способ вычисления. Из соотношения (1) можно видеть, что

$$I_n = p_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda_n I_0,$$

где $p_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен $(n-1)$-й степени, а λ_n — некоторое число. Так как интеграл первого типа представляет собой линейную комбинацию интегралов I_k с индексами k, меняющимися от 0 до n, где n — степень многочлена $P(x)$, то существуют некоторый многочлен $Q(x)$ степени $n-1$ и такое число λ, что

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \\ = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Если мы запишем многочлен $Q(x)$ с неопределенными коэффициентами и продифференцируем написанное тождество, то получим равенство

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \\ + \frac{Q(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и освобождаясь от него, получаем равенство многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем линейную систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Решая полученную систему, находим искомые коэффициенты. После этого остается вычислить интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Методом выделения полного квадрата этот интеграл сводится к одному из табличных (интегралы вида 5, 6 и 7 дополнительной таблицы интегралов). Применение данного метода проиллюстрировано решениями задач 1943–1946. Так как упомянутые интегралы дополнительной таблицы представляют собой арксинусы и логарифмы, то внеинтегральный член рассматриваемой формулы представляет алгебраическую часть интеграла. В частности, этот метод позволяет ответить на вопрос, будет ли вычисляемый интеграл представлять собой алгебраическую функцию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы число λ, стоящее перед интегралом, оказалось равным нулю. В этой связи можно обратить внимание на решение задачи 1951.

Рассмотрим интегралы второго типа. Если α не является корнем квадратного трехчлена, то применима подстановка

$$x = \alpha + \frac{1}{t},$$

которая сводит интеграл второго типа к интегралу первого типа. Если же число α является корнем, то эта же подстановка приводит интеграл второго типа к интегралу от простейшей иррациональности, рассмотренной в начале этой главы.

Перейдем к интегралам последнего типа. Рассмотрим сначала случай, когда квадратные трехчлены $a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $ax^2 + bx + c$ пропорциональны. Тогда искомый интеграл принимает вид

$$I = \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена, получаем

$$I = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{(ax^2 + bx + c)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1/2}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + bx + c)^{n+1/2}},$$

где $y = ax^2 + bx + c$. Первый из полученных интегралов является табличным, а для вычисления второго можно использовать подстановку Абеля:

$$t = \left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Освобождаясь здесь от знаменателя и возводя в квадрат, получаем

$$4t^2(ax^2+bx+c)=4a^2x^2+4abx+b^2$$

или

$$4t^2(ax^2+bx+c)=4a(ax^2+bx+c)+b^2-4ac,$$

что дает

$$4(a-t^2)(ax^2+bx+c)=4ac-b^2.$$

Отсюда находим

$$ax^2+bx+c=\frac{4ac-b^2}{4(a-t^2)}.$$

Обозначим $y=ax^2+bx+c$. Непосредственно из формулы замены следует, что

$$t\sqrt{y}=ax+\frac{b}{2}.$$

После дифференцирования приходим к тождеству

$$\sqrt{y}\,\mathrm{d}t+t\,\mathrm{d}(\sqrt{y})=a\,\mathrm{d}x.$$

Так как $t=(\sqrt{y})'$, то $\mathrm{d}(\sqrt{y})=t\,\mathrm{d}x$ и, следовательно,

$$\sqrt{y}\,\mathrm{d}t+t^2\,\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}x.$$

Из этого равенства получаем

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}}=\frac{\mathrm{d}t}{a-t^2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n\int(a-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t$$

и вычисление интеграла сводится к интегрированию многочлена.

Перейдем к основному случаю интегралов третьего типа, для которого квадратные трехчлены $a_1x^2+b_1x+c_1$ и ax^2+bx+c непропорциональны, а дискриминант трехчлена $a_1x^2+b_1x+c_1$ отрицателен. Рассматриваемый интеграл имеет следующий вид:

$$I=\int\frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x.$$

При этом мы можем без ограничения общности предполагать, что величина

$$a_1>0.$$

Первый этап состоит в упрощении интеграла. Для этого подбирают замену переменной так, чтобы получился аналогичный интеграл, но без слагаемых, содержащих первую степень независимой переменной. Если величина $ab_1 - a_1b \neq 0$, это можно сделать с помощью дробно-линейной подстановки

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$$

(эта подстановка невырождена, если $\alpha \neq \beta$). Применяя эту подстановку, находим

$$ax^2 + bx + c = \\ = \frac{(a\beta^2 + b\beta + c)t^2 + (2a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + 2c)t + (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{(1+t)^2}.$$

Условие отсутствия слагаемого с первой степенью t дает уравнение

$$2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0.$$

Такое же уравнение (с заменой a на a_1, b на b_1, c на c_1) получаем, применяя эту же подстановку для второго квадратного трехчлена. Таким образом, для определения коэффициентов α и β имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0 \\ 2a_1\alpha\beta + b_1(\alpha + \beta) + 2c_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система является линейной относительно переменных $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$. Решая ее, находим

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{2(ca_1 - c_1a)}{ab_1 - a_1b}, \\ \alpha\beta = \dfrac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}. \end{cases}$$

Последняя система представляет собой систему типа Виета и нахождение коэффициентов α и β сводится к решению квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{2(ca_1 - c_1a)}{ab_1 - a_1b}z + \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} = 0. \qquad (2)$$

Можно показать, что дискриминант уравнения (2) в нашем случае положителен и, следовательно, числа α и β являются его различными корнями. Отметим применение такой дробно-линейной подстановки в решении задач 1964 и 1965.

Задача 14. Доказать, что если $a_1 > 0$, $b_1^2 - 4a_1c_1 < 0$ и квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $a_1x^2 + b_1x + c_1$ непропорциональны, то дискриминант уравнения (2) положителен.

Если $ab_1 - a_1b = 0$, то величины $ax^2 + bx$ и $a_1x^2 + b_1x$ пропорциональны и необходимое преобразование достигается с помощью метода выделения полного квадрата, т. е. с помощью подстановки

$$t = x - \frac{b}{2a}.$$

На втором этапе вычисляем преобразованный интеграл, который принимает следующий вид:

$$J = \int \frac{P(t)}{(t^2 + d)^n \sqrt{kt^2 + h}}\, \mathrm{d}t,$$

где $P(t)$ — некоторый многочлен. Снова раскладывая правильную дробь

$$\frac{P(t)}{(t^2 + d)^n}$$

на простейшие, мы приходим к сумме интегралов вида

$$\int \frac{At + B}{(t^2 + d)^m \sqrt{kt^2 + h}}\, \mathrm{d}t \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Каждый из таких интегралов разлагается на два:

$$\frac{A}{k} \int \frac{kt\, \mathrm{d}t}{(t^2 + d)^m \sqrt{kt^2 + h}} + B \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + d)^m \sqrt{kt^2 + h}}.$$

Первый из них сводится к интегралу от рациональной функции заменой $u = \sqrt{kt^2 + h}$. Ко второму применима подстановка Абеля:

$$u = \frac{kt}{\sqrt{kt^2 + h}}.$$

В самом деле, как уже показывалось выше, для этой подстановки

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{kt^2 + h}} = \frac{\mathrm{d}u}{k - u^2},$$

кроме того, можно вычислить

$$t^2 + d = \frac{(h - kd)u^2 + dk^2}{k(k - u^2)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + d)^m \sqrt{kt^2 + h}} = k^m \int \frac{(k - u^2)^{m-1}}{[(h - kd)u^2 + dk^2]^m}\, \mathrm{d}u.$$

Перейдем к задачам. Найдем интегралы от простейших квадратичных иррациональностей.

1937. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) - \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| -$$

$$- \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| -$$

$$- \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

1938. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

Полагая $u = x+1$, находим

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-(x+1)+1}} =$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}}.$$

Если $u > 0$, то, делая замену $t = 1/u$, находим

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}} = \int \frac{du}{u^2\sqrt{1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$

$$= -\int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_1 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{2u}\right| + C_1 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C,$$

где $C = C_1 + \ln 2$.

Если $u < 0$, то та же замена дает тот же результат:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}} = -\int \frac{du}{u^2\sqrt{1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$

$$= \int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{2-u-2\sqrt{u^2-u+1}}{2u}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{(2-u)^2-4(u^2-u+1)}{2u(2-u+2\sqrt{u^2-u+1})}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{3u}{2(2-u+2\sqrt{u^2-u+1})}\right| + C_1 = -\ln\left|\frac{2(2-u+2\sqrt{u^2-u+1})}{3u}\right| + C_1 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C,$$

где $C = C_1 - \ln 2 + \ln 3$.

Следовательно,

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}} = -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C \qquad (1)$$

и

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

1939. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

Полагая $u = 1 - x$, находим

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2\sqrt{2(1-x)-(1-x)^2}} = \\ = -\int \frac{du}{u^2\sqrt{2u-u^2}}.$$

Если $u > 0$, то, делая замену $v = 1/u$, получаем

$$-\int \frac{du}{u^2\sqrt{2u-u^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{v}-\frac{1}{v^2}}} = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{2v-1}} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2v-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{2v-1}}\,dv = \frac{1}{2}\int \sqrt{2v-1}\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{2v-1}} =$$

$$= \frac{1}{6}(2v-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2v-1)^{1/2} + C = \frac{v+1}{3}\sqrt{2v-1} + C = \\ = \frac{u+1}{3u^2}\sqrt{2u-u^2} + C.$$

Если $u < 0$, то та же замена $v = 1/u$ дает тот же результат:

$$-\int \frac{du}{u^2\sqrt{2u-u^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{v}-\frac{1}{v^2}}} = -\int \frac{v\,dv}{\sqrt{2v-1}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{2}(2v-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{2v-1}}\,dv = -\frac{1}{2}\int \sqrt{2v-1}\,dv - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{2v-1}} =$$

$$= -\frac{1}{6}(2v-1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2v-1)^{1/2} + C = -\frac{v+1}{3}\sqrt{2v-1} + C = \\ = \frac{u+1}{3u^2}\sqrt{2u-u^2} + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

1940. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx.$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx +$$
$$+2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + 2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} =$$
$$= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + 2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Вычислим оставшийся интеграл с помощью замены $u = 1/x$. Если $x > 0$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{2u^2+2u+1}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+\frac{1}{2}}\right) + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{2x}\right| + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right| + C,$$

где $C = C_1 + \ln 2/\sqrt{2}$.

При $x < 0$ получаем тот же результат:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = -\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u^2+2u+1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+\frac{1}{2}}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{2x} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{(x+2)^2 - 2(x^2+2x+2)}{2x\left(x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x}{2\left(x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\left(x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)}{x} \right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C,$$

где $C = C_1 - \ln 2/\sqrt{2}$.

Таким образом, окончательно

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) - \\ - \sqrt{2}\ln\left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C.$$

1941. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

После замены $u = x+1$ получаем

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{(u-1)\,du}{u\sqrt{1+u-u^2}} = \\ = \int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}} - \int \frac{du}{u\sqrt{1+u-u^2}}. \quad (1)$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (1). Первый интеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}} = \int \frac{d(u-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(u-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{2u-1}{\sqrt{5}} + C_1. \quad (2)$$

Второй интеграл вычисляется с помощью замены $v = 1/u$. Для этого нужно отдельно рассмотреть два случая в зависимости от знака u. При $u > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u-u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+v-1}} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(v+\frac{1}{2})}{\sqrt{(v+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}} = -\ln\left|v+\frac{1}{2}+\sqrt{v^2+v-1}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{u+2+2\sqrt{1+u-u^2}}{2u}\right| + C_2 = -\ln\left|\frac{u+2+2\sqrt{1+u-u^2}}{u}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 + \ln 2$.

При $u < 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u-u^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}-1}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+v-1}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(v+\frac{1}{2})}{\sqrt{(v+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}} = \ln\left|v+\frac{1}{2}+\sqrt{v^2+v-1}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{u+2-2\sqrt{1+u-u^2}}{2u}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{(u+2)^2-4(1+u-u^2)}{2u(u+2+2\sqrt{1+u-u^2})}\right| + C_2 =$$

$$= \ln\left|\frac{5u}{2(u+2+2\sqrt{1+u-u^2})}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2(u+2+2\sqrt{1+u-u^2})}{5u}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{u+2+2\sqrt{1+u-u^2}}{u}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 - \ln 2 + \ln 5$.

Следовательно, независимо от знака u

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u-u^2}} = -\ln\left|\frac{u+2+2\sqrt{1+u-u^2}}{u}\right| + C_3. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), находим

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \\ + \ln\left|\frac{x+3+2\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right| + C.$$

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = \int \frac{-(1+x-x^2)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx =$$

$$= -\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} =$$

$$= -\int \sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + 2\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= -\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2} + \frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C.$$

Рассмотрим применение формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda\int\frac{dx}{y},$$

где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число.

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$

Найдем разложение

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = \\ = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$-3Ax^3 + (5A - 2B)x^2 + (2A + 3B - C)x + (B + C + \lambda) = x^3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ 5A - 2B = 0, \\ 2A + 3B - C = 0, \\ B + C + \lambda = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{5}{6}, \quad C = -\frac{19}{6}, \quad \lambda = 4.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C_1$$

и поэтому

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

1944. $\displaystyle\int \frac{x^{10}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Учитывая четность подынтегральной функции, разложение ищем в виде

$$\int \frac{x^{10}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = (Ax^9 + Bx^7 + Cx^5 + Dx^3 + Ex)\sqrt{1+x^2} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$10Ax^{10} + (9A + 8B)x^8 + (7B + 6C)x^6 + (5C + 4D)x^4 + (3D + 2E)x^2 + (E + \lambda) = x^{10}.$$

Решая систему
$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 9A + 8B = 0, \\ 7B + 6C = 0, \\ 5C + 4D = 0, \\ 3D + 2E = 0, \\ E + \lambda = 0, \end{cases}$$
находим
$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{9}{80}, \quad C = \frac{21}{160},$$
$$D = -\frac{21}{128}, \quad E = \frac{63}{256}, \quad \lambda = -\frac{63}{256}.$$
Следовательно,
$$\int \frac{x^{10}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x^9}{10} - \frac{9x^7}{80} + \frac{21x^5}{160} - \frac{21x^3}{128} + \frac{63x}{256}\right)\sqrt{1+x^2} - $$
$$ - \frac{63}{256}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$
$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$
Учитывая четность подынтегральной функции, разложение ищем в виде
$$\int \frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax^5 + Bx^3 + Cx)\sqrt{a^2-x^2} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$
Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество
$$-6Ax^6 + (5Aa^2 - 4B)x^4 + (3Ba^2 - 2C)x^2 + (Ca^2 + \lambda) = -x^6 + a^2x^4.$$
Решая систему
$$\begin{cases} -6A = -1, \\ 5Aa^2 - 4B = a^2, \\ 3Ba^2 - 2C = 0, \\ Ca^2 + \lambda = 0, \end{cases}$$
находим
$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{a^2}{24}, \quad C = -\frac{a^4}{16}, \quad \lambda = \frac{a^6}{16}.$$

Следовательно,

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C.$$

1946. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

Ищем разложение

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx =$$
$$= (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$3Ax^3+(10A+2B)x^2+(6A+6B+C)x+(3B+2C+\lambda) =$$
$$= x^3-6x^2+11x-6.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 3A=1, \\ 10A+2B=-6, \\ 6A+6B+C=11, \\ 3B+2C+\lambda=-6, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{14}{3},\quad C=37,\quad \lambda=-66.$$

Интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}}=$$
$$=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C_1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-$$
$$-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$$

1947. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

Интеграл вычисляется заменой $u = 1/x$. Если $x > 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{(1+u^2)-1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u + \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} =$$

$$= -\left(\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right) + \ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C =$$

$$= -\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C. \quad (1)$$

Так как подынтегральная функция нечетна, то искомый интеграл должен быть четной функцией. С другой стороны, в правой части равенства (1) также стоит четная функция. Поэтому формула (1) сохраняет свою силу и при $x < 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C.$$

1948. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Сделаем замену $u = 1/x$, получим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

В разложении интеграла

$$-\int \frac{u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = (Au^2+Bu+C)\sqrt{1-u^2} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

коэффициенты B и λ равны нулю ввиду нечетности подынтегральной функции. Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$-3Au^3 + (2A-C)u = -u^3.$$

Решая систему
$$\begin{cases} -3A = -1, \\ 2A - C = 0, \end{cases}$$
находим
$$A = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Поэтому
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{u^2+2}{3}\sqrt{1-u^2} + C = \frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1} + C.$$

Так как в исходном интеграле подынтегральная функция четна, то одна из ее первообразных должна быть нечетной. В полученном результате функция $(2x^2+1)\sqrt{x^2-1}/(3x^3)$ нечетна, поэтому этот результат сохраняет свою силу и при $x < 0$. Итак, окончательно
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1} + C.$$

1949. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Полагая $t = x - 1$, получаем
$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = \int \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2+5t+5}}. \tag{1}$$

Вычислим интеграл в правой части (1) при $t > 0$. Делая замену $u = 1/t$, имеем
$$\int \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2+5t+5}} = -\int \frac{u^2 du}{\sqrt{5u^2+5u+1}}. \tag{2}$$

Далее ищем разложение интеграла
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{5u^2+5u+1}} =$$
$$= (Au+B)\sqrt{5u^2+5u+1} + \lambda\int \frac{du}{\sqrt{5u^2+5u+1}}. \tag{3}$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество
$$10Au^2 + \left(\frac{15}{2}A + 5B\right)u + \left(A + \frac{5}{2}B + \lambda\right) = u^2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ \dfrac{15}{2}A + 5B = 0, \\ A + \dfrac{5}{2}B + \lambda = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{20}, \quad \lambda = \frac{11}{40}. \tag{4}$$

Вычисляем оставшийся интеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{5u^2 + 5u + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + \frac{1}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d(u + \frac{1}{2})}{\sqrt{(u - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{20}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| u + \frac{1}{2} + \sqrt{u^2 + u + \frac{1}{5}} \right| + C_1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{5u^2 + 5u + 1}} = \frac{3 - 2u}{20}\sqrt{5u^2 + 5u + 1} -$$

$$- \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln\left|(2u + 1)\sqrt{5} + 2\sqrt{5u^2 + 5u + 1}\right| + C_2, \tag{5}$$

где $C_2 = C_1 + 11\ln(2\sqrt{5})/(40\sqrt{5})$.

Возвращаясь к исходному интегралу при $x > 1$ (т. е. при $t > 0$), получаем

$$\int \frac{dx}{(x - 1)^3\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \frac{3x - 5}{20(x - 1)^2}\sqrt{x^2 + 3x + 1} -$$

$$- \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln\left| \frac{(x + 1)\sqrt{5} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{x - 1} \right| + C.$$

При $t < 0$ замена $u = 1/t$ вместо формулы (2) дает формулу

$$\int \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2 + 5t + 5}} = \int \frac{u^2 du}{\sqrt{5u^2 + 5u + 1}}. \tag{6}$$

Формулы (3), (4) и (5) остаются в силе, и для исходного интеграла получаем следующую формулу:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}+ \\ + \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}-2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| + C.$$

Преобразуем слагаемое с логарифмом

$$\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}-2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| = \\ = \ln\left|\frac{5(x+1)^2-4(x^2+3x+1)}{(x-1)\left((x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}\right)}\right| = \\ = \ln\left|\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}\right| = \\ = -\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|.$$

Из этого равенства видно, что формула для интеграла остается одной и той же как при $x > 1$, так и при $x < 1$. Итак, окончательно:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}- \\ - \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| + C.$$

1950. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

После замены $t = x+1$ получаем следующий интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{dt}{t^5\sqrt{t^2-1}}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (1), для случая $t > 0$. Делая замену $u = 1/t$, получаем

$$\int \frac{dt}{t^5\sqrt{t^2-1}} = -\int \frac{u^4 du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Далее (учитывая четность подынтегральной функции) ищем разложение

$$\int \frac{u^4 \mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = (Au^3 + Bu)\sqrt{1-u^2} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$-4Au^4 + (3A - 2B)u^2 + (B + \lambda) = u^4.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - 2B = 0, \\ B + \lambda = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{8}, \quad \lambda = \frac{3}{8}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{u^4 \mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{2u^3 + 3u}{8}\sqrt{1-u^2} + \frac{3}{8}\arcsin u + C.$$

Возвращаясь к переменной t, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^5\sqrt{t^2-1}} = \frac{3t^2+2}{8t^4}\sqrt{t^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{t} + C. \qquad (2)$$

Для того чтобы найти интеграл при $t < 0$, достаточно заметить, что подынтегральная функция в левой части равенства (2) нечетна, поэтому значение интеграла при $t < 0$ представляет четное продолжение правой части равенства (2). Таким образом, независимо от знака t

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^5\sqrt{t^2-1}} = \frac{3t^2+2}{8t^4}\sqrt{t^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|t|} + C. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем окончательно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x} - \\ - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|} + C.$$

1951. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x$$

представляет собой алгебраическую функцию?

Пусть

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

1) $a = 0$, $b = 0$. В этом случае

$$f(x) = \frac{a_1x^2}{\sqrt{c}} + \frac{b_1x}{\sqrt{c}} + \frac{c_1}{\sqrt{c}}$$

и интеграл

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_1x^3}{3\sqrt{c}} + \frac{b_1x^2}{2\sqrt{c}} + \frac{c_1x}{\sqrt{c}} + \mathrm{const}$$

является алгебраической функцией.

2) $a = 0$, $b \neq 0$. Несложно проверить, что числитель подынтегральной функции представим в следующем виде:

$$\frac{a_1}{b^2}(bx+c)^2 + \frac{bb_1 - 2ca_1}{b^2}(bx+c) + \frac{b^2c_1 + c^2a_1 - bcb_1}{b^2}$$

и интеграл

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{a_1}{b^2}(bx+c)^{3/2} + \frac{bb_1 - 2ca_1}{b^2}(bx+c)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{b^2c_1 + c^2a_1 - bcb_1}{b^2}(bx+c)^{-1/2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2a_1}{5b^3}(bx+c)^{5/2} + \frac{2(bb_1 - 2ca_1)}{3b^3}(bx+c)^{3/2} +$$
$$+ \frac{2(b^2c_1 + c^2a_1 - bcb_1)}{b^3}(bx+c)^{1/2} + \mathrm{const}$$

также является алгебраической функцией.

3) $a \neq 0$. В данном случае воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и найдем разложение

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x = (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$2Aax^2 + \left(\frac{3Ab}{2} + Ba\right)x + \left(Ac + \frac{Bb}{2} + \lambda\right) = a_1x^2 + b_1x + c_1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2Aa = a_1, \\ \dfrac{3Ab}{2} + Ba = b_1, \\ Ac + \dfrac{Bb}{2} + \lambda = c_1, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{a_1}{2a}, \quad B = \frac{4ab_1 - 3a_1b}{4a^2}, \\ \lambda = \frac{8a^2c_1 - 4aca_1 - 4abb_1 + 3b^2a_1}{8a^2}.$$

Интеграл является алгебраической функцией тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$, т. е. когда $4a(ca_1 + bb_1) = = 8a^2c_1 + 3b^2a_1$.

Ответ: интеграл является алгебраической функцией в следующих случаях:

1. $a = 0$.
2. $a \neq 0$, $4a(ca_1 + bb_1) = 8a^2c_1 + 3b^2a_1$.

В следующей группе задач (1952–1960) для вычисления интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)y}\,\mathrm{d}x,$$

где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, используется разложение рациональной функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби.

1952. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Делая замену $u = x - 1$, получаем

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{1+(x-1)}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}}\,d(x-1) = \int \frac{du}{u^2\sqrt{2-u^2}} + \int \frac{du}{u\sqrt{2-u^2}}. \quad (1)$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части равенства (1). Рассмотрим первый интеграл. Рассмотрим случай $u > 0$ и сделаем замену $t = 1/u$:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{2-u^2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{2t^2-1}} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(2t^2-1)}{\sqrt{2t^2-1}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1} + C_1 = -\frac{\sqrt{2-u^2}}{2u} + C_1.$$

Подынтегральная функция в рассматриваемом интеграле является четной, а функция $\sqrt{2-u^2}/(2u)$, стоящая в правой части полученного равенства, нечетна. Отсюда следует, что результат интегрирования сохраняет свою силу и при $u < 0$, таким образом, независимо от знака u

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{2-u^2}} = -\frac{\sqrt{2-u^2}}{2u} + C_1. \quad (2)$$

Перейдем ко второму интегралу. Также предполагая, что $u > 0$, сделаем замену $t = 1/u$:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2-u^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right| + C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-u^2}}{u}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 + \ln 2/\sqrt{2}$.

Так как подынтегральная функция здесь нечетна, а полученный результат представляет собой четную функцию, то результат интегрирования сохраняет свою силу и при $u < 0$. Таким образом,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{2-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-u^2}}{u} \right| + C_3. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right| + C.$$

1953. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

Найдем разложение

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

Полагая последовательно $x = 1$ и $x = -1$, находим $A = 1/2$ и $B = 1/2$. Следовательно,

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

и интеграл

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}. \tag{1}$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (1). В первом интеграле делаем замену $u = x - 1$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+u-1}}.$$

При $u > 0$ делая замену $t = 1/u$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+u-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(t-\frac{1}{2})^2}} = -\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}} + C_1 =$$

$$= -\arcsin\frac{2-u}{\sqrt{5}u} + C_1.$$

Ввиду нечетности подынтегральной функции, полученный результат должен быть продолжен четным образом, поэтому

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+u-1}} = -\arcsin\frac{2-u}{\sqrt{5}|u|} + C_1. \qquad (2)$$

Во втором интеграле делаем замену $v = x + 1$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-3v+1}}.$$

Сделаем замену $y = 1/v$. Если $v > 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-3v+1}} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-3y+1}} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(y-\frac{3}{2})}{\sqrt{(y-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}} = -\ln\left|y-\frac{3}{2}+\sqrt{y^2-3y+1}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-3v+2\sqrt{1-3v+v^2}}{2v}\right| + C_2 =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-3v+2\sqrt{1-3v+v^2}}{v}\right| + C_3,$$

где $C_3 = C_2 + \ln 2$.

Если же $v < 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-3v+1}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-3y+1}} =$$

$$= \ln\left|\frac{2-3v+2\sqrt{1-3v+v^2}}{v}\right| + C_4,$$

где $C_4 = -C_3$.

Преобразуя полученное выражение, получаем

$$\ln\left|\frac{2-3v+2\sqrt{1-3v+v^2}}{v}\right| = \ln\left|\frac{(2-3v)^2-4(1-3v+v^2)}{v(2-3v-2\sqrt{1-3v+v^2})}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{5v}{2-3v-2\sqrt{1-3v+v^2}}\right| = -\ln\left|\frac{2-3v-2\sqrt{1-3v+v^2}}{5v}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{2-3v-2\sqrt{1-3v+v^2}}{v}\right| + \ln 5.$$

Отсюда следует, что окончательная формула для второго интеграла не зависит от знака v:

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-3v+1}} = -\ln\left|\frac{2-3v+2\sqrt{1-3v+v^2}}{v}\right| + C_3. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем исходный интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right| + C.$$

1954. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx.$

Переводя иррациональность в знаменатель и делая замену $u = x+1$, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{u^2-u+1}{u^2\sqrt{u^2-u+1}}\,du =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2-u+1}} - \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}} + \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-u+1}}. \quad (1)$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части (1):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-u+1}} = \int \frac{d(u-\frac{1}{2})}{\sqrt{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2-u+1}\right| + C_1. \quad (2)$$

Второй интеграл вычислен в решении задачи. 1938, формула (1):

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-u+1}} = -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C_2. \quad (3)$$

Третий интеграл вычисляется заменой $t = 1/u$. Если $u > 0$, то

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-u+1}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2-t+1}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$

$$= -\sqrt{t^2-t+1} - \frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_3.$$

Для одного из интегралов здесь была использована формула (2). Возвращаясь к переменной u и полагая $C_4 = C_3 + (\ln 2)/2$, получаем

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-u+1}} = -\frac{\sqrt{u^2-u+1}}{u} -$$

$$- \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C_4.$$

Если $u < 0$, то, учитывая проделанные выше вычисления, получаем

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-u+1}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$

$$= \sqrt{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_5,$$

где $C_5 = -C_3$.

Возвращаясь к переменной u и полагая $C_6 = C_5 - (\ln 2)/2$, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u^2-u+1}} = \\ = -\frac{\sqrt{u^2-u+1}}{u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-u-2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C_6.$$

Слагаемое с логарифмом можно преобразовать:

$$\ln\left|\frac{2-u-2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| = \ln\left|\frac{(2-u)^2-4(u^2-u+1)}{u(2-u+2\sqrt{u^2-u+1})}\right| = \\ = \ln\left|\frac{3u}{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}\right| = -\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + \ln 3.$$

Отсюда следует, что окончательная формула для третьего интеграла не зависит от знака u:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u^2-u+1}} = \\ = -\frac{\sqrt{u^2-u+1}}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-u+2\sqrt{u^2-u+1}}{u}\right| + C_4. \quad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (1) и возвращаясь к переменной x, находим

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ = -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C.$$

1955. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену $t = 1 + x$, получаем

$$\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3-3t^2+3t-1}{t\sqrt{-t^2+4t-2}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{t^2-3t+3}{\sqrt{-t^2+4t-2}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{-t^2+4t-2}}. \quad (1)$$

Первый интеграл вычисляем с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого находим разложение

$$\int \frac{t^2-3t+3}{\sqrt{-t^2+4t-2}}\,\mathrm{d}t = (At+B)\sqrt{-t^2+4t-2}+$$
$$+\lambda\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-2}}.$$

После дифференцирования, освобождения от знаменателя и приведения подобных членов, получаем тождество

$$-2At^2 + (6A-B)t + (2B-2A+\lambda) = t^2 - 3t + 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 6A - B = -3, \\ 2B - 2A + \lambda = 3, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad \lambda = 2.$$

Учитывая, что

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-2}} = \int \frac{\mathrm{d}(t-2)}{\sqrt{2-(t-2)^2}} = \arcsin\frac{t-2}{\sqrt{2}} + \mathrm{const},$$

получаем следующее выражение для первого интеграла:

$$\int \frac{t^2-3t+3}{\sqrt{-t^2+4t-2}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-t^2+4t-2} + 2\arcsin\frac{t-2}{\sqrt{2}} + C_1. \quad (2)$$

Перейдем к вычислению второго интеграла. Область определения подынтегральной функции есть интервал $2-\sqrt{2} < t < 2+\sqrt{2}$, следовательно, $t > 0$ и замена $u = 1/t$ дает

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{-t^2+4t-2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{-1+4u-2u^2}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{-\frac{1}{2}+2u-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(u-1)}{\sqrt{\frac{1}{2}-(u-1)^2}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}(u-1) + C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(1-t)}{t} + C. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и возвращаясь к переменной x, находим

$$\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = -\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+$$
$$+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x} + C.$$

1956. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Находим разложение

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем тождество

$$A(x-2) + B(x-1) = x.$$

Полагая здесь последовательно $x = 1$ и $x = 2$, находим $A = -1$, $B = 2$. Отсюда следует, что

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} =$$
$$= 2\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}. \tag{1}$$

Первый интеграл заменой $t = x - 2$ сводится к интегралу из задачи 1682. Используя решение этой задачи, находим

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \\ = -\arcsin\frac{1}{|t|} + C_1 = -\arcsin\frac{1}{|x-2|} + C_1. \quad (2)$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену $u = x - 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u}}.$$

При $u > 0$, делая замену $v = 1/u$, находим

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{1-2v}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-2v)}{\sqrt{1-2v}} = \\ = \sqrt{1-2v} + C_2 = \frac{\sqrt{u^2-2u}}{u} + C_2.$$

При $u < 0$ та же замена $v = 1/u$ дает

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u}} = \int \frac{dv}{\sqrt{1-2v}} = -\sqrt{1-2v} + C_3 = \frac{\sqrt{u^2-2u}}{u} + C_3,$$

где $C_3 = -C_2$.

Отсюда следует, что при любом знаке u

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2u}} = \frac{\sqrt{u^2-2u}}{u} + C_2$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C_2. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} = \\ = -\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} - 2\arcsin\frac{1}{|x-2|} + C.$$

1957. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Воспользуемся подстановкой Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Получим

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t\sqrt{2} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

1958. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Воспользуемся подстановкой Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \quad dx = -\frac{dt}{(t^2-1)^{3/2}}.$$

Получим

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dt}{1-2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+t}{\frac{1}{\sqrt{2}}-t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right| + C.$$

1959. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

Так как

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right),$$

то

$$\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Для вычисления обоих интегралов воспользуемся одной и той же подстановкой Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

Получим

$$\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-2t^2} + \frac{1}{2}\int dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,d(\sqrt{2}\,t)}{1-(\sqrt{2}\,t)^2} + \frac{t}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right| + \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

1960. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx.$

Переводя иррациональность в знаменатель, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx = \int \frac{(x^2+1)+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+2}) + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся подстановкой Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}, \quad x = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{\sqrt{2}\,dt}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$$

и поэтому

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+2}) + \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

В задачах 1961–1963 применяется метод выделения полного квадрата.

1961. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

После замены $y = x + \frac{1}{2}$ получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dy}{(y^2+\frac{3}{4})\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку Абеля:

$$t = \frac{y}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}, \quad y = \frac{t\sqrt{5}}{2\sqrt{t^2-1}}, \quad dy = -\frac{\sqrt{5}\,dt}{2(t^2-1)^{3/2}}.$$

Имеем

$$\int \frac{dy}{(y^2+\frac{3}{4})\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}} = 4\int \frac{dt}{3-8t^2} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{1-\frac{8}{3}t^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{d(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t)}{1-(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t+1}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t-1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}t+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}t-\sqrt{3}}\right| + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right| + C.$$

1962. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

После замены $y = x - 1$, получаем

$$\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{(y^2+2y+1)\,dy}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}} =$$

$$= \int \frac{(y^2+3)+2y-2}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}}\,dy = \int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} +$$

$$+ \int \frac{2y\,dy}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}} - 2\int \frac{dy}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}}. \quad (1)$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части равенства (1). Первый интеграл является табличным:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{3}} + C_1 = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_1. \qquad (2)$$

Во втором интеграле сделаем последовательно замены $u = y^2$ и $v = \sqrt{3-u}$ $(u = 3 - v^2,\ du = -2v\,dv)$:

$$\int \frac{2y\,dy}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}} = \int \frac{du}{(u+3)\sqrt{3-u}} = -\int \frac{2v\,dv}{(6-v^2)v} =$$

$$= -2\int \frac{dv}{6-v^2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+v}{\sqrt{6}-v}\right| + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3-y^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3-y^2}}\right| + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right| + C_2. \qquad (3)$$

Для вычисления третьего интеграла используем подстановку Абеля:

$$t = \frac{y}{\sqrt{3-y^2}}, \quad y = \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dy = \frac{\sqrt{3}\,dt}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

Получим

$$\int \frac{dy}{(y^2+3)\sqrt{3-y^2}} = \int \frac{dt}{6t^2+3} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t + C_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C_3. \qquad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получаем окончательно

$$\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C.$$

1963. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Делая замену $y = x + \frac{1}{2}$, получаем

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \int \frac{y\,dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}}. \qquad (1)$$

Первый интеграл вычисляется заменой $u = y^2 + \frac{3}{4}$:

$$\int \frac{y\,dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,du =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{u}} + C_1 = -\frac{1}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} + C_1. \qquad (2)$$

Для вычисления второго интеграла можно применить подстановку Абеля:

$$t = \frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}}, \quad y = \frac{t\sqrt{3}}{2\sqrt{1-t^2}}, \quad dy = \frac{\sqrt{3}\,dt}{2(1-t^2)^{3/2}}.$$

Получаем

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}} = \frac{4}{3}\int dt = \frac{4}{3}t + C_2 = \frac{4y}{3\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} + C_2. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), находим

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C =$$

$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

Применение дробно-линейной подстановки продемонстрировано в решениях задач 1964 и 1965.

1964. С помощью дробно-линейной подстановки $x=\dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Выполним указанную подстановку для произвольного квадратного трехчлена:

$$x^2+px+q = \frac{(\beta^2+p\beta+q)t^2+(2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+2q)t+(\alpha^2+p\alpha+q)}{(1+t)^2}. \quad (1)$$

Подберем α и β так, чтобы для обоих квадратных трехчленов пропали коэффициенты при первой степени t в числителе. Это равносильно выполнению условия

$$2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+2q=0. \quad (2)$$

для каждого квадратного трехчлена.

Для трехчлена x^2-x+1 величины $p=-1$, $q=1$, а для трехчлена x^2+x+1 имеем значения $p=1$, $q=1$. Это дает систему

$$\begin{cases} 2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0, \\ 2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, приходим к системе типа системы Виета, решая которую, находим $\alpha=\pm1$, $\beta=\mp1$. Выберем, например, $\alpha=1$, $\beta=-1$, тогда подстановка принимает вид

$$x=\frac{t-1}{t+1}, \quad dx=\frac{2\,dt}{(t+1)^2},$$
$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}, \quad x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{(t+1)^2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{|t+1|\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай $t>-1$, тогда

$$2\int \frac{|t+1|\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} + 2\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}. \quad (4)$$

Первый интеграл здесь вычислется последовательными заменами $u = t^2$ и $v = \sqrt{3u+1}$:

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = \int \frac{du}{(u+3)\sqrt{3u+1}} = 2\int \frac{dv}{v^2+8} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{2\sqrt{2}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3u+1}}{2\sqrt{2}} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3t^2+1}}{2\sqrt{2}} + C_1. \quad (5)$$

Второй интеграл в (4) можно вычислить с помощью подстановки Абеля:

$$z = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}, \quad t = \frac{z}{\sqrt{9-3z^2}}, \quad dt = \frac{9\,dz}{(9-3z^2)^{3/2}}.$$

В результате получаем

$$\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = 3\int \frac{dz}{27-8z^2} = \frac{3}{8}\int \frac{dz}{\frac{27}{8}-z^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + z}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - z} \right| + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,z}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,z} \right| + C_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{9t^2+3} + 2\sqrt{2}\,t}{\sqrt{9t^2+3} - 2\sqrt{2}\,t} \right| + C_2. \quad (6)$$

Вернемся к переменной x. Из формулы замены находим $t = \dfrac{1+x}{1-x}$. Область $t > -1$ отвечает $x < 1$, в этом случае величина $1 - x > 0$ и

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3t^2+1}}{2\sqrt{2}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3(1+x)^2 + (1-x)^2}}{2\sqrt{2}(1-x)} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}, \quad (7)$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{9t^2+3} + 2\sqrt{2}\,t}{\sqrt{9t^2+3} - 2\sqrt{2}\,t} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)} + \sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - \sqrt{2}(1+x)} \right|. \quad (8)$$

Из равенств (3)–(8) получаем, что при $x < 1$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{2}(1 - x)} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - \sqrt{2}(1 + x)} \right|. \quad (9)$$

Преобразуем выражение под знаком логарифма, переведя иррациональность в числитель:

$$\frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - \sqrt{2}(1 + x)} = \frac{\left(\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)\right)^2}{x^2 - x + 1}.$$

Подставляем полученное выражение в (9):

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{2}(1 - x)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \right|. \quad (10)$$

Перейдем к случаю $x > 1$ $(t < -1)$. Прежде всего в формуле (4) нужно изменить знак:

$$2\int \frac{|t + 1|\,dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3t^2 + 1}} = \\ = -\int \frac{2t\,dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3t^2 + 1}} - 2\int \frac{dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3t^2 + 1}}. \quad (11)$$

Формулы (5) и (6) остаются без изменений, а в формулах (7) и (8) также нужно изменить знак:

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3t^2 + 1}}{2\sqrt{2}} = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3(1 + x)^2 + (1 - x)^2}}{2\sqrt{2}(1 - x)} = \\ = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{2}(1 - x)}, \quad (12)$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{9t^2 + 3} + 2\sqrt{2}\,t}{\sqrt{9t^2 + 3} - 2\sqrt{2}\,t} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)} \right| = \\ = -\ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - \sqrt{2}(1 + x)} \right|. \quad (13)$$

Таким образом, результат, полученный при $x < 1$, остается в силе и при $x > 1$. Окончательно получаем для искомого интеграла формулу

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{2}(1 - x)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + \sqrt{2}(1 + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \right| .$$

1965. Найти

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}.$$

Воспользуемся методом решения задачи 1964 (формулы (1) и (2)). Для чисел α и β получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta + 4 = 0, \\ 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 5 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение вместе с разностью первого и второго образует систему типа системы Виета, решая которую, находим два варианта: $\alpha = 2$, $\beta = -1$ и $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Выберем, например, первый вариант, тогда подстановка принимает следующий вид:

$$x = \frac{2 - t}{t + 1}, \quad t = \frac{2 - x}{x + 1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{3\,\mathrm{d}t}{(t + 1)^2},$$

$$x^2 + 2 = \frac{3(t^2 + 2)}{(t + 1)^2}, \quad 2x^2 - 2x + 5 = \frac{9(t^2 + 1)}{(t + 1)^2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}} = -\frac{1}{3} \int \frac{|t + 1|\,\mathrm{d}t}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}}. \quad (1)$$

Рассмотрим случай $t > -1$ (отвечает значениям $x > -1$), тогда

$$\int \frac{|t+1|\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}. \quad (2)$$

Первый интеграл вычисляется последовательными подстановками $u = t^2$, $v = \sqrt{u+1}$:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+2)\sqrt{u+1}} =$$
$$= \int \frac{dv}{v^2+1} = \operatorname{arctg} v + C_1 =$$
$$= \operatorname{arctg}\sqrt{t^2+1} + C_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} + C_1. \quad (3)$$

Второй интеграл вычислим подстановкой Абеля:

$$z = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad t = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad dt = \frac{dz}{(1-z^2)^{3/2}}.$$

Имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dz}{2-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}\right| + C_2 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(t^2+1)}+t}{\sqrt{2(t^2+1)}-t}\right| + C_2 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}\right| + C_2. \quad (4)$$

Перейдем к случаю $t < -1$ (отвечает значениям $x < -1$). В этом случае вместо (2) имеем формулу

$$\int \frac{|t+1|\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = -\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} - \int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}. \quad (5)$$

В последнем выражении формулы (3) также надо изменить знак:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{t^2+1} + C_1 =$$
$$= -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} + C_1. \quad (6)$$

Изменения надо внести и в формулу (4) при переходе от переменной t к переменной x:

$$\int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(t^2+1)}+t}{\sqrt{2(t^2+1)}-t} \right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)} \right| + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)} \right| + C_2. \quad (7)$$

Учитывая внесенные изменения, получаем, что окончательный результат одинаков в обоих случаях:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)} \right| -$$

$$- \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} + C.$$

§ 4.3. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Существует три подстановки Эйлера.

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + z$, если $a > 0$.
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$.
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = z(x-x_1)$, если $b^2-4ac > 0$.

Для первой подстановки после возведения в квадрат получаем уравнение

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xz + z^2,$$

из которого находим

$$x = \frac{z^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}\,z}.$$

В случае второй подстановки (также после возведения в квадрат) получаем уравнение

$$ax^2+bx+c = x^2z^2 \pm 2\sqrt{c}\,xz + c.$$

Сокращая обе части уравнения на c и разделив затем на x, находим

$$x = \frac{b \mp 2\sqrt{c}\,z}{z^2 - a}.$$

Третья подстановка применима в том случае, когда квадратный трехчлен имеет два корня x_1 и x_2. В этом случае $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Возводя обе части формулы замены в квадрат, получаем уравнение

$$a(x - x_1)(x - x_2) = z^2(x - x_1)^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = \frac{x_1 z^2 - ax_1}{z^2 - a}.$$

Таким образом, в каждом случае и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и x рационально выражаются через новую переменную, поэтому после замены мы получаем интеграл от рациональной функции. Нетрудно видеть, что подстановки Эйлера принципиально решают вопрос о вычислении рассматриваемых интегралов. При этом всегда можно обойтись первой или последней подстановкой. В самом деле, если первую и третью подстановки нельзя использовать, то $a < 0$ и $b^2 - 4ac \leqslant 0$. Отсюда следует, что квадратный трехчлен всюду неположителен и область определения подынтегральной функции может состоять максимум только из одной точки. Вопрос о вычислении интеграла от такой функции не стоит.

Рассмотрим применение подстановок Эйлера на задачах.

1966. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$

Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$. После возведения в квадрат получаем $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$. Это равенство дает линейное уравнение $x + 1 = t^2 - 2tx$, решая которое находим x. Таким образом,

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)dt}{(1 + 2t)^2}, \quad x + \sqrt{x^2 + x + 1} = t$$

и интеграл

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2(t^2 + t + 1)}{t(1 + 2t)^2}\,dt. \qquad (1)$$

Интеграл в правой части (1) можно вычислить методом разложения подынтегральной функции в сумму элементарных дробей:

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2}.$$

Освобождаясь здесь от знаменатели и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(4A+2B)t^2 + (4A+B+C)t + A = 2t^2 + 2t + 2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 4A+2B=2, \\ 4A+B+C=2, \\ A=2, \end{cases}$$

находим

$$A=2, \quad B=-3, \quad C=-3.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$
$$= \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C,$$

где $t = x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1967. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Воспользуемся подстановкой $\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$. После возведения в квадрат получаем $1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1$. Это равенство дает линейное уравнение $-2-x = xt^2-2t$, решая которое находим x. Таким образом,

$$x = \frac{2(t-1)}{t^2+1}, \quad dx = -\frac{2(t^2-2t-1)dt}{(t^2+1)^2},$$
$$1+\sqrt{1-2x-x^2} = xt = \frac{2t(t-1)}{t^2+1}$$

и интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{(-t^2+2t+1)dt}{t(t-1)(t^2+1)}.$$

Далее находим разложение подынтегральной функции на элементарные дроби:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем

$$(A+B+C)t^3+(D-A-C)t^2+(A+B-D)t-A = -t^2+2t+1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ D-A-C=-1, \\ A+B-D=2, \\ -A=1, \end{cases}$$

находим

$$A=-1, \quad B=1, \quad C=0, \quad D=-2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$

Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x^2-2x+2} = t-x$. Возводя в квадрат, получаем $x^2-2x+2 = t^2-2tx+x^2$. Это дает для x линейное уравнение $-2x+2 = t^2-2tx$, решая которое, находим

$$x = \frac{t^2-2}{2(t-1)}, \quad dx = \frac{(t^2-2t+2)dt}{2(t-1)^2}, \quad t = x+\sqrt{x^2-2x+2},$$

$$\sqrt{x^2-2x+2} = t-x = \frac{t^2-2t+2}{2(t-1)}.$$

Отсюда получаем, что

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{(t^2-2)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Для вычисления последнего интеграла делаем подстановку $t = u + 1$:

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{(u^2+2u-1)(u^2+1)^2}{u^4}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{u^6+2u^5+u^4+4u^3-u^2+2u-1}{u^4}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{u^3}{3}+u^2+u+4\ln|u|+\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{3u^3}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(t-1)^3+(t-1)^{-3}\right]+\left[(t-1)^2-(t-1)^{-2}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[(t-1)+(t-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C,$$

где $t = x + \sqrt{x^2-2x+2}$.

Замечание. Без подстановки Эйлера данный интеграл можно было вычислить следующим образом:

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int\left[\frac{1}{2}(2x-2)+1\right]\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int(2x-2)\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + \int\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Первый интеграл в (1) вычисляется заменой $v = x^2 - 2x + 2$:

$$\int(2x-2)\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{v}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{3}v^{3/2}+C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-2x+2)^3}+C,$$

а второй — заменой $z = x + 1$:

$$\int\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1) =$$

$$= \int\sqrt{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}+\frac{1}{2}\ln(z+\sqrt{z^2+1})+C =$$

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})+C.$$

Подставляя найденные интегралы в (1), получаем ответ:

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x+2)^3}+$$
$$+\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})+C.$$

1969. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x.$

Так как $\sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{(x+1)(x+2)}$, то можно воспользоваться подстановкой

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1).$$

Возводя данное равенство в квадрат, получаем

$$(x+1)(x+2) = t^2(x+1)^2.$$

Выражая t через x, находим

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}, \quad x = \frac{2-t^2}{t^2-1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2},$$
$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) = \frac{t}{t^2-1}.$$

Отсюда получаем, что

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{2(t^2+t-2)t\,\mathrm{d}t}{(2+t-t^2)(t^2-1)^2} =$$
$$= -2\int \frac{t(t+2)\mathrm{d}t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}.$$

Далее ищем разложение

$$f(t) = -2\frac{t(t+2)}{(t-1)(t-2)(t+1)^3} =$$
$$= \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{(t+1)^3}.$$

Из явного вида функции $f(t)$ следует, что

$$f(t) \sim \frac{3}{4(t-1)} \quad \text{при } t \to 1, \quad f(t) \sim -\frac{16}{27(t-2)} \quad \text{при } t \to 2,$$

$$f(t) \sim \frac{1}{3(t+1)^3} \quad \text{при } t \to -1.$$

Поэтому

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = -\frac{16}{27}, \quad E = \frac{1}{3}.$$

Коэффициент D можно найти, вычисляя второй член асимптотики функции $f(t)$ при $t \to -1$:

$$f(t) - \frac{1}{3(t+1)^3} =$$

$$= -\frac{7t+2}{3(t-1)(t-2)(t+1)^2} \sim \frac{5}{18(t+1)^2} \quad \text{при } t \to -1.$$

Из этого соотношения получаем, что $D = \frac{5}{18}$. Определяя следующий член асимптотики

$$f(t) - \frac{1}{3(t+1)^3} - \frac{5}{18(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{7t+2}{3(t-1)(t-2)(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{5t+22}{18(t-1)(t-2)(t+1)} \sim -\frac{17}{108(t+1)} \quad \text{при } t \to -1,$$

находим $C = -\frac{17}{108}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{17}{108}\ln|t+1| - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2}$.

Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x(1+x)} = t + x$:

$$t = -x + \sqrt{x(1+x)}, \quad x = \frac{t^2}{1-2t}, \quad dx = \frac{2t(1-t)dt}{(1-2t)^2},$$

$$\sqrt{x(1+x)} = t + x = \frac{t(1-t)}{1-2t}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2} = \int \frac{2t(1-t)dt}{(t^2+t-1)^2}. \tag{1}$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства (1), воспользуемся методом Остроградского и найдем разложение

$$\int \frac{2t(1-t)dt}{(t^2+t-1)^2} = \frac{At+B}{t^2+t-1} + \int \frac{Ct+D}{t^2+t-1}\,dt.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$Ct^3 + (C+D-A)t^2 + (D-C-2B)t - A - B - D = -2t^2 + 2t.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C = 0, \\ C + D - A = -2, \\ D - C - 2B = 2, \\ -A - B - D = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{8}{5}, \quad B = -\frac{6}{5}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{2}{5}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{2t(1-t)dt}{(t^2+t-1)^2} = \frac{8t-6}{5(t^2+t-1)} - \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+t-2}. \tag{2}$$

Оставшийся интеграл в правой части (2) вычисляем методом выделения полного квадрата:

$$\int \frac{dt}{t^2+t-2} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+(t+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{5}}{2}-(t+\frac{1}{2})}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right| + C_1. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и полагая $C = -2C_1/5$, получаем

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right| + C,$$

где $t = -x + \sqrt{x(1+x)}$.

Применяя различные методы, найти следующие интегралы.

1971. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

Переводя иррациональность в числитель, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-1}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x}{4}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right) +$$

$$+ \left(\frac{x}{4}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C =$$

$$= \frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + C.$$

1972. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

Воспользуемся заменой $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, получаем

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{(1-x)^2(1+x+x^2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} =$$

$$= \int \frac{t^4-1}{3t^4+1}\,dt = \int \frac{\frac{1}{3}(3t^4+1)-\frac{4}{3}}{3t^4+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int dt - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{3t^4+1} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{3t^4+1}.$$

В оставшемся интеграле сделаем замену $u = \sqrt[4]{3}t$, тогда

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{3\sqrt[4]{3}}\int \frac{du}{u^4+1}.$$

Последний интеграл вычислен в решении задачи 1884:

$$\int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{2}}{1-u^2} + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}t - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left[\ln\frac{\sqrt{3}t^2+\sqrt[4]{12}t+1}{\sqrt{3}t^2-\sqrt[4]{12}t+1} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{12}t}{\sqrt{3}t^2-1}\right] + C,$$

где $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1973. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \int \frac{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\sqrt{2}}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2-2}\,dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x + C.$$

1974. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

Переведем иррациональность из знаменателя в числитель:

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx =$$
$$= \int \frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})((1+x)-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}\,dx =$$
$$= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\,dx - \int \frac{dx}{x} =$$
$$= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\,dx - \ln|x|. \quad (1)$$

Для вычисления интеграла в правой части (1) переведем иррациональность из числителя в знаменатель:

$$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1+x+x^2}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx =$$
$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} =$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}\right) +$$
$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} =$$
$$= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} =$$
$$= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}. \quad (2)$$

Оставшийся в (2) интеграл вычислен в решении задачи 1856:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right| + C_1. \qquad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x+x^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|-$$
$$-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right| - \ln|x| + C_1.$$

Преобразуем слагаемые, содержащие логарифмы:

$$\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right| - \ln|x| =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}\right| - \frac{1}{2}\ln 2-$$
$$-\left(\ln\left|x+2+2\sqrt{1+x+x^2}\right| - \ln|x|\right) - \ln|x| =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}\right|-$$
$$-\ln\left|x+2+2\sqrt{1+x+x^2}\right| - \frac{1}{2}\ln 2 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Полагая $C = C_1 - (\ln 2)/2$, получаем окончательно

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x+x^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2} + C.$$

1975. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

Переводя иррациональность в числитель, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,d\,x = \int \sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx =$$
$$= \int (x+1)\sqrt{x}\,dx - \int x\sqrt{x+1}\,dx. \quad (1)$$

Вычисляем получившиеся интегралы:

$$\int (x+1)\sqrt{x}\,dx = \int \left(x^{3/2}+x^{1/2}\right)dx = \frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C_1.$$
$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int ((x+1)-1)\sqrt{x+1}dx =$$
$$= \int \left((x+1)^{3/2}-(x+1)^{1/2}\right)dx =$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C_2.$$

Подставляя полученные значения в (1), окончательно имеем

$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right] -$$
$$-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{5/2}-x^{5/2}\right]+C.$$

1976. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

Рассмотрим сначала случай $x > 0$ и сделаем замену $u = $ $= x + \dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2}}.$$

При положительном x величина u также положительна, поэтому делая дальше замену $v = 1/u$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2}} = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-2v^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(v\sqrt{2})}{\sqrt{1-(v\sqrt{2})^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin v\sqrt{2} + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C.$$

Полученный результат при $C = 0$ представляет нечетную функцию, в то время как подынтегральная функция четна. Отсюда следует, что найденная формула справедлива также и при $x < 0$. Таким образом, независимо от знака x

$$\int \frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C.$$

1977. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

Рассмотрим сначала случай $x > 0$ и сделаем замену $u = x - \dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+2}}.$$

Воспользуемся заменой $v = 1/u$. Если $u > 0$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+2}} = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+2v^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(v\sqrt{2})}{\sqrt{1+(v\sqrt{2})^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|v\sqrt{2}+\sqrt{1+2v^2}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{u^2+2}}{u}\right| + C.$$

Если же $u < 0$, то

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{1+2v^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|v\sqrt{2} + \sqrt{1+2v^2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} - \sqrt{u^2+2}}{u}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2-(u^2+2)}{u(\sqrt{2}+\sqrt{u^2+1})}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u}{\sqrt{2}+\sqrt{u^2+1}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{u^2+2}}{u}\right| + C.$$

Таким образом, независимо от знака u

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{u^2+2}}{u}\right| + C.$$

Возвращаясь к первоначальному интегралу, получаем, что при $x > 0$

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right| + C. \quad (1)$$

Убедимся, теперь, что правая часть равенства (1) нечетна при $C = 0$. Действительно, заменяя x на $-x$, получаем

$$\ln\left|\frac{-x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right| = \ln\left|\frac{(x^4+1)-2x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{2})}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{2})}\right| = \ln\left|\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|.$$

С другой стороны, подынтегральная функция в левой части (1) четна. Отсюда следует, что полученный результат сохраняет свою силу при любом знаке x, т. е. окончательно

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right| + C.$$

1978. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

Так как при любом x справедливо равенство $\sqrt{x^4}=x^2$, то делая замену $t=1/x^2$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x^2} + C.$$

1979. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

Делая замену $u=x^2$, получаем

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} = \int \frac{(x^2+1)x\,dx}{x^2\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{(u+1)du}{u\sqrt{u^2+u+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+u+1}}. \quad (1)$$

Первый интеграл в (1) вычисляем методом выделения полного квадрата:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} = \int \frac{d(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+1}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{2}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right| - \ln 2 + C_1 =$$

$$= \ln\left|2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right| + C_2, \quad (2)$$

где $C_2 = C_1 - \ln 2$.

Второй интеграл в правой части равенства (1) вычислен в решении задачи 1856:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+u+1}} = -\ln\left|\frac{u+2+2\sqrt{u^2+u+1}}{u}\right| + C_3 =$$
$$= -\ln\left|\frac{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}\right| + C_3. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2\left(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}} + C.$$

1980. Доказать, что нахождение интеграла

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right) dx,$$

где R — рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной функции.

Если $a = 0$ и $c = 0$, то подынтегральная функция рациональна. При $a \neq 0$ заменой $t = ax + b$, а при $c \neq 0$ заменой $t = cx + d$ рассматриваемый интеграл сводится к интегралу

$$\int R^*(t, \sqrt{t}, \sqrt{t+A})\, dt, \quad (1)$$

где R^* — также рациональная функция. Поэтому достаточно рассмотреть интеграл (1). Для этого интеграла можно воспользоваться заменой

$$u = \sqrt{t} + \sqrt{t+A}. \quad (2)$$

Обратную зависимость к (2) находим, возводя в квадрат равенство $u - \sqrt{t} = \sqrt{t+A}$:

$$t = \left(\frac{u^2-A}{2u}\right)^2, \quad dt = \frac{(u^4-A^2)du}{2u^3},$$

при этом

$$\sqrt{t} = \frac{u^2-A}{2u}, \quad \sqrt{t+A} = \frac{u^2+A}{2u}.$$

Из полученных формул следует, что подстановка (2) рационализирует интеграл.

§ 4.4. ИНТЕГРАЛ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Интеграл от дифференциального бинома (биномиального дифференциала)

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x$$

(a и b — любые постоянные, а m, n и p — рациональные числа) был исчерпывающе исследован П. Л. Чебышевым. Он установил, что этот интеграл вычисляется в конечном виде тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий.

1. p — целое.
2. $\dfrac{m+1}{n}$ — целое.
3. $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое.

В первом случае интегрируемости интеграл от дифференциального бинома сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены:

$$t = \sqrt[N]{x},$$

где N — общий знаменатель дробей m и n. Этот случай рассматривался в самом начале главы (интеграл от простейших иррациональностей, случай, когда дробно-линейная функция является линейной).

Во втором случае к интегралу от рациональной функции приводит подстановка

$$t = \sqrt[N]{a + bx^n},$$

где N — знаменатель дроби p.

Наконец, в третьем случае интегрируемости дифференциального бинома интеграл рационализирует замена

$$t = \sqrt[N]{\frac{a + bx^n}{x^n}} = \sqrt[N]{a^{-n} + b},$$

где N — знаменатель дроби p.

Найти интегралы от дифференциального бинома.

1981. $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}(1+x)^{1/2}\,\mathrm{d}x.$$

Третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку:

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x}},\quad x=\frac{1}{t^2-1},\quad \mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2},\quad 1+x=\frac{t^2}{t^2-1}.$$

Выполняя подстановку и применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2-1)^4}=\frac{1}{3}\int t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2-1)^3}\right)=$$
$$=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^3}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла применим дважды рекуррентную формулу задачи 1921, формула (2) для $n=3$ и $n=2$. При $a=1$, $b=0$, $c=-1$ величина $\Delta=-4$ и

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^3}=I_3=-\frac{t}{4(t^2-1)^2}-\frac{3}{4}I_2,$$
$$I_2=-\frac{t}{2(t^2-1)}-\frac{1}{2}I_1.$$
$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C_1.$$

Из полученных соотношений находим

$$\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-\frac{t}{8(t^2-1)}+$$
$$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\frac{1}{3}x^3\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{12}x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}-$$
$$-\frac{1}{8}x\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{12}x\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\sqrt{x^2+x} +$$

$$+ \frac{1}{16}\ln\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+x} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\sqrt{x^2+x} +$$

$$+ \frac{1}{16}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2 + C = \frac{1}{3}(x^2+x)\sqrt{x^2+x} -$$

$$- \frac{1+2x}{8}\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+x)^3} - \frac{1+2x}{8}\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) + C.$$

1982. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$

Первый случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \int x^{1/2}(1+x^{1/3})^{-2}dx.$$

Делаем замену:

$$t = \sqrt[6]{x}, \quad x = t^6, \quad dx = 6t^5dt, \quad \sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{t} = t^2.$$

Получаем

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int \frac{t^8dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(t^2+1)^2}\right)dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t -$$

$$- 6\int\frac{4(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 24\int\frac{dt}{t^2+1} +$$

$$+ 6\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 24\operatorname{arctg} t + 6\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Последний интеграл вычислен в решении задачи 1817 (в которой нужно положить $a = 1$):

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C_1.$$

Используя этот результат, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 21\operatorname{arctg} t + \frac{3t}{t^2+1} + C =$$

$$= \frac{6}{5}x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21\operatorname{arctg} x^{1/6} + C.$$

1983. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Второй случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{2/3})^{-1/2}\,\mathrm{d}x.$$

Делаем замену:

$$t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}, \quad x = (t^2-1)^{3/2}, \quad \mathrm{d}x = 3t\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Получаем

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int (t^2-1)^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int (t^4 - 2t^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C,$$

где $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

1984. $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Второй случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^5(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x.$$

Делаем замену

$$t = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Получаем

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int (1-t^2)^2\, dt = -\int (1-2t^2+t^4)\, dt =$$
$$= -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C,$$

где $t = \sqrt{1-x^2}$.

1985. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Третий случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0 (1+x^3)^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Делаем замену

$$t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}, \quad dx = -\frac{t^2\, dt}{(t^3-1)^{4/3}}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{t\, dt}{1-t^3}. \tag{1}$$

Интеграл в правой части равенства (1) вычисляем методом неопределенных коэффициентов. Так как $t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$, то ищем разложение:

$$\frac{t}{1-t^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)t^2 + (A-B+C)t + (A-C) = -t.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=-1, \\ A-C=0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Вычисляем интеграл

$$\int \frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\int \frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\ln|t-1| +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)}{t^2+t+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\ln|t-1| +$$

$$+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Итак

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1986. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Третий случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Делаем замену

$$t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}},$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{(t^4-1)^{5/4}}, \quad \sqrt[4]{1+x^4} = tx = \frac{t}{\sqrt[4]{t^4-1}}.$$

Получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^4-1} = -\int \frac{(t^2-1)+1}{t^4-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-1} = -\operatorname{arctg} t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-1}. \qquad (1)$$

Оставшийся в правой части равенства (1) интеграл вычислен в решении задачи 1883:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C_1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1987. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

Второй случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \int x^{-1}(1+x^6)^{-1/6}\,dx.$$

Делаем замену

$$t = \sqrt[6]{1+x^6}, \quad x = \sqrt[6]{t^6-1}, \quad dx = \frac{t^5 dt}{(t^6-1)^{5/6}}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \int \frac{t^4\,dt}{t^6-1}. \tag{1}$$

Разложение подынтегральной функции в правой части равенства (1) можно упростить, разбив его на два этапа. Сначала разложим дробь по переменной $z = t^2$:

$$\frac{t^4}{t^6-1} = \frac{z^2}{z^3-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+z+1}. \tag{2}$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)z^2 + (A-B+C)z + (A-C) = z^2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A-B+C=0, \\ A-C=0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{t^4}{t^6-1}=\frac{1}{3(z-1)}+\frac{2z+1}{3(z^2+z+1)}. \qquad (3)$$

На втором этапе раскладываем дроби, полученные на первом этапе. Первая дробь

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right). \qquad (4)$$

Для разложения второй дроби нужно разложить на множители многочлен $z^2+z+1=t^4+t^2+1$. Это можно сделать с помощью формулы разности квадратов следующим образом:

$$t^4+t^2+1=(t^2+1)^2-t^2=$$
$$=\big((t^2+1)-t\big)\big((t^2+1)+t\big)=(t^2-t+1)(t^2+t+1).$$

Впрочем, можно было использовать разложение исходного многочлена t^6-1 с помощью формулы разности квадратов и формул разности и суммы кубов:

$$t^6-1=(t^3-1)(t^3+1)=(t-1)(t^2+t-1)(t+1)(t^2-t+1).$$

Далее ищем разложение:

$$\frac{2z+1}{z^2+z+1}=\frac{2t^2+1}{t^4+t^2+1}=\frac{at+b}{t^2+t+1}+\frac{ct+d}{t^2-t+1}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(a+b)t^3+(b-a+c+d)t^2+(a-b+c+d)t+(b+d)=2t^2+1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a+b=0,\\ b-a+c+d=2,\\ a-b+c+d=0,\\ b+d=1,\end{cases}$$

находим

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2},\quad d=\frac{1}{2}.$$

что дает

$$\frac{2z+1}{z^2+z+1} = -\frac{t-1}{2(t^2+t+1)} + \frac{t+1}{2(t^2-t+1)}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получаем искомое разложение

$$\frac{t^4}{t^6-1} = \frac{1}{6(t-1)} - \frac{1}{6(t+1)} + \frac{t+1}{6(t^2-t+1)} - \frac{t-1}{6(t^2+t+1)}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{t^4\,dt}{t^6-1} = \frac{1}{6}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,dt -$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}}{t^2+t+1}\,dt = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{12}\int \frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1} +$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-t+1} - \frac{1}{12}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{12}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{12}\ln(t^2+t+1) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{t^2-t+1} + \int \frac{dt}{t^2+t+1}\right) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| +$$

$$+\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^4+t^2+1}. \tag{6}$$

Оставшийся в правой части равенства (6) интеграл вычислен в задаче 1917.

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{3}} + C. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и возвращаясь к переменной x, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| +$$

$$+\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[6]{1+x^6}$.

1988. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

Второй случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = \int x^{-3}(1+x^{-1})^{-1/5}\,dx.$$

Делаем замену

$$t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}, \quad x = \frac{1}{t^5-1}, \quad dx = -\frac{5t^4 dt}{(t^5-1)^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = -5\int t^3(t^5-1)dt = -\frac{5}{9}t^9 + \frac{5}{4}t^4 + C,$$

где $t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

1989. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

Третий случай интегрируемости дифференциального бинома:

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx = \int x^{1/3}(3-x^2)^{1/3}\,dx.$$

Делая замену

$$t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+t^3}}, \quad dx = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{t^2 dt}{(1+t^3)^{3/2}}$$

и используя интегрирование по частям, получаем

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx = \int tx\,dx = -\frac{9}{2}\int \frac{t^3 dt}{(1+t^3)^2} =$$
$$= \frac{3}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{1+t^3}\right) = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3+1}. \quad (1)$$

Оставшийся в (1) интеграл вычислен в задаче 1881:

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получаем окончательный ответ:

$$\int \sqrt[3]{3x - x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \\ - \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}$.

1990. В каких случаях интеграл

$$\int \sqrt{1 + x^m}\,\mathrm{d}x,$$

где m — рациональное число, представляет собой элементарную функцию?

В данном случае мы имеем интеграл от дифференциального бинома

$$\int \sqrt{1 + x^m}\,\mathrm{d}x = \int x^0\,(1 + x^m)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

и можно воспользоваться результатом Чебышева. Возможны только второй и третий случаи интегрируемости. Второй случай получаем при целом $1/m$, т. е. когда $m = 1/k$, где k — целое. Это условие можно также записать в следующем виде:

$$m = \frac{2}{2k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Третий случай интегрируемости имеет место тогда, когда величина

$$k = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}$$

является целым числом. Выражая m через k, находим

$$m = \frac{2}{2k-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Объединяя эти два случая, получаем следующее условие интегрируемости в элементарных функциях: $m = 2/k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ:

$$m = \frac{2}{k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Глава 5

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 5.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Наиболее часто встречается интегрирование функций, которые рационально зависят от синуса и косинуса:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Общим способом вычисления таких интегралов служит применение так называемой «универсальной подстановки», которая сводит рассматриваемый нами интеграл к интегралу от рациональной функции и, таким образом, принципиально решает данный вопрос. Эту подстановку (которая часто приводит к сложным выкладкам) мы рассмотрим позже, а сейчас займемся теми случаями, в которых ее можно не применять и получить более простые интегралы. Не вдаваясь в подробности, приведем простые рекомендации о замене переменной в зависимости от свойств четности функции $R(u, v)$.

1. Функция $R(u, v)$ нечетна по переменной u:

   $$R(-u, v) = -R(u, v).$$

   В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки $t = \cos x$.

2. Функция $R(u, v)$ нечетна по переменной v:

   $$R(u, -v) = -R(u, v).$$

   В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки $t = \sin x$.

3. Функция $R(u, v)$ четна по совокупности переменных:

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки $t = \operatorname{tg} x$.

Отметим, что этих трех подстановок достаточно для вычисления интеграла при любой функции $R(u, v)$. В самом деле, справедливо тождество

$$R(u, v) = R_1(u, v) + R_2(u, v) + R_3(u, v),$$

где

$$R_1(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2},$$

$$R_2(u, v) = \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2},$$

$$R_3(u, v) = \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

При этом функция $R_1(u, v)$ нечетна по u, функция $R_2(u, v)$ нечетна по v, а функция $R_3(u, v)$ четна по совокупности переменных.

Эти же подстановки можно применять и в несколько более общем случае, например, для интегралов

$$I = \int \sqrt[n]{R(\sin x, \cos x)}\, dx.$$

В этом случае после замен получаются интегралы, содержащие простейшие иррациональности. Такие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций методами предыдущей главы (см. задачи 2007–2010).

Перейдем к примерам.

1991. $\int \cos^5 x\, dx.$

Делая замену $t = \sin x$, получаем

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int (1 - t)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

1992. $\int \sin^6 x\,dx$.

$$\int \sin^6 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{3}{8}\cos^2 2x - \frac{1}{8}\cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx. \quad (1)$$

Вычислим оставшиеся интегралы. В первом интеграле применяем «замечательную» формулу из тригонометрии:

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1. \quad (2)$$

Во втором интеграле делаем замену $t = \sin 2x$:

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\,d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 + C_2 = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C_2. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем ответ:

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

1993. $\int \cos^6 x\,dx$.

$$\int \cos^6 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{3}{8}\cos^2 2x + \frac{1}{8}\cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx. \quad (1)$$

Оставшиеся в правой части равенства (1) интегралы вычислены в решении задачи 1992, формулы (2) и (3):

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1, \qquad (2)$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C_2. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем ответ:

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

1994. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx.$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x\,dx =$$

$$= \int \cos^4 x\,dx - \int \cos^6 x\,dx. \qquad (1)$$

Первый интеграл в правой части (1) вычислен в решении задачи 1750:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C_1. \qquad (2)$$

Второй интеграл в равенстве (1) вычислен в задаче 1993:

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C_2. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) получаем ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

1995. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx.$

Делая замену $t = \sin x$, находим

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x) =$$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

1996. $\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \, dx.$

Используя формулу двойного угла и полагая $t = \cos 2x$, находим

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \, dx = \frac{1}{32} \int \sin^5 2x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{64} \int (1 - \cos^2 2x)^2 \, d(\cos 2x) = -\frac{1}{64} \int (1 - t^2)^2 \, dt =$$

$$= -\frac{1}{64} \int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = -\frac{t}{64} + \frac{t^3}{96} - \frac{t^5}{320} + C =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320} + C.$$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx.$

Полагая $t = \cos x$, находим

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} \, d(\cos x) = -\int \frac{1 - t^2}{t^4} \, dt =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} \, dx.$

Делая замену $u = \cos x$, находим

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} \, dx = -\int \frac{\cos^4 x}{(1 - \cos^2 x)^2} \, d(\cos x) = -\int \frac{u^4}{(1 - u^2)^2} \, du =$$

$$= \int \frac{(1-u^4)-1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} =$$

$$= \int \left(-1 + \frac{2}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u - \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} =$$

$$= -u + \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}. \quad (1)$$

Оставшийся в правой части равенства (1) интеграл можно вычислить, согласно рекуррентной формуле из задачи 1921, формула (2), с $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$ и $n = 2$. Применяя эту формулу, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} =$$

$$= \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = -u + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{u}{2(1-u^2)} + C. \quad (3)$$

Полученный результат можно слегка преобразовать, если учесть, что

$$-u - \frac{u}{2(1-u^2)} = -\frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\left(u - \frac{u}{1-u^2}\right) = -\frac{3}{2}u - \frac{u^3}{2(1-u^2)}, \quad (4)$$

а

$$\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = \ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| = -\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| = -2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|. \quad (5)$$

Из (3), (4) и (5) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} + C.$$

1999. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Делая замену $u = \cos x$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2} = -\int \frac{du}{(1-u^2)^2}. \quad (1)$$

Интеграл, получившийся в правой части равенства (1), вычислен в решении задачи 1998, формула (2):

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

Учитывая, что

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = -\ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right| =$$
$$= \ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2000. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Делая замену $u = \sin x$, находим

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2}. \quad (1)$$

Полученный в правой части равенства (1) интеграл вычислен в решении задачи 1998, формула (2):

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C. \qquad (3)$$

Учитывая, что

$$\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \ln\left|\frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

получаем следующий ответ:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2001. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}$.

Учитывая формулу двойного угла и связь между синусом и котангенсом одного угла, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x} = 16\int\frac{dx}{\sin^4 2x} =$$

$$= -8\int(\operatorname{ctg}^2 2x+1)d(\operatorname{ctg} 2x) = -\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x - 8\operatorname{ctg} 2x + C.$$

2002. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}$.

Делая замену $t = \operatorname{tg} x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^3\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int(\operatorname{tg}^2 x+1)^3\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}d(\operatorname{tg} x) = \int\frac{(t^2+1)^3}{t^3}dt =$$

$$= \int\frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3}dt = \frac{t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+3\ln|t|-\frac{1}{2t^2}+C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+C.$$

2003. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$.

Делая замену $u = \cos x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x} = \int \frac{du}{(u^2-1)u^4}. \quad (1)$$

Разложение подынтегральной функции на более простые дроби удобно провести, вводя промежуточную переменную $v = u^2$. В этом случае

$$\frac{1}{(u^2-1)u^4} = \frac{1}{(v-1)v^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1}.$$

Освобождаясь в последнем равенстве от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+C)v^2 + (B-A)v - B = 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B - A = 0, \\ -B = 1, \end{cases}$$

получаем

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(u^2-1)u^4} = -\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v-1} = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^2-1}$$

и интеграл

$$\int \frac{du}{(u^2-1)u^4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C. \quad (2)$$

Возвращаясь к переменной x и учитывая равенство

$$\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = \ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| = -\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| = -2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$, $dx = dt/(1+t^2)$,

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, то

$$\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) = -2\ln|\cos x|,$$

и поэтому

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx.$

Делаем замену $t = \operatorname{ctg} x$, $dx = -dt/(1+t^2)$,

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = -\int \frac{t^6 dt}{1+t^2} = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \int \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (1)$$

Так как $(\operatorname{arcctg} t)' = -1/(1+t^2)$, то

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = -\operatorname{arcctg} t + C_1. \qquad (2)$$

Учитывая сделанную замену $t = \operatorname{ctg} x$, формулу (2) нужно считать более удобной, чем табличную с арктангенсом. Из (1) и (2), получаем

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t - \operatorname{arcctg} t + C_1.$$

Возвращаясь к переменной x, отметим, что при $x \in (-\pi k; -\pi k + \pi)$, где k — целое,

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + \pi k,$$

следовательно,

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3}{3} - \operatorname{ctg} x - x - \pi k + C_1,$$

где величина k определяется принадлежностью x к соответствующему интервалу. Полагая $C = C_1 - \pi k$, получаем окончательно

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = -x - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3}{3} - \operatorname{ctg} x + C.$$

2006. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx.$

Делая замену $t = \operatorname{tg} x$, получаем

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4 \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x\,d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

2007. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}.$

Делая замену $t = \operatorname{tg} x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}} = \int \frac{1}{\sin^2 x}\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)\sqrt{\operatorname{tg} x}\,d(\operatorname{tg} x) = \int \left(t^{1/2} + t^{-3/2}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{-1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C.$$

2008. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\,\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Делая замену $u = \sin x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\cos x\,\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x\,\sqrt[3]{\sin^2 x}} =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{(1-u^2)\,\sqrt[3]{u^2}}. \qquad (1)$$

Следующий шаг состоит в приведении интеграла (1) к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \sqrt[3]{u}$. Для этой подстановки $u = t^3$ и $du = 3t^2\,dt$, поэтому

$$\int \frac{du}{(1-u^2)\,\sqrt[3]{u^2}} = 3\int \frac{dt}{1-t^6}. \qquad (2)$$

Используя формулу разности квадратов и формулы разности и суммы кубов, получаем

$$1 - t^6 = (1-t^3)(1+t^3) =$$
$$= (1-t)(1+t+t^2)(1+t)(1-t+t^2).$$

Поэтому разложение подынтегральной функции в правой части равенства (2) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{1-t^6} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1-t+t^2} + \frac{Et+F}{1+t+t^2}.$$

Коэффициенты A и B легко найти, используя асимптотику подынтегральной функции:

$$f(t) = \frac{1}{1-t^6} = \frac{1}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t)(1-t+t^2)}.$$

При $t \to 1$

$$f(t) \sim \frac{1}{6(1-t)},$$

а при $t \to -1$

$$f(t) \sim \frac{1}{6(1+t)}.$$

Поэтому $A = 1/6$, $B = 1/6$. Для определения остальных коэффициентов можно использовать разложение

$$\frac{Ct+D}{1-t+t^2}+\frac{Et+F}{1+t+t^2}=f(t)-\left(\frac{1}{6(1-t)}+\frac{1}{6(1+t)}\right)=$$
$$=\frac{1}{1-t^6}-\left(\frac{1}{6(1-t)}+\frac{1}{6(1+t)}\right)=\frac{1}{1-t^6}-\frac{1}{3(1-t^2)}=$$
$$=\frac{t^6-3t^2+2}{3(1-t^6)(1-t^2)}=-\frac{t^4+t^2-2}{3(1-t^6)}=\frac{t^2+2}{3(1-t+t^2)(1+t+t^2)}.$$

Освобождаясь в равенстве

$$\frac{t^2+2}{3(1-t+t^2)(1+t+t^2)}=\frac{Ct+D}{1-t+t^2}+\frac{Et+F}{1+t+t^2}$$

от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(C+E)t^3+(C+D-E+F)t^2+(C+D+E-F)t+(D+F)=\frac{t^2+2}{3}.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C+E=0, \\ C+D-E+F=\frac{1}{3}, \\ C+D+E-F=0, \\ D+F=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

получаем

$$C=-\frac{1}{6},\quad D=\frac{1}{3},\quad E=\frac{1}{6},\quad F=\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1-t^6}=\frac{1}{6(1-t)}+\frac{1}{6(1+t)}-\frac{t-2}{6(1-t+t^2)}+\frac{t+2}{6(1+t+t^2)} \qquad (3)$$

и

$$\int\frac{1}{1-t^6}=-\frac{1}{6}\ln|1-t|+\frac{1}{6}\ln|1+t|-$$
$$-\int\frac{t-2}{6(1-t+t^2)}+\int\frac{t+2}{6(1+t+t^2)}. \qquad (4)$$

Вычисляем оставшиеся интегралы:

$$\int \frac{(t-2)\,\mathrm{d}t}{1-t+t^2} = \int \frac{\frac{1}{2}(2t-1)-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2-t+1)}{t^2-t+1} - $$
$$-\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C_1. \tag{5}$$

$$\int \frac{(t+2)\,\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + $$
$$+\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C_2. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6} = -\frac{1}{6}\ln|1-t| + \frac{1}{6}\ln|1+t| - \frac{1}{12}\ln(t^2-t+1) +$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{3} + \frac{1}{12}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{3} + C_3.$$

Преобразуем получившееся выражение, используя теорему сложения арктангенсов (формула (1) задачи 1884). Согласно этой формуле

$$\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} + \pi k.$$

Так как при некотором целом n

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1-t^2}{\sqrt{3}t} + \pi n,$$

то

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(1+t)(1+t^3)}{(1-t)(1-t^3)}\right| - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-t^2}{\sqrt{3}t} + C_4. \tag{7}$$

Из выражений (1), (2) и (7) получаем окончательный результат:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\,\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)(1+t^3)}{(1-t)(1-t^3)}\right| - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-t^2}{\sqrt{3}t} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Делаем замену

$$u = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{du}{1+u^2},$$

получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u^2)}. \qquad (1)$$

Полученный интеграл рационализируется подстановкой

$$t = \sqrt{u}, \quad u = t^2, \quad du = 2t\,dt,$$

применяя которую, находим

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u^2)} = 2\int \frac{dt}{1+t^4}. \qquad (2)$$

Интеграл, находящийся в правой части равенства (2), вычислен в задаче 1884.

$$\int \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C. \qquad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C,$$

где $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

Делаем замену

$$u = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{du}{1+u^2},$$

получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}\,(1+u^2)}. \qquad (1)$$

Полученный интеграл рационализируется подстановкой

$$t = \sqrt[3]{u}, \quad u = t^3, \quad du = 3t\,dt,$$

применяя которую, находим

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}\,(1+u^2)} = 3\int \frac{t\,dt}{1+t^6}. \qquad (2)$$

Интеграл в фомуле (2) можно упростить заменой $z = t^2$. В результате этой замены получаем

$$\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^6} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3}. \tag{3}$$

Интеграл в правой части выражения (3) вычислен в задаче 1881.

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C. \tag{4}$$

Из равенств (1)–(4) получаем ответ:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $z = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$.

§ 5.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим применение рекуррентных соотношений для интеграла

$$I_{\alpha,\beta} = \int \sin^\alpha x \cos^\beta x\,\mathrm{d}x.$$

Применение рекуррентных соотношений для вычисления других интегралов можно найти в решениях задач 2057–2059.

В принципе этот интеграл заменой $t = \sin^2 x$ сводится к дифференциальному биному

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\int (1-t)^{(\beta-1)/2} t^{(\alpha-1)/2}\,\mathrm{d}t.$$

Учитывая случаи интегрируемости дифференциального бинома (см. предыдущую главу), получаем, что интересующий нас интеграл берется в конечном виде только в следующих трех случаях.

1. α — нечетное целое число.
2. β — нечетное целое число.
3. $\alpha+\beta$ — четное целое число.

Для упрощения вычислений можно использовать рекуррентные соотношения, которые мы приводим без вывода.

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta+1} x}{\beta+1} + \frac{\alpha+\beta+2}{\beta+1} I_{\alpha,\beta+2} \quad (\beta \neq -1).$$

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta+1} x}{\alpha+1} + \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1} I_{\alpha+2,\beta} \quad (\alpha \neq -1).$$

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\sin^{\alpha+1} x \cdot \cos^{\beta-1} x}{\alpha+\beta} + \frac{\beta-1}{\alpha+\beta} I_{\alpha,\beta-2} \quad (\alpha+\beta \neq 0).$$

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{\sin^{\alpha-1} x \cdot \cos^{\beta+1} x}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta} I_{\alpha-2,\beta} \quad (\alpha+\beta \neq 0).$$

Задача 15. Вывести первое из этих соотношений.
Задача 16. Вывести второе из этих соотношений.
Задача 17. Вывести третье из этих соотношений.
Задача 18. Вывести четвертое из этих соотношений.

Если оба показателя α и β — целые числа, то последовательным применением формул приведения (понижая или повышая любой из этих показателей на два), можно привести интеграл к одному из девяти простейших интегралов, отвечающих различным комбинациям из значений α и β, равных 0, -1 или 1:

1) $\displaystyle\int dx = x + C;$

2) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

3) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C;$

8) $\int \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$;

9) $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \, \mathrm{d}x = \ln|\operatorname{tg} x| + C$.

Вывод формул понижения для частного случая (один из показателей является целым числом, а второй равен нулю) и примеры их использования приведены в решениях задач 2011 и 2012.

2011. Вывести формулы понижения для интегралов:

$$\text{а) } I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x; \quad \text{б) } K_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить

$$\int \sin^6 x \quad \text{и} \quad \int \cos^8 x \, \mathrm{d}x.$$

Получим формулу понижения для первого интеграла. Используя основное тригонометрическое тождество и интегрирование по частям, находим

$$I_n = \int \sin^{n-2} x(1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x = \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x -$$

$$- \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x = I_{n-2} - \int \cos x \, \mathrm{d}\left(\frac{\sin^{n-1} x}{n-1}\right) =$$

$$= I_{n-2} - \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} - \int \frac{\sin^n x}{n-1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= I_{n-2} - \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n.$$

Решая полученное уравнение относительно I_n, получаем искомое соотношение

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \qquad (1)$$

Аналогично получаем другую формулу понижения:

$$K_n = \int \cos^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\,dx = \int \cos^{n-2} x\,dx -$$

$$- \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x\,dx = K_{n-2} + \int \sin x\, d\left(\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}\right) =$$

$$= K_{n-2} + \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n-1} - \int \frac{\cos^n x}{n-1}\,dx =$$

$$= K_{n-2} + \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} K_n.$$

Решая полученное уравнение относительно K_n, получаем

$$K_n = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2}. \tag{2}$$

Применяя трижды формулу (1), находим

$$\int \sin^6 x dx = I_6 = -\frac{\cos x \cdot \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4 = -\frac{\cos x \cdot \sin^5 x}{6} +$$

$$+ \frac{5}{6}\left(-\frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_2\right) = -\frac{1}{6}\cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \cdot \sin^3 x +$$

$$+ \frac{5}{8} I_2 = -\frac{1}{6}\cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \cdot \sin^3 x + \frac{5}{8}\left(-\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right).$$

Так как

$$I_0 = \int dx = x + C,$$

то

$$\int \sin^6 x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \cdot \sin^3 x - \frac{5}{16}\cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + C.$$

Интеграл от восьмой степени косинуса вычисляется четырехкратным применением формулы понижения (2):

$$\int \cos^8 x\,\mathrm{d}x = K_8 = \frac{\sin x\cdot\cos^7 x}{8} + \frac{7}{8}K_6,$$

$$K_6 = \frac{\sin x\cdot\cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}K_4, \quad K_4 = \frac{\sin x\cdot\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}K_2,$$

$$K_2 = \frac{\sin x\cdot\cos x}{2} + \frac{1}{2}K_0, \quad K_0 = \int \mathrm{d}x = x + C.$$

Из полученных соотношений находим

$$\int \cos^8 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\sin x\cdot\cos^7 x + \frac{7}{48}\sin x\cdot\cos^5 x + \\ + \frac{35}{192}\sin x\cdot\cos^3 x + \frac{35}{128}\sin x\cdot\cos x + \frac{35}{128}x + C.$$

2012. Вывести формулы понижения для интегралов:

$$\text{а) } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}; \quad \text{б) } K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x} \quad \text{и} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}.$$

С помощью основного тригонометрического тождества и интегрирования по частям получаем

$$I_n = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x} + \int \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin^n x} =$$

$$= I_{n-2} + \int \cos x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}\right) =$$

$$= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(n-1)\sin^{n-2} x} =$$

$$= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}I_{n-2}.$$

Приводя подобные члены, получаем формулу понижения

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}. \qquad (1)$$

Аналогично преобразуем и второй интеграл

$$K_n = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^n x} =$$
$$= K_{n-2} + \int \sin x\, d\left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}\right) =$$
$$= K_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \int \frac{dx}{(n-1)\cos^{n-2} x} =$$
$$= K_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} K_{n-2}.$$

Приводя подобные члены, получаем вторую формулу понижения

$$K_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}. \qquad (2)$$

Применяя дважды первую формулу понижения (1), находим

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = I_5 = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 =$$
$$= -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} I_1\right). \qquad (3)$$

Интеграл I_1 вычислен в задаче 1703:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Для второго интеграла формулу понижения (2) нужно применить трижды:

$$\int \frac{dx}{\cos^7 x} = K_7 = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6} K_5, \quad K_5 = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4} K_3,$$
$$K_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} K_1.$$

Интеграл K_1 вычислен в задаче 1704:

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Из полученных соотношений находим

$$\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} +$$
$$+ \frac{5\sin x}{16\cos^2 x} + \frac{5}{16} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

§ 5.3. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Следующие интегралы вычисляются с помощью применения формул.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \tag{I}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]. \tag{II}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]. \tag{III}$$

Найти интегралы.

2013. $\int \sin 5x \cdot \cos x \, dx.$

Применяя формулу (III), получаем

$$\int \sin 5x \cdot \cos x \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 6x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$$

2014. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \,\mathrm{d}x.$

Применяя формулу (II), получаем

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 3x)\cos 3x \,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int (\cos x \cdot \cos 3x + \cos^2 3x)\,\mathrm{d}x.$$

Снова дважды применяя ту же формулу, находим

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{4}\int ((\cos 2x + \cos 4x) + (1 + \cos 6x))\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{x}{4} + \frac{\sin 6x}{24} + C = \\ = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C.$$

2015. $\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} \,\mathrm{d}x.$

С помощью формулы (I) находим

$$\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right)\sin \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int \left(\cos \frac{x}{2}\sin \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos \frac{3x}{2}\sin \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x.$$

Применяя теперь формулу (III), получаем

$$\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{4}\int \left(-\sin \frac{x}{6} + \sin \frac{5x}{6} + \sin \frac{7x}{6} - \sin \frac{11x}{6}\right)\mathrm{d}x = \\ = \frac{3}{2}\cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos \frac{11x}{6} + C.$$

2016. $\int \sin x \cdot \sin(x+a)\ \sin(x+b)\,\mathrm{d}x.$

Преобразуя два последних сомножителя в интеграле по формуле (I), находим

$$\int \sin x \cdot \sin(x+a)\sin(x+b)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x(\cos(a-b) - \cos(2x+a+b))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin x \cdot \cos(a-b) - \sin x \cdot \cos(2x+a+b))\,\mathrm{d}x.$$

Применяя теперь формулу (III), получаем

$$\int \sin x \cdot \sin(x+a)\ \sin(x+b)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin x\cdot\cos(a-b) - \frac{1}{2}(-\sin(x+a+b) + \sin(3x+a+b))\right)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x - \frac{1}{4}\cos(x+a+b) + \frac{1}{12}\cos(3x+a+b) + C.$$

2017. $\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x.$

1. Рассмотрим случай $|a| = |b|$. Интеграл принимает следующий вид:

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \int \cos^4 |a|x\,\mathrm{d}x.$$

Согласно решению задачи 1750:

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \qquad (1)$$

Если $a \neq 0$, то, применяя формулу из решения задачи 1654, получаем

$$\int \cos^4 |a|x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4|a|}\sin 2|a|x + \frac{1}{32|a|}\sin 4|a|x + C.$$

Если $a = 0$, то

$$\int \cos^4 |a|x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C.$$

2. Пусть теперь $|a| \neq |b|$, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда, используя «замечательную» формулу из тригонометрии (формула (II) при $\alpha = \beta$), получаем

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2ax)(1 + \cos 2bx) \, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2ax + \cos 2bx + \cos 2ax \cdot \cos 2bx) \, dx =$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{1}{4} \int (\cos 2ax \cdot \cos 2bx) \, dx. \tag{2}$$

Согласно формуле (II):

$$\int (\cos 2ax \cdot \cos 2bx) \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\cos(2a - 2b)x + \cos(2a + 2b)x) \, dx =$$
$$= \frac{\sin 2(a-b)x}{4(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{4(a+b)} + C.$$

Отсюда находим

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} +$$
$$+ \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + C.$$

3. Пусть $a \neq 0$, $b = 0$. Из решения задач 1742 и 1654 получаем

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx = \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$$

4. Пусть $a = 0$, $b \neq 0$. Из решения задач 1742 и 1654 получаем

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx = \int \cos^2 bx \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4b} \sin 2bx + C.$$

Ответ.

1. $a = 0,\ b = 0.$

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = x + C.$$

2. $a \neq 0,\ b = 0.$

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C.$$

3. $a = 0,\ b \neq 0.$

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4b}\sin 2bx + C.$$

4. $|a| = |b|,\ a \neq 0.$

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4|a|}\sin 2|a|x + \frac{1}{32|a|}\sin 4|a|x + C.$$

5. $|a| \neq |b|,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$

$$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} +$$
$$+ \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + C.$$

2018. $\displaystyle\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x\,\mathrm{d}x.$

Из формулы тройного угла $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ следует формула

$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha. \qquad (1)$$

Используя формулу (1) и «замечательную» формулу

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha,$$

являющуюся частным случаем формулы (II), получаем

$$\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \, dx = \frac{1}{8}\int (3\sin 2x - \sin 6x)(1+\cos 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3\sin 2x - \sin 6x + 3\sin 2x \cdot \cos 6x - \sin 6x \cdot \cos 6x)dx =$$

$$= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{1}{8}\int (3\sin 2x \cdot \cos 6x - \sin 6x \cdot \cos 6x)\, dx.$$

Для вычисления оставшихся интегралов воспользуемся формулой (III) и формулой синуса двойного угла, являющейся частным случаем формулы (III).

$$\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \, dx = -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{48}\cos 6x +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \left(-\frac{3}{2}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 12x\right) dx =$$

$$= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{64}\cos 4x -$$

$$- \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x + C.$$

Следующие интегралы вычисляются путем применения тождеств

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\left[(x+\alpha) - (x+\beta)\right] \qquad \text{(I)}$$

и

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\left[(x+\alpha) - (x+\beta)\right]. \qquad \text{(II)}$$

Найти интегралы.

2019. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

1. $a - b \neq \pi k$, k — целое. Используя формулу (I), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a-b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\, dx =$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)-\cos(x+a)\cdot\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int(\operatorname{ctg}(x+b)-\operatorname{ctg}(x+a))\,dx. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1698:

$$\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C,$$

поэтому в соответствии с формулой задачи 1654 при любом d

$$\int\operatorname{ctg}(x+d)\,dx=\ln|\sin(x+d)|+C. \quad (2)$$

Вычисляя оставшиеся в равенстве (1) интегралы по формуле (2), получаем

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.$$

2. $a-b=\pi k$, k — целое.

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}=(-1)^k\int\frac{dx}{\sin^2(x+a)}=$$

$$=(-1)^{k+1}\operatorname{ctg}(x+a)+C.$$

2020. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}$.

1. $b-a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, k — целое. Используя формулу (II), получаем

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(a-b)}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)+\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int(\operatorname{ctg}(x+a)+\operatorname{tg}(x+b))\,dx. \quad (1)$$

Согласно решениям задач 1697 и 1698:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C,$$

поэтому в соответствии с формулой задачи 1654 при любом d

$$\int \operatorname{tg}(x+d) \, dx = -\ln|\cos(x+d)| + C. \qquad (2)$$

$$\int \operatorname{ctg}(x+d) \, dx = \ln|\sin(x+d)| + C. \qquad (3)$$

Вычисляя оставшиеся в равенстве (1) интегралы по формулам (2) и (3), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right| + C.$$

2. $b - a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — целое.

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)} = (-1)^{k+1}\int \frac{dx}{\sin^2(x+a)} =$$
$$= (-1)^k \operatorname{ctg}(x+a) + C.$$

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)}$.

1. $a - b \neq \pi k$, k — целое. Используя формулу (I), получаем

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)} =$$
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a-b)}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)} \, dx =$$
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)} \, dx =$$
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b) - \cos(x+a)\cdot\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)} \, dx =$$
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int (\operatorname{tg}(x+a) - \operatorname{tg}(x+b)) \, dx. \qquad (1)$$

Согласно решению задачи 1697:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C,$$

поэтому в соответствии с формулой задачи 1654 при любом d

$$\int \operatorname{tg}(x+d) \, dx = -\ln|\cos(x+d)| + C. \qquad (2)$$

Вычисляя оставшиеся в равенстве (1) интегралы по формуле (2), получаем

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C.$$

2. $a - b = \pi k$, k — целое.

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = (-1)^k \int \frac{dx}{\cos^2(x+a)} = (-1)^k \operatorname{tg}(x+a) + C.$$

2022. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

По формуле разности синусов получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}.$$

Делая замену $t = x/2$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \int \frac{dt}{\sin\left(t - \frac{a}{2}\right)\cos\left(t + \frac{a}{2}\right)}. \qquad (1)$$

Интеграл (1) вычислен в решении задачи 2020. Используя результат этой задачи и возвращаясь к пременной x, получаем ответ

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos a} \ln\left|\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C, & a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \text{ — целое}, \\ (-1)^k \operatorname{ctg}\dfrac{x-a}{2} + C, & a = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \text{ — целое}. \end{cases}$$

2023. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

По формуле суммы косинусов получаем

$$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} = \int \frac{dx}{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\cos\frac{x-a}{2}}.$$

Делая замену $t = x/2$, находим

$$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} = \int \frac{dt}{\cos\left(t+\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(t-\frac{a}{2}\right)}. \qquad (1)$$

Интеграл (1) вычислен в решении задачи 2021. Используя результат этой задачи и возвращаясь к пременной x, получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{\cos x+\cos a} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin a}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C, & a\neq\pi k,\ k \text{ — целое},\\[2ex] (-1)^k \operatorname{tg}\dfrac{x+a}{2} + C, & a=\pi k,\ k \text{ — целое}.\end{cases}$$

2024. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

При $a\neq\pi k$ (k — целое)

$$\int \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+a)\,dx = \int \frac{\sin x\cdot\sin(x+a)}{\cos x\cdot\cos(x+a)}\,dx =$$

$$= \int \frac{[\cos x\cdot\cos(x+a)+\sin x\cdot\sin(x+a)]-\cos x\cdot\cos(x+a)}{\cos x\cdot\cos(x+a)}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos a - \cos x\cdot\cos(x+a)}{\cos x\cdot\cos(x+a)}\,dx =$$

$$= \int \left(\cos a\,\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+a)} - 1\right) dx =$$

$$= \cos a \int \frac{dx}{\cos x\cdot\cos(x+a)} - x. \qquad (1)$$

Согласно решению задачи 2021:

$$\int \frac{dx}{\cos x\cdot\cos(x+a)} = \frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| + C. \qquad (2)$$

Следовательно

$$\int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+a)\,\mathrm{d}x = (\operatorname{ctg} a)\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| - x + C.$$

При $a = \pi k$ (k — целое) рассматриваемый интеграл вычислен в решении задачи 1650:

$$\int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+a)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C.$$

§ 5.4. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Пусть задана рациональная функция (отношение многочленов) двух переменных $R(u,v)$. Интеграл

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

приводится к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной подстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В случае, когда функция $R(u,v)$ обладает той или иной четностью, выгоднее бывает применять другие подстановки. Они выписывались в самом начале главы. Напомним их.

I. Функция $R(u,v)$ нечетна по переменной u:

$$R(-u,v) = -R(u,v).$$

В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки $t = \cos x$.

II. Функция $R(u,v)$ нечетна по переменной v:

$$R(u,-v) = -R(u,v).$$

В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки $t = \sin x$.

III. Функция $R(u, v)$ четна по совокупности переменных:

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

В этом случае рационализация интеграла достигается применением подстановки

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Применение этих подстановок рассмотрим на примерах.

2025. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Для вычисления интеграла воспользуемся универсальной подстановкой:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(t+\frac{1}{3})}{(t+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

2026. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

Делая замену $u = \cos x$, получим

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} = \int \frac{du}{(u+2)(u^2-1)}. \qquad (1)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (1) находим разложение

$$\frac{1}{(u+2)(u^2-1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{Bu+C}{u^2-1}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)u^2+(2B+C)u+(2C-A)=1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2B+C=0, \\ 2C-A=1, \end{cases}$$

находим

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{1}{3}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{du}{(u+2)(u^2-1)}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u+2}-\frac{1}{3}\int\frac{u\,du}{u^2-1}+\frac{2}{3}\int\frac{du}{u^2-1}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|u+2|-\frac{1}{6}\ln|u^2-1|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(u+2)^2|1-u|}{|1+u|^3}+C$$

и поэтому

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}+C.$$

2027. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx.$

Преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{5\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{\sin^2 x+4\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{\sin^2 x+4(1-\cos^2 x)}{\sin x+2\cos x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{(\sin^2 x-4\cos^2 x)+4}{\sin x+2\cos x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{5}\int(\sin x-2\cos x)dx+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}=$$
$$=-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}. \qquad (1)$$

Согласно тригонометрической формуле вспомогательного угла

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x + \operatorname{arctg} 2),$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sin(x + \operatorname{arctg} 2)}.$$

Согласно решению задачи 1703 и формуле из задачи 1654 получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получаем ответ:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx = -\frac{1}{5}(2\sin x + \cos x) + \\ + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C.$$

2028. $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}$; а) $0 < \varepsilon < 1$; б) $\varepsilon > 1$.

Интеграл вычисляется заменой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

а) $0 < \varepsilon < 1$.

$$\int \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x} = \\ = 2\int \frac{dt}{(1-\varepsilon)t^2 + (1+\varepsilon)} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)} = \\ = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,t\right) + C = \\ = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

б) $\varepsilon > 1$.

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = 2\int \frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon-1}\int \frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}+t}{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Полученное выражение можно преобразовать:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{1+t^2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{1+t^2}}\,t}{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{1+t^2}}-\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{1+t^2}}\,t} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{1+t^2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{1+t^2}}\,t\right)^2}{\frac{\varepsilon+1}{1+t^2}-\frac{\varepsilon-1}{1+t^2}t^2} = \frac{\frac{\varepsilon+1}{1+t^2}+\frac{\varepsilon-1}{1+t^2}t^2+2\sqrt{\varepsilon^2-1}\frac{t}{1+t^2}}{\frac{\varepsilon(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\sqrt{\varepsilon^2-1}\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}.$$

Таким образом, при $\varepsilon > 1$

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right| + C.$$

2029. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)dx = x - \int\frac{dx}{1+\sin^2 x}. \qquad (1)$$

Оставшийся интеграл вычисляем с помощью замены:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем ответ:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

2030. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx.$

1. $a \neq 0$, $b = 0$.

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{a^2} \operatorname{ctg} x + C.$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$.

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \operatorname{tg} x + C.$$

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этом случае делаем замену:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2}. \quad (1)$$

Интеграл (1) легко сводится к табличному:

$$\int \frac{dt}{a^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{at}{b} + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

2031. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

1. $a \neq 0$, $b = 0$.

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}. \qquad (1)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (1) делаем замену:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x} = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем ответ:

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = -\frac{1}{3a^4\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$.

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{1}{b^4}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{b^4}\operatorname{tg} x + C.$$

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$. Делаем замену:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(a^2t^2 + b^2)^2}. \qquad (3)$$

Согласно рекуррентной формуле (2) из решения задачи 1921:

$$\int \frac{dt}{(a^2t^2 + b^2)^2} = \frac{t}{2b^2(a^2t^2 + b^2)} + \frac{1}{2b^2}\int \frac{dt}{a^2t^2 + b^2}. \quad (4)$$

Интеграл в правой части равенства (2) вычислен в решении задачи 2030, формула (2):

$$\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b} + C. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) получаем окончательный от

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \\ = \frac{t}{2b^2(a^2t^2+b^2)} + \frac{1}{2ab^2}\operatorname{arctg}\frac{at}{b} + C,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

2032. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx.$

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin x+\cos x}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x+\cos x} = \\ = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}. \tag{1}$$

Согласно формуле вспомогательного угла из курса тригонометрии:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

поэтому

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{2}$$

В задаче 1703 был вычислен интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Применяя к нему формулу задачи 1654, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получаем ответ:

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

2033. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

1. $a=0$, $b\neq 0$.

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2} = \frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{b^2}\operatorname{tg} x + C.$$

2. $a\neq 0$. Делаем замену:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2} =$$

$$= \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + 2ab\sin x\cdot\cos x + b^2\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dt}{a^2t^2+2abt+b^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{(at+b)^2} = -\frac{1}{a(at+b)} + C =$$

$$= -\frac{1}{a(a\operatorname{tg} x+b)} + C = -\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)} + C.$$

2034. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Делаем замену

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^4 x+(\sin x\cdot\cos x)\cos^2 x} = \int \frac{t\,dt}{t^3+1}. \qquad (1)$$

Преобразуем интеграл по переменной t:

$$\int \frac{t\,dt}{t^3+1} = \int \frac{(t+1)-1}{t^3+1}\,dt =$$
$$= \int \frac{t+1}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt - \int \frac{dt}{t^3+1} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2-t+1}\,dt - \int \frac{dt}{t^3+1}. \qquad (2)$$

Первый интеграл в правой части равенства (2) вычисляется методом выделения полного квадрата:

$$\int \frac{dt}{t^2-t+1}\,dt = \int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C. \qquad (3)$$

Второй интеграл вычислен в решении задачи 1881.

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C. \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$\int \frac{t\,dt}{t^3+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + C. \qquad (5)$$

Из соотношений (1) и (5) после элементарных упрощений получаем ответ:

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sin x - \cos x}{\sqrt{3}\cos x} - \frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} + C.$$

2035. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Делаем замену

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Интеграл, полученый в результате замены переменной, вычислен в решении задачи 1712.

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C_1. \tag{2}$$

Правую часть равенства (2) можно преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C_1 = \\ = -\operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{t^2-1} + \mathrm{const} = \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + \mathrm{const}.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) + C = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

2036. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx.$

Преобразуя подынтегральную функцию и полагая $t = 2x$, получаем

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx = \int \frac{4\sin^2 2x}{(1-\cos 2x)^4 + (1+\cos 2x)^4}\,dx =$$
$$= \int \frac{2\sin^2 2x\,dx}{1 + 6\cos^2 2x + \cos^4 2x} = \int \frac{\sin^2 t}{1 + 6\cos^2 t + \cos^4 t}\,dt. \quad (1)$$

Полученный в (1) интеграл сводим к интегралу от рациональной функции заменой

$$\operatorname{tg} t = u, \quad dt = \frac{du}{1+u^2}, \quad \sin^2 t = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2 t = \frac{1}{1+u^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{\sin^2 t}{1 + 6\cos^2 t + \cos^4 t}\,dt = \int \frac{u^2 du}{u^4 + 8u^2 + 8}. \quad (2)$$

Разложение рациональной функции на элементарные дроби удобно провести, вводя промежуточную переменную $v = u^2$:

$$\frac{u^2}{u^4 + 8u^2 + 8} = \frac{v}{v^2 + 8v + 8}.$$

Так как $v^2+8v+8 = (v+4)^2-8 = (v+4+2\sqrt{2})(v+4-2\sqrt{2})$, то разложение имеет следующий вид:

$$\frac{v}{v^2+8v+8} = \frac{A}{v+4+2\sqrt{2}} + \frac{B}{v+4-2\sqrt{2}}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)v + A(4-2\sqrt{2}) + B(4+2\sqrt{2}) = v.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A(4-2\sqrt{2}) + B(4+2\sqrt{2}) = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad B = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{u^2}{u^4+8u^2+8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2(u^2+4+2\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}-1}{2(u^2+4-2\sqrt{2})}$$

и поэтому

$$\int \frac{u^2 du}{u^4+8u^2+8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C.$$

Так как

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}{8}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}{8}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

то

$$\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right) + C,$$

где $u = \operatorname{tg} 2x$.

2037. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

Преобразуя подынтегральную функцию и делая замену $t = \sin 2x$, получаем

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x = -4\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos 2x)^2 + (1+\cos 2x)^2} =$$
$$= -2\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\sin 2x)}{1 + (1-\sin^2 2x)} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right| + C.$$

2038. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену $t = \sin^2 x$, находим

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{1+(\sin^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C.$$

2039. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

Преобразуя подынтегральную функцию, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x + \cos^6 x} = 8\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-\cos 2x)^3 + (1+\cos 2x)^3} =$$
$$= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 2x}. \quad (1)$$

Полученный интеграл рационализируем заменой

$$\operatorname{tg} 2x = t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}, \quad \cos^2 2x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right) + C$$

2040. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

Делаем замену

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+2)^2} =$$
$$= \int \frac{(t^2+2)-1}{(t^2+2)^2} = \int \frac{dt}{t^2+2} - \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \int \frac{dt}{(t^2+2)^2}. \qquad (1)$$

Для вычисления оставшегося в (1) интеграла воспользуемся результатом задачи 1921 ($a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $n = 2$). Получаем

$$\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2}. \qquad (2)$$

Так как

$$\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C, \qquad (3)$$

то из выражений (1), (2) и (3) получаем следующий ответ:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = -\frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

§ 5.5. РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

На примере задачи 2041 рассмотрим применение метода вспомогательного угла из школьного курса тригонометрии.

2041. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

приведя знаменатель к логарифмическому виду.

Под приведением к логарифмическому виду понимается применение формулы вспомогательного угла из тригонометрии:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi), \tag{1}$$

где

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{2}$$

Применяя эту формулу, получаем, что

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)}.$$

Используя теперь решение задачи 1703 и формулу из задачи 1654, находим

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| + C,$$

где величина φ определяется из равенств (2).

В предыдущих главах на примерах интегрирования рациональных функций и квадратичных иррациональностей мы видели, как применение метода неопределенных коэффициентов позволяет сводить задачу интегрирования к решению линейной системы уравнений. Аналогичные приемы существуют и для тригонометрических интегралов. Они подробно рассмотрены в решениях задач 2042–2056.

2042. Доказать, что

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C, \tag{1}$$

Найдем A и B из равенства

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x). \quad (2)$$

Для этого достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} aA - bB = a_1, \\ bA + aB = b_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

по смыслу задачи отличен от нуля, и коэффициенты A и B можно найти по формулам Крамера:

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

Используя полученное разложение, находим

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$

$$= \int \frac{A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$= \int \left(A + B\frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x} \right) dx = Ax + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x} =$$

$$= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C,$$

что и доказывает утверждение задачи.

Найти интегралы.

2043. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx.$

Применим формулы (1), (3) задачи 2042 при $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a = 1$, $b = 2$. Находим

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = -\frac{3}{5}$$

и соответственно

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx = -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln|\sin x + 2\cos x| + C.$$

2043.1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}\,\mathrm{d}x.$

Применим формулы (1), (3) задачи 2042 при $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a = 1$, $b = -3$. Находим

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = \frac{3}{10}$$

и соответственно

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{10} + \frac{3}{10}\ln|\sin x - 3\cos x| + C.$$

2044. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + 5\,\mathrm{tg}\,x}.$

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + 5\,\mathrm{tg}\,x} = \int \frac{\cos x}{3\cos x + 5\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Применим формулы (1), (3) задачи 2042 при $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a = 5$, $b = 3$. Находим

$$A = \frac{3}{34}, \quad B = \frac{5}{34}$$

и соответственно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + 5\,\mathrm{tg}\,x} = \int \frac{\cos x}{3\cos x + 5\sin x}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{3x}{34} + \frac{5}{34}\ln|5\sin x + 3\cos x| + C.$$

2045. $\displaystyle\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Воспользуемся формулами (2), (3) задачи 2042, получаем

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \int \frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \\ = A\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} + B\int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \\ = A\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} - B\frac{1}{a\sin x + b\cos x}. \quad (1)$$

Оставшийся интеграл в равенстве (1) вычислен в задаче 2041:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая формулы (3) из задачи 2042 для коэффициентов A и B, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\, dx = \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2+b^2)^{3/2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| - \\ - \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{a\sin x + b\cos x} + C,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2046. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}\, dx = \\ = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + \\ + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}, \qquad (1)$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

Решим задачу в предположении $a^2+b^2 \neq 0$. Отметим только, что при $a = 0$ и $b = 0$ вычисление рассматриваемого интеграла не представляет труда, хотя формула (1) в этом случае перестает быть верной.

Найдем числа A, B и C из разложения

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = \\ = A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C.$$

Для этого нужно решить систему

$$\begin{cases} aA - bB = a_1, \\ bA + aB = b_1, \\ cA + C = c_1. \end{cases}$$

Первые два уравнения образуют систему для A и B. Эта система совпадает с системой из задачи 2042 и ее решение дается формулами (3) из этой задачи. Зная величину A, из последнего уравнения системы находим C. Окончательные формулы для коэффициентов имеют следующий вид:

$$\begin{cases} A = \dfrac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \\ B = \dfrac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}, \\ C = \dfrac{a(ac_1 - ca_1) + b(bc_1 - cb_1)}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Используя полученное разложение, находим

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c}\, dx =$$
$$= \int \left(A + B \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x + c} + \frac{C}{a \sin x + b \cos x + c} \right) dx =$$
$$= Ax + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x + c)}{a \sin x + b \cos x + c} + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} =$$
$$= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

Таким образом, требуемая формула доказана.

Найти интегралы.

2047. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx.$

Воспользуемся формулами (1), (2) задачи 2046 с $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -3$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. Находим коэффициенты

$$A = -\frac{3}{5}, \quad B = \frac{4}{5}, \quad C = -\frac{6}{5}.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \ln|\sin x - 2\cos x + 3| - \\ - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}. \tag{1}$$

Оставшийся интеграл вычисляем с помощью универсальной подстановки

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}=2\int\frac{dt}{5t^2+2t+1}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}}=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{5}\right)}{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}}=\operatorname{arctg}\frac{5t+1}{2}+C=\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C.\quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\,dx=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-$$

$$-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right)+C.$$

2048. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\,dx.$

Воспользуемся формулами (1), (2) задачи 2046 с $a_1=1$, $b_1=0$, $c_1=0$, $a=1$, $b=1$, $c=\sqrt{2}$. Находим коэффициенты

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}.\quad (1)$$

Оставшийся интеграл можно вычислить следующим образом. Применим тригонометрическую формулу

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)-$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

2049. $\displaystyle\int \frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}\,dx.$

Воспользуемся формулами (1), (2) задачи 2046 с $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = -2$. Находим коэффициенты

$$A = \frac{2}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{4}{5}.$$

Отсюда получаем

$$\int \frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}\,dx = \frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+$$

$$+\frac{4}{5}\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}. \quad (1)$$

Оставшийся интеграл вычисляем с помощью универсальной подстановки

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2} = \int \frac{dt}{1+3t-3t^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\frac{1}{3}+t-t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{12}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} + t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} - t + \frac{1}{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}(2t-1)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}(2t-1)} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)} \right| + C. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\,dx = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| +$$

$$+ \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)} \right| + C.$$

2050. Доказать, что

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1 \sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\,dx =$$

$$= A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}, \quad (1)$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты.

Покажем, что при $a^2 + b^2 \neq 0$ имеет место представление

$$a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x =$$

$$= (A\cos x - B\sin x)(a\cos x + b\sin x) + C. \quad (2)$$

Для этого представим величину C в виде $C = C\sin^2 x + C\cos^2 x$ и приравняем коэффициенты в (2) при подобных членах. Получим систему

$$\begin{cases} -aB + C = a_1, \\ aA - bB = 2b_1, \\ bA + C = c_1. \end{cases}$$

Исключая C с помощью первого уравнения, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} aA - bB = 2b_1, \\ bA + aB = c_1 - a_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = a^2 + b^2 \neq 0$, и ее можно решить по формулам Крамера. Величина C после этого определяется из первого уравнения исходной системы. Приведем окончательный ответ для решения системы:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2ab_1 + b(c_1 - a_1)}{a^2 + b^2}, \\ B = \dfrac{a(c_1 - a_1) - 2bb_1}{a^2 + b^2}, \\ C = \dfrac{a^2c_1 + b^2a_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Используя представление (2), получаем

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cdot \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$
$$= \int (A \cos x - B \sin x) dx + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} =$$
$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

что доказывает утверждение задачи.

Найти интегралы.

2051. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx.$

Воспользуемся формулами (1) и (3) решения задачи 2050 со следующими данными: $a_1 = 1$, $b_1 = -2$, $c_1 = 3$, $a = 1$, $b = 1$.

Вычисляем

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 4.$$

Получаем

$$\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx =$$
$$= -\sin x + 3\cos x + 4\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}. \quad (1)$$

Для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся решением задачи 2041. Величина вспомогательного угла определяется из системы

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

которая дает $\varphi = \pi/4$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C. \quad (2)$$

Из выражения (1) и (2) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx =$$
$$= -\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

2052. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx.$

Воспользуемся формулами (1) и (3) решения задачи 2050 со следующими данными: $a_1 = 1$, $b_1 = -1/2$, $c_1 = 2$, $a = 1$, $b = 2$. Вычисляем

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{3}{5}, \quad C = \frac{8}{5}.$$

Получаем

$$\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{8}{5}\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}. \quad (1)$$

Для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся решением задачи 2041. Величина вспомогательного угла определяется из системы

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

которая дает $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C. \qquad (3)$$

Ответ (3) можно преобразовать, используя формулу тангенса суммы и учитывая, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Получаем

$$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 - \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{5} - 1 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| - \ln 2 + \ln(\sqrt{5}+1).$$

Учитывая, что постоянная C произвольна, получаем следующий ответ:

$$\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5} - 1 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

2053. Доказать, что если $(a-c)^2+b^2\neq 0$, то

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+2b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}\,dx=$$
$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}, \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (\lambda_1\neq\lambda_2). \quad (2)$$

Причем при $b=0$

$$u_1=\cos x,\quad k_1=c-a,\quad u_2=\sin x,\quad k_2=a-c, \quad (3)$$

а при $b\neq 0$

$$u_i=(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x,\quad k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}\quad (i=1,2). \quad (4)$$

Коэффициенты A и B определяются следующим образом. При $b=0$

$$A=-a_1,\quad B=b_1, \quad (5)$$

а при $b\neq 0$

$$A=\frac{(aa_1+bb_1)-a_1\lambda_2}{b(\lambda_2-\lambda_1)},\quad B=\frac{a_1\lambda_1-(aa_1+bb_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}. \quad (6)$$

Отметим прежде всего, что сделанное ограничение на коэффициенты a, b и c не является существенным. Действительно, если $a=c$ и $b=0$, то знаменатель подынтегральной функции является постоянной величиной и интеграл легко вычисляется.

Рассмотрм первый случай: $b=0$, $a\neq c$. Выражение $a\sin^2 x+$ $+c\cos^2 x$ можно представить в одном из двух видов:

$$a\sin^2 x+c\cos^2 x=(a-c)\sin^2 x+c=a+(c-a)\cos^2 x,$$

поэтому

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x}\, dx =$$

$$= a_1 \int \frac{\sin x\, dx}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} + b_1 \int \frac{\cos x\, dx}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} =$$

$$= -a_1 \int \frac{d(\cos x)}{a + (c-a)\cos^2 x} + b_1 \int \frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2 x + c} =$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где

$$A = -a_1, \quad k_1 = c - a, \quad \lambda_1 = a, \quad u_1 = \cos x,$$
$$B = b_1, \quad k_2 = a - c, \quad \lambda_2 = c, \quad u_2 = \sin x.$$

Первый случай рассмотрен.

Перейдем ко второму случаю $b \neq 0$. При этом условии ни один из корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

не совпадает с числом a, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В самом деле, при $\lambda = a$ определитель равен $-b^2 \neq 0$. Второе утверждение следует из того, что уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

и его дискриминант

$$D = (a-c)^2 + 4b^2 > 0.$$

Переписывая характеристическое уравнение в виде

$$(a-\lambda)(c-\lambda) = b^2,$$

получим равенство $c - \lambda = \dfrac{b^2}{a-\lambda}$ $\quad (\lambda \neq a)$, поэтому

$$c = \frac{b^2}{a-\lambda} + \lambda. \tag{7}$$

С помощью возведения в квадрат и приведения подобных членов легко проверить следующее тождество:

$$a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c^2\cos^2 x =$$
$$= \frac{1}{a-\lambda_i}((a-\lambda_i)\sin x + b\cos x)^2 + \lambda_i \sin^2 x + \left(c - \frac{b^2}{a-\lambda_i}\right)\cos^2 x.$$

Учитывая (7) можно переписать это тождество в следующем виде:

$$a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c^2\cos^2 x =$$
$$= \frac{1}{a-\lambda_i}((a-\lambda_i)\sin x + b\cos x)^2 + \lambda_i.$$

Полагая $u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x$ и $k_i = 1/(a-\lambda_i)$, записываем рассматриваемое тождество в следующем виде:

$$a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c^2\cos^2 x = k_i u_i^2 + \lambda_i. \tag{8}$$

Далее найдем разложение

$$a_1\sin x + b_1\cos x =$$
$$= A\left[(a-\lambda_1)\cos x - b\sin x\right] + B\left[(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x\right].$$

Для этого достаточно найти решение системы

$$\begin{cases} -bA - bB = a_1, \\ (a-\lambda_1)A + (a-\lambda_2)B = b_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = b(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ и ее решение находим по формулам Крамера:

$$A = \frac{(aa_1 + bb_1) - a_1\lambda_2}{b(\lambda_2-\lambda_1)}, \quad B = \frac{a_1\lambda_1 - (aa_1 + bb_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

Заменяя числитель подынтегральной функции в соответствии с найденным разложением, получим

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}\,dx =$$
$$= A\int \frac{(a-\lambda_1)\cos x - b\sin x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}\,dx +$$
$$+ B\int \frac{(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}\,dx.$$

Учитывая формулу (8) и равенство $du_i = (a - \lambda_i)\cos x - b\sin x$, получаем из последнего равенства искомую формулу (1).

Найти интегралы.

2054. $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx.$

Воспользуемся решением задачи 2053. Исходные данные задачи: $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $a = 3$, $b = 0$, $c = 4$. Здесь имеет место первый случай $b = 0$. Вычисляем коэффициенты

$$A = -2, \quad k_1 = 1, \quad \lambda_1 = 3, \quad B = -1, \quad k_2 = -1, \quad \lambda_4 = 4$$

и делаем замену

$$u_1 = \cos x, \quad u_2 = \sin x.$$

Получаем

$$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx = -2\int \frac{du_1}{u_1^2 + 3} - \int \frac{du_2}{4 - u_2^2}. \qquad (1)$$

Интегралы

$$\int \frac{du_1}{u_1^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\int \frac{du_2}{4 - u_2^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + u_2}{2 - u_2}\right| + C$$

и поэтому

$$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + C.$$

2055. $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x}.$

Воспользуемся решением задачи 2053. Исходные данные задачи: $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a = 2$, $b = -2$, $c = 5$. Здесь имеет место второй случай $b \neq 0$. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Вычисляем

$$A = \frac{3}{5}, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{4},$$

величины

$$u_1 = \sin x - 2\cos x, \quad u_2 = -4\sin x - 2\cos x.$$

По формуле (1) из решения задачи 2053

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x} = \\ = \frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1^2 + 1} - \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}u_2}{6 - \frac{1}{4}u_2^2}. \quad (1)$$

Так как

$$\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1^2+1} = \operatorname{arctg} u_1 + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u_2}{6 - \frac{1}{4}u_2^2} = 4\int \frac{\mathrm{d}u_2}{24 - u_2^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{6} + u_2}{2\sqrt{6} - u_2}\right| + C,$$

то

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x} = \frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x - 2\cos x) + \\ + \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x} + C.$$

2056. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x.$

Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Поэтому можно воспользоваться результатом задачи 2053 с данными $a_1 = 1$, $b_1 = -2$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$. Здесь имеет место второй случай $b \neq 0$. Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

находим $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Вычисляем

$$A = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -\frac{1}{2},$$

величины

$$u_1 = 2\sin x + 2\cos x, \quad u_2 = -2\sin x + 2\cos x.$$

По формуле (1) из решения задачи 2053

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x}\,dx = \\ = -\frac{3}{4}\int\frac{du_1}{\frac{1}{2}u_1^2 - 1} + \frac{1}{4}\int\frac{du_2}{-\frac{1}{2}u_2^2 + 3}. \qquad (2)$$

Так как

$$\int\frac{du_1}{\frac{1}{2}u_1^2 - 1} = -2\int\frac{du_1}{2 - u_1^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u_1}{\sqrt{2}-u_1}\right| + C,$$

$$\int\frac{du_2}{-\frac{1}{2}u_2^2 + 3} = 2\int\frac{du_2}{6 - u_2^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+u_2}{\sqrt{6}-u_2}\right| + C,$$

то из (1) и (2) получаем следующий ответ:

$$\int\frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cdot\cos x}\,dx = \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1}\right| + \\ + \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}\right| + C.$$

На примерах задач 2057–2059 рассмотрим использование рекуррентных соотношений для вычисления тригонометрических интегралов.

2057. Доказать, что

$$\int\frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + \\ + C\int\frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}, \qquad (1)$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

Воспользуемся формулой вспомогательного угла из тригонометрии:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \tag{2}$$

где величина φ определяется из равенств

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Применяя формулу (2) и рекуррентное соотношение из задачи 2012

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}$$

с заменой x на $x+\varphi$, получаем

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{1}{(\sqrt{a^2+b^2})^n}\int\frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin^n(x+\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a^2+b^2})^n}\left(-\frac{\cos(x+\varphi)}{(n-1)\sin^{n-1}(x+\varphi)} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin^{n-2}(x+\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{\sin x\cdot\sin\varphi - \cos x\cdot\cos\varphi}{(n-1)\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\right]^{n-1}} +$$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}\int\frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\right]^{n-2}} =$$

$$= \frac{\sin x\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \cos x\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{(n-1)\sqrt{a^2+b^2}\,(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}} =$$

$$= \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

где

$$\begin{cases} A = \dfrac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}, \\ B = -\dfrac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}, \\ C = \dfrac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Утверждение задачи доказано.

2058. Найти $\int \dfrac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

Воспользуемся решением задачи 2057 с данными $a = 1$, $b = 2$, $n = 3$. По формулам (3) вычисляем

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad C = \frac{1}{10}.$$

Применяя формулу (1) задачи 2057, получаем

$$\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3} = \frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2} + \frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}. \qquad (1)$$

Для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся формулой задачи 2041:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + C, \qquad (2)$$

где вспомогательный угол φ находится из системы

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В нашем случае $a = 1$, $b = 2$ и $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Следовательно

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C. \qquad (3)$$

Из (1) и (3), учитывая произвольность C, получаем окончательный ответ

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} = \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \\ + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C.$$

2059. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \\ + B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|), \tag{1}$$

и определить коэффициенты A, B и C, если n — натуральное число, большее единицы.

Дифференцированием равенства (1) устанавливаем, что оно равносильно следующему тождеству:

$$(Ab + Cb^2)\cos^2 x + (n-1)Ab\sin^2 x + \\ + (Aa + Bb + 2abC)\cos x + (Ba + Ca^2) = 1. \tag{2}$$

Для справедливости тождества (2) достаточно выполнение системы равенств

$$\begin{cases} Ab + Cb^2 = (n-1)Ab, \\ (n-1)Ab + (Ba + Ca^2) = 1, \\ Aa + Bb + 2abC = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В самом деле, если соотношения (3) выполнены, то

$$(Ab + Cb^2)\cos^2 x + (n-1)Ab\sin^2 x + \\ + (Aa + Bb + 2abC)\cos x + (Ba + Ca^2) = \\ = (n-1)Ab(\cos^2 x + \sin^2 x) + 0\cdot\cos x + \\ + (Ba + Ca^2) = (n-1)Ab + (Ba + Ca^2) = 1.$$

Решая систему (3) относительно A, B и C, находим

$$\begin{cases} A = -\dfrac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}, \\ B = \dfrac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}, \\ C = -\dfrac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}. \end{cases} \tag{4}$$

Применяя различные приемы, найдем интегралы.

2060. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Делая замену $u = \cos x$, находим

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{2-u^2}}. \quad (1)$$

Вычислим получившийся интеграл при $u > 0$. Замена $t = 1/u$ дает

$$-\int \frac{du}{u\sqrt{2-u^2}} = -\int \frac{du}{u^2\sqrt{\frac{2}{u^2}-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-u^2}}{u}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-u^2}}{u}\right| + C. \quad (2)$$

Так как подынтегральная функция нечетна, а правая часть равенства (2) представляет собой четную функцию, то полученный результат сохраняет свою силу и при $u < 0$. Подставляя (2) в (1) и возвращаясь к переменной x, получаем окончательный результат

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C.$$

2061. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx$.

Делая замену

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

получаем

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx = \int \operatorname{tg}^{3/2} x\,dx = \int \frac{t^{3/2}}{1+t^2}\,dt. \qquad (1)$$

Интеграл по переменной t рационализируем подстановкой

$$u = \sqrt{t}, \quad t = u^2, \quad dt = 2u\,du.$$

Имеем

$$\int \frac{t^{3/2}}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{u^4 du}{1+u^4} = \\ = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+u^4}\right) du = 2u - 2\int \frac{du}{1+u^4}. \qquad (2)$$

Получившийся в (2) интеграл вычислен в задаче 1884:

$$\int \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u\sqrt{2}}{1-u^2} + C. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x - 1} + C.$$

2062. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

Используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного угла, представим выражение под радикалом двумя способами:

$$2 + \sin 2x = 1 + (\sin x + \cos x)^2 \qquad (1)$$

и

$$2 + \sin 2x = 3 - (\sin x - \cos x)^2. \qquad (2)$$

Применяя (1) и (2), получаем

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}. \tag{3}$$

Полагая в интегралах, находящихся в правой части равенства (3), соответственно $u = \sin x - \cos x$ и $v = \sin x + \cos x$, находим

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3-u^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right) + C.$$

2063. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

Воспользуемся формулами (1), (4) из задачи 2059 с $a=1$, $b=\varepsilon$, $n=1$. Вычисляем коэффициенты

$$A = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \quad B = \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad C = 0.$$

Применяем рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = -\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}. \tag{1}$$

Получившийся после применения рекуррентной формулы интеграл вычислен в решении задачи 2028 (пункт а):

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2), учитывая произвольность постоянной C, находим

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = -\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

2064. $\displaystyle\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx.$

Делаем замену

$$t = \frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}.$$

Используя формулу косинуса разности, преобразуем выражение для дифференциала

$$dt = \frac{-\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2} - \cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}{2\sin^2\frac{x-a}{2}}\,dx = -\frac{(\cos a)dx}{2\sin^2\frac{x-a}{2}}.$$

Поэтому

$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^{n-1}\left(-\frac{\cos a}{2\sin^2\frac{x-a}{2}}\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt = -\frac{2t^n}{n\cos a} + C =$$

$$= -\frac{2}{n\cos a}\cdot\frac{\cos^n\frac{x+a}{2}}{\sin^n\frac{x-a}{2}} + C.$$

2065. Вывести формулу понижения для интеграла

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n \mathrm{d}x$$

(n — натуральное число).

Несложно проверить следующее тригонометрическое тождество:

$$\frac{\sin^2 \frac{x-a}{2}}{\sin^2 \frac{x+a}{2}} = 2\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \cos a - 1 + \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \frac{x+a}{2}}. \qquad (1)$$

Делая замену

$$t = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}},$$

вычисляем дифференциал

$$\mathrm{d}t = \frac{\sin a}{2\sin^2 \frac{x+a}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

Умножая тригонометрическое тождество (1) на t^{n-2} и интегрируя, получим

$$I_n = 2 I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + 2\sin a \int t^{n-2} \mathrm{d}t.$$

Так как

$$\int t^{n-2} \mathrm{d}t = \frac{t^{n-1}}{n-1} + C,$$

то искомое рекуррентное соотношение имеет вид

$$I_n = 2 I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2\sin a}{n-1} t^{n-1},$$

где $t = \left(\sin \frac{x-a}{2}\right) \left(\sin \frac{x+a}{2}\right)^{-1}$.

Глава 6

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы рассмотрим различные приемы вычисления интегралов от тех функций, которые не попали в рассмотренные ранее классы.

2066. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C. \quad (1)$$

Доказательство формулы проведем методом математической индукции. Если $n=0$, то многочлен $P(x)$ представляет собой константу и его можно вынести из-под знака интеграла:

$$\int P(x)\,e^{ax}\mathrm{d}x = P(x)\int e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\frac{P(x)}{a}+C.$$

Поэтому при $n=0$ формула (1) справедлива.

Допустим, что формула (1) справедлива для всех многочленов степени $n-1$ и пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Так как его производная $P'(x)$ является многочленом степени $n-1$, то по предположению индукции

$$\int P'(x)e^{ax}\mathrm{d}x=e^{ax}\left[\frac{P'(x)}{a}-\frac{P''(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right]+C_1. \quad (2)$$

С другой стороны, интегрируя по частям, получаем

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x=\int P(x)\mathrm{d}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)=e^{ax}\frac{P(x)}{a}-\frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}\mathrm{d}x. \quad (3)$$

12-3993

Подставляя формулу (2) в (3), получаем (1). На основании метода математической индукции делаем заключение, что формула (1) справедлива при любом n.

2067. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \\ + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C. \quad (1)$$

и

$$\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \\ + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C. \quad (2)$$

Доказательство формул проведем методом математической индукции. Если $n = 0$, то многочлен $P(x)$ представляет собой константу и его можно вынести из-под знака интеграла. Поэтому

$$\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = P(x)\int \cos ax\,\mathrm{d}x = P(x)\,\frac{\sin ax}{a},$$
$$\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = P(x)\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -P(x)\,\frac{\cos ax}{a}$$

и обе формулы (1) и (2) при $n = 0$ справедливы.

Допустим, что формулы (1) и (2) справедливы для всех многочленов степени $n-1$ и пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Так как его производная $P'(x)$ является многочленом степени $n-1$, то по предположению индукции

$$\int P'(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \\ + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P''(x) - \frac{P^{IV}(x)}{a^2} + \frac{P^{VI}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C \quad (3)$$

и

$$\int P'(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^V(x)}{a^4} - \ldots\right] +$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P''(x) - \frac{P^{IV}(x)}{a^2} + \frac{P^{VI}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C. \quad (4)$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin ax}{a}\right) =$$
$$= \frac{\sin ax}{a}P(x) - \frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\,\mathrm{d}x. \quad (5)$$

$$\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = -\int P(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{\cos ax}{a}\right) =$$
$$= -\frac{\cos ax}{a}P(x) + \frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax\,\mathrm{d}x. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (5), получаем (1), а подставляя (3) в (6), получаем (2). На основании метода математической индукции делаем заключение, что формулы (1) и (2) справедливы при любом n.

Найти интегралы.

2068. $\int x^3 e^{3x}\mathrm{d}x.$

По формуле (1) задачи 2066 получаем

$$\int x^3 e^{3x}\mathrm{d}x = e^{3x}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right] + C.$$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x}\mathrm{d}x.$

По формуле (1) задачи 2066 получаем

$$\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-x}\left[\frac{x^2 - 2x + 2}{-1} - \frac{2x-2}{1} + \frac{2}{-1}\right] + C =$$
$$= -e^{-x}(x^2 + 2) + C.$$

2070. $\int x^5 \sin 5x \, \mathrm{d}x$.

По формуле (2) задачи 2067 получаем

$$\int x^5 \sin 5x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{25}\left[5x^4 - \frac{60x^2}{25} + \frac{120}{625}\right] - \\ - \frac{\cos 5x}{5}\left[x^5 - \frac{20x^3}{25} + \frac{120x}{625}\right] + C = \\ = \left(\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125}\right)\sin 5x - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625}\right)\cos 5x + C.$$

2071. $\int (1+x^2)^2 \cos x \, \mathrm{d}x$.

Применяя формулу (1) задачи 2067, получаем

$$\int (1+x^2)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \int (1 + 2x^2 + x^4)\cos x \, \mathrm{d}x = \\ = \sin x\left[(1 + 2x + x^4) - (4 + 12x^2) + 24\right] + \\ + \cos x\left[(4x + 4x^3) - 24x\right] + C = \\ = (21 - 10x^2 + x^4)\sin x - (20x - 4x^3)\cos x + C.$$

2072. $\int x^7 e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Делая замену $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, получаем

$$\int x^7 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2)^3 e^{-x^2} 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^3 e^{-t} \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Согласно формуле (1) задачи 2066:

$$\int t^3 e^{-t} \mathrm{d}t = e^{-t}\left[\frac{t^3}{-1} - \frac{3t^2}{1} + \frac{6t}{-1} - \frac{6}{1}\right] + C = \\ = -(t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t} + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), возвращаясь к переменной x и учитывая произвольность C, получаем

$$\int x^7 e^{-x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x^2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C.$$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$

После замены $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, получаем

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\int t^5 e^t \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Согласно формуле (1) задачи 2066:

$$\int t^5 e^t \mathrm{d}t = e^t \left[t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120\right] + C. \qquad (2)$$

Из выражений (2) и (1), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2e^t \left(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120\right) + C,$$

где $t = \sqrt{x}$.

2074. $\int e^{ax} \cos^2 bx\,\mathrm{d}x.$

1. $a = 0$, $b = 0$.

$$\int e^{ax} \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C.$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$. Используя формулу $2\cos^2\alpha = 1 + \cos\alpha$, получаем

$$\int e^{ax} \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 bx\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2bx}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2bx}{4b} + C.$$

3. $a \neq 0$. Используя формулу тригонометрии $2\cos^2\alpha = 1 + \cos\alpha$, получаем

$$\int e^{ax} \cos^2 bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1 + \cos 2bx)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^{ax}}{2a} + \frac{1}{2}\int e^{ax} \cos 2bx\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Согласно решению задачи 1828:

$$\int e^{ax}\cos 2bx\,\mathrm{d}x = \frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{a^2+4b^2}\,e^{ax} + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая произвольность C, приходим к окончательному ответу:

$$\int e^{ax}\cos^2 bx\,\mathrm{d}x = e^{ax}\left(\frac{1}{2a} + \frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right) + C.$$

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,\mathrm{d}x.$

1. $a=0,\ b=0.$

$$\int e^{ax}\sin^3 bx\,\mathrm{d}x = \int 0\,\mathrm{d}x = C.$$

2. $a=0,\ b\neq 0.$ Используя тригонометрическую формулу тройного угла $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, получаем формулу для третьей степени синуса

$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha. \quad (1)$$

Применяя формулу (1), получаем

$$\int e^{ax}\sin^3 bx\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 bx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\left(\frac{3}{4}\sin bx - \frac{1}{4}\sin 3bx\right)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{3}{4b}\cos bx + \frac{1}{12b}\cos 3bx + C.$$

3. $a\neq 0.$ Используя формулу (1) для третьей степени синуса, находим

$$\int e^{ax}\sin^3 bx\,\mathrm{d}x = \int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx - \frac{1}{4}\sin 3bx\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int e^{ax}\sin 3bx\,\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Согласно решению задачи 1829:

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C, \qquad (3)$$

$$\int e^{ax}\sin 3bx\,\mathrm{d}x = \frac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\,e^{ax} + C. \qquad (4)$$

Подставляя формулы (3) и (4) в (2) и учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int e^{ax}\sin^3 bx\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^{ax}}{4}\left(\frac{3(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right) + C.$$

2076. $\int xe^x \sin x\,\mathrm{d}x.$

Из решения задач 1828 и 1829 следует, что

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C, \qquad (1)$$

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C. \qquad (2)$$

В частности, из выражения (2) получаем равенство

$$e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\,e^x\right),$$

которое позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int xe^x\sin x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\,e^x\right) = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) -$$
$$- \frac{1}{2}\int e^x(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) -$$
$$- \frac{1}{2}\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получаем окончательный ответ:

$$\int xe^x \sin x\,dx = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) - $$
$$- \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)e^x + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)e^x = $$
$$= \frac{e^x}{2}\left[x(\sin x - \cos x) + \cos x\right] + C.$$

2077. $\int x^2 e^x \cos x\,dx.$

Согласно решению задач 1828 и 1829:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C, \quad (1)$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C. \quad (2)$$

Из формулы (1) следует, что

$$e^x \cos x\,dx = d\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\, e^x\right). \quad (3)$$

Равенство (3) позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int x^2 e^x \cos x\,dx = \int x^2 d\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\, e^x\right) = $$
$$= \frac{x^2 e^x}{2}(\sin x + \cos x) - \int xe^x(\sin x + \cos x)dx = $$
$$= \frac{x^2 e^x}{2}(\sin x + \cos x) - \int xe^x \sin x\,dx - \int xe^x \cos x\,dx. \quad (4)$$

Первый из двух оставшихся интегралов вычислен в решении задачи 2076:

$$\int xe^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\left[x(\sin x - \cos x) + \cos x\right] + C. \quad (5)$$

Второй интеграл вычисляется по той же схеме интегрирования по частям с использованием формулы (3):

$$\int xe^x \cos x\,dx = \int x\,d\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\,e^x\right) =$$
$$= \frac{xe^x}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x)e^x dx =$$
$$= \frac{xe^x}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}\int e^x \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int e^x \cos x\,dx. \quad (6)$$

Подставляя (1) и (2) в (6), получаем

$$\int xe^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}\left[x(\sin x + \cos x) - \sin x\right] + C. \quad (7)$$

Из выражений (4), (5) и (7) получаем окончательный ответ:

$$\int x^2 e^x \cos x\,dx =$$
$$= \frac{e^x}{2}\left[x^2(\sin x + \cos x) - 2x\sin x + (\sin x - \cos x)\right] + C.$$

2078. $\int xe^x \sin^2 x\,dx.$

С помощью тригонометрической формулы $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ получаем

$$\int xe^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int xe^x(1 - \cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int xe^x dx - \frac{1}{2}\int xe^x \cos 2x\,dx. \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов можно вычислить по формуле (1) задачи 2066:

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C. \quad (2)$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся задачами 1828 и 1829. Из решения этих задач следует, что

$$\int e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\,e^x + C, \tag{3}$$

$$\int e^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x - 2\cos 2x}{5}\,e^x + C. \tag{4}$$

Из формулы (3) следует, что

$$e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\,e^x\right),$$

что позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int xe^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\,e^x\right) =$$

$$= \frac{xe^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{1}{5}\int e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{xe^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{1}{5}\int e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x - \frac{2}{5}\int e^x \sin 2x\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Подставляя (2) и (5) в (1) и заменяя оставшиеся интегралы по формулам (3) и (4), получаем ответ. Опуская тождественные преобразования приведем окончательный результат:

$$\int xe^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = e^x\left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10}(2\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{50}(4\sin 2x - 3\cos 2x)\right] + C.$$

2079. $\int (x - \sin x)^3\,\mathrm{d}x.$

По формуле куба разности

$$\int (x - \sin x)^3 \mathrm{d}x = \int (x^3 - 3x^2 \sin x + 3x\sin^2 x - \sin^3 x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 3\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x + 3\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x - \int \sin^3 x\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Первый из интегралов в правой части равенства (1) вычисляем по формуле (2) задачи 2067:

$$\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2)\cos x + C. \qquad (2)$$

Для вычисления второго интеграла применим тригонометрическую формулу $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, получим

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int x(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x \, dx.$$

По формуле (1) задачи 2067

$$\int x \cos 2x \, dx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C,$$

поэтому, учитывая произвольность C, получаем

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C. \qquad (3)$$

По формуле тройного угла $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. С помощью этой формулы находим

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

что позволяет вычислить третий интеграл

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)\, dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C. \qquad (4)$$

Из выражений (1)–(4) получаем

$$\int (x - \sin x)^3 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2\cos x - x\left(6\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x\right) - \\ - \left(\frac{21}{4}\cos x + \frac{3}{8}\cos 2x\right) - \frac{1}{12}\cos 3x + C.$$

Полученный результат можно немного преобразовать, заменяя косинус тройного угла по формуле $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Получаем окончательно следующую формулу:

$$\int (x-\sin x)^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2\cos x - x\left(6\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x\right) - \\ - \left(5\cos x + \frac{3}{8}\cos 2x\right) - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Замена $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ дает

$$\int \cos^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int t(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \int t\cos 2t\,\mathrm{d}t.$$

По формуле (1) задачи 2067:

$$\int t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C,$$

поэтому

$$\int \cos^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C = \\ = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x} + C.$$

2081. Доказать, что если R — рациональная функция и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соизмеримы, то интеграл

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x})\,\mathrm{d}x$$

есть элементарная функция.

Соизмеримость чисел a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ означает существование вещественного числа a и целых чисел k_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ таких, что $a_i = k_i a$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В этом случае интеграл рационализирует замена

$$t = e^{ax}, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{at}.$$

После замены получаем

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x})\mathrm{d}x =$$

$$= \int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_n})\frac{\mathrm{d}t}{at} = \int R^*(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $R^*(t)$ — рациональная функция. Утверждение задачи доказано.

Найти следующие интегралы.

2082. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2}$.

Делая замену $t = e^x$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2} = \int \frac{(1+t)-t}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \int \frac{(1+t)-t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+t} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} + C =$$

$$= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$$

2083. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{(e^{2x}+e^x)-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int e^x\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x} = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

2084. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+e^x-2}$. Делая замену $t = e^x$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+e^x-2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+t-2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)(t+2)}. \qquad (1)$$

Далее находим разложение рациональной функции

$$f(t) = \frac{1}{t(t-1)(t+2)}$$

на простейшие дроби

$$\frac{1}{t(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+2}.$$

Нетрудно видеть, что при $t \to 0$

$$f(t) \sim -\frac{1}{2t},$$

при $t \to 1$

$$f(t) \sim \frac{1}{3(t-1)}$$

и при $t \to -2$

$$f(t) \sim \frac{1}{6(t+2)}.$$

Поэтому

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{6}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = -\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln|t+2| + C =$$
$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln|e^x - 1| + \frac{1}{6}\ln(e^x + 2) + C.$$

2085. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

Делая замену $t = e^{\frac{x}{6}}$, $dx = 6dt/t$, находим

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{dt}{t(1+t+t^2+t^3)} =$$
$$= 6\int \frac{dt}{t(1+t)(1+t^2)}. \quad (1)$$

Далее ищем разложение подынтегральной функции

$$f(t) = \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}$$

на простейшие дроби

$$\frac{1}{t(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Из асимптотик

$$f(t) \sim \frac{1}{t} \quad (t \to 0), \quad f(t) \sim -\frac{1}{2(1+t)} \quad (t \to -1)$$

сразу находим

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

После этого оставшую часть разложения получаем элементарными выкладками

$$\frac{Ct+D}{1+t^2} = f(t) - \frac{A}{t} - \frac{B}{1+t} = \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2(1+t)} =$$

$$= \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)} - \frac{2+t}{2t(1+t)} = \frac{1}{t(1+t)}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2+t}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{t(1+t)}\,\frac{t(t^2+2t+1)}{2(1+t^2)} = -\frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dt}{t(1+t)(1+t^2)} = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{1+t^2}\,dt. \qquad (2)$$

Далее вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int \frac{t+1}{1+t^2}dt = \int \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \operatorname{arctg} t + C. \qquad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} =$$

$$= 6\ln|t| - 3\ln|1+t| - \frac{3}{2}\ln(1+t^2) - 3\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= x - 3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right] - 3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} + C.$$

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\,\mathrm{d}x.$

После замены $t = e^{\frac{x}{4}}$, $\mathrm{d}x = 4\mathrm{d}t/4$ получаем

$$\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{(1+t)^2\,t}. \tag{1}$$

Для вычисления получившегося интеграла применим метод Остроградского и найдем разложение

$$\int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{(1+t)^2\,t} = \frac{A}{1+t} + \int \left(\frac{B}{t} + \frac{C}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(B+C)t^2 + (C+2B-A)t + B = t^2 + 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} B+C=1, \\ C+2B-A=0, \\ B=1, \end{cases}$$

находим

$$A=2, \quad B=1, \quad C=0.$$

Следовательно

$$\int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{(1+t)^2\,t} = \frac{2}{1+t} + \ln|t| + C. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{1+t} + 4\ln|t| + C = \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}} + x + C.$$

2087. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}.$

Делая замену $t = e^{-\frac{x}{2}}$, получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-e^{-x}}} = -2\int \frac{\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}} =$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -2\arcsin t + C = -2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) + C.$$

2088. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену $t=e^x$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/t$ и учитывая, что в области определения подынтегральной функции величина $t\geqslant 1$, получаем

$$\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int\frac{(t-1)\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\ln\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)+\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}.\qquad(1)$$

Оставшийся интеграл вычислен в решении задачи 1683:

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin\frac{1}{|t|}+C.\qquad(2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем ответ:

$$\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-x}\right)+C.$$

2089. $\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x.$

Делаем замену $t=e^x$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/t$. Учитывая, что $t>0$ и переводя иррациональность в знаменатель, получаем

$$\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{t^2+4t-1}}{t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{t^2+4t-1}{t\sqrt{t^2+4t-1}}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2t+4)+2}{\sqrt{t^2+4t-1}}\,\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+4t-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+4t-1)}{\sqrt{t^2+4t-1}}+$$
$$+2\int\frac{\mathrm{d}(t+2)}{\sqrt{(t+2)^2-5}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+4t-1}}=\sqrt{t^2+4t-1}+$$
$$+2\ln\left(t+2+\sqrt{t^2+4t-1}\right)-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+4t-1}}.\qquad(1)$$

Оставшийся интеграл вычисляем подстановкой $t = 1/u$. Учитывая, что величина $t > 0$, получаем

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+4t-1}} = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1+4u-u^2}} =$$

$$= -\int \frac{d(u-2)}{\sqrt{5-(u-2)^2}} = -\arcsin\frac{u-2}{\sqrt{5}} + C = \arcsin\frac{2t-1}{t\sqrt{5}} + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и возвращаясь к переменной x, получаем ответ:

$$\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx = \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} +$$

$$+ 2\ln\left(e^x + 2 + \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) - \arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}} + C.$$

2090. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

Переводя иррациональность в числитель и делая замену

$$t = e^x, \quad dx = \frac{dt}{t},$$

получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = \int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{2e^x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\,dt. \quad (1)$$

Для вычисления первого интеграла в правой части равенства (1) делаем замену:

$$u = \sqrt{1+t}, \quad t = u^2 - 1, \quad dt = 2u\,du.$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2} =$$

$$= -\int u\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{u^2-1}\right) = -\frac{u}{u^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} =$$

$$= -\frac{u}{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+t}}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}\right| + C. \quad (2)$$

Для вычисления второго интеграла делаем аналогичную замену:

$$u = \sqrt{1-t}, \quad t = 1-u^2, \quad \mathrm{d}t = -2u\,\mathrm{d}u.$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2} =$$

$$= \int u\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{u^2-1}\right) = \frac{u}{u^2-1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} =$$

$$= \frac{u}{u^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-t}}{t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}\right| + C. \quad (3)$$

Из формул (1), (2) и (3) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = -\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{2t} +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1-\sqrt{1+t})(1-\sqrt{1-t})}{(1+\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1-t})}\right| + C =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\left(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})} + C.$$

2091. Доказать, что интеграл

$$\int R(x)\, e^{ax}\, \mathrm{d}x,$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{li}(e^{ax}) + C,$$

где

$$\mathrm{li}\, x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$$

Рациональная функция $R(x)$ является суммой многочлена и дробей вида $A/(x-b)^n$ (по условию знаменатель функции $R(x)$ имеет лишь действительные корни). Поэтому рассматриваемый интеграл является суммой многочлена и интегралов следующего вида:

$$A \int \frac{e^{ax}}{(x-b)^n}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Делая замену $u = x - b$, приводим интеграл (1) к виду

$$Ae^{ab} \int \frac{e^{au}}{u^n}\, \mathrm{d}u.$$

Для последнего интеграла

$$I_n = \int \frac{e^{au}}{u^n}\, \mathrm{d}u$$

при $n > 1$ можно написать формулу понижения, интегрируя по частям:

$$I_n = \int e^{au} \mathrm{d}\left(\frac{1}{(1-n)u^{n-1}}\right) = \frac{e^{au}}{(1-n)u^{n-1}} - \frac{a}{1-n} \int = \frac{e^{au}}{u^{n-1}} \mathrm{d}u =$$

$$\frac{e^{au}}{(1-n)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\, I_{n-1}. \tag{2}$$

Применяя формулу (2) $n-1$ раз, получим, что интеграл I_n является суммой элементарных функций и величины, пропорциональной интегралу

$$I_1 = \int \frac{e^{au}}{u}\, \mathrm{d}u.$$

Делая в интеграле I_1 замену

$$t = e^{au}, \quad u = \frac{\ln t}{a}, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{at},$$

получаем

$$I_1 = \int \frac{e^{au}}{u}\, \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \mathrm{li}(t) + C = \mathrm{li}(e^{au}) + C. \qquad (3)$$

Утверждение задачи доказано.

2092. В каком случае интеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x \mathrm{d}x,$$

где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Для интеграла

$$I_k = \int \frac{e^x}{x^k}\, \mathrm{d}x$$

в задаче 2091 было получено рекуррентное соотношение (формула (2)):

$$I_k = \frac{e^x}{(1-k)x^{k-1}} + \frac{1}{k-1} I_{k-1}.$$

Применяя это соотношение $k-1$ раз, получим равенство

$$I_k = f_k + \frac{1}{(k-1)!} I_1, \qquad (1)$$

где f_k — некоторая элементарная функция. Умножая (1) на a_k и суммируя по k, получаем

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int \frac{e^x}{x^k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k I_k =$$
$$= a_0 I_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k f_k + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!}\right) I_1.$$

Учитывая, что

$$I_0 = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

является элементарной функцией, получаем

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x \mathrm{d}x = F(x) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!}\right) I_1, \qquad (2)$$

где $F(x)$ — некоторая элементарная функция.

Согласно формуле (3) задачи 2091:

$$I_1 = \mathrm{li}(e^x) + C,$$

поэтому из (2) следует, что данный интеграл буде элементарной функцией тогда и только тогда, когда

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0.$$

Ответ: интеграл является элементарной функцией тогда и только тогда, когда

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0.$$

Найти интегралы.

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \mathrm{d}x.$

$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x - 4\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Согласно рекуррентной формуле (2) из решения задачи 2091:

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}\,dx. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = e^x - 4\int \frac{e^x}{x} + 4\left(-\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}\,dx\right) =$$

$$= e^x - \frac{4e^x}{x} + C = e^x\left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = \int e^{-x} dx - \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx. \quad (1)$$

Согласно формуле (3) задачи 1291:

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \mathrm{li}(e^{-x}) + C. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = -e^{-x} - \mathrm{li}(e^{-x}) + C.$$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,dx.$

Нетрудно получить разложение

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

из которого находим

$$\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{x-2}\,dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1}\,dx. \qquad (1)$$

В первом из интегралов, стоящих в правой части равенства (1), делаем замену $u = x - 2$, а во втором — $v = x - 1$. Получаем

$$\int \frac{e^{2x}}{x-2}\,dx = e^4 \int \frac{e^{2u}}{u}\,du, \tag{2}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{x-1}\,dx = e^2 \int \frac{e^{2v}}{v}\,dv. \tag{3}$$

Согласно формуле (3) задачи 2091:

$$\int \frac{e^{2u}}{u}\,du = \operatorname{li}(e^{2u}) + C, \tag{4}$$

$$\int \frac{e^{2v}}{v}\,dv = \operatorname{li}(e^{2v}) + C. \tag{5}$$

Из выражений (1)–(5), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,dx = e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{li}(e^{2x-2}) + C.$$

2096. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,e^x dx = \int \frac{e^x}{x+1}\,dx -$$
$$- \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{e^x}{x+1}\,dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right) =$$
$$= \int \frac{e^x}{x+1}\,dx + \left(\frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{x+1}\,dx\right) = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

2097. $\displaystyle\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx.$

Выделяя из рациональной функции $x^4/(x-2)^2$ целую часть, получаем

$$\frac{x^4}{(x-2)^2} = x^2 + 4x + 12 + \frac{16(2x-3)}{(x-2)^2}.$$

Разлагая полученную правильную дробь в сумму элементарных, находим

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Подставляя полученные разложения в исходный интеграл, имеем

$$\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int (x^2+4x+12)e^{2x}\mathrm{d}x + \\ + 32\int \frac{e^{2x}}{x-2}\,\mathrm{d}x + 16\int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Согласно формуле (1) задачи 2066:

$$\int (x^2+4x+12)e^{2x}\mathrm{d}x = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right) + C. \quad (2)$$

В оставшихся двух интегралах делаем замену $x - 2 = u$, получаем

$$\int \frac{e^{2x}}{x-2}\,\mathrm{d}x = e^4\int \frac{e^{2u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

$$\int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = e^4\int \frac{e^{2u}}{u^2}\,\mathrm{d}u = -e^4\int e^{2u}\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right) = \\ = -e^4\left(\frac{e^{2u}}{u} - 2\int \frac{e^{2u}}{u}\mathrm{d}u\right) = -\frac{e^{2u+4}}{u} + 2e^4\int \frac{e^{2u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Отсюда следует, что

$$32\int \frac{e^{2x}}{x-2}\,\mathrm{d}x + 16\int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -16\frac{e^{2u+4}}{u} + \\ + 64e^4\int \frac{e^{2u}}{u}\,\mathrm{d}u = -16\frac{e^{2x}}{x-2} + 64e^4\int \frac{e^{2u}}{u}\,\mathrm{d}u. \quad (3)$$

Согласно формуле (3) задачи 2091:

$$\int \frac{e^{2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{li}(e^{2u}) + C = \mathrm{li}(e^{2x-4}) + C. \quad (4)$$

Из соотношений (1)–(4) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\,\mathrm{li}(e^{2x-4})+C.$$

Найти интегралы, содержащие функции

$$\ln f(x),\quad \operatorname{arctg} f(x),\quad \arcsin f(x),\quad \arccos f(x),$$

где $f(x)$ — алгебраическая функция.

2098. $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x$ (n — натуральное число).

Обозначим

$$I_n = \int \ln^n x\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя по частям, получаем рекуррентное соотношение

$$I_n = \int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x = x\ln^n x - nI_{n-1}. \qquad (1)$$

Применяя n раз соотношение (1) и учитывая, что $I_0 = x + C$, получаем

$$\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\left(\ln^n x - n\ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2\ln x + (-1)^n n!\right) + C.$$

2099. $\int x^3 \ln^3 x\,\mathrm{d}x$.

Интегрируя трижды по частям, получаем

$$\int x^3 \ln^3 x\,\mathrm{d}x = \int \ln^3 x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4}\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3 \ln^2 x\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

$$\int x^3 \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \int \ln^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4}\ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

$$\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) =$$
$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C. \qquad (3)$$

Из (1)–(3) получаем окончательный ответ:

$$\int x^3 \ln^3 x \, dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right) + C.$$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

Интегрируя трижды по частям, получаем

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{1}{x^3}\ln^3 x \, dx =$$

$$= \int \ln^3 x \, d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} + \frac{3}{2}\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx. \quad (1)$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx = \int \ln^2 x \, d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{\ln^2 x}{2x^2} + \int \frac{\ln x}{x^3} dx. \quad (2)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int \ln x \, d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \quad (3)$$

Из (1)–(3) получаем ответ:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C.$$

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

$$\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)} =$$

$$= \int \left(\frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a}\right) dx =$$

$$= \int \left(\ln(x+a)\left(\ln(x+b)\right)' + \ln(x+b)\left(\ln(x+a)\right)'\right) dx =$$

$$= \int d\left(\ln(x+a)\ln(x+b)\right) = \ln(x+a)\ln(x+b) + C.$$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2})\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя дважды по частям, получаем

$$\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2})\mathrm{d}x = x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) -$$
$$- 2\int x\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} =$$
$$= x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,\mathrm{d}\left(\sqrt{1 + x^2}\right) =$$
$$= x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) +$$
$$+ 2\int \sqrt{1 + x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) -$$
$$- 2\sqrt{1 + x^2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x + C.$$

2103. $\int \ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x})\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x})\mathrm{d}x = x\ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) -$$
$$- \int x\,\frac{1}{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1 - x}} + \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}\,\frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Преобразуем подынтегральную функцию в оставшемся интеграле, переводя в первом множителе иррациональность из знаменателя в числитель:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{2x\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \mathrm{d}x = \arcsin x - x + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2} + C.$$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

Из решения задачи 1781 следует, что

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

в частности

$$\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Это обстоятельство позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} -$$
$$- \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

2105. $\int x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x.$

Интгерируя по частям, получаем

$$\int x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}. \quad (1)$$

Величина

$$\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2},$$

поэтому

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = x - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} = x - \ln(x^2+2x+2) + C. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая произвольность C, получаем

$$\int x \operatorname{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \operatorname{arctg}(x+1)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C.$$

2106. $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену

$$t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t,$$

получаем

$$\int \sqrt{x} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int t^2 \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t. \quad (1)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int t^2 \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}(t^3) = \frac{t^3}{3}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{3}\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{1+t^2}. \quad (2)$$

Наконец, вычисляем интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C. \quad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) получаем ответ:

$$\int \sqrt{x} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln(1+x) + C.$$

2107. $\int x \arcsin(1-x)\,\mathrm{d}x.$

Делая замену $t = 1 - x$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int x\arcsin(1-x)\,\mathrm{d}x = \int (t-1)\arcsin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int \arcsin t\,\mathrm{d}(t-1)^2 = \frac{(t-1)^2}{2}\arcsin t - \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t. \quad (1)$$

Оставшийся интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{(t-1)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-2t+1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2-1)-2t+2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t - 2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= -\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int \mathrm{d}\left(\sqrt{1-t^2}\right) + 2\arcsin t =$$
$$= -\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + 2\arcsin t + C =$$
$$= \frac{4-t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{2}\arcsin t + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем ответ:

$$\int x\arcsin(1-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) + C.$$

2108. $\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int \arcsin t\,\mathrm{d}(t^2) =$$
$$= t^2\arcsin t - \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= t^2 \arcsin t + \int \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = t^2 \arcsin t + \int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t -$$

$$- \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = t^2 \arcsin t + \left(\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right) -$$

$$- \arcsin t + C = t^2 \arcsin t + \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\arcsin t + C =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C.$$

2109. $\int x \arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x \arccos\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(x^2\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x. \quad (1)$$

При $x > 0$

$$\int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Так как под интегралом стоит четная функция, то для того чтобы результат был справедлив и при $x < 0$, у одной из первообразных нужно взять нечетное продолжение, поэтому при любом знаке x

$$\int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{x^2-1} + C. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем окончательный ответ:

$$\int x \arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1} + C.$$

2110. $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x = \int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(1+x) = (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} -$$

$$-\int (x+1)\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\,\frac{1-x}{(1+x)^2}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} -$$

$$-\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = (1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\operatorname{sgn}(1-x)\sqrt{x} + C.$$

Замечание. Непосредственное интегрирование по частям приводит к немного более сложному интегралу

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C,$$

вычисляющемуся подстановкой $\sqrt{x} = t$.

2111. $\displaystyle\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

Согласно решению задачи 1778:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Отсюда следует, что

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Это позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int\arccos x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{x\,dx}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C.$$

2112. $\displaystyle\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

Так как

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx,$$

то можно проинтегрировать по частям следующим образом:

$$\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \arccos x\, d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \\ + \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$$

2113. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,dx.$

Воспользуемся равенством

$$x\,dx = d\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$$

и проинтегрируем по частям

$$\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,dx = \int \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,d\left(\frac{1+x^2}{2}\right) = \\ = \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \\ - \int \frac{1+x^2}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)dx = \\ = \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)dx - \int x \operatorname{arctg} x\,dx. \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов также вычисляем с помощью интегрирования по частям:

$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int x\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \\ = x\ln(1+x^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \\ = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C. \quad (2)$$

Второй интеграл вычислен в задаче 1804:

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x + C. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\, dx = \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) -$$

$$- \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + x - \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} - \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \left(\ln(1+x^2) - 1 \right) + x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Замечание. Производные функций $\operatorname{arctg} x$ и $\ln(1+x^2)$ содержат в знаменателе величину $1+x^2$. Это является определяющим при выборе первоначального интегрирования по частям. Если вместо использованной формулы применить равенство $x\, dx = d(x^2/2)$, то вычисление интеграла усложняется.

2114. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) d(x^2) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} -$$

$$- \int x^2 \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \frac{(1-x^2)-1}{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} +$$

$$+ x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C = x + \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$$

2115. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$

Из решения задачи 1781 следует, что

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

в частности

$$\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

Это обстоятельство позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$
$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Найти интегралы, содержащие гиперболические функции.

2116. $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x\,dx.$

Воспользуемся следующими тождествами для гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x,$$

получим

$$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4x - 1)dx = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{x}{8} + C.$$

2117. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx.$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\operatorname{ch} 2x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 x,$$

применяя его дважды, получим

$$\int \operatorname{ch}^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (\operatorname{ch}2x+1)^2 dx = \frac{1}{4}\int (\operatorname{ch}^2 2x + 2\operatorname{ch}2x + 1)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2x\,dx + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{4} = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch}4x+1)dx + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{4} =$$
$$= \frac{1}{32}\operatorname{sh}4x + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{4} + C = \frac{1}{32}\operatorname{sh}4x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{3}{8}x + C.$$

2118. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx.$

Из формулы тройного угла для гиперболического синуса

$$\operatorname{sh} 3x = 3\operatorname{sh} x + 4\operatorname{sh}^3 x$$

получаем равенство

$$\operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{sh} x,$$

используя которое, находим

$$\int \operatorname{sh}^3 x\,dx = \int \left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{sh} x\right) dx = \frac{1}{12}\operatorname{ch} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{ch} x + C.$$

Если использовать формулу тройного угла для гиперболического косинуса

$$\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x,$$

то результат можно переписать в следующем виде:

$$\int \operatorname{sh}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C.$$

2119. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x\,dx.$

Воспользуемся формулами умножения гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)\right),$$

$$\operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \operatorname{sh}(\alpha-\beta)\right).$$

Согласно этим формулам:

$$\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 3x - \operatorname{ch} x)\operatorname{sh} 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sh} 3x \cdot \operatorname{ch} 3x - \operatorname{sh} 3x \cdot \operatorname{ch} x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 4x - \operatorname{sh} 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16}\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2x + C.$$

2120. $\int \operatorname{th} x \, dx$.

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x} = \ln \operatorname{ch} x + C.$$

2121. $\int \operatorname{cth}^2 x \, dx$.

Так как $\operatorname{cth}^2 x = 1 + 1/(\operatorname{sh}^2 x)$, то

$$\int \operatorname{cth}^2 x \, dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{cth} x + C.$$

2122. $\int \sqrt{\operatorname{th} x} \, dx$.

Делая замену $t = 2x$, получаем

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x} \, dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}} \, d(2x) = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{e^t - 1}{e^t + 1}} \, dt. \quad (1)$$

Полученный интеграл вычислен в решении задачи 2088:

$$\int \sqrt{\frac{e^t - 1}{e^t + 1}} \, dt = \ln \left(e^t + \sqrt{e^{2t} - 1}\right) + \arcsin \left(e^{-t}\right) + C. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получаем ответ:

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}\right) + \frac{1}{2} \arcsin e^{-2x} + C.$$

2123. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}$.

Воспользуемся заменой, аналогичной универсальной подстановке для тригонометрических функций:

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2 \, dt}{1 - t^2},$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (1)$$

Получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + t + 1}. \tag{2}$$

Полученный интеграл вычислен в задаче 1921, формула (3):

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C. \tag{3}$$

Из выражений (2) и (3) получаем ответ:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

2123.1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x}$.

Воспользуемся заменой, аналогичной подстановке для тригонометрических функций:

$$t = \operatorname{th} x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2},$$
$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{t^2}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - t^2}, \quad \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{t}{1 - t^2}. \tag{1}$$

Получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 4t + 9} = \int \frac{\mathrm{d}(t-2)}{(t-2)^2 + 5} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t - 2}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}} + C.$$

2123.2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{0{,}1 + \operatorname{ch} x}$.

Воспользуемся подстановкой (1) из задачи 2123:

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{0{,}1 + \operatorname{ch} x} = 20 \int \frac{\mathrm{d}t}{9t^2 + 11}. \tag{1}$$

Интеграл (1) вычислен в решении задачи 1836, в которой надо положить $a = 11$, $b = 9$:

$$\int \frac{dt}{11 + 9t^2} = \frac{1}{\sqrt{99}} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{9}{11}}\right) + C. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{0{,}1 + \operatorname{ch} x} = \frac{20}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{11}} + C.$$

2123.3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x \, dx}{3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x}$.

Эта задача подобна задаче 2042. Отличие состоит в замене тригонометрических функций гиперболическими. Покажем, что при условии $|a| \neq |b|$ имеет место формула, аналогичная формуле задачи 2042.

$$\int \frac{a_1 \operatorname{sh} x + b_1 \operatorname{ch} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} \, dx = Ax + B \ln |a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x| + C, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{aa_1 - bb_1}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 - b^2}. \qquad (2)$$

Найдем разложение

$$a_1 \operatorname{sh} x + b_1 \operatorname{ch} x = A(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) + B(a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x). \qquad (3)$$

Для справедливости этого разложения достаточно, чтобы

$$\begin{cases} aA + bB = a_1, \\ bA + aB = b_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = a^2 - b^2 \neq 0$ и ее решение находится по формулам Крамера (2). Из разложения (3) следует, что

$$\frac{a_1 \operatorname{sh} x + b_1 \operatorname{ch} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} = A + B \frac{(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)'}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем (1).

В нашей первоначальной задаче $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a = 3$, $b = -4$. Вычисление по формуле (2) дает

$$A = -\frac{4}{7}, \quad B = -\frac{3}{7}.$$

Поэтому

$$\int \frac{\operatorname{ch} x \, dx}{3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x} = -\frac{4}{7} x - \frac{3}{7} \ln |3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x| + C.$$

Замечание. Условие $|a| \neq |b|$ не является существенным. Если это условие не выполнено, то в знаменателе стоит либо $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, либо $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. Поэтому искомый интеграл превращается в интеграл от многочлена от e^{2x}, либо в интеграл от многочлена от e^{-2x} и вычисляется без труда.

2124. $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx \, dx.$

$$\int \operatorname{sh} ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \sin bx \, dx. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1829:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \quad (2)$$

$$\int e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + C. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1) и выделяя множители при $\sin bx$ и $\cos bx$, получаем ответ:

$$\int \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx \, dx = \frac{a \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Замечание. Если взять полусумму интегралов (2) и (3), то получим еще один интеграл

$$\int \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx \, dx = \frac{a \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

2125. $\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx \, dx$.

$$\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \cos bx \, dx - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \cos bx \, dx. \quad (1)$$

Согласно решению задачи 1828:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \quad (2)$$

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + C. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1) и выделяя множители при $\sin bx$ и $\cos bx$, получаем ответ:

$$\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx \, dx = \frac{a \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx + b \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Замечание. Если взять полусумму интегралов (2) и (3), то получим еще один интеграл

$$\int \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx \, dx = \frac{a \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx + b \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Глава 7

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы.

2126. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

Разложение подынтегральной функции на более простые дроби удобно провести, вводя промежуточную переменную $z = x^2$. Получаем

$$\frac{1}{x^6(1+x^2)} = \frac{1}{z^3(1+z)} = f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{1+z}.$$

Учитывая асимптотику

$$f(z) \sim \frac{1}{z^3}, \quad z \to 0,$$
$$f(z) \sim -\frac{1}{1+z}, \quad z \to -1,$$

находим сразу $C = 1$ и $D = -1$.

Остальные коэффициенты находим, учитывая следующие члены асимптотики при $x \to 0$. Из соотношения

$$f(z) - \frac{1}{z^3} = -\frac{1}{z^2(1+z)} \sim -\frac{1}{z^2}$$

находим $B = -1$, а из равенства

$$f(z) - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z(1+z)} \sim \frac{1}{z}$$

получаем $A = 1$. Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{1+z}.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \operatorname{arctg} x + C.$$

2127. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}$.

Воспользуемся методом Остроградского. Учитывая четность подынтегральной функции, разложение ищем в виде

$$\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{Ax^3+Bx}{(1-x^2)^2} + C\int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+C)x^4 + (3A+3B-2C)x^2 + (B+C) = x^2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+C=0, \\ 3A+3B-2C=1, \\ B+C=0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x^3+x}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

2128. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

Найдем разложение подынтегральной функции $f(x)$ в сумму более простых дробей, вводя промежуточную переменную $z = x^2$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{1+z^2+z^4} = F(z).$$

Разложение функции $F(z)$ на элементарные дроби было получено в решении задачи 1885:

$$F(z) = \frac{z+1}{2(z^2+z+1)} - \frac{z-1}{2(z^2-z+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{x^2+1}{2(x^4+x^2+1)} - \frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Первый из полученных здесь интегралов вычислен в решении задачи 1917:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C. \tag{2}$$

Второй интеграл вычисляется по той же схеме решения задачи 1917. Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на x^2 и делая замену $u = x + 1/x$, получаем

$$\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2-1+\dfrac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{3-u^2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{3}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| + C. \tag{3}$$

Из выражений (1), (2) и (3), учитывая произвольность C, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| + C.$$

2129. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Делая замену

$$t = \sqrt[6]{x}, \quad x = t^6, \quad dx = 6t^5dt, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, \quad \sqrt{x} = t^3,$$

получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 3t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

2130. $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

Сделаем замену

$$t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Получим

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = 2\int \frac{t^6dt}{(t^2+1)^4}. \qquad (1)$$

Используя формулу суммы кубов, находим

$$t^6 = (t^6+1) - 1 = (t^2+1)(t^4-t^2+1) - 1.$$

Поэтому

$$\int \frac{t^6dt}{(t^2+1)^4} = \int\left(\frac{t^4-t^2+1}{(t^2+1)^3} - \frac{1}{(t^2+1)^4}\right)dt =$$
$$= \int\left(\frac{t^2(t^2+1) - 2(t^2+1) + 3}{(t^2+1)^3} - \frac{1}{(t^2+1)^4}\right)dt =$$

$$= \int \left(\frac{t^2-2}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{(t^2+1)^3} - \frac{1}{(t^2+1)^4} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{(t^2+1)-3}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{(t^2+1)^3} - \frac{1}{(t^2+1)^4} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{3}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{(t^2+1)^3} - \frac{1}{(t^2+1)^4} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - 3\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^4}. \quad (2)$$

Первый из полученных интегралов является табличным:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C. \quad (3)$$

Остальные находим, используя рекуррентное соотношение, полученное в решении задачи 1921.

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C. \quad (4)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^4} = \frac{t}{6(t^2+1)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} =$$

$$= \frac{t}{6(t^2+1)^3} + \frac{5t}{24(t^2+1)^2} + \frac{5t}{16(t^2+1)} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} t + C. \quad (6)$$

Из выражений (1)–(6) получаем

$$\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\operatorname{arctg} t - \frac{11t}{8(t^2+1)} + \frac{13t}{12(t^2+1)^2} - \frac{t}{3(t^2+1)^3} + C =$$

$$= \frac{5}{8}\operatorname{arctg} t - \frac{(33t^4+40t^2+15)t}{24(t^2+1)^3} + C =$$

$$= \frac{5}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \frac{8x^2+10x+15}{24}\sqrt{x(1-x)} + C.$$

В области определения подынтегральной функции величина $x \in [0;1)$ и поэтому

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \arcsin\sqrt{x}.$$

Следовательно, окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x} - \frac{8x^2+10x+15}{24}\sqrt{x(1-x)} + C.$$

2131. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

$$\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}. \quad (1)$$

Вычислим первый из полученных интегралов. Предположим, что $x > 0$. Делая замену $u = 1/x$, находим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = -\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C =$$
$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C. \quad (2)$$

В рассматриваемом интеграле подынтегральная функция нечетна, а правая часть равенства (2) четна. Следовательно, формула (2) сохраняет свою силу и при $x < 0$.

Перейдем ко второму интегралу в правой части равенства (1). Рассматривая его при $x > 0$, сделаем ту же замену $u = 1/x$, получим

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}} = -\sqrt{u^2-1} + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \quad (3)$$

Подынтегральная функция теперь четна, а одна из первообразных (отвечающая $C = 0$) нечетна. Следовательно, формула (3) сохраняет свою силу и при $x < 0$.

Из выражений (1), (2) и (3), учитывая произвольность C, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} + C.$$

2132. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$

Делая замену

$$t = x\sqrt{x}, \quad \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x,$$

находим

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = -\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{1-t}} =$$
$$= -\frac{4}{3}\sqrt{1-t} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

2133. $\displaystyle\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Применим формулу, приведенную перед задачей 1943. Учитывая нечетность подынтегральной функции, найдем разложение

$$\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = (Ax^4 + Bx^2 + C)\sqrt{1+x^2} + \mathrm{const}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$5Ax^5 + (4A+3B)x^3 + (2B+C)x = x^5.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 4A + 3B = 0, \\ 2B + C = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{4}{15}, \quad C = \frac{8}{15}.$$

Переобозначая через C аддитивную постоянную неопределенного интеграла, получаем ответ:

$$\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{15}(3x^4 - 4x^2 + 8)\sqrt{1+x^2} + C.$$

2134. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2\,(1-x)}}$.

После замены

$$z = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}, \quad x = \frac{1}{z^3+1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{3z^2\mathrm{d}z}{(z^3+1)^2}, \quad 1-x = \frac{z^3}{1+z^3}$$

получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2\,(1-x)}} = \int \sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -3\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^3+1}. \quad (1)$$

Полученный интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^3+1} = \int \frac{(z+1)-1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1} - \int \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1}. \quad (2)$$

Первый интеграл в правой части равенства (2) вычисляется методом выделения полного квадрата:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1} = \int \frac{\mathrm{d}(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C. \quad (3)$$

Второй интеграл вычислен в задаче 1881:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C. \quad (4)$$

Из формул (1)–(4) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2\,(1-x)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $z = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}$.

2135. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Делая замену $z = 1/x^3$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3}\ln\left|z+\frac{1}{2}+\sqrt{z^2+z+1}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{2x^3}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right| + C,$$

где $C = C_1 = (\ln 2)/3$.

При $x < 0$ делаем ту же замену $z = 1/x^3$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = -\int \frac{dx}{x^4\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{3}\ln\left|z+\frac{1}{2}+\sqrt{z^2+z+1}\right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3-2\sqrt{1+x^3+x^6}}{2x^3}\right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(2+x^3)^2-4(1+x^3+x^6)}{2x^3(2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6})}\right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x^3}{2(2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6})}\right| + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right| + C,$$

где $C = C_2 + (\ln(3/2))/3$.

Таким образом, при любом знаке x

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right| + C.$$

2136. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

Делая замену $z = 1/x^2$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-2z-z^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(z+1)}{\sqrt{2-(z+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\frac{z+1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}} + C.$$

2137. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Переводя иррациональность в числитель, получаем

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = 2\int\frac{dx}{x^2} - \int dx + 2\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{x} - x + 2\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{2+x^2}{x} + 2\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx. \qquad (1)$$

Оставшийся интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x. \qquad (2)$$

Последний интеграл вычислен в решении задачи 2131, формула (3):

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \qquad (3)$$

Учитывая произвольность C, окончательно получаем

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x + C.$$

2138. $\displaystyle\int \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

Переводя иррациональность в числитель, получаем

$$\int \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{(1+x)(\sqrt{x+x^2}-x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{(1+x)\sqrt{x+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x - \int (1+x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{(1+x)\sqrt{x+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{(1+x)^2}{2}. \quad (1)$$

В полученном интеграле, наоборот, переводим иррациональность из числителя в знаменатель

$$\int \frac{(1+x)\sqrt{x+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1+x)(x+x^2)}{x\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Оставшийся интеграл вычисляем методом неопределенных коэффициентов по формуле, приведенной перед задачей 1943:

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{x+x^2} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^2}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$2Ax^2 + \left(B + \frac{3A}{2}\right)x + \left(\frac{B}{2} + \lambda\right) = x^2 + 2x + 1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ B + \dfrac{3A}{2} = 2, \\ \dfrac{B}{2} + \lambda = 1, \end{cases}$$

находим

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{5}{4}, \quad \lambda = \frac{3}{8}.$$

Далее вычисляем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| + C.$$

Учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}} = -\frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{2x+5}{4}\sqrt{x+x^2} +$$
$$+ \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| + C.$$

2139. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx = \int \ln(1+x+x^2)d\left(-\frac{1}{1+x}\right) =$$
$$= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}\,dx. \quad (1)$$

Для вычисления получившегося интеграла найдем разложение подынтегральной функции на элементарные дроби:

$$\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$(A+B)x^2 + (A+B+C)x + (A+C) = 2x+1.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+B+C=2, \\ A+C=1, \end{cases}$$

находим

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}\,dx = -\ln|1+x| + \int \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx. \quad (2)$$

Вычисляя оставшийся интеграл, получаем

$$\int \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx +$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x+x^2)}{1+x+x^2} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} +$$

$$+ \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + C.$$

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx = \int \arccos(2x-3)\,d(x^2+3x) =$$

$$= (x^2+3x)\arccos(2x-3) + \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx. \quad (1)$$

Интеграл в правой части равенства (1) вычисляем методом неопределенных коэффициентов по формуле, приведенной перед задачей 1943.

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx =$$

$$= (Ax+B)\sqrt{-x^2+3x-2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$-2Ax^2 + \left(\frac{9}{2}A - B\right)x + \left(-2A + \frac{3}{2}B + \lambda\right) = x^2 + 3x.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ \dfrac{9}{2}A - B = 3, \\ -2A + \dfrac{3}{2}B + \lambda = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{21}{4}, \quad \lambda = \frac{55}{8}.$$

Таким образом

$$\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2x + 21}{4}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \frac{55}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}. \quad (2)$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = \int \frac{\mathrm{d}(x - \frac{3}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{3}{2})^2}} = -\arccos(2x - 3) + C. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем окончательный ответ:

$$\int (2x + 3)\arccos(2x - 3)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 + 3x - \frac{55}{8}\right)\arccos(2x - 3) - \frac{2x + 21}{4}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + C.$$

2141. $\int x \ln(4 + x^4)\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x \ln(4 + x^4)\,\mathrm{d}x = \int \ln(4 + x^4)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln(4 + x^4) - 2\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{4 + x^4}. \quad (1)$$

Выделим в рациональной функции целую часть и сделаем замену $t = x^2$.

$$\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{4+x^4} = \int \left(x - \frac{4x}{4+x^4}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{4+(x^2)^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2} = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int x \ln(4+x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(4+x^4) - x^2 + 2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$$

2142. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Согласно формуле (3) из решения задачи 2131:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

Следовательно,

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int \arcsin x\, \mathrm{d}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) =$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln|x| + C. \tag{2}$$

Второй интеграл в правой части равенства (1) вычислется с помощью замены $t = \arcsin x$:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin x \, d(\arcsin x) =$$

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C. \quad (3)$$

Из формул (1), (2) и (3), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \ln|x| + C.$$

2143. $\displaystyle\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Интегрируя по частям, находим

$$\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \ln(1+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2}) =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Полученный интеграл рационализируется заменой

$$t = \sqrt{1+x^2}, \quad t^2 = 1+x^2, \quad t\,dt = x\,dx.$$

Делая замену, получаем

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{t\,dt}{1+t} = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= t - \ln|1+t| + C = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

Учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= (1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Замечание. Альтернативный вариант дает замена $u = 1+\sqrt{1+x^2}$, которая приводит к интегралу $\int \ln u\,\mathrm{d}u$, вычисленному в задаче 1791.

2144. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\right) = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3}\int (x^2+1)^{3/2}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Делая замену

$$t = \sqrt{x^2+1}, \quad x^2 = t^2-1,$$

$$x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t, \quad x^2-1 = t^2-2,$$

находим

$$\int (x^2+1)^{3/2}\frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^4\mathrm{d}t}{t^2-2}. \quad (2)$$

Выделяя в рациональной функции целую часть, имеем

$$\int \frac{t^4\mathrm{d}t}{t^2-2} = \int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}+2t-\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|+C. \quad (3)$$

Из выражений (1), (2) и (3) получаем ответ:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

2145. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = -\int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, d\left(\sqrt{1-x^2}\right) =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \int \sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)}\right) dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\, dx. \tag{1}$$

В первом из полученных интегралов переводим иррациональность в знаменатель

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx = \int \frac{1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} -$$
$$- \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}. \tag{2}$$

Интеграл, полученный в правой части равенства (2), вычислен в задаче 2131, формула (2). Так как в области определения исходной подынтегральной функции величина $x > 0$, то модуль под логарифмом можно опустить:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \tag{3}$$

Второй интеграл в выражении (1) вычислен в задаче 1782, где надо взять $a = 1$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\, dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C. \tag{4}$$

Из формул (1)–(4) получаем ответ:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} -$$
$$- \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

2146. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

После замены $u = \frac{\pi}{2} - x$ получаем

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = -\int \frac{du}{(2+\cos u)^2}. \tag{1}$$

Воспользуемся рекуррентным соотношением задачи 2059 с данными $a = 2$, $b = 1$, $n = 2$. Коэффициенты рекуррентного соотношения вычисляем по формулам (4) задачи 2059:

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = 0.$$

По формуле (1) задачи 2059

$$\int \frac{du}{(2+\cos u)^2} = -\frac{\sin u}{3(2+\cos u)} + \frac{2}{3}\int \frac{du}{2+\cos u}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) получаем (возвращаясь к переменной x)

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{2+\sin x}. \tag{3}$$

Оставшийся интеграл вычисляем с помощью универсальной подстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

После подстановки получаем

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2147. $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx.$

Так как

$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x,$

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4 = \\ = \frac{1}{8}\left(1 + 6\cos^2 2x + \cos^4 2x\right),$$

то

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx = 16\int \frac{\sin 2x \cos 2x}{1 + 6\cos^2 2x + \cos^4 2x}\, dx = \\ = -8\int \frac{\cos 2x}{1 + 6\cos^2 2x + \cos^4 2x}\, d(\sin 2x) = -8\int \frac{u\, du}{1 + 6u^2 + u^4}, \quad (1)$$

где $u = \cos 2x$.

Делая далее замену $v = u^2$, получаем

$$\int \frac{u\, du}{1 + 6u^2 + u^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1 + 6v + v^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(v+3)}{(v+3)^2 - 8} = \\ = -\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+v+3}{2\sqrt{2}-v-3}\right| + C = -\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\cos^2 2x+3}{2\sqrt{2}-\cos^2 2x-3}\right| + C = \\ = -\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4\sqrt{2}+7+\cos 4x}{4\sqrt{2}-7-\cos 4x}\right| + C. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4\sqrt{2}+7+\cos 4x}{4\sqrt{2}-7-\cos 4x}\right| + C.$$

2148. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

Делая замену $u = \cos x$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\cos x}} = \\ = -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\sqrt{1+\cos x}} = -\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{1+u}}. \quad (1)$$

Далее рационализируем интеграл подстановкой $t = \sqrt{1+u}$:

$$\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{1+u}} = -2\int \frac{dt}{t^2(t^2-2)} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2-2}\right) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C. \quad (2)$$

Возвращаясь к переменной x и учитывая произвольность C, из (1) и (2) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}\right| + C.$$

2149. $\displaystyle\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx.$

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx = \int \frac{a(x^2+1)+(b-a)}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx =$$

$$= a\int \operatorname{arctg} x\, dx + (b-a)\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx. \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов вычислен в решении задачи 1802:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad (2)$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \int \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C. \quad (3)$$

Из выражений (1)–(3), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\, dx = a\left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) +$$

$$+ \frac{b-a}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C.$$

2150. $\displaystyle\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx.$

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = \int \frac{a(x^2-1)+(a+b)}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx =$$
$$= a\int \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx + (a+b)\int \frac{1}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx. \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов вычисляется с помощью интегрирования по частям.

$$\int \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \int \frac{2x\,dx}{x^2-1} =$$
$$= x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln|x^2-1| + C. \quad (2)$$

Во втором интеграле делаем замену $t = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = \frac{1}{2}\int \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| d\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{1}{4}t^2 + C = \frac{1}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \quad (3)$$

Из формул (1)–(3) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln|x^2-1|\right) +$$
$$+ \frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2151. $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \ln x\, d\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) =$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}. \quad (1)$$

Оставшийся интеграл вычисляем, разложив подынтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

2152. $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \operatorname{arctg} x\, d(\sqrt{1+x^2}) = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x -$$
$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

2153. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx.$

Делая замену $u = \cos x$, получаем

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx =$$
$$= -2\int \frac{\cos x\, d(\cos x)}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx = -2\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^4}}. \tag{1}$$

Полученный интеграл вычисляем подстановкой $v = u^2$:

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(v + \sqrt{1+v^2}) + C = \frac{1}{2}\ln(u^2 + \sqrt{1+u^4}) + C. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx = -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$$

2154. $\displaystyle\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Вычислим предварительно неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для этого воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, применяя формулу, приведенную перед задачей 1943. С учетом нечетности подынтегральной функции эта формула принимает вид

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax^2+B)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{const}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$-3Ax^3 + (2A-B)x = x^3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ 2A - B = 0, \end{cases}$$

находим

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2} + C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{d}\left(\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\right).$$

Это позволяет воспользоваться интегрированием по частям следующим образом:

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \arccos x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\right) =$$
$$= -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int \frac{x^2+2}{3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{x^3+6x}{9} + C.$$

2155. $\displaystyle\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

С помощью элементарных преобразований получаем

$$\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^4+x^2)-x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= \int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx - \int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx. \quad (1)$$

Для вычисления первого полученного интеграла воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \int \operatorname{arctg} x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) =$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx. \quad (2)$$

Полученный в выражении (2) интеграл вычисляем следующим образом:

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^3+x)-x}{1+x^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad (3)$$

Второй интеграл в правой части равенства (1) вычислен в решении задачи 2149 (где нужно взять $a = 1$ и $b = 0$).

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C. \quad (4)$$

Из формул (1)–(4) получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = -\frac{x^2}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C.$$

2156. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Интегируя по частям, получаем

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \operatorname{arctg} x \, d\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) =$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \quad (1)$$

Полученный интеграл вычислен в решении задачи 1817 (где нужно положить $a = 1$).

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C.$$

2157. $\displaystyle\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d\left(\frac{1}{2(1-x^2)}\right) =$$
$$= \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}. \quad (1)$$

Интеграл в правой части равенства (1) вычисляем, используя подстановку Абеля:

$$t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{1-2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\,t)}{1-(\sqrt{2}\,t)^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,t}{1-\sqrt{2}\,t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right| + C.$$
$$(2)$$

Из (1) и (2), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{2(1-x^2)} - \\ - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right| + C.$$

2158. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x.$

Из табличного интеграла

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

имеем равенство

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

которое позволяет преобразовать рассматриваемый интеграл следующим образом:

$$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \int \arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \\ = \int \arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\int \arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x). \quad (1)$$

Первый из полученных в правой части равенства (1) интегралов вычисляем с помощью интегрирования по частям:

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (2)$$

Второй интеграл в правой части (1) вычисляем заменой $t = \arcsin x$

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x) = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C. \quad (3)$$

Из выражений (1)–(3), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\arcsin^2 x + C.$$

2159. $\displaystyle\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right) =$$
$$= \frac{x^4+2x^2}{4}\,\mathrm{arcctg}\,x + \frac{1}{4}\int \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Далее вычисляем интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2(x^2+1)+(x^2+1)-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(x^2+1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x + \mathrm{arcctg}\,x + C. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2), учитывая произвольность C, получаем ответ:

$$\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{(x^2+1)^2}{4}\,\mathrm{arcctg}\,x + C.$$

2160. $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(x^x) = x^x + C.$$

2161. $\displaystyle\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x.$

После замены $t = e^x$ $(\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t)$ имеем

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \quad (1)$$

Полученный интеграл вычислен в задаче 1806:

$$\int \frac{\arcsin t}{t^2}\,dt = -\frac{\arcsin t}{t} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + C. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx = x - e^{-x}\arcsin(e^x) - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + C.$$

2162. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx.$

После замены $t = e^{x/2}$ и элементарных преобразований получаем

$$\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t\,dt}{t^2(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \operatorname{arctg} t\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2\int \operatorname{arctg} t\,d\left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$= -2\int \operatorname{arctg} t\,d\left(\frac{1}{t}\right) - 2\int \operatorname{arctg} t\,d(\operatorname{arctg} t). \qquad (1)$$

Первый из полученных интегралов с помощью интегрирования по частям сводим к интегралу от рациональной функции

$$\int \operatorname{arctg} t\,d\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\operatorname{arctg} t}{t} - \int \frac{dt}{t(1+t^2)}. \qquad (2)$$

Интеграл в правой части равенства (2) вычисляем с помощью разложения рациональной функции на элементарные дроби:

$$\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C. \quad (3)$$

Второй интеграл в правой части равенства (1) сводится к табличному заменой переменной $u = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \operatorname{arctg} t\,d(\operatorname{arctg} t) = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + C. \qquad (4)$$

Возвращаясь к переменной x и учитывая произвольность C, получаем из выражений (1)–(4) окончательный ответ:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx = -\frac{2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} + x - \ln(1+e^x) - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + C.$$

2163. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(e^{x+1}+1\right)^2 - \left(e^{x-1}+1\right)^2}.$

После элементарных преобразований и замены $t = e^x$ получаем

$$\int \frac{dx}{\left(e^{x+1}+1\right)^2-\left(e^{x-1}+1\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(e^{x+1}-e^{x-1}\right)\left(e^{x+1}+e^{x-1}+2\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{2e^x \operatorname{sh} 1 (2e^x \operatorname{ch} 1 + 2)} = \frac{1}{4\operatorname{sh} 1}\int \frac{dt}{t^2(t\operatorname{ch} 1 + 1)}. \quad (1)$$

Полученный интеграл вычисляем с помощью разложения на элементарные дроби

$$\int \frac{dt}{t^2(t\operatorname{ch} 1+1)} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\operatorname{ch} 1}{t} + \frac{\operatorname{ch}^2 1}{t\operatorname{ch} 1 + 1}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{t} - (\operatorname{ch} 1)\ln|t| + (\operatorname{ch} 1)\ln|t\operatorname{ch} 1 + 1| + C. \quad (2)$$

Из (1) и (2), возвращаясь к переменной x и учитывая произвольность C, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\left(e^{x+1}+1\right)^2 - \left(e^{x-1}+1\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\operatorname{sh} 1} e^{-x} - \frac{\operatorname{cth} 1}{4}\left(x - \ln\left(1 + e^x \operatorname{ch} 1\right)\right) + C.$$

2164. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}\, dx.$

Используя тождество $1 - \operatorname{th}^2 x = 1/\operatorname{ch}^2 x$ и делая замену $u = \operatorname{th} x$, находим

$$\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}\, dx = \int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}\; \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}}{1 - \operatorname{th}^2 x}\, d(\operatorname{th} x) = \int \frac{\sqrt{u^2+1}}{1-u^2}\, du. \quad (1)$$

Полученный интеграл преобразуем, переводя иррациональность из числителя в знаменатель:

$$\int \frac{\sqrt{u^2+1}}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u^2+1}{(1-u^2)\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{-(1-u^2)+2}{(1-u^2)\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} + 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= -\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) + 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)\sqrt{u^2+1}}. \qquad (2)$$

Оставшийся в правой части равенства (2) интеграл вычислен в задаче 2157, формула (2):

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)\sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+u^2}+\sqrt{2}\,u}{\sqrt{1+u^2}-\sqrt{2}\,u}\right| + C. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) получаем окончательный ответ

$$\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\operatorname{th} x + \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}-\sqrt{2}\operatorname{th} x}\right| + C.$$

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, e^x\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, e^x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\, e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right) e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right) e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{d}\left(e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

2166. $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

При $x > 0$

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Так как подынтегральная функция четна, а нечетным продолжением функции $y = x^2/2$ является функция $y = x|x|/2$, то при всех x

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x|x| + C.$$

2167. $\int x|x|\,\mathrm{d}x$.

При $x > 0$

$$\int x|x|\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Так как подынтегральная функция нечетна, а четным продолжением функции $y = x^3/3$ является функция $y = x^2|x|/3$, то при всех x

$$\int x|x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^2|x| + C.$$

2168. $\int (x + |x|)^2\mathrm{d}x$.

Используя решение задачи 2167, получаем

$$\int (x + |x|)^2\mathrm{d}x = \int (x^2 + 2x|x| + x^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2|x| + \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^2(x + |x|) + C.$$

2169. $\int (|1 + x| - |1 - x|)\mathrm{d}x$.

Используя решения задач 2166 и 1654, получаем

$$\int (|1 + x| - |1 - x|)\mathrm{d}x = \int |1 + x|\,\mathrm{d}x - \int |1 - x|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x)|1 + x| + \frac{1}{2}(1 - x)|1 - x| + C.$$

2170. $\int e^{-|x|}\mathrm{d}x.$

При $x > 0$

$$\int e^{-|x|}\mathrm{d}x = \int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x} + C.$$

Так как подынтегральная функция четна, то для вычисления интеграла при $x < 0$ достаточно найти нечетное продолжение одной из первообразных при $x > 0$. Для того чтобы получить непрерывную на всей оси функцию, нужно взять первообразную, равную в нуле нулю. Этой функцией является функция $y = 1 - e^{-x}$, а ее нечетное продолжение на отрицательную полуось совпадает с $y = e^x - 1$. Следовательно,

$$\int e^{-|x|}\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 - e^{-x} + C, & x \geqslant 0 \\ e^x - 1 + C, & x < 0. \end{cases}$$

2171. $\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x.$

Если $x < -1$, то $\max\{1, x^2\} = x^2$ и

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то $\max\{1, x^2\} = 1$ и

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C_2.$$

Если $x > 1$, то $\max\{1, x^2\} = x^2$ и

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C_3.$$

Найдем первообразную подынтегральной функции, непрерывную на всей числовой прямой. За основу выберем отрезок $[-1; 1]$ и значение $C_2 = 0$. Таким образом, при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ первообразная задана формулой $y = x$. При $x < -1$ нам нужно подобрать постоянную C_1 так, чтобы при $x = -1$ значения функций $\frac{x^3}{3} + C_1$ и $y = x$ совпадали. Отсюда получаем соотношение $-\frac{1}{3} + C_1 = -1$, из которого находим $C_1 = -\frac{2}{3}$.

Аналогично, при $x > 1$ нужно подобрать постоянную C_3 так, чтобы при $x = 1$ совпадали значения функций $\frac{x^3}{3} + C_3$ и $y = x$. Это дает уравнение $\frac{1}{3} + C_3 = 1$, из которого следует, что $C_3 = \frac{2}{3}$. Следовательно, функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}, & x < -1, \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

является непрерывной первообразной для подынтегральной функции на всей числовой прямой. Поэтому

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

2172. $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

На промежутке $x \in [n\,; n+1]$ (n — целое число) функция $\varphi(x)$ дополняет до $1/2$ расстояние числа x до середины рассматриваемого промежутка, поэтому

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right|.$$

Используя теперь решение задач 2166 и 1654, получаем, что на отрезке $[n\,; n+1]$

$$\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left| x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right| + C_n.$$

Найдем первообразную функции $\varphi(x)$, непрерывную на всей числовой прямой. Для этого приравняем значения первообразных на промежутках $[n-1\,; n]$ и $[n\,; n+1]$ при $x = n$. Получим

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left(n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)\left| n - \left(n - \frac{1}{2}\right) \right| + C_{n-1} =$$
$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left(n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left| n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right| + C_n.$$

Из этого уравнения находим $C_n = C_{n-1} - \frac{1}{4}$, что дает

$$C_n = C_0 - \frac{n}{4}.$$

Следовательно, на промежутке $x \in [n\,; n+1]$

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left|x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right| + C_0 - \frac{n}{4} =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{x}{4} - \frac{n}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left|x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right| + C_0 + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{x - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{4} - \frac{1}{2}\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left|x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right| + C_0 + \frac{1}{8}.$$

Вводя обозначение $(x) = x - n$ (дробная часть числа x) и полагая $C = C_0 + \dfrac{1}{8}$, получаем окончательный ответ:

$$\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{4} + \frac{(x) - \frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{2}\left((x) - \frac{1}{2}\right)\left|(x) - \frac{1}{2}\right| + C =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left((x) - \frac{1}{2}\right)\left(1 - 2\left|(x) - \frac{1}{2}\right|\right) + C.$$

2173. $\displaystyle\int [x]\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x \quad (x \geqslant 0).$

Рассмотрим подынтегральную функцию на промежутке $[n\,; n+1)$, где n — неотрицательное целое число. В этом случае целая часть числа x равна n. Значение второго сомножителя зависит от четности числа n. Если $n = 2k$ (k — целое число), то $|\sin \pi x| = \sin \pi x$ и

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x = 2k \int \sin \pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2k}{\pi}\cos \pi x + C_{2k} = -\frac{n}{\pi}\cos \pi x + C_n. \quad (1)$$

Если $n = 2k + 1$, то $|\sin \pi x| = -\sin \pi x$ и

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x = -(2k+1)\int \sin \pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2k+1}{\pi}\cos \pi x + C_{2k+1} = \frac{n}{\pi}\cos \pi x + C_n. \quad (2)$$

Условие непрерывности первообразной в точке $x = 2k$ дает соотношение $C_{2k} = C_{2k-1} + (4k-1)/\pi$, а условие непрерывности первообразной в точке $x = 2k+1$ имеет вид $C_{2k+1} = C_{2k} + (4k+1)/\pi$. Нетрудно видеть, что оба полученных условия можно записать одной формулой независимо от четности n:

$$C_n = C_{n-1} + \frac{2n-1}{\pi}.$$

Применяя n раз полученное соотношение, находим

$$C_n = C_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

По формуле суммы арифметической прогресии

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2,$$

следовательно, $C_n = C_0 + n^2/\pi$. Учитывая, что $n = [x]$, и полагая $C = C_0$, равенства (1) и (2) можно записать одной формулой:

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x = (-1)^{[x]+1}\,\frac{[x]\cos\pi x}{\pi} + C + \frac{[x]^2}{\pi} =$$
$$= \frac{[x]}{\pi}\left([x] - (-1)^{[x]}\cos\pi x\right) + C.$$

2174. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, где $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x| & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$

Если $x < -1$, то $f(x) = 1 - |x|$, и согласно решению задачи 2166:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - |x|)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\,x|x| + C_1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то $f(x) = 1 - x^2$ и

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{3}\,x^3 + C_2.$$

При $x > 1$ функция $f(x)$ задается той же формулой, что и при $x < -1$, поэтому

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - |x|)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\,x|x| + C_3.$$

Найдем первообразную подынтегральной функции, непрерывную на всей числовой прямой. За основу выберем отрезок $[-1; 1]$ и значение $C_2 = 0$. Таким образом, при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ первообразная задана формулой $y = x - x^3/3$. При $x < -1$ нам нужно подобрать постоянную C_1 так, чтобы при $x = -1$ значения функций $x - \frac{1}{2}\,x|x| + C_1$ и $y = x - x^3/3$ совпадали. Отсюда получаем соотношение $-1 + \frac{1}{2} + C_1 = -1 + \frac{1}{3}$, из которого находим $C_1 = -\frac{1}{6}$. Аналогично, при $x > 1$ нужно подобрать постоянную C_3 так, чтобы при $x = 1$ совпадали значения функций $x - \frac{1}{2}\,x|x| + C_3$ и $y = x - x^3/3$. Это дает уравнение $1 - \frac{1}{2} + C_3 = 1 - \frac{1}{3}$, из которого следует, что $C_3 = \frac{1}{6}$. Следовательно, функция

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\,x|x| - \dfrac{1}{6}, & x < -1, \\ x - \dfrac{1}{3}\,x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - \dfrac{1}{2}\,x|x| + \dfrac{1}{6}, & x > 1 \end{cases}$$

является непрерывной первообразной для подынтегральной функции на всей числовой прямой. Поэтому

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}\,x^3 + C, & |x| \leqslant 1; \\ x - \dfrac{1}{2}\,x|x| + \dfrac{1}{6}\,\mathrm{sgn}\,x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

2175. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x + 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

Если $x < 0$, то

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C_1.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x + C_2.$$

При $x > 1$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C_3.$$

Найдем первообразную подынтегральной функции, непрерывную на всей числовой прямой. За основу выберем промежуток $(-\infty; 0)$ и значение $C_1 = 0$. Таким образом, при $x < 0$ первообразная задана формулой $y = x$. При $0 \leqslant x \leqslant 1$ нам нужно подобрать постоянную C_2 так, чтобы при $x = 0$ значения функций $y = x$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + x + C_2$ совпадали. Отсюда получаем $C_2 = 0$ и, следовательно, на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ искомая первообразная представима формулой $y = \frac{1}{2}x^2 + x$. Аналогично, при $x > 1$ нужно подобрать постоянную C_3 так, чтобы при $x = 1$ совпадали значения функций $x^2 + C_3$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + x$. Это дает уравнение $1 + C_3 = \frac{1}{2} + 1$, из которого следует, что $C_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция

$$F(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + \dfrac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

является непрерывной первообразной для подынтегральной функции на всей числовой прямой. Поэтому

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C, & x < 0; \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x + C, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + \dfrac{1}{2} + C, & x > 1. \end{cases}$$

2176. Найти $\int x f''(x)\,\mathrm{d}x$.

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int x f''(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,f'(x) = xf'(x) - \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = xf'(x) - f(x) + C.$$

2177. Найти $\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

Интеграл вычисляется заменой $t = 2x$

$$\int f'(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int f'(t)\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{2}f(t) + C = \frac{1}{2}f(2x) + C.$$

2178. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Заменяя в данном тождестве x на $\sqrt{x}$, получаем соотношение $f'(x) = 1/\sqrt{x}$. Откуда следует, что

$$f(x) = 2\sqrt{x} + C.$$

2179. Найти $f(x)$, если $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

Делая замену $t = \sin^2 x$ и учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t$, получаем тождество $f'(t) = 1 - t$, из которого следует, что

$$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Заменяя обозначение переменной t на x, получаем ответ:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

2180. Найти $f(x)$, если

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ x & \text{при} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

и $f(0) = 0$.

Делая замену $t = \ln x$, получаем

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant 0; \\ e^t & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$f(t)=\begin{cases} t+C_1 & \text{при} \quad t\leqslant 0;\\ e^t+C_2 & \text{при} \quad t>0. \end{cases}$$

Из условия непрерывности при $t=0$ получаем соотношение между постоянными интегрирования $C_1=1+C_2$, а равенство $f(0)=0$ дает значение $C_1=0$. Поэтому $C_2=-1$ и при $t\leqslant 0$ искомая функция определяется равенством $f(t)=t$, а при $t>0$ для $f(t)$ имеем формулу $f(t)=e^t-1$. Заменяя обозначение независимой переменной с t на x, получаем ответ:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad x\leqslant 0;\\ e^x-1 & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$$

2180.1. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция.

Доказать, что если

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C, \tag{1}$$

то

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C. \tag{2}$$

Рассмотреть примеры: а) $f(x)=x^n$ $(n>0)$; б) $f(x)=e^x$; в) $f(x)=\arcsin x$; г) $f(x)=\operatorname{Arth} x$.

Делаем замену переменной:

$$t=f^{-1}(x), \quad x=f(t), \quad \mathrm{d}x=f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

интегрируя по частям и используя (1), получаем

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=\int t\,\mathrm{d}f(t)=tf(t)-\int f(t)\,\mathrm{d}t=$$
$$=tf(t)-F(t)+C=f^{-1}(x)\,x-F(f^{-1}(x))+C,$$

что совпадает с формулой (2).

Рассмотрим примеры.

а) $f(x)=x^n$, $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$, $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=\int x^{1/n}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}+C.$$

Вычисление по формуле (2) дает

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\sqrt[n]{x} - \frac{(\sqrt[n]{x})^{n+1}}{n+1} + C = x^{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{n+1} + C =$$

$$= \frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}} + C = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C.$$

б) $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$, $F(x) = e^x$. Согласно результату задачи 1791:

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C.$$

Вычисление по формуле (2) дает тот же ответ

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x\ln x - \mathrm{e}^{\ln x} + C =$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

в) $f(x) = \arcsin x$, обратная функция $f^{-1}(x) = \sin x$ с областью определения $|x| \leqslant \pi/2$. Согласно решению задачи 1803:

$$F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Интеграл от $f^{-1}(x)$ является табличным:

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

Для вычисления этого интеграла по формуле (2) отметим, что в области определения обратной функции ($|x| \leqslant \pi/2$) величина $\cos x \geqslant 0$ и поэтому $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$. Кроме того, $\arcsin\sin x = x$. Учитывая это, находим

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\sin x - \left(\sin x\cdot\arcsin\sin x + \sqrt{1-\sin^2 x}\right) + C =$$

$$= x\sin x - ((\sin x)x + \cos x) + C = -\cos x + C.$$

г) $f(x) = \mathrm{Arth}\, x$. В настоящее время обозначение Arth вытеснено из пространства имен элементарных функций современной математики. Оно обозначает функцию, обратную к $y = \mathrm{th}\, x$. Таким образом, $f^{-1}(x) = \mathrm{th}\, x$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathrm{Arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(см. решение задачи 9).

Согласно решению задачи 2150 (с данными $a = -1/2$ и $b = 1/2$):

$$\int \mathrm{Arth}\, x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x}\, \mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2} \left(\ln(1-x^2) + x \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + C.$$

Поэтому можно выбрать

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Согласно решению задачи 2120:

$$\int f^{-1}(x)\, \mathrm{d}x = \int \mathrm{th}\, x\, \mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}\, x + C.$$

По формуле (2)

$$\int \mathrm{th}\, x\, \mathrm{d}x = x\, \mathrm{th}\, x - \left(\frac{1}{2} \ln(1-\mathrm{th}^2 x) + \frac{1}{2} \mathrm{th}\, x \ln \frac{1+\mathrm{th}\, x}{1-\mathrm{th}\, x} \right) + C = \\ = x\, \mathrm{th}\, x - \left(\frac{1}{2} \ln(1-\mathrm{th}^2 x) + \mathrm{th}\, x\, \mathrm{Arth}(\mathrm{th}\, x) \right) + C = \\ = x\, \mathrm{th}\, x - \frac{1}{2} \ln(1-\mathrm{th}^2 x) - x\, \mathrm{th}\, x + C = -\frac{1}{2} \ln(1-\mathrm{th}^2 x) + C.$$

Если учесть тождество $1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, то окончательно получим тот же результат:

$$\int \mathrm{th}\, x\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \right) + C = \ln \mathrm{ch}\, x + C.$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Задача 1.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{d} \ln|x| + C.$$

Задача 2.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Задача 3.

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x.$$

Задача 4.

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\, \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

$$= 2\, \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

Задача 5. Из тождества задачи 1 следует, что $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$. Подставляя это выражение для квадрата гиперболического синуса в тождество задачи 2, получаем первое равенство

$$\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$$

Аналогично из тождества задачи 1 выражаем квадрат гиперболического косинуса $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ и подставляем полученное выражение в тождество задачи 2. Это дает второе равенство
$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x.$$

Задача 6. Используя решение задачи 2, получаем
$$1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Аналогично
$$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Задача 7.
$$2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = 2\,\frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}\right) =$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y).$$

Второе равенство выводится аналогично:
$$2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = 2\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}\right) =$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} - \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y).$$

Задача 8. Равенство $y = \operatorname{Arsh} x$ равносильно равенству $\operatorname{sh} y = x$:
$$\frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) = x.$$

Умножая это соотношение на $2e^y$ и полагая $e^y = z$, получаем для z квадратное уравнение $z^2 - 2xz - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим
$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Так как $x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, то величина $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, следовательно, $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Из последнего уравнения окончательно имеем

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Задача 9. Равенство $y = \operatorname{Arth} x$ равносильно равенству $\operatorname{th} y = x$:

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = x.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на e^y и освобождаясь от знаменателя, получаем

$$e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \quad \Longrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Логарифмируя последнее соотношение, находим

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Задача 10. Вычислим производную функции $F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

$$F'(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Это доказывает первую формулу дополнительной таблицы.

Задача 11. При $x > 0$

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Так как подынтегральная функция четна, то нам нужно взять нечетное продолжение функции $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Нетрудно видеть, что таковым является функция $\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}x\,|x|$. Следовательно,

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\,|x| + C.$$

Задача 12. Так как для подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

справедливо разложение

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c},$$

то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)(x-c)} =$$
$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + C\ln|x-c| + \mathrm{const}.$$

Поэтому вся проблема заключается в определении коэффициентов A, B и C. Для определения коэффициента A можно воспользоваться степенной асимптотикой функции $f(x)$ при $x \to a$. С одной стороны, из разложения подынтегральной функции на простейшие дроби следует, что

$$f(x) \sim \frac{A}{x-a}, \quad x \to a.$$

С другой стороны, известно, что если $\varphi(a) \neq 0$, то

$$\frac{\varphi(x)}{x-a} \sim \frac{\varphi(a)}{x-a}, \quad x \to a.$$

Так как $f(x) = \varphi(x)/(x-a)$, где $\varphi(x) = 1/((x-b)(x-c))$, а степенная асимптотика единственна, то

$$A = \varphi(a) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

Аналогичным образом

$$B = \frac{1}{(b-a)(b-c)}, \quad C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Разумеется все эти выкладки можно проделать в уме. Таким образом,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}\ln|x-a| +$$
$$+ \frac{1}{(b-a)(b-c)}\ln|x-b| + \frac{1}{(c-a)(c-b)}\ln|x-c| + C.$$

Для читателя, знакомого с теорией функций комплексного переменного, результат можно получить быстрее. В самом деле, величина A это не что иное, как вычет $f(x)$ при $x = a$. По формуле вычета

$$\operatorname*{res}_{x=a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = \varphi(a),$$

где $\varphi(x) = 1/((x-b)(x-c))$ мы снова получаем ту же формулу для искомого коэффициента A. Остальные коэффициенты вычисляются аналогично.

Задача 13. Воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$\frac{nax^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = (x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}\,)' - \\ - \frac{(2n-1)bx^{n-1}}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{(n-1)cx^{n-2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Интегрируя это тождество, получим равенство

$$naI_n = x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{(2n-1)b}{2} I_{n-1} - (n-1)cI_{n-2},$$

из которого и следует рассматриваемое рекуррентное соотношение.

Задача 14. Дискриминант уравнения равен

$$\left(\frac{2(ca_1 - c_1a)}{ab_1 - a_1b}\right)^2 - 4\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}$$

и его положительность равносильна неравенству

$$4(ca_1 - c_1a)^2 > 4(bc_1 - b_1c)(ab_1 - a_1b).$$

Имеем цепочку равносильных неравенств:

$$4(ca_1)^2 - 8aa_1cc_1 + 4(c_1a)^2 > 4abb_1c_1 - 4a_1c_1b^2 - 4acb_1^2 + 4bca_1b_1,$$

$$4(ca_1)^2 - 8aa_1cc_1 + 4(c_1a)^2 > (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2) + \\ + 4abb_1c_1 + 4bca_1b_1 - 16aa_1cc_1 - (bb_1)^2,$$

$$[4(ca_1)^2 + 8aa_1cc_1 + 4(c_1a)^2] - 4(ca_1 + c_1a)bb_1 + (bb_1)^2 > \\ > (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2),$$

$$[2(ca_1 + c_1a)]^2 - 4(ca_1 + c_1a)bb_1 + (bb_1)^2 > (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2),$$

$$[2(ca_1 + c_1a) - bb_1]^2 > (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2).$$

Так как по условию величина $4a_1c_1 - b_1^2 > 0$, то достаточно доказать последнее неравенство в том случае, когда $4ac - b^2 \geqslant 0$. Тогда $4a_1c_1 > 0$ и $4ac \geqslant 0$. Кроме того, из неравенств $4a_1c_1 > b_1^2$ и $4ac \geqslant b^2$ следует, что $16aa_1cc_1 \geqslant (bb_1)^2$, следовательно,

$$4\sqrt{aa_1cc_1} \geqslant bb_1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическим двух чисел, имеем неравенство

$$2(ca_1 + c_1a) - bb_1 \geqslant 4\sqrt{aa_1cc_1} - bb_1 \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}[2(ca_1 + c_1a) - bb_1]^2 &\geqslant (4\sqrt{aa_1cc_1} - bb_1)^2 = \\ &= (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2) + 4(b\sqrt{a_1c_1} - b_1\sqrt{ac})^2 \geqslant \\ &\geqslant (4ac - b^2)(4a_1c_1 - b_1^2).\end{aligned}$$

Остается установить, что хотя бы в одном из двух последних неравенств имеет место строгое неравенство. В самом деле, если это не так, то с одной стороны, в неравенстве Коши имеет место равенство, и поэтому $ca_1 = c_1a$, а с другой стороны, величина $b\sqrt{a_1c_1} - b_1\sqrt{ac}$ должна быть равна нулю. Первое равенство можно переписать в виде

$$\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1},$$

из которого следует, что

$$c = \frac{ac_1}{a_1}.$$

Подставляя это значение c в равенство $b\sqrt{a_1c_1} = b_1\sqrt{ac}$ получаем (после сокращения на $\sqrt{c_1}$ и умножения на $\sqrt{a_1}$) соотношение $ba_1 = b_1a$ (так как величина $4a_1c_1 - b_1^2 > 0$, то $c_1 \neq 0$). Если отвлечься от очевидного для рассмотрения случая $b_1 = b = 0$, полученное соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Отсюда следует, что тройка чисел a, b, c пропорциональна тройке чисел a_1, b_1, c_1, что противоречит условию задачи.

Задача 15. Используя основное тригонометрическое тождество и интегрируя по частям, получаем

$$I_{\alpha,\beta}=\int\sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x\,dx=\int\sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x(\sin^2x+\cos^2x)\,dx=$$

$$=\int\sin^{\alpha+2}x\cdot\cos^\beta x\,dx+\int\sin^\alpha x\cdot\cos^{\beta+2}x\,dx=$$

$$=-\int\sin^{\alpha+1}x\,d\left(\frac{\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}\right)+I_{\alpha,\,\beta+2}=$$

$$=-\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}+\frac{\alpha+1}{\beta+1}\int\sin^\alpha x\cdot\cos^{\beta+2}x\,dx+I_{\alpha,\,\beta+2}=$$

$$=-\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}+\frac{\alpha+1}{\beta+1}I_{\alpha,\,\beta+2}+I_{\alpha,\,\beta+2}=$$

$$=-\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}+\frac{\alpha+\beta+2}{\beta+1}I_{\alpha,\,\beta+2}.$$

Задача 16. Используя основное тригонометрическое тождество и интегрируя по частям, получаем

$$I_{\alpha,\beta}=\int\sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x\,dx=\int\sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x(\sin^2x+\cos^2x)\,dx=$$

$$=\int\sin^{\alpha+2}x\cdot\cos^\beta x\,dx+\int\sin^\alpha x\cdot\cos^{\beta+2}x\,dx=$$

$$=I_{\alpha+2,\,\beta}+\int\cos^{\beta+1}x\,d\left(\frac{\sin^{\alpha+1}x}{\alpha+1}\right)=$$

$$=I_{\alpha+2,\,\beta}+\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\alpha+1}+\frac{\beta+1}{\alpha+1}\int\sin^{\alpha+2}x\cdot\cos^\beta x\,dx=$$

$$=I_{\alpha+2,\,\beta}+\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\alpha+1}+\frac{\beta+1}{\alpha+1}I_{\alpha+2,\,\beta}=$$

$$=\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\alpha+1}+\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+1}I_{\alpha+2,\,\beta}.$$

Задача 17. Заменяя в первом соотношении β на $\beta-2$, получим, что при $\beta\neq1$

$$I_{\alpha,\,\beta-2}=-\frac{\sin^{\alpha+1}x\cdot\cos^{\beta-1}x}{\beta-1}+\frac{\alpha+\beta}{\beta-1}I_{\alpha,\,\beta}.$$

Выражая отсюда $I_{\alpha,\beta}$, находим (при $\alpha+\beta\neq 0$):

$$I_{\alpha,\beta}=\frac{\sin^{\alpha+1}x\cos^{\beta-1}x}{\alpha+\beta}+\frac{\beta-1}{\alpha+\beta}I_{\alpha,\beta-2}.$$

Если же $\beta=1$, то [illegible] часть рекуррентного соотношения

$$\frac{\sin^{\alpha+1}x}{\alpha+1}+C,$$

а левая часть этого соотношения

$$I_{\alpha,1}=\int\sin^{\alpha}x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin^{\alpha}x\cdot\mathrm{d}\sin x=$$

$$=\int u^{\alpha}\,\mathrm{d}u\,\bigg|_{u=\sin x}=\frac{\sin^{\alpha+1}x}{\alpha+1}+C.$$

Следовательно, рекуррентное соотношение справедливо и при $\beta=1$.

Задача 18. Заменяя во втором соотношении α на $\alpha-2$, получим, что при $\alpha\neq 1$

$$I_{\alpha-2,\beta}=\frac{\sin^{\alpha-1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\alpha-1}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-1}I_{\alpha,\beta}.$$

Выражая отсюда $I_{\alpha,\beta}$, находим (при $\alpha+\beta\neq 0$):

$$I_{\alpha,\beta}=-\frac{\sin^{\alpha-1}x\cdot\cos^{\beta+1}x}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}I_{\alpha-2,\beta}\quad(\alpha+\beta\neq 0).$$

Если же $\alpha=1$, то правая часть рекуррентного соотношения

$$-\frac{\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}+C,$$

а левая часть этого соотношения

$$I_{1,\beta}=\int\sin x\cdot\cos^{\beta}x\,\mathrm{d}x=-\int\cos^{\beta}x\,\mathrm{d}\cos x=$$

$$=-\int u^{\beta}\,\mathrm{d}u\,\bigg|_{u=\cos x}=-\frac{\cos^{\beta+1}x}{\beta+1}+C.$$

Следовательно, рекуррентное соотношение справедливо и при $\beta=1$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1971.
3. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. — М.: Наука, 1979.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981.
5. *Никольский С. М.* Курс математического анализа, Т. 1. М.: Наука, 1973.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2. — М.: Наука, 1969.
7. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн. 1. — М.: Высшая школа, 2000.
8. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1990.
9. Справочное пособие по высшей математике / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Т. 1. — М.: Едиториал, УРСС, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дмитрий Германович ОРЛОВСКИЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРАКТИКУМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Верстальщик *И. А. Макаров*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.2002 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Издательство: тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
pbl@lpbl.spb.ru
print@lpbl.spb.ru

Сдано в набор 15.03.04. Подписано в печать 20.06.05.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать высокая. Усл. п. л. 22,68. Тираж 1500 экз.

Заказ № 3993

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
предоставленных диапозитивов

ЛАНЬ®

ISBN 5-8114-0605-3
9 785811 406050